Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Giovana Siracusa Gouveia

Um Estudo do Comportamento Assintótico para Equações em Diferenças com Retardo Infinito

Recife

2009

Giovana Siracusa Gouveia

Um Estudo do Comportamento Assintótico para Equações em Diferenças com Retardo Infinito[1]

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henríquez

Recife

2009

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Gouveia, Giovana Siracusa
Um estudo do comportamento assintótico para equações em diferenças com retardo infinito / Giovana Siracusa Gouveia. - Recife: O Autor, 2009.
83 folhas

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Análise (Matemática). I. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2009- 104

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:

Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, UFPE
Orientador

Fernando Antônio Figueiredo Cardoso da Silva, UFPE

Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, UFPB

UM ESTUDO DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS COM RETARDO INFINITO

Por
Giovana Siracusa Gouveia

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2009

Agradecimentos

A Deus, por tudo que me proporcionou.

A minha família, pois sem eles nada disso seria possível. Em especial agradeço a painho, mainha e Rapha, por todo incentivo, amor e apoio dados.

Aos funcionários do Dmat, Carlos, Cláudia, Fátima, Jymmy, Lucas, Nilza, Oscar e Tânia, por me ajudarem a resolver problemas de ordens diversas.

Aos professores, Aírton Castro, Antônio Carlos, Antônio Zumpano, César Castilho, Claudio Cuevas, Cleide Martins, Eduardo Leandro, Henrique Araújo, Hildeberto Cabral, Lucas Catão, Manoel Lemos, Miguel Loayza, Pablo Silva, Paulo Figueiredo, Sóstenes Lins e Tetsuo Usuo, pelos cursos e por toda matemática ensinada.

A Rodrigo Gondim por ter me apresentado a esse país das maravilhas que é a matemática (como ele mesmo diz) e por todo seu carinho comigo.

Aos meus companheiros da matemática, Adecarlos, Alejandro, Allan, Allyson, André Bebê, André Ventura, Anete, Arlucio, Barbara, Bruna, Bruno, Cabecinha, Débora, Dk, Eudes Naziazeno, Felipe Gigante, Formiga, Gabriel, Gersonilo, Humerto, Jesus, Joilson, Juliano, Karla, Laudelino, Lito, Luis, Macarrão, Manaíra, Marcelo, Paulo Roberto, Renata, Renato Gabarito, Renato Pescador, Ricatti, Rodrigo, Tarci, Tiago, Vini, Waguinho, Wilber, Zaqueu e todos que fizeram parte desses anos de matemática e não estão na lista, por terem feito momentos diversas vezes difíceis terem sido divertidos e inesquecíveis.

Aos meus amigos do Rugby. Em especial ao meu treinador Chelo pela amizade.

A minha amiga de todos os momentos Gabi.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma teoria assintótica para um sistema homogêneo de equações em diferenças funcionais. O enfoque é na existência de soluções convergentes, comportamento assintótico e propriedades desta classe de soluções para perturbações não lineares do sistema homogêneo. O problema é abordado via teoria das dicotomias. Especificamente estudamos o caso no qual a equação homogênea, possui um determinado tipo de dicotomia. Alguns dos resultados usados para demonstrar os teoremas de convergência são os teoremas de Krasnoselky e o critério de compacidade. Também analisaremos informações com respeito ao conjunto das soluções convergentes.

Palavras-chave: Equações em diferença com retardo infinito; Comportamento Assintótico; Propriedades de compacidade; Equações em diferença do tipo Volterra.

Abstract

In this work we study an asymptotic theory of a homogeneous system of Functional Difference Equations. The main point is to analyze the existence of convergent solutions, the asymptotic behavior and proprieties of this class of solutions for this systems, but with nonlinear perturbations. The problem is attacked via Dichotomy Theory. More specifically, we study the case for which the homogeneous equation has an specific kind of dichotomy. Some of the results we use to prove the convergence theorems involve the Krasnoselky's Theorem and The Compacity Criterion. We also present some information about the set of the convergent solutions.

Introdução

O estudo de equações em diferenças funcionais sobre um espaço de fase tem grande importância em aplicações nos sistemas do tipo Volterra, que por sua vez aparecem de maneira natural em diversos modelos Biológicos, Econômicos, Químicos e Físicos. Os espaços de fase abstratos foram introduzidos por Hale e Kato [8] afim de estudar a teoria qualitativa de equações em diferenças funcionais com retardo infinito. A teoria da convergência tem um papel importante no estudo de diversos problemas em equações em diferença. Nesta dissertação nos concentraremos no sistema linear homogêneo de equações em diferenças funcionais

$$x(n+1) = L(n,\, x_n),\ \ n \geq n_0 \geq 0, \tag{1}$$

e o correspondente sistema perturbado

$$x(n+1) = L(n,\, x_n) + f_1(n,\, x_n) + f_2(n,\, x_\bullet), \tag{2}$$

onde $L : \mathbb{N}(n_0) \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}^r$ é uma aplicação limitada com respeito à segunda variável, a qual pertence ao espaço de fase $\mathfrak{B}$.

Os resultados que apresentaremos foram obtidos por Del Campo em sua tese de doutorado (ver [5]). Tais resultados abordam a existência, comportamento assintótico e propriedades de compacidade de soluções convergentes para uma equação em diferença funcional em um espaço de fase submetido a pertubações não lineares, f_1 e f_2, com a hipótese que a equação (1) tenha uma dicotomia p-somável ou uma $(k_1,\, k_2)$-dicotomia. A dificuldade desse tipo de abordagem, consiste em construir projeções convenientes afim de decidir quando um sistema tem uma determinada dicotomia.

A relevância dos resultados aqui apresentados reside no fato que existem importantes aplicações devido a generalidade da equação tratada. Como modelo concreto desta classe de equações nós estudamos sistemas em diferenças do tipo Volterra.

A dissertação está dividida em quatro capítulos. O primeiro, focado em definições e resultados preliminares, podendo destacar o lema de compacidade e o teorema de Krasnoselky, que serão usados na demonstração dos principais resultados. Nos capítulos dois e três, podemos destacar dois teoremas que tratam o comportamento assintótico de soluções do sistema (2), assumindo que o sistema (1) possui uma (k_1, k_2)-dicotomia e dicotomia p-somável. E no quarto capítulo generalizamos os resultados até então obtidos e apresentamos aplicações em equações em diferença do tipo Volterra.

Sumário

Capítulo 1

Notações e resultados preliminares

Vamos inicialmente apresentar os espaços que iremos trabalhar ao longo da dissertação.

Denotaremos por $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$, a família de todas as funções de $\mathbb{Z}^-$ em $\mathbb{C}^r$, onde $\mathbb{Z}^-$ é o conjunto dos inteiros não positivos e $\mathbb{C}^r$ é o espaço Euclidiano complexo de dimensão r com norma $|\cdot|$. Para uma função $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ e $n \in \mathbb{Z}$, denotamos por x_n um elemento de $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ definido por $x_n(s) = x(n+s)$.
Definimos o espaço de fase $\mathfrak{B}$ ($\subseteq \mathfrak{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$), como sendo um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ e que satisfaz os seguintes axiomas:

(A) Existe uma constante positiva J e funções não negativas $N(\cdot)$ e $M(\cdot)$ definidas em $\mathbb{Z}^+$, onde $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos inteiros não-negativos, com a propriedade que se $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ é uma função tal que $x_0 \in \mathfrak{B}$, então para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

  (i) $x_n \in \mathfrak{B}$,

  (ii) $J|x(n)| \leq \|x_n\|_{\mathfrak{B}} \leq N(n) \sup\limits_{0 \leq s \leq n} |x(s)| + M(n)\|x_0\|_{\mathfrak{B}}$.

(B) A aplicação inclusão $i : (\mathrm{B}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ é contínua, ou seja, existe $K \geq 0$ tal que $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq K\|\varphi\|_\infty$, para todo $\varphi \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$, onde $\mathrm{B}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ representa o espaço das funções limitadas de $\mathbb{Z}^-$ em $\mathbb{C}^r$.

Exemplo 1.1. Considere $\alpha : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma sequência positiva crescente. Definamos o conjunto $\mathfrak{B}_\alpha$ por

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{ \phi : \mathbb{Z}^- \longrightarrow \mathbb{C}^r \ : \ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty \right\},$$

que é um espaço de Banach com norma $\|\phi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \dfrac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)}$, $\phi \in \mathfrak{B}_\alpha$. Tomando $J = K = \alpha(0)^{-1}$ e $M(n) = 1$, vejamos que $\mathfrak{B}_\alpha$ satisfaz as condições (A) e (B).
Se $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$, é tal que $x_0 \in \mathfrak{B}_\alpha$, então para $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\|x_n\|_{\mathfrak{B}_\alpha} = \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|x_n(-m)|}{\alpha(m)} = max \left\{ \sup_{0\le m<n} \frac{|\, x_n(-m)|}{\alpha(m)},\ \sup_{m\ge n} \frac{|\, x_n(-m)|}{\alpha(m)} \right\}.$$

E como temos que

$$\sup_{m>n} \frac{|x_n(-m)|}{\alpha(m)} = \sup_{m>n} \frac{|x_0(n-m)|}{\alpha(m)} < \sup_{m>n} \frac{|x_0(-(m-n)|}{\alpha(m-n)} < \infty\,,$$

pois α é crescente. Logo o item (**i**) da condição (A) é satisfeita.

$$\|x_n\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \ = \ \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|x_n(-m)|}{\alpha(m)} = \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|x(n-m)|}{\alpha(m)} \ge \frac{|x(n-0)|}{\alpha(0)}\,.$$

Assim,

$$\alpha(0)^{-1}|x(n)| \le \|x_n\|_{\mathfrak{B}_\alpha}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_{\mathfrak{B}_\alpha} &= \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|x_n(-m)|}{\alpha(m)} = \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|x(n-m)|}{\alpha(m)} \\
&= \max \left\{ \sup_{0\le m<n} \frac{|x(n-m)|}{\alpha(m)}\,,\ \sup_{n\ge m} \frac{|x_0(n-m)|}{\alpha(m)} \right\} \\
&\le \sup_{n\ge m} \frac{|x_0(n-m)|}{\alpha(m)} \\
&\le \sup_{n\ge m} \frac{|x_0(n-m)|}{\alpha(m-n)} \\
&= \|x_0\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \le \|x_0\|_{\mathfrak{B}_\alpha} + \alpha(0)^{-1} \sup_{0\le s\le n} |x(s)|.
\end{aligned}$$

Mostrando assim que o item (ii) da condição (A) é válido.
Como

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} &= \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\varphi(-m)|}{\alpha(m)} \\
&= \sup_{t\in\mathbb{Z}^-} \frac{|\varphi(t)|}{\alpha(-t)} \leq \sup_{t\in\mathbb{Z}^-} \frac{|\varphi(t)|}{\alpha(0)} \\
&= \alpha(0)^{-1} \sup_{t\in\mathbb{Z}^-} |\varphi(t)| = \alpha(0)^{-1}\|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}
$$

segue que a inclusão dada na condição (B) é contínua. Mostrando assim que $\mathfrak{B}_\alpha$ é um espaço de fase.

Nesta dissertação sempre que escrevermos $\mathfrak{B}$, estaremos nos referindo a um espaço de fase. Suponhamos que $\{k(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ seja uma sequência positiva arbitrária. Denotaremos por X_k o espaço de Banach de todas as funções $\eta : \mathbb{N}(n_0) \longrightarrow \mathfrak{B}$ que são k-limitadas, ou limitadas com peso k, munido da norma:

$$\|\eta\|_k = \sup_{n\geq n_0} \|\eta(n)\|_{\mathfrak{B}} k(n)^{-1} < +\infty,$$

onde $\mathbb{N}(n_0) = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \geq n_0\}$, com $n_0 \in \mathbb{Z}^+$. Neste espaço consideramos o subespaço $X_{\infty,\,k}$ das funções $\xi \in X_k$ que são k-convergentes, ou convergentes em peso k, ou seja, para os quais existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \xi(n)k(n)^{-1}$ (que denotaremos por $Z^k_\infty(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi(n)k(n)^{-1}$), munido com a norma $\|\cdot\|_k$. Denotaremos por $X_{\infty,k}[\lambda]$, para $\lambda > 0$, bola $\|\xi\|_k \leq \lambda$ em $X_{\infty,\,k}$

O objetivo é estudar o seguinte sistema linear homogêneo de equações em diferenças funcionais:

$$x(n+1) = L(n, x_n),\ \ n \geq n_0 \geq 0, \tag{1.1}$$

e seu sistema perturbado

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f_1(n,\, x_n) + f_2(n,\, x_\bullet), \tag{1.2}$$

onde $L : \mathbb{N}(n_0) \times \mathfrak{B} \to \mathbb{C}^r$ é uma aplicação limitada com respeito à segunda variável, e no que se segue L sempre denotará um operador com essa propriedade; $f_1 : \mathbb{N}(n_0) \times \mathfrak{B} \to \mathbb{C}^r$ e $f_2 : \mathbb{N}(n_0) \times X_k \to \mathbb{C}^r$ são funções sob certas condições que especificaremos mais adiante e, $x_\bullet : \mathbb{N}(n_0) \to \mathfrak{B}$ é a função definida por $x_\bullet(n) = x_n$.

Para qualquer $n \geq \tau$, definimos o operador $T(n,\tau) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ por

$$T(n,\, \tau)\varphi = x_n(\cdot,\, \tau,\, \varphi),\; \varphi \in \mathfrak{B},$$

onde $x(\cdot,\, \tau,\, \varphi)$ denota a solução do sistema linear homogêneo (1.1) que passa por (τ, φ), ou seja, $x_\tau(\cdot,\, \tau,\, \varphi) = \varphi$.

Afirmação 1. *O operador $T(n,\tau)$, chamado de operador solução do sistema linear homogêneo* (1.1) *é linear limitado, isto é, $T(n,\tau) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$.*

Afirmação 2. *O operador $T(n,\, \tau)$ tem as seguintes propriedades de semigrupo:*

$$T(n,s)T(s,\tau) = T(n,\tau),\; T(\tau,\tau) = \mathbb{I},\;\; n \geq s \geq \tau.$$

Aqui $\mathbb{I}$ denota a identidade de $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$.

De fato, $T(n,\, \tau)\varphi = x_n(\cdot,\, \tau,\, \varphi) \Rightarrow T(\tau,\, \tau)\varphi = x_\tau(\cdot,\, \tau,\, \varphi) = \varphi$. Logo

$$T(\tau,\, \tau) = \mathbb{I}.$$

Note que $T(n,\, s)T(s,\, \tau)\varphi = x_n(\cdot,\, s,\, x_s(\cdot,\, \tau,\, \varphi))$, fazendo $y(t) = x(t,\, s,\, x_s(\cdot,\, \tau,\, \varphi))$, daí temos que $y(t)$ é solução de

$$\begin{cases} y(t+1) = L(t,\, y_t), & t \geq \tau, \\ \qquad y_\tau = \varphi. \end{cases}$$

Logo $x_n = y_n = T(n,\, \tau)$. Assim $T(n,\, s)T(s,\, \tau)\varphi = T(n,\, \tau)\varphi$.

Definição 1.1. *Sejam k_1 e k_2 duas sequências positivas.*

(a) *Dizemos que o sistema linear homogêneo de equações em diferenças funcionais* (1.1) *tem uma $(k_1,\, k_2)$-dicotomia, se o operador solução $T(n,\, \tau)$ satisfaz as seguintes propriedades: Existe uma constante positiva M e um operador projeção $P(\tau) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, $(P(\tau)^2 = P(\tau))$, $\tau \in \mathbb{Z}^+$, tal que se $Q(\tau) = \mathbb{I} - P(\tau)$, então*

(a.1) $T(n,\tau)P(\tau) = P(n)T(n,\tau),\;\; n \geq \tau.$

(a.2) *A restrição $T(n,\tau)\;|_{\mathfrak{R}(Q(\tau))}$, $n \geq \tau$, é um isomorfismo de $\mathfrak{R}(Q(\tau))$ sobre $\mathfrak{R}(Q(n))$, onde $\mathfrak{R}(Q(\cdot))$ denota a imagem de $Q(\cdot)$, e denotaremos por $T(\tau, n)$ a aplicação inversa.*

(a.3) $\|T(n,\tau)P(\tau)\| \leq Mk_1(n)k_1(\tau)^{-1},\ n \geq \tau.$

(a.4) $\|T(n,\tau)Q(\tau)\| \leq Mk_2(n)k_2(\tau)^{-1},\ \tau \geq n.$

(b) *Dizemos que a* $(k_1,\, k_2)$*-dicotomia é compensada se existe uma constante positiva* $C \geq 1$*, tal que:*

$$k_1(n)k_1(m)^{-1} \leq Ck_2(n)k_2(m)^{-1},\ n \geq m.$$

Definição 1.2. *Seja* $p \geq 1$*, e sejam* a_1 *e* a_2 *duas sequências positivas. Dizemos que o sistema* (1.1) *tem uma dicotomia p-somável em peso* (a_1, a_2) *se o operador solução* $T(n,\, \tau)$ *satisfaz as condições* **(a.1)** *e* **(a.2)** *da definição anterior e, além disso, existe uma constante positiva* $\tilde{K}$ *tal que:*

(i) $\|\Gamma(n,\cdot)\|_{a_2,p} := \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \leq \tilde{K}a_1(n)$, *para* $n \geq n_0$, *onde* $\Gamma(n,\, s)$ *denota a função:*

$$\Gamma(n,\, s) = \begin{cases} T(n,\, s+1)P(s+1), & se\ n-1 \geq s, \\ \\ -T(n,\, s+1)Q(s+1) & se\ n-1 < s, \end{cases}$$

chamada a Função de Green associada a equação (1.1).

Exemplo 1.2. Consideremos o espaço de fase

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{\phi : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C}^2 : \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty\right\},$$

onde $\alpha(n) = 2^n$. Sejam $k_1(n) = k_2(n) = 2^{-n}$. Nestas condições, consideremos o seguinte sistema em diferenças

$$y(n+1) = Ay(n),\ n \geq 0, \tag{1.3}$$

onde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Denotemos por $T(n)$ como sendo $T(n,0)$. Afirmamos que $T(n)$ é um operador limitado no espaço $\mathfrak{B}_\alpha$,

$$\begin{aligned} T(n)\phi &= y_n(\cdot,\, 0,\, \phi) \\ T(n)\phi(\theta) &= y_n(\theta,\, 0,\, \phi),\, \theta \leq 0 \\ &= y(n+\theta,\, 0,\, \phi),\, \theta \leq 0. \end{aligned}$$

Da equação (1.3), temos que

$$\begin{aligned} y(1) &= Ay(0) \\ y(2) &= Ay(1) = A^2 y(0) \\ &\vdots \\ y(n+\theta) &= A^{(n+\theta)} y(0) \\ &= \begin{pmatrix} 2^{-(n+\theta)} & 0 \\ 0 & 2^{n+\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1(0) \\ \theta^2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{-(n+\theta)}\theta^1(0) \\ 2^{n+\theta}\theta^2(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

No caso $n+\theta < 0$, temos $T(n)\phi(\theta) = \phi(n+\theta)$, onde $\phi(\cdot) = (\phi^1(\cdot),\, \phi^2(\cdot)) \in \mathfrak{B}_\alpha$. Daí vemos que $T(n)$ é definido por

$$T(n)\phi(\theta) = \begin{cases} y(n+\theta,\, 0,\, \phi) = (2^{-(n+\theta)}\phi^1(0),\, 2^{(n+\theta)}\phi^2(0)), & -n \leq \theta \leq 0, \\ \phi(n+\theta), & \theta < -n. \end{cases}$$

Definamos as seguintes projeções, $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$ e $Q(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$, com $Q(n) = \mathbb{I} - P(n)$, definidas por :

$$\begin{aligned} P(n)\phi(\theta) &= \begin{cases} (\phi^1(\theta) - 2^{-\theta}\phi^1(0),\, \phi^2(\theta) - 2^{\theta}\phi^2(0)), & -n \leq \theta \leq 0, \\ (0,0), & \theta < -n, \end{cases} \\ Q(n)\phi(\theta) &= \begin{cases} (2^{-\theta}\phi^1(0),\, 2^{\theta}\phi^2(0)), & -n \leq \theta \leq 0, \\ (\phi^1(\theta),\, \phi^2(\theta)) & \theta < -n. \end{cases} \end{aligned}$$

Mostremos que $P(n)$ é uma projeção:

O caso $\theta < -n$ é imediato e no caso $-n \leq \theta \leq 0$, temos :

$$\begin{aligned}
P(n)(P(n)\phi)(\theta) &= P(n)\psi(\theta)\\
&= (\psi^1(\theta) - 2^{-\theta}\psi^1(0),\, \psi^2(\theta) - 2^{\theta}\psi^2(0))\\
&= (\phi^1(\theta) - 2^{-\theta}\phi^1(0) - 2^{-\theta}(\phi^1(0) - 2^0\phi^1(0)),\\
&\quad \phi^2(\theta) - 2^{\theta}\phi^2(0) - 2^{\theta}(\phi^2(0) - 2^0\phi^2(0)))\\
&= (\phi^1(\theta) - 2^{-\theta}\phi^1(0),\, \phi^2(\theta) - 2^{\theta}\phi^2(0))\\
&= P(n)\phi(\theta).
\end{aligned}$$

Mostremos que $Q(n)$ é projeção:

$Q(n)^2 = (\mathbb{I}-P(n))^2 = \mathbb{I}-P(n)-P(n)+P(n)^2 = \mathbb{I}-P(n)-P(n)+P(n) = \mathbb{I}-P(n)$. Daí, $Q(n)^2 = Q(n)$.

$$Q(t)\phi(\theta) = \begin{cases} (\overbrace{2^{-\theta}\phi^1(0)}^{\psi_1(\theta)},\, \overbrace{2^{\theta}\phi^2(0)}^{\psi_2(\theta)}), & -n \leq \theta \leq 0,\\ (\phi^1(\theta),\, \phi^2(\theta)) & \theta < -n, \end{cases}$$

$$T(n-t)\phi(\theta) = \begin{cases} (2^{-(n-t+\theta)}\phi^1(0), 2^{(n-t+\theta)}\phi^2(0)), & -(n-t) \leq \theta \leq 0,\\ \phi(n-t+\theta) & \theta < -(n-t). \end{cases}$$

Para o cálculo de $T(n-t)Q(t)\phi(\theta)$, temos alguns casos a considerar:

(i) $\theta < -(n-t)$ e $n-t+\theta < -t$. Nesse caso temos $n-t+\theta < 0$ e $\theta < -n$, então $T(n-t)\psi(\theta) = \psi(n-t+\theta) = \phi(n-t+\theta)$. Logo temos que

$$T(n-t)Q(t)\phi(\theta) = \phi(n-t+\theta).$$

(ii) $\theta < -(n-t)$ e $-t \leq n-t+\theta \leq 0$. Nesse caso temos $n-t+\theta < 0$ e $-n \leq \theta \leq 0$. Então

$$T(n-t)\psi(\theta) = (2^{-(n-t+\theta)}\phi^1(0),\, 2^{n-t+\theta}\phi^2(0)).$$

No caso em que $-(n-t) \leq \theta \leq 0$, temos $n-t+\theta \geq 0$.

$$T(n-t)\psi(\theta) = (2^{-(n-t+\theta)}\psi^1(0),\, 2^{n-t+\theta}\psi^2(0)).$$

Temos os seguintes casos a considerar:

(iii) $0 < -t \Rightarrow t < 0$, nesse caso não faz sentido $T(n-t)Q(t)$.

(iv) $-t \leq 0 \Rightarrow t \geq 0$ e $n - t + \theta \geq 0 \Rightarrow n + \theta \geq t \geq 0 \Rightarrow -n \leq \theta \leq 0$.

$$T(n-t)\psi(\theta) = (2^{-(n-t+\theta)}\phi^1(0),\, 2^{n-t+\theta}\phi^2(0)).$$

Portanto, para $n \geq t$, $T(n-t) : Q(t)\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$ é dado por:

$$T(n-t)Q(t)\phi(\theta) = \begin{cases} (2^{-(n-t+\theta)}\phi^1(0),\, 2^{n-t+\theta}\phi^2(0)), & -n \leq \theta \leq 0, \\ (\phi^1(n-t+\theta),\, \phi^2(n-t+\theta)), & \theta < -n. \end{cases}$$

Analisando da mesma forma a obter $T(n-t)Q(t)$, obtemos que para $n \geq t$,

$$\begin{aligned} T(n-t)Q(t) &= Q(n)T(n-t), \\ T(n-t)P(t) &= P(n)T(n-t). \end{aligned}$$

Afirmamos que $T(n-t)$, para $n \geq t$ definido acima é um isomorfismo de $Q(t)\mathfrak{B}_\alpha$ sobre $Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$. E sua aplicação inversa é dada por:

$$T(n-t)Q(t)\phi(\theta) = \begin{cases} (2^{n-t}\phi^1(0),\, 2^{-(n-t)}\phi^2(0)), & -t \leq \theta \leq 0, \\ (\phi^1(t-n+\theta),\, \phi^2(t-n+\theta)), & \theta < -t. \end{cases}$$

Temos que

$$T(n-t)P(t)Q(\theta) = \begin{cases} (0,0), & -n+t \leq \theta \leq 0, \\ \psi(n-t+\theta), & \theta < -n+t. \end{cases}$$

Quando $\theta < -n+t$, temos 2 casos a considerar:

(i) $-t \leq n - t \leq 0$

(ii) $n - t + \theta < -t$

No caso **(ii)** temos $\psi(n-t+\theta) = (0,\, 0)$. No primeiro caso temos

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(n-t+\theta)|}{2^{-\theta}} &= \frac{|(\phi(n-t+\theta) - 2^{-n+t+\theta}\phi^1(0),\, \phi^2(n-t+\theta) - 2^{n-t+\theta}\phi^2(0))|}{2^{-\theta}} \\ &\leq \frac{|\phi(n-t+\theta)|}{2^{-\theta}} + \frac{2^{n-t+\theta}|\phi(0)|}{2^{-\theta}} \\ &\leq 2^{t-n}\frac{|\phi(n-t+\theta)|}{2^{-(n-t+\theta)}} + 2^{n-t+2\theta}|\phi(0)| \end{aligned}$$

Logo,

$$\|T(n-t)P(t)\phi\| \leq 2.2^{t-n}\|\phi\| \Rightarrow \|T(n-t)P(t)\| \leq 2.2^{t-n}.$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(n-t)P(t)\| &\leq 2.2^{-(n-t)},\ n \geq t,\\
\|T(n-t)Q(t)\| &\leq 2.2^{-(n-t)},\ t \geq n.
\end{aligned}$$

Assim, o sistema (1.3) tem uma $(2^{-n}, 2^{-n})$-dicotomia, que de fato é compensada, onde a constante da definição é $C = 1$.

Exemplo 1.3. Consideremos o espaço de fase

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{\phi : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C} : \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty\right\},$$

onde $\alpha(n) = 2^n$. Sejam $a_1(n) = (1/\sqrt{2})^n$, $a_2(n) = (1/4)^{n+1}$ e $a > 1$. Então consideremos a equação em diferença homogênea:

$$x(n+1) = a^n x(n),\ n \geq n_0 \geq 0. \tag{1.4}$$

A solução da equação (1.4) é $x(\cdot,\, m,\, \varphi)$ tal que $x_m(\cdot,\, m,\, \varphi) = \varphi$. Temos que

$$\begin{aligned}
x(n) &= a^{n-1}x(n-1) = a^{n-1}a^{n-2}\dots a^m x(m)\\
&= \sqrt{a}^{(n+m-1)(n-m)}x(m) = \sqrt{a}^{(n+m-1)(n-m)}\varphi(0).
\end{aligned}$$

Logo temos que o operador solução para este problema é definido da seguinte forma:

$$T(n,m)\varphi(\theta) = \begin{cases} \sqrt{a}^{(n+\theta+m-1)(n+\theta-m)}\varphi(0), & m-n \leq \theta \leq 0,\\ \varphi(n+\theta-m), & n+\theta \leq m. \end{cases}$$

Como $T(n,\tau)$ é o operador solução do sistema (1.4), então satisfaz as propriedades de semigrupo:

$$T(n,s)T(s,m) = T(n,m),\ n \geq s \geq m \text{ e } T(n,n) = \mathbb{I}.$$

As projeções tomadas neste exemplo são definidas por $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$,

$$P(n)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta) - \varphi(0)\sqrt{a}^{(2n\theta+\theta^2-\theta)}, & -n \leq \theta \leq 0,\\ 0, & \theta < -n, \end{cases}$$

e $Q(n) = \mathbb{I} - P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$ definida por:

$$Q(n)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\sqrt{a}^{(2n\theta+\theta^2-\theta)}, & -n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(\theta), & \theta < -n. \end{cases}$$

Para $n \geq \tau$, temos:

$$\begin{aligned} T(n,\,\tau)P(\tau) &= P(n)T(n,\,\tau), \\ T(n,\,\tau)Q(\tau) &= Q(n)T(n,\,\tau). \end{aligned}$$

Para $n \geq \tau$, temos que $T(n,\,\tau) : Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$ é dado por:

$$T(n,\tau)Q(\tau)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\sqrt{a}^{(\tau+\theta-n)(n+\theta+\tau-1)}, & -n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(\tau - n + \theta), & \theta < -n, \end{cases}$$

e obtemos que:

$$\begin{aligned} \|T(n,s)P(s)\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} &\leq 2(1/2)^{n-s}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha},\ n \geq s, \\ \|T(n,s)Q(s)\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} &\leq 2^{s-n}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha},\ s \geq n, \end{aligned}$$

o que implica que:

$$\|\Gamma(n,\,\cdot)\|_{a_{2,1}} \leq 2a_1(n),\ n \geq n_0.$$

Daí, temos que (1.4) tem uma dicotomia 1-somável.

Definição 1.3. *O espaço $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}(n_0), \mathbb{R}^m)$ é definido como sendo o espaço de Banach das sequências limitadas.*

Definição 1.4. *Um conjunto S de sequências $x : \mathbb{N}(n_0) \to \mathbb{R}^m$ é dito equiconvergente em ∞ se toda sequência de S é convergente no ponto ∞ e para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\,x(n) - Z^1_\infty(x)| < \epsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in S$.*

Lema 1.1. (Critério de Compacidade em $X_{\infty,\,k}$) *Seja S um subconjunto de $X_{\infty,\,k}$. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

(C_1) *O conjunto $H^k_n(S) := \{\xi(n)k(n)^{-1} : \xi \in S\}$ é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}(n_0)$,*

(C_2) *S é equiconvergente em peso k em ∞; isto é, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|\xi(n)k(n)^{-1} - Z^k_\infty(\xi)\|_{\mathfrak{B}} < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N, \text{ para todo } \xi \in S.$$

Então, S é relativamente compacto em $X_{\infty,k}$.

Demonstração. *Seja $\{\xi_m\}_m$ uma sequência em S. Como (C_1) nos diz que $H^k_n(S)$ é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$, temos que existe uma subsequência $\{\xi_{m_j}\}_{m_j}$ de $\{\xi_m\}_m$ tal que o limite $a(n) = \lim_{j\to\infty} \xi_{m_j}(n)k(n)^{-1}$ existe para cada $n \in \mathbb{N}(n_0)$.*
Afirmação: O conjunto $Z^k_\infty(S) = \{Z^k_\infty(\xi) : \xi \in S\}$, é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$.

Temos de (C_1) e (C_2) que $Z^k_\infty(S)$ é limite uniforme dos conjuntos relativamente compactos $H^k_n(S)$, e assim ele é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$. Vemos que $\{Z^k_\infty(\xi_{m_j})\}_j$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}$. De fato,

$$\begin{aligned}\|\xi_{m_i}(n)k(n)^{-1} - \xi_{m_j}(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} &= \|\xi_{m_i}(n)k(n)^{-1} - a(n) + a(n) - \xi_{m_j}(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} \\ &\leq \|\xi_{m_i}(n)k(n)^{-1} - a(n)\|_{\mathfrak{B}} + \|a(n) - \xi_{m_j}(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}}\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\{\xi_m\}_m$ é uma sequência de Cauchy em $X_{\infty,k}$. Seja N dado pela condição (C_2), se $n_0 \leq n \leq N$:

$$\|\xi_{m_j}(n) - \xi_{m_i}(n)\|_{\mathfrak{B}}k(n)^{-1} \leq \|\xi_{m_j}(n)k(n)^{-1} - a(n)\|_{\mathfrak{B}} + \|a(n) - \xi_{m_i}(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}}.$$

Para $n > N$, temos

$$\begin{aligned}\|\xi_{m_j}(n) - \xi_{m_i}(n)\|_{\mathfrak{B}}k(n)^{-1} &\leq \|\xi_{m_j}(n)k(n)^{-1} - Z^k_\infty(\xi_{m_j})\|_{\mathfrak{B}} + \|\xi_{m_i}(n)k(n)^{-1} - Z^k_\infty(\xi_{m_i})\|_{\mathfrak{B}} \\ &+ \|Z^k_\infty(\xi_{m_i}) - Z^k_\infty(\xi_{m_j})\|_{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

Então de fato $\{\xi_{m_j}\}_j$ é uma sequência de Cauchy em $X_{\infty,k}$, portanto o conjunto S é relativamente compacto em $X_{\infty,k}$.

■

Observação 1.1. *A condição (C_2) pode ser substituida pela seguinte condição equivalente:*

$(C_2)^*$ *S é uniformemente de Cauchy em peso k; isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|\xi(m)k(m)^{-1} - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} < \epsilon,$$

para todo $m \geq n \geq N_0$, para todo $\xi \in S$.

$(C_2) \Rightarrow (C_2^*)$**:** Temos que $\|\xi(n)k(n)^{-1} - Z_\infty^k(\xi)\|_{\mathfrak{B}} < \epsilon$, para todo $n \geq N$ e para todo $\xi \in S$. Então, para $n, m \geq N$,

$$\begin{aligned}\|\xi(m)k(m)^{-1} - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} &= \|\xi(m)k(m)^{-1} - Z_\infty^k(\xi) + Z_\infty^k(\xi) - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} \\ &\leq \|\xi(m)k(m)^{-1} - Z_\infty^k(\xi)\|_{\mathfrak{B}} + \|Z_\infty^k(\xi) - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

Logo temos que S é uniformemente de Cauchy.

$(C_2^*) \Rightarrow (C_2)$**:** Temos que $\{\xi(n)k(n)^{-1}\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}$, para cada $\xi \in S$. Como $\xi \in S$ temos que o limite $Z_\infty^k(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi(n)k(n)^{-1}$ existe.
Seja $n \geq N_0$, n fixo. Então temos:

$$\|\xi(m)k(m)^{-1} - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} < \epsilon,$$

para todo $m \geq n$, para todo $\xi \in S$. Portanto,

$$a = \sup_{\xi \in S} \sup_{m \geq n} \|\xi(m)k(m)^{-1} - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} \leq \epsilon,$$

para todo $m \geq n$, para todo $\xi \in S$.
Daí temos que $\|Z_\infty^k(\xi) - \xi(n)k(n)^{-1}\|_{\mathfrak{B}} \leq a \leq \epsilon$, para $n \geq N_0$, para todo $\xi \in S$. Mostrando assim a equivalência entre as condições.

Consideremos a função com valores nas matrizes $r \times r$, $E^0(t)$, para $t \in \mathbb{Z}^-$, definida por:

$$E^0(t) = \begin{cases} \mathbb{I}\,(\text{matriz identidade}\, r \times r), & t = 0, \\ 0\,(\text{matriz nula}), & t < 0. \end{cases} \quad \text{e}$$

$$E^0(v)(t) := E^0(t)(v),\ t \in \mathbb{Z}^-,\ v \in \mathbb{C}^r.$$

Lema 1.2. *Assumamos que a função $z : [\tau, +\infty) \to \mathfrak{B}$ satisfaz a relação*

$$z(n) = T(n, \tau)z(\tau) + \sum_{s=\tau}^{n-1} T(n, s+1)E^0 p(s),\ n \geq \tau, \tag{1.5}$$

e definamos a função $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^r$ por:

$$y(n) = \begin{cases} z(n)(0), & n \geq \tau, \\ z(\tau)(n-\tau), & n < \tau. \end{cases} \tag{1.6}$$

Então, y satisfaz a equação

$$y(n+1) = L(n,\, y_n) + p(n),\ \ n \geq \tau, \tag{1.7}$$

e a relação $y_n = z(n),\ n \geq \tau$.

Demonstração. Pelo Teorema de representações de soluções de Murakami (ver Teorema 2.1 em [11]) para equações de diferença funcionais em espaços de fase, temos que a solução $x(\cdot,\, \tau,\, \phi,\, p)$ de (1.7) passando por $(\tau,\, \phi)$ satisfaz a relação:

$$x_n(\cdot,\, \tau,\, \phi,\, p) = T(n,\, \tau)\phi + \sum_{s=\tau}^{n-1} T(n,\, s+1)E^0(p(s)),\ \ n \geq \tau. \tag{1.8}$$

Assim, de (1.5) e (1.8) temos que:

$$z(n) = x_n(\cdot,\, \tau,\, z(\tau),\, p). \tag{1.9}$$

Portanto,

$$z(n)(s) = x(n+s,\, \tau,\, z(\tau),\, p),\ \ s \leq 0 \text{ e } n \geq \tau. \tag{1.10}$$

Logo,

$$z(n)(0) = x(n,\, \tau,\, z(\tau),\, p).$$

De (1.6), (1.9) e (1.10) temos:

$$y(n+s) = \begin{cases} z(n+s)(0), & s \geq \tau - n, \\ z(\tau)(n+s-\tau), & s < \tau - n, \end{cases} = \begin{cases} x(n+s,\, \tau,\, z(\tau),\, p), & s \geq \tau - n, \\ x(n+s,\, \tau,\, z(\tau),\, p), & s < \tau - n, \end{cases}$$

ou seja,

$$y_n(s) = x_n(s,\, \tau,\, z(\tau),\, p),\ \ \text{para } s \leq 0.$$

Assim:

$$y_n = x_n(\cdot,\, \tau,\, z(\tau),\, p). \tag{1.11}$$

De (1.9) e (1.11), tem-se que $y_n = z(n)$, para $n \geq \tau$. E como $z(n)(0) = y_n(0) = y(n)$, de (1.11) obtemos

$$y(n) = x(n,\, \tau,\, z(\tau),\, p) = x(n,\, \tau, a, y_\tau,\, p), \text{ para } n \geq \tau.$$

Portanto $y(n)$ é solução de (1.7) passando por $(\tau,\, \phi)$. ∎

Os próximos resultados serão usados na demonstração dos teoremas que estudam o comportamento assintótico do sistema (1.2).

Lema 1.3. (Teorema de Krasnoselky) *Se S é um conjunto convexo e completo de um espaço normado E, $T : S \to S$ é uma aplicação contínua com imagem relativamente compacta, $B : S \to E$ é uma contração e $Tx + By \in S$, para $x, y \in S$, então $T + B$ tem um ponto fixo.*

Definição 1.5. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um aberto, $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p$. Dizemos que $u \in L^p$ se*

$$\text{para}\, 1 \leq p < +\infty : \; \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\text{para}\, p = +\infty : \; \|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = inf\{C;\, |u(x)| \leq C\, q.t.p. \; em \; \Omega\} < \infty.$$

Lema 1.4. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 < p < +\infty$ e q definido pela relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Lema 1.5. (Desigualdade de Gronwall discreta)*Sejam $z(n)$ e $h(n)$ duas sequências de números reais, $n \geq n_0 \geq 0$. Se*

$$z(n) \leq M \left[z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j) z(j) \right], \; \text{para algum} \;\; M > 0,$$

então

$$z(n) \leq z(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} [(1 + Mh(j))], \;\; n \geq 0,$$

ou

$$z(n) \leq z(n_0) exp \left[\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right], \;\; n \geq n_0.$$

Capítulo 2

Resultados de convergência para sistemas com $(k_1,\, k_2)$-dicotomia compensada

Para o que segue, vamos requerer que a equação linear homogênea (1.1), tenha uma $(k_1,\, k_2)-$ dicotomia compensada, e a equação em diferença quase linear (1.2) seja submetida a duas perturbações não lineares.

Introduzimos a seguinte notação, para $\varphi \in \mathfrak{B}$:

$$Z_\varphi(n) := T(n,\, n_0)P(n_0)\varphi.$$

Para os resultados seguintes, vamos precisar da seguinte hipótese:

(D) As seguintes condições valem:

(d-1) A função $f_1(n,\, \varphi)$ é localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathfrak{B}$; isto é, para cada número positivo R e para todo $\varphi,\, \psi \in \mathfrak{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}},\, \|\psi\|_{\mathfrak{B}} \leq R$, verifica-se que:

$$|\, f_1(n,\, \varphi) - f_1(n,\, \psi)\,| \leq k_1(n)^{-1}\, F_1(n,\, R)\|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}},$$

onde $F_1 : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não decrescente com respeito à segunda variável, $f_1(n,\, 0) = 0$ e $F_1(n,\, 0) = 0$, para $n \geq n_0$.

(d-2) Existem constantes positivas μ_{1j}, $j = 1, 2$ tais que

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1\left(s, \mu_{1j} k_j\left(s\right)\right) k_1\left(s+1\right)^{-1} < +\infty.$$

(d-3) Existem constantes positivas λ_j, e funções $F_{2j} : \mathbb{N}\left(n_0\right) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ não decrescentes com respeito à segunda variável, com $j = 1, 2$, tais que para cada $(n, \xi) \in \mathbb{N}\left(n_0\right) \times X_{k_j}$, com $\|\xi\|_{k_j} \leq \lambda_j$, verifica-se que:

$$\left|f_2\left(n, \xi\right)\right| \leq F_{2j}\left(n, \|\xi\|_{k_j}\right).$$

(d-4) Existem constantes positivas μ_j, $j = 1, 2$ tais que

$$\beta_{\mu_j} = \sup_{\gamma \in (0, \mu_j]} \frac{\delta_j\left(\gamma\right)}{\gamma} < 1,$$

onde

$$\delta_j\left(\gamma\right) := \Gamma_1 \sum_{s=n_0}^{\infty} F_{2j}\left(s, \gamma\right) k_1\left(s+1\right)^{-1},$$

com

$$\Gamma_1 := KMC \max\left\{1, Ck_1\left(n_0\right) k_2\left(n_0\right)^{-1}\right\},$$

K é a constante do axioma (B) e M, C são as constantes da definição de (k_1, k_2)-Dicotomia Compensada.

No teorema seguinte vamos estudar convergência das soluções de (1.2) sob certas condições acerca do sistema linear homogêneo (1.1). Devido à tecnicalidade da demonstração, vamos descrever seu esquema: iremos aplicar o Teorema de Krasnoselky para operadores adequados B^j e T^j, definidos sobre o espaço onde estarão as soluções convergentes, $X_{\infty, k}$, de modo que a equação que o ponto fixo obtido satisfaz corresponda à equação do Lema (1.2). O ponto fixo estará em $X_{\infty, k}$, e será a solução procurada. As hipóteses que assumiremos são: (A) e (B) dos axiomas de espaço de fase, (a) e (b) dos axiomas de dicotomia compensada, (D) que são condições sobre as perturbações (f_1) e (f_2) e a tese é dado $\psi \in \mathfrak{B}$, com $P(n_0)\psi$ de norma suficientemente pequena, existe uma solução de (1.2) passando por $(n_0,\, \psi)$ que converge em peso $k_j,\ j = 1,\, 2$. As etapas da demonstração são: Definir $B^j : X_{\infty, k_j}[\gamma_j] \longrightarrow X_{\infty, k_j}$, operador sobre elementos de norma $\leq \gamma_j$ suficientemente pequena. Mostraremos que B^j está bem definido e que é uma contração. Em seguida definiremos $T^j : X_{\infty, k_j}[\gamma_j] \longrightarrow X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$ operador sobre elementos de norma $\leq \gamma_j$, mostraremos que T^j está bem definido e que se ξ, $\mu \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$, então $T^j\xi + B^j\mu \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$, ou seja, que $T^j + B^j$ é fechado sobre $X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$. Em seguida vamos demonstrar que o operador T^j é contínuo e que $Im(T^j)$ é relativamente compacta usando o critério de compacidade (Lema 1.1) . Com isso estaremos prontos pra usar o Teorema de Krasnoselky (Lema 1.3) e mostrar que a equação satisfeita pelo ponto fixo define uma solução.

Teorema 2.1. *Assumamos que a condição (D) vale. Suponhamos também que as seguintes condições são satisfeitas:*

(D_1) O sistema (1.1) *tem uma (k_1, k_2)-dicotomia compensada tal que*

$$\lim_{m\to\infty} k_1(m)^{-1}\, T(m,n)\, P(n) = 0,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}(n_0)$.

(D_2) Para qualquer $n \geq n_0$ e $j = 1, 2$ as funções

$$g_j(n,\cdot) := F_{2j}(n, \mu_j)^{-1} f_2(n,\cdot),$$

são contínuas.

(D_3) Os limites $\pi(\xi) := Z^1_\infty(g_j(\bullet,\xi))$, $j = 1, 2$ existem uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\lambda_j]$.

Então, existem constantes positivas γ_j, $\widetilde{M}_j$, para $j = 1, 2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j))\,\widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi) = y^j(n, n_0, \psi)$, $j = 1, 2$ com $P(n_0)\psi = \varphi$, da equação (1.2) *tal que $\lim_{n\to\infty} k_j(n)^{-1} y^j_n = 0$. Além disso, temos a seguinte fórmula assintótica:*

$$y^j_n(\varphi) = o(k_j(n)) \ , \ \text{quando } n \to \infty. \tag{2.1}$$

Demonstração. *Seja*

$$C(\mu_{1j}) = \sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1} < \infty.$$

Como F_1 é contínua e $F_1(s, 0) = 0$, temos que $C(\cdot)$ se anula em 0, logo podemos escolher $0 < \gamma_j < \mu_{1j}$ de modo que $C(\mu_{1j})$ seja suficientemente pequeno. Se tomarmos $\gamma_j < \mu_j$, temos $\beta_{\mu_j} < 1$. Então tomemos $0 < \gamma_j < \min\{\lambda_j,\, \mu_j,\, \mu_{1j}\}$, com $j = 1, 2$, tal que

$$\tau_j := \beta_{\mu_j} + K\, M\, C\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right) < 1,$$

onde β_{μ_j} *é dado por* $(d-4)$.

Consideremos o operador $B^j : X_{\infty, k_j}[\gamma_j] \to X_{\infty, k_j}$, *definido por:*

$$B^j\mu(n) := \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n, s)\, E^0\left(f_1(s, \mu(s))\right).$$

Então $Z_{\infty}^{k_j}(B^j\mu) = 0$ *ou seja,* $\lim\limits_{n\to\infty} B^j\mu(n)\, k_j(n)^{-1} = 0$.
Com efeito, para cada $s \in \mathbb{N}(n_0)$ *temos*

$$\|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(s)^{-1} \leq \gamma_j < \mu_{1j} \Rightarrow \|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}} < \mu_{1j}k_j(s).$$

$$\begin{aligned}
\|B^j\mu(n)\|_{\mathfrak{B}}k_j(n)^{-1} \;&\leq\; \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\|\, \|E^0(f_1(s, \mu(s)))\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; K\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\|\, \|f_1(s, \mu(s))\|_{\infty}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; K\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\|\, k_1(s)^{-1}\, F_1(s, \mu_{1j}k_j(s))\|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; \overbrace{K\sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|T(n, s+1)P(s+1)\|\, F_1(s, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}\, \|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}}}^{(A)} \\
&+\; \overbrace{K\sum_{s=n_1}^{n-1} \|T(n, s+1)P(s+1)\|\, F_1(s, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}\, \|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}}}^{(B)} \\
&+\; \overbrace{K\sum_{s=n}^{\infty} \|T(s, s+1)Q(s+1)\|\, F_1(s, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}\, \|\mu(s)\|_{\mathfrak{B}}}^{(C)}.
\end{aligned}$$

Estimemos (A), (B) *e* (C) *separadamente.*

Como

$$\begin{aligned}
T(n, s+1)P(s+1) \;&=\; T(n, n_1)T(n_1, s+1)P^2(s+1) \\
&=\; T(n, n_1)P(n_1)T(n_1, s+1)P(s+1).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|T(n,\, s+1)P(s+1)\| &\leq \|T(n,\, n_1)P(n_1)\|.\|T(n_1,\, s+1)P(s+1)\| \\ &\leq \|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\, M\, k_1(n_1)k_1(s+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(A) \leq \gamma_j K\, M\, \|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\, k_1(n_1) \sum_{s=n_0}^{n_1-1} k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}k_j(s)F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s)).$$

Analisemos a seguinte expressão:

$$k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}k_j(s) = k_1(n)^{-1}k_1(n)k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}k_j(s) = (*).$$

Temos 2 casos a considerar:

(j=1) $(*) = k_1(s+1)^{-1}k_1(s)k_1(n)^{-1}k_1(s) = k_1(n)^{-1}k_1(s+1)^{-1} \leq C\, k_1(n)^{-1}k_1(s+1)^{-1}$,

(j=2) $(*) = k_1(n)^{-1}\, (k_1(n)k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_2(n)^{-1}k_2(s)) \leq C\, k_1(n)^{-1}k_1(s+1)^{-1}$.

Portanto,

$$(A) \leq \gamma_j KMC\, k_1(n_1)\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\, k_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}.$$

Como antes,

$$\begin{aligned} (B) &\leq \gamma_j\, KM \sum_{s=n_1}^{n-1} k_1(n)k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}k_j(s)F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s)) \\ &\leq \gamma_j\, KMC \sum_{s=n_1}^{n-1} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C) &\leq \gamma_j KM \sum_{s=n}^{\infty} k_2(n)k_2(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}k_j(n)^{-1}k_j(s)F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s)) \\ &\leq \gamma_j KMC \sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$
\begin{aligned}
&\|B^j\mu(n)\|_{\mathfrak{B}}k_j(n)^{-1}\\
&\leq \gamma_j KMC\, k_1(n_1)\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\, k_1(n)^{-1}\sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\\
&+\gamma_j KMC\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}
$$

De $(d-2)$ *temos que* $\displaystyle\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1} < \infty$. *Tomando* n_1 *suficientemente grande temos que* $\displaystyle\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1} < \epsilon$, *e de* (D_1) *segue que para* n *suficientemente grande*

$$
k_1(n_1)\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|k_1(n)^{-1} \longrightarrow 0,
$$

logo temos que

$$
\|B^j\mu(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \longrightarrow 0,
$$

para n *e* n_1 *tomados acima, com* $n > n_1$. *Além disso, tomando* $\mu,\, \xi \in X_{\infty,\, k_j}[\gamma_j]$, *temos*

$$
|f_1(s,\, \mu(s)) - f_1(s,\, \xi(s))| \leq k_1(s)^{-1}F_1(s,\, \gamma_k k_j(s))\|\mu(s)-\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}.
$$

Logo pela propriedade (b) *da dicotomia,*

$$
\begin{aligned}
&\|B^j\mu(n) - B^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}\\
&\leq KM\sum_{s=n_0}^{n-1} k_1(n)k_1(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}F_1(s,\, \gamma_j k_j(s))\|\mu(s)-\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}\\
&+KM\sum_{s=n}^{\infty} k_2(n)k_2(s+1)^{-1}k_1(s)^{-1}F_1(s,\, \gamma_j k_j(s))\, \|\mu(s)-\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo temos que:

$$
\|B^j\mu(n) - B^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \leq KMC\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}\right)\|\mu-\xi\|_{k_j},
$$

mostrando assim que o operador B^j *é uma contração.*
Denotemos por $\tilde{M}_j := MC^{j-1}k_j(n_0)^{-1}$ *e seja* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}$ *tal que:*

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta(\gamma_j)\right)\tilde{M}_j^{-1}, \text{ para } j = 1,\, 2.$$

Definamos o operador T^j *sobre o conjunto* $X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$, $j = 1,\, 2$, *por:*

$$T^j\xi(n) := Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma(n,\, s)E^0 f_2(s,\, \xi),$$

para $\xi \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$ *e* $n \geq n_0$*. Mostremos que* $T^j\xi \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$:

$$\begin{aligned}
\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}k_j(n)^{-1} &\leq \overbrace{\|Z_\varphi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}}^{(D)} \\
&+ \overbrace{K\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\, s)\|\,\|f_2(s,\, \xi)\|k_j(n)^{-1}}^{(E)}.
\end{aligned}$$

Temos que $Z_\varphi(n) = T(n,\, n_0)P(n_0)\varphi$, *então*

$$\begin{aligned}
\|T(n,\, n_0)P(n_0)\varphi\|_{\mathfrak{B}} &\leq \|T(n,\, n_0)P(n_0\|\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \\
&\leq Mk_1(n)k_1(n_0)^{-1}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \\
&\leq Mk_1(n)k_1(n_0)^{-1}\left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right)\tilde{M}_j^{-1} \\
&= Mk_1(n)k_1(n_0)^{-1}\left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right)M^{-1}(C^{j-1})^{-1}k_j(n_0).
\end{aligned}$$

Analisando o caso $j = 1,\, 2$, *vemos que:*

$$(D) \leq \gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j),$$

Façamos agora a estimativa de (E):

$$\begin{aligned}(E) &= K\sum_{s=n_0}^{n-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|F_{2j}(s,\,\nu_j)k_j(n)^{-1}\\ &+ K\sum_{s=n}^{\infty}\|T(n,\,s+1)Q(s+1)\|F_{2j}(s,\,\nu_j)k_j(n)^{-1}\\ &\leq \sum_{s=n_0}^{n-1}KMk_1(n)k_1(s+1)^{-1}k_j(n)^{-1}F_{2j}(s,\,\gamma_j)\\ &+ \sum_{s=n_0}^{\infty}KMk_2(n)k_2(s+1)^{-1}k_j(n)^{-1}F_{2j}(s,\,\gamma_j).\end{aligned}$$

Da definição de Γ_1 *e das propriedades de dicotomia temos que:*

$$(E) \leq \Gamma_1\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}(s,\,\gamma_j)k_1(s+1)^{-1}.$$

Portanto

$$\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} \leq \gamma_j\beta_{\mu_j} \leq \gamma_j.$$

Mostremos agora que $Z_{\infty}^{k_j}(T^j\xi) = 0$ *uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$:

$$\begin{aligned}\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}k_j(n)^{-1} &\leq \|T(n,\,n_0)P(n_0)\|\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}\\ &+ \overbrace{\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|\Gamma(n,\,s)E^0f_2(s,\,\xi)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}}^{(F)}\\ &+ \overbrace{\sum_{s=n_1}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)E^0f_2(s,\,\xi)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}}^{(G)}.\end{aligned}$$

Estimemos inicialmente (F) :

$$(F) \leq KMk_1(n_1)\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|k_j(n)^{-1} + \sum_{s=n_0}^{n_1-1}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1}.$$

Como antes,

$$\|T(n,\,s+1)P(s+1)\| \leq \|T(n,\,n_1)P(n_1)\|Mk_1(n_1)k_1(s+1)^{-1},$$

e da condição de $(k_1,\, k_2)$*-dicotomia temos que:*

$$k_1(n)k_1(n_0)^{-1} \leq C^{j-1}k_j(n)k_j(n_0)^{-1} \Rightarrow k_j(n)^{-1} \leq C^{j-1}k_j(n_0)^{-1}k_1(n)^{-1}k_1(n_0).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n,\, s)E^0 f_2(s,\, \xi)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq KMC^{j-1}k_j(n_0)^{-1}k_1(n_0)\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|k_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_{2j}(s,\, \mu_j)k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Com o mesmo argumento mostramos que

$$(G) \leq KMC^{j-1}k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1} \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s,\, \mu_j)k_1(s+1)^{-1},$$

e dessa forma temos que:

$$\begin{aligned}
&\|T^j\xi(n)\|_{\beta}k_j(n)^{-1} \\
&\leq \|T(n,\, n_0)P(n_0)\|k_j(n)^{-1}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \\
&+ KMC^{j-1}k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|k_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_{2j}(s,\, \mu_j)k_1(s+1)^{-1} \\
&+ KMC^{j-1}k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1} \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s,\, \mu_j)k_1(s+1)^{-1},
\end{aligned}$$

e das condições $(d-1)$ *e* (D_1) *temos que para* n_1 *e* n *suficientemente grande temos que* $\|T^j\xi\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \to 0$ *uniformemente. Assim temos que* $T^j\xi \in X_{\infty,\, k_j}[\gamma_j]$.
Se $\xi,\, \mu \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, *mostremos que* $T^j\xi + B^j\mu \in X_{\infty,\, k_j}[\gamma_j]$.

$$\begin{aligned}
\|T^j\xi + B^j\mu\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} &\leq \|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} + \|B^j\mu(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq \gamma_j + KMC \sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}\|\mu\|_{k_j} \\
&\leq \gamma_j + (\tau_j - \beta_{\mu_j})\gamma_j = \tau_j\gamma_j < \gamma_j.
\end{aligned}$$

Usando a condição (D_2) *vamos provar que o operador* T^j *é contínuo. Para isso, consideremos uma sequência* $\{\xi_m\}_m$ *tal que* $\xi_m \to \xi$ *em* $X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$. *Seja* $n_1 \geq n_0$ *suficientemente grande,*

$$\begin{aligned}
\|T^j(\xi_m(n)) - T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \;&\leq\; \overbrace{\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\Gamma(n,\,s)E^0\left[f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)\right]\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}}^{(H)} \\
&+\; \overbrace{\|\sum_{s=n_1}^{n-1}\Gamma(n,\,s)E^0\left[f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)\right]\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}}^{(I)} \\
&+\; \overbrace{\|\sum_{s=n}^{\infty}\Gamma(n,\,s)E^0\left[f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)\right]\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}}^{(J)}\,.
\end{aligned}$$

Estimemos (H) :

$$\begin{aligned}
(H) \;&\leq\; K\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|\,|f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)|\,k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; KM\sum_{s=n_0}^{n_1-1}k_1(n)k_j(n)^{-1}\,|g_j(s,\,\xi_m) - g_j(s,\,\xi)|\,F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1} \\
&\leq\; KM\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}|g_j(s,\,\xi_m) - g_j(s,\,\xi)|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}k_1(n)k_j(n)^{-1}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1} \\
&\leq\; KMC^{j-1}\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)|k_1(n_0)^{-1}k_j(n_0)^{-1}\sum_{s=n_0}^{n_1-1}F_{2j}(s,\mu_j)k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Estimemos (I) :

$$\begin{aligned}
(I) \;&\leq\; K\sum_{s=n_1}^{n-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|\,|f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)|\,k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; KM\sum_{s=n_1}^{n-1}k_1(n)k_1(s+1)^{-1}\,|f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)|\,k_j(n)^{-1} \\
&\leq\; KMC^{j-1}k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\sum_{s=n_1}^{n-1}|f_2(s,\,\xi_m) - f_2(s,\,\xi)|k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Estimemos (J) :

$$
\begin{aligned}
(J) \;\; &\leq\;\; K\sum_{s=n}^{\infty}\|T(n,\,s+1)Q(s+1)\|\,F_{2j}(s,\,\mu_j)\,|g_j(s,\,\xi_m)-g_j(s,\,\xi)|k_j(n)^{-1}\\
&\leq\;\; KM\sum_{s=n}^{\infty}k_2(n)k_2(s+1)^{-1}|f_2(s,\,\xi_m)-f_2(s,\,\xi)|k_j(n)^{-1}\\
&\leq\;\; KMC\sum_{s=n}^{\infty}k_1(n)k_j(n)^{-1}|f_2(s,\,\xi_m)-f_2(s,\,\xi)|k_1(s+1)^{-1}\\
&\leq\;\; KMC^jk_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\sum_{s=n}^{\infty}|f_2(s,\,\xi_m)-f_2(s,\,\xi)|k_1(s+1)^{-1}\\
&\leq\;\; L_j\delta_j(\mu_j)\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}|g_j(s,\,\xi_m)-g_j(s,\,\xi)|+2\Gamma_1L_j\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1},
\end{aligned}
$$

onde $L_j=\frac{1}{\Gamma_1}KMC^jk_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}$ *e* $\delta_j(\mu_j)$ *é dada por* $(d-4)$. *Assim obtemos que :*

$$
\begin{aligned}
\|T^j\xi_m-T^j\xi\|_{k_j} \;\; &\leq\;\; L_j\delta_j(\mu_j)\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}|g_j(s,\,\xi_m)-g_j(s,\,\xi)|\\
&+\;\; 2\Gamma_1L_j\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1},
\end{aligned}
$$

mostrando assim que o operador T^j *é contínuo.*
Mostremos agora que a imagem de T^j *é relativamente compacta em* $\mathfrak{B}$ *para todo* $n\geq n_0$. *Para isso provaremos que o conjunto*

$$
H_n^{k_j}(T^jX_{\infty,\,k_j}[\gamma_j])=\left\{T^j\xi(n)k_j(n)^{-1};\,\xi\in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]\right\},
$$

é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$ *para todo* $n\geq n_0$. *Consideremos uma sequência arbitrária* $\{\xi_m\}_m$ *em* $X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$. *Então* $\{g_j(\bullet,\,\xi_m)\}_m$ *é relativamente compacto em* ℓ^∞. *Com efeito, temos de* $(d-3)$*:*

$$
|g_j(n,\,\xi_m)|\leq F_{2j}(n,\,\mu_j)^{-1}F_{2j}(n,\,\|\xi_m\|_{k_j})\leq 1,
$$

e (D_3) *garante a equiconvergência. Mostrando a afirmação acima. Assim, existe uma subsequência* $\{g_j(\bullet,\,\xi_{m_i})\}_i$ *uniformemente convergente para algum* $\psi_j\in\ell^\infty$. *Fazendo*

$$
\varphi_j(n):=F_{2j}(n,\,\mu_j)\psi_j(n),
$$

mostremos que a sequência $T^j\xi_{m_i}(n)k_j(n)^{-1}$ *converge para*

$$Z_\varphi(n)k_j(n)^{-1} + \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\varphi_j(s)k_j(n)^{-1}.$$

De fato,

$$\|T^j\xi_{m_i}(n) - Z_\varphi(n) - \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\varphi_j(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \leq$$

$$\leq K \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\| F_{2j}(s,\, \mu_j)\, |g_j(s,\, \xi_{m_i}) - \psi_j(s)|\, k_j(n)^{-1}$$

$$\leq K\|g_j(\bullet,\, \xi_{m_i}) - \psi_j\|_\infty \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\| F_{2j}(s,\, \mu_j) k_j(n)^{-1}$$

$$\leq L_j\delta_j(\mu_j)\|g_j(\bullet,\, \xi_{m_i}) - \psi_j\|_\infty.$$

A equiconvergência em peso em ∞ *da imagem de* T^j *é uma consequência imediata do fato que* k_j*- limite de* $T^j\xi$ *é zero uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\, k_j}\left[\gamma_j\right]$*.*
Construimos operadores B^j *e* T^j *em* $X_{\infty, k_j}\left[\gamma_j\right]$*, tais que* B^j *é uma contração,* T^j *é contínua com imagem relativamente compacta e* $T^j\xi + B^j\mu \in X_{\infty,\, k_j}\left[\gamma_j\right]$*, para quaisquer* $\xi,\, \mu \in X_{\infty,\, k_j}\left[\gamma_j\right]$*. Aplicando o teorema de Krasnoselky, temos que* $T^j + B^j$ *tem um ponto fixo* $\xi \in X_{\infty,\, k_j}\left[\gamma_j\right]$*, ou seja, temos* $\xi(n) = T^j\xi(n) + B^j\xi(n)$*, para* $n \geq n_0$*, ou seja*

$$\xi(n) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\left(f_1(s,\, \xi(s)) + f_2(s,\, \xi)\right),\ n \geq n_0,$$

em particular, quando $n = n_0$*, temos:*

$$\xi(n_0) = P(n_0)\varphi - \sum_{s=n_0}^{\infty} T(n_0,\, s+1)Q(s+1)E^0\left(f_1(s,\, \xi(s)) + f_2(s,\, \xi)\right),$$

ou seja,

$$P(n_0)\varphi = \xi(n_0) + \sum_{s=n_0}^{\infty} T(n_0,\, s+1)Q(s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi),$$

onde $\Lambda(s,\, \xi) = f_1(s,\, \xi(s)) + f_2(s,\, \xi)$*. Logo*

$$Z_\varphi(n) = T(n,\, n_0)\left[\xi(n_0) + \sum_{s=n_0}^{\infty} T(n,\, s+1)Q(s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi)\right].$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\xi(n) &= T(n,\, n_0)\left(\xi(n_0) + \sum_{s=n_0}^{\infty} T(n,\, s+1)Q(s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi)\right) \\
&+ \sum_{s=n_0}^{n-1} T(n,\, s+1)P(s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi) \\
&- \sum_{s=n}^{\infty} T(n,\, s+1)Q(s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi) \\
&= T(n,\, n_0)\xi(n_0) + \sum_{s=n_0}^{n-1} T(n,\, s+1)E^0\Lambda(s,\, \xi).
\end{aligned}$$

Portanto ξ *satisfaz as condições do Lema* 1.2 *com perturbação* $\Lambda(s,\, \xi) = f_1(s,\, \xi(s)) + f_2(s,\, \xi)$. *Assim, definindo* y *por:*

$$y(n) = \begin{cases} \xi(n)(0), & n \geq n_0, \\ \xi(n_0)(n-n_0), & n < n_0, \end{cases}$$

temos que y *é uma solução da equação* (1.2) *e* $y_n = \xi(n)$, $n \geq n_0$. *O que conclui a demonstração do teorema.*

■

Observação 2.1. *Com as hipóteses que temos no Teorema* 2.1 *não garantimos a continuidade da aplicação* $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$, *mas a mesma é garantida se substituirmos a condição* (D_2) *pela seguinte condição :*

(D$_4$) Existem constantes positivas μ_{2j}, $j = 1, 2$ e funções $G_j : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ não-decrescentes com respeito à segunda e à terceira variáveis, tal que $G_j(n, 0, 0) = 0$, para $n \geq n_0$, além de

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_{2j}(s, \mu_j)\, G_j(s, \mu_{2j}, \mu_{2j})\, k_1(s+1)^{-1} < +\infty,$$

e

$$|g_j(n, \xi) - g_j(n, \eta)| \leq G_j\left(n, \|\xi\|_{k_j}, \|\eta\|_{k_j}\right) \|\xi - \eta\|_{k_j},$$

para todo $\xi, \eta \in X_{k_j}$.

Para provar a continuidade de tal aplicação, começamos escolhendo γ_j do Teorema 2.1 com $0<\gamma_j<\min\{\lambda_j,\, \mu_j,\, \mu_{1j},\, \mu_{2j}\}$ tal que

$$\begin{aligned}\tau_j \;&:=\; \beta_{\mu_j}+KMC\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1\left(s,\gamma_j k_j\left(s\right)\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\\ &+\; \Gamma_1\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}\left(s,\mu_j\right)G_j\left(s,\gamma_j,\gamma_j\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}<1.\end{aligned}$$

Além disso, temos as seguintes estimativas responsáveis pela continuidade das aplicações precedentes:

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma\left(n,s\right)E^0\left(f_2\left(s,y^j_\bullet\left(\varphi\right)\right)-f_2\left(s,y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right)\right)\right\|_{\mathfrak{B}}k_j\left(n\right)^{-1}\\ &\leq\Gamma_1\sum_{s=n_0}^{\infty}G_j\left(s,\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)\right\|_j,\left\|y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_j\right)\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)-y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_{k_j}F_{2j}\left(s,\mu_j\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\\ &\leq\Gamma_1\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}\left(s,\mu_j\right)G_j\left(s,\gamma_j,\gamma_j\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\right)\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)-y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_{k_j}.\end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma\left(n,s\right)E^0\left(f_1\left(s,y^j_s\left(\varphi\right)\right)-f_1\left(s,y^j_s\left(\varphi_0\right)\right)\right)\right\|_{\mathfrak{B}}k_j\left(n\right)^{-1}\\ &\leq KMC^j\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1\left(s,\gamma_j k_j\left(s\right)\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\right)\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)-y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_{k_j}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\left\|y^j_n\left(\varphi\right)-y^j_n\left(\varphi_0\right)\right\|_{\mathfrak{B}}k_j\left(n\right)^{-1}\leq MC^{j-1}k_j\left(n_0\right)^{-1}\left\|\varphi-\varphi_0\right\|_{\mathfrak{B}}\\ &+\Gamma_1\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}\left(s,\mu_j\right)G_j\left(s,\gamma_j,\gamma_j\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\right)\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)-y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_{k_j}\\ &+KMC\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1\left(s,\gamma_j k_j\left(s\right)\right)k_1\left(s+1\right)^{-1}\right)\left\|y^j_\bullet\left(\varphi\right)-y^j_\bullet\left(\varphi_0\right)\right\|_{k_j},\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(1-\tau_j+\beta_{\mu_j}\right)\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j}\leq\widetilde{M}_j\left\|\varphi-\varphi_0\right\|_{\mathfrak{B}},$$

ou seja,

$$\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j}\leq\frac{\widetilde{M}_j}{\left(1-\tau_j+\beta_{\mu_j}\right)}\left\|\varphi-\varphi_0\right\|_{\mathfrak{B}},$$

onde $\widetilde{M}_j$ é a constante dada na prova do Teorema 2.1

Usando o mesmo tipo de argumento temos a seguinte desigualdade:

$$\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j}\leq\left\|Z_\varphi-Z_{\varphi_0}\right\|_{k_j}+\left(\tau_j-\beta_{\mu_j}\right)\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j},$$

onde

$$\left(1-\tau_j+\beta_{\mu_j}\right)\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j}\leq\left\|Z_\varphi-Z_{\varphi_0}\right\|_{k_j}.$$

Notamos que $\Gamma^j=T^j+B^j$ é uma τ_j-contração. De fato,

$$\begin{aligned}
&\left\|\Gamma^j\xi(n)-\Gamma^j\eta(n)\right\|_{\mathfrak{B}}k_j(n)^{-1}\\
&\qquad\leq\Gamma_1\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}(s,\mu_j)\,G_j(s,\gamma_j,\gamma_j)\,k_1(s+1)^{-1}\right)\|\xi-\eta\|_{k_j}\\
&\qquad+KMC\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\gamma_jk_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}\right)\|\xi-\eta\|_{k_j}\\
&\qquad\leq\tau_j\|\xi-\eta\|_{k_j}.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que para qualquer $n\geq n_0$, se as funções $\varphi\to g_j(n,y_\bullet^j(\varphi))$, $j=1,2$ são contínuas, então as funções $\varphi\to y_\bullet^j(\varphi)$, $j=1,2$ também são contínuas. De fato, para cada $\xi\in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, temos:

$$\begin{aligned}
\left(1-\tau_j+\beta_{\mu_j}\right)\left\|y_\bullet^j(\varphi)-y_\bullet^j(\varphi_0)\right\|_{k_j}&\leq\widetilde{M}_j\|\varphi-\varphi_0\|_{\mathfrak{B}}\,\delta_j(\mu_j)\\
&\max_{s\geq n_0}\left|g_j\left(s,y_\bullet^j(\varphi)\right)-g_j\left(s,y_\bullet^j(\varphi_0)\right)\right|\\
&+2\Gamma_1\sum_{s=n_1}^{\infty}k_1(s+1)^{-1}F_{2j}(s,\mu_j).
\end{aligned}$$

A última condição não garante a continuidade de $Z_\varphi\to y_\bullet^j(\varphi)$.

Observação 2.2. *Se eliminamos a hipótese* $f_1(n,0)=0$*, em (d-1), o Teorema* 2.1 *não é alterado de maneira essencial, pois é possível obter um resultado análogo para o sistema*

$$x(n+1)=L(n,x_n)+f_1(n,x_n)+f_2(n,x_\bullet)-f_1(n,0) \tag{2.2}$$

Antes do próximo resultado, observamos que pelo fato de k_1 e k_2 satisfazer a propriedade de compensação, temos que

$$0\leq \inf_{n\geq n_0}\frac{k_1(n)}{k_2(n)}\leq c_2.$$

Seja $\omega=\inf\limits_{n\geq n_0}\frac{k_1(n)}{k_2(n)}$. Se $\omega\neq 0$, as sequências k_1 e k_2 são equivalentes, e então tem-se que $L^2=\omega L^1$, como pode-se verificar por um cálculo direto. Caso contrario, $\omega=0$, as sequências não são equivalentes e tem-se que $L^2=0$. Vamos adotar $\omega^0=1$ para qualquer ω real não negativo.

Teorema 2.2. *Assumamos as hipóteses do Teorema 2.1, exceto* (D_1)*, a qual é substituída pela seguinte condição:*

(D_5) O sistema (1.1) tem uma (k_1,k_2)-dicotomia a qual é compensada e tal que

$$\lim_{m\to\infty}k_j(m)^{-1}T(m,n)P(n)=\omega^{j-1}L^1(n),$$

com $j=1,2$ para todo $n\geq n_0$.

Então, existem constantes positivas γ_j, $\widetilde{M}_j$ tais que para cada $\varphi\in P(n_0)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}\leq\left(\gamma_j\beta_{\mu_j}-\delta_j(\gamma_j)\right)\widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j=y^j(\varphi)=y^j(n,n_0,\psi)$, com $P(n_0)\psi=\varphi$, da equação (1.2) tal que o k_j-limites de $y^j_\bullet$ existe e $\|y^j_\bullet\|_{k_j}\leq\gamma_j$, para $j=1$, 2. Além disso, temos a seguinte fórmula assintótica:

$$y^j_n(\varphi)=Z_\varphi(n)+\sum_{s=n_0}^{n-1}\Gamma(n,s)E^0\left(f_1\left(s,y^j_s(\varphi)\right)+f_2\left(s,y^j_\bullet(\varphi)\right)\right)+o(k_j(n)), \tag{2.3}$$

quando $n\to\infty$. O k_j-limite de $y^j_\bullet$ é dado por:

$$Z^{k_j}_\infty\left(y^j_\bullet(\varphi)\right)=\omega^{j-1}L^1(n_0)\varphi+Z^{k_j}_\infty\left(\sum_{s=n_0}^{\bullet-1}\Gamma(\bullet,s)E^0\left(f_1\left(s,y^j_s(\varphi)\right)+f_2\left(s,y^j_\bullet(\varphi)\right)\right)\right). \tag{2.4}$$

Por outro lado, se $b_j := \sup_{n\geq n_0} \|L^1(n)\| k_j(n) < +\infty$, então

$$Z_\infty^{k_j}\left(y_\bullet^j(\varphi)\right) = \omega^{j-1}L^1(n_0)\varphi + \omega^{j-1}\sum_{s=n_0}^{\infty} L^1(s+1)E^0\left(f_1\left(s, y_s^j(\varphi)\right) + f_2\left(s, y_\bullet^j(\varphi)\right)\right). \tag{2.5}$$

Demonstração. Usando a notação do Teorema 2.1, destacamos alguns argumentos da prova. Inicialmente notamos que os limites

$$\lim_{m\to\infty} A(m,\xi)\, k_j(m)^{-1} = Z_\infty^{k_j}(A(\bullet,\xi)),$$

$j = 1, 2$ existem uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, onde γ_j é suficientemente pequeno e

$$A(m,\xi) = \sum_{s=n_0}^{m-1} \Gamma(m,s)\, E^0 f_2(s,\xi).$$

De fato, é suficiente provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $M_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left\|A(m,\xi)\, k_j(m)^{-1} - A(n,\xi)\, k_j(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon,$$

para qualquer $m \geq n \geq M_0$, para todo $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. O fato que $A(m,\xi)$ verifica a última afirmação é consequência das seguintes duas estimativas: Seja n_1 suficientemente grande, e fixemos $M_0 \geq n_1$. Para cada m e n, satisfazendo $m \geq n \geq M_0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\left[\Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1}\right] E^0 f_2(s,\xi)\right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \leq K \sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_{2j}(s,\gamma_j)\left[\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}\left\|\Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \max_{n_0\leq s\leq n_1-1}\left\|\Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} - \omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|\right].
\end{aligned}$$

Nossa segunda estimativa é:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{s=n_1}^{n-1}\left(\Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1}\right) E^0 f_2(s,\xi)\right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad + \left\|\sum_{s=n}^{m-1}\Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} E^0 f_2(s,\xi)\right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \leq 3\Gamma_1 \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s,\gamma_j)\, k_2(s+1)^{-1},
\end{aligned}$$

onde Γ_1 é dada por (d-4). Assim, temos provada nossa afirmação.

Se $B(n,\eta) = \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,s) E^0 f_1(s,\eta(s))$, então os limites $Z_\infty^{k_j}(B(\bullet,\eta))$, $j = 1,2$ existem para cada $\eta \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. O argumento para provar isto é análogo ao anterior. Sejam m, n, M, n_1 como antes. Então temos as seguintes estimativas:

$$\left\| \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \left(\Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} \right) E^0 f_1(s,\eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq c_2(n_1) \max_{n_0 \leq s \leq n_1} \left\| \Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\|$$

$$+ \max_{n_0 \leq s \leq n_1} \left\| \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\|,$$

onde $c_2(n_1)$ é uma constante que depende de n_1, para n_1 suficientemente grande. A segunda estimativa é:

$$\left\| \sum_{s=n_1}^{n-1} \left(\Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} \right) E^0 f_1(s,\eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$+ \left\| \sum_{s=n}^{m-1} \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} E^0 f_1(s,\eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq 3\gamma_j KMC \sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}$$

Assim os k_j-limites de $B^j\eta$ são explicitamente calculáveis, e de fato temos que $Z_\infty^{k_j}(B^j\eta) = Z_\infty^{k_j}(B(\bullet,\eta))$. A equiconvergência em ∞ da imagem de T^j é consequência imediata do fato que $Z_\infty^{k_j}(T^j\xi) = \omega^{j-1}L^1(n_0)\varphi + Z_\infty^{k_j}(A(\bullet,\xi))$, uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$.

Assumamos que $b_j := \sup_{n \geq n_0} \|L^1(n)\| k_j(n) < \infty$, e denotemos por $A_j(s) := f_1(s,y_s^j) + f_2(s,y_\bullet^j)$. Provaremos que:

$$\lim_{n\to\infty} k_j(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,s) E^0 A_j(s) = \omega^{j-1} \sum_{s=n_0}^{\infty} L^1(s+1) E^0 A_j(s).$$

Notamos que a última série esta bem definida, pois de fato temos:

$$\left\| \omega^{j-1} \sum_{s=n_0}^{\infty} L^1(s+1) E^0 A_j(s) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\le Kb_j\omega^{j-1}\sum_{s=n_0}^{\infty}\left(k_1(s)^{-1}F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,\|y_s^j\|_{\mathfrak{B}}+F_{2j}\left(s,\|y_{\bullet}^j\|_{k_j}\right)\right)k_j(s+1)^{-1}$$

$$\le Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}\,\|y_{\bullet}^j\|_{k_j}\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}$$

$$+\,Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}k_1(n_0)\,k_j(n_0)^{-1}\sum_{s=n_0}^{\infty}F_{2j}(s,\gamma_j)\,k_j(s+1)^{-1}$$

$$\le Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}\gamma_j\sum_{s=n_0}^{\infty}\left(F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}\right.$$

$$+\,\tfrac{1}{\Gamma_1}Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}k_1(n_0)\,k_j(n_0)^{-1}\,\delta_j(\gamma_j)\,.$$

Ou seja, a série $\sum_{s=n_0}^{\infty}L^j(s+1)\,E^0A_j(s)$ é dominada pelas séries convergentes

$$\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}\quad \text{e}\quad \delta_j(\gamma_j)\,.$$

Para provar o k_j-limite, temos a seguinte estimativa: Escolhamos n_1 suficientemente grande e seja $n\ge n_1$ arbitrario. Então:

$$\left\|k_j(n)^{-1}\sum_{s=n_0}^{n-1}\Gamma(n,s)\,E^0A_j(s)-\sum_{s=n_0}^{\infty}\omega^{j-1}L^1(s+1)\,E^0A_j(s)\right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\le c(n_1)\max_{n_0\le s\le n_1-1}\left\|k_j(n)^{-1}\Gamma(n,s)-\omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|$$

$$+\,KMC\sum_{s=n_1}^{n-1}\left(\gamma_j F_1(s,\gamma_j k_j(s))+k_1(n_0)\,k_j(n_0)^{-1}F_{2j}(s,\gamma_j)\right)k_1(s+1)^{-1}$$

$$+\,Kb_j\omega^{j-1}C\sum_{s=n}^{\infty}\left(\gamma_j F_1(s,\gamma_j k_j(s))+k_1(n_0)\,k_j(n_0)^{-1}F_{2j}(s,\gamma_j)\right)k_1(s+1)^{-1}$$

$$\le c(n_1)\max_{n_0\le s\le n_1-1}\left\|k_j(n)^{-1}\Gamma(n,s)-\omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|$$

$$+d\sum_{s=n_1}^{\infty}\left(F_1(s,\gamma_j k_j(s))+F_{2j}(s,\gamma_j)\right)k_1(s+1)^{-1}\,, \tag{2.6}$$

onde notamos que $c(n_1)$ é uma constante que depende de n_1 e d é uma constante independente de n. ■

Observação 2.3. *O Teorema* 2.2 *nos fornece a seguinte estimativa para os k_j-limites das soluções $y_{\bullet}^j$, $\left\|Z_{\infty}^{k_j}(y_{\bullet}^j)\right\|_{\mathfrak{B}}\le\gamma_j$. Tal estimativa pode ser melhorada usando a desigualdade* *de Gronwall discreta, para isso vamos tomar τ_j, definido na demostração do Teorema 2.1 tal que $a_j = \tau_j$ e $a_j < 1$, então:*

$$\begin{aligned}
k_j(n)^{-1}\|y_n^j\|_{\mathfrak{B}} &\leq \gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta(\gamma_j) \\
&+ KMC\sum_{s=n_0}^{n-1} F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}\|y_s^j\|_{\mathfrak{B}}\,k_1(s)^{-1} \\
&+ KMC\,\|y_\bullet^j\|_{k_j}\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))\,k_1(s+1)^{-1} \\
&+ \Gamma_1\sum_{s=n_0}^{\infty} F_{2j}(s,\,\gamma_j)k_1(s+1)^{-1} \\
&\leq \gamma_j\beta_{\mu_j} \\
&+ KMC\gamma_j\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1} \\
&+ \sum_{s=n_0}^{n-1} KMC\,F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}\|y_s^j\|_{\mathfrak{B}}\,k_1(s)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, definindo as seguintes funções $h_j(s) := KMC\,F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}$, $u_j(s) := k_j(s)^{-1}\|y_s^j\|_{\mathfrak{B}}$ e $p_j(s) := \gamma_j\beta_{\mu_j} + KMC\gamma_j\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\,\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}$, temos que:

$$u_j(n) \leq p_j(n) + \sum_{s=n_0}^{n-1} h_j(s)u_j(s),$$

ou

$$u_j(n) \leq \gamma_j\tau_j + \sum_{s=n_0}^{n-1} h_j(s)u_j(s),$$

e pela desigualdade de Gronwall discreta, temos que:

$$u_j(n) \leq \gamma_j\tau_j\prod_{\tau=n_0}^{n-1}(1+h_j(\tau)),$$

onde

$$u_j(n) \leq \gamma_j\tau_j\exp\left(\sum_{\tau=n_0}^{n-1} h_j(s)\right) \leq \gamma_j\tau_j\exp\left(\tau_j - \beta_{\mu_j}\right) \leq a_j\gamma_j,$$

e assim $\left\| Z_\infty^{k_j}(y_\bullet^j) \right\|_{\mathfrak{B}} \leq a_j\gamma_j$, *o que melhora a estimativa anterior.*

A próxima observação é acerca do conjunto das soluções convergentes de (1.2).

Observação 2.4. *Denotemos por* $R_j := \left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right)\tilde{M}^{-1}$ *e seja* $P(n_0)\mathfrak{B}[R_j]$ *a bola* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq R_j$ *em* $P(n_0)\mathfrak{B}$. *Sob as condições do Teorema 2.2 deduzimos que o conjunto* Ω *de todas as soluções convergentes* $y_\bullet^j(\varphi)$ *da equação (1.2) com* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}[R_j]$ *é equiconvergente em peso em* ∞ *no espaço* $X_{\infty,\,k_j}$. *Isso segue de (2.6) combinado com o fato de* $\lim\limits_{n\to\infty} k_j(n)^{-1}o(k_j(n)) = 0$ *uniformemente em* Ω, *onde* $o(k_j(n))$ *é dado por (2.3).*
Não podemos garantir que Ω *seja relativamente compacto em* $X_{\infty,\,k_j}$. *Porém, se tomarmos* $\tilde{\Omega}$, *como sendo o conjunto dos* $y_\bullet^j(\varphi) - Z_\varphi(\cdot)$, *com* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}[R_j]$ *e introduzimos uma condição similar à* (D_3) *do Teorema 2.1, dada por:*

(D_6) *Os limites* $\tilde{\pi}(\xi) := Z_\infty^1(\tilde{g}_j(\cdot,\,\xi))$, *para* $j = 1, 2$ *existem uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\,k_j}[\lambda_j]$, *onde*

$$\tilde{g}_j(n,\,\xi) = k_1(n)k_j(n)^{-1}F_1(n,\,\mu_{1j}k_j(n))^{-1}f_1(n,\,\xi(n)).$$

Então, usando o critério de compacidade, podemos provar que $\tilde{\Omega}$ *é relativamente compacto em* $X_{\infty,\,k_j}$. *Com efeito, consideremos o conjunto*

$$H_n^{k_j}(\tilde{\Omega}) = \left\{y_n^j(\varphi)k_j(n)^{-1} - Z_\varphi(n)k_j(n)^{-1} \,:\, \varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}[R_j]\right\}.$$

Considere sequência $\{\varphi_m\}_m$ *em* $P(n_0)\mathfrak{B}[R_j]$. *Usando o mesmo argumento que o da demonstração do Teorema 2.1, concluimos que existe uma subsequência* $\{\varphi_{m_i}\}_i$ *tal que* $\{g_j(\cdot,\,y_\bullet^j(\varphi_{m_i}))\}_i$ *é uniformemente convergente para algum* $\psi_j \in \ell^\infty$. *Além disso temos*

$$|\tilde{g}_j(n,\,y_\bullet^j(\varphi_{m_i}))| \leq \|y_\bullet^j(\varphi_{m_i})\|_{k_j} \leq \gamma_j.$$

Assim, a sequência $\{\tilde{g}_j(\cdot,\,y_\bullet^j(\varphi_{m_i}))\}_i$ *é limitada, e de* (D_6) *é equiconvergente. Portanto, existe uma subsequência desta, uniformemente convergente para algum* $\tilde{\psi}_j \in \ell^\infty$. *Definamos*

$$\varphi_j(n) := F_{2j}(n,\,\mu_j)\psi_j(n) + k_1(n)^{-1}k_j(n)F_1(n,\,\mu_{1j}k_j(n))\tilde{\psi}_j(n).$$

Então, temos as seguintes estimativas:

$$\left\| y_n^j(\varphi_{m_i}) - Z_{\varphi_{m_i}}(n) - \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\varphi_j(s) \right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1}$$

$$\leq KMC \sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \mu_{1j}k_j(s))k_2(s+1)^{-1} \left\| \tilde{g}_j(\cdot,\, y_\bullet^j(\varphi_m)) - \tilde{\psi}_j \right\|_{\infty}$$

$$+L_j\delta_j(\mu_j) \left\| g_j(\cdot,\, y_\bullet^j(\varphi_{m_i})) - \psi_j \right\|_{\infty}.$$

Isso mostra que $(y_n^j(\varphi_{m_i}) - Z_{\varphi_{m_i}}(n))k_j(n)^{-1}$ *é convergente e converge para*

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\varphi_j(s)k_j(n)^{-1}$$

quando $i \to \infty$.
A equiconvergência de $\tilde{\Omega}$ *segue dos resultados anteriores. Assim, pelo critério de compacidade temos que é relativamente compacto .*

Capítulo 3

Resultados de convergência para sistemas com dicotomia p-somável em peso

Neste capítulo analisaremos o problema de convergência considerando dicotomias p-somáveis em peso. A partir de agora consideraremos p e q expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, e não consideraremos o caso $p=1$. Para provarmos os resultados deste capítulo vamos precisar da seguinte hipótese:

$(D)^*$ As seguintes condições valem:

$(d-1)^*$ A função $f_1(n,\,\varphi)$ é localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathcal{B}$; isto é, para cada número positivo R, para todo $\varphi,\,\psi \in \mathcal{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathcal{B}},\,\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq R$, tem-se:

$$|f_1(n,\,\varphi) - f_1(n,\,\psi)| \leq a_2(n)^{1/p} F_1(n,\,R)^{1/q} \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}},$$

onde $F_1 : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e não decrescente com respeito à segunda variável, $f_1(n,\,0)=0$ e $F_1(n,\,0)=0$, para $n \geq n_0$.

$(d-2)^*$ Existe uma constante positiva $\tilde{\nu}$ tal que

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\,\tilde{\nu} a_1(s)) a_1^q(s) < \infty.$$

$(d-3)^*$ Existe uma constante positiva λ e uma função $F_2 : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não decrescente com respeito à segunda variável tais que

$$\rho[F_2] = \sup_{n \geq n_0} F_2(n, \lambda) < \infty.$$

Também existe uma função $l \in \ell^q$ tal que, para cada $(n, \xi) \in \mathbb{N}(n_0) \times X_{a_1}$, com $\|\xi\|_{a_1} \leq \lambda$:

$$|f_2(n, \xi)| \leq \nu(n) F_2(n, \|\xi\|_{a_1}),$$

onde $\nu(n) = a_2(n)^{1/p} l(n)$.

$(d-4)^*$ Existe uma constante positiva μ tal que

$$\beta_\mu := \sup_{\gamma \in (0,\mu]} \frac{\delta(\gamma)}{\gamma} < 1,$$

onde $\delta(\gamma) := K\tilde{K}\|l\|_q \|F_2(\cdot, \gamma)\|_\infty$. Onde K é a constante do axioma (B) da definição de espaço de fase e $\tilde{K}$ a constante da Definição 1.2 de dicotomia p-somável em peso.

O seguinte teorema fornece soluções convergentes da equação (1.2) supondo que o sistema homogêneo (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso.

Teorema 3.1. *Sejam p e q expoentes conjugados e assumamos que a condição $(D)^*$ vale. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

$(D_1)^*$ *O sistema (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso (a_1, a_2) tal que*

$$\lim_{m \to \infty} a_1(m)^{-1} T(m, n) P(n) = 0,$$

para cada $n \geq n_0$.

$(D_2)^*$ *Para qualquer $n \geq n_0$, a função $g(n, \cdot) = \nu(n)^{-1} f_2(n, \cdot)$ é contínua.*

$(D_3)^*$ *O limite $\pi(\xi) = Z_\infty^{a_1}(g(\cdot, \xi))$ existe uniformemente em $\xi \in X_{\infty, a_1}[\lambda]$.*

Então existem constantes positivas $\tilde{\gamma}$, $\tilde{M}$, tais que, para cada $\varphi \in P(n_0)\mathcal{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (\tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}$, existe uma solução $y = y(\varphi) = y(n, n_0, \psi)$, com $P(n_0)\psi = \varphi$, da equação (1.2) tal que $\lim_{n \to \infty} a_1(n)^{-1} y_n = 0$. Além disso temos a fórmula assintótica:

$$y_n(\varphi) = o(a_1(n)), \tag{3.1}$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. *Temos por* $(d-2)^*$ *que existe uma constante positiva* $\tilde{\nu}$ *tal que*

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\nu}a_1(s))a_1(s)^q < \infty.$$

Seja $0 < \tilde{\gamma} < min\{\lambda,\, \mu,\, \tilde{\nu}\}$, *uma constante apropriada. Como* F_1 *é contínua e não decrescente, então*

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma}a_1(s))a_1(s)^q < \epsilon, \textit{ para todo } \epsilon > 0.$$

Como temos que $\beta_\mu < 1$ *e* K, $\tilde{K}$ *são constantes positivas, segue que*

$$\tilde{\delta} := \beta_\mu + K\tilde{K}(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma}a_1(s))a_1(s)^q)^{1/q} < 1.$$

Tomemos o operador $B : X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}] \to X_{\infty,\, a_1}$ *definido por:*

$$B\mu(n) := \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0 f_1(s,\, \mu(s)).$$

Mostremos que B *está bem definido:*

$$\begin{aligned}
\|B\mu(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} &= \|\sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0 f_1(s,\, \mu(s))\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\leq \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, \|E^0 f_1(s,\, \mu(s))\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\leq \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, K\, |f_1(s,\, \mu(s))|\, a_1(n)^{-1} \\
&= K \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|.|f_1(s,\, \mu(s)) - f_1(s,\, 0)|a_1(n)^{-1} \\
&\leq K \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\| a_2(s)^{1/p} F_1(s,\, a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q} \|\mu(s)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1} \\
&\leq K\tilde{\gamma} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma}a_1(s)^q)\right)^{1/q} a_1(n)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K\tilde{\gamma}\tilde{K}a_1(n)\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\,\tilde{\gamma}a_1(s)^q)\right)^{1/q}a_1(n)^{-1}\\
&\leq \tilde{\gamma}K\tilde{K}\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\,\tilde{\gamma}a_1(s))a_1(s)^q\right)^{1/q}\\
&\leq \tilde{\gamma}(\tilde{\delta}-\beta_\mu).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, devemos provar que o a_1-limite de $B\mu$ existe, com $\mu \in X_{\infty,\,a_1}[\tilde{\gamma}]$. Seja $\epsilon > 0$ e n_1 suficientemente grande, então para $n \geq n_1$, temos:

$$
\begin{aligned}
\|B\mu(n)\|_{\mathcal{B}}a_1(n)^{-1} &\leq \overbrace{K\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|\Gamma(n,\,s)\|a_2(s)^{1/p}F_1(s,\,a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q}a_1(s)\tilde{\gamma}a_1(n)^{-1}}^{(A)}\\
&+ \overbrace{K\sum_{s=n_1}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)\|a_2(s)^{1/p}F_1(s,\,a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q}\,a_1(s)\tilde{\gamma}a_1(n)^{-1}}^{(B)}.
\end{aligned}
$$

A seguir calculemos estimativas para (A) e (B):

$$
\begin{aligned}
(A) &= K\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|a_2(s)^{1/p}F_1(s,\,a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q}\,a_1(s)\tilde{\gamma}a_1(n)^{-1}\\
&= K\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|T(n,\,n_1)T(n_1,\,s+1)P(s+1)\|a_2(s)^{1/p}F_1(s,\,a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q}\,a_1(s)\tilde{\gamma}a_1(n)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\|T(n,\,n_1)T(n_1,\,s+1)P(s+1)\| &= \|T(n,\,n_1)T(n_1,\,s+1)P(s+1)^2\|\\
&= \|T(n,\,n_1)P(n_1)T(n_1,\,s+1)P(s+1)\|\\
&= \|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\,\|\Gamma(n_1,\,s)\|,
\end{aligned}
$$

então:

$$
\begin{aligned}
(A) \;\; &\leq \;\; K\|T(n,\, n_1)P(n_1)\| \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n_1,\, s)\| a_2(s)^{1/p} F_1(s,\, a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q} a_1(s)\tilde{\gamma} a_1(n)^{-1} \\
&\leq \;\; K\|T(n,\, n_1)P(n_1)\| \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n_1,\, s)\|^p\, a_2(s)\right)^{1/p} \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_1(s,\, a_1(s)\tilde{\gamma})\right)^{1/q} \\
&\qquad .a_1(s)\tilde{\gamma} a_1(n)^{-1} \\
&\leq \;\; K\|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\tilde{K} a_1(n_1) \sum_{s=n_0}^{n_1-1} F_1(s,\, a_1(s)\tilde{\gamma})^{1/q} a_1(s)\tilde{\gamma} a_1(n)^{-1} \\
&= \;\; \|T(n,\, n_1)P(n_1)\|\, (\tilde{\delta} - \beta_\mu)\tilde{\gamma} a_1(n_1) a_1(n)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Como temos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_1(n)^{-1}T(n,\, n_1)P(n_1) = 0$, *então*

$$(A) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Com um argumento similar temos que

$$(B) \leq \tilde{\gamma} K \tilde{K} \left(\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma}(a_1(s))) a_1(s)^q\right)^{1/q} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então:

$$\|B\mu(n)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1} < \epsilon.$$

Logo, $Z_\infty^{a_1}(B\mu) = 0$. *Mostremos agora que o operador* B *é uma* $(\tilde{\delta} - \beta_\mu)$*-contração:*

$$
\begin{aligned}
\|B\mu(n) - B\xi(n)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1} \;\; &\leq \;\; K\|\mu - \xi\|_{a_1} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \\
&\qquad \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&\leq \;\; \|\mu - \xi\|_{a_1} K\tilde{K} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \;\; (\tilde{\delta} - \beta_\mu)\|\mu - \xi\|_{a_1}.
\end{aligned}
$$

Como temos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_1(n)^{-1}T(n,\, n_0)P(n_0) = 0$, *definamos*

$$\tilde{M} := \sup_{n\geq n_0} a_1(n)^{-1}\|T(n,\, n_0)P(n_0)\|,$$

e seja $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (\tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}$, *(é possível tomar tal* φ, *pois temos* $\beta_\mu = \sup_{\gamma\in(0,\,\mu]} \dfrac{\delta(\gamma)}{\gamma} \Rightarrow$
$\beta_\mu \geq \gamma\dfrac{\delta(\gamma)}{\gamma}$, *para todo* $\gamma \in (0,\,\mu] \Rightarrow \beta_\mu\tilde{\gamma} - \delta(\tilde{\gamma}) \geq 0$*). Introduzimos o operador*
$T : X_{\infty,\,a_1}[\tilde{\gamma}] \to X_{\infty,\,a_1}[\tilde{\gamma}]$, *definido por*

$$T\xi(n) := Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\,s)E^0 f_2(s,\,\xi),$$

onde $Z_\varphi(n) := T(n,\,n_0)P(n_0)\varphi$. *Temos que*

$$\begin{aligned} \|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1} &\leq \overbrace{\|T(n,\,n_0)P(n_0)\varphi\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}}^{(C)} \\ &+ \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\,s)\|.\overbrace{\|E^0 f_2(s,\,\xi)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1}}^{(D)}. \end{aligned}$$

Façamos as estimativas de (C) *e* (D) *separadamente:*

$$\begin{aligned} (C) &\leq \|T(n,\,n_0)P(n_0)\|.\|\varphi\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \\ &\leq \tilde{M}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \tilde{M}(\tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1} = (\tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma})), \\ (D) &\leq K\|E^0 f_2(s,\,\xi)\|_\infty \\ &= K \sup_{t\in\mathbb{Z}^-} \|E^0(t) f_2(s,\,\xi)\| \\ &\leq K|f_2(s,\,\xi)|. \end{aligned}$$

Logo:

$$\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \leq \tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}) + K\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\,s)\|\,|f_2(s,\,\xi)|\, a_1(n)^{-1}.$$

E pela hipótese $(d-3)^*$, *temos que*

$$\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \leq \tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}) + K\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\,s)\| a_2(s)^{1/p} l(s) F_2(s, \|\xi\|_{a_1}) a_1(n)^{-1}.$$

Como temos que $F_2(s,\,\tilde{\gamma}) \leq \sup\limits_{t\geq n_0} F_2(t,\,\tilde{\gamma}) = \|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|_\infty$, *então*

$$\begin{aligned}
\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} &\leq \tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}) + K\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\| \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\,s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \\
&\qquad \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&\leq \tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}) + K\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|\tilde{K} a_1(n) \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&= \tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}) + \delta(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}\beta_\mu < \tilde{\gamma}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}} a_1(n)^{-1} &\leq \overbrace{\|T(n,\,n_0)P(n_0)\varphi\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}}^{(E)} \\
&+ \overbrace{\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\,s)\|\, \|E^0 f_2(s,\,\xi)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}}^{(F)}.
\end{aligned}$$

Façamos as estimativas de (F) :

$$(F) = \overbrace{\sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|T(n,\,s)\|\, \|E^0 f_2(s,\,\xi)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}}^{(F_1)} + \overbrace{\sum_{s=n_1}^{\infty} \|T(n,\,s)\|\, \|E^0 f_2(s,\,\xi)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}}^{(F_2)}.$$

Calculemos inicialmente (F_1) :

$$\begin{aligned}
(F_1) &\leq \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|T(n,\,s+1)P(s+1)\|\, K\, |f_2(s,\,\xi)| a_1(n)^{-1} \\
&\leq K \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|T(n,\,n_1)T(n_1,\,s+1)P^2(s+1)\| a_2(s)^{1/p}\, l(s)\, F_2(s,\,\|\xi\|_{a_1})\, a_1(n)^{-1} \\
&\leq K \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\, \|T(n_1,\,s+1)P(s+1)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s)\, F_2(s,\,\tilde{\gamma})\, a_1(n)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K\,\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|\Gamma(n_1,\,s)\|.a_2(s)^{1/p}\,l(s)\,\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|\,a_1(n)^{-1}\\
&= K\,\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\,\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|\Gamma(n_1,\,s)\|a_2(s)^{1/p}\,l(s)\,a_1(n)^{-1}\\
&\leq K\,\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\,\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|\left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|\Gamma(n_1,\,s)\|^p a_2\right)^{1/p}\left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1}l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1}\\
&\leq K\,\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\,\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|.\tilde{K}\,a_1(n_1)\left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1}l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1}\\
&\leq \|T(n,\,n_1)P(n_1)\|a_1(n_1)\delta(\tilde{\gamma})a_1(n)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Então temos que

$$
\begin{aligned}
\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}a_1(n)^{-1} &\leq \|T(n,\,n_0)P(n_0)\|\,a_1(n)^{-1}(\tilde{\gamma}\beta_\mu-\delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}\\
&+ a_1(n_1)\,\delta(\tilde{\gamma})\,a_1(n)^{-1}\,\|T(n,\,n_1)P(n_1)\|\\
&+ K\tilde{K}\|F_2(\cdot,\,\tilde{\gamma})\|\left(\sum_{s=n_1}^{\infty}l(s)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Tomando n_1 suficientemente grande e $n \geq n_1$, temos que

$$\|T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}a_1(n)^{-1} < \epsilon,$$

ou seja, converge uniformemente em ξ. Notamos que se $\xi,\,\mu\,\in X_{\infty,a_1}[\tilde{\gamma}]$, então temos que

$$\|T\xi(n)+B\mu(n)\|_{\mathcal{B}}\,a_1(n)^{-1}\leq\tilde{\gamma}\,\tilde{\delta}\leq\tilde{\gamma},$$

ou seja, $T\xi+B\mu\in X_{\infty,a_1}[\tilde{\gamma}]$. Vamos mostrar agora que o operador T é contínuo.

Seja $\{\xi_m\}_m$ *uma sequência em* $X_{\infty,a_1}[\tilde{\gamma}]$ *tal que* $\xi_m \to \xi$, *onde* $\xi \in X_{\infty,a_1}[\tilde{\gamma}]$, *então*

$$\|T\xi_m(n) - T\xi(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}$$

$$\leq \|\sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s) E^0 \left(f_2(s,\, \xi_m) - f_2(s,\, \xi)\right) \|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}$$

$$\leq \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\| \, \|E^0 \left(f_2(s,\, \xi_m) - f_2(s,\, \xi)\right) \|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}$$

$$\leq K\, a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n,\, s)\| \, |f_2(s,\, \xi_m) - f_2(s,\, \xi)|$$

$$+K\, a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_1}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|.|f_2(s,\, \xi_m) - f_2(s,\, \xi)|$$

$$\leq K\, a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n,\, s)\|.|g(s,\, \xi_m) - g(s,\, \xi)|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s)$$

$$+K\, a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_1}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s)\, |F_2(s,\, \|\xi_m\|_{a_1}) - F_2(s,\, \|\xi\|_{a_1})|$$

$$\leq K\, a_1(n)^{-1} \max_{n_0 \leq t \leq n_1-1} |g(t,\, \xi_m) - g(t,\, \xi) \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} \|\Gamma(n,\, s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} .$$

$$. \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} l(s)^q\right)^{1/q}$$

$$+K\, a_1(n)^{-1} \left(\sum_{s=n_1}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} l(s)^q\right)^{1/q} 2\rho[F_2]$$

$$\leq K\, a_1(n)^{-1} \max_{n_0 \leq t \leq n_1-1} |g(t,\, \xi_m) - g(t,\, \xi)|\, \tilde{K}\, a_1(n)\, \|l\|_q$$

$$+K\, a_1(n)^{-1}\, \tilde{K}\, a_1(n) \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} l(s)^q\right)^{1/q} 2\rho[F_2]$$

$$= K\, \tilde{K}\, \|l\|_q \max_{n_0 \leq s \leq n_1-1} |g(s,\, \xi_m) - g(s,\, \xi)| + 2K\, \tilde{K} \rho[F_2] \left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1} l(s)^q\right)^{1/q} .$$

Provando assim a continuidade de T. Precisamos provar que a imagem de T é relativamente compacta em $X_{\infty,\, a_1}$.

$$H_n^{a_1}\left(T\, X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]\right) = \left\{T\xi(n)a_1(n)^{-1} \,:\, \xi \in X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]\right\} \text{ para } n \geq n_0.$$

Consideremos uma sequência arbitrária $\{\xi_m\}_m$ em $X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]$, temos $g(n,\, \cdot) = \nu(n)^{-1}f_2(n,\, \cdot)$ e $|f_2(n,\, \xi)| \leq \nu(n)F_2(n,\, \|\xi\|_{a_1})$, então

$$|g(n,\, \xi)| \leq F_2(n,\, \|\xi\|_{a_1}) \leq \rho[F_2].$$

Portanto $\{g(\cdot,\, \xi_m)\}_m$ é uma sequência limitada em ℓ^∞ e $\pi(\xi) = Z_\infty^{a_1}(g(\cdot,\, \xi_m))$ existe uniformemente em $\xi \in X_{\infty,\, a_1}[\lambda]$ e isso garante a equiconvergência.
Temos que $\{g(\cdot,\, \xi_m)\}_m$ é relativamente compacto, então existe uma subsequência uniformemente convergente para algum $\psi_1 \in \ell^\infty$. Se definirmos $\psi(n) := \nu(n)\psi_1(n)$, então temos que:

$$\begin{aligned}
&\|T\xi_{m_i}(n) - Z_\varphi(n) - \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\psi(s)\|_{\mathcal{B}}\; a_1(n)^{-1} \\
&\leq \|Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0 f_2(s,\, \xi_{m_i}) - Z_\varphi(n) - \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0\psi(s)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\leq a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, \|E^0(f_2(s,\, \xi_{m_i})) - \psi(s)\| \\
&\leq a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, K\, |\, f_2(s,\, \xi_{m_i}) - \psi(s)\, | \\
&= K\, a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, \nu(s)\, |\, g(s,\, \xi_{m_i}) - \psi_1(s)|\; = (*).
\end{aligned}$$

Temos que $|\, g(s,\, \xi_{m_i}) - \psi_1(s)\, | \leq \sup_t |\, g(t,\, \xi_{m_i}) - \psi_1(t)\, | = \|g(\cdot,\, \xi_{m_i}) - \psi_1\|_\infty$, logo:

$$\begin{aligned}
(*) \;\; &\leq \;\; K\, a_1(n)^{-1}\|g(\cdot,\, \xi_{m_i}) - \psi_1\|_\infty \sum_{s=n_0}^{\infty} \|\Gamma(n,\, s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s) \\
&\leq \;\; K\, a_1(n)^{-1}\|g(\cdot,\, \xi_{m_i}) - \psi_1\|_\infty \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|\, \Gamma(n,\, s)\, \|^p\, a_2(s)\right)^{1/p} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \;\; K\tilde{K}\|\, g(\cdot,\, \xi_{m_i}) - \psi_1\, \|_\infty\, \|l\|_q.
\end{aligned}$$

Assim, provamos que $T\xi_{m_i}(n)a_1(n)^{-1}$ *é convergente e de fato converge para*

$$Z_\varphi(n)a_1(n)^{-1} + a_1(n)^{-1}\sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma(n,\, s)E^0\psi(s).$$

Agora a equiconvergência em peso em ∞, *da imagem de* T *segue, pois* $T\xi$ *é* a_1*-convergente para zero uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]$. *Portanto pelo critério da compacidade, temos que a imagem de* T *é relativamente compacta em* X_{∞,a_1}. *Aplicando o teorema de Krasnoselky a* $T + B$, *obtemos que existe um ponto fixo em* $X_{\infty,\, a_1}$. ■

Observação 3.1. *Sob as condições do teorema anterior, temos que* $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$ *é uma aplicação contínua. De fato,*

$$\begin{aligned}
&\|Z_\varphi(n) - Z_{\varphi_0}(n)\|_{\mathcal{B}}\; a_1(n)^{-1}\\
&\le \|y_n(\varphi) - y_n(\varphi_0)\|_{\mathcal{B}}\; a_1(n)^{-1} + \|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}\left(\tilde{\delta} - \beta_\mu\right)\\
&+K\tilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_0\le s\le n_1-1} |g(s,\, y_\bullet(\varphi)) - g(s,\, y_\bullet(\varphi_0))|\\
&+2K\sum_{s=n_1}^{\infty}\|\Gamma(n,\, s)\|\; a_2(s)^{1/p} l(s) F_2(s,\, \tilde{\gamma}) a_1(n)^{-1}\\
&\le \left(1 + \tilde{\delta} - \beta_\mu\right)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}\\
&+K\tilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_0\le s\le n_1-1} |g(s,\, y_\bullet(\varphi)) - g(s,\, y_\bullet(\varphi_0))|\\
&+2K\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\, s)\|^p\, a_2(s)\right)^{1/p}\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|Z_\varphi - Z_{\varphi_0}\|_{a_1} &\le \left(1+\tilde{\delta}-\beta_\mu\right)\|y_\bullet(\varphi)-y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}\\ &+ K\tilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_0\le s\le n_1-1}|g(s,\,y_\bullet(\varphi))-g(s,\,y_\bullet(\varphi_0))|\\ &+ 2K\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Agora para obter a continuidade da aplicação $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$ *e a bicontinuidade da correspondência* $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$, *é necessário substituir a condição* $(D_2)^*$ *do Teorema* 3.1 *pela seguinte hipótese:*

$(D_4)^*$ *Existe uma constante positiva* $\tilde{\mu}$ *e uma função* $G : \mathbb{N}(n_0)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *não decrescente com respeito a segunda e terceira variáveis, com* $G(n,\,0,\,0) = 0$ *para* $n \ge n_0$, *tal que* $G(\cdot,\,\tilde{\mu},\,\tilde{\mu})l(\cdot) \in \ell^q$ *e*

$$|g(n,\,\xi)-g(n,\,\eta)| \le G\left(n,\,\|\xi\|_{a_1},\,\|\eta\|_{a_1}\right)\|\xi-\eta\|_{a_1},$$

para $\xi,\,\eta,\,\in X_{a_1}$.

Como no Teorema 3.1 *podemos escolher* $\tilde{\gamma}$ *suficientemente pequeno tal que*

$$\delta^{\#} := \beta_\mu + K\tilde{K}\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\,\tilde{\gamma}a_1(s))a_1(s)^q\right)^{1/q} + K\tilde{K}\|G(\cdot,\,\tilde{\gamma},\,\tilde{\gamma})l(\cdot)\|_q < 1.$$

Com isso temos as seguintes estimativas:

$$\|y_n(\varphi) - y_n(\varphi_0)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}$$

$$\leq \tilde{M}\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{B}}$$

$$+K\tilde{K}\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q\right)^{1/q}$$

$$+K\tilde{K}\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1} \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} l(s) G(s,\, \tilde{\gamma},\, \tilde{\gamma})^q\right)^{1/q}$$

$$\leq \tilde{M}\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{B}} + (\delta^{\#} - \beta_\mu)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}.$$

Ou seja,

$$\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + \delta^{\#} - \beta_\mu}\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{B}}.$$

Mas,

$$\|Z_\varphi(n) - Z_{\varphi_0}(n)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1}$$

$$\leq \|y_n(\varphi) - y_n(\varphi_0)\|_{\mathcal{B}}\, a_1(n)^{-1} + (\delta^{\#} - \beta_\mu)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}$$

$$\leq (1 + \delta^{\#} - \beta_\mu)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1}.$$

Temos que para qualquer $n \geq n_0$, a aplicação $\varphi \to g(n,\, y_\bullet(\varphi))$ é contínua, então $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$ também é uma aplicação contínua, como mostra a seguinte estimativa:

$$(1 + \delta^{\#} + \beta_\mu)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_0)\|_{a_1} \leq \tilde{M}\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathcal{B}}$$

$$+K\tilde{K}\|l\|_q \max_{n_0 \leq s \leq n_1 - 1} |\, g(s,\, y_\bullet(\varphi)) - g(s,\, y_\bullet(\varphi_0))\,|$$

$$+2K\tilde{K}\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}.$$

E essa última condição não garante a continuidade de $Z_\varphi \to y_\bullet(\varphi)$.

Teorema 3.2. *Suponhamos que as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas, exceto $(D_1)^*$ que é substituída por:*

$(D_5)^*$ *O sistema (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso $(a_1,\, a_2)$ com*

$$\lim_{m\to\infty} a_1(m)^{-1}T(m,\, n)P(n) = L(n),$$

para todo $n \geq n_0$.

Então existem constantes $\tilde{\gamma}$, $\tilde{M}$ positivas, tais que para cada $\varphi \in P(n_0)\mathcal{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (\tilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}$, existe uma solução $y = y(\varphi) = y(n,\, n_0, \psi)$, com $P(n_0)\psi = \varphi$, da equação (1.2) tal que a_1-limite de $y_\bullet$ existe e $\|y_\bullet\|_{a_1} \leq \tilde{\gamma}$. Além disso temos a seguinte fórmula assintótica:

$$y_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,\, s)E^0(f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))) + o(a_1(n)), \tag{3.2}$$

quando $n \to \infty$. O a_1-limite de $y_\bullet$ existe e $\|y_\bullet\|_{a_1} \leq \tilde{\gamma}$. quando $n \to \infty$. O a_1-limite de $y_\bullet$ é dado por:

$$Z_\infty^{a_1}(y_\bullet(\varphi)) = L(n_0)\varphi + Z_\infty^{a_1}\left(\sum_{s=n_0}^{\bullet-1} \Gamma(\bullet,\, s)E^0(f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_\bullet(\varphi)))\right).$$

Por outro lado, se $b^{\#} := \left(\sum_{s=n_0}^{\infty} \|L(s+1)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} < \infty$, então

$$Z_\infty^{a_1}(y_\bullet(\varphi)) = L(n_0)\varphi + \sum_{s=n_0}^{\infty} L(s+1)E^0(f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))).$$

Demonstração. *Consideremos $m \geq n_0$, $\xi \in X_{\infty, a_1}[\tilde{\gamma}]$, onde $\tilde{\gamma}$ é tomado suficientemente pequeno, e seja $A(m,\, \xi)$ definido por*

$$A(m,\, \xi) := \sum_{s=n_0}^{m-1} \Gamma(m,\, s)E^0 f_2(s,\, \xi).$$

Seja n_1 *suficientemente grande e* $M \geq n_1$. *Para cada* m, n *satisfazendo* $m \geq n \geq M$, *temos*

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}(a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - a_1(m)^{-1}\Gamma(m,\, s))E^0 f_2(s,\, \xi)\right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K \max_{n_0 \leq s \leq n_1-1} \|a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - L(s+1)\| \sum_{s=n_0}^{n_1-1} |f_2(s,\, \xi)| \\
&+ \max_{n_0 \leq s \leq n_1-1} \|a_1(m)^{-1}\Gamma(m,\, s) - L(s+1)\| \sum_{s=n_0}^{n_1-1} |f_2(s,\, \xi)| \\
&\leq c_1(n_1)\left(\max_{n_0 \leq s \leq n_1-1} \|a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - L(s+1)\|\right) \\
&+ \max_{n_0 \leq s \leq n_1-1} \|a_1(m)^{-1}\Gamma(m,\, s) - L(s+1)\|.
\end{aligned}$$

Onde $c_1(n_1)$ *é uma constante que depende de* n_1. *Por outro lado, temos:*

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{s=n_0}^{n_1-1}(a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - a_1(m)^{-1}\Gamma(m,\, s))E^0 f_2(s,\, \xi)\right\|_{\mathcal{B}} \\
&+ \left\|\sum_{s=n_1}^{m-1}(a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - a_1(m)^{-1}\Gamma(m,\, s))E^0 f_2(s,\, \xi)\right\|_{\mathcal{B}} \leq 3K\tilde{K}\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

E com isso concluímos que o a_1*-limite de* $A(\bullet,\, \xi)$ *existe uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]$.
A imagem de T *é equiconvergente em peso em* ∞, *pois de* $(D_5)^*$ *e do cálculo anterior obtemos que*

$$Z_{\infty}^{a_1}(T\xi) = L(n_0)\varphi + Z_{\infty}^{a_1}(A(\bullet,\, \xi)),$$

uniformemente em $\xi \in X_{\infty,\, a_1}[\tilde{\gamma}]$.
Denotemos por $A(s) := f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_{\bullet}(\varphi))$, *e consideremos* n_1 *suficientemente*

grande. Para $n \geq n_1$, temos as seguintes estimativas:

$$\left\| a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,\, s) E^0 A(s) - \sum_{s=n_0}^{\infty} L(s+1) E^0 A(s) \right\|_{\mathcal{B}}$$

$$\leq K \max_{n_0 \leq s \leq n_1 - 1} \|a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - L(s+1)\| \sum_{s=n_0}^{n_1-1} (|f_1(s,\, y_s(\varphi))| + |f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))|)$$

$$+K \sum_{s=n_1}^{n-1} \|\Gamma(n,\, s)\| a_1(n)^{-1} (|f_1(s,\, y_s(\varphi))| + |f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))|)$$

$$+K \sum_{s=n_1}^{n-1} \|L(s+1)\| a_1(n)^{-1} (|f_1(s,\, y_s(\varphi))| + |f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))|)$$

$$+K \sum_{s=n}^{\infty} \|L(s+1)\| a_1(n)^{-1} (|f_1(s,\, y_s(\varphi))| + |f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))|)$$

$$\leq c_2(n_1) \max_{n_0 \leq s \leq n_1 - 1} \|a_1(n)^{-1}\Gamma(n,\, s) - L(s+1)\|$$

$$+d \left(\left(\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\, \tilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q \right) 1/q + \left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q \right)^{1/q} \right),$$

onde $c_2(n_1)$ é uma constante que depende de n_1 e d é uma constante independente de n (isto é garantido se $b^{\#} < \infty$). Portanto, foi provado que

$$\lim_{n \to \infty} a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,\, s) E^0 A(s) = \sum_{s=n_0}^{\infty} L(s+1) E^0 A(s),$$

o que concluí a demonstração.

■

Observação 3.2. *Sob as hipóteses do resultado anterior, pode-se mostrar que*

(i) *Existe uma constante $\alpha \in (0,\, 1)$, tal que $\|Z_{\infty}^{a_1}(y_\bullet)\|_{\mathcal{B}} \leq \alpha \tilde{\gamma}$. Com efeito, é suficiente escolher $\tilde{\delta}$ no Teorema 3.1, tal que $\alpha := 9\tilde{\delta}^{1/q} e^{\frac{3^q}{q}} < 1$. Assim, usando um argumento envolvendo a desigualdade discreta de Gronwall obtemos nossa afirmação.*

(ii) *O conjunto* Ω *de todas as soluções convergentes* $y_{\bullet}(\varphi)$ *da equação* (1.2) *com* $\varphi \in P(n_0)\mathcal{B}[R]$, *onde* $R := (\tilde{\gamma}\beta_{\mu} - \delta(\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}$, *é equiconvergente em peso em* ∞ *no* $X_{\infty,\, a_1}$.

Se além das hipóteses do Teorema 3.1, *supomos a seguinte condição:*
$(\mathbf{D_6})^*$ *Os limites* $Z^1_{\infty}(g(\bullet,\, \xi))$ *existem uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\, a_1}[\lambda]$, *onde*

$$g(n,\, \xi) := a_2(n)^{-1/p} a_1(n)^{-1} F_1(n,\, \tilde{\nu} a_1(n))^{-1/q} f_1(n,\, \xi),$$

então podemos provar que

(iii) *O conjunto de todas as* $y_{\bullet}(\varphi) - Z_{\varphi}(\bullet)$, *com* $\varphi \in P(n_0)\mathcal{B}[R]$, *é relativamente compacto em* $X_{\infty,\, a_1}$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Generalizações

Nesta seção estamos interessados com o seguinte sistema não homogêneo quase linear de equações em diferenças funcionais

$$x(n+1) = L(n,\, x_n) + f_1(n,\, Tx_n) + f_2(n,\, Sx_\bullet), \tag{4.1}$$

onde $T : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ e $S : X_k \to X_k$, são operadores sob condições convenientes.
A equação (4.1) é uma versão generalizada da equação (1.2). Vamos abordar diversos tipos de operadores T e S. Uma expectativa natural é que a maioria das propriedades e resultados discutidos anteriormente sejam válidos para uma grande classe de operadores. Para discutirmos estes aspectos em mais detalhes, introduziremos as seguintes notações, para $\xi \in X_{\infty,\, k_j}$:

$$B^j\xi(n) := \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0 f_1(s,\, T\xi(s)), \tag{4.2}$$

$$T^j\xi(n) := Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{\infty} \Gamma(n,\, s)E^0 f_2(s,\, S\xi), \tag{4.3}$$

$$\tau_j := \gamma_s\beta_{\mu_j} + KMC\gamma_T \sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \gamma_T\gamma_j k_j(s))k_1(s+1)^{-1}, \tag{4.4}$$

$$\sigma_j := min\left\{\frac{\lambda_j}{\gamma_S}, \frac{\mu_j}{\gamma_S}, \frac{\mu_{1j}}{\gamma_T}\right\}, \tag{4.5}$$

onde as constantes que aparecem aqui são obtidas como antes ou dadas a continuação. A seguir vamos introduzir as seguintes hipóteses sobre os operadores T e S:

(E) As seguintes condições são verdadeiras:

$(e-1)$ O operador $T : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ é γ_T-Lipschitz e $T0 = 0$.

$(e-2)$ O operador $S : X_{k_j} \to X_{k_j}$ é γ_S-Lipschitz e $S0 = 0$.

Teorema 4.1. *Assumamos a condição* (E) *e todas as hipóteses do Teorema* 2.1, *exceto* $(d-4)$, *a qual é substituída por:*

$(d-4)^{**}$ *Existem constantes positivas* μ_j, *para* $j = 1, 2$ *tais que* $\beta_{\mu_j} < min\{1, 1/\gamma_S\}$, *onde* β_{μ_j} *é a constante definida em* $(d-4)$.

Então, existem constantes positivas γ_j, $\tilde{M}_j$, $j = 1, 2$ *tal que para cada* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}$, *com* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\gamma_S\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_S\gamma_j))\tilde{M}_j^{-1}$, *existe uma solução* $y^j = y^j(\varphi) = y^j(n, n_0, \psi)$, $j = 1, 2$ *com* $P(n_0)\psi = \varphi$ *da equação* (4.4), *tal que* $\lim_{n\to\infty} k_j(n)^1 y_n^j = 0$ *e* y_n^j *é assintoticamente dado por*

$$y_n^j(\varphi) = o(k_j(n)), \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração. *Sejam* B^j *e* T^j *os operadores definidos por* (4.2) *e* (4.3), *respectivamente. Podemos escolher* $\gamma_j \in (0, \sigma_j)$ *tal que* $\tau_j < 1$. *Tais operadores estão bem definidos, e isso segue das seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}
\|B^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} &\leq \sum_{n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\|\, \|E^0(f_1(s, T\xi(s)))\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq K\sum_{n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\| k_1(s)^{-1} F_1(s, \gamma_T\,\gamma_j\, k_j(s))\, \|T\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq K\sum_{n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\| k_1(s)^{-1} F_1(s, \gamma_T\,\gamma_j\, k_j(s))\, \gamma_T \|\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq K\sum_{n_0}^{\infty} \|\Gamma(n, s)\| k_1(s)^{-1} F_1(s, \gamma_T\,\gamma_j\, k_j(s))\, \gamma_T\,\gamma_j\, k_j(n)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|B^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} &= K\sum_{s=n_0}^{n_1-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|F_1(s,\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(s))\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(n)^{-1}\\ &+ K\sum_{s=n_1}^{n-1}\|T(n,\,s+1)P(s+1)\|F_1(s,\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(s))\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(n)^{-1}\\ &+ K\sum_{s=n}^{\infty}\|T(s,\,s+1)Q(s+1)\|F_1(s,\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(s))\,\gamma_T\,\gamma_j\,k_j(n)^{-1}.\end{aligned}$$

Analisando cada parcela, como feito na demonstração do Teorema 2.1, *concluímos que*

$$\|B^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} \le KMC\gamma_T\sum_{s=n_0}^{\infty}F_1(s,\,\gamma_T\gamma_jk_j(s))k_1(s+1)^{-1}.$$

Da equação (4.9) *temos que o operador* B^j *é uma* $(\tau_j-\gamma_S\beta_{\mu_j})$*-contração. Por outro lado*

$$\begin{aligned}&\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}\\ &= \|Z_\varphi(n)+\sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma(n,\,s)E^0f_2(s,\,S\xi)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}\\ &\le \|Z_\varphi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}\\ &+k\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)\|\,\|f_2(s,\,S\xi)\|\,k_j(n)^{-1},\end{aligned}$$

da demonstração do teorema 2.1, *temos que*

$$\|Z_\varphi(n)\|_{\mathfrak{B}} \le Mk_1(n)k_1(n_0)^{-1}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}.$$

Analisemos separadamente cada caso:

$$\begin{aligned}j=1 &: \;Mk_1(n)\,k_1(n_0)^{-1}\,k_1(n)^{-1}=Mk_1(n_0)^{-1}.\\ j=2 &: \;Mk_1(n)\,k_1(n_0)^{-1}\,k_2(n)^{-1}\\ &\le M\,Ck_2(n)^{-1}\,k_2(n)\,k_2(n_0)^{-1}\\ &= MCk_2(n_0)^{-1}.\end{aligned}$$

Denotemos por $\tilde{M}_j = \min\{Mk_1(n_0)^{-1},\, MCk_2(n_0)^{-1}\}$. *Logo temos que*

$$
\begin{aligned}
& K\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)\|\,\|f_2(s,\,S\xi)\|\,k_j(n)^{-1}\\
& \leq K\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)\|\,F_{2j}(s,\,\|S\xi\|_{k_j})\,k_j(n)^{-1}\\
& \leq K\sum_{s=n_0}^{\infty}\|\Gamma(n,\,s)\|\,F_{2j}(s,\,\gamma_S\,\|\xi\|_{k_j})\,k_j(n)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 2.1 *concluímos que:*

$$\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} \leq \tilde{M}_j\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} + \delta(\gamma_S\gamma_j) \leq \gamma_j.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} &\leq Ck_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}\,\|T(n,\,n_0)P(n_0)\|k_j(n)^{-1}\\
&+ KMCk_1(n_1)k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\left(\sum_{s=n_0}^{n_1-1}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1}\right)\\
&\qquad\qquad \|T(n,\,n_1)P(n_1)\|k_1(n)^{-1}\\
&+ KMC^2k_1(n_0)k_j(n_0)^{-1}\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1},
\end{aligned}
$$

mostrando assim que $Z_{\infty}^{k_j}(T^j\xi) = 0$, *uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$. *Como no Teorema* 2.1, *para* $\xi,\,\eta \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$, *temos que* $T^j\xi + B^j\eta \in X_{\infty,\,k_j}[\gamma_j]$.
A continuidade do operador T^j *segue da seguinte estimativa:*

$$
\begin{aligned}
\|T^j\xi_m(n) - T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1} &\leq L_j\delta(\mu_j)\max_{n_0\leq s\leq n_1-1}|g_j(s,\,S\xi_m) - g_j(s,\,S\xi)|\\
&+ 2\Gamma_1 L_j\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\,\mu_j)k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Para mostrar que a imagem de T^j *é relativamente compacta, usa-se a mesma construção do Teorema* 2.1, *obtendo que* $\{g_j(\bullet,\,S\xi_{m_i})\}_{m_i}$ *converge uniformemente para algum* $\psi_j \in$

ℓ^∞. Então $T^j\xi_{m_i}(n)k_j(n)^{-1}$ converge para $\sum_{s=n_0}^{\infty}\Gamma(n,\,s)E^0\varphi_j(s)k_j(n)^{-1}$, onde $\varphi_j(s) := F_{2j}(s,\,\mu_j)\psi_j(s)$. Completando assim a prova do teorema.

■

Observação 4.1. *Com pequenas modificações no Teorema 4.1, podemos garantir que o mesmo resultado é válido para um operador $S : X_{k_j} \to X_{k_j}$, $j = 1,\,2$ tal que $\|S\eta\|_{k_j} \leq \gamma_S\|\eta\|_{k_j}$, para cada $\eta \in X_{k_j}$, substituindo a condição (D_2) do Teorema 2.1 por:*

$(A)^*$ *Para todo $n \geq n_0$ e $j = 1,\,2$, a função*

$$g_j(n,\,S(\cdot)) := F_{2j}(n,\,\mu_j)^{-1}f_2(n,\,S(\cdot))$$

é contínua.

Além disso, o Teorema 4.1 também é válido se considerarmos os operadores T e S satisfazendo:

$$\begin{aligned}\|T\varphi\|_{\mathfrak{B}} &\leq \gamma_T\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}, \text{ para } \varphi \in \mathfrak{B}\\ \|S\eta\|_{k_j} &\leq \gamma_S\|\eta\|_{k_j}, \text{ para } \eta \in X_{k_j}.\end{aligned}$$

Neste caso, além de substituir a condição (D_2) por $(A)^*$, temos que substituir a condição $(d-1)$ por:

$(B)^*$ *A função $f_1(n,\,T\varphi)$ é $k_1^{-1}F_1$-localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathfrak{B}$, onde F_1 é como em $(d-1)$ e $(d-2)$.*

O próximo teorema é análogo ao teorema anterior para dicotomias p-somáveis.

Teorema 4.2. *Assumamos que a condição $(e-1)$ vale e que o operador $S : X_{a_1} \to X_{a_1}$, é γ_S-Lipschitz, com $S0 = 0$. Assumamos todas as hipóteses do Teorema 3.1, exceto $(d-4)^*$ a qual é substituída por:*

$(d-5)^{**}$ *Existe uma constante positiva μ tal que $\beta_\mu < \min\{1,\,1/\gamma_S\}$, onde β_μ é a constante definida em $(d-4)^*$.*

Então existem constantes positivas $\tilde{\gamma}$, $\tilde{M}$ *tais que para cada* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}$, *com* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\gamma_S\,\tilde{\gamma}\,\beta_\mu - \delta(\gamma_S\,\tilde{\gamma}))\tilde{M}^{-1}$, *existe uma solução* $y = y(\varphi) = y(n,\, n_0,\, \psi)$, *com* $P(n_0)\psi = \varphi$, *da equação* (4.1), *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_1(n)^{-1}y(n) = 0$ *e* y_n *é assintoticamente dado por* (3.1).

Demonstração. *Para provar o teorema é suficiente escolher, usando* $(d-2)^*$, *a constante apropriada* $0 < \tilde{\gamma} < \min\left\{\frac{\lambda}{\gamma_S},\, \frac{\mu}{\gamma_S},\, \frac{\tilde{\nu}}{\gamma_T}\right\}$ *tal que*

$$\tilde{\gamma} := \gamma_S\beta_\mu + K\,\tilde{K}\,\gamma_T\left(\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\, \gamma_T\tilde{\gamma}a_1(s))a_1(s)^q\right)^{1/q} < 1.$$

Neste caso o operador B *é uma* $(\tilde{\delta} - \gamma_S\beta_\mu)$*-contração. O restante da demonstração é exatamente análoga à do Teorema* 3.1.

■

Observação 4.2. *O teorema anterior é verdadeiro para operadores* T *e* S *tais que* $\|T\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_T\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$, *para* $\varphi \in \mathfrak{B}$, *e* $\|S\eta\|_{a_1} \leq \gamma_S\|\eta\|_{a_1}$, *para* $\eta \in X_{a_1}$. *Porém é necessário substituir as condições* $(D_2)^*$ *e* $(d-1)^*$ *por condições convenientes de forma similar à obervação* 4.1, *mas não requer nenhuma idéia diferente das abordadas anteriormente.*

4.2 Sistemas em diferença do tipo Volterra

Anteriormente foram apresentados vários resultados acerca da convergência de soluções do sistema (1.2), assumindo diversas hipóteses, nesse capítulo, vamos apresentar aplicações desses resultados considerando como um modelo concreto desta classe de equações os sistemas em diferença do tipo Volterra com retardo infinito.

Sejam $A(n)$, $K(s)$, $B(n)$, $D(n,\, m)$ e $G(m)$ matrizes $r \times r$ definidas para $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^-$, e seja $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma sequência arbitrária crescente tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|G(-n)| + |K(n)|)\alpha(n) < +\infty. \tag{4.6}$$

Consideremos também o seguinte sistema em diferenças de Volterra com retardo infinito:

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} A(n)\,K(n-s)\,x(s), \tag{4.7}$$

para $n \geq n_0 \geq 0$, e seu sistema perturbado:

$$y(n+1) = \sum_{-\infty}^{n} \{A(n)K(n-s) + B(n)G(n-s)|y(0)| + \nu D(n,\, s)|y(s)|\}y(s). \tag{4.8}$$

As equações (4.2) e (4.3) são equações em diferença funcionais no espaço de fase $\mathfrak{B}_\alpha$, onde $\mathfrak{B}_\alpha$ é o espaço dado por:

$$\mathfrak{B}_\alpha = \{\varphi : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C}^r : \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\varphi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty\}, \tag{4.9}$$

com a norma:

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\varphi(-n)|}{\alpha(n)},\ \ \varphi \in \mathfrak{B}_\alpha. \tag{4.10}$$

De fato, os sistema (4.3) pode ser escrito como uma equação em diferença funcionais da forma (4.2). Com efeito, consideremos $\xi : \mathbb{N}(n_0) \to \mathfrak{B}_\alpha$ e $\varphi \in \mathfrak{B}_\alpha$. Associamos a notação usada nos capítulos anteriores da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
L(n,\, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} A(n)K(j)\varphi(-j), \\
f_1(n,\, \varphi) &= B(n)|\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{0} G(s)\varphi(s), \\
f_2(n,\, \xi) &= \sum_{\tau=-\infty}^{n_0-1} \nu D(n,\, \tau)|\xi(n_0)(\tau-n_0)|\xi(n_0)(\tau-n_0) \\
&+ \sum_{\tau=n_0}^{n} \nu D(n,\, \tau)|\xi(\tau)(0)|\xi(\tau)(0).
\end{aligned}$$

Para o que segue, introduzimos a seguinte notação, para $j = 1,\, 2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_j(\tau) &= \begin{cases} k_j\alpha(0), & \tau \geq n_0, \\ k_j(n_0)\alpha(n_0-\tau), & \tau < n_0, \end{cases} \\
l_j(n) &= \sum_{\tau=-\infty}^{n} |nD(n,\, \tau)|(\tilde{\alpha}_j(\tau))^2.
\end{aligned}$$

Teorema 4.3. *Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

(E_1) *O sistema (2.2) tem uma $(k_1,\, k_2)$-dicotomia compensada e tal que*

$$\lim_{m\to\infty} k_1(m)^{-1}T(m,\,n)P(n) = 0.$$

(E_2) $\Gamma_1|\nu|\rho_j < 1$, *onde Γ_1 e ν são as constantes de $(d-4)$ e (4.3), respectivamente, e*

$$\rho_j := \sum_{s=n_0}^{\infty} l_j(s)\, k_1(s+1)^{-1} < +\infty.$$

(E_3) $\displaystyle\sum_{s=n_0}^{\infty} \alpha(s)\, |sB(s)|\, k_2^2(s)\, k_1(s+1)^{-1} < +\infty.$

Então, existem constantes positivas $\gamma_j,\, a_j,\, \tilde{M}_j,\, j=1,\,2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$, onde $R_j = \Gamma_1|\nu|\rho_j(\gamma_j a_j - \gamma_j^2)\tilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi)$, $j = 1,\, 2$ da equação (4.3) tal que o k_j-limite de $y^j_\bullet$ é zero. Por outro lado, temos a relação assintótica $y^j_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + o(k_j(n))$, quando $n \to \infty$. A correspondência $y^j_\bullet(\varphi) \longleftrightarrow Z_\varphi$ é bicontínua e a aplicação $\varphi \to y^j_\bullet(\varphi)$ é contínua. Além disso o conjunto Ω, de todas as soluções convergentes $y^j_\bullet(\varphi)$ da equação (4.3) com $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$ é equiconvergente em peso em ∞ no $X_{\infty,\, k_j}$ e o conjunto $\tilde{\Omega}$, é relativamente compacto em $X_{\infty,\, K_J}$, onde $\tilde{\Omega}$ é o conjunto formado por $y^j_\bullet(\varphi) - Z_\varphi(\bullet)$, com $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$.

Demonstração. *Consideremos* $\rho := \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} |G(-s)|\alpha(s)$. *Temos*

$$|f_1(n,\,\varphi) - f_1(n,\,\psi)| \le |B(n)| \sum_{s=-\infty}^{0} |G(s)|\, |\varphi(s)|\varphi(-n)| - \psi(s)|\psi(-n)||$$

Observemos que

$$|\varphi(s)|\varphi(-n)| - \psi(s)|\varphi(-n)| + \psi(s)|\varphi(-n)| - \psi(s)|\psi(-n)||$$

$$\le |\varphi(s) - \psi(s)|\, |\varphi(-n)| + |\psi(s)|\, ||\varphi(-n)| - |\psi(-n)||$$

$$\le |\varphi(s) - \psi(s)|\, |\varphi(-n)| + |\psi(s)|\, |\varphi(-n) - \psi(-n)|$$

$$\le \|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \alpha(-s)\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \alpha(n) + \|\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \alpha(-s)\|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \alpha(n)$$

$$= (\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} + \|\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha})\, \|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \alpha(-s)\alpha(n).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&|f_1(n,\,\varphi) - f_1(n,\,\psi)| \\
&\le |B(n)|\alpha(n)\,(\|\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} + \|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha})\,\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\sum_{s=-\infty}^{0}|G(s)|\alpha(-s) \\
&= \rho\,|B(n)|\,\alpha(n)\,(\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} + \|\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha})\,\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Assim, se

$$F_1(n,\,R) = 2\,\rho\,R\,|nB(n)|\,\alpha(n)\,k_1(n),\;\; n \ge n_0,$$

temos que

$$|f_1(n,\,\varphi) - f_1(n,\,\psi)| \le k_1(n)^{-1}F_1(n,\,R)\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}.$$

Claramente F_1 é uma função contínua e decrescente com respeito à segunda variável e como temos que

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} F_1(s,\,\mu_{1j}k_j(s))k_1(s+1)^{-1} = \sum_{s=n_0}^{\infty} 2\rho\mu_{1j}k_j(s)\,|sB(s)|\,\alpha(s)k_1(s).$$

Segue que a condição (E_3) implica $(d-2)$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|f_2(n,\,\xi)| \;\; &\le \;\; \sum_{\tau=-\infty}^{n_0-1}|\nu|\,|D(n,\,\tau)|\,|\xi(n_0)(\tau-n_0)|^2 \\
&+ \;\; \sum_{\tau=n_0}^{n}|\nu|\,|D(n,\,\tau)|\,|\xi(\tau)(0)|^2,
\end{aligned}
$$

e como temos que

$$\|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \ge \frac{\xi(t)(s)}{\alpha(-s)},\;\; \textit{para } s \in \mathcal{Z}^+,$$

então

$$|\xi(t)(s)| \le \|\xi(t)\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\,\alpha(-t).$$

E com isso concluímos que

$$\begin{aligned} |f_2(n,\,\xi)| &\leq \sum_{-\infty}^{n_0-1} |\nu|\,|D(n,\,\tau)|\,\|\xi(n_0)\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha}\,k_j(n_0)^2\alpha(n_0-\tau)^2k_j(n_0)^{-2} \\ &+ \sum_{\tau=n_0}^{n} |\nu|\,|D(n,\,\tau)|\,\|\xi(\tau)\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha}k_j(\tau)^2\alpha(0)^2k_j(\tau)^{-2} \\ &\leq \frac{1}{n}|\nu|l_j(n)\,\|\xi\|^2_{k_j}. \end{aligned}$$

Fazendo $F_{2j}(n,\,t) = |\nu|l_j(n)\,t^2$, *temos que*

$$|f_2(n,\,\xi)| \leq F_{2j}\left(n,\,\|\xi\|_{k_j}\right).$$

Observemos que

$$\beta_{\mu_j} = \Gamma_1|\nu|\rho_j < 1.$$

Portanto a condição (D) *do Teorema 2.1 é satisfeita, e para* $\|\xi\|_{k_j} \leq \lambda_j$, *se satisfaz a condição* (D_3) *desse teorema e a condição* (D_2) *é consequência imediata da seguinte estimativa:*

$$|f_2(n,\,\xi) - f_2(n,\eta)| \leq \frac{1}{n}|\nu|\,l_j(n)\,\|\xi-\eta\|^2_{k_j}. \tag{4.11}$$

Com isso temos as hipóteses do Teorema 2.1. *Além disso, se definimos* $G_j(n,\,r,\,t) = \frac{1}{n}\mu_j^{-2}(r+t)$, *usando* (E_2) *obtemos a condição* (D_4) *da Observação* 2.1, *pois:*

$$|\tilde{g}_j(n,\,\xi)| \leq \frac{\lambda_j^2\rho^{-1}\mu_{1j}^{-1}}{n}.$$

E com isso concluímos a prova do teorema.

■

Para o que segue, consideremos a seguinte perturbação de (4.2) :

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{s=-\infty}^{n} \{A(n)K(n-s) + B(n)G(s-n)\,|y(0)|\}y(s) \\ &+ \sum_{s=-\infty}^{n} H(n,\,s,\,y(0)). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Teorema 4.4. *Assuma que as condições* (E_1) *e* (E_3) *do Teorema* 4.1 *valem. Suponhamos também que se satisfazem as seguintes condições:*

(E_4) $H : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{Z}^- \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r$ *é contínua com respeito à terceira variável.*

(E_5) *Existe uma função positiva* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, contínua, não-decrescente com*

$$\lim_{\gamma \to 0} \sup_{\gamma \in (0,\, \delta]} \frac{g(\gamma)}{\gamma} = 0,$$

e uma função $\beta : \mathbb{N}(n_0) \times \mathbb{Z}^- \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|H(n,\, \tau,\, z)| \leq a_n \beta(n,\, \tau) g(|z|),$$

para todo $n \geq n_0$*,* $\tau \in \mathbb{Z}$*, com* $a_n \geq 0$*,* $a_n \to 0$ *e*

$$\chi := \sum_{s=n_0}^{\infty} \left(\sum_{\tau=-\infty}^{s} \beta(n,\, \tau) \right) k_1(s+1)^{-1} < +\infty.$$

Então, existem constantes γ_j*,* δ*,* $\tilde{M}_j$ *positivas,* $j = 1,\, 2$ *tais que para cada* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$*, onde* $R_j := (\gamma_j \beta_\delta - \Gamma_1 \|a\|_\infty g(\gamma_j))\, \tilde{M}_j^{-1}$*, existe uma solução* $y^j_\bullet$*,* $j = 1,\, 2$ *da equação* (2.7) *tal que o* k_j*-limite de* $y^j_\bullet$ *é zero e o conjunto* Ω *de todas as soluções convergentes de* (4.7)*, é equiconvergente em peso e o conjunto* $\tilde{\Omega}$ *é relativamente compacto.*

Demonstração. *A equação* (4.7) *tem a forma* (1.2)*, definindo*

$$\begin{aligned}
L(n,\, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} A(n) K(j) \varphi(-j), \\
f_1(n,\, \varphi) &= B(n)\, |\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{n} G(s) \varphi(s), \\
f_2(n,\, \xi) &= \sum_{s=-\infty}^{n_0 - 1} H(n,\, s,\, \xi(n_0)(s - n_0)) + \sum_{s=n_0}^{n} H(n,\, s,\, \xi(s)(0)).
\end{aligned}$$

Daí concluímos que as hipóteses do Teorema 2.1 *são satisfeitas. Concluindo assim a demonstração do teorema.* ∎

Consideremos a seguinte notação:

$$B(n,\, s,\, y) \;=\; \begin{cases} B(0)|y(0)|G(0)y(0), & n = s = 0,\\ \frac{1}{s}B(0)|y(0)|G(s)y(s+1), & n = 0,\ s < 0,\\ \frac{1}{sn}B(n)|y(1)|G(s)y(n+s+1), & n > 0,\ s < 0,\\ \frac{1}{n}B(n)|y(1)|G(0)y(n), & n > 0,\ s = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{H}(n,\, s,\, y) \;=\; \begin{cases} H(n,\, s,\, y(0)), & s < 0,\\ H(n,\, s,\, y(s)), & s \geq 0. \end{cases}$$

Vamos agora mostrar uma aplicação dos resultados da seção 4.1.

Observação 4.3. *Se as hipóteses* (E_i), $i = 1, 3, 4, 5$ *são satisfeitas, usando o Teorema* 4.1 *e a observação* 4.1 *vemos que podemos obter o mesmo tipo de resultado (Teorema 4.2) para o seguinte sistema em diferença de Volterra não-autônomo com retardo infinito:*

$$y(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} \Big\{ A(n)K(n-s)y(s) + B(n,\, s-n,\, y) + \tilde{H}(n,\, s,\, y) \Big\}, \tag{4.13}$$

para $n \geq 0$. *Observamos que neste caso, para* $\varphi \in \mathfrak{B}_\alpha$ *e* $\xi \in X_{k_j}$, *o operador* T *de* (e_1) *(dado na seção* 4.1*) é definido por*

$$T\varphi(0) = \varphi(0),\ T\varphi(s) = \frac{1}{s}\varphi(s+1),\ \textit{se } s < 0,$$

e o operador S *é definido por*

$$[S\xi(n)](\tau) = \xi(n)(0),\ n \geq 0,\ \tau \in \mathbb{Z}^-.$$

Observemos que o operador T *é* 1*-Lipschitz e* $\|S\xi\|_{k_j} \leq \|\xi\|_{k_j}$. *Além disso, neste caso temos que:*

$$L(n,\, \varphi) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} A(n)K(j)\varphi(-j),$$

$$f_1(n,\, \varphi) \;=\; B(n)|\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{n} G(s-n)\varphi(s-n),$$

$$f_2(n,\, \xi) \;=\; \sum_{s=-\infty}^{-1} H(n,\, s,\, \xi(0)(s)) + \sum_{s=0}^{n} H(n,\, s,\, \xi(s)(0)).$$

E assim obtemos o que queríamos.

Vamos agora apresentar uma aplicação do Teorema 3.1 e das observações 3.1 e 3.2. Sejam $a_i(n)$, $i = 1, 2$ duas sequências positivas, e $a(n)$, $k(s)$, $b(n)$, $d(n, m)$ e $g(m)$ sequências de números complexos definidas para $n \geq n_0$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^-$, e seja $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma sequência positiva crescente arbitrária tal que:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(|g(-s)| + |k(s)|)\alpha(s) < +\infty.$$

Consideremos a seguinte equação em diferença de Volterra:

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} a(n)k(n-s)x(s), \; n \geq n_0 > 0, \tag{4.14}$$

e sua equação perturbada:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{s=-\infty}^{n} \left\{a(n)k(n-s) + a_2(n)^{1/p}b(n)g(s-n)y(0)\right\} y(s) \\ &+ \nu \sum_{s=-\infty}^{n} a_2(n)^{1/p}d(n, s)(y(s))^{\mu}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$n \geq n_0 \geq 0$, com $\mu \in \mathbb{Z}^+$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Introduzimos a seguinte notação:

$$\tilde{a}_1(\tau) := \begin{cases} a_1(n)\alpha(0), & \tau \geq n_0, \\ a_1(n_0)\alpha(n_0 - \tau), & \tau < n_0. \end{cases} \tag{4.16}$$

$$W(s) = \sum_{\tau=-\infty}^{s} |sd(s, \tau)|(\tilde{a}_1(\tau))^{\mu}. \tag{4.17}$$

Teorema 4.5. *Sejam p e q expoentes conjugados. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

(F_1) *A equação* (4.14) *satisfaz a condição* $(D_1)^*$ *do Teorema* 3.1.

(F_2) *Seja* $b : \mathbb{N}(n_0) \to \mathbb{C}$ *uma sequência complexa tal que* $\tilde{b} \in \ell^1_{a_1^2\alpha}(\mathbb{N}(n_0))$, *onde* $\tilde{b}(n) = nb(n)$.

(F_3) $W \in \ell^q(\mathbb{N}(n_0))$, *onde* W *é a função definida em* (4.17).

(F_4) *A constante* ν *da equação* (4.20) *é tal que* $K\tilde{K}\,\|W\|_q|\nu|^\mu < 1$.

Então, existem constantes positivas $\tilde{\gamma}$, $\tilde{M}$, *tais que para cada* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha$, *com* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \leq \nu_1(\tilde{\gamma}|\nu|^\mu - \tilde{\gamma}^\mu)\tilde{M}^{-1}$, *onde* $\nu_1 = K\tilde{K}\|W\|_q|\nu|^\mu$, *existe uma solução* $y = y(\varphi)$ *da equação* (4.15) *tal que o* a_1*-limite de* y *é zero. Além disso, temos a fórmula assintótica* (3.1) *e a correspondência* $y(\varphi) \to Z_\varphi$ *é bicontínua e a aplicação* $\varphi \to y(\varphi)$ *é contínua. O conjunto* Ω *de todas as soluções convergentes de* (4.15) *é equiconvergente em peso e o conjunto* $\tilde{\Omega}$ *é relativamente compacto em* X_{∞, a_1}.

Demonstração. *Neste caso temos :*

$$\begin{aligned}
L(n, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} a(n)k(j)\varphi(-j), \\
f_1(n, \varphi) &= b(n)\varphi(-n)a_2(n)^{1/p}\sum_{s=-\infty}^{0} g(s)\varphi(s), \\
f_2(n, \xi) &= \nu a_2(n)^{1/p}\sum_{s=-\infty}^{n_0-1} d(n, s)(\xi(n_0)(s-n))^\mu \\
&+ \nu a_2(n)^{1/p}\sum_{s=n_0}^{n} d(n, s)(\xi(s)(0))^\mu,
\end{aligned}$$

e com isso fica provado o teorema.

■

O próximo exemplo é uma aplicação do Teorema 4.5.

Exemplo 4.1. *Seja* $\alpha(n)$ *uma sequência positiva crescente em* $\mathbb{Z}$ *tal que* $\alpha(n)\alpha(m) = \alpha(n+m)$. *Sejam* $a_1(n)$ *e* $a_2(n)$ *duas sequências tais que*

$$\rho_i^* := \sup_{n\geq 0}\max_{-n\leq\theta\leq 0}\prod_{s=n+\theta}^{n-1}\left[\frac{|a_i(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)}\right] < +\infty,\ i = 1, 2. \tag{4.18}$$

Consideremos o seguinte sistema em diferença não autônomo

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{4.19}$$

onde $A(n) = diag(a_1(n),\, a_2(n))$.

Vamos analisar as propriedades da dicotomia. Lembrando que $T(n,\,\tau)$, $n \geq \tau$, *é um operador limitado no espaço de fase* $\mathfrak{B}_\alpha$ *definido por*

$$T(n,\,\tau)\varphi(\theta)$$

$$= \begin{cases} \left(\left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta+1} a_1(s)\right)\varphi^1(0),\, \left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s)\right)\varphi^2(0)\right), & -(n-\tau) \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(n-\tau+\theta), & \theta < -(n-\tau). \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} T(n,\,s)T(s,\,m) &= T(n,\,m),\; n \geq s \geq m, e \\ T(n,\,n) &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Como antes, necessitamos definir projeções apropriadas neste problema. Consideremos então, $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$ *e* $Q(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$, *definidas por:*

$$\begin{aligned} P(n)\varphi(\theta) &= \begin{cases} \left(\varphi^1(\theta),\, \varphi^2(\theta) - \left(\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -n \leq \theta \leq 0, \\ \left(\varphi^1(\theta),\, \varphi^2(\theta)\right), & \theta < -n, \end{cases} \\ Q(n)\varphi(\theta) &= \begin{cases} \left(0,\, \left(\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -n \leq \theta \leq 0, \\ \left(\varphi^1(\theta),\, \varphi^2(\theta)\right), & \theta < -n. \end{cases} \end{aligned}$$

Procedendo como no Exemplo 1.1, *temos que o operador* $T(n,\,\tau) : Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$ *é dado por:*

$$T(n,\,\tau)Q(\tau)\varphi(\theta) = \begin{cases} \left(0,\, \left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \\ \left(0,\, \left(\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -n \leq \theta \leq -(n-\tau), \\ \\ (0,\,0), & \theta < -n. \end{cases}$$

Com argumento semelhante ao referido exemplo vemos que para $n \geq \tau$:

$$\begin{aligned} T(n, , \tau)Q(\tau) &= Q(n)T(n, \tau), \\ T(n, \tau)P(\tau) &= P(n)T(n, \tau). \end{aligned}$$

Temos que $T(n, \tau)$, $n \geq \tau$, *é um isomorfismo de* $Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha$ *sobre* $Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$. *E sua aplicação inversa* $T(\tau, n)$ *é dada por:*

$$T(\tau, n)Q(n)\varphi(\theta) = \begin{cases} \left(0, \left(\displaystyle\prod_{s=\tau+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \\ (0, 0), & \theta < -\tau. \end{cases}$$

No que segue, vamos precisar das seguintes hipóteses: Sejam $\delta_i : \mathbb{Z}^+ \to (0, +\infty)$, $i = 1, 2$ *duas sequências se seja* σ *uma constante positiva tal que*

(i) $\displaystyle\prod_{s=\tau}^{t} |a_1(s)| \leq \sigma \prod_{s=\tau}^{t} \delta_1(s)$, *para* $0 \leq \tau \leq t$.

(ii) $\displaystyle\prod_{s=\tau}^{t} |a_2(s)|^{-1} \leq \sigma \prod_{s=\tau}^{t} \delta_2(s)$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{s=\tau}^{t} \frac{|a_1(s)|}{\delta_1(s)} = 0$, *para* $\tau \geq 0$.

(iv) *Existe uma constante* $C \geq 1$ *tal que* $\displaystyle\prod_{s=\tau}^{t}[\delta_1(s)\delta_2(s)] \leq C$, *para* $t \geq \tau \geq 0$.

Um exemplo concreto de funções a_1 *e* a_2 *satisfazendo as suposições anteriores, é considerando* $a_1(n) := 1$, $a_2(n) := 2$, *e assim* $\rho_1^* = \rho_2^* = 1$. *É fácil ver que as condições (i), (ii), (iii) e (iv) são satisfeitas com* $\delta_1(n) := 3/2$, $\delta_2(n) := 1/2$ *e* $\sigma = C = 1$; *Também poderiamos ter considerado* $\delta_1(n) := \delta_1$, $\delta_2(n) := \delta_2$, *com* $1 < \delta_1 \leq 2$, $1/2 \leq \delta_2 < 1$ *e* $1/2 < \delta_1\delta_2 \leq 1$. *Um outro exemplo é considerando* $a_1(n)$ *e* $a_2(n)$ *tal que* $1 \leq |a_1(n)| \leq \lambda|a_2(n)|$, *para todo* $n \geq 0$, *onde* $\lambda \in (0, 1)$. *Nesse caso, podemos escolher* $\delta_1(n) := |a_1(n)|$, $\delta_2(n) := |a_2(n)|^{-1}$ *e* $\sigma = C = 1$.

Para este exemplo assumimos que a_1 *e* a_2 *são funções satisfazendo* $(i)-(iv)$ *com* $\rho_j^* < +\infty,\ j=1,\,2$. *De* $(i),(ii)$ *e* (iv), *temos que:*

$$\prod_{s=\tau}^{t} |a_2(s)|^{-1} \leq C\sigma^{-1} \prod_{s=\tau}^{t} |a_1(s)|^{-1}. \tag{4.20}$$

Dessa estimativa, podemos concluir que:

$$\|T(n,\,\tau)P(\tau)\| \leq 6\,C\,\rho_1^*(\sigma^2+1)\left(\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right). \tag{4.21}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\|T(n,\,\tau)P(\tau)\| \\
&\leq \max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0} \prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} \frac{|a_1(s)|}{\alpha(-\theta)} + 3 \max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)} \prod_{s=n+\theta}^{\tau-1} \frac{|a_2(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&\leq \left[\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right] \max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0} \prod_{s=n+\theta}^{\tau-1} \frac{|a_1(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&+3\,C\,\sigma^2 \left[\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right] \max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)} \prod_{s=n+\theta}^{\tau-1} \frac{|a_1(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&\leq 6\,C\,\rho_1^*(\sigma^2+1) \prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|.
\end{aligned}$$

Também podemos verificar que

$$\|T(n,\,\tau)Q(\tau)\| \leq \rho_2^* \prod_{s=\tau}^{n-1} |a_2(s)|^{-1}. \tag{4.22}$$

Das estimativas (4.21) *e* (4.22) *vemos que o sistema* (4.19) *admite uma* $(k_1,\,k_2)$*-dicotomia compensada e satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} k_1(n)^{-1}T(n,\,m)P(m) = 0,$$

onde $k_1(n) := \displaystyle\prod_{s=0}^{n-1} \delta_1(s),\ k_2(n) := \prod_{s=0}^{n-1} \delta_2(s)^{-1}$ *e* $M := 6\,C\,(\rho_1^*+\rho_2^*)(\sigma^2+1)\sigma$.
Para o que segue consideremos a seguinte perturbação do sistema (4.19) :

$$y(n+1) = A(n)y(n) + D(n)R(n)\,|y(0)|\,y(n) + \nu \sum_{s=-\infty}^{n} D(n)R(s)\,|y(s)|\,y(0), \tag{4.23}$$

onde $D(n)$ *e* $R(n)$ *são duas matrizes* 2×2 *tais que*

$$\begin{aligned}
\chi_1 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |R(\tau)|\, \alpha(-\tau)^2 < +\infty, \\
\chi_2 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |R(\tau)|\, k_2(\tau)^2 < +\infty, \\
\chi_3 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |\tau D(\tau)|\, \alpha(-\tau)^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

e ν *é um número real suficientemente pequeno.*
Se ν *satifaz*

$$6\,\alpha(1)\, C^5(\rho_1^* + \rho_2^*)(\sigma^2+1)(\chi_1+\chi_2)\chi_3\,|\nu| < 1$$

então as condições do Teorema 4.1 *são satisfeitas considerando o sistema* (4.19) *e* (4.23). *O próximo teorema é um exemplo pra ilustrar a utilidade do Teorema* 2.1. *Seja* a *um número positivo. Seja* $(\beta_n)_n$ *uma sequência tal que* $\beta_n \geq 1$ *e* $\beta_n \to 1$. *Temos que* $\|\beta\|_\infty \geq 1$, *onde* $\|\cdot\|_\infty$ *é a norma do supremo para a sequência* $(\beta_n)_n$ *em* $\mathbb{Z}^+$. *Assumamos que* $\frac{a^n}{\beta_n}$ *é decrescente e seja* $\alpha(n)$ *uma sequência positiva crescente em* $\mathbb{Z}^+$ *tal que* $\alpha(n)\,\alpha(m) = \alpha(m+n)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\leq -n} \frac{a^j}{\alpha(-j)} = 0.$$

Um exemplo concreto satisfazendo tais condições é o seguinte: Tomemos $a \in (0,\, 1/\|\beta\|_\infty)$ *e* $\alpha(n) = a^{-2n}$.

Exemplo 4.2. *Consideremos a seguinte equação em diferença linear homogênea:*

$$x(n+1) = a\, x(n), \;\; n \geq n_0 \geq 0. \tag{4.24}$$

O operador solução $T(n,\, m)$, $n \geq m$ *no espaço* $\mathfrak{B}$ *é definido por:*

$$T(n,\, m)\varphi(\theta) = \begin{cases} a^{\theta+n-m}\varphi(0), & m-n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(n+\theta-m), & \theta < m-n. \end{cases}$$

Como antes temos que

$$T(n,\, s)T(s,\, \tau) = T(n,\, \tau),\, n \geq s \geq \tau \text{ e } T(n,\, n) = \mathbb{I},\, n \geq 0.$$

E tomando $P(n) = \mathbb{I}$*, temos que a equação* (4.24) *tem uma* $(a^n/\beta_n,\, 1)$*-dicotomia, e as constantes* M *e* C *da Definição* 1.2 *são dadas por:*

$$M = \|a^{\bullet}\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \|\beta\|_\infty \text{ e } C = 1.$$

Denotemos por $L(m)\varphi(\theta) = a^{\theta - m}\varphi(0)$*. E com isso temos que*

$$\lim_{n\to\infty} k_1(n)^{-1}\, T(n,\, m) = L(m).$$

De fato isso é consequência da seguinte estimativa:

$$\|k_1(n)^{-1}T(n,\, m) - L(m)\| \leq \alpha(m)\left(|\beta_n - 1|\, \|a^{\bullet}\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha} + 2\|\beta\|_\infty \sup_{j\leq -n} \frac{a^j}{\alpha(-j)}\right).$$

Consideremos agora a seguinte perturbação de (4.24)*:*

$$y(n+1) = a\, y(n) + b(n)y(0)y(n) + \nu c(n)\, |y(n)|\, y(n), \tag{4.25}$$

para $n \geq n_0 \geq 0$*, onde* $b(n)$ *e* $c(n)$ *são sequências de números complexos definidas para* $n \geq n_0$*, tais que:*

$$\begin{aligned} \rho_b &:= \sum_{s=n_0}^{\infty} |s\, b(s)|\alpha(2s) < +\infty, \\ \rho_c &:= \sum_{s=n_0}^{\infty} |s,\, c(s)|\alpha(2s) < +\infty. \end{aligned}$$

A condição $\rho_b < +\infty$ *implica que* $(d-2)$ *da suposição* (D) *vale. Seja* ν *um número real tal que*

$$\left(|\nu|\, \|a^{\bullet}\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha}\, \|\beta\|^2_\infty \rho_c\right)/a < 1.$$

E com essa condição temos garantido $(d-4)$*. Por outro lado, para a equação* (1.11)*, podemos conseguir uma estimativa com em* 4.21*, e assim a condição* (D_2) *é satisfeita. Portanto pelo Teorema* 3.2*, existe uma constante positiva* R *suficientemente pequena tal que para cada* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R]$*, existe uma solução* $y = y(\varphi)$ *da equação* (1.11) *tal que o* k_1*-limite de* $y_\bullet(\varphi)$ *existe e satisfaz a seguinte fórmula assintótica:*

$$y_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_0}^{n-1} \Gamma(n,\, s)E^0(f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_\bullet(\varphi))) + o(k_1).$$

Notamos que $b_1 \leq \|a^{\bullet}\|_{\mathfrak{B}_\alpha}$*, onde* b_1 *é definida como no Teorema* 3.2. *Assim,o* k_1*-limite de* $y_{\bullet}$ *é dado por:*

$$Z_{\infty}^{k_1}(y_{\bullet}(\varphi)) = a^{\bullet - n_0}\varphi(0) + \sum_{s=n_0}^{\infty} a^{\bullet - s}(f_1(s,\, y_s(\varphi)) + f_2(s,\, y_{\bullet}(\varphi))).$$

Por outro lado, o conjunto Ω *de todas as soluções convergentes* $y_{\bullet}(\varphi)$ *da equação* (1.11) *com* $\varphi \in P(n_0)\mathfrak{B}_\alpha[R]$*, é equiconvergente em* ∞ *em* $X_{\infty,\, k_1}$*. Além disso, temos que a condição* (D_4) *e a condição* (D_6) *são satisfeitas. Portanto a correspondência* $y(\varphi) \longleftrightarrow Z_{\varphi}$ *é bicontínua, a aplicação* $\varphi \to y_{\bullet}(\varphi)$ *é contínua e o conjunto* $\tilde{\Omega}$ *é relativamente compacto em* $X_{\infty,\, k_1}$.

Referências Bibliográficas

[1] R.P.Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] C.Cuevas, *Weighted Convergent and Bounded Solutions of Volterra Difference Systems with Infinite Delay*, J. Diff. Eqs. Appl., **6**(2000), 461-480.

[3] C.Cuevas and M.Pinto, *Asymptotic Properties of Solutions to Nonautonomous Volterra Difference Systems with Infinite Delay*, Comput. Math. Appl., **42**(2001), 671-685.

[4] C.Cuevas and M.Pinto, *Convergent Solutions of Linear Functional Difference Equations in Phase Space*, J. Math. Anal. Appl., **277**(2003), 324-341.

[5] L. Del Campo, *Uma Teoria Assintótica para Equações em Diferenças Funcionais com Retardo Infinito*, Tese de doutorado. UFPE (2003).

[6] S.Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*(falta editora e ano)

[7] G.B.Folland, *Real Analysis; Modern thecniquer and their applications,* Wiley Interscience, 1999.

[8] J.Hale and J.Kato, *Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay*, Funkialaj Ekvacioj, **21**(1978), 11-41.

[9] Y.Hino, S.Murakami and T.Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lectures and Notes in Mathematics 1473, Springer-Verlag, 1991.

[10] C.S.Höning, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[11] S.Murakami, *Representation of Solutions of Linear Functional Difference Equations in Phase Space*, Nonlinear Anal., **30**(1997), 1153-1164.

[12] M.Pinto, *Weighted Convergent and Bounded Solutions of Difference System*, Adv. in Diff. Eqs. II, Comput. Math. Appl., **36**(1998), 391-400.

[13] M.Pinto, *Discrete Dichotomies*, Comp. Math. Anal., **28**(1994), 259-270.