



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

**Risco e Confiabilidade sobre Estruturas
Combinatórias: Uma Modelagem para
Redes Elétricas**

Cláudio Tadeu Cristino

Tese de Doutorado

Recife
Janeiro de 2008

Cristino, Cláudio Tadeu

Risco e confiabilidade sobre estruturas combinatórias: uma modelagem para redes elétricas / Cláudio Tadeu Cristino. - Recife : O autor, 2008.

xiii, 121 folhas : il., fig. tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Depto. de Matemática, 2008.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Estatística matemática. 2. Combinatória . 3. Probabilidade. 4. Modelagem em redes . 5. Confiabilidade. I. Título.

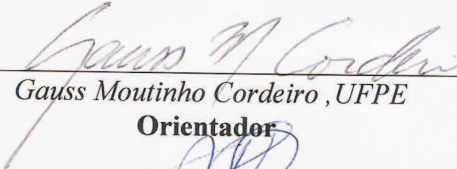
519.9

CDD (22.ed.)

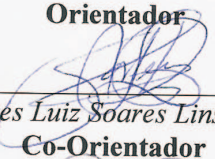
MEI2008-009

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

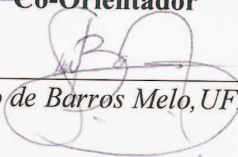
Aprovado:

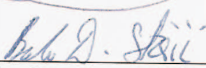

Gauss Moutinho Cordeiro, UFPE

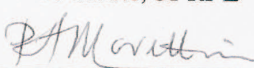
Orientador


Sóstenes Luiz Soares Lins, UFPE

Co-Orientador


Silvio de Barros Melo, UFPE


Borko Stosic, UFRPE


Pedro Alberto Morettin, USP

RISCO E CONFIABILIDADE SOBRE ESTRUTURAS COMBINATÓRIAS: UMA MODELAGEM PARA REDES ELÉTRICAS

por
Cláudio Tadeu Cristino

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Janeiro – 2008

Eduardo (in memoriam), valente como Lampião.
Nathalie, arretada como Maria Bonita.
Denise, sem palavras.

Agradecimentos

“Amigo é coisa de se guardar do lado esquerdo do peito, dentro do coração...”

Milton Nascimento

Espero não me esquecer de ninguém. Mas se esqueci, perdoe-me.

Agradeço,

A Deus, fonte de inteligência e sabedoria.

Aos Professores do Departamento de Matemática, principalmente aos que de maneira direta contribuíram para a minha formação. Aos amigos, Paulo Santiago, Francisco Brito, Cláudio Vidal, Manoel Lemos e Airton Castro. Um agradecimento especial aos professores Fernando Cardoso, Aron Simis, Sérgio Santa Cruz.

Aos queridos funcionários do departamento: Antonio Brandão, Carlos Roberto, Cláudia Bezerra Lira, Creusa Formosina da Silva, Edneide Passos, Jane Souto Maior, Lucas Raposo, Manoel Ronaldo, Fátima Bacelar, Mercês Freitas, Oscar Neto, Raquel Ferreira Estevam e Tânia Maranhão. A Maria Assunção dos Santos, secretária da Área II, A Marcos, da diretoria do CCEN e Valéria Bittencourt, secretária da Pós-Graduação em Estatística, o meu muito obrigado.

Aos amigos do departamento: Éder Matheus, Hélio Porto, Rodrigo Gondim, Adriano Regis, Fábio Santos, Paulo Rabelo, Kalasas, Lúcia Brandão, Ângelo Alberti, Wallison Rosa, Evaneide, Avelita, Aldi, Luiz.

Aos amigos e colegas do Grupo SOSCEGGA-I: Mariz Garces, Prof. Sílvio Melo, Émerson Oliveira, Christian Diego, Lauro Lins.

Aos grandes professores Gauss Moutinho Cordeiro e Sóstenes Luiz Soares Lins, que ultrapassaram as barreiras de orientadores e se tornaram modelo de seres humanos e verdadeiros amigos.

Aos melhores amigos: Ademakson Araújo, César Castilho, Bráulio Maia Júnior, Marcelo Marchesin, Valdenberg Araújo, José Rafael Marques de Oliveira, Daniela Trentin Nava, Fernando Xavier, Lurimar Batista.

A toda minha família, em especial a Antônio e Eurídice, meus pais; Cláudia, Eduardo e Nathalie, meus irmãos; Dina (Maria de Lourdes), Fioca (Efigênia) e Caicai (Maria do Carmo), super-tias; Gordo (Fernando), Mônica, Cássio, Carine, verdadeiros irmãos.

A minhas muitíssimo amadas filhas, Ana Luiza e Izabella.

A minha, também, muito amada esposa, Denise (já disse hoje que te amo?).

Finalmente, à CAPES e à FACEPE pelo apoio financeiro.

Revejo nessa hora tudo que aprendi, memória não morrerá.

—MILTON NASCIMENTO (Sentinela)

Resumo

CONFIABILIDADE DE UM ITEM é a probabilidade deste desempenhar bem suas funções, sob condições específicas. Oposto ao conceito de confiabilidade, tem-se a noção de risco, que é definido com a probabilidade de falha versus o custo associando a tal falha.

Modelos matemáticos são freqüentemente utilizados em projetos de engenharia e na análise de confiabilidade, robustez e vulnerabilidade de tais projetos. Este trabalho tem como principais objetivos a abstração de uma rede elétrica, que é definida como um grafo com pesos nas arestas e vértices, usando-a como ferramenta no estudo de avaliação probabilística de risco, além da indicação de todo ferramental necessário ao primeiro objetivo. São obtidos resultados a respeito de distribuições estatísticas, resultados sobre a definição de funções de probabilidade sobre estruturas combinatórias, definidas como polinômios de Tutte a quatro variáveis e resultados computacionais a partir de simulações sobre redes elétricas reais.

Palavras-chave: Confiabilidade; distribuição de probabilidade; grafos; matróides; modelagem matemática; percolação; polinômio de Tutte; risco em sistemas; taxa de falha.

Abstract

RELIABILITY OF AN COMPONENT is the probability that it perform its functions under specific conditions. Unlike the concept of reliability is the concept of risk, which is defined as the probability of failure versus the cost associating with such failure.

Mathematical models are often used in engineering projects and the analysis of reliability, robustness and vulnerability of such projects. This work has as main objectives the abstraction of an electrical network, which is defined as a graph with weights on the edges and corners, using it as a tool in the study of probabilistic risk assessment, in addition to the indication of all tooling necessary to the first goal. Results are obtained in respect of distributions statistics, results on the definition of functions of probability on combinatorial structures, defined as polynomials of Tutte to four variables and computational results from simulations on actual electrical networks.

Keywords: Graphs; hazard rate; reliability; mathematical modeling; matroids; systems risk; percolation; probability distribution; Tutte polynomial.

Sumário

1	Introdução	1
2	Distribuições, Modelagem Probabilística	4
2.1	Definições Preliminares e Notação	4
2.2	Beta distribuições	5
2.3	Momentos da k -ésima estatística de ordem da distribuição gama	6
2.4	Momentos de pares de estatísticas de ordem gama	8
2.5	Equação para a moda da k -ésima estatística de ordem gama	9
2.6	Distribuições de Amoroso e gama generalizada	10
2.7	Matriz de informação da distribuição gama generalizada	12
2.7.1	Casos especiais da distribuição gama generalizada	14
3	Percolação e Polinômio de Tutte	16
3.1	Matróides e Grafos	16
3.2	O polinômio de Tutte para matróides	19
3.3	Uma equação para matróide	20
3.4	O modelo de percolação para clutters	23
3.5	Sobre a (não-)extensão do polinômio de Tutte	25
3.6	Confiabilidade e Percolação	27
3.7	O modelo de percolação para grafos	30
3.8	Aplicações em Mecânica Estatística	33
4	Modelagem de Redes Elétricas	35
4.1	O grafo de isolamento	36
4.2	Funções usadas em confiabilidade	37
4.2.1	Modelo de Poisson	38
4.2.2	Modelo exponencial	38
4.2.3	Modelo de Weibull	39
4.2.4	Modelo de Gumbel	40
4.2.5	Modelo gama	40
4.2.6	Modelos beta-exponencial e beta-Weibull	41
4.3	Aproximação assintótica de distribuições	41
4.3.1	Combinação de variáveis aleatórias	42
4.3.2	Funções algébricas de variáveis aleatórias	42
4.3.3	Soma aleatória de variáveis aleatórias	43
4.3.4	Conversão de momentos	44

4.3.5	Método de Pearson para aproximação de distribuições	45
4.4	O mínimo de variáveis aleatórias : o caso exponencial	45
4.4.1	Soma de exponenciais	50
4.4.2	Soma aleatória de variáveis aleatórias	51
4.5	Confiabilidade em digrafos estocásticos	51
4.5.1	Decomposição de digrafos	54
4.5.2	Limites para confiabilidade	54
4.6	Computação das probabilidades via polinômio de Tutte	59
5	Aplicação a Redes Elétricas Reais	60
5.1	Enumeração de estados	61
5.2	Simulação de Monte Carlo	63
5.3	Funções usadas na análise do sistema	64
5.3.1	Duração de interrupção de pontos de carga	65
5.3.2	Indisponibilidade anual de um ponto de carga	66
5.3.3	Índice de frequência média de interrupção de serviço	66
5.3.4	Índice de duração média de interrupção de serviço	67
5.4	Definição de Risco	68
5.5	Risco sobre caminhos	69
5.6	Avaliação do Risco de um Sistema	70
5.6.1	Implicantes primos	72
5.6.2	Outros modelos de simulação: minimal cutsets e implicantes primos	73
5.6.2.1	Minimal Cutsets	73
5.6.2.2	Teoremas de Decomposição	73
5.6.2.3	Diagramas binários de decisão	74
5.6.3	Modelagem de Atribuição de Risco usando BDD	76
5.6.4	Simulação de cenários futuros	76
5.6.5	Autômato e Histórico de Falhas	77
5.6.6	Aplicação a sistemas reais	80
5.6.6.1	Explanação da técnica aplicada	81
5.7	Modelagem probabilística dos cenários	84
5.8	Modelagem do tempo de funcionamento de um transformador	87
5.8.1	Modelo com taxa de falha não-constante	94
6	Conclusões e Considerações Finais	101
A	Família de distribuições de Pearson	102
B	Tempo funcionamento de transformadores	104
C	Código para estudo de risco em redes elétricas	106
	Referências Bibliográficas	116

Lista de Figuras

1.1	<i>Digrama unifilar de parte de um sistema elétrico.</i>	2
1.2	<i>Outro diagrama de parte de uma rede elétrica. G - geradores, T - transformadores, D - disjuntores, B - barramentos, L - linhas de transmissão.</i>	2
2.1	<i>Distribuição de Amoroso, exemplo. Parâmetros $v = 0$, $\alpha = 1.225$, $\beta = 1.55$ e $\theta = 1.75$.</i>	11
4.1	<i>Construindo o grafo de isolamento.</i>	36
5.1	<i>Diagrama contendo parte de uma rede elétrica. Subestação Recife II, CHESF.</i>	62
5.2	<i>Árvore de decisão e BDD para $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge c)$.</i>	75
5.3	<i>Exemplo de grafo de falha com quatro estados possíveis.</i>	78
5.4	<i>Exemplo de linha de tempo.</i>	78
5.5	<i>Linha de tempo dos geradores das usinas da CHESF.</i>	82
5.6	<i>Linha de tempo dos geradores.</i>	84
5.7	<i>Grafo de estados do gerador $k = 1, 2, 3$.</i>	85
5.8	<i>Construção da linha de tempo da Usina.</i>	85
5.9	<i>Grafo de falhas da usina, relativo a subconjuntos de geradores parados.</i>	85
5.10	<i>Transformação do grafo da rede elétrica.</i>	85
5.11	<i>Box plot para a variável resposta tempo.</i>	86
5.12	<i>Box plots da variável resposta tempo pelos fatores espécie, enrolam e tipo.</i>	88

5.13	<i>Box Plot para a variável explicativa pot.</i>	88
5.14	<i>Resíduos de Anscombe versus médias ajustadas.</i>	90
5.15	<i>Valores observados versus valores ajustados.</i>	90
5.16	<i>Gráfico de z versus $\hat{\eta}$.</i>	91
5.17	<i>Resíduos de Anscombe ordenados versus os quantis da distribuição $N(0, 1)$.</i>	92
5.18	<i>Estatística de Cook versus o índice das observações.</i>	92
5.19	<i>Curva de confiabilidade dos equipamentos monofásicos.</i>	93
5.20	<i>Curva de confiabilidade dos equipamentos trifásicos.</i>	94
5.21	<i>Resíduos de Anscombe versus médias ajustadas.</i>	96
5.22	<i>Valores observados versus valores ajustados.</i>	97
5.23	<i>Resíduos de Anscombe ordenados versus os quantis da distribuição $N(0, 1)$.</i>	97
5.24	<i>Curva de confiabilidade dos equipamentos monofásicos.</i>	99
5.25	<i>Curva de confiabilidade dos equipamentos trifásicos.</i>	100

Lista de Tabelas

5.1	<i>Algoritmo para o grafo de estados.</i>	78
5.2	<i>Estatísticas para Gerador UAS-01</i>	80
5.3	<i>Taxa de transição dos diversos estados para Gerador:UAS-01, Usina Apolônio Sales.</i>	83
5.4	<i>Probabilidades dos diversos estados.</i>	84
5.5	<i>Confiabilidade dos transformadores monofásicos.</i>	93
5.6	<i>Curva de confiabilidade dos transformadores trifásicos.</i>	94
5.7	<i>Confiabilidade dos transformadores monofásicos.</i>	98
5.8	<i>Confiabilidade dos transformadores trifásicos.</i>	99
B.1	<i>Dados de Tempos de Funcionamento de Transformadores.</i>	104

CAPÍTULO 1

Introdução

Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

A MODELAGEM DE SISTEMAS REAIS que indicam todos os parâmetros de funcionamento de uma determinada entidade, equipamento ou sistema, bem como, a previsibilidade de falhas ou insucessos de atuação é trabalho de difícil realização, mas que é justificado pela maneira precisa e, por vezes rápida, de respostas que visam a melhoria de operações ou mitigação de danos conseqüentes de eventos que, comumente, são chamados de acidentes.

A primeira parte de qualquer modelagem é a descrição precisa (às vezes, concisa) da realidade que cabe em parte aos especialistas da área estudada. A motivação desta etapa, indica os caminhos da abstração para modelos matemáticos.

Neste trabalho, a motivação inicial corresponde às respostas de questões reais: como estudar grandes acidentes que possam ocorrer em um sistema de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica? Qual é o risco de tais acidentes e como atribuir tais riscos a cada componente de maneira sistemática e significativa?

Partiu-se para a abstração do sistema elétrico, utilizado-se de maneira natural um grafo dirigido sobre o qual define-se um fluxo (de carga). Cada vértice deste grafo corresponde a um componente do sistema. As arestas podem ser vistas como ligações físicas ou lógicas entre os componentes. Vértices (componentes) especiais são definidos como *vértices ativos* que possuem a propriedade, através de uma *função liga-desliga*, de interromper o fluxo. No sistema original, estes vértices representam componentes de proteção do sistema, representados por disjuntores.

De várias maneiras, será definida a probabilidade de falha de um equipamento, interpretada como uma anormalidade de funcionamento e que é origem de um acidente no sistema.

Por exemplo, considere a rede (fragmento) dada pelo diagrama unifilar da Figura 1.1. A Figura 1.2 apresenta um outro diagrama representativo de parte de uma rede elétrica. Os vários equipamentos podem, então ser considerados como vértices de um grafo, incluindo as linhas de transmissão.

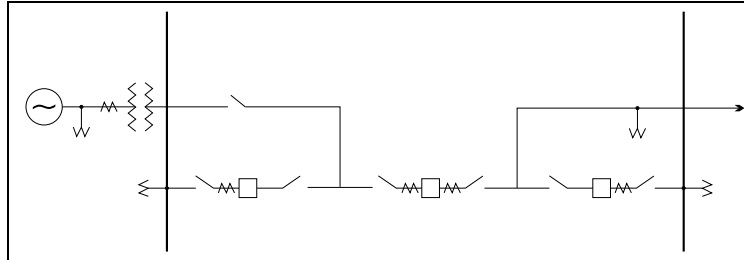


Figura 1.1 Diagrama unifilar de parte de um sistema elétrico.

A idéia é se estudar o risco associado a cada equipamento em termos de *probabilidade de falha* $\times$ *custo resultante desta falha*.

Várias técnicas são utilizadas em engenharia e em matemática aplicada ao risco nas respostas de tais estudos, como por exemplo, PRA, sigla em inglês de *Probabilistic Risk Assessment*, ou *avaliação probabilística de risco*, método que atribui um modelo markoviano de funcionamento de um sistema e estuda as diversas permutações entre os *estados* do mesmo, ou seja, da passagem de uma configuração de equipamentos em funcionamento para outra, na qual haja situações indesejadas.

No Capítulo 2, a despeito da modelagem acima indicada, serão apresentados resultados teóricos em probabilidade, que têm por objetivo fixar a notação subsequente e indicar importantes aspectos úteis à modelagem. Neste capítulo, também, estão apresentadas algumas generalizações de funções de distribuição, a saber, as famílias de distribuições *beta*, *de Amoroso* e *exponencial generalizada*. Ambas são atualmente utilizadas na modelagem de diversos aspectos de sistemas para casos especiais de parâmetros.

No Capítulo 3, haverá de uma rápida explanação sobre matróides, objetos combinatórios que também podem ser utilizados na modelagem de sistemas, apesar de serem uma generalização de grafos. A apresentação do *Polinômio de Tutte* é feita neste capítulo. Tal polinômio

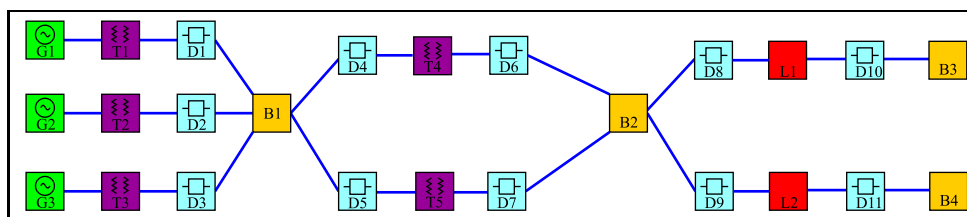


Figura 1.2 Outro diagrama de parte de uma rede elétrica. G - geradores, T - transformadores, D - disjuntores, B - barramentos, L - linhas de transmissão.

é uma função definida sobre a classe de matróides cujos resultados de existência e unicidade foram dados por Brylawski [Bry72]. A partir do polinômio de Tutte pode-se definir uma *percolação* sobre a matróide, ou seja, um par (M, P) , em que M é uma matróide e P é uma função de probabilidade definida sobre os elementos de $E(M)$ de serem removidos, ou, equivalentemente, a probabilidade de que uma submatróide aleatória de M tenha posto cheio. Também, é apresentada um pequeno resultado sobre percolação e física-estatística.

No Capítulo 4, define-se abstratamente a rede elétrica e de falha de seus componentes. Também, são apresentadas técnicas de avaliação de função de distribuição de probabilidades sobre tais componentes em relação às suas falhas. Encerrando o capítulo, é apresentado um modelo de estudo de confiabilidade em grafos estocásticos, neste caso, sobre digrafos finitos, fracamente conexos, acíclicos, com um único vértice-base (fonte), s e com t , único sorvedouro.

A modelagem real de um sistema elétrico através de grafos especiais é apresentada no Capítulo 5. Neste capítulo, tornam-se concretas as idéias apresentadas e indicam-se os resultados no estudo de risco de sistema elétricos reais em dois casos particulares, o estudo de geradores e transformadores da CHESF - Companhia Hidro Elétrica do São Francisco. Também neste capítulo estão propostos índices de confiabilidade em sistemas que podem ser avaliados a partir de técnicas apresentadas em capítulos anteriores.

Distribuições, Modelagem Probabilística

NESTE PRIMEIRO CAPÍTULO estarão apresentados vários resultados sobre funções de distribuições de determinadas variáveis aleatórias que, também, serão úteis na fixação de notação. O estudo de generalizações das diversas distribuições é uma importante vertente no estudos de Probabilidade, pois visa uma maior compreensão e modelagem de diversos fenômenos e processos reais.

2.1 Definições Preliminares e Notação

Seja X uma variável aleatória contínua definida em $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, um espaço de probabilidade (Ω é um conjunto, $\mathcal{F}$ uma σ -álgebra sobre Ω e $\Pr$ uma função de probabilidade). O *valor esperado* (ou *esperança*) de X é definido por

$$\mathbb{E}\langle X \rangle = \int X d\Pr = \int_{\Omega} X(\omega) \Pr(d\omega),$$

no caso em que a integral esteja definida.

Se X tem função densidade de probabilidade f e h é uma função real, então

$$\mathbb{E}\langle h(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx,$$

obtida por simples mudança de variável.

Define-se, ainda os *momentos absolutos* de X por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle |X|^k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots$, em que F é função de distribuição acumulada de X . Para k finito, o *k-ésimo momento* para X é dado por

$$\mu'_k = \mathbb{E}\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

Seja X uma variável aleatória integrável. O k -ésimo momento central de X , μ_k , é definido como o k -ésimo momento em torno da média, ou seja, $\mu_k = \mathbb{E}\langle(X - \mathbb{E}\langle X \rangle)^k\rangle$. O primeiro momento central é nulo: $\mathbb{E}\langle X - \mathbb{E}\langle X \rangle \rangle = 0$. O segundo momento central é chamado *variância* de X , $\text{Var}(X)$, é

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}\langle(X - \mathbb{E}\langle X \rangle)^2\rangle \\ &= \mathbb{E}\langle X^2 \rangle - (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2.\end{aligned}$$

2.2 Beta distribuições

Ao descrever a incerteza de uma variável contínua, usa-se o conceito de *função densidade de probabilidade* (fdp) definida em intervalos da reta real, onde eventos possíveis estão associados a probabilidades. No caso discreto, a incerteza é modelada por uma função chamada de função de probabilidade.

Seja Y uma variável aleatória contínua não-negativa que expressa o tempo de vida de certa entidade. A fdp $f(y)$ de Y é a função matemática mais importante na análise de tempos de vida dessas entidades. A partir de $f(y)$, pode-se deduzir outras funções de interesse como a função de confiabilidade, a função de risco, a função de risco acumulada, etc. Na análise de confiabilidade, as principais distribuições estudadas são: exponencial, Weibull, Gumbel e gama, e cada uma delas tem uma forma $f(y)$ pré-definida que depende de parâmetros desconhecidos. Atualmente, trabalha-se com classes generalizadas de distribuições ([ELF02, CSS07, GN04, NK04, NK06]), denominadas beta-exponencial, beta-Weibull, beta-Gumbel e beta-gama, que são deduzidas da função de distribuição acumulada de uma distribuição conhecida $F(y)$ através da seguinte equação:

$$G(y) = I_{F(y)}(a, b) = \frac{B_{F(y)}(a, b)}{B(a, b)}, \quad (2.1)$$

em que $I_{F(y)}$ é a função razão da beta incompleta, a e b são parâmetros reais positivos e

$$\begin{aligned}B_y(a, b) &= \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= y^a \left[\frac{1}{a} + \frac{1-b}{1+a} y + \dots + \frac{(1-b) \cdots (n-b)}{n!(a+n)} y^n + \dots \right],\end{aligned} \quad (2.2)$$

além de $B(a, b) \equiv B_1(a, b)$.

O objetivo do trabalho com tais classes de distribuições, oriundas da equação (2.1), é encontrar modelos probabilísticos com um maior número de parâmetros que melhor se ajustem aos tempos de funcionamento de um equipamento até que este falhe pela primeira vez.

A *função de distribuição acumulada* (fda) mede a probabilidade de Y assumir valores inferiores ou iguais a y , ou seja, $F(y) = P(Y \leq y)$. Assim, $F(y)$ mede a probabilidade acumulada da entidade falhar antes de um tempo y especificado. Esta função, também, é chamada de função de insegurança. A função de confiabilidade $R(y)$ desta entidade é expressa por $R(y) = P(Y \geq y) = 1 - F(y)$, $y \geq 0$, e representa a probabilidade dela falhar após um tempo y . A função $R(y)$ é deduzida da fdp $f(y)$. Outra função que pode ser deduzida da fdp é aquela que representa a *função de risco* (taxa de falha) em função do tempo. A função de risco de uma entidade expressa a frequência de falhas de forma instantânea baseada na sua idade acumulada. A função de risco é definida por $h(y) = f(y)/R(y)$ e, portanto, iguala ao quociente entre a fdp e a função de confiabilidade, sendo sua unidade “falhas por unidade de tempo”. A função de risco determina, então, o número de falhas por unidade de tempo. Ela só é constante para a distribuição exponencial. Na maioria dos casos, a função de risco varia no tempo, como são os casos das distribuições de Weibull e gama.

Uma forma simples de modelar a função de risco foi desenvolvida por Cox [Cox72], ao definir uma função paramétrica de risco

$$h(y; \mathbf{x}) = h_0(y) \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}), \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ de variáveis explicativas conhecidas, $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos e $h_0(y)$ é uma função desconhecida representando o risco temporalmente para $\mathbf{x} = 0$. Na prática, dada uma função de risco $h(y; \mathbf{x})$ associada a um modelo probabilístico para ser ajustado a um conjunto de tempos de falha $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, e dados valores da matriz modelo associada ($n \times p$), $\mathbf{x}$, de variáveis explicativas $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$, estima-se usualmente o vetor $\boldsymbol{\beta}$ pelo método de máxima verossimilhança. A estimativa de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\beta}$ independe de $h_0(y)$ e, geralmente, é obtida por algoritmos iterativos.

2.3 Momentos da k -ésima estatística de ordem da distribuição gama

Em seções futuras, serão utilizadas técnicas de avaliação de risco e atribuição de confiabilidade de sistemas que podem ser modelados por estruturas combinatórias, tais como grafos. Dentre elas está a aproximação assintótica das funções de distribuição cujas entradas são variáveis aleatórias com função de distribuição conhecida. Nesta seção serão apresentados resultados sobre a obtenção de momentos da k -ésima estatística de ordem gama, modelo de distribuição que pode ser utilizado na descrição de variáveis aleatórias associadas ao comportamento de componentes de um sistema elétrico ou físico.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com função de densidade de probabilidade (fdp) gama com um único parâmetro dada por

$$g(y; \theta) = \frac{y^{\theta-1} e^{-y}}{\Gamma(\theta)}, \quad \theta > 0, y > 0 \quad (2.4)$$

e a função de distribuição acumulada (fda) dada por

$$G(y; \theta) = \int_0^y g(u; \theta) du = e^{-y} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{\theta+i}}{\Gamma(\theta+i+1)}, \quad \theta > 0, y > 0 \quad (2.5)$$

e ambas são iguais a zero para $y \leq 0$. Deve-se notar que $G(y; \theta)$, também, pode ser escrita como $g(y; \theta+1)M(1, \theta+1; y)$, em que $M(a, b; y)$ é a função confluyente hiper-geométrica definida por

$$M(a, b; y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(b)}{\Gamma(b+i)\Gamma(a)} \frac{y^i}{\Gamma(i+1)}. \quad (2.6)$$

Denote por $Y_{k,n}$ a k -ésima ($1 \leq k \leq n$) estatística de ordem quando as variáveis Y 's estão arranjadas em uma ordem ascendente, a saber, $Y_{1,n} \leq Y_{2,n} \leq \dots \leq Y_{n,n}$.

A função de distribuição acumulada da r -ésima estatística de ordem da distribuição gama é dada por

$$\begin{aligned} G_r(y; \theta) &= \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} G^i(y; \theta) [1 - G(y; \theta)]^{n-i} \\ &= I_{G(y; \theta)}(r, n-r+1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que, novamente, $I_{G(y; \theta)}$ é a função razão da beta incompleta.

O r -ésimo ($r = 1, 2, \dots$) momento a respeito da origem $\mu'_r(k, n)$ da k -ésima estatística de ordem $X_{k,n}$ a partir de n variáveis aleatórias independentes gama cada uma com fdp (2.4) é calculada a partir da definição utilizando (2.7) e é dada por

$$\mu'_r(k, n) = \frac{C(k, n)}{\Gamma(\theta)} \int_0^{\infty} \left[e^{-v} v^{\theta} \sum_{i=0}^{\infty} A_i v^i \right]^{k-1} \left[1 - e^{-v} v^{\theta} \sum_{i=0}^{\infty} A_i v^i \right]^{n-k} e^{-v} v^{\theta+r-1} dv, \quad (2.8)$$

em que $C(k, n) = n!/(k-1)!(n-k)!$ e $A_i = 1/\Gamma(\theta+i+1)$.

Após simplificação, obtém-se,

$$\mu'_r(k, n) = \frac{C(k, n)}{\Gamma(\theta)} \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{n-k} \left\{ (-1)^m \binom{n-k}{m} e^{-(k+m)v} v^{\theta(k+m)+r-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(k+m-1)} v^i \right) \right\} dv, \quad (2.9)$$

em que $A_i^m = \sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}$, a soma estendendo sobre os inteiros não-negativos $i_1, i_2, \dots, i_m$ tais que $i_1 + i_2 + \dots + i_m = i$. A integração termo por termo de (2.9), que é permitido, produz

$$\mu'_r(k, n) = \frac{C(k, n)}{\Gamma(\theta)} \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m \binom{n-k}{m} \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(k+m-1)} \frac{\Gamma(k\theta + m\theta + i + r)}{(k+m)^{k\theta + m\theta + i + r}}. \quad (2.10)$$

Para $k = n$, tem-se de (2.10),

$$\mu'_r(n, n) = \frac{n}{\Gamma(\theta)} \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(n-1)} \frac{\Gamma(n\theta + i + r)}{n^{n\theta + i + r}}. \quad (2.11)$$

As expressões de $\mu'(1, n)$ e μ'_n são importantes para modelar tempos mínimo e máximo de sobrevida de equipamentos idênticos de um setor elétrico com n equipamentos.

2.4 Momentos de pares de estatísticas de ordem gama

Sejam $U = X_{j,n}$ e $V = X_{k,n}$ a j -ésima e a k -ésima ($1 \leq j < k \leq n$) estatísticas de ordem a partir de n variáveis aleatórias independentes gama cada uma com fdp dada por 2.4. Então, para $r, s = 1, 2, \dots$, tem-se a fórmula do momento cruzado (s, r) de (U, V) , que, por definição, é dada pela integral

$$\mathbb{E}\langle U^s V^r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^s v^r G_{sr}(U, V) du dv,$$

em que $G_{sr}(U, V)$ é a distribuição conjunta de U^s e V^r . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle U^s V^r \rangle &= C'(j, k, n) \iint_{0 < u < v < \infty} u^s v^r G^{j-1}(u; \theta) [G(v; \theta) - G(u; \theta)]^{k-j-1} \\ &\quad \times [1 - G(v; \theta)]^{n-k} g(u; \theta) g(v; \theta) du dv, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que $C'(j, k, n) = n!/(j-1)!(k-j-1)!(n-k)!$. O membro à direita de (2.12) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle U^s V^r \rangle &= C'(j, k, n) \sum_{a=0}^{k-j-1} \sum_{b=0}^{n-k} (-1)^{n-j-a-b-1} \binom{k-j-1}{a} \binom{n-k}{b} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} u^s G^{k-a-2}(u; \theta) g(u; \theta) \left\{ \int_u^{\infty} v^r G^{n-k-b+a}(v; \theta) g(v; \theta) dv \right\} du. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com $A^{(m)}$ como definido na seção anterior, finalmente obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle U^s V^r \rangle &= \frac{C'(j, k, n)}{[\Gamma(\theta)]^2} \sum_{a,b,c,d} (-1)^{n-j-a-b-1} \binom{k-j-1}{a} \binom{n-k}{b} A_c^{(k-a-2)} \\ &\quad \times A_d^{(n-k-b+a)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)}{(k-a-1)^\gamma} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{p+\alpha}}{\Gamma(p+\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+\delta)}{(n-n)^{p+\delta}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que $\alpha = r + d + \theta(n - k - b + a + 1)$, $\beta = n - k - b + a + 1$, $\gamma = s + c + \theta(k - a - 1)$ e $\delta = s + r + c + d + \theta(n - b)$ e o primeiro somatório do lado direito é sobre os inteiros não-negativos a, b, c, d com a indo de 0 a $k - j - 1$, b de 0 a $n - k$, c de 0 a ∞ e d de 0 a ∞ .

A equação (2.14) é importante para se determinar momentos cruzados de tempos de sobrevivência de equipamentos funcionalmente dependentes.

2.5 Equação para a moda da k -ésima estatística de ordem gama

O valor modal da k -ésima estatística de ordem a partir das n variáveis gama com fdp $g(x; \theta)$ pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[e^{nx} x^{\theta-1} q^{k-1}(x; \theta) \{e^x - q(x; \theta)\}^{n-k} \right] = 0, \quad (2.15)$$

em que

$$q(x; \theta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{\theta+i}}{\Gamma(\theta+i+1)}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.16)$$

e $q(x; \theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x; \theta) = q(x, \theta - 1). \quad (2.17)$$

A equação (2.15), após simplificação, torna-se

$$(nx + \theta - 1)q(x; \theta)\{e^x - q(x; \theta)\} + (k-1)xq(x; \theta - 1)\{e^x - q(x; \theta)\} + (n-k)xq(x; \theta)\{e^x - q(x; \theta - 1)\} = 0. \quad (2.18)$$

Finalmente, o valor modal x pode ser obtido com uma solução de

$$(\theta - 1 - x)q(x; \theta)\{e^x - q(x; \theta)\} = \frac{x^\theta}{\Gamma(\theta)} [(n-k)q(x; \theta) - (k-1)\{e^x - q(x; \theta)\}]. \quad (2.19)$$

Para casos especiais $k = 1$ e $k = n$, os valores modais são, respectivamente, dados por

$$1 - e^{-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{\theta+i}}{\Gamma(\theta+i+1)} = \frac{x^\theta e^{-x}}{\Gamma(\theta)} \cdot \frac{(n-1)}{(\theta-1-x)} \quad (2.20)$$

e

$$e^{-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{\theta+i}}{\Gamma(\theta+i+1)} + \frac{x^\theta e^{-x}}{\Gamma(\theta)} \cdot \frac{(n-1)}{(\theta-1-x)} = 0. \quad (2.21)$$

Para $\theta = 1$, a distribuição gama reduz-se à distribuição exponencial e (2.19) dá a moda da k -ésima estatística de ordem explicitamente como

$$x = \log_e n - \log_e(n - k + 1), \quad (2.22)$$

que é a equação (4.8) de Gupta [Gup60].

Para o caso especial em que o parâmetro gama é um inteiro positivo, a função densidade de probabilidade gama pode ser expressa com a cauda de uma distribuição de Poisson. Usando este fato para o caso do parâmetro gama de valor inteiro positivo, Gupta [Gup60] obteve resultados semelhantes aos das Seções 2.2, 2.3 e 2.4. O mesmo artigo, também, trata um problema de estimação, discute algumas aplicações e dá um conjunto de tabelas de momentos, valores modais e pontos percentuais de alguma estatísticas de ordem gama.

Quando θ é um inteiro positivo, os momentos de estatísticas de ordem gama são computadas em [Gup60] usando uma solução de séries semelhante a (2.10). Breiter e Krishnaiah [BK67] computaram alguns destes momentos com precisão de três casas decimais usando a fórmula da quadratura de Gauss-Laguerre. Seus valores coincidem com os valores de Gupta [Gup60]. Assim, ambas as soluções de séries e a fórmula da quadratura de Gauss-Laguerre não podem ser dadas por resultados mais precisos, pois as derivadas do integrando, excluindo a função peso e^{-v} em (2.8) não necessariamente existem na origem. Nestas situações, a solução de séries dada por (2.10) fornece a precisão desejada se forem tomados termos suficientes.

2.6 Distribuições de Amoroso e gama generalizada

Outra importante generalização de várias famílias de distribuições é a *distribuição de Amoroso* [Amo25, JKB94], que não é sequer mencionada na análise de tempos de falhas de equipamentos. Tal distribuição é contínua, univariada e unimodal com imagem na semi-reta positiva. Esta distribuição possui quatro parâmetros: um parâmetro de localização v , um parâmetro de escala θ e dois parâmetros de forma α e β e é dada por:

$$AM(y; v, \theta, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{\beta}{\theta} \right| \left(\frac{y-v}{\theta} \right)^{\alpha\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{y-v}{\theta} \right)^{\beta} \right], \quad (2.23)$$

em que $-\infty \leq v, \theta, \beta \leq +\infty$, $\alpha > 0$. Além disso, $y \geq v$, se $\theta > 0$ e $y \leq v$, se $\theta < 0$.

Seguem algumas propriedades imediatas da distribuição de Amoroso.

Proposição 2.1. *Para a distribuição de Amoroso, tem-se:*

$$(A1). \quad \mathbb{E} \left\langle \left(\frac{Y-v}{\theta} \right)^n \right\rangle = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{n}{\beta})}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$(A2). \quad \text{Média}, E(Y) = v + \theta \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{\beta})}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$(A3). \quad \text{Var}(Y) = \theta^2 \left[\frac{\Gamma(\alpha + \frac{2}{\beta})}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{\beta})^2}{\Gamma(\alpha)^2} \right].$$

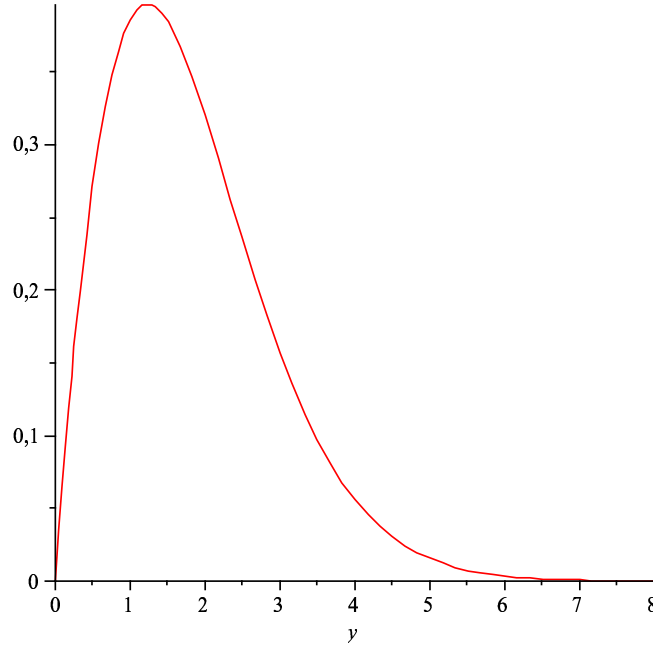


Figura 2.1 Distribuição de Amoroso, exemplo. Parâmetros $\nu = 0$, $\alpha = 1.225$, $\beta = 1.55$ e $\theta = 1.75$.

(A4). Entropia, $H\langle Y \rangle = \log \frac{\theta \Gamma(\alpha)}{\beta} + \alpha + \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \psi(\alpha)$, em que $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \log \Gamma(\alpha)$. $\square$

A demonstração dos fatos dados pela proposição acima segue por cálculo direto.

Varias formas de distribuições são casos especiais da distribuição acima. Um caso de interesse para este trabalho é quando o parâmetro de localização, ν , é nulo. Neste caso, a função de distribuição pode ser utilizada na modelagem de funcionamento e falhas de equipamentos ou modelos de primeira falha de um sistema. Além disso, os demais parâmetros, α , β e θ , são positivos, implicando que $y > 0$.

Especificamente, considere $AM(y; 0, \theta, \alpha, \beta)$. Tem-se que

$$AM(y; 0, \cdot, \cdot, \cdot) = \frac{\beta}{\theta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{y}{\theta}\right)^\beta \right]. \quad (2.24)$$

A expressão do lado direito da equação acima é exatamente a distribuição gama generalizada [GK99], com parâmetros θ , α e β , denotada por $GG(\theta, \alpha, \beta)$.

2.7 Matriz de informação da distribuição gama generalizada

Nesta seção, será apresentada a matriz de informação da distribuição gama generalizada com três parâmetros, $GG(y; \theta, \alpha, \beta)$. Tal matriz é calculada com o intuito de se medir o quanto de informação um conjunto de dados fornece sobre os parâmetros em uma família paramétrica com certas condições de regularidade e suavidade [Sch95]: suponha que Θ seja um espaço p -dimensional de parâmetros e que $f(y; \theta) = f_{Y; \Theta}(y; \theta)$ seja a função densidade de probabilidade de Y para uma medida ν . As condições de regularidade são dadas por

1. As derivadas parciais $\partial f(y; \theta) / \partial \theta_i$ existem para todo θ e para cada i , a menos para $y \in M$ e $\nu(M) = 0$.
2. $\int f(y; \theta) \nu(y)$ pode ser diferenciável sobre o sinal de integração com respeito a cada coordenada de θ .
3. O conjunto $C = \{y : f(y; \theta) > 0\}$ é o mesmo para todo θ .

Os itens acima são comumente chamados de *condições de regularidade de Informação de Fisher*.

Se $y_1, \dots, y_n$ são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e independentes, cada qual com fdp $f(y_i; \theta)$, sendo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, denota-se por $l(\theta)$ a log-verossimilhança para o multi-parâmetro θ , definido como

$$l(\theta) = \log f(y; \theta).$$

São consideradas as condições de regularidade da informação de Fisher, acima, para o comportamento da log-verossimilhança total

$$\sum_{i=1}^n \log f(y_i; \theta), \quad (2.25)$$

com respeito a todas as derivadas de θ , incluindo até aquelas de quarta ordem. Denota-se, ainda, por $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança de θ , que é obtido pela maximização de (2.25).

A fim de se computar a correção do viés de $\hat{\theta}$, procede-se o seguinte roteiro [SC07]:

1. Obtém-se a matriz de informação da distribuição, $K_{\theta\theta}$ para θ , como:

$$K_{\theta\theta} = \left(-\kappa_{rs} \right)_{1 \leq r, s \leq n}$$

em que $\kappa_{rs} = \mathbb{E}\langle U_{rs} \rangle$ são os cumulantes das derivadas da log-verossimilhança

$$U_{rs} = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_r \partial \theta_s}.$$

Os elemento de $K_{\theta\theta}^{-1}$ são denotados por $(-\kappa^{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$.

2. Seja $B(\hat{\theta}_i)$ o n^{-1} viés da estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_i$ para $i = 1, \dots, p$, dado por

$$B(\hat{\theta}_i) = n^{-1} \sum_{\theta} \kappa^{ir} \kappa^{st} \left(\kappa_{st}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{stu} \right),$$

em que $\kappa_{st}^{(u)} = \partial \kappa_{st} / \partial \theta_u$ e $\kappa_{stu} = \mathbb{E}\langle U_s T_t U_u \rangle$. O somatório acima é tomado para todos os índices r, s e t variando para todos os parâmetros em θ .

3. Os estimadores de máxima verossimilhança corrigidos são definidos como $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \hat{B}(\hat{\theta}_i)$ para $i = 1, \dots, p$, em que $\hat{B}(\cdot)$ denota o valor de $B(\cdot)$ em um ponto $\hat{\theta}$.

Para a distribuição gama generalizada com fdp (2.24), segue a matriz de informação K , dada em [SC07]. Cada elemento de K é dada pela integral de

$$-f \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \log \left(f(y; \alpha, \beta, \theta) \right) \right),$$

em que $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ e $x_3 = \theta$. A matriz K é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -\Psi^{(1)}(\alpha) & \frac{\Psi^{(0)}(\alpha)}{\beta} & -\frac{\beta}{\theta} \\ \frac{\Psi^{(0)}(\alpha)}{\beta} & -\frac{\alpha\Psi^{(0)}(\alpha+1)^2 + \alpha\Psi^{(1)}(\alpha+1)+1}{\beta^2} & \frac{\alpha\Psi^{(0)}(\alpha)+1}{\theta} \\ -\frac{\beta}{\theta} & \frac{\alpha\Psi^{(0)}(\alpha)+1}{\theta} & -\frac{\alpha\beta^2}{\theta^2} \end{bmatrix},$$

em que $\Psi(\cdot)$ é a função digama e a inversa de K possui elementos $-\kappa^{ij}$ dados por:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{\Psi^{(1)}(\alpha)\alpha^2 + \alpha - 1}{-\alpha^2\Psi^{(1)}(\alpha)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha) + 1}, & \kappa_{12} &= \frac{\beta}{\Psi^{(1)}(\alpha)(\alpha^2\Psi^{(1)}(\alpha) - 1) - 1}, \\ \kappa_{13} &= \frac{\theta(\Psi^{(0)}(\alpha) + \alpha\Psi^{(1)}(\alpha) + 1)}{\beta(\Psi^{(1)}(\alpha)(\alpha^2\Psi^{(1)}(\alpha) - 1) - 1)}, & \kappa_{21} &= \frac{\beta}{\Psi^{(1)}(\alpha)(\alpha^2\Psi^{(1)}(\alpha) - 1) - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{22} &= \frac{\beta^2 \left(\alpha \Psi^{(1)}(\alpha) - 1 \right)}{-\alpha^2 \Psi^{(1)}(\alpha)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha) + 1}, & \kappa_{23}, &= \frac{\theta \left(\Psi^{(1)}(\alpha) + \Psi^{(0)}(\alpha) \left(\alpha \Psi^{(1)}(\alpha) - 1 \right) \right)}{-\alpha^2 \Psi^{(1)}(\alpha)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha) + 1}, \\
\kappa_{31} &= \frac{\theta \left(\Psi^{(0)}(\alpha) + \alpha \Psi^{(1)}(\alpha) + 1 \right)}{\beta \left(\Psi^{(1)}(\alpha) \left(\alpha^2 \Psi^{(1)}(\alpha) - 1 \right) - 1 \right)}, & \kappa_{32} &= \frac{\theta \left(\Psi^{(1)}(\alpha) + \Psi^{(0)}(\alpha) \left(\alpha \Psi^{(1)}(\alpha) - 1 \right) \right)}{-\alpha^2 \Psi^{(1)}(\alpha)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha) + 1}, \\
\kappa_{33} &= \frac{\theta^2 \left(\Psi^{(1)}(\alpha) \left(\alpha \left(\Psi^{(0)}(\alpha + 1)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha + 1) \right) + 1 \right) - \Psi^{(0)}(\alpha)^2 \right)}{\beta^2 \left(-\alpha^2 \Psi^{(1)}(\alpha)^2 + \Psi^{(1)}(\alpha) + 1 \right)}.
\end{aligned}$$

2.7.1 Casos especiais da distribuição gama generalizada

Casos especiais decorrentes da distribuição gama generalizada para $v = 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\theta > 0$ são dados a seguir. Como caso especial da distribuição gama generalizada, para o qual o segundo parâmetro de forma é unitário, tem-se:

$$\begin{aligned}
\text{Gama}(y; \theta, \alpha) &= \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{\theta} \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{y}{\theta} \right) \\
&= \text{GG}(y; \theta, \alpha, 1).
\end{aligned}$$

Outros importantes casos da distribuição gama incluem a distribuição χ^2 :

$$\begin{aligned}
\chi^2(y; k) &= \frac{1}{2\Gamma(k/2)} \left(\frac{y}{2} \right)^{k/2-1} \exp \left(-\frac{y}{2} \right) \\
&= \text{Gama}(y; 2, k/2) \\
&= \text{GG}(y; 2, k/2, 1),
\end{aligned}$$

e a distribuição exponencial,

$$\begin{aligned}
\text{Exp}(y; \theta) &= \theta \exp \left(-\frac{y}{\theta} \right) \\
&= \text{Gama}(y; \theta, 1) \\
&= \text{GG}(y; \theta, 1, 1).
\end{aligned}$$

A distribuição exponencial esticada (*stretched*) [LS98]:

$$\begin{aligned}
\text{SretchedExp}(y; \theta, \beta) &= \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{y}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ \left(-\frac{y}{\theta} \right)^\beta \right\} \\
&= \text{GG}(y; \theta, 1, \beta).
\end{aligned}$$

Como casos especiais da distribuição gama generalizada, tem-se a distribuição χ e a distribuição Rayleigh generalizada:

$$\begin{aligned}\chi(y; k) &= \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(k/2)} \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \text{GG}(y; \sqrt{2}, k/2, 2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{RayGen}(y; \theta, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\theta^2}\Gamma(k/2)} \left(\frac{y}{\sqrt{2\theta^2}}\right)^{k-1} \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta^2}\right) \\ &= \text{GG}(y; \sqrt{2}\theta, k/2, 2);\end{aligned}$$

Agora, casos especiais da Rayleigh generalizada incluem a distribuição semi-normal, a distribuição Rayleigh e a distribuição de Maxwell (Maxwell-Boltzmann):

$$\begin{aligned}\text{SemiNormal}(y; s) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}s^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \\ &= \text{RayGen}(y; \theta, 1) \\ &= \text{GG}(y; \sqrt{2}\theta, 1/2, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Rayleigh}(y; s) &= \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \\ &= \text{RayGen}(y; \theta, 2) \\ &= \text{GG}(y; \sqrt{2}\theta, 1, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maxwell}(y; s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}s^3} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2s^2}\right) \\ &= \text{RayGen}(y; \theta, 3) \\ &= \text{GG}(y; \sqrt{2}\theta, 3/2, 2)\end{aligned}$$

Outras distribuições podem ser consideradas como casos especiais da distribuição gama generalizada com parâmetros de forma negativos. Por exemplo, a distribuição gama inversa pode ser dada como $\text{GG}(y; 0, \theta, -1)$; a distribuição χ^2 inversa é $\text{GG}(y; 0, 1/2, k/2, -1)$; a distribuição χ inversa é dada por $\text{GG}(y; 0, 1/\sqrt{2}, k/2, -2)$ e as inversas exponencial e Rayleigh, respectivamente, dadas por $\text{GG}(y; 0, \theta, 1, -1)$ e $\text{GG}(y; 0, 1/\sqrt{2}\theta, 1, -2)$.

Percolação e Polinômio de Tutte

N^O CAPÍTULO QUE SE INICIA, estarão apresentados resultados sobre o polinômio de Tutte definido inicialmente para grafos [Cri01] e generalizado para matróides. Tais polinômios podem ser utilizados na definição de espaços de probabilidade sobre objetos combinatórios, quando estes são considerados juntamente com percolações nestes objetos. Existe, ainda, uma pequena aplicação do polinômio em física-estatística.

3.1 Matróides e Grafos

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos combinatórios em teoria das matróides, que poderão ser melhor investigados no livro de J.Oxley [Oxl98].

Seja E um conjunto finito. Tome $\mathcal{I}$ uma família de subconjuntos de E tal que:

- I1.** $\emptyset \in \mathcal{I}$ (ou $\mathcal{I} \neq \emptyset$).
- I2.** Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$.

Neste caso, diz-se que $\mathcal{I}$ é uma *família admissível*. Em adição, se os membros de $\mathcal{I}$ satisfazem

- I3.** Se $I, J \in \mathcal{I}$, com $|I| < |J|$, então existe $e \in J - I$ tal que $I \cup e \in \mathcal{I}$.¹

então o par $M = (E, \mathcal{I})$ é chamado *matróide com conjunto-base E e família de independentes $\mathcal{I}$* .

¹por simplicidade, será usado $I \cup e = I \cup \{e\}$, $I - e = I - \{e\}$, etc.

Um exemplo bem concreto pode ser dada como segue: seja $G = (V, E)$ um grafo finito, ou seja, um grafo para o qual os conjuntos de vértices e arestas é finito. Seja

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : (V, X) \text{ é uma floresta.}\}$$

ou seja, o subgrafo gerado de G cujo conjunto de arestas X é acíclico. Neste caso, é fácil mostrar que $M = (E, \mathcal{I})$ é uma matróide, denotada por $M = M(G)$ e denominada *matróide gráfica* sobre E . Não é difícil ver que toda matróide gráfica é isomorfa a uma matróide cujo grafo correspondente é conexo.

Se $M = (E, \mathcal{I})$ é uma matróide e $D \subseteq E$ não é um independente, diz-se que D é um *dependente*. Os subconjuntos de dependentes minimais de uma matróide M são chamados *circuitos* de M . Será denotado por $\mathcal{C}$ o conjunto de circuitos de uma matróide. Um membro de $\mathcal{C}$ com um único elemento é chamado *laço*. Para uma matróide gráfica, um circuito corresponde a um ciclo, ou seja, um caminho fechado sem repetição de vértices.

O conjunto de circuitos de uma matróide satisfaz as propriedades:

C1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

C2. Se C_1 e C_2 são membros de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$.

C3. Se C_1 e C_2 são membros distintos de $\mathcal{C}$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe um membro C_3 de $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Os independentes maximais são chamados *bases* da matróide, cujo conjunto será denotado por $\mathcal{B}$.

Proposição 3.1. *Sejam B_1 e B_2 bases de uma matróide M . Então $|B_1| = |B_2|$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $|B_1| < |B_2|$. Pela propriedade (I3) dos independentes, existe $e \in B_2 - B_1$ tal que $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Porém isto contradiz a maximalidade de um elemento da base. Um argumento semelhante mostra que não é possível $|B_2| < |B_1|$. Logo todos elementos de $\mathcal{B}$ têm a mesma cardinalidade. $\square$

Para uma matróide gráfica, as bases desta correspondem ao conjunto de arestas de árvores geradoras do grafo correspondente (considerando a possível conexidade desse grafo).

Proposição 3.2. *Se M é uma matróide e $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de M então*

B1. $\mathcal{B}$ é não-vazio.

B2. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, e $e \in B_1 - B_2$, então existe $f \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathcal{B}$.

Demonstração. A propriedade (B1) segue de (I1). Agora, note que $|B_1 - e| < |B_2|$, pois pela proposição (3.1) $|B_1| = |B_2|$. Portanto, por (I3), existe um elemento $f \in B_2 - (B_1 - e)$ tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathcal{I}$. Evidentemente, $f \in B_2 - B_1$. Além disso, como $(B_1 - e) \cup f$ é independente, ele está contido em um conjunto independente maximal B'_1 . Pela proposição (3.1), novamente, $|B'_1| = |B_1|$. Como $|B'_1| = |(B_1 - e) \cup f|$, tem-se que $B'_1 = (B_1 - e) \cup f$, ou seja $(B_1 - e) \cup f$ é uma base de M . Portanto, $\mathcal{B}$ satisfaz (B2). $\square$

Sejam M e N matróides sobre os conjuntos $E(M)$ e $E(N)$, respectivamente. M é isomorfa a N , $M \cong N$, se existe uma bijeção, φ , de $E(M)$ sobre $E(N)$ tal que para $F = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq E(M)$, $\varphi(F) = \{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_k)\}$ é independente de N se, e somente se, F é independente em M .

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide sobre E e suponha que $X \subseteq E$. Defina $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$ a restrição dos independentes de M ao subconjunto X . É fácil verificar que $(X, \mathcal{I}|X)$ é uma matróide, chamada a *restrição* de M a X , ou a *deleção* de $E - X$ de M . Isto é denotado por $M|X$ ou $M \setminus (E - X)$.

Como $M|X$ é uma matróide, ela possui uma coleção de bases, cujos elementos têm a mesma cardinalidade. Fica, pois, bem definida a *função posto* de uma matróide ou de um subconjunto de uma matróide como sendo a cardinalidade de um elemento qualquer de sua família de bases. Será denotada por $r_M(X)$, a função posto de X em M , e não havendo confusão, será usado simplesmente $r(X)$.

A função posto possui as seguintes propriedades (ver [Oxl98]):

R1. Se $X \subseteq E$, então $0 \leq r(X) \leq |X|$.

R2. Se $X \subseteq Y$, então $r(X) \leq r(Y)$.

R3. Para todo par $X, Y \subseteq E$, $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Para finalizar esta seção será definida a dualidade para um matróide. Seja M uma matróide e $\mathcal{B}(M)$ sua família de bases. Se for definido a família $\mathcal{B}^*(M) = \{E - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$, mostra-se que tal família de subconjuntos de M é a família de bases de um matróide sobre E . Tal matróide é chamada a *dual* de M e denotada por M^* . Assim, $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^*(M)$. Também é imediato ver que $(M^*)^* = M$. Se G^* é o dual geométrico do grafo planar G , então $M(G^*) = M^*(G)$ (ver [Oxl98]).

As bases de M^* são chamadas *co-bases* de M . Da mesma forma, denominam-se *co-circuitos* *co-independentes* e *co-laços* de M os circuitos, independentes e laços de M^* , respectivamente.

É fácil ver que um elemento e de M é um co-laço se, e somente se, e está contido em toda base de M .

3.2 O polinômio de Tutte para matróides

Seja M uma matróide definida sobre um conjunto E cuja família de independentes é denotada por $\mathcal{I}$. Define-se para M o *polinômio do posto*:

$$R(M; x, y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(E) - r(A)} y^{|A| - r(A)}, \quad (3.1)$$

sendo que r é a função posto definida sobre M . Defina, agora:

$$T(M; x, y) = R(M; x - 1, y - 1). \quad (3.2)$$

Denote ainda para $e \in E$, $M'_e = M|(E - e)$, a submatróide de M definida sobre a restrição a $E - e$ e $M''_e = M.(E - e)$, a submatróide formada pela contração do elemento e . Usaremos L e L^* para representar as matróide isomorfas a um laço e um co-laço, respectivamente.

Tanto $R(M; x, y)$, quanto $T(M; x, y)$ são tipos especiais de invariantes sobre a classe das matróides [oMiA92], chamado invariante de Tutte-Gröthendieck, que respeitam as seguintes propriedades:

1. $T(M; x, y) = T(N; x, y)$ se $M \cong N$.
2. $T(M; x, y) = T(M - e; x, y) + T(M/e; x, y)$, se e não é laço, nem co-laço de M .
3. $T(M; x, y) = T(M(e); x, y)T(M - e; x, y)$ se e é laço ou co-laço.

No item 3, acima, $M(e)$ é a matróide induzida por e

Segue um resultado importante devido a Brylawski [Bry72].

Teorema 3.1. *Existe uma única função T (o polinômio de Tutte) da classe de isomorfismos de matróides no anel de polinômios $\mathbb{Z}[x, y]$ tendo as seguintes propriedades:*

- (i) $T(L^*; x, y) = x$ e $T(L; x, y) = y$.
- (ii) Se e é um elemento da matróide M e e não é um laço, nem um co-laço, então

$$T(M; x, y) = xT(M'_e; x, y) + yT(M''_e; x, y).$$

(iii) Se e é um co-laço de uma matróide M , então $T(M; x, y) = xT(M'_e; x, y)$.

(iv) Se e é um laço de uma matróide M , então $T(M; x, y) = yT(M'_e; x, y)$.

Demonstração. A demonstração de (i), (ii) e (iii) segue diretamente do fato que T é um invariante de Tutte-Gröthendieck. As únicas matróides não-vazias que não podem ser decompostas usando (ii) ou (iii) são L e L^* , para estas matróides $T(M; x, y)$ é fixado por (i). Portanto, T é único. Finalmente, a última parte do teorema pode ser provada utilizando-se um argumento de indução direta sobre o número de elementos da matróide. $\square$

3.3 Uma equação para matróide

Teorema 3.2. Existe uma única função real f do conjunto de todas as matróides sobre o anel de polinômios $\mathbb{R}[x, y]$ satisfazendo

(i) $f(M) = f(N)$, se $M \cong N$.

(ii) $f(M) = af(M'_e) + bf(M''_e)$, para algum a e b em $\mathbb{R}^*$

(iii) $f(M_1 + M_2) = f(M_1)f(M_2)$, e M_1 e M_2 são matróides sobre conjuntos disjuntos.

(iv) $f(L^*) = x$ e $f(L) = y$.

Esta função é dada para qualquer matróide M sobre E por

$$f(M) = a^{|E|-r(E)} b^{r(E)} T(M; b^{-1}x, a^{-1}y), \quad (3.3)$$

e T é o polinômio de Tutte de M .

Demonstração. É fácil verificar que f como definida em (3.3) satisfaz (i)–(v). A unicidade segue da unicidade do polinômio de Tutte dada pelo teorema (3.1). $\square$

Uma aplicação direta do Polinômio de Tutte é dada por

Proposição 3.3. Seja M uma matróide. Denotando por $b(M)$, $i(M)$ e $s(M)$ os número de bases, de conjuntos independentes e de conjuntos geradores, respectivamente, de M , tem-se:

(i) $b(M) = T(M; 1, 1)$;

(ii) $i(M) = T(M; 2, 1)$;

$$(iii) \ s(M) = T(M; 1, 2) \text{ e}$$

$$(iv) \ 2^{|E|} = T(M; 2, 2).$$

Demonstração. Seja e um elemento da matróide M que não seja nem um laço, nem um co-laço. Sejam $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ uma partição do conjunto das bases de M tal que $B \in \mathcal{B}'$ se, e somente se, $e \in B$ e $B \in \mathcal{B}''$, no outro caso. Note que como e não é um co-laço $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ são não-vazios. Agora, $\mathcal{B}'$ é igual ao conjunto das bases de $M - e$, enquanto que o conjunto das bases de $M/e = (M^* - e)^*$ é $\{B - e : B \in \mathcal{B}''\}$. Logo, $|\mathcal{B}'| = b(M - e)$ e $|\mathcal{B}''| = b(M/e)$. Portanto, se e não é um laço, nem um co-laço, então $b(M) = b(M - e) + b(M/e)$. Por outro lado, se e é um laço, ou um co-laço, então é claro que $b(M) = b(M - e)b(M/e)$. Assim, $b(M)$ satisfaz as propriedades de decomposição dada pelo Teorema 3.1. Também é claro que $b(L) = b(L^*) = 1$. Logo, pelo Teorema 3.2, $b(M) = T(M; 1, 1)$.

A prova de (ii) segue da mesma forma que (i). Para provar (iii), note que $s(M) = i(M^*)$. Assim, por (ii) $s(M) = T(M^*; 2, 1) = T(M; 1, 2)$.

Finalmente, tem-se da definição do polinômio de Tutte que

$$T(M; 2, 2) = \sum_{F \subseteq E} 1^{r(E) - r(F)} 1^{|F| - r(F)} = 2^{|E|}. \quad \square$$

Define-se, agora, uma classe de matróides denotada por $\mathcal{M}_P$, que denominaremos *matróides pontuadas*: uma matróide M_d está em $\mathcal{M}_P$ se d é um elemento distinguido de M_d . Note que para cada elemento $e \in E(M_d) - d$, tem-se que $M_d - e$ e M_d/e são membros de $\mathcal{M}_P$, para os quais o ponto distinguido é d .

Proposição 3.4. *Existe uma única função T_P de $\mathcal{M}_P$ no anel dos polinômios $\mathbb{Z}[x', x, y', y]$, tendo as seguintes propriedades:*

$$(i) \ T_P(M_d(d)) = \begin{cases} x', & \text{se } M_d(d) \text{ é um co-laço e} \\ y', & \text{se } M_d(d) \text{ é um laço.} \end{cases}$$

(ii) Se e é um elemento de um membro M_d de $\mathcal{M}_P$ e $e \neq d$, então

$$T_P(M_d) = T_P(M_d|(E - e)) + T_P(M_d.(E - e)).$$

(iii) Se e é um laço ou um co-laço de um membro M_d de $\mathcal{M}_P$ e $e \neq d$, então

$$T_P(M_d) = T_P(M_d|(E - e))T_P(M_d(e)).$$

Em particular,

$$T_P(M_d(e)) = T(M_d(e)).$$

Demonstração. A demonstração destes fatos seguem da mesma forma que no Teorema 3.1. $\square$

O polinômio $T_P(M_d; x', x, y', y)$ é chamado *polinômio de Tutte pontuado*. Não é difícil mostrar que:

Proposição 3.5. *Suponha que $M_d \in \mathcal{M}_P$. Então existem f e g , polinômios em $\mathbb{Z}[x, y]$, tais que*

- (i) $T_P(M_d; x', x, y', y) = x'f(x, y) + y'g(x, y)$.
- (ii) $T_P(M_d; x, y) = xf(x, y) + yg(x, y)$.
- (iii) $T_P(M_d^*; x', x, y', y) = T_P(M_d; y', y, x', x) = x'g(x, y) + y'f(x, y)$.
- (iv) *Se d não é nem co-laço, nem laço de M_d , então*

$$\begin{aligned} T(M_d - d; x, y) &= (x - 1)f(x, y) + g(x, y), \text{ e} \\ T(M_d / d; x, y) &= f(x, y) + (y - 1)g(x, y). \end{aligned}$$

- (v) *Se d é um laço ou um co-laço de M_d , então*

$$T(M_d - d; x, y) = T(M_d / d; x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } d \text{ é co-laço,} \\ g(x, y), & \text{se } d \text{ é laço.} \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração segue do fato que $M_d = M \cup d$ e que a partir da Proposição 3.4, $f(x, y) = T(M|(E - e))$ e $g(x, y) = T(M.(E - e))$, onde e é um elemento distinto de d . $\square$

Seja M uma matróide sobre um conjunto finito E e suponha que cada elemento de E tem, independentemente de todos os outros elementos, uma probabilidade $q = 1 - p$ de ser deletado de E . O menor da restrição resultante $\omega(M)$ de M é chamada *submatróide aleatória* de M , correspondendo de maneira óbvia a um grafo aleatório quando M é a matróide gráfica do grafo completo. Suponha que $\Pr(p; M)$ seja a probabilidade que $\omega(M)$ tenha o mesmo posto de M . Então desde que e não seja nem um laço, nem um co-laço de M ,

$$\Pr(p; M) = q\Pr(p; M'_e) + p\Pr(p; M''_e) \quad (3.4)$$

e, para M_1 e M_2 matróides definidas sobre conjuntos disjuntos,

$$\Pr(p; M_1 + M_2) = \Pr(p; M_1)\Pr(p; M_2). \quad (3.5)$$

Também,

$$\Pr(p, M) = \begin{cases} p, & \text{se } M \text{ é um co-laço,} \\ 1, & \text{se } M \text{ é um laço.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Portanto pelo teorema (3.2),

$$\Pr(p; M) = q^{|E|-r(E)} p^{r(E)} T(M; 1, q^{-1}) \quad (3.7)$$

Por um argumento semelhante, se $\rho(M; \theta) = \mathbb{E}\langle \theta^{r(\omega(M))} \rangle$ denota a função geradora de probabilidade do posto de uma submatróide aleatória de M , tem-se que quando e não é nem laço, nem co-laço,

$$\begin{aligned} \rho(M; \theta) &= q\rho(M'_e; \theta) + p\theta\rho(M''_e; \theta), \\ \rho(L^*; \theta) &= q + p\theta, \quad \rho(L; \theta) = 1, \end{aligned}$$

e, então,

$$\rho(M; \theta) = q^{|E|-r(E)} (p\theta)^{r(E)} T\left(M; \frac{q}{p\theta} + 1, \frac{1}{q}\right). \quad (3.8)$$

3.4 O modelo de percolação para clutters

A teoria de percolação clássica foi introduzida por Broadbent e Hammersley [BH57] e preocupava-se com o fluxo de líquido através de um tipo de grafo aleatório. Será definido um modelo de percolação que tem uma maior aplicabilidade que este, mas que claramente contém o modelo clássico como caso particular.

Seja E um conjunto finito e seja $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ uma família de subconjuntos de E com a seguinte propriedade: $A_i \not\subseteq A_j$, para $i \neq j$. Esta família é chamada *clutter* ou *família Sperner*. Suponha que cada elemento de E independentemente de todos os outros elementos seja pintado de branco com probabilidade p ou de preto com probabilidade $q = 1 - p$. Isto define um espaço de probabilidade Ω de realizações possíveis e tal espaço será chamado *modelo de percolação sobre $\mathcal{A}$* . O modelo clássico é um caso especial, no qual E é o conjunto de arestas de um grafo finito e $\mathcal{A}$ é alguma coleção de caminhos.

Para dados $\mathcal{A}$ e p , define-se a probabilidade de percolação $\Pr(\mathcal{A}; p)$ como sendo a probabilidade que algum membro de $\mathcal{A}$ tenha todos seus elementos pintados de branco. Assim

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = \sum p^{|X|} q^{|E|-|X|}, \quad (3.9)$$

em que a soma é sobre todos os subconjuntos X de E que contenham algum membro de $\mathcal{A}$. Logo, se $|E| = n$ e se for denotado por u_k o número de k -subconjuntos de E que contém algum membro de $\mathcal{A}$, fica naturalmente definido o *polinômio superior*, $U(\mathcal{A}; z)$, por

$$U(\mathcal{A}, z) = \sum_{k=0}^n u_k z^k. \quad (3.10)$$

Note que $\Pr(\mathcal{A}; p) = q^n U(\mathcal{A}; p/q)$.

Seja G um grafo conexo finito e tome $\mathcal{A}$ sendo a coleção do conjunto de arestas de árvores geradoras de G . Então $\Pr(\mathcal{A}; p)$ é apenas a probabilidade que um subgrafo aleatório de G seja conexo. Isto claramente é o mesmo que a probabilidade que uma submatróide da matróide gráfica $M(G)$ tenha posto cheio e por (3.7), tem-se

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = q^{|E|-|V|+1} p^{|V|-1} T(M; 1, q^{-1}), \quad (3.11)$$

em que E e V representam o conjunto de arestas e vértices de G , respectivamente.

Se $\mathcal{A}$ é um clutter sobre E e T é um subconjunto de E defina

$$\mathcal{A}|T = \{A_i : A_i \in \mathcal{A}, A_i \subseteq T\}$$

$$\mathcal{A}.T = \{\text{conjuntos minimais da forma } A_i \cap T : A_i \in \mathcal{A}\},$$

e se $T = E - e$, escreve-se

$$\mathcal{A}|T = \mathcal{A}'_e, \quad \mathcal{A}.T = \mathcal{A}''_E.$$

A *soma direta* $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ de dois clutters sobre conjuntos disjuntos é a coleção de conjuntos $\{A_1 \cup A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ e } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$. A *união* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A : A \in \mathcal{A}_1 \text{ ou } A \in \mathcal{A}_2\}$.

O *blocker* $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ é a coleção de conjuntos minimais X tais que $X \cap A_i = \emptyset$, para todo $A_i \in \mathcal{A}$. São resultados conhecidos (ver [EF70]): $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ e

$$(\mathcal{A}|T)^* = \mathcal{A}.T, \quad (\mathcal{A}.T)^* = \mathcal{A}|T.$$

Um elemento e de E é chamado *essencial* para $\mathcal{A}$ se e pertence a todo $A_i \in \mathcal{A}$ e é *redundante* se e não pertence a nenhum A_i . É fácil verificar que:

Se e é redundante,

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = \Pr(\mathcal{A}'_e; p). \quad (3.12)$$

Se e é essencial,

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = \Pr(\mathcal{A}''_e; p). \quad (3.13)$$

Se e não é redundante, nem essencial,

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = q \Pr(\mathcal{A}'_e; p) + p \Pr(\mathcal{A}''_e; p), \quad (3.14)$$

$$\Pr(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2; p) = \Pr(\mathcal{A}_1; p) \Pr(\mathcal{A}_2; p). \quad (3.15)$$

Se $E = \{e\}$, então,

$$\Pr(\mathcal{A}; p) = \begin{cases} p, & \text{se } e \text{ é essencial e } \mathcal{A} \text{ é não-vazio,} \\ 1, & \text{se } e \text{ é redundante e } \mathcal{A} \text{ é não-vazio,} \end{cases} \quad (3.16)$$

3.5 Sobre a (não-)extensão do polinômio de Tutte

Olhando para as equações (3.14) a (3.16) é natural se perguntar quando a teoria do polinômio de Tutte pode ser estendida para clutters arbitrários. Note primeiramente que sobre o conjunto *singleton* $\{e\}$ existem três clutters, a saber,

$$S = \{\{e\}\}, \quad R = \{\emptyset\}$$

e o clutter vazio. Diz-se que S é o *clutter essencial* e R é o *clutter redundante*. Eles são os únicos, a menos de isomorfismo. Assim se a e b são reais não nulos, pergunta-se da existência de uma função $f(\mathcal{A}; x, y)$ de duas variáveis reais x e y definida sobre a classe de todos os clutters finitos não-vazios, tal que as seguintes regras sejam satisfeitas.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são clutters isomorfos,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = f(\mathcal{B}; x, y). \quad (3.17)$$

Se e não é essencial, nem redundante para $\mathcal{A}$, então

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}'_e; x, y) + bf(\mathcal{A}''_e; x, y), \quad (3.18)$$

$$f(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2; x, y) = f(\mathcal{A}_1; x, y)f(\mathcal{A}_2; x, y), \quad (3.19)$$

$$f(S; x, y) = x, \quad f(R; x, y) = y. \quad (3.20)$$

Teorema 3.3. *Se a e b são números reais não nulos fixos, então uma função $f(\mathcal{A}; x, y)$ satisfazendo (3.17) a (3.20) é unicamente definida se, e somente se, $\mathcal{A}$ é a família de bases de uma matróide.*

Demonstração. Para (3.19) e (3.20) é claro que

$$f(\mathcal{A}; x, y) = \begin{cases} xf(\mathcal{A}'_e; x, y), & \text{se } e \text{ é redundante,} \\ yf(\mathcal{A}''_e; x, y), & \text{se } e \text{ é essencial.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Será usada indução sobre o tamanho n do conjunto-base E . Seja $\mathcal{E}_n$ a coleção de clutters sobre os conjuntos de tamanho n . O teorema é verdadeiro quando $n = 1$. Suponha que também seja verdadeiro para todo $k < n$. Seja $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_n$ e suponha que f seja unicamente definida para $\mathcal{A}$. Se e é essencial para $\mathcal{A}$, então por (3.21),

$$f(\mathcal{A}; x, y) = xf(\mathcal{A}''_e; x, y)$$

e como f é unicamente definida sobre $\mathcal{A}$, então deve ser unicamente definida sobre $\mathcal{A}''_e$ e, portanto, pela hipótese de indução $\mathcal{A}''_e$ é o conjunto de bases de uma matróide sobre $E - e$.

Segue que $\mathcal{A}$ é uma extensão livre de um único elemento de $\mathcal{A}_e''$. Um argumento semelhante produz o resultado, quando $\mathcal{A}$ tem um elemento redundante. Logo, pode-se supor que cada elemento de E não é nem redundante, nem essencial para $\mathcal{A}$.

Sejam A_1 e A_2 membros distintos de $\mathcal{A}$ e seja $e \in A_1 - A_2$. Se $A_1 \cup A_2 \neq E$, seja $h \in E - (A_1 \cup A_2)$. Então,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}_h'; x, y) + bf(\mathcal{A}_h''; x, y).$$

Como $f(\mathcal{A}; x, y)$ é unicamente definida, então também será $f(\mathcal{A}_h'; x, y)$ e como $\mathcal{A}_h' \in \mathcal{E}_{n-1}$, ele será o conjunto de bases de uma matróide sobre $E - h$. Mas $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h'$, daí existe $g \in A_2 - A_1$ tal que $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}_h'$ e, portanto, está em $\mathcal{A}$.

Se $A_1 \cup A_2 = E$ e $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, escolhe-se $h \in A_1 \cap A_2$ e como $f(\mathcal{A}; x, y)$ é unicamente definida, $f'(\mathcal{A}_h''; x, y)$ deve ser unicamente definida. Mas $\mathcal{A}_h' \in \mathcal{E}_{n-1}$ e é, pela hipótese de indução, o conjunto de bases de uma matróide sobre $E - h$. Como $A_1 - h, A_2 - h$ são membros de $\mathcal{A}_h''$, existe $g \in (A_2 - h) - (A_1 - h)$, tal que $(A_2 - \{h, g\}) \cup e \in \mathcal{A}_h''$. Então, ou $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}$, ou $(A_2 - \{h, g\}) \cup e \in \mathcal{A}$. Suponha que o último caso seja válido. Então $e \in ((A_2 - \{h, g\}) \cup e) \cap A_1$, tal que $A_1 - e$ e $A_2 - \{h, g\} \in \mathcal{A}_e''$. Portanto, pela hipótese de indução com $\mathcal{A}_e''$ é o conjunto de bases de uma matróide, $|A_1 - e| = |A_2 - \{h, g\}|$, isto é, $|A_2| = |A_1| + 1$. Mas como $A_1 - h$ e $A_2 - h \in \mathcal{A}_e''$, isto é uma contradição e, daí $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}$.

Finalmente, suponha que $A_1 \cup A_2 = E$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Se $u \in A_1$, então $A_1 - u \in \mathcal{A}_u'$ e existe $A_2' \subseteq A_2$, tal que $A_2' \in \mathcal{A}_u''$. E

- (i) $A_2' = A_2$ e $|A_1| = |A_2| + 1$; ou
- (ii) $A_2' \neq A_2$ e $A_2' \cup u \in \mathcal{A}$ e $|A_2| > |A_2'| = |A_1| - 1$.

Tome $v \in A_2$. Pelo mesmo argumento, existe $A_1' \subseteq A_1$, tal que $A_1' \in \mathcal{A}_v''$ e $|A_1'| = |A_2| - 1$, assim, ou

- (iii) $A_1' = A_1$ e, daí $|A_1| = |A_2| - 1$; ou
- (iv) $A_1' \neq A_1$ e $A_1' \cup v \in \mathcal{A}$ e $|A_1| > |A_1'| = |A_2| - 1$.

Primeiramente, note que (i) e (iii) não podem ocorrer simultaneamente. Suponha que (i) e (iv) sejam válidos. Se $A_1' = \emptyset$, então $A_2 = \{v\}$ e, por (i), $|A_1| + 2$. Como $A_1 \cup A_2 = E$, forçosamente $E = \{u, v, w\}$ e $\mathcal{A} = \{\{v\}, \{u, w\}\}$ e é fácil verificar que f não é unicamente definida para este clutter. Assim podemos considerar $A_1' \neq \emptyset$. Escolha $c \in A_1'$. Então $\mathcal{A}_c''$ é o conjunto de bases de uma matróide sobre $E - c$. Agora, como $(A_1' \cup c) - c$ e $A_1 - c \in \mathcal{A}_c''$, temo-se que $|(A_1' \cup v) - c| = |A_1 - c|$. Portanto, $|A_1'| = |A_1| - 1$. Então, por (iv), $|A_1| = |A_2|$, contrariando (i).

Se (ii) e (iii) forem válidas, então trocando os papéis de A_1 e A_2 , A'_1 e A'_2 e u e v , e pelo mesmo argumento anterior, tem-se uma contradição.

Portanto, (ii) e (iv) são afirmações válidas e, segue que $|A_1| = |A_2|$. Segue que $A'_2 = A_2 - z$, para algum $z \in A_2$ e, por conseguinte, $(A_2 - z) \cup u \in \mathcal{A}$. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $z \in A_2 - A_1$. Segue que fazendo $u = e$ e $g = z$, obtém-se o resultado desejado. $\square$

Suponha, agora, que sejam trocadas as condições (3.18)-(3.20) por suas condições duais. Neste caso, (3.18) e (3.19) tornam-se, para $\{e\} \notin \mathcal{A}$ e e nem redundante, nem essencial,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}/e; x, y) + bf(\mathcal{A} - e; x, y), \quad (3.17^*)$$

$$f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2; x, y) = f(\mathcal{A}_1; x, y)f(\mathcal{A}_2; x, y) \quad (3.18^*)$$

Como o dual do clutter essencial S é ele próprio, mas o dual do clutter redundante R é o clutter vazio, Z , o dual do Teorema (3.3) tem a seguinte forma:

Teorema 3.4. *Se a e b são números reais não-nulos fixos, então a função $f(\mathcal{A}; x, y)$ satisfazendo (3.17), (3.17*) e (3.18*) e*

$$f(S; x, y) = x \quad f(Z; x, y) = y \quad (3.19^*)$$

é unicamente definida para um clutter finito $\mathcal{A} \neq \emptyset$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ é a coleção de circuitos de uma matróide.

Demonstração. Segue diretamente do fato que o blocker da coleção de bases de uma matróide é o conjunto de circuitos da matróide dual. $\square$

3.6 Confiabilidade e Percolação

Outro braço intimamente relacionado da teoria de grafos aleatórios é o estudo da confiabilidade de uma rede. A suposição é que exista um fluxo por um grafo que sai de um determinado vértice e que chega a outro vértice. Baseado na *disponibilidade* de um vértice (aberto/funcionando ou fechado/desligado) é possível a passagem do fluxo. Aqui, se está interessado em determinar a probabilidade que em um subgrafo aleatório da rede dois vértices distintos sejam unidos por um caminho. Neste caso, o polinômio de Tutte é útil no estudo das generalizações de matróides destes problemas de grafos.

Em problemas de confiabilidade e percolação em matróides, todo elemento e_i de uma matróide $M(E)$ tem, independentemente dos outros elementos, uma probabilidade $1 - p_i$ de ser deletado de M em que, exceto quando afirmado ao contrário, $0 < p_i < 1$. Então, escrevendo q_i

para $1 - p_i$, a probabilidade $\Pr(A)$ que um subconjunto A de E consiste precisamente daqueles elementos que não são deletados é dada por

$$\Pr(A) = \prod_{e_i \in A} p_i \prod_{e_j \notin A} q_j. \quad (3.22)$$

Um problema aqui é encontrar maneiras de se computar eficientemente a probabilidade $\Pr(\mathcal{F})$ que o conjunto de elementos preservados está em alguma família $\mathcal{F}$. É evidente que $\Pr(\mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \Pr(A)$. É comum considerar a família $\mathcal{F}$ como uma família de conjuntos ascendentes, ou seja, cujos elementos estão aninhados por inclusões sucessivas e se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Agora, dados dois vértices distintos s e t em um grafo G , tem-se interesse em determinar a probabilidade que um subgrafo aleatório de G contenha um caminho entre s e t . Para fazer isso, primeiro forma-se um novo grafo $\overline{G}$ a partir de G adicionando-se uma aresta-base d entre s e t . Seja $\mathcal{D}$ a família de subconjuntos A de $E(G)$ para qual $A \cup d$ contenha um ciclo de $\overline{G}$ contendo d . Equivalentemente, $A \in \mathcal{D}$ se, e somente se, d não é um co-laço no subgrafo de $\overline{G}$ induzido por $A \cup d$. Desenvolveremos uma fórmula para $\Pr(\mathcal{D})$ para uma matróide arbitrária $M(E \cup d)$, em que, num contexto mais geral, $A \in \mathcal{D}$ se, e somente se, d não é um co-laço de $M_d(A \cup d)$.

Seja $\Pr(\mathcal{D})$ a probabilidade de $\mathcal{D}$ e para todo elemento e_i de E , seja p_i , a probabilidade de não-deleção de e_i , igual a uma constante p . Sendo o número de elementos em uma matróide dado por $|E|$, tem-se que

Proposição 3.6. *Seja M uma matróide pontuada, tal que $M = M_d(E \cup d)$. Considere que todo elemento de E , tem, independentemente dos outros elementos de E , a probabilidade $1 - p$ de ser deletado de M , enquanto que o elemento d tem probabilidade 0 de ser deletado. Então a probabilidade que, em uma submatróide aleatória $\omega(M)$ de M , o elemento d não seja um co-laço é dada por:*

- (i) $\Pr(\mathcal{D}) = p^{r(M)} q^{|E| - r(M) - 1} g(p^{-1}, q^{-1});$
- (ii) $\Pr(\mathcal{D}) = 1 - p^{r(M) - 1} q^{|E| - r(M)} f(p^{-1}, q^{-1});$

em que $x' f(x, y) + y' g(x, y) = T_P(M_d(E \cup d); x', x, y', y)$.

Demonstração. Provemos, primeiramente, que $\Pr(\mathcal{D})$ satisfaz

$$\Pr(\mathcal{D}(M)) = qP(\mathcal{D}(M - e)) + pP(\mathcal{D}(M/e)), \quad (3.23)$$

em que e é um elemento de M distinto de d que não é um laço, nem um co-laço. Por (3.22)

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{D}(M)) &= \sum_{A \in \mathcal{D}} p^{|A|} q^{|E-A|} \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{D} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|E-A|} + \sum_{\substack{A \in \mathcal{D} \\ e \in A}} p^{|A|} q^{|E-A|}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Pr(\mathcal{D}(M)) = q \sum_{\substack{A \in \mathcal{D} \\ e \notin A}} p^{|A|} q^{|(E-e)-A|} + p \sum_{\substack{A' \subseteq E-e \\ A' \cup e \in \mathcal{D}}} p^{|A'|} q^{|(E-e)-A'|} \quad (3.24)$$

O primeiro somatório de (3.24) é tomado sobre aqueles subconjuntos A de $E - e$ para os quais d não é um co-laço de $A \cup d$ em $M - e$. Assim, esse somatório é sobre aqueles membros A de $\mathcal{D}(M - e)$. Por outro lado, como d é um co-laço de $M_d(A' \cup d \cup e)$ se, e somente se, é um co-laço de $M_d(A' \cup d \cup e)/e$, o segundo somatório em (3.24) é sobre aqueles membros A' de $\mathcal{D}(M/e)$. Logo (3.23) é válido. Segue que se

$$h(M) = (1/q)^{|E|-r(M)} (1/p)^{r(M)} \Pr(\mathcal{D}(M)),$$

então,

$$h(M) = h(M - e) + h(M/e),$$

para todo elemento e de $M - d$ que não é laço, nem co-laço de M . Além disso, é fácil verificar que se e é um elemento de $M - d$, então,

$$h(M) = \begin{cases} q^{-1} h(M - e), & \text{se } e \text{ é um laço,} \\ p^{-1} h(M - e), & \text{se } e \text{ é um co-laço.} \end{cases}$$

Finalmente, de maneira direta, verifica-se que

$$h(M(d)) = \begin{cases} q^{-1}, & \text{se } M(d) \text{ é um laço,} \\ 0, & \text{se } M(d) \text{ é um co-laço.} \end{cases}$$

Pela unicidade do polinômio de Tutte segue que $h(M_d) = T_P(M_d; x', x, y', y)$, em que $x' = 0$, $y' = q^{-1}$, $x = p^{-1}$ e $y = q^{-1}$. Portanto, como $T_P(M_d; x', x, y', y) = x' f(x, y) + y' g(x, y)$, tem-se que $h(M_d) = q^{-1} g(p^{-1}, q^{-1})$ e

$$\Pr(\mathcal{D}(M)) = q^{|E|-r(M)-1} p^{r(M)} g(p^{-1}, q^{-1}).$$

Isto demonstra (i). Se $\mathcal{D}^* = 2^{|E|} - \mathcal{D}$, a família de subconjuntos formada por todas as diferenças entre elementos de E e $\mathcal{D}$, um argumento semelhante aplicado a $\Pr(\mathcal{D}^*)$ implica (ii). $\square$

3.7 O modelo de percolação para grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário. Cada aresta de G pode estar em dois estados diferentes, que serão denotados por u e d . Para cada $e \in E(G)$, consideram-se dois eventos:

- “ e está no estado u ” = “ e é uma u -aresta,” ou
- “ e está no estado d ” = “ e é uma d -aresta.”

Estes eventos são considerados complementares, ou seja, um é a negação do outro. Aqui serão denotados por u_e e d_e , respectivamente.

A partir destes eventos, chamados *eventos-aresta*, são construídos eventos mais detalhados, tomando-se produtos (lógicos). Tais eventos são chamados *eventos-produto*, e são denotados por produtos algébricos. Assim, $u_e d_{\tilde{e}}$ é o evento “ e é uma u -aresta e $\tilde{e}$ é uma d -aresta.” Se $E', E'' \subseteq E$, estende-se o conceito para o produto geral $u^{E'} d^{E''}$.

Agora, $u_e d_e = 0 \equiv$ “o evento falso” e, escreve-se $u^\emptyset = d^\emptyset = 1 \equiv$ “o evento verdade”.

Eventos mais detalhados são da forma $u^C d^D$ com $C \cup D = E$ e $C \cap D = \emptyset$. Estes são chamados *eventos elementares*. O conjunto de todos os eventos elementares é chamado *espaço de eventos*, que é denotado por Ω . A soma (lógica) de dois eventos a e a' é denotada por $a + a'$. Obviamente, $u_e + d_e = 1$. Dois eventos a e a' são chamados *incompatíveis* ou *disjuntos* se $aa' = 0$.

Eventos formados por somas finitas de eventos-produto finitos são chamados *eventos locais*. Os eventos formados pelo fecho da coleção de eventos locais sobre somas enumeráveis e produto enumeráveis são chamados *eventos aleatórios*.

Eventos mais gerais são obtidos tomando-se o fecho da coleção de eventos aleatórios sobre produtos e somas arbitrárias. Considerando-se a completa distributividade, cada evento pode ser escrito unicamente como uma soma de eventos elementares, logo existe uma correspondência 1-a-1 entre eventos e subconjuntos do espaço de eventos.

Denota-se por $\Pr$ a *probabilidade* de eventos locais e que é definida por:

P1. $\Pr(0) = 0$ e $\Pr(1) = 1$.

P2. $\Pr(u_e) = p_e$ e $\Pr(d_e) = q_e = 1 - p_e$, para cada eventos-aresta, sendo $0 \leq p_e \leq 1$.

P3. Para produtos finitos $u^{E'} d^{E''}$ com $E' \cap E'' = \emptyset$, $\Pr(u^{E'} d^{E''}) = p^{E'} q^{E''}$, ou seja, os eventos são considerados sendo independentes.

P4. Para somas finitas de eventos-produto finitos tem-se:

$$\Pr \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n P(a_i).$$

Note que usando a correspondência entre eventos e subconjunto de espaço de eventos, tem-se que a probabilidade sobre eventos locais corresponde a uma medida normada sobre a álgebra dos conjuntos cilíndricos, correspondentes a eventos locais.

Uma *variável local* é uma função real f sobre o espaço de eventos Ω que assume somente um número finito de valores diferentes f_i tais que para cada i , a soma de todos os eventos elementares com $f(u^C d^D; G) = f_i$ é um evento local a_i . Denota-se $f(u^C d^D; G) = f(C)$.

O *valor de esperança* com respeito a $\Pr$ de uma variável local f é definida sendo:

$$\mathbb{E}\langle f \rangle = \sum_{i=1}^n f_i P(a_i) = \mathbb{E}\langle f; G, \Pr \rangle.$$

As variáveis locais correspondem às funções simples com respeito à álgebra de conjuntos cilíndricos.

O valor de esperança corresponde à integral com respeito a $\Pr$ de uma função simples. As funções obtidas pelo fecho da coleção de variáveis locais não-negativas sobre o supremo e ínfimo de coleções enumeráveis (admitindo-se o valor $+\infty$) são chamadas *variáveis aleatórias não-negativas*. A diferença entre duas variáveis aleatórias não-negativas, ambas não nulas, simultaneamente, é chamada *variável aleatória*. Os termos desta diferença são denominados a parte positiva e negativa da variável aleatória, respectivamente.

Usando o procedimento de extensão da medida sobre semi-anéis, juntamente como esquema de integral de Daniell [Gur78], pode-se, dada uma probabilidade $\Pr$ sobre eventos locais com o valor de esperança correspondente $\mathbb{E}\langle f \rangle$, estende-se de maneira única tais definições a uma probabilidade sobre variáveis aleatórias [Zaa58] para as quais são usadas novamente a notação $\Pr(a)$ e $\mathbb{E}\langle a \rangle$. Se o valor de esperança de uma variável aleatória é finito, esta é dita ser *somável*.

Se ambos os valores da esperança da variável aleatória não forem $+\infty$, ela é dita ser *integrável*. No caso especial que o grafo é finito o valor de esperança de uma variável aleatória reduz-se à seguinte soma:

$$\mathbb{E}\langle f \rangle = \sum_{C \subseteq E} f(C) p^C q^D,$$

e $D = E - C$. Em geral, escreve-se

$$\mathbb{E}\langle f \rangle = \int_{C \subseteq E} f(C) d\Pr(C).$$

Uma classe particular de variáveis aleatórias (não-negativas) é formulada pelo *indicador* de um evento a , que é a função que toma o valor 1, se a ocorre e o valor 0, se a não ocorre.

Um grafo enumerável G , juntamente com a probabilidade $\Pr$ como descrita acima é chamado *modelo de percolação* e é denotada por $(G, \Pr)$. A probabilidade $\Pr$ é completamente caracterizada por uma aplicação p de E no intervalo real $[0, 1]$ tal que $p(e) = p_e = \Pr(c_e)$. Pode se dizer que a medida $\Pr$ é gerada pela aplicação p .

Seja f uma variável aleatória definida sobre o espaço de eventos de um grafo G . Seja E' e E'' subconjuntos disjuntos de $E(G)$. Denote por $G_{E''}^{E'}$, o menor obtido de G pela contração das arestas de E' e pela deleção das arestas de E'' . Defina a função $\tilde{f}$ sobre o espaço de eventos de $G_{E''}^{E'}$ por:

$$\tilde{f}(C; G_{E''}^{E'}) = f(G + E'; G), \text{ para todo } C \subseteq E(G_{E''}^{E'}) = E(G) - E' - E''.$$

Por definição, $\tilde{f}$ é uma variável aleatória e se f é somável, $\tilde{f}$ também é somável.

Teorema 3.5. *Seja $(G, \Pr)$ um modelo de percolação e f uma variável aleatória integrável. Então para todas arestas $e \in E(G)$:*

$$\mathbb{E}\langle f; G \rangle = p_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e'' \rangle + q_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e' \rangle \quad (3.25)$$

Demonstração. Pela definição, $\mathbb{E}\langle f \rangle = \int f(C) d\Pr(C)$. Pela construção, $\Pr$ pode ser decomposta como uma medida-produto, $P = P^E = E^e \times P^{E-e}$, no qual o índice superior especifica o domínio de P . Se f é somável, pode-se aplicar o teorema de Fubini. Se f é não-negativa, ela é o limite de uma seqüência monótona não-decrescente de variáveis aleatórias somáveis e, novamente, pode-se usar o teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{C \subseteq E} f(C) dP^{E-e}(C) &= \int_{C' \subseteq \{e\}} dP^e(C') \int_{C'' \subseteq E-e} dP^{E-e}(C'') f(C' + C''; G) \\ &= p_e \int_{C \subseteq E-e} dP^{E-e}(C) f(C + e; G) + q_e \int_{C \subseteq E-e} dP^{E-e}(C) f(C; G) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pela definição da extensão de f a $G_e' = G - e$ e $G_e'' = G/e$, isto é igual a

$$p_e \int_{C \subseteq E-e} dP(C) \tilde{f}(C; G_e'') + q_e \int_{C \subseteq E-e} dP(C) \tilde{f}(C; G_e') = p_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e'' \rangle + q_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e' \rangle \quad (3.27)$$

Finalmente, se f é integrável, mas não necessariamente somável ou não negativa, então ou a parte positiva f^+ de f , ou a parte negativa f^- de f é somável. Sem perda de generalidade,

seja f^- somável. Pode-se usar o teorema de Fubini sobre as partes positiva e negativa de f e coletar os termos com p_e e q_e .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle f; G \rangle &= \mathbb{E}\langle f^+; G \rangle - \mathbb{E}\langle f^-; G \rangle \\ &= \left[p_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e'' \rangle + q_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e' \rangle \right] - \left[p_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e'' \rangle + q_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e' \rangle \right] \\ &= p_e \left[\mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e'' \rangle - \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e'' \rangle \right] + q_e \left[\mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e' \rangle - \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e' \rangle \right]\end{aligned}\quad (3.28)$$

Como $\widetilde{f^+} = \tilde{f}^+$ e $\widetilde{f^-} = \tilde{f}^-$, então:

$$p_e \left[\mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e'' \rangle - \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e'' \rangle \right] + q_e \left[\mathbb{E}\langle \tilde{f}^+; G_e' \rangle - \mathbb{E}\langle \tilde{f}^-; G_e' \rangle \right] \equiv p_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e'' \rangle + q_e \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e' \rangle. \quad \square$$

Corolário 3.1. *O valor de esperança de uma variável aleatória f é uma função linear de p_e com os valores de fronteira finitos:*

$$\mathbb{E}\langle f; G, p_e = 0 \rangle = \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e'' \rangle \quad e \quad \mathbb{E}\langle f; G, p_e = 1 \rangle = \mathbb{E}\langle \tilde{f}; G_e' \rangle.$$

□

3.8 Aplicações em Mecânica Estatística

O modelo geral de clusters aleatórios sobre um grafo finito $G = (V, E)$ é uma generalização do modelo de bond-percolação sobre arestas de G , descrito na seção anterior, e é definido pela distribuição de probabilidade:

$$\mu(A) = \zeta^{-1} \left(\prod_{e \in A} p_e \right) \left(\prod_{f \notin A} (1 - p_f) \right) Q^{k(A)}, \quad (A \subseteq E(G)), \quad (3.29)$$

em que $k(A)$ é o número de componentes conexas do grafo $G : A = (V, A)$, p_e , $0 \leq p_e \leq 1$ são parâmetros associados a cada aresta de G , $Q \geq 0$ é um parâmetro do modelo e ζ é uma constante normalizadora introduzida tal que

$$\sum_{A \subseteq E} \mu(A) = 1. \quad (3.30)$$

Denote por $\omega(G)$, a configuração aleatória produzida por μ e P_μ a distribuição de probabilidade associada. Assim, em particular,

$$\mu(A) = P_\mu\{\omega(G) = A\}.$$

Quando $Q = 1$, μ é chamado modelo de percolação e quando cada p_e são tomados iguais, por exemplo, p , então $\mu(A)$ é claramente visto como sendo a probabilidade que o conjunto de “arestas abertas” seja A na bond-percolação. Quando $Q = 2$ tem-se o *modelo de Ising* com campo magnético nulo e para outros valores de Q tem-se o *modelo de Pots de Q -estados*. Assim, num certo sentido, o modelo de clutter aleatório define uma continuidade analítica do modelo de Pots para valores não inteiros de Q .

Existe, assim, uma preocupação com a família de medidas de probabilidade a dois parâmetros

$$\mu = \mu(p, Q) \quad 0 \leq p \leq 1 \quad Q \geq 0,$$

definida sobre o conjunto de arestas de um grafo finito $G = (V, E)$ por

$$\mu(A) = \frac{p^{|A|} q^{|E \setminus A|} Q^{k(A)}}{\zeta} \quad (3.31)$$

em que ζ é uma constante normalizadora adequada e $q = 1 - p$.

O estudo de percolação em modelos de clutter aleatório possui uma boa razão que é a relação com transições de fase via função de correlação de dois pontos. Segue uma breve descrição.

Seja Q um inteiro positivo e considere o modelo de Pots de Q -estados sobre um grafo finito G . Se $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ denota um conjunto de spins sobre o conjunto de vértices $\{1, \dots, m\}$ de G , cada spins σ_i podendo tomar os valores no conjunto $\{1, 2, \dots, Q\}$. O hamiltoniano $H(\sigma)$ é definido por

$$H(\sigma) = \sum_{i,j} J_{ij} \left(1 - \delta(\sigma(i), \sigma(j)) \right) \quad (3.32)$$

em que δ é a função delta normal e J_{ij} representa as energias de interação e a função de partição é

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp[-\beta H(\sigma)]. \quad (3.33)$$

em que β é inversamente proporcional à temperatura do sistema represento um parâmetro de desordem do sistema.

A probabilidade de encontrar o sistema no estado σ é dada por

$$\Pr(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z} \quad (3.34)$$

A esperança com respeito a esta distribuição de Gibbs é dada por

$$E \left\langle \delta(\sigma(i), \sigma(j)) \right\rangle = \frac{1}{Q} + \frac{(Q-1)}{Q} P_\mu \{i \rightsquigarrow j\} \quad (3.35)$$

em que P_μ é a medida de clutter aleatório sobre G tomando-se $p_e = 1 - \exp(-J_{ij})$ para cada aresta $e = (i, j)$.

Modelagem de Redes Elétricas

SERÁ DEFINIDA, neste capítulo, uma estrutura abstratamente tratada como uma *rede elétrica*. Também, serão definidos as probabilidades de que um fluxo ocorra em tal rede.

Seja $\mathcal{N} = (V, E, r)$ uma rede elétrica, ou seja, um grafo $G = (V, E)$, juntamente com uma função $r : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, em que $r_e = r(e)$ é a *resistência* da aresta e . Se existe uma *diferença de potencial* $p_e = p_{ab}$ em uma aresta $e = [ab]$ de a para b , então uma *corrente elétrica* obedece a Lei de Ohm

$$\omega_e = \frac{p_e}{r_e},$$

e flui de a para b . A *Lei de Potencial de Kirchhoff* postula que a soma das diferenças de potencial ao redor de qualquer ciclo é nula. A *Lei de Corrente de Kirchhoff* afirma que a corrente total em um vértice também é zero.

Um potencial absoluto V_x é tal que $p_{xy} = V_x - V_y$. Se $(p_{xy})_{x,y \in V(G)}$ é uma distribuição de diferenças de potencial satisfazendo a Lei de Potencial de Kirchhoff e $ux_1x_2 \cdots x_kv$ e $uy_1y_2 \cdots y_lv$ são dois uv -caminhos em G , então

$$p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \cdots + p_{x_{k-1}x_k} + p_{x_kv} = p_{uy_1} + p_{y_1y_2} + \cdots + p_{y_{l-1}y_l} + p_{y_lv} \quad (4.1)$$

e para definir os potenciais absolutos, toma-se um vértice de referência, por exemplo v , e faz-se $V_v = 0$. Portanto para cada vértice $u \in V(G)$ tem-se

$$V_u = p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \cdots + p_{x_{k-1}x_k} + p_{x_kv} \quad (4.2)$$

para qualquer uv -caminho.

A idéia agora é descrever o fluxo de corrente numa rede elétrica que está sujeita a uma determinada configuração (ligações entre vértices). O modelo de percolação para grafos pode ser aplicado a tal rede, o que indicaria uma nova abordagem ao estudo de funções de curto-circuito de redes, que são distúrbios catastróficos sobre uma rede elétrica $\mathcal{N}$.

Se definirmos uma função de risco (Probabilidade de Falha $\times$ Custo) sobre a rede elétrica, o modelo markoviano de descrição de estados é uma forte ferramenta na descrição de cenários futuros.

4.1 O grafo de isolamento

A rede elétrica (abstrata) considerada aqui, possui uma característica especial: os vértices da rede, ou seus componentes, são divididos em dois grandes grupos: os componentes ativos e os passivos. Esta propriedade reflete apenas o fato de que sobre o vértice está definida (ou não) uma função que interrompe o fluxo da rede naquele ponto. Isto fica bem claro quando nos referimos a uma rede elétrica real. Esta possui componentes, denominados *disjuntores*, que possuem dois estados, aberto e fechado, estados nos quais há interrupção de carga ou não.

No caso geral, então um conjunto (possivelmente unitário) de componentes está separado de outros conjuntos por vértices ativos, que denominaremos de *chaves*. Neste cenário, define-se o *grafo de isolamento* como se segue: Seja $\mathcal{N} = (V, E, r)$ uma rede. Seja $D \subseteq V$, o conjunto de chaves ou vértices ativos. Remova D de V e as arestas. O próximo passo é contrair as arestas restantes. Os vértices que são resultantes desta última operação são chamados *setores* do grafo. Finalmente, uma dois vértices-setores se, e somente se, existe, no grafo original, uma chave entre tais setores (veja Figura 4.1).

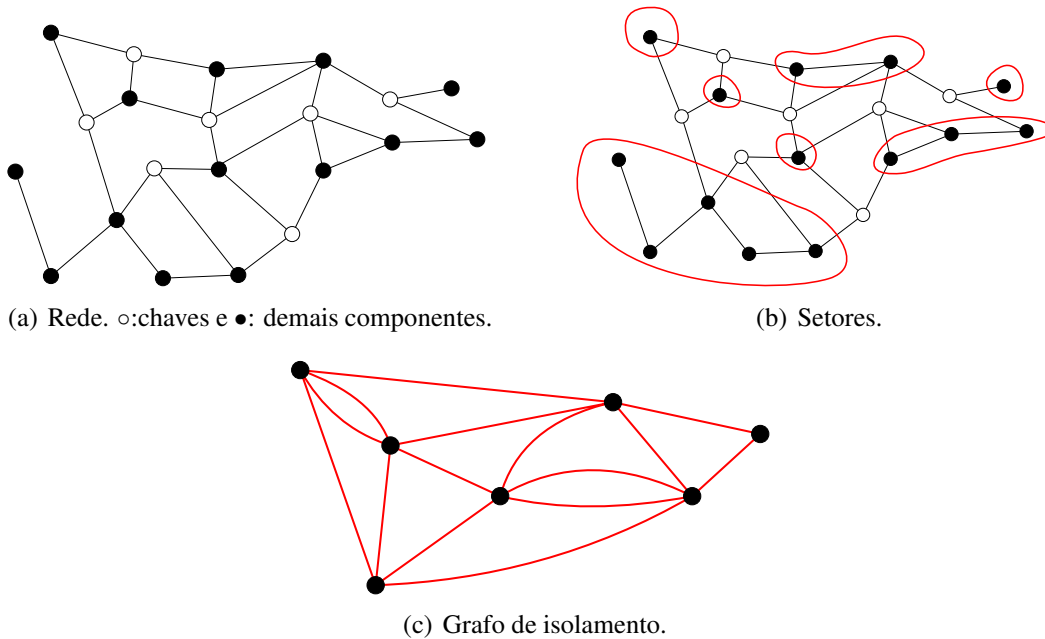


Figura 4.1 Construindo o grafo de isolamento.

Note que ser for definida uma variável aleatória para cada componente de uma rede que represente o tempo de funcionamento deste componente até a sua falha, então cada vértice-setor possui uma variável aleatória que é função das variáveis aleatórias de cada vértice deste setor. Nas próximas seções, serão apresentados resultados de como se podem “compor” as variáveis aleatórias correlacionadas a cada vértice-setor do grafo de isolamento. No próximo capítulo, os fatos aqui expostos serão utilizados na definição de confiabilidade e risco em redes

elétricas.

4.2 Funções usadas em confiabilidade

O procedimento probabilístico de escolher distribuições de probabilidade ajustadas a dados oriundos de confiabilidade pode ser complicado e incluir muitas dificuldades sutis que não são vislumbradas mesmo por especialistas da área. Mesmo com o avanço das ferramentas computacionais disponíveis em *software* amigáveis como *Matlab*®, *R*®, *SAS*®, *Reliasoft*®, entre outros, artigos ([CSS07, GK01a, GK01b, GK02, GK03b, GK03a, GK04, NK06]) publicados recentemente ilustram bem este fato.

A escolha da distribuição de probabilidade de interesse é um procedimento difícil e não é, em geral, automático. Isto é particularmente verdadeiro quando o número de observações é reduzido. Em geral, o analista está interessado em estudar estatísticas como mínimo, máximo e intervalo de variação dos dados, bem como parâmetros da distribuição, tais como, coeficientes de assimetria e curtose. A partir da fdp pode-se deduzir algumas características das distribuições como resumidas a seguir.

O *tempo esperado de vida* (μ) de uma entidade representa uma medida do seu tempo médio de operação antes dela falhar, sendo dado por

$$\mu = \int_0^{+\infty} yf(y)dy.$$

A *função de ponto percentual* (fpp) é a inversa da função de distribuição acumulada, ou seja, $y = F^{-1}(\alpha)$. O seu gráfico *y versus* a probabilidade α representa o comportamento do valor da ordenada (variando do valor mínimo ao valor máximo da variável aleatória) com a abscissa que mede a probabilidade de zero a um.

A *função de risco acumulado* é a integral da função de risco. Pode ser interpretada como a probabilidade de falha no tempo y determinada pela sobrevivência até y .

Será apresentado agora uma revisão simples de alguns dos modelos de confiabilidade comumente encontrados. Quando se olha primeiramente os dados, o que se faz de imediato é denominado de ‘Exploratory Data Analysis’ cujo objetivo é determinar uma distribuição que pode representar um modelo de probabilidade adequado para esses dados.

4.2.1 Modelo de Poisson

No processo de Poisson homogêneo admite-se que a probabilidade de algum evento ocorrer num intervalo reduzido de tempo, h , é igual durante todo o tempo. As hipóteses para um processo de Poisson de taxa λ ocorrer durante um intervalo de tempo pequeno $h \rightarrow 0$, são:

- (i) os eventos em intervalos de tempo disjuntos são independentes, isto é, o número de ocorrências em $(0, t)$ independe e não afeta o número de ocorrências em $(t, t + h)$;
- (ii) a probabilidade de um evento em um intervalo de comprimento h quando $h \rightarrow 0$ é, aproximadamente, proporcional a h mais um erro desprezível de magnitude $o(h)$. Uma função $g(h)$ é $o(h)$ se $g(h)/h \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$;
- (iii) a probabilidade de mais de uma ocorrência em um intervalo de comprimento h é $o(h)$.

A distribuição de Poisson é usada para modelar o número de eventos aleatórios que ocorrem dentro de um intervalo de tempo especificado. O processo de Poisson não tem memória e é descrito através de um único parâmetro λ que mede a sua taxa de falhas no tempo. Assim, se Y_t representa o número de ocorrências num intervalo de tempo t , a probabilidade de haver neste intervalo exatamente k ocorrências é dada por

$$P(Y_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

A fda da distribuição de Poisson é calculada numericamente.

4.2.2 Modelo exponencial

Pode ser facilmente demonstrado que se as ocorrências de eventos são determinadas por um processo de Poisson, então o intervalo de tempo entre ocorrências sucessivas segue a distribuição exponencial, ou seja, é caracterizada pela fdp

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}.$$

A distribuição exponencial é usada para modelar processos de Poisson em situações nas quais o processo estocástico varia de um estado para outro estado com taxa constante por unidade de tempo. Então, a distribuição exponencial descreve o tempo necessário para um processo contínuo mudar de estado. A distribuição exponencial é uma distribuição comumente usada em engenharia de confiabilidade. Devido à sua simplicidade, ela tem sido empregada amplamente até mesmo em casos para os quais as hipóteses básicas do processo de Poisson não se aplicam. A distribuição exponencial é usada para descrever tempos de falhas que têm uma taxa de falha

constante. O tempo médio de falha é simplesmente $\mu = \lambda^{-1}$, a sua fda iguala $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ e a função de risco é igual a λ .

Deve-se notar que o modelo exponencial supõe uma taxa de falha constante, considerando, assim, desprezível, a influência temporal do desgaste sobre os equipamentos modelados, o que não é uma suposição forte para equipamentos nobres do sistema elétrico, tais como transformadores, geradores e linhas de transmissão. A distribuição exponencial, em geral, não é usada no desenvolvimento de estratégias de manutenção preventiva (veja, por exemplo, [BC01]).

Como citado anteriormente, o modelo de Cox pode ser usado para avaliar a influência de variáveis explicativas sobre as taxas de falha. Se na equação (2.3) a taxa de falha for considerada constante, o tempo entre falhas sucessivas será exponencial com média μ dada por:

$$\log(\mu) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}, \quad (4.3)$$

ou seja, obteremos um modelo log-linear para modelar o tempo médio entre falhas sucessivas. Nestes termos, a suposição de taxa de falhas constante vinculada ao modelo de sobrevivência do Cox mostra que a dependência das variáveis explicativas pode ser acomodada de forma simples como um modelo log-linear para a média da distribuição.

A Teoria da Confiabilidade, também, dispõe de mecanismos para uso intensivo da distribuição exponencial. Por exemplo, para representar o *tempo de operação entre falhas sucessivas* (TOFS) de uma entidade. A suposição da distribuição exponencial caracteriza completamente a distribuição dos dados, sendo uma métrica suficiente. Porém, se os dados são modelados por outra distribuição, então ela não é suficiente para descrever os dados, sendo em muitos casos, uma métrica pobre em termos de confiabilidade. O TOFS é muito importante na teoria da confiabilidade, sendo rotineiramente usado nas especificações de confiabilidade e na análise de disponibilidade.

4.2.3 Modelo de Weibull

A fda da distribuição de Weibull com dois parâmetros é

$$F(y) = 1 - e^{-(y/\alpha)^c},$$

sendo c o parâmetro de forma e α o parâmetro de escala. Ambos parâmetros são positivos. A distribuição exponencial é uma caso particular da Weibull correspondendo a $c = 1$. A função de risco é dada por $h(y) = cy^{c-1}/\alpha^c$, sendo crescente quando $c > 1$, decrescente quando $c < 1$ e constante quando $c = 1$. O modelo de Weibull, por generalizar o modelo exponencial com um parâmetro de forma c extra, pode ser usado para representar o tempo de sobrevida de equipamentos com função de risco de diferentes formas: crescente ou decrescente, ou em forma de *curva de banheira*, isto é, mais falhas ocorrem para entidades muito jovens e para entidades

muito velhas. Também, podem ser usado quando o sistema, se reparável, está sob um processo de renovação onde os tempos entre falhas sucessivas são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição de Weibull, e o mesmo apresenta desgaste entre falhas consecutivas.

4.2.4 Modelo de Gumbel

Este é um modelo de distribuição de uma estatística de ordem extrema para uma distribuição de n elementos X_i . Esta tem fdp e fda dadas, respectivamente, por:

$$f(y) = \frac{1}{\beta} \exp \left\{ \frac{y - \alpha}{\beta} - \exp \left(\frac{y - \alpha}{\beta} \right) \right\} e$$

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left(\frac{y - \alpha}{\beta} \right) \right\}.$$

Este modelo é utilizado para encontrar o mínimo (ou o máximo) de um número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, por exemplo, para modelar a oferta ou a demanda máxima diária de energia de um setor elétrico. É útil na predição de catástrofes. A distribuição de Gumbel é um caso especial da distribuição de Fisher-Tippett e é, também, conhecida como distribuição log-Weibull.

4.2.5 Modelo gama

Uma extensão para modelar o tempo de funcionamento de um sistema não-reparável é obtida considerando o tempo de funcionamento seguindo uma distribuição gama que tem uma fdp dada por

$$f(y) = \alpha^r y^{r-1} e^{-\alpha y} / \Gamma(r),$$

em que $\Gamma(r)$ é a função gama. A função de risco e a fda são mais complicadas, pois dependem da função gama incompleta. A forma da função de risco da distribuição gama é adequada para modelar vários desses sistemas não-reparáveis. A distribuição gama é uma modelo de distribuição de vida flexível que pode apresentar um bom ajuste a alguns tipos de dados de falhas. Porém, não é usado amplamente como um modelo de distribuição de vida para entidades face a dificuldades matemáticas. A distribuição gama surge naturalmente como a soma de variáveis aleatórias exponenciais independentes.

4.2.6 Modelos beta-exponencial e beta-Weibull

Como descrito na Seção 2.2, novos modelos de distribuição vêm sendo desenvolvidos [ELF02, CSS07, GN04, NK04, NK06] para modelar tempos de falha. Pode-se definir uma nova classe de distribuições por

$$F(y) = I_{G(y)}(a, b), \quad (4.4)$$

em que $I_x(a, b) = B_x(a, b)/B(a, b)$, com $B_x(a, b) = \int_0^x w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$ denotando a função beta incompleta e $B(a, b) = B_1(a, b)$.

A distribuição beta-Weibull foi motivada pela larga utilização da distribuição Weibull e pelo fato que tal generalização é uma extensão contínua a casos ainda mais complexos.

Explicitamente, a distribuição beta-Weibull é obtida substituindo $G(y)$ em (4.4) pela fda de uma distribuição Weibull com parâmetros λ e c :

$$F(y) = I_{1-\exp\{-(\lambda y)^c\}}(a, b), \quad (4.5)$$

para $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$ e $c > 0$. A distribuição de Weibull é um caso particular da distribuição beta-Weibull com parâmetros $a = b = 1$.

No caso da distribuição beta-exponencial, a função $G(y)$ é substituída pela fda $G(y) = 1 - \exp\{-(y - c)/\lambda\}$, para $y > c$.

4.3 Aproximação assintótica de distribuições

Seja $\mathcal{N}$ uma rede. Como descrito no capítulo anterior, a confiabilidade de tal rede é definida como segue: para dois vértices s e t fixados, deve haver um $s - t$ caminho (que é um sub-grafo aleatório da rede unindo os dois vértices) tal que seja possível a “passagem” de um fluxo definido sobre a rede.

Em geral, pode-se definir um índice de confiabilidade que é expresso por

$$Z = f(X_1, X_2, \dots), \quad (4.6)$$

em que $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias que denotam os parâmetros relacionados à performance ou disponibilidade dos diversos componentes representados pela rede. Existem, também, variáveis aleatórias X_k , relacionadas a parâmetros de operação do sistema. A variável Z é aleatória por se tratar de uma função de variáveis aleatórias, cuja distribuição de probabilidade depende das distribuições das variáveis X_i 's e da função f .

Suponha que a rede $\mathcal{N}$ tenha n componentes, cujas falhas seguem uma distribuição de Poisson. São, também, hipóteses para esta análise: o tempo de reparo de um componente falhado é muito pequeno em relação ao tempo total de operação; se o sistema modelado pela rede está no estado de falha, existe apenas um equipamento no estado de falha e, de fundamental importância, falhas de equipamentos são independentes umas das outras.

Passa-se à descrição das técnicas de avaliação dos momentos dos índices de confiabilidade de componentes de uma rede. Em geral, as funções que descrevem índices de confiabilidade de um sistema possuem formas intrincadas definidas pelas variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots$. A técnica é aproximar tais funções por funções elementares que apresentem maior facilidade de manipulação.

Por vezes, as técnicas de avaliação dos índices de confiabilidade aproximam os momentos centrais e se faz necessário associá-los aos momentos, através de conversões adequadas.

Serão apresentados três tipos de funções elementares de variáveis aleatórias, que são necessárias na análise de confiabilidade: combinação de variáveis aleatórias, funções algébricas e a soma aleatória. Deve-se observar, novamente, que as variáveis aleatórias consideradas são independentes.

4.3.1 Combinação de variáveis aleatórias

Seja Z uma função de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots$, tal que Z pode ser igual a qualquer uma destas variáveis aleatórias e a probabilidade associada a Z tomar valor X_i é p_i . Tem-se

$$\mathbb{E}\langle Z^r \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}\langle X_i^r \rangle. \quad (4.7)$$

Os primeiros quatro momentos de Z , podem, portanto, ser obtidos conhecendo estes momentos para $X_1, X_2, \dots$ e as probabilidades associadas $p_1, p_2, \dots$. Deve-se notar que a soma destas probabilidades deve ser 1, pois qualquer valor tomado por Z tem que ser um dos valores das variáveis aleatórias.

4.3.2 Funções algébricas de variáveis aleatórias

Seja Z uma função algébrica das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$, isto é,

$$Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.8)$$

em que h é uma função algébrica qualquer, por exemplo, polinomial.

Se X_i são variáveis aleatórias não-correlacionadas, tem-se que

$$\mathbb{E}\langle Z \rangle \cong h(\mathbb{E}\langle X_1 \rangle, \dots, \mathbb{E}\langle X_n \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial X_i^2} \mu_{2i} \quad (4.9)$$

$$\mu'_{2Z} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial X_i} \right)^2 \mu_{2i} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial X_i^2} \right) \mu'_{3i} \quad (4.10)$$

$$\mu'_{3Z} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial X_i} \right)^3 \mu_{3i} \quad (4.11)$$

$$\mu'_{4Z} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial X_i} \right)^4 \mu_{4i} + 6 \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial h}{\partial X_i} \right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial X_j} \right)^2 \mu_{2i} \mu_{2j}, \quad i < j. \quad (4.12)$$

Todas as equações acima são estimadas no valor médio de cada variável aleatória. As expressões dadas aproximam valores de momentos, pois eles foram obtidas usando a expansão em série de Taylor da função h em torno do ponto em que cada uma das variáveis aleatórias dos componente tomam seus valores médios. Quando h é uma função algébrica linear,

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i, \quad (4.13)$$

para $a_i \in \mathbb{R}$, os valores das derivadas são

$$\frac{\partial h}{\partial X_i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \frac{\partial^2 h}{\partial X_i^2} = 0, \quad \forall i. \quad (4.14)$$

Neste caso,

$$\mu'_{1Z} = \sum_{i=1}^n a_i \mu'_{1i} \quad (4.15)$$

$$\mu_{2Z} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mu_{2i} \quad (4.16)$$

$$\mu_{3Z} = \sum_{i=1}^n a_i^3 \mu_{3i} \quad (4.17)$$

$$\mu_{4Z} = \sum_{i=1}^n a_i^4 \mu_{4i} + 6 \sum_i \sum_j a_i^2 a_j^2 \mu_{2i} \mu_{2j}, \quad i < j. \quad (4.18)$$

4.3.3 Soma aleatória de variáveis aleatórias

Considere uma variável aleatória S , tal que

$$S = \sum_{k=1}^N X_k,$$

em que N é uma variável aleatória discreta, $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes de N e $S = 0$, se N toma o valor 0. A variável aleatória S é dita ser uma soma aleatória. Se as variáveis aleatórias X_k são independentes e identicamente distribuídas, como os quatro primeiros momentos $\mathbb{E}\langle X \rangle$, $\mathbb{E}\langle X^2 \rangle$, $\mathbb{E}\langle X^3 \rangle$ e $\mathbb{E}\langle X^4 \rangle$ e a variável aleatória N com momentos dados por $\mathbb{E}\langle N \rangle$, $\mathbb{E}\langle N^2 \rangle$, $\mathbb{E}\langle N^3 \rangle$ e $\mathbb{E}\langle N^4 \rangle$, então tem-se que:

$$\mathbb{E}\langle S \rangle = \mathbb{E}\langle X \rangle \mathbb{E}\langle N \rangle, \text{ em que } X = X_i, \text{ para qualquer } i \quad (4.19)$$

$$\mathbb{E}\langle S^2 \rangle = \left[\mathbb{E}\langle X^2 \rangle - (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2 \right] \mathbb{E}\langle N \rangle - (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2 \mathbb{E}\langle N^2 \rangle \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle S^3 \rangle = & \left[\mathbb{E}\langle X^3 \rangle - 3\mathbb{E}\langle X^2 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle + 2(\mathbb{E}\langle X \rangle)^3 \right] \mathbb{E}\langle N \rangle \\ & + \left[3\mathbb{E}\langle X^2 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle - 3(\mathbb{E}\langle X \rangle)^3 \right] \mathbb{E}\langle N^2 \rangle + (\mathbb{E}\langle X \rangle)^3 \mathbb{E}\langle N^3 \rangle \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle S^4 \rangle = & \left[\mathbb{E}\langle X^4 \rangle - 4\mathbb{E}\langle X^3 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle - 3(\mathbb{E}\langle X^2 \rangle)^2 + 12\mathbb{E}\langle X^2 \rangle (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2 - 6(\mathbb{E}\langle X \rangle)^4 \right] \mathbb{E}\langle N \rangle \\ & + \left[4\mathbb{E}\langle X^3 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle + 3(\mathbb{E}\langle X^2 \rangle)^2 - 18\mathbb{E}\langle X^2 \rangle (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2 + 11(\mathbb{E}\langle X \rangle)^4 \right] \mathbb{E}\langle N^2 \rangle \\ & + \left[6\mathbb{E}\langle X^2 \rangle (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2 - 6(\mathbb{E}\langle X \rangle)^4 \right] \mathbb{E}\langle N^3 \rangle + (\mathbb{E}\langle X \rangle)^4 \mathbb{E}\langle N^4 \rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Considere a variável aleatória K , tal que o valor tomado por ela seja igual à soma de N observações independentes de uma variável aleatória X , em que N é uma variável aleatória discreta. Cada uma das variáveis aleatórias é equivalente à variável aleatória S , para qual os momentos são dados pelas equações (4.19) – (4.22). Os momentos de K podem, portanto, avaliados usando as mesmas equações utilizando-se os momentos de X ao invés dos de X_i .

4.3.4 Conversão de momentos

Seguem as relações entre os momentos e momentos centrais que podem ser utilizados nas subseções anteriores para permutação entre estas duas grandezas.

$$\mu_{2X} = \mathbb{E}\langle X^2 \rangle - (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2, \quad (4.23)$$

$$\mu_{3X} = \mathbb{E}\langle X^3 \rangle - 3\mathbb{E}\langle X^2 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle + 2(\mathbb{E}\langle X \rangle)^3, \quad (4.24)$$

$$\mu_{4X} = \mathbb{E}\langle X^4 \rangle - 4\mathbb{E}\langle X^3 \rangle \mathbb{E}\langle X \rangle + 6\mathbb{E}\langle X^2 \rangle (\mathbb{E}\langle X \rangle)^2. \quad (4.25)$$

4.3.5 Método de Pearson para aproximação de distribuições

A família de distribuições de Pearson é composta pelas distribuições que podem ser geradas pela resolução da equação diferencial (veja Apêndice A):

$$f'(x) = -\frac{(x+d)f(x)}{b_0 + b_1x + b_2x^2}, \quad (4.26)$$

em que b_0, b_1, b_2 e d são valores reais.

A fim de que seja possível a utilização do método de Pearson como aproximação de uma dada distribuição são necessários para uma dada variável aleatória seus valores de mediana, momentos centrais de ordem 2, 3 e 4. O procedimento envolve o uso de uma tabela de percentis padronizada [JNAP63], baseada na solução da equação (4.26) e pode ser delineado como:

1. Cálculo dos valores dos parâmetros $\sqrt{\beta_1}$ e β_2 como segue:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_{3X}}{\sqrt{\mu_{2X}^3}},$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_{4X}}{\mu_{2X}^2}.$$

2. Encontrar os percentuais padronizados na tabela z_α para um α escolhido, usando $\sqrt{\beta_1}$ e β_2 , usando interpolação sempre que preciso.
3. O α -ésimo percentual estimado é então calculado como $\mu_X + z_\alpha \sqrt{\mu'_{1X}}$.

No próximo capítulo, será dedicada uma seção na aplicação das técnicas aqui explanadas no caso de redes elétricas reais, para as quais certas funções de confiabilidade podem ser definidas como processos estocásticos. Na próxima seção, está apresentada uma resolução exata quando as distribuições das variáveis aleatórias que representam os diversos índices de uma rede são exponenciais.

4.4 O mínimo de variáveis aleatórias : o caso exponencial

Nesta seção, será apresentado um caso especial de uma função de variáveis aleatórias, assim como, um caso particular de distribuição. A idéia é apresentar uma técnica de análise de um sistema sobre tais hipóteses: seja $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ o conjunto de componentes de um sistema elétrico. Seja X_i o tempo de sobrevida de um componente c_i . Aqui, as variáveis aleatórias X_i

serão consideradas independentes (hipótese fundamental) com distribuição exponencial (hipótese simplificadora), $X_i \sim E(\lambda_i)$, ou seja, a função de distribuição acumulada para cada variável é dada por

$$F_i(t) = \Pr(X_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda_i t}, & t > 0, \end{cases}$$

em que $\lambda_i > 0$ é uma constante fixada. Um propriedade importante da distribuição é dada por

Proposição 4.1. *Se $X \sim E(\lambda)$, então*

$$\Pr(X > t + s | X > s) = \Pr(X > t).$$

Além disso, X assim distribuída é a única variável aleatória contínua com tal propriedade.

A propriedade dada pela proposição acima é chamada *falta de memória* da variável aleatória X .

Demonstração. De maneira direta,

$$\begin{aligned} \Pr(X > t + s | X > s) &= \frac{\Pr(X > t + s, X > s)}{\Pr(X > s)} \\ &= \frac{\Pr(X > t + s)}{\Pr(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \Pr(X > t). \end{aligned}$$

Agora, suponha que X tenha a propriedade acima. Seja $F^c(t) = \Pr(X > t)$. Então, pela propriedade em questão, $F^c(\cdot)$ deve satisfazer: $F^c(x+y) = F^c(x) \cdot F^c(y)$. Em particular,

$$F^c(2) = (F^c(1))^2 \text{ e } F^c(1/2) = (F^c(1))^{1/2},$$

e se $a \in \mathbb{Q}$, tem-se que

$$F^c(a) = (F^c(1))^a.$$

Portanto,

$$F^c(a) = (F^c(1))^a = e^{\log(F^c(1))^a} = e^{-\lambda a},$$

em que $\lambda = \log(F^c(1))$ e $a \in \mathbb{R}$. □

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias exponenciais independentes, como no sistema descrito. Sejam λ_1 e λ_2 os parâmetros de X_1 e X_2 , respectivamente. Se X_1 e X_2 representam o tempo de

funcionamento de componentes, então

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty \Pr(X_2 > X_1 | X_1 = t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\
 &= \int_0^\infty \Pr(X_2 > t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
 \end{aligned}$$

Cabe lembrar que as variáveis aleatórias exponenciais são as únicas variáveis aleatórias contínuas que possuem taxa de falha constante $h(t) = \lambda$.

Agora, considere $X_1 \sim E(\lambda_1)$ e $X_2 \sim E(\lambda_2)$, independentes e defina $Z = \min\{X_1, X_2\}$. Se um setor (no grafo de isolamento) possui dois componentes, c_1 e c_2 , o tempo de sobrevivência do setor até a primeira falha é dada por Z . Note que

$$\begin{aligned}
 \Pr(Z > t) &= \Pr(\min\{X_1, X_2\} > t) \\
 &= \Pr(X_1 > t, X_2 > t) \\
 &= \Pr(X_1 > t) \Pr(X_2 > t) \\
 &= e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $Z \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$. Note, também, que $E(Z) \leq \min\{E(X_1), E(X_2)\}$, pois

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq \lambda_i, \quad i = 1, 2.$$

Defina, agora,

$$N = \begin{cases} 1, & \text{se } Z = X_1, \\ 2, & \text{se } Z = X_2. \end{cases}$$

Tem-se que

$$\Pr(N = 1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{e} \quad \Pr(N = 2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Agora, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \Pr(Z > t, N = 1) &= \Pr(\min\{X_1, X_2\} > t, X_1 < X_2) \\
 &= \Pr(X_1 < X_2; X_1 > t, X_2 > t) \\
 &= \int_0^\infty \Pr(X_2 > X_1; X_1 > t, X_2 > t | X_1 = t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \int_t^\infty \Pr(X_2 > X_1; x > t, X_2 > t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \int_t^\infty \Pr(X_2 > x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \int_t^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\Pr(Z > t, N = 2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \quad (4.27)$$

Assim, tem-se que Z e N são variáveis aleatórias independentes. Generalizando as idéias acima, se $X_i \sim E(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ são variáveis aleatórias independentes e,

$$Z = \min\{X_i, i = 1, \dots, n\}, \quad N = k, \text{ se } Z = X_k, k = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

então

$$\Pr(Z > t; N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

é a distribuição do “nascidoiro” de uma falha no sistema.

Sejam $X_i \sim E(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, independentes. Tem-se que

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_2 - X_1 > t, X_2 > X_1) &= \int_0^\infty \Pr(X_2 > t + X_1; X_2 > X_1 | X_1 = x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \int_0^\infty \Pr(X_2 > t + x; X_2 > x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2(x+t)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= e^{-\lambda_2 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
 \end{aligned}$$

E, portanto, $\Pr(X_2 - X_1 > t | X_2 > X_1) = e^{-\lambda_2 t}$, em outras palavras, se $X_2 - X_1$ é positivo, então esta diferença é exponencialmente distribuída. Como X_i representa o tempo de funcionamento do componente c_i , $i = 1, 2$ dado que o componente c_1 falhe primeiro, o tempo de funcionamento restante do componente c_2 é, ainda, distribuído exponencialmente. De fato, o tempo restante

do componente c_2 independe do tempo de falha de c_1 . Ou sejam se $X_2 > X_1$, $X_2 - X_1 \sim E(\lambda_2)$ é independente de X_1 .

Considerando todo sistema $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ com $X_i \sim E(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, independentes, então

$$\Pr(X_i - X_j > t_j; i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j | X_i > X_j \text{ para } i = 1, \dots, \hat{j}, \dots, n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e^{-\lambda_k t_k}. \quad (4.28)$$

A fim de tornar os resultados mais claros, tem-se o seguinte exemplo. Considere o sistema com n componentes, como antes, $X_i \sim E(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, variáveis aleatórias independentes, representando o tempo de funcionamento de cada componente c_i . Supondo que o sistema funcione se pelo menos um dos componentes funcionar, defina Z_1 o tempo da primeira falha, Z_2 o tempo da segunda, e assim por diante. Tem-se que

$$Z_1 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \sim E(n\lambda) \quad \text{e} \quad Z_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

No tempo Z_1 , apenas $n - 1$ componentes estão funcionando. Note que por (4.28), o restante dos componentes ainda são distribuídos exponencialmente e são independentes. Portanto, o tempo até a próxima falha, a saber, $Z_2 - Z_1$, é igual ao mínimo de $n - 1$ variáveis aleatórias exponenciais independentes. Assim,

$$\begin{aligned} Z_2 - Z_1 &= \min\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{n-1}}\} \sim E((n-1)\lambda), \\ Z_3 - Z_1 &= \min\{X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_{n-2}}\} \sim E((n-2)\lambda), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\langle Z_1 \rangle = \frac{1}{n\lambda}, \quad \mathbb{E}\langle Z_2 - Z_1 \rangle = \frac{1}{(n-1)\lambda}, \quad \dots, \quad \mathbb{E}\langle Z_n - Z_{n-1} \rangle = \frac{1}{\lambda}$$

e

$$\mathbb{E}\langle \text{tempo de funcionamento do sistema} \rangle = \mathbb{E}\langle Z_n \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\lambda}.$$

Pode-se ilustrar os resultados acima considerando-se dois sistemas S_1 e S_2 , sendo S_1 composto de dois componentes em paralelo com tempo de funcionamento dado por variáveis aleatórias exponenciais identicamente distribuídas e S_2 com somente um componente com tempo de funcionamento com distribuição exponencial e parâmetro μ . Seja Z_i o tempo da i -ésima falha no sistema S_1 ($i = 1, 2$). O sistema S_1 falha em Z_2 (os dois componentes estão falhados). Neste

caso, $Z_2 \sim E(2\lambda)$ e $Z_2 - Z_1 \sim E(\lambda)$. Seja X o tempo de funcionamento do sistema S_2 . Então

$$\begin{aligned} \Pr(\text{sistema } S_1 \text{ falhe antes que } S_2) &= \Pr(Z_1 < X) \Pr(Z_2 - Z_1 < X - Z_1 | X > Z_1) \\ &= \Pr(\exp(2\lambda) < \exp(\mu)) \Pr(\exp(\lambda) < \exp(\mu)) \\ &= \frac{2\lambda}{2\lambda + \mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

4.4.1 Soma de exponenciais

Sejam $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, variáveis aleatórias exponenciais identicamente distribuídas. Seja

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

A primeira transformada de Laplace-Stieltjes de Z é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle e^{-sZ} \rangle &= \mathbb{E}\langle e^{-s(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \rangle \\ &= \mathbb{E}\langle e^{-sX_1} \rangle \cdot \mathbb{E}\langle e^{-sX_2} \rangle \cdot \dots \cdot \mathbb{E}\langle e^{-sX_n} \rangle \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n. \end{aligned}$$

Tomando a transformada inversa, vê-se que a função densidade de probabilidade de Z é dada por:

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t > 0, \end{cases}$$

e a função acumulada é dada por

$$F_Z(t) = \Pr(Z \leq t) = 1 - \sum_{r=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}.$$

Assim, Z é uma variável aleatória com distribuição de Erlang, $Z \sim E_n(\lambda)$, que é o mesmo de uma distribuição gama, $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Supondo, agora, que $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, variáveis aleatórias exponenciais independentes, com $X_i \sim E(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$, e $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. A transformada de Laplace-Stieltjes de Z é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle e^{-sZ} \rangle &= \mathbb{E}\langle e^{-s(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \rangle \\ &= \mathbb{E}\langle e^{-sX_1} \rangle \cdot \mathbb{E}\langle e^{-sX_2} \rangle \cdot \dots \cdot \mathbb{E}\langle e^{-sX_n} \rangle \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor que para $i \neq j$, tem-se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Neste caso, pode-se usar uma expansão de frações e obter

$$f_Z(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

$$\text{em que } \alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \lambda_i}.$$

4.4.2 Soma aleatória de variáveis aleatórias

Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma seqüência de variáveis aleatórias exponenciais identicamente distribuídas com parâmetro λ . Seja N uma variável aleatória com distribuição geométrica, $N \sim G(p)$, ou seja,

$$\Pr(N = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k \geq 1,$$

em que $0 \leq p \leq 1$ é uma constante. Considere que N seja independente de $\{X_n, n \geq 1\}$. Defina

$$Z = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Assim Z é uma soma aleatória de variáveis aleatórias. A transformada de Laplace-Stieltjes de Z pela condicionante N é dada por

$$\mathbb{E}\langle e^{-sZ} \rangle = \mathbb{E}\langle \mathbb{E}\langle e^{-sZ} | N \rangle \rangle.$$

Como $N = n$ implica que $Z = \sum_{k=1}^n X_k$ é uma variável aleatória e possui distribuição gama com parâmetros n e λ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle e^{-sZ} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\langle e^{-sZ} | N = n \rangle \Pr(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n (1 - p)^{n-1} p \\ &= \frac{\lambda p}{\lambda + s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda(1 - p)}{\lambda + s} \right)^{n-1} = \frac{\lambda p}{\lambda + s} \cdot \frac{1}{1 - \lambda \frac{1-p}{\lambda+s}} \\ &= \frac{\lambda p}{\lambda p + s}. \end{aligned}$$

Portanto, $Z \sim E(\lambda p)$, ou seja, Z possui distribuição exponencial com parâmetro λp .

4.5 Confiabilidade em digrafos estocásticos

Nesta seção, será apresentada outra abordagem de estudo de confiabilidade sobre uma estrutura abstrata, que novamente representa uma rede elétrica. Seja $\mathcal{D} = ((V, E), f)$ um digrafo, $V \neq \emptyset$,

e $f = (f^1, f^2)$ com $f^i : E \rightarrow \mathbf{N}$, $i = 1, 2$, a aplicação de incidência, definida como: se $\vec{e} = [a, b] \in E$, $f^1(e) = a$ e $f^2(e) = b$, os extremos inicial e final de e . Será denotado por D_{st} ao digrafo finito, fracamente conexo, acíclico, com um único vértice-base (fonte), denotado por s , e com outro vértice t , único sorvedouro. A partir deste ponto nesta seção e se não for mencionado em contrário, os grafos considerados serão deste tipo.

Uma questão sobre o grafo D_{st} e $i, j \in V(D_{st})$ é se existe um subgrafo $D_{ij} \subseteq D_{st}$ com as mesmas propriedades do supragrafo. Em particular, dois subgrafos são de interesse: o subgrafo maximal, denotado por $\hat{D}_{ij}$ e o subgrafo minimal $\mathcal{P}_{ij}$, que são caminhos unindo i a j . Denota-se, também, por $\mathcal{P}_{ij}^k$, $k \in V(\mathcal{P}_{ij})$, os subcaminhos de $\mathcal{P}_{ij}$ de i para k e de k para j . O conjunto de caminhos que pertencem a D_{ij} é denotado por $\mathcal{P}(D_{ij})$.

Seja D_{st} um digrafo, como descrito. Defina sobre $V(D_{st})$ uma função

$$l : V(D_{st}) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\},$$

com $m = |V(D_{st})| - 1$ e para $e \in E(D_{st})$

$$l(f^1(e)) < l(f^2(e)), \text{ e } l(s) = 0 \text{ e } l(t) = m.$$

Com a identificação de $V(D_{st}) : \{0, 1, \dots, m\}$, os vértices de D_{st} são considerados topologicamente ordenados e, a partir deste ponto, nesta seção, a notação $\hat{D}_{0m}$ será usada, ao invés de D_{st} . $V(\hat{D}_{0m})$ é composto de vértices ditos *perfeitos*, no sentido que não há falhas sobre estes (ou sobre os componentes que são representados por tais objetos). Também, $E(\hat{D}_{0m})$ é composto por elementos que podem sofrer falhas, ou não confiáveis, que podem ser representados pelo vetor:

$$\{X(t), t \in T\} = \{(X_e(t), e \in E(\hat{D}_{0m})), t \in T\},$$

em que $X_e(t)$ são variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ com

$$X_e(t) = \begin{cases} 1, & \text{aresta } e \text{ está funcionando no tempo } t, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.29)$$

para cada $e \in E(\hat{D}_{0m})$ e $t \in T \subset [0, \infty)$.

Para $\omega \in \Omega$, fixo, as funções de amostragem $X_e(t, \omega)$ são consideradas contínuas à direita em T . Assim, para um tempo fixado $t \in T$, o *grafo estocástico* é descrito pela quádrupla:

$$(V(\hat{D}_{0m}), E(\hat{D}_{0m}), f, \{X_e(t), e \in E(\hat{D}_{0m})\}).$$

Diz-se que $X_1, X_2, \dots, X_k$ são *variáveis aleatórias associadas* ou *correlacionadas* se

$$\text{Cov}(f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X})) \geq 0,$$

para todas as funções não-decrescentes f e g , para as quais $\mathbb{E}\langle f(\mathbf{X}) \rangle$, $\mathbb{E}\langle g(\mathbf{X}) \rangle$, e $\mathbb{E}\langle f(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) \rangle$ existem, em que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ (ver [EPW67] para propriedades e demais resultados sobre variáveis aleatórias correlacionadas). Considera-se que o processo de performance de confiabilidade descritos esteja associado ao tempo, o que significa que para todos os conjuntos finitos de tempo $T_k = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset T$

$$\{X_e(t), t \in T_k, e \in E(\hat{D}_{0m})\} \text{ é um conjunto de variáveis aleatórias correlacionadas.} \quad (4.30)$$

Para dois vértices i e j de $\hat{D}_{0m}$ para os quais os subdigrafos D_{ij} estejam definidos, uma questão interessante é se existiria um caminho $\mathcal{P}_{ij}$ com todas as arestas funcionando de i para j . Mais formalmente, para todo subgrafo D_{ij} uma função denominada *caminho*

$$\varphi_{D_{ij}} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um caminho com todas} \\ & \text{as arestas em funcionamento } \mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{P}(D_{ij}), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.31)$$

pode ser definida com uma representação por caminhos:

$$\begin{aligned} \varphi_{D_{ij}}(X(t)) &= 1 - \prod_{\mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{P}(D_{ij})} \left(1 - \prod_{e \in E(\mathcal{P}_{ij})} X_e(t) \right) \\ &= \max_{\mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{P}(D_{ij})} \left\{ \prod_{e \in E(\mathcal{P}_{ij})} X_e(t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Seja C_{ij} um corte minimal de D_{ij} , ou seja, um subconjunto $C_{ij} \subseteq E(D_{ij})$, tal que $C_{ij} \cap E(\mathcal{P}_{ij}) \neq \emptyset$, para todo $\mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{P}(D_{ij})$. Então, a representação

$$\begin{aligned} \varphi_{D_{ij}}(X(t)) &= \prod_{C_{ij} \in C(D_{ij})} \varphi_{C_{ij}}(X(t)) \\ &= \prod_{C_{ij} \in C(D_{ij})} \left(\prod_{e \in C_{ij}} (1 - X_e(t)) \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que $C(D_{ij})$ é o conjunto de todos os corte de D_{ij} . Não é difícil ver que, de fato, as formas (4.32) e (4.33) são equivalentes.

Para um tempo $t \in T$, fixo, a função de caminhos, $\varphi_{D_{ij}}$ é uma função binária não decrescente, com $\varphi_{D_{ij}}(0, 0, \dots, 0) = 0$ e $\varphi_{D_{ij}}(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Seja $R_{D_{ij}}$, a função de confiabilidade do sistema representado pelo digrafo D_{ij} , definida por

$$R_{D_{ij}}(\tau) = \Pr \left(\varphi_{D_{ij}}(X(t)) = 1, \forall t \in T(\tau) \right), \quad (4.34)$$

em que $T(\tau) = [0, \tau] \cap T$. R é uma medida intuitiva de confiabilidade para um digrafo D_{ij} , mas para grafos mais complexos e maiores a determinação de seu valor exato pode ser difícil.

4.5.1 Decomposição de digrafos

Denote por δ_n , a seguinte família de subdigrafos de $\hat{D}_{0m}$:

$$\delta_n = \{D_{in} : D_{in} \text{ é subdigrafo, } i < n\},$$

ou seja, a família de subdigrafos que têm o mesmo sorvedouro $n \in V(\hat{D}_{0m})$, $1 \leq n \leq m$. Também, denote o conjunto de vértices-fontes associados à família δ_n por:

$$F(\delta_n) = \{i, i \in V(\hat{D}_{0m}), D_{in} \in \delta_n\}$$

A família δ_n é chamada *própria* se

1. Para quaisquer D_{in}^1 e D_{jn}^2 em δ_n , tem-se

$$D_{in}^1 \cap D_{jn}^2 = \begin{cases} (\{i, n\}, \emptyset), & \text{se } i = j \\ (\{n\}, \emptyset), & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (4.35)$$

2. Para todo $\mathcal{P}_{0m}$ em $\hat{D}_{0m}$ existe $i \in F(\delta_n) \cap V(\hat{D}_{0m})$ e $D_{in} \in \delta_n$ tal que:

$$\mathcal{P}_{0n} = (\mathcal{P}_{0n})_i \cup (\mathcal{P}_{0n})^i, \quad (4.36)$$

com $(\mathcal{P}_{0n})_i \cup \delta_n \subset (F(\delta_n), \emptyset)$ e $(\mathcal{P}_{0n})^i \in \mathcal{P}(D_{in})$.

Digrafos próprios sempre existem, visto que $\delta = \{\hat{D}_{0m}\}$ é próprio. A propriedade dada por (4.35) diz que os subdigrafos da família própria δ_n são aresta-disjuntos e vértice-disjuntos, a menos para o vértice-sorvedouro n e, eventualmente, um vértice-fonte i . A Equação (4.36) estabelece a relação entre $\mathcal{P}(\hat{D}_{0n})$ e δ_n .

A demonstração da proposição abaixo segue diretamente das definições dadas acima.

Proposição 4.2. Se $\delta_n = \{D_{in}\}$ é uma família própria de digrafos então:

$$\varphi_{\hat{D}_{0n}} = 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} (1 - \varphi_{\hat{D}_{0i}} \varphi_{D_{in}}) = \max_{D_{in} \in \delta_n} \{ \varphi_{\hat{D}_{0i}} \varphi_{D_{in}} \}. \quad (4.37)$$

4.5.2 Limites para confiabilidade

É natural a busca de limites sobre os diversos índices que são definidos. Em particular segue-se a determinação de limites para a confiabilidade de um sistema.

Lema 4.1. Seja $A = (\alpha_{ij})$, $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$, $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$. Então

$$(i) \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \prod_{j=1}^s \alpha_{ij} \right\} \leq \prod_{j=1}^s \max_{1 \leq i \leq r} \{ \alpha_{ij} \}.$$

$$(ii) \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \prod_{j=1}^s \alpha_{ij} \right\} \leq 1 - \prod_{i=1}^r \left(1 - \prod_{j=1}^s \alpha_{ij} \right).$$

Se $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$, e com $\alpha_{ij_1} \geq \alpha_{ij_2}$, para $j_1 \leq j_2$, para todo i , então:

$$(iii) \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \prod_{j=1}^s \alpha_{ij} \right\} = \prod_{j=1}^s \max_{1 \leq i \leq r} \{ \alpha_{ij} \} = 1 - \prod_{i=1}^r \left(1 - \prod_{j=1}^s \alpha_{ij} \right)$$

Demonstração.

(i) É claro para as hipóteses consideradas.

(ii) Segue por indução sobre r com respeito a $\beta_i = \prod_{j=1}^s \alpha_{ij}$.

(iii) Se $\max_{1 \leq i \leq r} \{ \alpha_{ij_0} \} = 0$, para algum $j_0 \in \{1, 2, \dots, s\}$, nada a provar. Mas se $\max_{1 \leq i \leq r} \{ \alpha_{ij} \} = 1$, para todo j , então existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, r\}$ com $\alpha_{i_0 s} = 1$ e devido à propriedade de α_{ij} ser não-decrescente, $\alpha_{i_0 j} = 1$, para todo j . $\square$

É dito que um componente com processo de confiabilidade $\{X(t), t \in T\}$ está *em funcionamento* em $T(\tau)$, se $\Pr(X(t) = 1, \forall t \in [0, s] | X(s) = 1) = 1$, para todo $s \in T(\tau)$ com $\Pr(X(s) = 1) > 0$. Neste caso,

Lema 4.2. Se D é um digrafo cujos vértices estão em funcionamento em $T(\tau)$, então

$$\varphi_D(X(t_1)) \geq \varphi_D(X(t_2)), \quad t_1 < t_2, \quad t_1, t_2 \in T(\tau).$$

Demonstração. Defina $A = \{\omega \in \Omega : \varphi_D(X(t_2, \omega)) = 1\}$ com $\Pr(A) > 0$ e $\tilde{A} = \{\omega \in \Omega : \varphi_D(X(t_1, \omega)) \leq \varphi_D(X(t_2, \omega))\}$. Tem-se que $\tilde{A} \subset A$, pois φ_D é uma função binária. Como $\Pr(\tilde{A}) > 0$,

$$\begin{aligned} \Pr(\varphi_D(X(t)) = 1, \forall t \in [0, t_2] | \varphi_D(X(t_2)) = 1) &\leq \Pr(\varphi_D(X(t_1)) = 1 | \varphi_D(X(t_2)) = 1) \\ &= \frac{\Pr(A \setminus \tilde{A})}{\Pr(A)} < 1, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Disso segue a afirmação do lema. $\square$

Seja $\Theta \subset T(\tau)$ um subconjunto enumerável e denso em $T(\tau)$. Considere, também, $T_k = \{t_1, \dots, t_k\} \subset \Theta$, um subconjunto finito de Θ com $T_k \nearrow \Theta$, $(k \rightarrow \infty)$ e D, D_1 e D_2 subdigrafos de uma δ -família própria. Então, pela convergência monótona,

$$\Pr(\varphi_D(X(t)) = 1, t \in T_k) \searrow \Pr(\varphi_D(X(t)) = 1, \forall t \in \Theta), \quad (k \rightarrow \infty). \quad (4.38)$$

Além disso,

$$R_D(\tau) = \Pr(\varphi_D(X(t)) = 1, \forall t \in \Theta), \quad (4.39)$$

pois $\varphi_D(X(t, \omega))$ é contínua à direita, para $\omega \in \Omega$, fixo. E, se $\{X(t), t \in T\}$ é tempo associado, então

$$\{\varphi_D(X(t)), t \in T\} \text{ é tempo-associado,} \quad (4.40)$$

pois $\varphi_D(X(t))$ é uma função binária não-decrescente para um $t \in T$, fixo. Como $\{\varphi_D(X(t)), t \in T\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias binárias correlacionadas, para D_1 e D_2 em δ , tem-se:

$$E \left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{D_1}(X(t_x)) \varphi_{D_2}(X(t_x)) \right\rangle \geq E \left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{D_1}(X(t_x)) \right\rangle E \left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{D_2}(X(t_x)) \right\rangle. \quad (4.41)$$

Agora, considere que com respeito a uma família própria de digrafos $\delta_n = \{D_{in}\}$, existam limites inferior e superior de confiabilidade, $R_{\hat{D}_{0i}}(\tau)$, $i \in F(\delta_n)$, denotados por

$$L_i(\tau) \leq R_{\hat{D}_{0i}}(\tau) \leq U_i(\tau), \quad i \in F(\delta_n), \quad (4.42)$$

e, defina,

$$L_n(\tau) = \max_{D_{in} \in \delta_n} \{L_i(\tau) R_{D_{in}}(\tau)\}, \quad (4.43)$$

$$U_n(\tau) = 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} (1 - U_i(\tau) R_{D_{in}}(\tau)). \quad (4.44)$$

Teorema 4.1. *Se $\delta_n = \{D_n\}$ é uma família própria de digrafos, se $\{X(t), t \in T\}$ é um processo associado ao tempo de performance de confiabilidade. Então:*

$$R_{\hat{D}_{0n}}(\tau) \geq L_n(\tau).$$

Demonstração. Considerando-se (4.38 – 4.44), tem-se para um conjunto finito de tempos T_k :

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\varphi_{\hat{D}_{0n}}(X(t)) = 1, t \in T_k\right) &= \Pr\left(\prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0n}}(X(t_x)) = 1\right) \\
&= E\left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \right\rangle \\
&= E\left\langle \prod_{x=1}^k \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\} \right\rangle \\
&\geq E\left\langle \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\} \right\rangle \\
&\geq \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ E\left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\rangle \right\} \\
&\geq \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ E\left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0n}}(X(t_x)) \right\rangle E\left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\rangle \right\} \\
&= \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ \Pr\left(\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t)) = 1, t \in T_k\right) \Pr\left(\varphi_{D_{in}}(X(t)) = 1, t \in T_k\right) \right\}.
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue da aplicação da Proposição 4.2 e do Lema 4.1(i). A segunda desigualdade segue da desigualdade de Jensen (ver [Rud87]), devido à convexidade do operador máximo. A terceira desigualdade segue de (4.41). Aplicando (4.38), (4.39) e (4.42), (4.43), tem-se

$$R_{\hat{D}_{0n}}(\tau) \geq \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ R_{\hat{D}_{0i}}(\tau) R_{D_{in}}(\tau) \right\} \geq \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ L_i(\tau) R_{D_{in}}(\tau) \right\} = L_n(\tau). \quad \square$$

Teorema 4.2. *Seja $\delta_n = \{D_{in}\}$ é uma família própria de subgrafos. Se $\{X(t), t \in T\}$ é um processo de performance de confiabilidade associada ao tempo e se processos dos componentes $\{(X_e(t), e \in E(\delta_n)), t \in T\}$ e $\{(X_e(t), e \in \overline{E}(\delta_n)), t \in T\}$ são independentes, em que $\overline{E}(\delta_n)$ é o conjunto de aresta que não estão em nenhum digrafo da família δ_n , então:*

$$(i) \quad L_n(\tau) \leq U_n(\tau);$$

$$(ii) \quad R_{\hat{D}_{0n}}(\tau) \leq U_n(\tau).$$

Demonstração. (i) Considerando-se, novamente, (4.38 – 4.44) para um conjunto finito de

tempo T_k , obtém-se

$$\begin{aligned}
& \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ \Pr(\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \cdot \Pr(\varphi_{D_{in}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \right\} \\
& \leq E \left\langle \max_{D_{in} \in \delta_n} \left\{ \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\} \right\rangle \\
& \leq 1 - E \left\langle \prod_{D_{in} \in \delta_n} \left(1 - \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right) \right\rangle \\
& \leq 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} \left[1 - E \left\langle \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right\rangle \right] \\
& = 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} \left[1 - \Pr(\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \Pr(\varphi_{D_{in}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \right]
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue dos argumentos usados na prova do Teorema 4.1. A segunda desigualdade segue do Lema 4.1(ii). A terceira desigualdade é obtida de (4.41), pois

$$\left\{ 1 - \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \varphi_{D_{in}}(X(t_x)), D_{in} \in \delta_n \right\}$$

é um conjunto de variáveis aleatórias binárias correlacionadas. Finalmente, a última igualdade segue considerando-se os processos dos componentes independentes. Aplicando (4.38), (4.39) e (4.42), (4.43) e (4.44), segue o resultado.

(ii) Como antes,

$$\begin{aligned}
\Pr(\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t)) = 1, t \in T_k) &= E \left\langle \prod_{x=1}^k \max_{D_{in} \in \delta_n} (\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \cdot \varphi_{D_{in}}(X(t_x))) \right\rangle \\
&= 1 - E \left\langle \prod_{D_{in} \in \delta_n} \left(1 - \prod_{x=1}^k \varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t_x)) \cdot \varphi_{D_{in}}(X(t_x)) \right) \right\rangle \\
&\leq 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} \left[1 - \Pr(\varphi_{\hat{D}_{0i}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \right. \\
&\quad \left. \times \Pr(\varphi_{D_{in}}(X(t)) = 1, t \in T_k) \right],
\end{aligned}$$

em que a primeira igualdade segue do Teorema 4.2, a segunda igualdade segue dos Lemmas 4.1(iii) e 4.2, pois os subdigrafos estão em funcionamento em $T(\tau)$ (em que $t_1 < \dots < t_k$ são considerados tempos em $T(\tau)$) e a última desigualdade, novamente, segue a partir de (4.41) e a hipótese de independência dos processos dos componentes. Aplicando (4.38), (4.39) e (4.42),

(4.44), tem-se

$$\begin{aligned}
 R_{\hat{D}_{0n}}(\tau) &\leq 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} (1 - R_{\hat{D}_{0i}} R_{D_{in}}(\tau)) \\
 &\leq 1 - \prod_{D_{in} \in \delta_n} (1 - U_i(\tau) R_{D_{in}}(\tau)) \\
 &= U_n(\tau).
 \end{aligned}$$

□

4.6 Computação das probabilidades via polinômio de Tutte

Como visto no capítulo 3, dada uma modelagem de uma rede elétrica que seja representada por um grafo cujos vértices são os componentes de tal rede, pode-se definir um espaço de probabilidade sobre tal grafo a partir da função de probabilidade computada como uma função sobre a rede e, portanto, dada pelo polinômio de Tutte (p.ex., ver Proposição 3.6).

Funções de confiabilidade para a rede, também, podem ser estabelecidas a partir do Teorema 3.5, que apresenta o modelo de percolação para grafos aleatórios.

No próximo capítulo, serão apresentadas as aplicações das técnicas aqui indicadas.

Aplicação a Redes Elétricas Reais

O ESTUDO DE CONFIABILIDADE e de risco em redes até aqui apresentado pode ser diretamente aplicado à sistemas reais, em particular, a redes elétricas compostas por um sistema de geração e transmissão de energia elétrica. Tais sistemas possuem uma considerável quantidade de componentes, distribuídos em subestações e plantas de geração, conforme um planejamento estratégico para sua distribuição ao consumidor final. Tais equipamentos e suas conexões podem ser representados por um grafo $G = (V, E)$, para o qual o conjunto de vértices corresponde ao conjunto de equipamentos e E , o conjunto de arestas, representa as ligações entre os equipamentos.

Estes componentes pertencem às seguintes classes: (G) Geradores; (T) Transformadores e Autotrafos; (R) Reatores (em série e “shunt”); (B) Barramentos; (CS) Chaves Seccionadoras; (L) Linhas de Transmissão; (C) Compensadores (Estáticos e Síncrono); (CP) Capacitores (em série e “shunt”); (D) Disjuntores, além dos equipamentos do sistema de proteção do sistema: relés (diversos tipos), transformadores de corrente e de potencial, pára-raios, bobinas de bloqueio e enlace de fibra ótica. Veja na Figura 5.1, um diagrama, exemplo de parte de uma rede elétrica. Tal diagrama baseia-se nos diagramas unifilares fornecidos pela CHESF de suas instalações e produzidos por software específico que vem sendo desenvolvido para estudo de risco na rede elétrica.

Quando se fala em um sistema elétrico, geralmente se representa por uma tripla (V, E, r) , para a qual (V, E) são os vértices e arestas de um grafo e $r : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função, chamada *resistência da aresta*, $r(e) = r_e$. Se existe uma *diferença de potencial* v_e em uma aresta $e = [v, u]$, surge uma *corrente elétrica*, obedecendo a Lei de Ohm: $i_e = v_e / r_e$, que é dita fluir de v para u . Sobre esta representação, ainda exige-se que sejam satisfeitas as seguintes propriedades:

- (Lei de Corrente de Kirchhoff). A soma das correntes que entram e saem de qualquer vértice é nula.
- (Lei de Potencial de Kirchhoff). A soma das diferenças de potencial ao redor de qualquer ciclo de (V, E, r) deve ser nula.

A modelagem para a avaliação de risco não considera o modelo da rede elétrica como descrito acima, pois há uma necessidade de analisar os equipamentos individualmente e não

os pontos elétricos (de mesmo potencial). Assim, o modelo para a rede elétrica é dado por um grafo definido como se segue: seja G um grafo cujo conjunto de vértices representa cada componente do sistema elétrico, e dois vértices são ligados por uma aresta se os componentes representados possuem ligação física ou lógica (ou seja, se o funcionamento/operação de um influencia no funcionamento/operação do outro).

Agora, considere a seguinte operação: retire todos os vértices que representam os disjuntores¹. As componentes conexas deste subgrafo serão denominadas *setores* da rede. Constrói-se um novo grafo: os vértices são os setores do subgrafo definido anteriormente e as arestas correspondem aos disjuntores que separam dois setores. Tal grafo é denominado *grafo de isolamento*.

O interesse é calcular o risco associado a cada equipamento nos diversos setores da rede elétrica, definidos pelo grafo de isolamento.

5.1 Enumeração de estados

Seja $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ o conjunto de componentes do sistema elétrico. Cada componente pode estar em dois estados: ligado e desligado. Isso é representado pela seguinte função

$$s(c_i) = s_i = \begin{cases} 0, & \text{se } c_i \text{ está no estado desligado;} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denota-se por $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ a n -upla que representa um *estado do sistema*. Se p_i e $q_i = 1 - p_i$ ([CCL07],[CCLM07]) denotam as probabilidades de sucesso (estado ligado) e falha do i -ésimo componente, a probabilidade de um estado do sistema é (veja (3.22))

$$\Pr(s) = \prod_{i=1}^{n_f} q_i \prod_{j=1}^{n-n_f} p_j,$$

em que n_f é o número de componentes falhados (ou nos estados desligados). Se todos os componentes estão ligados então $n_f = 0$ e, define-se naturalmente,

$$\Pr(s) = \prod_{i=1}^n p_i.$$

¹equipamento de proteção que interrompe o fluxo de carga até o equipamento, ou conjunto de equipamentos que este esteja protegendo.

No caso de descrição do estado do sistema, tem-se que

$$f(s) = \Pr(s) \sum_{k=1}^n \alpha_k, \text{ e}$$

$$d(s) = \frac{1}{\sum \alpha_k},$$

em que $f(s)$ denota a frequência de um estado e $d(s)$ é a duração média de tal estado. Tem-se

$$\alpha_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{taxa de falha} \\ \mu_k, & \text{taxa de reparo,} \end{cases}$$

usado de forma conveniente na transição de estados s . Se denotarmos por S o conjunto de todos os estados, então, a probabilidade acumulada de falha do sistema é

$$P_f = \sum_{s \in S} \Pr(s)$$

e a frequência de falha do sistema reduz-se a

$$F_f = \sum_{s \in S} f(s) - \sum_{n, m \in S} f_{nm},$$

em que f_{nm} é a frequência de transição do estado n para o estado m . Assim, é natural obtermos a duração acumulada da frequência de falha do sistema como

$$D_f = \frac{P_f}{F_f}.$$

5.2 Simulação de Monte Carlo

Seja s_i o estado do i -ésimo componente do sistema e q_i sua probabilidade de falha. Novamente, denote por $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ a n -upla que representa o estado do sistema. Tome R_i um número aleatório em $[0, 1]$ com distribuição uniforme. O estado s_i é dado por

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{(sucesso) se } R_i > q_i \\ 1, & \text{(falha) se } 0 \leq R_i \leq q_i. \end{cases}$$

O processo de simulação Monte Carlo não-sequencial considera

$$\Pr(s) = \frac{m(s)}{M}$$

como sendo a probabilidade do estado s do sistema, sendo $m(s)$ o número de ocorrências do estado s do sistema e M o número total de amostras. Note que esse método requer um grande número M de amostras para que haja significância dos resultados obtidos.

Este método considera os processos de transição cronológicos de cada estado, ou seja, a descrição do estado de um componente ao longo do tempo. O método considera a duração de um estado do i -ésimo componente como

$$D_i = \frac{1}{\alpha_i} \log R_i,$$

em que R_i é um número aleatório distribuído uniformemente em $[0, 1]$ e α_i é a taxa de falha (λ_i) ou a taxa de reparo (μ_i), conforme o estado. O método supõe uma simulação para todos os componentes, perfazendo uma curva de estados durante um certo período de tempo (um ano, por exemplo). O estado do sistema é avaliado pela soma de cada curva individual:

$$P_f = \frac{\sum_{k=1}^{M_{dn}} D_{dk}}{\sum_{k=1}^{M_{dn}} D_{dk} + \sum_{j=1}^{M_{up}} D_{uj}},$$

$$F_f = \frac{M_{dn}}{\sum_{k=1}^{M_{dn}} D_{dk} + \sum_{j=1}^{M_{up}} D_{uj}},$$

$$D_f = \frac{\sum_{k=1}^{M_{dn}} D_{dk}}{M_{dn}}.$$

Como antes, P_f , F_f e D_f são a probabilidade de falha do sistema, a frequência de falha e a duração média da falha, respectivamente. D_{dk} é a duração no k -ésimo estado desligado (down) e D_{uj} a duração do j -ésimo estado ligado (up). M_{dn} e M_{up} representam, respectivamente, o número de ocorrências de falhas e sucessos do sistema na simulação.

5.3 Funções usadas na análise do sistema

Em todos os casos, para cada estado de falha do sistema, funções de risco podem ser obtidas através de técnicas de análise do sistema. Por exemplo, se for considerado uma função de

diminuição de carga, $C(s)$, devido ao estado do sistema s , tem-se que

$$\mathbb{E}\langle C \rangle = \sum_{s \in S} C(s)P(s)$$

é a expectativa desta função para todos os estados de falha do sistema.

Os três métodos de análise do risco de falha têm como principal parâmetro a indisponibilidade de energia provocada por uma configuração (estado) particular do sistema. Além da configuração determinada pelo seqüenciamento dos diversos componentes, exigências especiais de carga do sistema podem ser consideradas.

Seja $\mathcal{N} = (D, R)$ uma rede elétrica e considere que existam k vértices sorvedouros, considerando a rede como um digrafo (ver Seção 4.3). Na prática, tais vértices representam os pontos de carga de um sistema de geração e transmissão de energia elétrica que são responsáveis pela solicitação de demanda de energia (consumidores).

Seja $y \in V(D)$ um ponto de carga (ou vértice sorvedouro). O número de interrupções em um ano, no ponto de carga y é dado por:

$$I_y = \sum_{x \in \Gamma(y)} F_{xy}, \quad (5.1)$$

em que $x \in \Gamma(y)$ representa os componentes da rede cuja falha implica na falha de y , e F_{xy} é o número de falhas deste componente em um ano. Considera-se I_y com distribuição de Poisson.

Na próxima seção, há uma nova definição da probabilidade de falha de um componente, que leva em conta a configuração (topologia) do sistema. Tal definição torna possível a definição do risco de falha, que será utilizada na classificação dos equipamentos do sistema elétrico.

Como indicado na Seção 4.3, são utilizadas técnicas analíticas para determinar a média e os momentos centrais de índices de confiabilidade. Os valores dos quatro primeiros momentos centrais dos parâmetros de performance e tempos de restauro do sistema são necessários para se obter os momentos nos índices de confiabilidade usando estas técnicas. Seguem alguns exemplos de índices mais frequentemente utilizados.

5.3.1 Duração de interrupção de pontos de carga

A duração da interrupção de qualquer sorvedouro da rede (pontos de carga) y , denotado por $DIPC_y$ é definido como o tempo que se leva para restaurar o suprimento do ponto y se este for interrompido devido a falha em algum componente. A duração de interrupção do ponto de carga é uma combinação de variáveis aleatórias, RT_{xy} , que representam o tempo de restauro do ponto de carga y , tendo sido este interrompido devido à falha no equipamento x . Especificamente, por

(4.7), o valor esperado para $DIPC_y$ é dado por:

$$\mathbb{E}\langle DIPC_y^r \rangle = \sum_{x \in \Gamma(y)} P_{xy} \mathbb{E}\langle RT_{xy}^r \rangle \quad (5.2)$$

A probabilidade que a dada interrupção de um ponto de carga y devido ao componente x , P_{xy} , pode ser avaliada como uma razão da taxa de falha de todos os componentes que pertençam à $\Gamma(y)$.

5.3.2 Indisponibilidade anual de um ponto de carga

Este índice, denotado por $IAPC_y$ para um determinado ponto de carga y , é definido como o tempo total em um ano (ou intervalo pré-definido de tempo) no qual o ponto de carga permaneceu fora de serviço ou indisponível. O número de interrupções de ponto de carga y em um ano são dados por I_y . Cada uma destas interrupções são dadas por

$$IAPC_y = \sum_{k=0}^{I_y} DIPC_{y_k}, \quad (5.3)$$

ou seja, $IAPC_y$ é a soma aleatória das variáveis aleatórias $DIPC_y$. A variável aleatória I_y segue uma distribuição de Poisson (por hipótese). Os momentos de $IAPC_y$ podem, portanto, ser obtidos utilizando-se os momentos de I_y e $DIPC_y$ nas Equações (4.19 – 4.22).

5.3.3 Índice de frequência média de interrupção de serviço

Denote por IF , o número de interrupções a *consumidores do sistema*² em um ano. Denote, ainda, por IF_x , o número de interrupções devido ao componente x . Seja $\tilde{\Gamma}(x)$ o conjunto de pontos de carga que são interrompido por causa da falha de x . O número total de consumidores prejudicados pela interrupção do ponto de carga y devido à falha no componente x é dado por $\sum_{y \in \tilde{\Gamma}(x)} c_y$, em que c_y é o número de consumidores ligados ao ponto y . Se o número total de consumidores do sistema é denotado por c_T , então o percentual de consumidores prejudicados devido à falha do componente x é dado por $\sum_{y \in \tilde{\Gamma}(x)} (c_y/c_T)$. A falha de um dado componente pode ser devido a qualquer um dos componentes, incluindo x . A contribuição do IF_x é dada, portanto, por

$$\mathbb{E}\langle IF_x^r \rangle = \sum_x P_x \left[\sum_{y \in \tilde{\Gamma}(x)} \frac{c_y}{c_T} \right]^r. \quad (5.4)$$

²efetivamente, os consumidores são responsáveis pela solicitação de carga nos pontos de carga

Como o valor $\sum_{y \in \tilde{\Gamma}(x)} (c_z/c_T)$ é constante pode-se obter facilmente os momentos de IF_x . Existem F_t eventos de falha em um ano. Cada um destes contribui com IF_x para o valor de IF . Logo, IF é uma soma aleatória da IF_x e é dada por

$$IF = \sum_{k=0}^{F_t} IF_{x_k}.$$

5.3.4 Índice de duração média de interrupção de serviço

I_{out} é definido como o número de perdas em horas de consumidores por consumidor do sistema em um ano. A contribuição de I_{out} para um evento de falhas de um dado componente x é

$$\left(\sum_{y_0 \in \tilde{\Gamma}(x)} \frac{c_{y_0}}{c_T} \right) R_x + \sum_{z \in \Gamma_x(y)} \frac{c_z}{c_T} RM_z,$$

em que $\Gamma_x(y)$ é o conjunto de componentes responsáveis pela restauração do funcionamento do ponto de carga y , após a falha do componente $x \in \Gamma(y)$. RM_z é o tempo de acionamento do componente z . Na equação acima, $\tilde{\Gamma}(y)$, no primeiro somatório pode ser interpretado como sendo o conjunto de pontos de carga y que são restaurados pelo acionamento de x (anteriormente falhado) e R_x é tempo de restauro do componente x .

A contribuição em I_{out} de um evento de falha do componente x dado acima é uma função algébrica linear das variáveis aleatórias e seus momentos são obtidos usando-se as Equações (4.15 – 4.18). Como os momentos obtidos são a média e os momentos centrais, utiliza-se (4.23 – 4.25) para se converter estes momentos. O evento de falha pode se dar em qualquer componente incluindo o índice x e $I_{out}(x)$, índice de duração média de interrupção de serviço devido ao componente x , é, portanto, uma combinação destas quantidades. Usando (4.7), tem-se

$$\mathbb{E}\langle I_{out}(x) \rangle = \sum_x P_x \cdot \mathbb{E} \left\langle \left[\left(\sum_{y_0 \in \tilde{\Gamma}(x)} \frac{c_{y_0}}{c_T} \right) R_x + \sum_{z \in \Gamma_x(y)} \frac{c_z}{c_T} RM_z \right]^r \right\rangle.$$

Existem F_t eventos de falha de componentes por ano e cada um destes eventos contribui com $I_{out}(x)$ para o valor de I_{out} , portanto,

$$I_{out} = \sum_{k=0}^{F_t} I_{out}(x_k).$$

Os momentos de I_{out} podem ser obtidos usando-se as Equações (4.19 – 4.22).

5.4 Definição de Risco

Seja $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ o conjunto de componentes. Seja $G = (C, E)$, o grafo de isolamento (dirigido) tal que

$$E = \{e = [c_i c_j] : \text{falha/desligamento } c_i \Rightarrow \text{falha/desligamento } c_j\}. \quad (5.5)$$

Associados a cada vértice (componente) de G , existem dois eventos (locais):

- c_i está no estado u (upper, ligado), ou c_i é um u -vértice, ou
- c_i está no estado d (down, desligado), ou c_i é um d -vértice.

Estes eventos são considerados complementares, ou seja, um é a negação do outro. Aqui serão denotados por u_{c_i} e d_{c_i} , respectivamente. Eventos mais detalhados são da forma $u^{C_1} d^{C_2}$ com $C_1 \cup C_2 = C$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Estes são chamados *eventos elementares*. O conjunto de todos os eventos elementares é chamado *espaço de eventos*, que é denotado por Ω . A soma (lógica) de dois eventos a e a' é denotada por $a + a'$. Obviamente, $u_{c_i} + d_{c_i} = 1$. Dois eventos a e a' são chamados *incompatíveis* ou *disjuntos* se $a + a' = 0$.

Eventos formados por somas finitas de eventos-produto finitos são chamados *eventos locais*. Os eventos formados pelo fecho da coleção de eventos locais sobre somas enumeráveis e produtos enumeráveis são chamados *eventos aleatórios*.

Eventos mais gerais são obtidos tomando-se o fecho da coleção de eventos aleatórios sobre produtos e somas arbitrárias. Considerando-se a completa distributividade, cada evento pode ser escrito unicamente como uma soma de eventos elementares. Logo, existe uma correspondência 1-a-1 entre eventos e subconjuntos do espaço de eventos.

Defina $p_i = \Pr(c_i)$ a probabilidade de eventos locais sobre o vértice c_i ser um d -vértice ou um u -vértice, independente de todos os outros componentes. Tem-se que:

P1. $\Pr(0) = 0$ e $\Pr(1) = 1$.

P2. $\Pr(d_{c_i}) = p_i$ e $\Pr(u_{c_i}) = q_i = 1 - p_i$, $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

P3. Para produtos finitos $u^{C'} d^{C''}$ com $C' \cap C'' = \emptyset$, $\Pr(u^{C'} d^{C''}) = p^{C'} q^{C''}$, ou seja, os eventos são considerados sendo independentes.

P4. Para somas finitas de eventos-produto finitos tem-se:

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \Pr(a_i).$$

Denomina-se aqui $\Pr$ como a *probabilidade primária de desligamento ou falha*. Seja

$$\text{custo}(c_i) = \text{“custo desligamento/falha de } c_i\text{.”} \quad (5.6)$$

A função $\text{custo}(c_i)$, para $c_i \in C$, é uma função real não-negativa dada em termos absolutos do custo de permanência de um componente no estado d , ou pode ser normalizada pelo “maior” custo de falha/desligamento. Esta função é obtida levando-se em conta os contratos de serviço, multas previstas, aliados ao custo de manutenção e substituição de componentes.

Defina, agora, um *acidente* em G como sendo um par

$$a = (v, \{e_1, \dots, e_k\}),$$

em que v é um vértice de G , que representa um setor apresentando uma falha e $\{e_1, \dots, e_k\}$ é o conjunto de arestas (representando os disjuntores no grafo de isolamento), que não estão em funcionamento, ou seja, que por problemas internos ou do sistema de proteção, tais disjuntores não são acionados adequadamente, não interrompendo o fluxo de carga. Além disso, o subgrafo de G induzido por $\{e_1, \dots, e_k\}$ e contendo v é conexo.

Para a definição do risco de um setor ainda deve-se considerar a seguinte hipótese adicional: para cada setor v o surgimento de uma falha que possa ser considerada acidente é uma variável aleatória $\mathcal{A}_v$, que assume 1, com probabilidade p_v e 0, como probabilidade $1 - p_v$. Ainda, cada aresta e possui probabilidade p_d de estar em estado de falha quando requerido.

Então, a probabilidade de ocorrência anual de um acidente é

$$\Pr(a) = p_v \times \prod_{i=1}^k p_{e_i} \times \prod_{e \notin a} (1 - p_d). \quad (5.7)$$

Logo, o risco de ocorrência de um acidente a é

$$R(a) = \Pr(a) \times \text{custo}(a). \quad (5.8)$$

De maneira direta, tem-se que o risco de um determinado setor v reduz-se a

$$R(v) = \sum_{a=(v, E')} R(a). \quad (5.9)$$

5.5 Risco sobre caminhos

Uma outra abordagem de atribuição de risco pode ser dada com se segue: seja G o grafo de isolamento, como descrito na Seção 4.1. Note que G é conexo. Se não o for, considere

as definições a seguir para cada componente conexa. Para cada $v \in V(G)$, em que setores são definidos como contendo um ou mais equipamentos, suponha que seja determinada uma probabilidade $\Pr(v)$ de surgimento de um sinal de queima. Tal sinal se propaga pela rede através de caminhos dirigidos a partir de v .

Cada aresta de G é munida de um dispositivo (função) que, a partir do surgimento do sinal de queima em v , remove as arestas que saem de v ($e_1 = [vv_1], \dots, e_k = [vv_k]$) com probabilidade $q(e_i) = q_{e_i} = 1 - p_{e_i}$.

Seja $\text{custo} : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função *custo do vértice* v , definida como antes. O *risco* de um vértice v , $R(v)$, pode ser calculada pela regra do produto como:

$$\begin{aligned}
 R(v) = \Pr(v) \Big\{ & \text{custo}(v) \prod_{x \in \Gamma(v)} q_{vx} + \sum_{u \in \Gamma(v)} p_{vu} \prod_{\substack{x \in \Gamma(v) \\ x \neq u}} q_{vx} \left(\text{custo}(v) + \text{custo}(u) \right) \prod_{\substack{y \in \Gamma(u) \\ y \neq v}} q_{uy} \\
 & + \sum_{u \in \Gamma(v)} \sum_{\substack{w \in \Gamma(u) \\ w \neq v}} \left(p_{vu} \prod_{\substack{x \in \Gamma(v) \\ x \neq u}} q_{vx} \right) \left(p_{uw} \prod_{\substack{y \in \Gamma(u) \\ y \notin \{v, w\}}} q_{uy} \right) \times \left(\text{custo}(v) + \text{custo}(u) + \text{custo}(w) \right) \prod_{\substack{z \in \Gamma(w) \\ z \neq u}} q_{wz} \\
 & + \text{falhas por 3-caminhos} \dots \Big\}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Em (5.10), $\Gamma(v)$ representa o conjunto de *vizinhos* de v em G , ou seja, os vértices adjacentes a v .

5.6 Avaliação do Risco de um Sistema

Um sistema de potência consiste em muitas entidades. Desligamentos estocásticos de tais entidades formam as principais causas dos processos de falha do sistema. A primeira tarefa na avaliação do risco de um sistema é determinar modelos de desligamentos de seus componentes. As falhas de uma entidade (transformador, disjuntor, linha de transmissão, etc.) de um sistema elétrico são classificadas em duas categorias: desligamento independente e dependente. Cada categoria pode ainda ser classificada de acordo com os modos de desligamento. Na maioria dos casos, só são considerados desligamentos forçados reparáveis, considerando que (em alguns casos) são, também, modelados desligamentos planejados. Falhas devido ao envelhecimento dos componentes, também, são incorporadas na avaliação do risco tradicional. Há dois métodos básicos para selecionar os estados de um sistema elétrico: enumeração de estados e Simulação Monte Carlo. Ambos os métodos têm prós e contras. Em geral, as condições operacionais complexas não são consideradas e as probabilidades de falha dos seus componentes são bastante reduzidas, sendo que a técnica de enumeração de estados é mais eficiente. Quando as condições operacionais são complexas e envolvem um número grande de eventos, os métodos do tipo Monte Carlo são preferíveis.

A avaliação do risco de um sistema de potência é geralmente associada com as seguintes etapas: (1) determinar modelos de desligamento de componentes; (2) selecionar estados de sistemas e calcular as probabilidades deles estarem em funcionamento; (3) avaliar as consequências dos estados selecionados do sistema; (4) calcular índices de risco.

Como mencionado anteriormente, o risco é uma combinação de probabilidade e consequência. Com a informação obtida na segunda e terceira etapas, pode ser criado um índice que represente verdadeiramente o risco do sistema.

De acordo com a análise dos estados do sistema, a avaliação do risco de um sistema elétrico pode ser dividida com relação a dois aspectos básicos: suficiência e segurança do sistema. A suficiência relaciona a existência de instalações suficientes dentro do sistema para satisfazer a demanda de carga dos consumidores e aos desligamentos operacionais dos componentes do sistema. A suficiência é, então, associada com as condições estáticas que não incluem processos dinâmicos. A confiabilidade relaciona a habilidade do sistema em responder às perturbações dinâmicas que surgem dentro do sistema. A confiabilidade é, então, associada com a resposta do sistema para quaisquer perturbações a que ele esteja sujeito. A maioria das técnicas de avaliação de risco que foram usadas nas aplicações a sistemas elétricos está no domínio da avaliação de suficiência.

Um sistema de potência inclui as três funções fundamentais de geração, transmissão (inclusive subestação) e distribuição. Tradicionalmente, as três zonas funcionais são incluídas em uma mesma função de utilidade. Estas três zonas funcionais podem ser tratadas separadamente para formar a geração independente, transmissão e companhias de distribuição. A avaliação de risco para um sistema global, inclusive geração, transmissão e distribuição, não é prático porque tal sistema é muito grande para controlar a capacidade de computação existente e as exigências de precisão. Por um lado, os algoritmos que modelam o risco são bastante diferentes para avaliar o risco de geração, transmissão, subestação e do sistema de distribuição.

Geralmente, torna-se necessário avaliar os benefícios relativos de alternativas diferentes, inclusive a opção de não fazer nada. O nível de necessidade das análises não é mais complexo que aquele que habilita os méritos relativos a serem avaliados. A habilidade para incluir um alto grau de precisão em cálculos nunca deveria anular a incerteza inerente aos dados. Um índice de risco absoluto, embora seja um objetivo ideal, é virtualmente impossível de se avaliar.

A natureza dos dados deve refletir a necessidade da avaliação do risco. Os dados devem ser suficientes para assegurar que um método de avaliação possa ser aplicado, mas restritivo bastante para assegurar que aqueles dados desnecessários não precisam ser coletados. Para os modelos simples, os dados relacionam os dois processos principais do comportamento dos componentes, isto é, os processos de falha e de reparo. Para modelos mais complexos, os dados estão associados com as taxas de transição entre os vários estados. A qualidade dos dados é um fator importante para ser considerado no processo de coleta dos dados.

O objetivo básico de um sistema de energia elétrica moderno é prover energia elétrica para seus clientes ao custo mais baixo possível e a um nível de risco aceitável. Há um conflito entre economia e risco. A avaliação do custo-risco deve ser uma aproximação apropriada na análise de riscos e dos fatores econômicos em um tratamento com base no valor monetário. O custo do risco de uma interrupção de energia por unidade de tempo deve ser avaliado bem como a energia esperada não provida. Entretanto, a quantificação do custo de interrupção é complexa. Deve ser computada a função de penalização de clientes que pode ser determinada em pesquisas de clientes durante vários anos.

Pode-se apresentar três métodos para avaliar o custo de interrupção de equipamentos:

- **Método baseado em funções de penalização dos clientes:** Ela deve representar uma média por dano social aos clientes devida a interrupções de provisão de energia. É importante reconhecer que o custo de interrupção depende da região, país e sistema específico.
- **Método baseado em investimentos de capital:** Há uma relação mensurável entre o capital investido e o índice de risco do sistema. Os custos de interrupção se baseiam nos investimentos de capital.
- **Método baseado em produto doméstico total:** O produto doméstico total para uma região pode ser obtido dividindo o custo estimado de perda de energia nesta região num ano pelo consumo total de energia elétrica anual correspondente. Este número reflete o dano econômico comum devido a 1 KWh de perda de energia elétrica naquela região.

Na simulação de PRA, sigla em inglês para *Probabilistic Risk Assessment*, são utilizados atualmente os métodos chamados *Minimal Cutset* (MCS) e diagramas de decisão binária (BDD) [OY04].

5.6.1 Implicantes primos

Seja F uma fórmula booleana e seja π um produto, ou seja, um conjunto de literais, no qual não ocorra simultaneamente um literal e sua negação.

Diz-se que π é um *implicante primo* de F se π implica F , ou seja, π ocorrendo acarreta a ocorrência de F . Um implicante π de F é chamado *primo* se não existe subconjunto próprio ρ de π tal que ρ também seja um implicante de F . Como uma ilustração, seja $F = ab + \bar{a}c$ uma fórmula booleana. Neste caso, F possui 7 implicantes $ab, bc, \bar{a}c, abc, ab\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}$. Destes, 3 são primos: $ab, bc, \bar{a}c$.

Será denotado por $PI_L(F)$ ao conjunto de produtos implicantes primos de F . Se L é um subconjunto de literais significantes que são construídos sobre um conjunto V , então define-se:

$$PI_L[F] = \{\pi \cap L : \pi \in PI[F] \text{ e não existe } \rho \in PI[F] \text{ tal que } \rho \cap L \subset \pi \cap L\}. \quad (5.11)$$

5.6.2 Outros modelos de simulação: minimal cutsets e implicantes primos

Intuitivamente um Minimal Cutset (MCS) é um conjunto minimal de eventos básicos de uma árvore de falha que induzem aqueles eventos que estão em posição superior (para detalhes sobre árvores de falha, vide [VGRH81]).

Um *literal* ou é uma variável v ou sua negação, $\neg v$. Os literais v e $\neg v$ são ditos opostos. Será denotado por $\bar{p}$ o literal oposto a p . Um *produto* é um conjunto de literais interpretados como o conjunto de seus elementos. Para um produto $\{a, b, \neg c\}$ escreve-se $ab\bar{c}$. Um *minterm* sobre um conjunto de variáveis $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um produto que contém exatamente um literal construído sobre cada variável de V .

Existe uma ordem natural sobre os literais: $\neg v < v$ que pode ser estendida para minterms: $\pi \leq \rho$ se, e somente se, para cada variável v , $\pi(v) \leq \rho(v)$.

Um MCS representa um cenário minimal de falha, mas tal definição se aplica no caso de árvores de falha coerentes. No caso não-coerente é usada a noção de implicantes primos, que são conjuntos quaisquer de literais, ou seja, que podem conter variáveis negativas.

5.6.2.1 Minimal Cutsets

Seja V um conjunto finito qualquer. Um produto π sobre V é um *cutset* de F com respeito a L se $\pi \in L$ e para todo minterm σ contendo π , existe um minterm $\delta \in F$ tal que $\delta \leq_L \sigma$, em que $\leq_L$ denota uma relação binária sobre o conjunto de minterms de V definida por

$$\delta \leq_L \sigma \text{ se para qualquer variável } v, \delta[v] \leq \sigma[v]$$

e $\sigma[v]$ é o literal construído sobre v que pertence a σ .

Um cutset π é minimal se não existem subconjuntos próprios de π que sejam cutsets. Um MCS de uma fórmula F são os implicantes primos da menor aproximação monótona de F (vide [Rau01]).

5.6.2.2 Teoremas de Decomposição

Dois teoremas fornecem um algoritmo para computar implicantes primos e MCS do que será descrito na próxima seção como diagramas binários de decisão.

Teorema 5.1 (Decomposição para implicantes primos (Morreale, 1970)).

Seja $F = v.F_1 + \bar{v}.F_0$ uma fórmula, tal que F_1 e F_0 não dependam de v . Então, o conjunto

de primos implicantes de F é:

$$PI[F] = PI_n \cup PI_1 \cup PI_0,$$

em que $PI_n = PI[F_1.F_0]$, $PI_1 = \{v.\pi : \pi \in PI[F_1] \setminus PI_n\}$ e $PI_0 = \{\bar{v}.\pi : \pi \in PI[F_0] \setminus PI_n\}$. $\square$

Teorema 5.2 (Decomposição para MCS).

Seja $F = v.F_1 + \bar{v}.F_0$ uma fórmula tal que F_1 e F_0 não dependam de v . Seja L o conjunto de literais relevantes. Então, o MCS de F é descrito como segue:

Caso 1: tanto v quanto sua negação pertencem a L . Neste caso, o teorema de decomposição é o mesmo que o teorema anterior de decomposição de implicantes primos.

Caso 2: v pertence a L , mas sua negação não. Neste caso, existem duas maneiras de computar $MCS[F]$.

$$\text{PRIMEIRA DECOMPOSIÇÃO } MCS[F] = MCS_1 \cup MCS_0$$

$$\text{em que } MCS_0 = MCS[F_0] \text{ e } MCS_1 = \{v.\pi : \pi \in MCS[F_1 + F_0] / MCS_0\}.$$

$$\text{SEGUNDA DECOMPOSIÇÃO } MCS[F] = MCS_1 \cup MCS_0,$$

$$\text{em que, } MCS_0 = MCS[F_0], MCS_1 = \{v.\pi : p \in MCS[F_1] \div MCS_0\}$$

$$P \div Q = \{\pi \in P \text{ e } \rho \in Q : \rho \not\subseteq \pi\}$$

Caso 3: nem v , nem $\bar{v}$ pertence a L . Então, $MCS[F] = MCS[F_1] \cup MCS[F_0]$. $\square$

A demonstração do último teorema encontra-se em [Rau01]).

5.6.2.3 Diagramas binários de decisão

O diagrama binário de decisão (BDD) associado a uma fórmula é uma codificação compacta da tabela verdade da fórmula. Esta representação é baseada em decomposição de Shannon [Rau01]). Os teoremas de decomposição (5.1 e 5.2) são o núcleo dos algoritmos de BDD para computar MSC.

Sabe-se que qualquer expressão booleana é igual a uma expressão na *forma normal conjuntiva* (FNC), ou é uma expressão na *forma normal disjuntiva* (FND), a saber:

$$\bigwedge_{j=1}^l \left(\bigvee_{i=1}^{k_j} t_i^j \right) \quad \text{ou} \quad \bigvee_{j=1}^l \left(\bigwedge_{i=1}^{k_j} t_i^j \right),$$

em que $\wedge$ representa o operador de conjunção (e), $\vee$ o operador de disjunção (ou) e t_i^j são literais.

Em geral, é muito difícil estabelecer quando uma expressão booleana é satisfeita:

Teorema 5.3 (Cook, 1971). *A satisfação de expressões booleanas é um problema NP-completo.* $\square$

Seja $x \rightarrow y_0, y_1$ o operador *se-então-senão* definido por:

$$(x \rightarrow y_0, y_1) = (x \wedge y_0) \vee (\neg x \wedge y_1) \\ \left(= xy_0 + \bar{x}y_1 \right)$$

x é chamado *expressão teste*. Todo operador booleano pode ser expresso de tal maneira, por exemplo, $\bar{x} = \neg x = (x \rightarrow 0, 1)$; $x \rightarrow y = x \text{ implica } y$ é $x \rightarrow (y \rightarrow 1, 0)$, $(y \rightarrow 0, 1)$ e, naturalmente, x é representado por $x \rightarrow 1, 0$.

Agora, pode-se definir uma *Forma Normal Se-Então-Senão* (FNS) como a expressão booleana construída inteiramente a partir dos operadores se-então-senão e as constantes 0 (falso) e 1 (verdadeiro), tal que todos testes sejam efetuados somente sobre variáveis [And06].

Teorema 5.4. *Qualquer expressão booleana é equivalente a uma expressão em FNS.* $\square$

Se para um conjunto de expressões booleanas concatenadas identificam-se as subexpressões de sua FNS correspondente, diz-se que foi obtido o diagrama binário de decisão (BDD) (Figura 5.2).

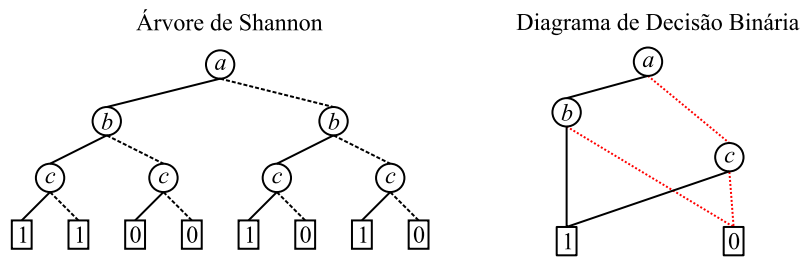


Figura 5.2 *Árvore de decisão e BDD para $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge c)$.*

Existem algumas regras que estabelecem BDD mais compactos ou reduzidos para uma mesma árvores de decisão.

Teorema 5.5. *Para qualquer função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, em que $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, existe exatamente um BDD reduzido e ordenado u , com variáveis ordenadas $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, tal que*

$$f^u = \text{'nó terminal de uma expressão booleana'} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Segue do lema que um BDD é um grafo acíclico, dirigido, com raiz, com um ou dois vértices terminais de grau externo zero rotulados por 0 ou 1, e com um conjunto de vértices variáveis u de grau externo dois.

Neste ambiente, um BDD é ordenado se sobre todo caminho do grafo as variáveis respeitam uma dada ordem linear $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e o BDD ordenado é reduzido se (i) nenhum par de vértices distintos u e v tem a mesma variável sucessora e antecessora, (ii) nenhum nó variável tem sucessor e antecessor distintos.

5.6.3 Modelagem de Atribuição de Risco usando BDD

A conversão de uma árvore de falha em um BDD é baseado nos algoritmos apresentados em [CM93] e [CM92]. Além disso para construir o BDD é necessário construir uma lista ordenada de vértices do sistema que tem uma segurança imperfeita. Esta lista pode ser construída como uma árvore de falha, o que estabelece o esquema de ordenação dos eventos.

Cada nó do BDD terá (pelo menos) as seguintes informações associadas a ele [DD95]: (1) o nome do componente; (2) um índice, baseado na ordenação do nó; (3) a probabilidade de falha, ou parâmetros que podem ser usados para determinar a probabilidade de falha; (4) a probabilidade de segurança para o componente; (5) a desconfiança da sub-árvore percorrida para qual o nó está na raiz. Isto é feito eliminando-se caminhos múltiplos. O valor inicial será 0; (6) ponteiros “esquerda” e “direita” que apontam para o próximo nó no BDD.

O que foi mostrado nesta seção é que tomando-se uma representação gráfica bem conhecida de uma função booleana e impondo-se uma restrição sobre os rótulos dos vértices, o grafo de tamanho mínimo representando uma função tem uma forma canônica. Além disso, dado qualquer grafo que represente uma função, ela pode ser reduzida a um grafo de forma canônica em tempo aproximadamente linear.

Algoritmos apresentados em [Bry86] não somente minimizam a quantidade de memória de alocação necessária para representar uma função, quanto o tempo requerido à execução de operações simbólicas de funções, além de tornar bastante simples perguntas de testes de equivalência, satisfabilidade e tautologia. Logo, a aplicação de tal modelo em atribuição probabilística de risco é bastante indicada.

5.6.4 Simulação de cenários futuros

Um objetivo dos mais desejáveis na análise de falhas de um equipamento é o seguinte: a partir do histórico de falhas do equipamento, produzir rapidamente milhões de cenários futuros cientificamente plausíveis do seu comportamento relativo a estas falhas. Para resolver esta questão,

usando a hipótese de que a distribuição das falhas é exponencial definiu-se um autômato finito, ou seja, um grafo finito com pesos positivos nas arestas. Convém salientar que a distribuição exponencial tem taxa de falha constante. Associou-se a esse grafo, um algoritmo (Tabela 5.1) muito simples capaz de simular com rapidez o comportamento futuro do equipamento com a mesma distribuição de falhas da que foi estimada a partir do histórico. Este autômato é um elemento básico para a simulação de situações mais complexas como as que aparecem em cálculo de risco no setor de geração e transmissão de energia.

A probabilidade de falha do equipamento nobre é calculada simulando (bilhões de vezes) os cenários futuros para os fatores primitivos e lendo os vetores 0-1 nas linhas verticais que cortam as linhas de tempo dos fatores primitivos. Cada linha vertical é um instante no tempo. Dada a probabilidade, o risco é obtido pelo seu produto com o custo associado a falha. Em geral, a probabilidade é bem pequena e o custo muito alto. Assim, ordenar os riscos é um objetivo importante para tomar medidas preventivas.

A partir das linhas de tempo, pode-se gerar os grafos que representam os estados (vértices) e suas transições (arestas), com pesos λ_{ij} representando a taxa de transição do estado i para o estado j .

Supondo que o tempo de passagem do estado i para o estado j do equipamento k tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_{ij}^{(k)}$, tal parâmetro são obtidos por:

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \frac{n_{ij}^{(k)}}{\sum_i t_i},$$

em que $n_{ij}^{(k)}$ é o número de passagens do estado i para o estado j do equipamento k e $\sum_i t_i$ é a soma dos intervalos rotulados por i , ou seja, o total dos tempos em que o equipamento permaneceu no estado i .

De posse dos parâmetros $\lambda_{ij}^{(k)}$, passa-se ao algoritmo (Tabela 5.1) que define o autômato que expressa o comportamento futuro de um equipamento a partir de N , que representa o número de iterações, e do grafo com arestas com pesos positivos λ_{ij} .

A saída do algoritmo é a linha de tempo com falhas para os equipamentos em estudo.

5.6.5 Autômato e Histórico de Falhas

De maneira geral, pode-se através da história de falhas/reparos de um dado equipamento obter um autômato que simula o futuro deste. Na Figura tem-se a representação de um grafo que mostra as possíveis transições de estados do sistema.

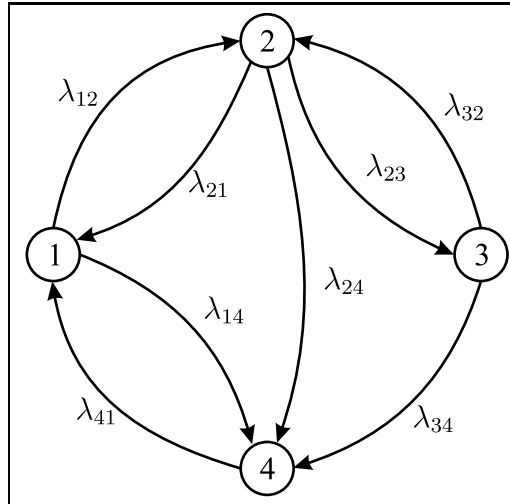
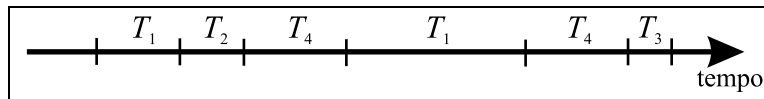
Na Figura 5.4, é denotado por T_i o tempo de permanência de um equipamento arbitrário

Tabela 5.1 Algoritmo para o grafo de estados.

- | | |
|---|---|
| 0 | Comece no estado i_0 ; $n = 0$; |
| 1 | Estando em um estado i , sorteie para cada aresta (i, j) um tempo $T_{ij} > 0$ aleatório com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda_{ij}^{(k)}$ |
| 2 | Permaneça T_{ij} no estado i e vá para o estado j , tal que

$T_i = \min\{T_{ij'} : (i, j') \text{ é aresta.}\};$

$n = n + 1$ |
| 3 | Se $n < N + 1$, então volte para 2, senão termine. |

**Figura 5.3** Exemplo de grafo de falha com quatro estados possíveis.**Figura 5.4** Exemplo de linha de tempo.

(relaxa-se aqui o k superescrito) no estado i . Se T_{ij} denotar o tempo de permanência do equipamento no estado i até passar para o estado j , supondo que tem distribuição exponencial com parâmetros λ_{ij} , tem-se que $T_{ij} \sim E(\lambda_{ij})$. Neste caso, a função de distribuição acumulada para este modelo é:

$$\Pr(T_{ij} < x) = 1 - \exp(-\lambda_{ij}x), \quad x > 0$$

sendo a função densidade de probabilidade dada por:

$$f_{T_{ij}}(x) = \lambda_{ij} \exp(-\lambda_{ij}x), \quad x > 0$$

O tempo de permanência do equipamento no estado i é $T_i = \min_{j \neq i} \{T_{ij}\}$. Da função de distribuição acumulada da distribuição considerado exponencial, tem-se $T_i \sim E(\lambda_i)$, em que $\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$.

Para a estimação no longo horizonte T , pode-se calcular a média dos T_i por $\bar{T}_i = \frac{\sum T_i}{n_i}$ e, portanto, $\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\bar{T}_i} = \frac{n_i}{\sum T_i}$ representa a taxa de permanência no estado i .

Se p_i é a probabilidade assintótica do equipamento estar no estado i , a frequência de visitas do estado i para o estado j é dada por $f_{ij} = p_i \lambda_{ij}$. Logo, para a estimação no longo horizonte T :

$$\hat{p}_i = \frac{\sum t_i}{T}, \quad \hat{f}_{ij} = \frac{n_{ij}}{T}.$$

Então,

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{n_{ij}}{T} \frac{T}{\sum t_i} = \frac{n_{ij}}{\sum T_i}.$$

A frequência de transições do estado i , f_i , é dada por $f_i = p_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$.

E a estimação no longo horizonte T é $\hat{f}_i = \frac{\sum T_i}{T} = \frac{\sum_{j \neq i} n_{ij}}{\sum T_i}$. O número de transições $N_i(t)$ do estado i no tempo t pode ser tratado como um processo de Poisson de parâmetro $p_i \lambda_i t$, ou seja, $N_i(t) \sim P(p_i \lambda_i t)$, em que $\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$.

Agora, se $N_{ij}(t)$ é o número de transições do estado i para o estado j no tempo t , tem-se que

$$N_{ij}(t) \sim P(p_i \lambda_{ij} t).$$

A probabilidade de r transições do estado i para o estado j no tempo t , para $r = 0, 1, 2, \dots$, é dada por

$$\Pr\{N_{ij}(t) = r\} = (r!)^{-1} e^{-p_i \lambda_{ij} t} (p_i \lambda_{ij} t)^r,$$

$$\Pr\{N_{ij}(t) > r\} = 1 - \Pr\{\chi_{2(r+1)}^2 > 2p_i \lambda_{ij} t\}.$$

No caso específico deste trabalho, para sua otimização, alguns pontos foram considerados críticos no algoritmo. O autômato designado para representar a vida de um equipamento k é representado por um grafo dirigido com pesos nas arestas (como especificado nessa subseção). O peso das arestas representam $\lambda_{ij}^{(k)}$, a taxa de transição do estado i para o estado j .

Tabela 5.2 Estatísticas para Gerador UAS-01

ID	Tipo Int.Ger.	Oc.	Oc(%)	T(h)	T(%)	média(T)	desvio padrão(T)
41	Possível Trabalho em Outra Maq/Eqto	53	33,76	551,17	0,60	10,40	4,75
6	Defeito (Desligamento Programado)	20	12,74	134,50	0,15	6,73	2,88
3	Atender Sistema De Transmissão	15	9,55	162,22	0,18	10,81	4,69
7	Defeito Alta Grav. (Deslig. Forçado)	14	8,92	128,13	0,14	9,15	3,26
14	Falha (Desligamento Automático)	9	5,73	2623,92	2,85	291,55	29,28
15	Falha na Partida	7	4,46	136,33	0,15	19,48	4,71
20	Atender Sistema de Linhas	4	2,55	29,17	0,03	7,29	3,17
4	Atender Sistema Protecão/Medicação	4	2,55	41,08	0,04	10,27	2,10
34	Mp Periódica De 40 Mil Horas Oper.	3	1,91	75337,40	81,70	25112,47	0,00
36	Mp Periódica De 5 Mil Horas Oper.	3	1,91	851,88	0,92	283,96	7,95
35	Deslig Automático Externo ao Dmg	2	1,27	10,02	0,01	5,01	2,22
19	Mp Aperiódica de Cpsr	2	1,27	7,27	0,01	3,63	1,38
21	Mp Aperiódica Mecânica	2	1,27	13,45	0,01	6,73	2,42
23	Mp Periódica de 10 Mil Horas Oper.	2	1,27	878,90	0,95	439,45	21,18
24	Mp Periódica de 12 Mil Horas Oper.	2	1,27	1960,27	2,13	980,13	0,00
33	Mp Periódica de 4 Mil Horas Oper.	1	0,64	493,95	0,54	493,95	0,00
38	Mp Periódica de 6 Mil Horas Oper.	1	0,64	350,15	0,38	350,15	0,00
39	Elhorias/Modernizacoes	1	0,64	2,02	0,00	2,02	0,00
30	Mp Periódica de 3 Mil Horas Oper.	1	0,64	398,83	0,43	398,83	0,00

5.6.6 Aplicação a sistemas reais

Foi produzido a partir de minuciosos dados de históricos de todos os geradores da empresa CHESF - Companhia Hidro Elétrica do São Francisco, um modelo de predição de comportamento futuro. Na Figura 5.5, abaixo, vê-se uma descrição das falhas para todos os geradores. O vermelho indica acidentes graves, os retângulos verdes, acidentes de baixa complexidade e o branco indica o equipamento em funcionamento. O código em Java™ que gera as linhas de tempo está apresentada no Apêndice C.

Na Tabela 5.2, estão relacionados os 23 tipos de intervenção para o gerador UAS-01 da usina Apolônio Sales. Ela representa um histórico com o total de 92.217,8 horas com 157 ocorrências. A Tabela 5.3 apresenta as taxas de transição entre os diversos estados (tipos de intervenção).

A partir das taxas de transição obtém-se as probabilidades dos diversos estados, apresentados na tabela 5.4. As técnicas utilizadas para gerar o exemplo acima serão lembradas nesta próxima seção.

5.6.6.1 Explicação da técnica aplicada

Para estimar a probabilidade de um equipamento nobre ser destruído, comece definindo os principais fatores primitivos que ocasionariam a destruição do equipamento. Esta definição é dada como uma função booleana usando portas lógicas **AND**, **OR**, **NOT** (e, ou, não) (veja [CCL07]). As situações que implicam na destruição são os vetores binários associados aos fatores primitivos (não ocorreu, ocorreu) que avaliam a função booleana como 1.

Como dito na seção anterior, a probabilidade de destruição do equipamento é calculada promovendo a simulação (bilhões de vezes) dos cenários futuros. Suponha que uma usina seja composta de três geradores G_1 , G_2 e G_3 e que tais equipamentos forneçam energia a um mesmo barramento. Suponha, também, que se tenha o histórico de falhas destes geradores, onde se tenha a descrição de tais falhas. Neste caso, pode-se construir uma *linha de tempo*, na qual é representado o estado de cada equipamento e o motivo pelo qual ele estaria neste estado (Figura 5.6).

A partir das linhas de tempo, pode-se gerar os grafos que representam os estados (vértices) e suas transições (arestas), com pesos λ_{ij} representando a taxa de transição do estado i para o estado j (Figura 5.7).

No caso dos geradores, os grafos são todos do “tipo estrela”, uma vez que todo estado vem ou vai para o estado *funcionando*. O próximo passo é estimar os parâmetros $\lambda_{ij} > 0$ para que se tenha um autômato simulador que simule o futuro, usando variáveis aleatórias com distribuição exponencial com parâmetros $\lambda_{ij}^{(k)}$.

O grafo de estados na Figura 5.9 é obtido a partir da linha de tempo. Em suas arestas estão representadas as frequências n_{ij} em que cada transição ocorre na correspondente linha de tempo. No caso mais geral, tem-se um grafo completo de arestas duplas. Assim, os parâmetros $\lambda_{ij}^{\text{usina}}$ são obtidos por

$$\lambda_{ij}^{\text{usina}} = \frac{n_{ij}}{\sum_i t_i} \quad (5.12)$$

em que $\sum_i t_i$ é a soma dos intervalos rotulados por i .

Como antes, a partir dos parâmetros $\lambda_{ij}^{\text{usina}}$, passa-se ao algoritmo da Tabela 5.1 que define o autômato. Este, por sua vez, define o comportamento futuro de um equipamento a partir do número de iterações, N , e do grafo com arestas com pesos positivos λ_{ij} .



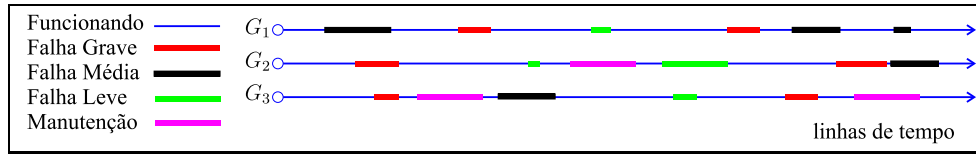
Figura 5.5 Linha de tempo dos geradores das usinas da CHESF.

Tabela 5.3 Taxa de transição dos diversos estados para Gerador:UAS-01, Usina Apolônio Sales.

DE	PARA	TAXAS
Melhorias/Modernizações	OK	0,4958677686
Mp Aperiódica De Cpsr	OK	0,2752293578
Desligamento Automático Externo ao Dmg	OK	0,1996672213
Defeito (Desligamento Programado)	OK	0,1486988848
Mp Aperiódica Mecânica	OK	0,1486988848
Atender Sistema De Linhas	OK	0,1371428571
Defeito Alta Gravidade (Desligamento Forçado)	OK	0,1196410768
Ensaio Mecânicos	OK	0,1183431953
Atender Sistema Proteção/Medição	OK	0,1172638436
Atender Sistema de Transmissão	OK	0,0853393447
Mp Aperiódica Elétrica	OK	0,0679629979
Falha Na Partida	OK	0,0450619602
Mp Periódica de 5 Mil Horas Oper.	OK	0,0035216090
Falha (Desligamento Automático)	OK	0,0030537265
Mp Periódica de 8 Mil Horas Oper.	OK	0,0028628686
Mp Periódica de 6 Mil Horas Oper.	OK	0,0028559189
Mp Periódica de 3 Mil Horas Oper.	OK	0,0025073130
Mp Periódica de 10 Mil Horas Oper.	OK	0,0022755717
Mp Periódica de 4 Mil Horas Oper.	OK	0,0020244964
Mp Periódica de 12 Mil Horas Oper.	OK	0,0010202691
OK	Possível Trabalho em outra Maq/Eqto	0,0007005814
OK	Defeito (Desligamento Programado)	0,0002643703
Mp Periódica de 48 Mil Horas Oper.	Ok	0,0002625349
OK	Atender Sistema de Transmissão	0,0001982778
OK	Defeito Alta Gravidade (Desligamento Forçado)	0,0001586222
OK	Falha (Desligamento Automático)	0,0001057481
OK	Mp Aperiódica Elétrica	0,0000793111
OK	Falha na Partida	0,0000793111
OK	Atender Sistema de Linhas	0,0000528741
Mp Periódica de 40 Mil Horas Oper.	Ok	0,0000398209
OK	Atender Sistema Proteção/Medição	0,0000396556
OK	Mp Periódica de 5 Mil Horas Oper.	0,0000396556
OK	Mp Periódica de 10 Mil Horas Oper.	0,0000264370
OK	Deslig Automático Externo ao Dmg	0,0000264370
OK	Mp Aperiódica Mecânica	0,0000264370
OK	Mp Aperiódica de Cpsr	0,0000264370
OK	Mp Periódica de 8 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 12 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Ensaio Mecânicos	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 3 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 6 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 40 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 48 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Mp Periódica de 4 Mil Horas Oper.	0,0000132185
OK	Melhorias/Modernizações	0,0000132185

Tabela 5.4 Probabilidades dos diversos estados.

OK	0,6704640159
Mp Periódica de 40 Mil Horas Oper.	0,2225602467
Mp Periódica de 48 Mil Horas Oper.	0,0337575641
Falha (Desligamento Automático)	0,0232176398
Mp Periódica de 12 Mil Horas Oper.	0,0086864729
Mp Periódica de 10 Mil Horas Oper.	0,0077892866
Mp Periódica de 5 Mil Horas Oper.	0,0075498503
Possível Trabalho em outra Maq/Eqto	0,0055040806
Mp Periódica de 4 Mil Horas Oper.	0,0043776517
Mp Periódica de 3 Mil Horas Oper.	0,0035346765
Mp Periódica de 6 Mil Horas Oper.	0,0031032185
Mp Periódica de 8 Mil Horas Oper.	0,0030956853
Atender Sistema de Transmissão	0,0014658642
Defeito (Desligamento Programado)	0,0011920117
Falha Na Partida	0,0011800472
Defeito Alta Grav. (Deslig. Forçado)	0,0008889128
Mp Aperiódica Elétrica	0,0007824146
Atender Sistema de Linhas	0,0002584908
Atender Sistema Proteção/Medicação	0,0002267333
Mp Aperiódica Mecânica	0,0001192012
Deslig. Automático Externo ao Dmg	0,0000887731
Ensaio Mecânicos	0,0000748885
Mp Aperiódica de Cpsr	0,0000644011
Melhorias/Modernizações	0,0000178728

**Figura 5.6** Linha de tempo dos geradores.

5.7 Modelagem probabilística dos cenários

Seja $\mathcal{N} = (V, E, r)$ uma rede, com $G_N = (V, E)$. Seja $A \subseteq V$ o conjunto de vértices ativos, como definidos na Seção 4.1. Nesta seção, especificamente, será determinado um modelo de falha de cada vértice ativo d , cuja probabilidade de funcionamento adequado é dada por p_d . Os demais componentes da rede podem receber a probabilidade 1 de funcionamento. Uma modificação no grafo G_N , pode ser determinada pela transformação dos vértices ativos (que no caso real representam os disjuntores da rede elétrica) em uma aresta e dois outros vértices terminais (figura 5.10).

Seja G'_N o grafo obtido pela transformação sobre G_N , como acima. Aplicado-se, então, um modelo de percolação (ver Seção 3.4, o modelo de cluster aleatórios) sobre o grafo G'_N , definido pela distribuição de probabilidade:

$$\mu(A) = Z^{-1} \left(\prod_{d \in A} p_d \right) \left(\prod_{d \notin A} (1 - p_d) \right) Q^{\kappa(A)}, \quad (A \subseteq E(G_N)), \quad (5.13)$$

em que $\kappa(A)$ é o número de componentes conexas do grafo $G'_N : A = (V, A)$, p_d , $0 \leq p_d \leq 1$

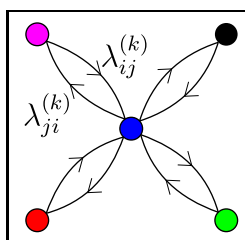


Figura 5.7 Grafo de estados do gerador $k = 1, 2, 3$.

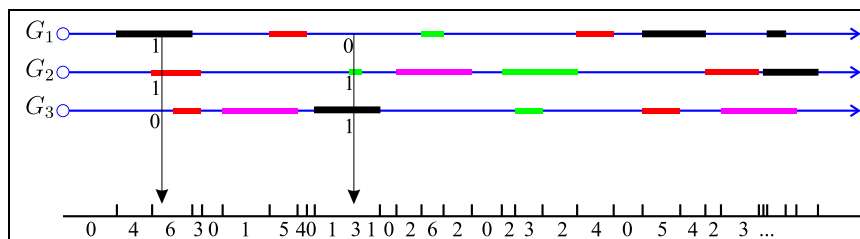


Figura 5.8 Construção da linha de tempo da Usina.

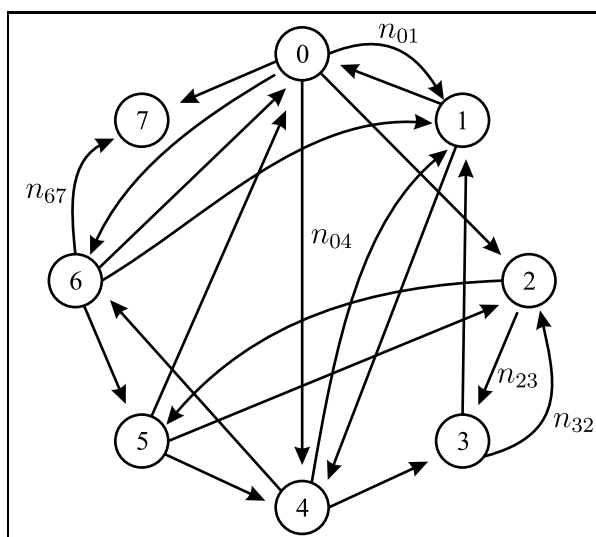


Figura 5.9 Grafo de falhas da usina, relativo a subconjuntos de geradores parados.

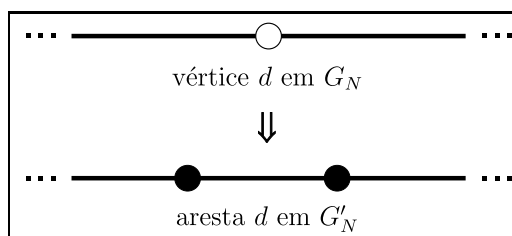


Figura 5.10 Transformação do grafo da rede elétrica.

são parâmetros associados a cada aresta de G'_N , $Q \geq 0$ é um parâmetro do modelo e Z é uma

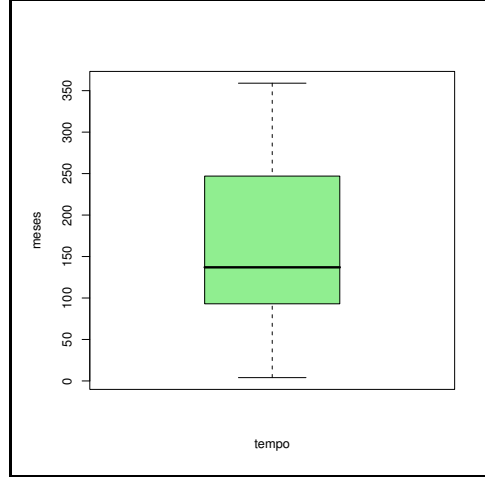


Figura 5.11 Box plot para a variável resposta tempo.

constante normalizadora introduzida tal que

$$\sum_{A \subseteq E} \mu(A) = 1. \quad (5.14)$$

Como visto na Seção 3.8, $\omega(G)$ denota a configuração aleatória produzida por μ e P_μ a distribuição de probabilidade associada, com $\mu(A) = P_\mu\{\omega(G) = A\}$. A família de medidas, com dois parâmetros $\mu = \mu(p, Q)$, $0 \leq p \leq 1$ e $Q \geq 0$, definida sobre o conjunto de arestas de um grafo finito $G = (V, E)$ é dada por

$$\mu(A) = \frac{p^{|A|} q^{|E \setminus A|} Q^{k(A)}}{\zeta} \quad (5.15)$$

em que ζ é uma constante normalizadora adequada e $q = 1 - p$.

A probabilidade de encontrar o sistema no estado σ com parâmetro de desordem β é dada por

$$P(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z} \quad (5.16)$$

A expectativa com respeito a esta distribuição de Gibbs é dada por

$$\langle \delta(\sigma(i), \sigma(j)) \rangle = \frac{1}{Q} + \frac{(Q-1)}{Q} P_\mu\{i \rightsquigarrow j\} \quad (5.17)$$

em que P_μ é a medida de cluster aleatório sobre G tomando-se $p_d = 1 - \exp(-J_{ij})$ para cada aresta $e = (i, j)$ e J_{ij} representa as energias de interação.

5.8 Modelagem do tempo de funcionamento de um transformador

O tempo de funcionamento de qualquer equipamento do sistema elétrico definido como o tempo de funcionamento até o primeiro acidente (ou falha) é modelado através de um modelo exponencial log-linear de regressão. Esse modelo considera que a distribuição do tempo, segue a distribuição exponencial, cujo logaritmo da média é dado por uma estrutura linear contendo as variáveis que explicam o comportamento desse tempo e parâmetros associados desconhecidos. Nessa seção, será apresentado resultados obtidos [CCPD07] para os transformadores do sistema CHESF (Companhia Hidro Elétrica do São Francisco).

Na Tabela B.1 (anexo no apêndice B) estão apresentados os dados do tempo de funcionamento em meses de 61 transformadores e as suas respectivas características físicas. O objetivo é estimar uma equação de regressão para modelar a média do tempo de funcionamento (*tempo*) dos transformadores, considerando como variáveis explicativas a espécie (*especie*) do equipamento, o número de enrolamentos (*enrolam*), o tipo do transformador (*tipo*) e a sua potência (em MVA) (*pot*). Apresenta-se, aqui, a modelagem do tempo de funcionamento de um transformador, mas este método pode ser aplicado para qualquer equipamento.

As variáveis *tempo* e *pot* são quantitativas e *especie*, *enrolam* e *tipo* são variáveis qualitativas, também, denominadas fatores. O fator *especie* tem dois níveis, monofásico (M) e trifásico (T); o fator *enrolam* tem três níveis, 1 (A), 2 (B) e 3 (C) correspondentes a um, dois e três, enrolamentos, respectivamente; e, finalmente, o fator *tipo*, também, com três níveis, transformador (A), reator (B) e trafo, ou transformador, elevador (C). A potência (*pot*) é uma covariável contínua medida em MVA e o tempo (*tempo*) representa o número de meses ocorridos entre a energização e a falha detectada em um equipamento.

Inicialmente será realizada uma análise descritiva, a fim de melhor conhecer o comportamento das variáveis em questão. Nas Figuras 5.11 e 5.12 estão apresentadas o box plot para a variável resposta *tempo* e os box plots da variável resposta *tempo* por espécie, por número de enrolamentos e por tipo do equipamento, respectivamente. Na Figura 5.11 nota-se que o tempo de funcionamento apresenta uma grande variabilidade e assimetria positiva. Na Figura 5.12 mostra-se que a dispersão do tempo de funcionamento é maior para transformadores com dois enrolamentos e menor para transformadores do tipo trafo elevador. Observa-se, ainda, que três trafos elevadores apresentam grandes tempos de funcionamento. Na Figura 5.13 apresenta-se o box plot para a variável explicativa *pot*, indicando que a potência apresenta assimetria negativa e um valor extremo.

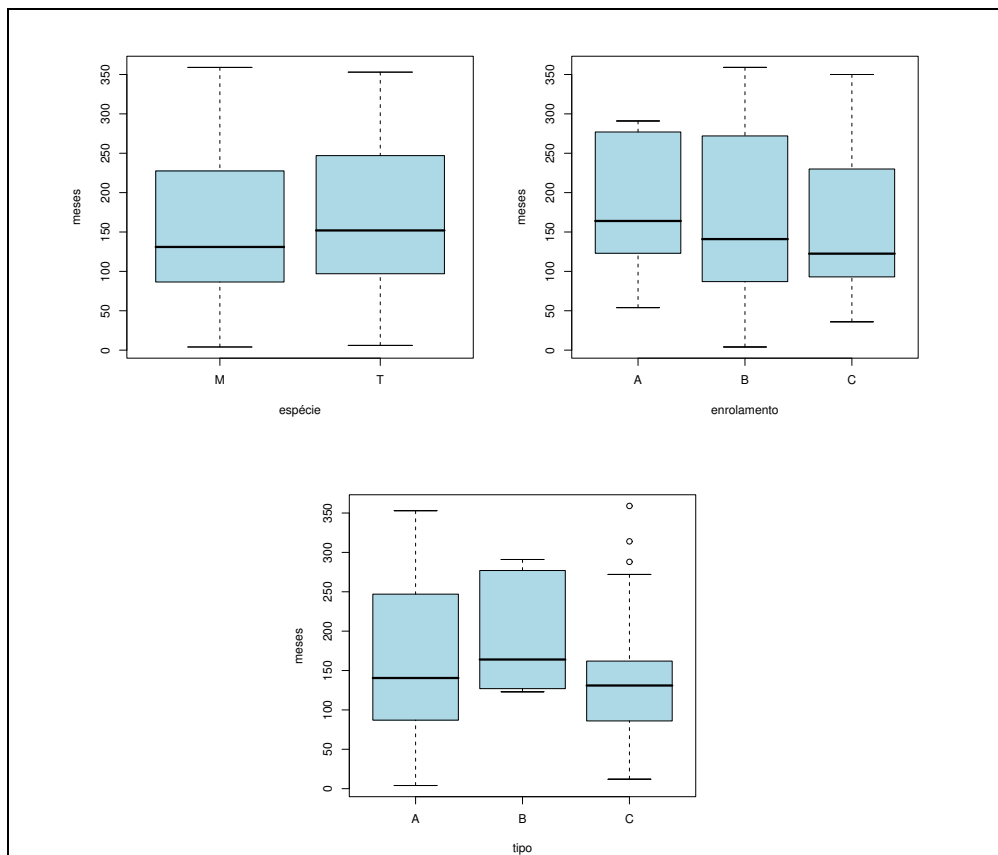


Figura 5.12 Box plots da variável resposta tempo pelos fatores espécie, enrolam e tipo.

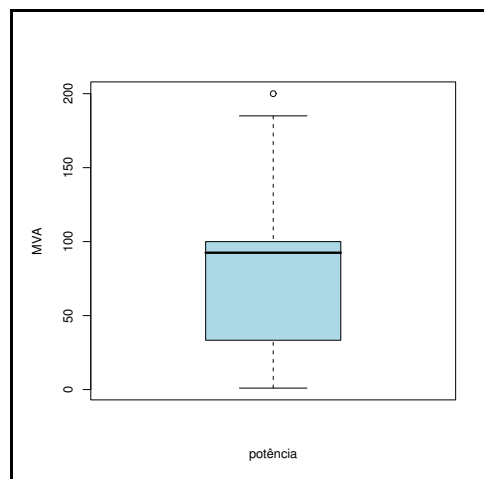


Figura 5.13 Box Plot para a variável explicativa pot.

Supondo que o tempo de funcionamento segue a distribuição exponencial e considerando uma função de ligação logarítmica para a média dessa distribuição, um modelo que melhor se

ajusta aos dados é dado pela seguinte equação obtida através do software *R*:

$$\log \hat{\mu} = 5.3556 - 1.3078enrolamB - 2.2298enrolamC + 1.9833tipoC - 0.0089pot \\ + 1.6683especieT \times enrolamB + 2.6022especieT \times enrolamC - 1.9019especieT \times tipoC.$$

Essa equação pode, também, ser escrita como:

$$\hat{\mu} = 211.7913 \times 0.2704^{enrolamB} \times 0.1075^{enrolamC} \times 7.2667^{tipoC} \times 0.9912^{pot} \\ \times 5.3032^{especieT \times enrolamB} \times 13.4934^{especieT \times enrolamC} \times 0.1493^{especieT \times tipoC}.$$

O *script* em *R* para ajustar esse modelo é dado abaixo:

```
Call:
glm(formula = tempo ~ enrolamB + enrolamC + tipoC + pot + especieT:enrolamB +
    especieT:enrolamC + especieT:tipoC, family = Gamma(log))

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    5.355601    0.414461  12.922 < 2e-16 ***
enrolamB       -1.307789    0.846933  -1.544  0.12255
enrolamC       -2.229829    0.967433  -2.305  0.02117 *
tipoC          1.983301    0.756182   2.623  0.00872 **
pot            -0.008875    0.002893  -3.068  0.00216 **
enrolamB:especieT 1.668317    0.756337   2.206  0.02740 *
enrolamC:especieT 2.602200    0.897710   2.899  0.00375 **
tipoC:especieT  -1.901867    1.278319  -1.488  0.13681
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1)

Null deviance: 35.016  on 60  degrees of freedom
Residual deviance: 21.097  on 53  degrees of freedom
AIC: 715.78

Number of Fisher Scoring iterations: 8
```

Este modelo foi aceito pelo teste do desvio, pois possui desvio (21.097) inferior ao ponto crítico (ou seja, valor tabelado) da distribuição qui-quadrado (χ^2) com 53 graus de liberdade ao nível de 5% (70.99). As principais estimativas dos parâmetros são significativas, com exceção do efeito principal *enrolamB*, e da interação *especieT : tipoC*.

Adota-se aqui os resíduos de Anscombe deduzidos para o modelo exponencial, com expressão

$$a_i = 3 \frac{(tempo_i^{1/3} - \hat{\mu}_i^{1/3})}{\hat{\mu}_i^{1/3}},$$

pois esses resíduos podem ser considerados, aproximadamente, normais.

O gráfico de a_i versus $\hat{\mu}_i$ mostrado na Figura 5.14 não revela dados aberrantes (nenhum resíduo fora do intervalo $(-2, 2)$) e os pontos se apresentam aleatoriamente distribuídos, sem nenhum padrão definido, concluindo-se, então, que esses tempos são variáveis independentes.

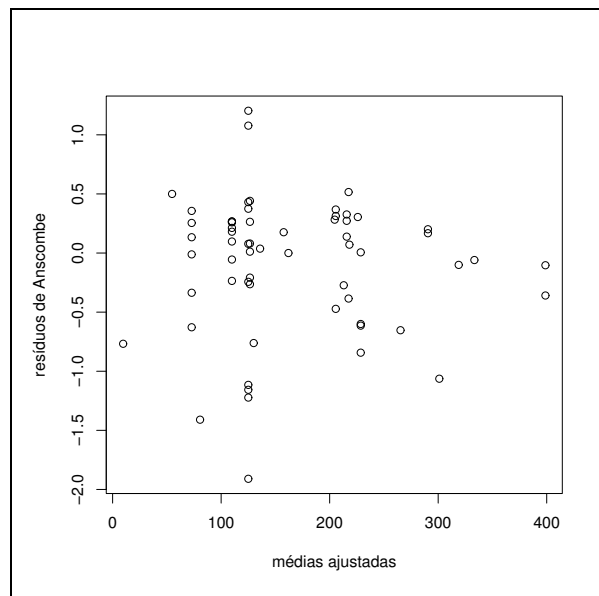


Figura 5.14 *Resíduos de Anscombe versus médias ajustadas.*

A Figura 5.15 apresenta os valores observados *versus* os valores ajustados, mostrando alguma dispersão em torno da primeira bisetriz.

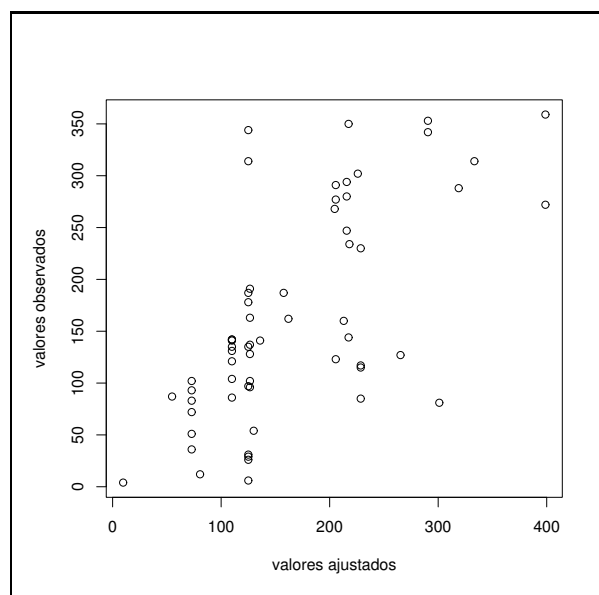


Figura 5.15 *Valores observados versus valores ajustados.*

A Figura 5.16 apresenta o gráfico da variável dependente modificada estimada z versus o preditor linear estimado $\hat{\eta}$ indicando que a função de ligação logarítmica está correta.

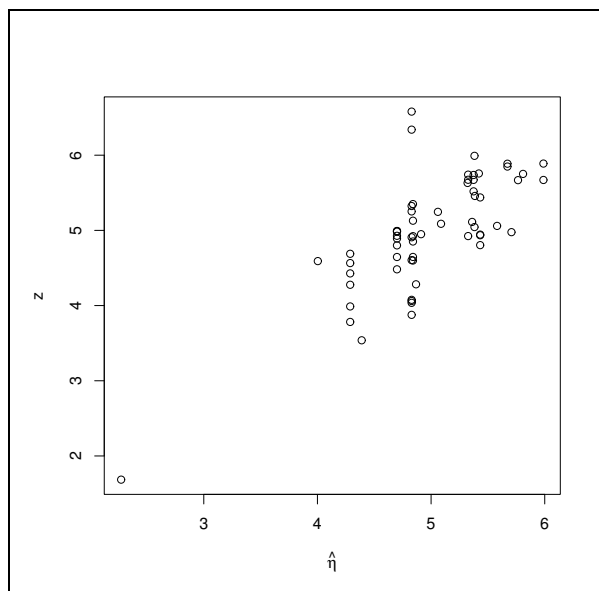


Figura 5.16 Gráfico de z versus $\hat{\eta}$.

Os resíduos ordenados versus os quantis da distribuição $N(0, 1)$ mostrados na Figura 5.17 suportam a distribuição exponencial para *tempo*. A Figura 5.18 apresenta o gráfico da estatística de Cook versus o índice das observações. Nota-se que as observações #45 e #49 são pontos influentes. As observações #45 e #49 que foram detectadas como pontos influentes no modelo se referem a componentes do tipo transformador monofásico com dois enrolamentos, ou seja, referentes aos componentes 02T1-A-CRD e 05T2-B-MSI, respectivamente. Como existem apenas as duas observações com estas características elas foram mantidas no modelo.

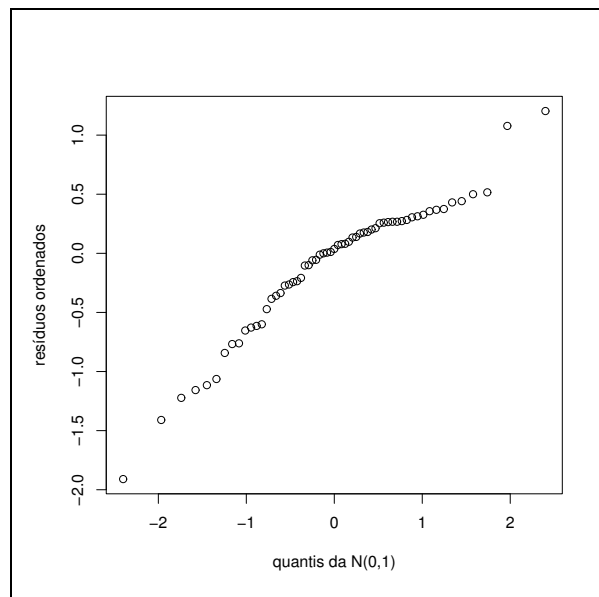


Figura 5.17 Resíduos de Anscombe ordenados versus os quantis da distribuição $N(0,1)$.

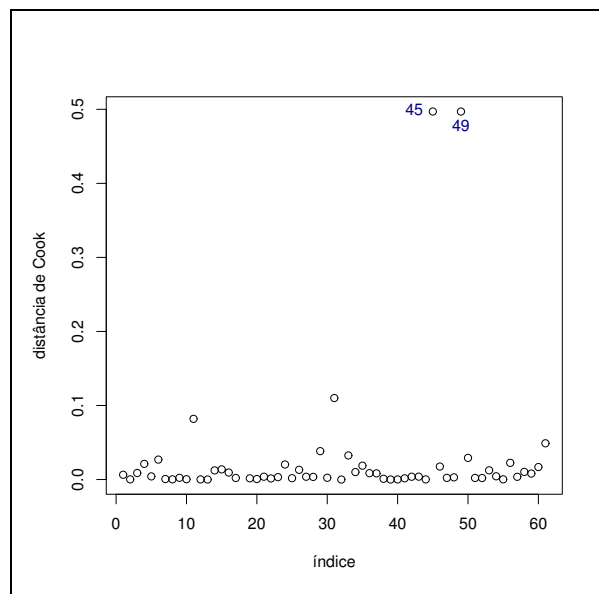


Figura 5.18 Estatística de Cook versus o índice das observações.

A chance do transformador só sofrer acidente após o tempo t (confiabilidade ao tempo t) foi calculada por:

$$R(t) = \exp\{-t \exp(-x^T \hat{\beta})\} = \exp(-t/\hat{\mu}). \quad (5.18)$$

Nas Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam-se as confiabilidades dos transformadores para as espécies monofásicos e trifásicos, respectivamente. As curvas de confiabilidades dessas duas espécies de transformadores por tipo de equipamento estão dadas nas Figuras 5.19 (monofásicos) e 5.20 (trifásicos). Pode-se concluir que para os equipamentos monofásicos a confiabilidade é maior

para o tipo trafo-elevador, depois reator e bem menor para o transformador. Entretanto, para os equipamentos trifásicos, a confiabilidade é superior para o tipo reator, depois trafo-elevador e inferior quando o equipamento é um transformador.

Tabela 5.5 Confiabilidade dos transformadores monofásicos.

Meses	Transformador 02T1-A-CRD	Reator 05E2-B-OLD	Trafo Elevador 01T3-A-USD
12	0.8033	0.9155	0.9646
24	0.6453	0.8381	0.9305
36	0.5183	0.7673	0.8976
48	0.4164	0.7024	0.8659
60	0.3345	0.6430	0.8353
120	0.1119	0.4135	0.6977
180	0.0374	0.2659	0.5828
240	0.0125	0.1710	0.4868

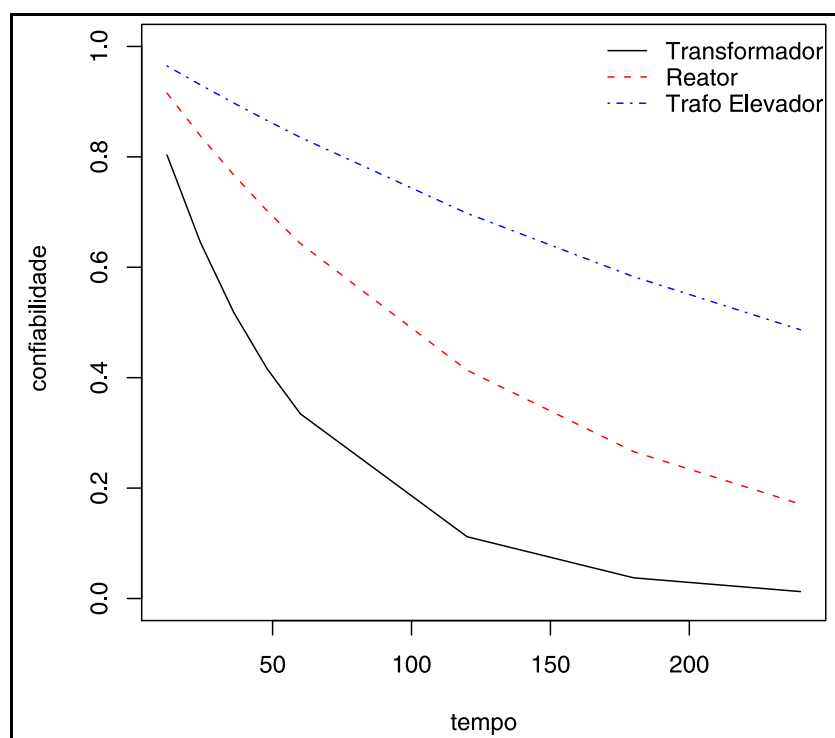


Figura 5.19 Curva de confiabilidade dos equipamentos monofásicos.

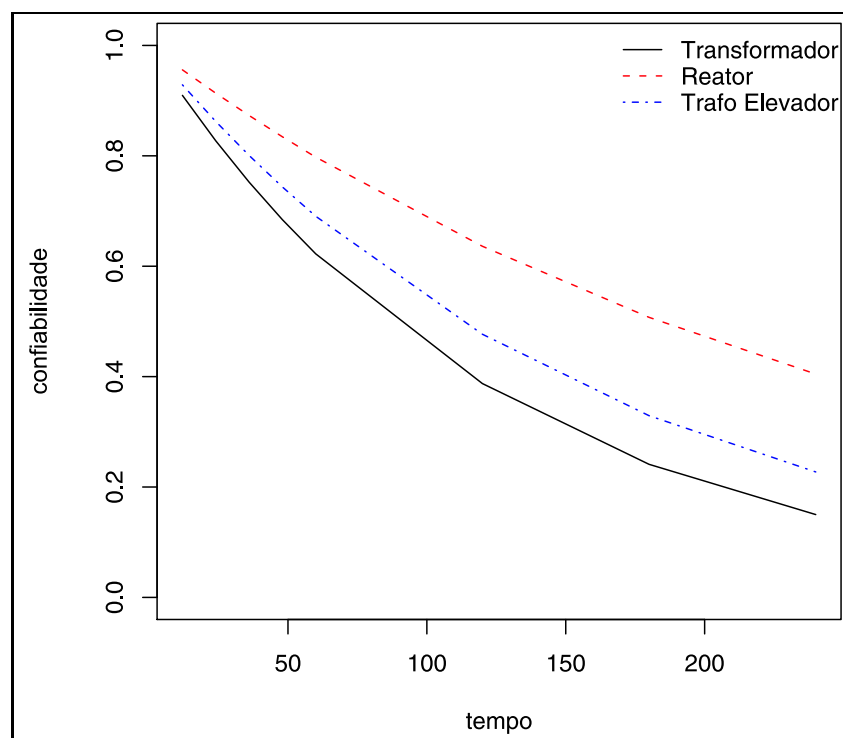


Figura 5.20 Curva de confiabilidade dos equipamentos trifásicos.

Tabela 5.6 Curva de confiabilidade dos transformadores trifásicos.

Meses	Transformador 04T2-GNN	Reator 02A1-SMD	Trafo Elevador 01T1-UTC
12	0.9095	0.9558	0.9286
24	0.8272	0.9135	0.8623
36	0.7524	0.8731	0.8007
48	0.6843	0.8345	0.7436
60	0.6224	0.7976	0.6905
120	0.3874	0.6361	0.4768
180	0.2411	0.5074	0.3292
240	0.1501	0.4047	0.2273

5.8.1 Modelo com taxa de falha não-constante

Agora, supondo que o tempo de funcionamento segue a distribuição gama e considerando a mesma função de ligação logarítmica do modelo anterior, um modelo que melhor se ajusta aos dados é dado pela seguinte equação:

$$\log \hat{\mu} = 5.5905 - 1.2617\text{especieT} - 1.1019\text{enrolamB} - 2.0134\text{enrolamC} + 1.4771\text{tipoC} - 0.0152\text{pot} + 2.2977\text{especieT} \times \text{enrolamB} + 3.2462\text{especieT} \times \text{enrolamC} - 1.9756\text{especieT} \times \text{tipoC} + 0.0090\text{especieT} \times \text{pot} + 0.0069\text{tipoC} \times \text{pot}.$$

Essa equação pode, também, ser escrita como:

$$\hat{\mu} = 267.8811 \times 0.2831^{\text{especieT}} \times 0.3322^{\text{enrolamB}} \times 0.1335^{\text{enrolamC}} \times 4.3804^{\text{tipoC}} \times 0.9849^{\text{pot}} \times 9.9510^{\text{especieT} \times \text{enrolamB}} \times 25.6930^{\text{especieT} \times \text{enrolamC}} \times 0.1387^{\text{especieT} \times \text{tipoC}} \times 1.0091^{\text{especieT} \times \text{pot}} \times 1.0070^{\text{tipoC} \times \text{pot}}.$$

Call:

```
glm(formula = tempo ~ especieT + enrolamB + enrolamC + tipoC +
    pot + especieT:enrolamB + especieT:enrolamC + especieT:tipoC +
    especieT:pot + tipoC:pot, family = Gamma(log))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	5.590543	0.235904	23.698	< 2e-16 ***
especieT	-1.261754	0.575191	-2.194	0.032939 *
enrolamB	-1.101927	0.515898	-2.136	0.037604 *
enrolamC	-2.013436	0.573255	-3.512	0.000952 ***
tipoC	1.477141	0.575762	2.566	0.013347 *
pot	-0.015229	0.003505	-4.345	6.8e-05 ***
especieT:enrolamB	2.297676	0.734997	3.126	0.002949 **
especieT:enrolamC	3.246217	0.775719	4.185	0.000115 ***
especieT:tipoC	-1.975617	0.656273	-3.010	0.004083 **
especieT:pot	0.009051	0.004282	2.114	0.039563 *
tipoC:pot	0.006947	0.004117	1.688	0.097704 .

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.2568743)

Null deviance: 35.016 on 60 degrees of freedom
 Residual deviance: 19.348 on 50 degrees of freedom
 AIC: 716.21

Number of Fisher Scoring iterations: 6

Este modelo, também, foi aceito pelo teste do desvio, pois possui desvio (19.348) inferior ao ponto crítico (ou seja, valor tabelado) da distribuição qui-quadrado com 50 graus de liberdade ao nível de 5% (67.5048). As estimativas dos parâmetros são significativas.

A expressão dos resíduos de Anscombe para o modelo gama é a mesma deduzida para o modelo exponencial. Segundo o gráfico dos resíduos de Anscombe versus médias ajustadas, mostrado na Figura 5.21, nenhuma observação excedeu o intervalo $(-2, 2)$ e, portanto, não existe dados aberrantes e os pontos se apresentam aleatoriamente distribuídos, sem nenhum padrão definido, concluindo-se, então, que esses tempos são variáveis independentes.

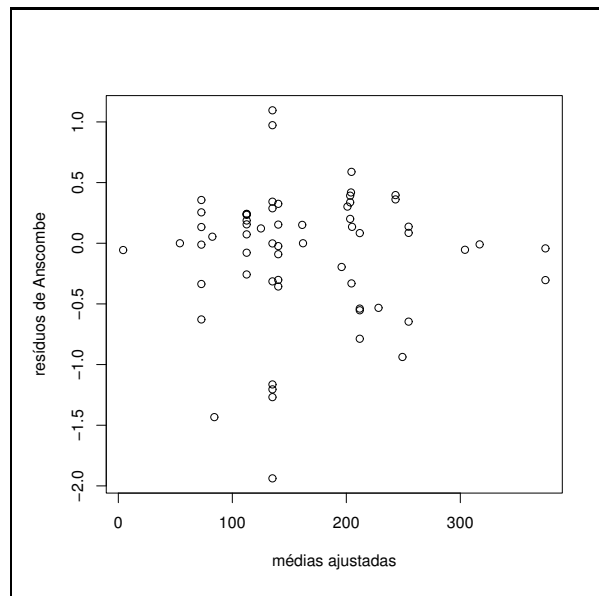


Figura 5.21 *Resíduos de Anscombe versus médias ajustadas.*

A Figura 5.22 apresenta os valores observados *versus* os valores ajustados para o modelo gama, mostrando alguma dispersão em torno da primeira bissetriz. Alguns pontos foram melhor ajustados quando comparados ao modelo exponencial. Foi verificado que a função de ligação logarítmica também está correta para o modelo gama.

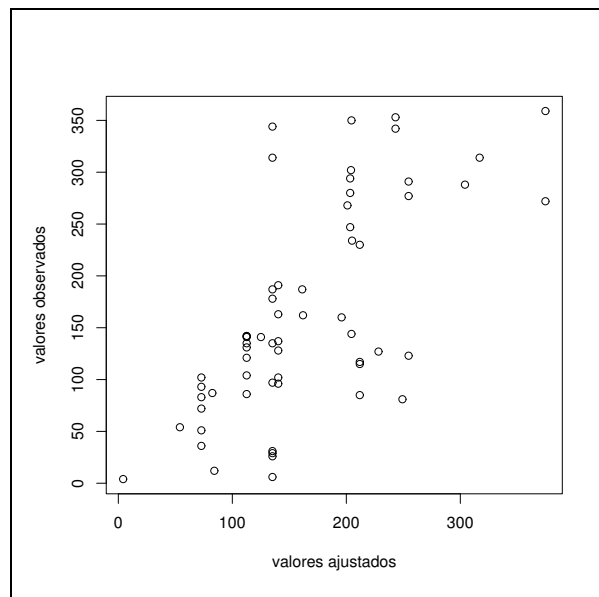


Figura 5.22 Valores observados versus valores ajustados.

Os resíduos ordenados versus os quantis da distribuição $N(0,1)$ mostrados na Figura 5.23 suportam a distribuição gama para *tempo*.

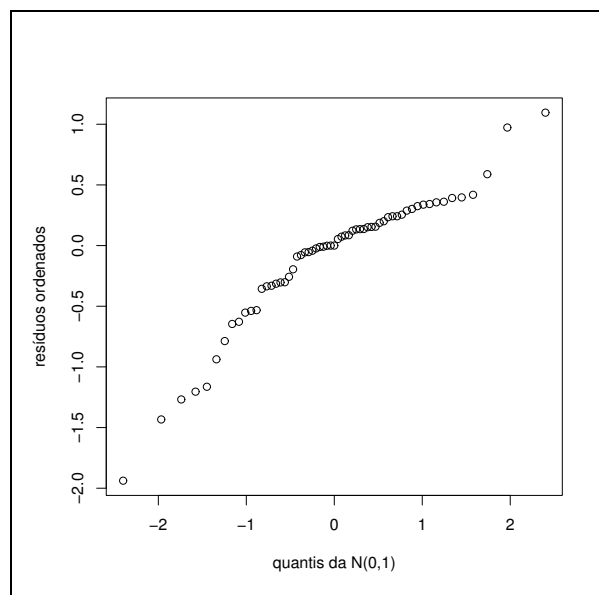


Figura 5.23 Resíduos de Anscombe ordenados versus os quantis da distribuição $N(0,1)$.

Para o modelo gama, também, foi detectada a presença de pontos influentes através da estatística de Cook. Esses pontos foram as mesmas observações, #45 e #49, encontradas para o modelo exponencial.

A chance do transformador só sofrer acidente após o tempo t (confiabilidade ao tempo t),

modelo gama, foi calculada por:

$$R(t) = P(X \geq t) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\hat{\phi})} \left(\frac{\hat{\phi}}{\hat{\mu}} \right)^{\hat{\phi}} \int_0^t x^{\hat{\phi}-1} \exp \left(\frac{-x\hat{\phi}}{\hat{\mu}} \right) dx.$$

As Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam as confiabilidades dos transformadores para as espécies monofásicos e trifásicos, respectivamente. As curvas de confiabilidades dessas duas espécies de transformadores por tipo de equipamento estão dadas nas Figuras 5.24 (monofásicos) e 5.25 (trifásicos). O mesmo comportamento para os equipamentos monofásicos e trifásicos foi obtido em relação ao modelo anterior, sendo que para o modelo gama a confiabilidade foi maior para todos os equipamentos, com exceção do tipo transformador e reator monofásicos para o tempo maior que 120 meses e para todos os equipamentos trifásicos para o tempo igual a 240 meses em que a confiabilidade diminuiu.

Tabela 5.7 *Confiabilidade dos transformadores monofásicos.*

Meses	Transformador 02T1-A-CRD	Reator 05E2-B-OLD	Trafo Elevador 01T3-A-USD
12	0.9966	0.9992	1.0000
24	0.9671	0.9913	0.9997
36	0.8959	0.9682	0.9986
48	0.7891	0.9265	0.9961
60	0.6635	0.8673	0.9916
120	0.1701	0.4646	0.9292
180	0.0270	0.1765	0.8005
240	0.0033	0.0546	0.6372

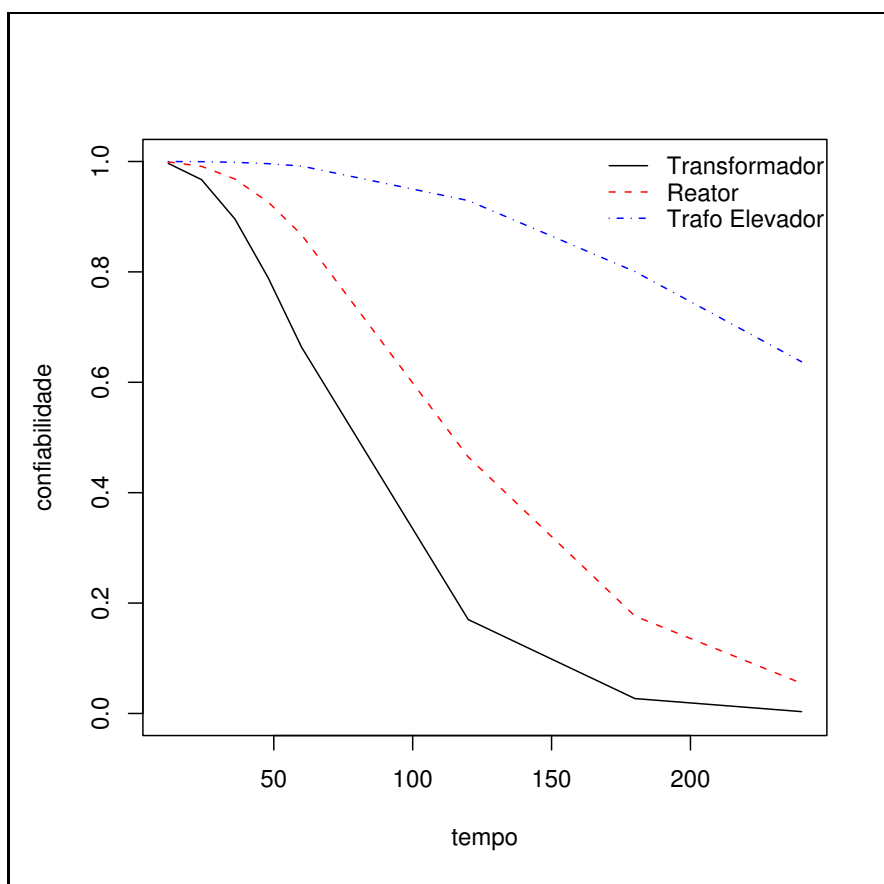


Figura 5.24 Curva de confiabilidade dos equipamentos monofásicos.

Tabela 5.8 Confiabilidade dos transformadores trifásicos.

Meses	Transformador 04T2-GNN	Reator 02A1-SMD	Trafo Elevador 01T1-UTC
12	0.9995	0.9999	0.9997
24	0.9940	0.9989	0.9963
36	0.9777	0.9955	0.9859
48	0.9469	0.9882	0.9653
60	0.9013	0.9759	0.9334
120	0.5511	0.8336	0.6518
180	0.2485	0.6093	0.3520
240	0.0926	0.3938	0.1601

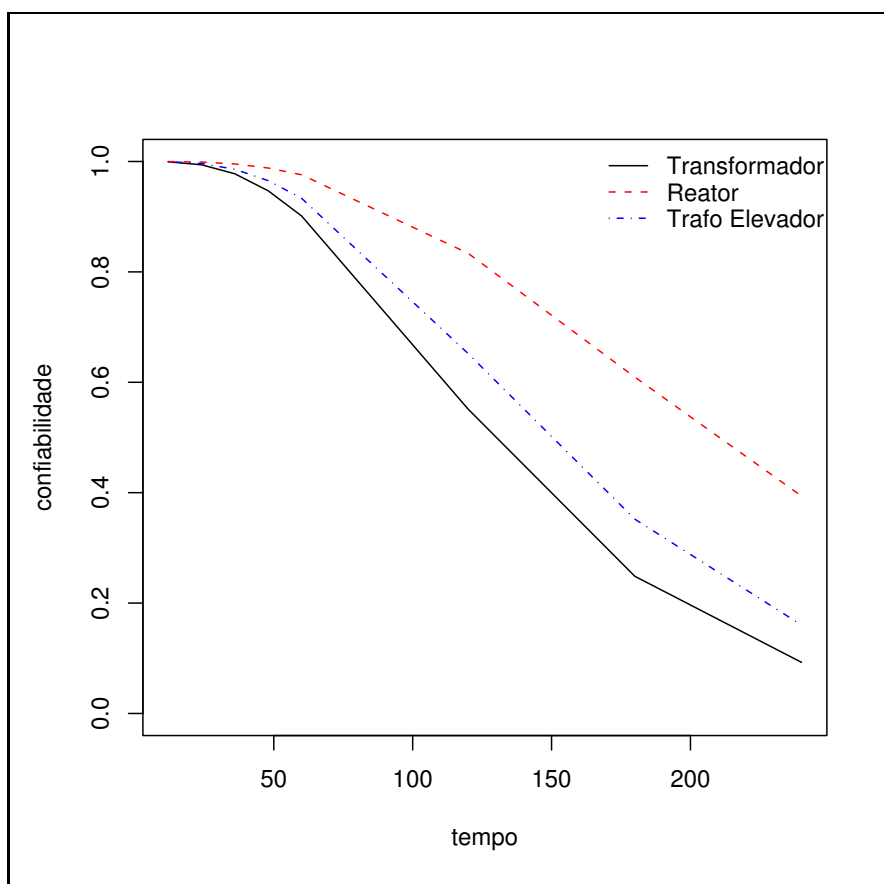


Figura 5.25 *Curva de confiabilidade dos equipamentos trifásicos.*

A aplicação das técnicas apresentadas nesta seção podem ser estendidas a todo tipo de equipamento do sistema elétrico, incluindo a linhas de transmissão. No caso das linhas, há de se considerar o comprimento de cada uma delas.

Conclusões e Considerações Finais

DADA UMA REDE ELÉTRICA REAL, mostrou-se, aqui, que esta pode ser modelada como um grafo $\mathcal{N}$, em que os vértices representam os componentes desta rede. As arestas representam as conexões (físicas ou lógicas) entre tais componentes. Esta primeira modelagem pode considerar uma certa direção das arestas (direção do fluxo de carga). Neste caso, pode-se considerar o modelo de percolação de vértices dado no Capítulo 3, para indicar a disponibilidade de carga nos diversos pontos da rede. Tal modelo descreve um espaço de probabilidade sobre o grafo $\mathcal{N}$ e as probabilidades podem ser dadas em função do polinômio de Tutte.

Quando se define a rede elétrica real deve-se levar em consideração os chamados *pontos elétricos*, que são correspondentes locais da rede em relação a propriedades elétricas, tais como mesma corrente e/ou mesmo potencial. Para se definir o risco em redes elétricas definiu-se o acidente e grande acidente que indicam a “participação” de cada equipamento em eventos na rede que possam causar danos e classifica todos os componentes da rede.

Dentre as ferramentas necessárias para a definição de confiabilidade e risco em redes elétricas pode-se destacar: o espaço de probabilidade sobre grafos (como dito acima, definido pelo polinômio de Tutte); a relação entre confiabilidade e o modelo de percolação em grafos; e a definição de digrafos estocásticos (Seção 4.5).

Alguns índices de confiabilidade foram apresentados no Capítulo 5 e correspondem a fatores de decisão de relativa importância em análise de confiabilidade em redes elétricas. Os modelos de atribuição de risco, análise de confiabilidade e classificação de riscos em componentes de um sistema elétrico, também, puderam ser apreciados no Capítulo 5.

Como se vê, esta tese teve como objetivos a elaboração e demonstração de técnicas de análise de confiabilidade e risco em sistemas que possam ser modelados por grafos. A aplicação a redes elétricas foi obtida naturalmente, devido à natureza das estruturas reais envolvidas.

Em termos teóricos, pode-se avançar no estudo de modelos mais gerais, tais como reticulados (*lattices*), ou grafos infinitos. Uma outra aplicação em sistemas reais, que tem especial interesse, é uso de risco em sistemas epidemiológicos, que podem ser apreciados com grafos, nos quais vértices são indivíduos e arestas o contato físico possível entre duas pessoas.

Família de distribuições de Pearson

SEGUEM OS RESULTADOS segundo Nair e Sankaran [NS91] sobre a caracterização da família de distribuições de Pearson, usadas na Seção 4.3.

Seja X uma variável aleatória contínua em (a, b) , em que a pode ser $-\infty$ e b pode ser $+\infty$, com função de distribuição de probabilidade $f(x)$ e confiabilidade $R(x)$.

Teorema A.1. *A condição necessária e suficiente para que a distribuição de X pertença à família de Pearson é:*

$$m(x) = \mu + (a_0 + a_1x + a_2x^2)h(x), \quad (\text{A.1})$$

em que $m(x) = \mathbb{E}\langle X | X > x \rangle$, μ é a mediana de X , a_0 , a_1 e a_2 são constantes reais e $h(X)$ é a taxa de falha associada à distribuição de X .

Demonstração. Suponha que X é distribuído como um membro da família de Pearson. Então

$$f'(x) = -\frac{(x+d)f(x)}{b_0 + b_1x + b_2x^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int_x^b (b_0 + b_1x + b_2x^2)f'(t)dt = \int_x^b (t+d)dR(t). \quad (\text{A.3})$$

Integrando por partes e considerando $\lim_{x \rightarrow a \text{ ou } b} x^2 f(x) = 0$ e após simplificação de (A.3), obtém-se

$$(1 - 2b_2) \int_x^b R(t)dt = (b_0 + b_1x + b_2x^2)f(x) + [b_0 + (2b_2 - 1)x - d]R(x). \quad (\text{A.4})$$

Fazendo as substituições $f(x) = h(x)R(x)$ e $\int_x^\infty R(t)dt = [m(x) - x]R(x)$ em (A.4), tem-se

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)h(x) + \frac{b_1 - d}{1 - 2b_2} = m(x), \quad (\text{A.5})$$

para $a_i = \frac{b_i}{1 - 2b_2}$, $i = 1, 2, 3$. Como $x \rightarrow a$ em (A.5), então

$$\mu = m(a) = \frac{b_1 - d}{1 - 2b_2}, \quad (\text{A.6})$$

e, portanto, (A.5) implica (A.1).

Por outro lado, se (A.1) é válida, então

$$\int_x^b t f(t) dt = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) h(x) + \mu R(x).$$

Diferenciando com respeito a x e simplificando a expressão resultante usando, novamente que $a_i = \frac{b_i}{1 - 2b_2}$, $i = 1, 2, 3$ e (A.6), obtém-se a equação diferencial (A.2). $\square$

Suponha agora que X seja uma variável aleatória discreta com probabilidades positivas sobre $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, em que n pode ser ∞ , com função de probabilidade f_x , confiabilidade $R(x)$ e taxa de falha $h(x) = f_x / \Pr(X \geq x)$, então,

Teorema A.2. *A distribuição de X é um membro da família definida por*

$$f_{x+1} - f_x = -\frac{(x+d)f_x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad (\text{A.7})$$

se, e somente se, a relação

$$m(x) = \mu + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) h_{x+1}, \quad (\text{A.8})$$

é satisfeita para valores inteiros não-negativos de x , em que

$$d = \frac{a_1 - a_2 - \mu}{2a_2 + 1}$$

$$b_i = \frac{a_i}{2a_2 + 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Demonstração. Quando (A.8) é satisfeita para um conjunto de valores de x ,

$$\sum_{x+1}^n t f_t = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) f_{x+1} + \mu R_x$$

$$(x+1)R_x + \sum_{x+1}^n R_t = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) f_{x+1} + \mu R_x. \quad (\text{A.9})$$

Mudando x por $x-1$ em (A.9) e subtraindo-se de (A.9), tem-se

$$(f_{x+1} - f(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) = -((2a_2 + 1)x + a_1 - a_2 - \mu) f_x.$$

Substituindo d por b_i como afirmado no teorema, obtém-se a forma (A.7). A volta da demonstração é obtida seguindo os mesmos passos acima de maneira inversa. $\square$

APÊNDICE B

Tempo funcionamento de transformadores

Tabela B.1 *Dados de Tempos de Funcionamento de Transformadores.*

COMPONENTE	TEMPO DE FUNCIONAMENTO	ESPÉCIE	NÚMERO DE ENROLAMENTOS	TIPO	POTÊNCIA (MVA)
04T1-BGI	178	Trifásico	2	Transformador	100
04T3-MRD	135	Trifásico	2	Transformador	100
04T3-MTT	187	Trifásico	2	Transformador	100
04T3-RLD	29	Trifásico	2	Transformador	100
04T2-SNB	302	Trifásico	2	Transformador	33.34
01T3-C-ULG	36	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
01T4-C-USD	288	Monofásico	2	Trafo Elevador	30
01T3-A-USD	314	Monofásico	2	Trafo Elevador	25
01T4-B-USQ	135	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T6-B-USQ	121	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
04T6-FNL	314	Trifásico	2	Transformador	100
05E2-B-OLD	141	Monofásico	1	Reator	50
04T1-PRI	230	Trifásico	3	Transformador	33.34
02A1-SMD	127	Trifásico	2	Reator	15.25
04T1-TSA	85	Trifásico	3	Transformador	33.34
01T3-C-ULG	51	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
01T2-C-USQ	86	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T1-UTC	162	Trifásico	2	Trafo Elevador	80
02T8-A-BGI	342	Trifásico	2	Transformador	5
04T2-BJS	247	Trifásico	3	Transformador	39.9
04T3-BJS	144	Trifásico	3	Transformador	39
04T2-GNN	102	Trifásico	3	Transformador	100
04T3-MRR	163	Trifásico	3	Transformador	100
04T1-MTT	31	Trifásico	2	Transformador	100
04T1-TAC	97	Trifásico	2	Transformador	100
04E1-C-TSA	277	Monofásico	1	Reator	3.33
01T3-B-USQ	142	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T3-B-USQ	141	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
04T2-ACD	54	Trifásico	1	Transformador	55
02T8-A-BGI	353	Trifásico	2	Transformador	5
04T6-FNL	344	Trifásico	2	Transformador	100
04T2-JCR	128	Trifásico	3	Transformador	100
04T3-MRD	6	Trifásico	2	Transformador	100
04T2-MRR	191	Trifásico	3	Transformador	100
04E1-B-TSA	291	Monofásico	1	Reator	3.33
04T1-TSA	115	Trifásico	3	Transformador	33.34
04T1-TSA	117	Trifásico	3	Transformador	33.34
06T2-A-UFL	359	Monofásico	2	Trafo Elevador	4.8

Dados de Tempos de Funcionamento de Transformadores. Continuação

COMPONENTE	TEMPO DE FUNCIONAMENTO	ESPÉCIE	NÚMERO DE ENROLAMENTOS	TIPO	POTÊNCIA (MVA)
01T2-C-ULG	72	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
01T1-C-USQ	104	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T5-A-USQ	131	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T3-C-USQ	142	Monofásico	2	Trafo Elevador	150
01T4-B-UST	268	Monofásico	2	Trafo Elevador	80
03T1-CRD	234	Trifásico	3	Transformador	38.6
02T1-A-CRD	87	Monofásico	2	Transformador	5
04E1-B-FTZ	123	Monofásico	1	Reator	3.33
04T1-GNN	96	Trifásico	3	Transformador	100
04T2-IRE	280	Trifásico	3	Transformador	39.9
05T2-B-MSI	4	Monofásico	2	Transformador	200
02T5-NTD	81	Trifásico	2	Transformador	1
04T1-OLD	160	Trifásico	2	Transformador	40
01T1-B-ULG	83	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
04T4-ACD	350	Trifásico	3	Transformador	39
04T2-BJS	294	Trifásico	3	Transformador	39.9
04T2-GNN	137	Trifásico	3	Transformador	100
04T1-RIB	26	Trifásico	2	Transformador	100
05E1-C-SJI	187	Monofásico	1	Reator	33.3
06T1-C-UFL	272	Monofásico	2	Trafo Elevador	4.8
01T1-B-ULG	93	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
01T1-B-ULG	102	Monofásico	3	Trafo Elevador	92.5
01T4-C-UXG	12	Monofásico	2	Trafo Elevador	185

APÊNDICE C

Parte do código desenvolvido para estudo de risco em redes elétricas

COMO PARTE DO ESTUDO de risco e confiabilidade em redes elétricas reais, segue abaixo o núcleo do código desenvolvido em *Java*TM para descrição e mapeamento de riscos numa rede elétrica, devido a Lauro Lins (Scientific Computing and Imaging Institute da University of Utah) e Christian Diego (Centro de Informática, UFPE).

```
package riskchesf.chart;

import java.awt.Color;
import java.awt.Component;
import java.awt.Dimension;
import java.awt.Font;
import java.awt.Frame;
import java.awt.GridBagConstraints;
import java.awt.GridBagLayout;
import java.awt.Insets;
import java.awt.event.ActionEvent;
import java.awt.event.ActionListener;
import java.awt.event.KeyEvent;
import java.awt.event.MouseWheelEvent;
import java.awt.event.MouseWheelListener;
import java.awt.geom.Rectangle2D;
import java.io.IOException;
import java.sql.SQLException;
import java.text.ParseException;
import java.text.SimpleDateFormat;
import java.util.ArrayList;
import java.util.Date;
import java.util.List;

import javax.swing.AbstractAction;
import javax.swing.ActionMap;
import javax.swing.Icon;
import javax.swing.InputMap;
import javax.swing.JButton;
import javax.swing.JComponent;
import javax.swing.JDialog;
import javax.swing.JFormattedTextField;
import javax.swing.JFrame;
import javax.swing.JOptionPane;
import javax.swing.JPanel;
import javax.swing.JScrollPane;
import javax.swing.JTextArea;
import javax.swing.JToolBar;
import javax.swing.KeyStroke;
import javax.swing.text.MaskFormatter;

import riskchesf.Gerador;
import riskchesf.IntervencaoGerador;
```

```

import riskchesf.cli.FunctionMountTimeLineMachine;
import riskchesf.cli.FunctionStatistics;
import riskchesf.util.DataUtils;

public class PanelDesenhoIntervencoesGeradores extends JPanel {

    private Interval _timeInterval;
    private ArrayList<ObjectWithProperties<Gerador>> _geradores =
    new ArrayList<ObjectWithProperties<Gerador>>();

    private Action ACTION_ZOOM = new Action("Zoom",null,"Zoom") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            System.out.println("Zoom");
            _timeInterval.scale(1.05);
            repaint();
        }
    };

    private Action ACTION_UNZOOM = new Action("Unzoom",null,"Unzoom") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            System.out.println("Unzoom");
            _timeInterval.scale(0.952380952);
            repaint();
        }
    };

    private Action ACTION_LEFT = new Action("<<",null,"Move Left") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            System.out.println("Left");
            _timeInterval.translate(-0.05);
            repaint();
        }
    };

    private Action ACTION_RIGHT = new Action(">>",null,"Move Right") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            System.out.println("Left");
            _timeInterval.translate(+0.05);
            repaint();
        }
    };

    private Action ACTION_INTERVAL = new Action("Intervalo",null,"Intervalo") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            System.out.println("Interval");
            setIntervalo();
            repaint();
        }
    };

    private Action ACTION_ESTADISTICAS = new Action("Estatísticas",null,"Estatísticas") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            Gerador g = getSelectedGerador();
            if (g == null) {
                JOptionPane.showMessageDialog(null, "Selecione um gerador antes.");
            }
            else openDetailsGerador(g);
        }
    };

    private Action ACTION_AUTOMATO = new Action("Autômato",null,"Autômato") {
        public void actionPerformed(ActionEvent actionEvent) {
            Gerador g = getSelectedGerador();
            if (g == null) {
                JOptionPane.showMessageDialog(null, "Selecione um gerador antes.");
            }
        }
    };

```



```

        else openAutomatoGerador(g);
    }
};

public Gerador getSelectedGerador() {
    for (ObjectWithProperties<Gerador> o: _geradores) {
        Object selected = o.getPropety("selected");
        if (selected != null && Boolean.TRUE.equals(selected)) {
            return o.getObject();
        }
    }
    return null;
}

public PanelDesenhoIntervencoesGeradores(ArrayList<Gerador> geradores) throws
SQLException, IOException, ClassNotFoundException {

// desenho dos geradores
DesenhoWindow wDesenhoIntervencoesGerador = new DesenhoWindow();
    double y = 0;
    double minX = Double.POSITIVE_INFINITY;
    double maxX = Double.NEGATIVE_INFINITY;
    for (Gerador g: geradores) {
        ObjectWithProperties<Gerador> gg = new ObjectWithProperties<Gerador>(g);
        _geradores.add(gg);
        DesenhoIntervencoesGerador d = new DesenhoIntervencoesGerador(gg,y++);
        Rectangle2D r = d.getRectangularBoundary();
        if (minX > r.getMinX()) minX = r.getMinX();
        if (maxX < r.getMaxX()) maxX = r.getMaxX();
        wDesenhoIntervencoesGerador.addDesenho(d);
    }
    wDesenhoIntervencoesGerador.setWindow(minX,maxX,0,y);

// time ruler
DesenhoWindow wTimeRuler = new DesenhoWindow();
wTimeRuler.setWindow(minX,maxX,0,1);
wTimeRuler.addDesenho(new DesenhoTimeRuler(wTimeRuler,0.0,1.0));

// time ruler
DesenhoWindow wRotuloGeradores = new DesenhoWindow();
wRotuloGeradores.setWindow(0,1,0,1);
wRotuloGeradores.addDesenho(new DesenhoRotuloGeradores(_geradores));

// intervalo
    _timeInterval = new Interval(minX,maxX);

// sync commands
    wTimeRuler.syncX_with(_timeInterval);
    wDesenhoIntervencoesGerador.syncX_with(_timeInterval);

//
    this.setLayout(new GridBagLayout());
    PanelDesenhoWindow desenhoPrincipal = new PanelDesenhoWindow(wDesenhoIntervencoesGerador);
    // listen to mouse clicks on the correct panel!
    desenhoPrincipal.addListener(new PanelDesenhoWindow.Listener() {
public void mouseClicked(List<Object> list) {
    System.out.println("Found!");
}

for (Object o: list) {
    if (o instanceof DesenhoIntervencaoGerador) {

```

```

select(((DesenhoIntervencaoGerador) o).getParent().getGerador());
break;
}
}

ArrayList<IntervencaoGerador> listig = new ArrayList<IntervencaoGerador>();
for (Object o: list) {
if (o instanceof DesenhoIntervencaoGerador) {
listig.add(((DesenhoIntervencaoGerador) o).getIntervencaoGerador());
}
}
openDetails(listig);

});

PanelDesenhoWindow desenhoReguaDoTempo = new PanelDesenhoWindow(wTimeRuler);
desenhoReguaDoTempo.setPreferredSize(new Dimension(100,30));

PanelDesenhoWindow desenhoRotulosGeradores = new PanelDesenhoWindow(wRotuloGeradores);
desenhoRotulosGeradores.setPreferredSize(new Dimension(45,100));
desenhoRotulosGeradores.addListener(new PanelDesenhoWindow.Listener() {
public void mouseClicked(List<Object> list) {
System.out.println("Found!");
for (Object o: list) {
if (o instanceof ObjectWithProperties) {
select(o);
return;
}
}
});

this.setBackground(Color.WHITE);

// panel botoes
JToolBar toolBar = new JToolBar();
toolBar.addAction(ACTION_ZOOM);
toolBar.addAction(ACTION_UNZOOM);
toolBar.addAction(ACTION_LEFT);
toolBar.addAction(ACTION_RIGHT);
toolBar.addAction(ACTION_INTERVAL);
toolBar.addAction(ACTION_ESTADISTICAS);
toolBar.addAction(ACTION_AUTOMATO);
toolBar.setFocusTraversalKeysEnabled(false);
toolBar.setFocusCycleRoot(true);
toolBar.setFocusable(false);
toolBar.setBackground(Color.white);
for (Component c: toolBar.getComponents()) {
c.setFocusable(false);
c.setFocusTraversalKeysEnabled(false);
}

//toolBar.setPreferredSize(new Dimension(100,25));

this.add(toolBar,new GridBagConstraints(
0, 0,
2, 1,
0, 0,
GridBagConstraints.CENTER,
GridBagConstraints.BOTH,
new Insets(0,0,0,0), 0, 0));

this.add(desenhoPrincipal,new GridBagConstraints(
1, 1,
1, 1,

```

```

        1.0, 1.0,
        GridBagConstraints.CENTER,
        GridBagConstraints.BOTH,
        new Insets(0,0,0,0), 0, 0));
this.add(desenhoReguaDoTempo,new GridBagConstraints(
1, 2,
        1, 1,
        1.0, 0.0,
        GridBagConstraints.CENTER,
        GridBagConstraints.BOTH,
        new Insets(0,0,0,0), 0, 0));
this.add(desenhoRotulosGeradores,new GridBagConstraints(
0, 1,
        1, 1,
        0.0, 1.0,
        GridBagConstraints.CENTER,
        GridBagConstraints.BOTH,
        new Insets(0,0,0,0), 0, 0));
}

private static abstract class Action extends AbstractAction {
public Action(String name, Icon icon, String description) {
super(name, icon);
this.putValue(Action.SHORT_DESCRIPTION, description);
this.putValue(Action.LONG_DESCRIPTION, description);
}
}

```

```

public void select(Object obj) {
if (obj == null) {
for (ObjectWithProperties<Gerador> g: _geradores) {
g.setProperty("selected", false);
repaint();
}
}
else if (!(obj instanceof ObjectWithProperties)) {
return;
}
else {
for (ObjectWithProperties<Gerador> g: _geradores) {
g.setProperty("selected", false);
}
ObjectWithProperties owp = (ObjectWithProperties) obj;
owp.setProperty("selected", true);
repaint();
}
}

public void openDetailsGerador(Gerador g) {
JFrame f = (JFrame) this.getTopLevelAncestor();
JDialog d = new JDialog(f,"Estatísticas Gerador "+g.getCodigo());
JTextArea t = new JTextArea();
JScrollPane sp = new JScrollPane(t);
t.setFont(new Font(Font.MONOSPACED,Font.PLAIN,10));
try {
t.setText(FunctionStatistics.getStatisticsOfGerador(g));
} catch (SQLException e) {
// TODO Auto-generated catch block
e.printStackTrace();
}
}

```

```

    } catch (IOException e) {
    // TODO Auto-generated catch block
    e.printStackTrace();
    } catch (ClassNotFoundException e) {
    // TODO Auto-generated catch block
    e.printStackTrace();
    }
    d.setDefaultCloseOperation(JDialog.DISPOSE_ON_CLOSE);
    d.setContentPane(sp);
    t.setEditable(false);
    t.setCaretPosition(0);
    riskchesf.util.GUIUtils.resizeAndCenterWindow(d, 620, 385);
    d.setLocation(d.getLocation().x, d.getLocation().y);
    d.setVisible(true);
}

public void openAutomatoGerador(Gerador g) {
    JFrame f = (JFrame) this.getTopLevelAncestor();
    JDialog d = new JDialog(f, "Autômato Gerador "+g.getCodigo());
    JTextArea t = new JTextArea();
    JScrollPane sp = new JScrollPane(t);
    t.setFont(new Font(Font.MONOSPACED, Font.PLAIN, 10));
    try {
    t.setText(FunctionMountTimeLineMachine.mountTimeLineMachine(g));
    } catch (SQLException e) {
    // TODO Auto-generated catch block
    e.printStackTrace();
    } catch (IOException e) {
    // TODO Auto-generated catch block
    e.printStackTrace();
    } catch (ClassNotFoundException e) {
    // TODO Auto-generated catch block
    e.printStackTrace();
    }
    d.setDefaultCloseOperation(JDialog.DISPOSE_ON_CLOSE);
    d.setContentPane(sp);
    t.setEditable(false);
    t.setCaretPosition(0);
    riskchesf.util.GUIUtils.resizeAndCenterWindow(d, 620, 385);
    d.setLocation(d.getLocation().x, d.getLocation().y);
    d.setVisible(true);
}

public void openDetails(List<IntervencaoGerador> list) {

    int count = 0;
    for (IntervencaoGerador ig: list) {

        System.out.println(""+ig.getPrintHeaderString());
        for (String st: ig.getPrintString())
            System.out.println(st);

        JFrame f = (JFrame) this.getTopLevelAncestor();
        JDialog d = new JDialog(f, "Intervenção Gerador "+ig.getId());
        JTextArea t = new JTextArea();
        JScrollPane sp = new JScrollPane(t);
        t.setFont(new Font(Font.MONOSPACED, Font.PLAIN, 10));
        t.setText(String.format(
            "ID          %-7d\n"+
            "GERADOR      %-7s\n"+
            "T.INIC       %-16s\n"+
            "T.FINAL      %-16s\n"+
            "CÓDIGO       %-16s\n"+
            "TIPO         %-34s\n"+
            "NAT          %-3s\n"+

```

```

"T.PARADA  %-3s\n"+
"T.TOT      %-8s\n"+
"\nINFO\n%s",
ig.getId(),
ig.get_gerador().getCodigo(),
DataUtils.formatDate(ig.get_t0()),
DataUtils.formatDate(ig.get_t1()),
ig.get_codigo(),
ig.get_tipo().get_descricao(),
ig.get_natureza(),
DataUtils.formatMinutesInHourMinutes(ig.get_tempoParadaEmMinutos()),
DataUtils.formatMinutesInHourMinutes(ig.get_tempoEntreInicioEFimDaIntervencaoEmMinutos()),
ig.get_informacoesComplementares());

d.setDefaultCloseOperation(JDialog.DISPOSE_ON_CLOSE);
d.setContentPane(sp);
t.setEditable(false);
t.setCaretPosition(0);
riskchefs.util.GUIUtils.resizeAndCenterWindow(d, 400, 245);
d.setLocation(d.getLocation().x + count*20, d.getLocation().y + count*20);
d.setVisible(true);

count++;
}

}

private void setIntervalo() {
DialogDadas d = new DialogDadas(
new Date(Time.timeInMillisFromTimeInMinutes(_timeInterval.getX0())),
new Date(Time.timeInMillisFromTimeInMinutes(_timeInterval.getX1())))
);

if (!d.getOk())
return;

double x0 = Time.timeInMinutesFromTimeInMillis(d.getDate1().getTime());
double x1 = Time.timeInMinutesFromTimeInMillis(d.getDate2().getTime()) + 24.0*60.0;

this._timeInterval.setInterval(x0, x1);

this.repaint();
}

private static class DialogDadas extends JDialog {
private JFormattedTextField _date1;
private JFormattedTextField _date2;
public DialogDadas(Date d1, Date d2) {
super((Frame)null, "Entre com intervalo", true);

_date1 = new JFormattedTextField(createFormatter("##/##/####"));
_date2 = new JFormattedTextField(createFormatter("##/##/####"));

SimpleDateFormat sf = new SimpleDateFormat("dd/MM/yyyy");
_date1.setText(sf.format(d1));
_date2.setText(sf.format(d2));

JPanel p = new JPanel();
p.setLayout(new GridBagLayout());
p.add(_date1, new GridBagConstraints(
0,0,
1,1,
1,0.5,
GridBagConstraints.CENTER,
GridBagConstraints.BOTH,

```

```

new Insets(5,5,5,5),
0,0
));
p.add(_date2,new GridBagConstraints(
0,1,
1,1,
1,0.5,
GridBagConstraints.CENTER,
GridBagConstraints.BOTH,
new Insets(5,5,5,5),
0,0
));

JButton btnOk = new JButton("OK");
JButton btnCancel = new JButton("Cancel");

btnOk.addActionListener(new ActionListener() {
public void actionPerformed(ActionEvent e) {
ok();
}
});

btnCancel.addActionListener(new ActionListener() {
public void actionPerformed(ActionEvent e) {
cancel();
}
});
JPanel panelButtons = new JPanel();
panelButtons.add(btnOk);
panelButtons.add(btnCancel);

p.add(panelButtons,new GridBagConstraints(
0,2,
1,1,
0,0,
GridBagConstraints.CENTER,
GridBagConstraints.BOTH,
new Insets(5,5,5,5),
0,0
));

this.setContentPane(p);
riskchesf.util.GUIUtils.resizeAndCenterWindow(this, 200, 150);

this.setVisible(true);
}

private boolean _ok = false;
private void ok(){
SimpleDateFormat sf = new SimpleDateFormat("dd/MM/yyyy");

Date d1 = null,d2 = null;
try {
d1 = sf.parse(_date1.getText());
d2 = sf.parse(_date2.getText());
} catch (ParseException e) {
JOptionPane.showMessageDialog(this,"Datas mal formadas");
return;
}

if (d2.getTime() - d1.getTime() < 0) {
JOptionPane.showMessageDialog(this,"Data Final - Data Inicial tem que ser não negativo ");
return;
}

```

```

    }

    _ok = true;
    this.setVisible(false);
}

public boolean getOk() {
    return _ok;
}

public void cancel() {
    _ok = false;
    this.setVisible(false);
}

public Date getDate1() {
    SimpleDateFormat sf = new SimpleDateFormat("dd/MM/yyyy");
    try {
        return sf.parse(_date1.getText());
    } catch (ParseException e) {
        // TODO Auto-generated catch block
        e.printStackTrace();
        return null;
    }
}

public Date getDate2() {
    SimpleDateFormat sf = new SimpleDateFormat("dd/MM/yyyy");
    try {
        return sf.parse(_date2.getText());
    } catch (ParseException e) {
        // TODO Auto-generated catch block
        e.printStackTrace();
        return null;
    }
}

protected MaskFormatter createFormatter(String s) {
    MaskFormatter formatter = null;
    try {
        formatter = new MaskFormatter(s);
    } catch (java.text.ParseException exc) {
        System.err.println("formatter is bad: " + exc.getMessage());
        System.exit(-1);
    }
    return formatter;
}

public void installKeys() {

    this.addMouseWheelListener(new MouseWheelListener() {

        public void mouseWheelMoved(MouseWheelEvent e) {
            // TODO Auto-generated method stub

            if ((e.getModifiers() & KeyEvent.CTRL_MASK) != 0) {

                int x = e.getWheelRotation();
                System.out.println("Wheel");
                double translate = -x * 0.05;
                _timeInterval.translate(translate);
            }
        }
    });
}

```

```
repaint();

}
else {

int x = e.getWheelRotation();
System.out.println("Wheel");
double scale = (x > 0 ? Math.pow(0.952380952, Math.abs(x)) : Math.pow(1.05, Math.abs(x)));
_timeInterval.scale(scale);
repaint();
}
});

// map the keys of the keyboard
ActionMap amap = this.getActionMap();
amap.put("left", ACTION_LEFT);
amap.put("right", ACTION_RIGHT);
amap.put("zoom", ACTION_ZOOM);
amap.put("unzoom", ACTION_UNZOOM);
amap.put("setinterval", ACTION_INTERVAL);

InputMap imap = this.getInputMap(JComponent.WHEN_IN_FOCUSED_WINDOW);
imap.put(KeyStroke.getKeyStroke(java.awt.event.KeyEvent.VK_LEFT, 0, false), "left");
imap.put(KeyStroke.getKeyStroke(java.awt.event.KeyEvent.VK_RIGHT, 0, false), "right");
imap.put(KeyStroke.getKeyStroke(java.awt.event.KeyEvent.VK_UP, 0, false), "zoom");
imap.put(KeyStroke.getKeyStroke(java.awt.event.KeyEvent.VK_DOWN, 0, false), "unzoom");
imap.put(KeyStroke.getKeyStroke(java.awt.event.KeyEvent.VK_I, 0, false), "setinterval");
}

}
```


Referências Bibliográficas

- [AB02] Réka Alber and Albert-Laszlo Barabási. Statistical mechanichs of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):47 – 97, January 2002.
- [Amo25] Luici Amoroso. Ricerche intorno alla curva dei redditi. *Annali di Matematica Pura e Applicata*, 2:123–159, 1924-1925.
- [And06] Henrik R. Andersen. Introduction to binay decision diagrams. Notas de curso, 2006.
- [BC01] T. Bedford and R. Cooke. *Probabilistic Risk Assessment: Foundations and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation process i. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53:629–641, 1957.
- [BK67] M.C. Breiter and P.R. Krishnaiah. *Tables for moments of gamma order statistics*. Aerospace Research Labs, Wright-Patterson AFB, 1967.
- [BN03] N. Balakrishnan and V.B. Nevzorov. *A Primer on Statistical Distributions*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 2003.
- [Bol98] Bella Bollobas. *Modern Graph Theory*. Springer, New York, 1998.
- [Bry72] Thomas H. Brylawski. A decomposition for combinatorial geometries. *Transactions of the American Mathematical Society*, 171:235–282, 1972.
- [Bry86] Randal E. Bryant. Graph-based algorithms for boolean function manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, 8(C-35):677 – 691, 1986.
- [CCL07] Cláudio T. Cristino, Gauss M. Cordeiro, and Sóstenes Lins. Confiabilidade e avaliação de risco no sistema elétrico. *Revista de Matemática e Estatística*, 25(2):87 – 109, 2007.
- [CCLM07] Gauss M. Cordeiro, Cláudio T. Cristino, Emerson O. Lima, and Sílvia B. Melo. Modelos markovianos, percolação e modelagem em sistemas com grande número de componentes. *Revista de Matemática e Estatística*, 25(1):99 – 116, 2007.

- [CCPD07] Gauss M. Cordeiro, Cláudio T. Cristino, Andréa A. Prudente, and Christian D.A. Daniel. Modelagem probabilística de setores de um sistema elétrico. Submetido à Pesquisa Operacional, 2007.
- [CM92] Olivier Coudert and Jean Christophe Madre. Towards an interactive fault tree analyser. In *Proceedings of the IASTED International Conference on Reliability, Quality Control and Risk Assessment*, November 1992.
- [CM93] Olivier Coudert and Jean Christophe Madre. Fault tree analysis: 10^{20} prime implicants and beyond. In *Proceedings of the Reliability and Maintainability Symposium*, pages 240 – 245, 1993.
- [Con97] Graph Connections. *Relationship between Graph Theory and other Areas of Mathematics*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [Cox72] David Roxbee Cox. Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34(2):187 – 220, 1972.
- [Cra69] Henri Crapo. The tutte polynomial. *Aequationes Mathematicae*, 3:211 – 229, 1969.
- [Cri01] Cláudio T. Cristino. O polinômio de tutte. Dissertação de mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2001.
- [CSS07] Gauss M. Cordeiro, Alexandre B. Simas, and Borko D. Stošić. The beta weibull distribution. Submetido, 2007.
- [DD95] Stacy A. Doyle and Joanne B. Dugan. Dependability assessment using binary decision diagrams (bdds). In *Proceedings of 25th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, page 249, 1995.
- [Die97] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, New York, 1997.
- [EF70] Jack Edmonds and D.R. Fulkerson. Bottleneck extrema. *Journal of Combinatorial Theory*, 8:229 – 306, 1970.
- [ELF02] Nicholas Eugene, Carl Lee, and Felix Famoye. Beta-normal distributions and its applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31(4):497 – 512, 2002.
- [EPW67] J.D. Essary, F. Proschan, and D.W. Walkup. Association of random variables, with applications. *Annals of Mathematical Statistics*, 38(5):1466 – 1474, 1967.
- [Ess71] J.W. Essam. Graph theory and statistical physics. *Discrete Mathematics*, 1:83 – 112, 1971.

- [GK99] Rameshwar D. Gupta and Debasis Kundu. Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand J. Statist.*, 41(2):173 – 188, 1999.
- [GK01a] R. D. Gupta and D. Kundu. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull. *Biometrical Journal*, 43:117 – 130, 2001.
- [GK01b] R. D. Gupta and D. Kundu. Generalized exponential distributions: different methods of estimation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69:315 – 338, 2001.
- [GK02] R. D. Gupta and D. Kundu. Generalized exponential distributions: statistical inferences. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 1:101 – 118, 2002.
- [GK03a] R. D. Gupta and D. Kundu. Closeness of gamma and generalized exponential distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 32(4):705 – 721, 2003.
- [GK03b] R. D. Gupta and D. Kundu. Discriminating between the weibull and the ge distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 43:179 – 196, 2003.
- [GK04] R. D. Gupta and D. Kundu. Discriminating between gamma and generalized exponential distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 74(2):107 – 121, 2004.
- [GN04] A.K. Gupta and S. Nadarajah. On the moments of the beta normal distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33(1):1 – 13, 2004.
- [Gri99] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer, New York, 1999.
- [Gup60] Shanti S. Gupta. Order statistics from the gamma distribution. *Tecnometrics*, 2(1):243 – 263, 1960.
- [Gur78] Georgii Evgen'evich Shilov and B. L. Gurevich. *Integral, Measure and Derivative: A unified approach*. Dover Publications, New York, 1978.
- [JKB94] N.L. Johnson, Samuel Kotz, and N. Balakrishman. *Continuous Univariate Distributions*, volume 1. Wiley, 1994.
- [JNAP63] N.L. Johnson, Eric Nixon, D.E. Amos, and E.S. Pearson. Table of percentage points of pearson curves, for given $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 , expressed in standard measure. *Biometrika*, 50(3/4):259 – 498, Dec. 1963.
- [KR67] P.R. Krishnaiah and M. Haseeb Rizvi. A note on moments of gamma order statistics. *Tecnometrics*, 9(2):315 – 318, 1967.

- [Le07] Lauro D. Lins and *et al.* A model for risk assessment of great accidents in electrical power systems. Submetido, 2007.
- [LS98] J. Laherrère and D. Sornette. Stretched exponential distributions in nature and economy: “fat tails” with characteristic scales. *Journal The European Physical Journal B*, 2(4):1434–6028, May 1998.
- [NK04] S. Nadarajah and S. Kotz. The beta gumbel distribution. *Math. Probab. Eng.*, 10:323 – 332, 2004.
- [NK06] S. Nadarajah and S. Kotz. The beta exponential distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, 91:689 – 697, 2006.
- [NS91] N. Unnikrishnan Nair and P.G. Sankaran. Characterization of the pearson family os distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 40(1):75 – 77, April 1991.
- [oMiA92] Encyclopedia of Mathematics and its Applications. *Matroid Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Oxl98] James Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [OY04] Jason Overstreet and Yannie Yu. A simulation method for probabilistic risk assessment. In *Proceedings of Military Government and Aerospace Simulation Symposium*, 2004.
- [Rau01] Antony Rauzy. Mathematical foundations of minimal cutsets. *IEEE Transactions On Reliability*, 50(4):389 – 396, 2001.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [SC07] Borko D. Stošić and Gauss M. Cordeiro. Bias correction for general distributions using a simple mathematica script. A aparecer, 2007.
- [Sch95] Mark J. Schervish. *Theory of Statistics*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 1995.
- [SW75] P. D. Seymour and D. J. A. Welsh. Combinatorial applications of an inequality from statistical mechanics. *Math. Proc. Camb. Phil. Society*, 77:485–495, 1975.
- [TL71] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb. Relations between the ‘percolation’ and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the “percolation problem”. *Proc. Royal Societyof London, Series A*, 322:251 – 280, 1971.
- [Tut47] Willian T. Tutte. A ring in graph theory. *Math. Proc. Camb. Phil. Society*, 43:26 – 40, 1947.

- [Tut54] Willian T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian J. of Mathematics*, 6:80 – 91, 1954.
- [Tut67] Willian T. Tutte. On dichromatic polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*, 2:301 – 320, 1967.
- [VGRH81] W.E. Vesely, F.F. Goldberg, N.H. Roberts, and D.F. Haasl. Fault tree handbook. Technical report ADA354973, Nuclear Regulatory Commission, Washington, DC, January 1981.
- [WH62] Gnanadesikan R. Wilk, M.B. and M.J. Hvyett. Probability plots for the gamma distribution. *Tecnometrics*, 4(1):1 – 20, 1962.
- [Zaa58] Adriaan C. Zaanen. *An Introduction to the Theory of Integration*. North-Holland Publisher, Amsterdam, 1958.

Índice Remissivo

- acidente, 69
- blocker, 24
- clutter, 23, 25
- componentes elétricos, 60
- confiabilidade, 27, 37, 51, 54
 - índice de , 41
- conjunto de independentes, 16
- diagrama binário de decisão, 74
- digrafos estocásticos, 52
- disjuntores, 36
- distribuição de Amoroso, 10
- distribuições, 5
- enumeração de estados, 61
- esperança, 4
- falha, 35
- função
 - de risco acumulado, 37
 - ponto percentual, 37
- grafo de isolamento, 36
- leis de Kirchhoff, 35
- método de Pearson, 45
- matróide, 16
- matróide pontuada, 21
- matróides
 - bases matróide, 17
 - circuitos, 17
 - posto de um, 18
- minimal cutsets, 73
- minterm, 73
- modelo
 - beta, 41
 - de Gumbel, 40
 - de Poisson, 38
 - exponencial, 38
 - gama, 40
 - Weibull, 39
- modelo de percolação, 23
- modelo de Pots, 34
- momento
 - k -ésimo, 4
 - absoluto, 4
 - central, k -ésimo, 5
 - estatística de ordem da distribuição gama, 6
- percolação, 27, 30, 33
- polinômio de Tutte, 19, 20, 59
- polinômio superior, 23
- rede elétrica, 35
- risco, 35, 69
 - avaliação, 70
- setores, 36
- simulação de Monte Carlo, 63
- soma aleatória, 43
- submatróide aleatória, 22
- tempo
 - esperado de vida, 37