



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Alejandro Caicedo Roque

Comportamento assintótico de equações funcionais com retardo infinito.

Recife
2011

Alejandro Caicedo Roque

Comportamento assintótico de equações funcionais com retardo infinito.

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como um dos requisitos para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática.***

Orientador: Prof. Dr. Claudio Cuevas
Co-orientador: Prof. Dr. Hernán R. Henríquez

Recife
2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Roque, Alejandro Caicedo

**Comportamento assintótico de equações funcionais
com retardo infinito / Alejandro Caicedo Roque – Recife: O
Autor, 2011.**

119 folhas: il.

Orientador: Claudio Cuevas.

**Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2011.**

Inclui bibliografia.

**1. Análise funcional. 2. Equações de evolução. 3. Teoria de
controle. I. Cuevas, Claudio (orientador). II. Título.**

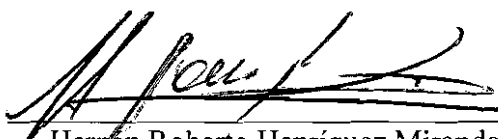
515.7

CDD (22. ed.)

MEI2011 - 099

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

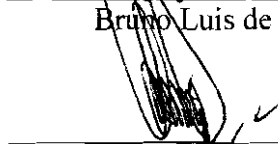


Hernan Roberto Henríquez Miranda, *UFPE*

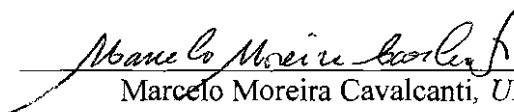
Co-Orientador



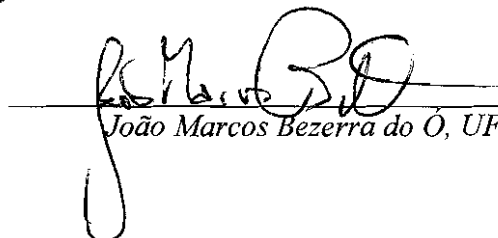
Bruno Luis de Andrade Santos, *USP*



Eduardo Alex Hernández Morales, *USP*



Marcelo Moreira Cavalcanti, *UEM*



João Marcos Bezerra do Ó, *UFPB*

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES FUNCIONAIS
COM RETARDO INFINITO

Por

Alejandro Caicedo Roque

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Julho – 2011

Resumo

Nesta tese estudamos o comportamento assintótico de equações funcionais com retardo, especificamente a existência de soluções brandas quase automórficas e quase periódicas para a equação diferencial parcial com retardo finito. Existência de soluções brandas assintoticamente quase automórficas para uma equação diferencial funcional semi-linear e uma equação integro-diferencial com retardo infinito também é tratada. E estudamos a existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas e assintoticamente quase automórficas para uma classe de equações integro-diferenciais abstratas, estabelecemos alguns resultados gerais sobre a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para tais equações e damos aplicações de nossos resultados abstratos.

Além disso, estabelecemos condições para a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas de uma equação integral específica que aparece no estudo de condução do calor em materiais com memória e apresentamos resultados similares para equações parciais integro-diferenciais abstratas com retardo infinito; discutimos também a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódica e assintoticamente quase automórficas para a equação integro-diferencial abstrata neutra. Finalmente, como aplicação das idéias anteriores, o capítulo final é concernente com o problema de estabilização para sistemas de controle hereditário.

Palavras-chave: Quase Periódicas, quase automórficas, espaço de fase com memória amortecida, S -assintoticamente ω -periódica, assintoticamente quase automórfica compacta, equação diferencial semi-linear com retardo, equação integro-diferencial funcional abstrata, equação integro-diferencial neutra, estabilização. controlabilidade, sistemas de control.

Abstract

In this thesis we study the asymptotic behavior of functional equations with delay, specifically the existence of almost automorphic and almost periodic mild solutions for the partial differential equation with finite delay. Existence of asymptotically almost automorphic mild solutions to semilinear functional differential and an integro-differential equations with infinite delay is also treated. And we study the existence of solutions S -asymptotically ω -periodic and asymptotically almost automorphic to a class of abstract integro-differential equations, we establish general results about the existence of mild solutions S -asymptotically ω -periodic for such equations and give applications of our abstract results.

Moreover, we establish conditions for the existence of mild solutions S -asymptotically ω -periodic of a specific integral equation that appears in the study of heat conduction in materials with memory and we present similar results for abstract partial integro-differential equations with infinite delay, also discussed the existence of mild solutions S -asymptotically ω -periodic and asymptotically almost automorphic for abstract neutral integro-differential equations. Finally, as application of previous ideas, the final chapter is concerned with the stabilization problem for hereditary control systems.

Keywords: Almost periodic, almost automorphic, phase space with fading memory, S -asymptotically ω -periodic, asymptotically almost automorphic compact, semi-linear differential equation with delay, abstract functional integro-differential equation, neutral integro-differential equation, stabilization, controllability, control systems.

Agradecimentos

- A Deus sim considerar sua forma e fora do marco de qualquer religião.

- Aos meus pais Alejandro Caicedo e Emma Maria Roque quem sempre aprovaram as minha determinação em continuar uma vida acadêmica e mesmo que estando longe sei que sempre tiveram os melhores desejos e a mais limpa e pura energia, à meus Irmãos Jose Manuel, Carlos Alberto e Mauricio, de igual forma por comportar-se dentro dos parâmetros de nosso núcleo familiar.

- Minha namorada Gisele Eloá Lopes Bernardino, pelo grande incentivo nos estudos, pela paciência e compreensão durante todo o decorrer de meus estudos. Também por ter dedicado numerosas horas na correção do português deste documento. Em fim, por todo o carinho, amor e dedicação. À família de Gisele pela aceitação tolerância, boa vontade e boa energia.

- Ao meu orientador, professor Claudio Cuevas, pela sua insistência cada dia, voltada a pesquisa de matemática e de continuar realizando uma boa contribuição nesta linda área da ciência, também pelos conselhos e me mostrando (ate onde eu consegui enxergar) este novo mundo pra mim desconhecido, em especial pela sua sinceridade e gosto de ver crescer cada estudante baixo a sua orientação. Em fim, pela assistência em todas as etapas para a elaboração e conclusão desta tese, fico eternamente agradecido.

- Ao meu co-orientador professor Hernán Henríquez, por ter aceitado me co-orientar e pela quantidade de comentários e novas idéias alusivos a pesquisa e referentes ao todo nosso trabalho em especial a tese, dou um sincero agradecimento.

- Ao meu amigo Bruno de Andrade, pela desinteressada amizade que sempre me ofereceu, pelas suas palavras no momento mais difícil que enfrente durante o doutorado, sempre emanando uma boa energia positiva e desbordando um talento especial, o qual cada dia invejo sim maus interesses e olhando seus passos como um excelente caminho a seguir, e alguém a tentar igualar e superar cada dia, um agradecimento de coração pela amizade que nasceu e permanecera sempre.

- Aos meus amigos Zaqueo Ramos, Juan Felipe Gonzalez, Ives Lima, Juan Carlos Piña e Marcelo “Maiden“, por toda a amizade e momentos vividos durante o doutorado, por que os considero como irmãos que compartilhamos numerosos papos junto com grandes momentos de alegria.

- Aos meus amigos do doutorado, Marcelo Fernandez, Filipe Dantas, AdeCarlos, Joilson, Jose Francisco, Arlucio, Renata, Fabio “badaro”, Thiago Bernardino, Giovana, Annete, Andre Ventura, Andre “Bebe”, Barbara, Eudes, Paulo, Danila, Luis “bula”, Jose Luis, Joedson, Thiago “Pirralho”, Dekar, Renato, Rodrigo, Isabelle, Tarciana, Crislene, Marcelo Pedro, Alan, Abyel.

- A Universidade Federal de Pernambuco, Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática e à funcionária Tânia Maria M. Maranhão.

- Aos funcionários Claudia Bezerra, Robson, Niulsa, Bruno, e ao pessoal da cantina do ITEPI

- Ao CNPq pelo apoio financeiro e à população brasileira pela hospitalidade e bom acolhimento.

Dedicatória

A minha família
e á Gisele Èloa

Sumário

Introdução	19
1 Preliminares	20
1.1 Equações diferenciais funcionais abstratas com retardo	20
1.1.1 Equações diferenciais funcionais com retardo finito	20
1.1.2 Equações diferenciais funcionais com retardo infinito	27
1.2 Conceitos de periodicidade para funções vetoriais	28
1.2.1 Funções quase periódicas	29
1.2.2 Funções assintoticamente quase automórficas	29
1.2.3 Funções S-assintoticamente ω -periódicas	33
1.3 Equações integro-diferenciais	35
2 Soluções Quase Periódicas de Equações Diferenciais Parciais com Retardo	40
2.1 Equações diferenciais parciais com retardo finito	40
2.2 Aplicações	47
2.2.1 Aplicação 1	48
2.2.2 Aplicação 2	50
2.3 Equações diferenciais parciais com retardo infinito	52

2.4	Equações integro-diferenciais semilineares	57
3	Soluções S-assintoticamente ω-Periódicas de Equações Integro-Diferenciais Funcionais	60
3.1	Equações integro-diferenciais abstratas	60
3.2	Equações integro-diferenciais funcionais abstratas	68
3.3	Aplicações à condução do calor	70
3.4	Equações integro-diferenciais parciais neutras com retardo infinito	75
3.4.1	Aplicações	90
3.5	Equações integro-diferenciais abstrata singular de tipo neutro com retardo infinito	94
3.5.1	Soluções assintoticamente quase automórficas	94
3.5.2	Soluções S-assintoticamente ω -periódicas	96
3.5.3	Aplicação	96
4	Estabilização de Sistemas de Controle com Retardo	99
4.1	Resultados de estabilização	99
4.2	Aplicações	104
	Referências Bibliográficas	107

Índice Remissivo

$C_0(\mathbb{R}^+; X)$, 27

$C_h(Z)$, 35

$D(A)$, domínio do operador A , 34

$D(t, \psi)$, 73

L_f , 74

L_g , 74

$SAP_{\omega,0}(X)$, 74

$SAP_{\omega}(X)$, 31

$\mathcal{B}$, espaço de fase, 25

$C_r \times L^p(\rho, X)$, 26

μ , 35

$\|\cdot\|_h$, 35

$\widetilde{M}$, 35

h , 35

u_t , função história , 73

(A) , 25

$(C - 2)$, 25

(A_1) , 25

(B) , 25

Condição

$H - 1$, 74

$H - 2$, 76

$W - 2$, 79

Condição $R4$, 35

espaço

de fase

com memória amortecida, 25

com memória uniformemente amortecida,
26

função

assintoticamente ω -periódica, 31

assintoticamente uniformemente contínua,
32

S-assintoticamente ω -periódica, 31

uniformemente S-assintoticamente ω -periódica,
31

H, K, M, 25

operador setorial de tipo ω , 35

Introdução

Motivado pelo fato de que equações diferenciais funcionais abstratas com retardo (abreviadamente, ARFDE) surgem em varias áreas da matemática aplicada, este tipo de equações tem recebido muita atenção nos últimos anos ([80, 101, 102]. Em particular, o problema de existência de soluções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas tem sido consideradas por vários autores. Referimos ao leitor o livro de Hino et al. [83] e os artigos [17, 28, 52, 53, 68, 93, 92, 117, 128] e suas referências neles listadas para informações recentes sobre o assunto. Nosso objetivo é estabelecer existência de soluções brandas quase periódicas e quase automórficas para uma classe de ARFDE lineares de primeira ordem.

Estaremos interessados pela existência de soluções quase periódicas e quase automórficas para o problema de Cauchy

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R},$$

onde $x(t) \in X$, a função x_t , denota a historia de $x(\cdot)$ em t , $L : C \rightarrow X$ é uma aplicação linear limitada, e f é uma função apropriada. A condição usual para a existência de soluções quase periódicas para este problema é que o semigrupo $T(\cdot)$ é compacto. Por exemplo, o problema de existência de soluções quase automórficas tem sido estudado recentemente por Ezzinbi e N'Guérékata [53] usando esta condição. Um de nossos objetivos nesta tese é estabelecer a existência de soluções quase periódicas para uma classe de equações nas quais o semigrupo $T(\cdot)$ não é compacto. E como modelo consideramos uma equação de onda com retardo finito. Usualmente este tipo de equações lineares surgem da linearização de uma semilinear ([125]).

Equações integro-diferenciais parciais neutras com retardo infinito tem sido usadas para modelar a evolução de sistemas físicos nos quais o tempo de resposta do sistema não depende unicamente do estado atual, mas sim da história do sistema. Por exemplo, na teoria desenvolvida

em Gurtin e Pipkin [62] e Nunziato [109] para a descrição da condução do calor em materiais com memória amortecida. Equações diferenciais funcionais neutras de primeira-ordem abstrata com retardo infinito foram estudadas por Hernández e Henríquez em [74, 75]. Hernández e McKibben [76] estudam equações diferenciais neutras abstratas de segunda-ordem. Baghli e Benchohra [12] deram condições suficientes para a existência de soluções brandas na semi-reta positiva para duas classes de equações diferenciais funcionais de primeira-ordem e equações diferenciais funcionais neutras perturbadas com retardo infinito; Recentemente, Cuevas et al. [29, 33] investigaram a existência de soluções para equações diferenciais funcionais neutras impulsivas com retardo infinito (ver também [77]). Um ponto importante para notar aqui é que quando o retardo é infinito a teoria que usamos é desenvolvida num espaço de fase caracterizado através de axiomas. Este conceito foi introduzido por Hale e Kato em [65] e desempenha um papel fundamental para desenvolver uma teoria qualitativa geral. O estudo de existência de soluções quase periódicas, assintoticamente quase periódicas, quase automórficas, pseudo quase periódicas e pseudo quase automórficas, etc. está entre os mais atrativos tópicos na teoria qualitativa de equações diferenciais e suas generalizações devido a seu interesse matemático e as possíveis aplicações em áreas tais como a física, economia, biologia matemática, engenharia, etc. (ver. [2, 3, 7, 28, 30, 31, 34, 35, 40, 42, 43, 47, 54, 56, 59, 60, 90, 121, 105, 122, 123, 126]). Recentemente, Diagana et al.[47] estabeleceram a existência e unicidade de uma solução branda assintoticamente quase automórfica para as equações integro-diferenciais de tipo neutro e Agarwal et al.[7] estudaram soluções pseudo quase periódicas com peso para algumas equações diferenciais funcionais neutras.

Agora retornamos ao resumo deste trabalho.

No Capítulo 1 daremos alguns preliminares. Na Seção 1.1 estudamos equações diferenciais funcionais com retardo finito e infinito. Presentamos especialmente propriedades espectrais e de estabilidade, principalmente as incluídas em [51, 119, 125], Para os conceitos necessários relacionados com o problema de Cauchy abstrato e a teoria de semigrupos de operadores fortemente contínuos referimos a Engel e Nagel [51] e Pazy [112]. Só mencionamos aqui uns poucos conceitos e resultados diretos relacionados com o nosso desenvolvimento. Seja $G(t)$ um semigrupo fortemente contínuo definido num espaço de Banach X com gerador infinitesimal D . Dizemos que G é fortemente estável se $G(t)x \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$ e dizemos que G é uniformemente estável se $\|G(t)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Além disso, empregamos a terminologia e notações para limitação espectral $s(D)$, constante de crescimento $\omega_0(G)$ e constante

de crescimento essencial $\omega_{ess}(G)$ de [51]. Especificamente, $s(D) = \sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(D)\}$; $\omega_0(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|G(t)\|}{t}$ e $\omega_{ess}(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{ess}}{t}$, onde o símbolo $\|\cdot\|_{ess}$ denota a norma essencial de um operador. Consequentemente, em termos dessas notações, G é uniformemente estável se, e somente se, $\omega_0(G) < 0$. Para completar nós também consideramos aqui que o semigrupo fortemente contínuo $G(t)$ é dito compacto se $G(t)$ é o operador compacto para todo $t > 0$ e G é dito quase-compacto se existe $t_0 > 0$ e um operador compacto R tal que $\|G(t_0) - R\| < 1$.

Na Seção 1.2 daremos alguns preliminares incluindo propriedades de funções quase periódicas, quase automórficas e S -assintoticamente ω -periódicas. O conceito de função assintoticamente quase automórfica foi introduzido em [106] e generalizado para funções assintoticamente quase automórficas $C^{(n)}$ em [100]. No entanto, a literatura concernente a funções S -assintoticamente ω -periódicas com valores em espaços de Banach é muito recente (ver [21, 36, 37, 41, 72, 73, 108, 113]). Em particular, o estudo da existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas para equações integro-diferenciais do tipo neutro constitui um tópico ainda não considerado na literatura. Completar esta parte da teoria é uma das motivações deste trabalho.

Na Seção 1.3 apresentamos alguns preliminares relativos a equações integro-diferenciais abstratas. Para obter nossos resultados, usamos a teoria de operador resolvente (ver [44, 60, 61] para os detalhes). Essa teoria é relacionada a equações integro-diferenciais em forma similar como a teoria de semigrupos é relacionada a equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem abstrata.

O Capítulo 2 está dedicado à existência de soluções quase periódicas de equações diferenciais parciais com retardo. Motivado pelo fato de que equações diferenciais funcionais abstratas com retardo (abreviadamente, ARFDE) surgem em varias áreas da matemática aplicada, este tipo de equações tem recebido muita atenção nos últimos anos ([80, 101, 102]). Em particular, o problema de existência de soluções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas tem sido consideradas por vários autores. Referimos ao leitor aos livros [83, 91] e os artigos [17, 28, 52, 53, 68, 92, 93, 117, 128] e suas referências neles listadas para informações recentes sobre o assunto.

No artigo [107], N'Guérékata estudaram a existência e unicidade de soluções brandas quase

automórficas da equação de evolução semilinear

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear que gera um semigrupo fortemente contínuo e uniformemente estável $T(t)$ e $f(t, u)$ é uma função quase automórfica com respeito a $t \in \mathbb{R}$ uniformemente em $u \in X$ e satisfazendo uma condição de Lipschitz na primeira variável. Este resultado foi generalizado em duas direções. O caso hiperbólico foi tratado em [18] em espaços de Banach intermediários e em [56] a função toma a forma $f(t, u) = P(t)Q(u)$. Desde então, este problema tem atraído muitos matemáticos (ver por exemplo [46, 48, 49, 104, 105, 106, 107] e as referências listadas neles). O caso de soluções assintoticamente quase automórficas isto é, soluções que tendem para uma função quase automórfica no infinito foi investigado em [47, 48, 105, 106]. Também foram consideradas soluções assintoticamente quase automórficas para equações diferenciais de ordem fracionária no artigo de Lizama e Araya [11].

Na Seção 2.1 aplicamos propriedades espectrais para estudar a existência de soluções brandas quase automórficas e quase periódicas para a equação linear

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A condição usual para a existência de soluções quase periódicas para este problema é que o semigrupo $T(\cdot)$ é compacto. Por exemplo, o problema de existência de soluções quase automórficas tem sido estudado recentemente por Ezzinbi e N'Guérékata [53] usando esta condição. Nosso objetivo nesta seção é estabelecer a existência de soluções quase periódicas para uma classe de equações nas quais o semigrupo $T(\cdot)$ não é compacto [70].

Na Seção 2.3 estudamos a existência de soluções brandas assintoticamente quase automórficas para uma equação diferencial funcional semilinear do tipo

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t, u_t), \quad t \geq 0, \\ u_0 &= \phi \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Na Seção 2.4 estudamos a existência de soluções brandas assintoticamente quase automórficas para a equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-2} Au(s) ds + f(t, u_t), \quad t \geq 0, \\ u_0 &= \phi \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

A Seção 2.3 contem aplicações.

No Capítulo 3 estudamos a existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas e assintoticamente quase automórficas para classes de equações-integro-diferenciais abstratas. Devido às numerosas aplicações em vários ramos da ciência equações-integro diferenciais deste tipo tem recebido muita atenção atualmente. Propriedades da soluções têm sido estudadas de diferentes pontos de vista. Referimos ao leitor para boa colocação ([44, 60, 61]); para existência de soluções brandas ([10, 9, 88] e referências neles citadas); para a existência de soluções assintoticamente quase periódicas e quase periódicas [78], e para a existência de soluções assintoticamente quase automórficas [48].

Este capítulo tem cinco seções. Na Seção 3.1 estabelecemos resultados gerais sobre a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para o problema

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= x_0, \end{aligned}$$

onde $B(t) : D(B(t)) \subseteq X \rightarrow X$ para $t \geq 0$ são operadores lineares fechados densamente definidos no espaço de Banach X . Assumimos que $D(A) \subset D(B(t))$ para toda $t \geq 0$ e que $g(\cdot)$ é uma função apropriada.

Na Seção 3.2 estabelecemos resultados similares para a equação com retardo finito

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \\ u_0 &= \varphi \in C. \end{aligned}$$

Na Seção 3.3, como aplicação de nossos resultados abstratos, estabelecemos condições para a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas de uma equação integral específica que aparece no estudo de condução do calor em materiais com memória.

Na Seção 3.4 apresentamos resultados similares aqueles da Seção 3.2 para equações parciais integro-diferenciais abstratas com retardo infinito.

Na Seção 3.5 discutimos existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódica e

assintoticamente quase automórficas para a equação integro-diferencial abstrata neutra

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D(t, u_t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-2} AD(s, u_s) ds + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \\ u_0 &= \varphi.\end{aligned}$$

Finalmente, como aplicação das ideias anteriores, o Capítulo 4 é concernente com o problema de estabilização para sistemas de controle hereditário. O problema de estabilizar um sistema de controle linear invariante por uma realimentação dinâmica tem uma extensa literatura. No presente a teoria para sistemas de controle de dimensão finita está bem estabelecida e referimos a O'Reilly [110] e Wonham [124] para as partes mais importantes da teoria. Similarmente, o problema de estabilizar a realimentação de sistemas de controle com retardo tem sido estudado em muitos trabalhos utilizando diferentes aproximações. Referimos ao leitor a [67] para uma discussão sobre o assunto.

Em particular, a estabilização do sistema

$$x'(t) = \int_{-r}^0 d_\theta N(\theta) x(t + \theta) + Bu(t),$$

onde $N(\cdot)$ é uma aplicação matricial $n \times n$ de variação limitada em $[-r, 0]$, foi considerado em Pandolfi [111]. Especificamente, definindo a matriz característica

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} d_\theta N(\theta),$$

foi provado em [111] que se

$$\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = n, \quad \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0,$$

então existe uma aplicação linear limitada $K : C([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que o sistema

$$x'(t) = \int_{-r}^0 d_\theta N(\theta) x(t + \theta) + BK(x_t)$$

é assintoticamente estável (referimos a [64, 66] para as propriedades espectrais de equações diferenciais funcionais com retardo). Conseqüentemente, se a propriedade de controlabilidade espectral anterior é verificada então existe uma lei de controle linear de realimentação que estabiliza o sistema.

Ainda assim, esta classe de sistemas não inclui aqueles sistemas modelados por equações integro-diferenciais parciais que surgem no estudo de uma série de problemas tais como a condução de calor em matérias com memória ou dinâmica de população para populações espacialmente distribuídas ([84]). Como um modelo tomamos o sistema linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(\xi, t) + \beta \frac{\partial}{\partial t} w(\xi, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi, t) + \int_{-r}^0 d_\theta N(\theta) w(\xi, t + \theta) \\ &+ \sum_{i=1}^m b_i(\xi) u_i(t), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad t \geq 0, \\ w(0, t) &= w(\pi, t) = 0, \end{aligned}$$

onde $r > 0$, a função escalar $N(\cdot)$ tem variação limitada em $[-r, 0]$ e b_i , $i = 1, \dots, m$ são funções apropriadas.

Por esta razão em [67] foi estudado o problema de estabilização para uma classe de sistemas invariantes que podem ser modelados por uma equação diferencial funcional retardada abstrata com retardo $r > 0$ definida num espaço de Banach X do tipo

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + Bu(t),$$

onde A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ em X , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ representa a entrada no tempo t , e $L : C \rightarrow X$ e $B : \mathbb{R}^m \rightarrow X$ são aplicações lineares limitadas. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, seja $L_\lambda : X \rightarrow X$ e $\Delta(\lambda) : D(A) \rightarrow X$ os operadores lineares definidos por

$$\begin{aligned} L_\lambda x &= L(e^{\lambda \theta} x), \quad x \in X, \\ \Delta(\lambda)x &= \lambda x - Ax - L_\lambda x, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Seja $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$. Especificamente, em [67, Teorema 3.1] foi estabelecido o seguinte resultado.

Lema *Assuma que T um semigrupo compacto. O sistema é estabilizável se*

$$\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$$

para todo $\lambda \in \Lambda$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que esta caracterização também se tem para alguns sistemas do tipo anterior mesmo se o semigrupo $T(\cdot)$ não é compacto [71]. A Seção 4.1 contém os resultados e na Seção 4.2 apresentamos aplicações.

Ao longo deste trabalho denotamos por $\mathcal{L}(X)$ a álgebra de Banach de operadores lineares limitados definidos em X e por X^* o espaço dual de X . Para um operador linear A com domínio $D(A)$ e conjunto imagem $\mathcal{R}(A)$ em X , representamos por $\sigma(A)$ (resp. $\sigma_p(A)$) o espectro (resp. espectro pontual) de A . Se $D(A)$ é denso em X , então A' denota o operador conjugado de A ([55]). Denotamos por $B_r(X)$ a bola fechada de centro 0 e raio r no espaço X . Para um subconjunto $\mathcal{K} \subseteq X$ representamos por $c(\mathcal{K})$ a envóltona convexa de $\mathcal{K}$.

Julho de 2011

Alejandro Caicedo Roque

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos necessários para desenvolver a teoria dos capítulos seguintes.

1.1 Equações diferenciais funcionais abstratas com retardo

No restante desta seção, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $T(t)$ em X . Para os fundamentos da teoria de semigrupos a serem usados adiante o leitor pode ver [51, 112].

1.1.1 Equações diferenciais funcionais com retardo finito

Denotamos por $C = C([-r, 0], X)$ o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ em X , munido da norma da convergência uniforme. Seja $L : C \rightarrow X$ é uma aplicação linear definida por

$$L(\varphi) = \int_{-r}^0 d_{\theta} N(\theta) \varphi(\theta),$$

onde a aplicação $N : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tem variação limitada, e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é um função contínua. Referimos a Engel e Nagel [51], Travis e Webb [119] e Wu [125] para as propriedades

básicas de ARFDE

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), \quad t \geq \sigma. \quad (1.1)$$

Somente mencionamos aqui que a equação (1.1) com a condição inicial

$$x_\sigma = \varphi \in C \quad (1.2)$$

tem uma única solução branda $x = x(\cdot, \sigma, \varphi, f)$. Isto significa que $x : [\sigma - r, \infty) \rightarrow X$ é uma função contínua que verifica (1.2) e a restrição de $x(\cdot)$ em $[\sigma, \infty)$ satisfaz a equação integral

$$x(t) = T(t - \sigma)\varphi(0) + \int_\sigma^t T(t - s)(L(x_s) + f(s))ds, \quad t \geq \sigma. \quad (1.3)$$

Em particular, se $x(\cdot, \varphi)$ denota a solução branda do problema homogêneo

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t), \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$x_0 = \varphi \in C, \quad (1.5)$$

o operador solução $V(t)$ definido por $V(t)\varphi = x_t(\cdot, \varphi)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em C (ver Wu [125]). Será representado por A_V seu gerador infinitesimal. Além disso, é bem conhecido que V satisfaz a seguinte propriedade de translação.

Lema 1.1. *Sob as condições anteriores,*

$$[V(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} [V(t + \theta)\varphi](0), & t + \theta \geq 0, \\ \varphi(t + \theta), & t + \theta \leq 0. \end{cases}$$

Denotamos por $W(t)$ o operador solução correspondente à $L = 0$. É claro que $W(t)$ é dado por

$$[W(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} T(t + \theta)\varphi(0), & -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t + \theta), & -r \leq \theta < -t. \end{cases}$$

O sistema (1.4) é dito (assintoticamente) estável se o semigrupo $V(t)$ é uniformemente estável. Consequentemente, segue-se do Lema 1.2 que o estudo da estabilidade assintótica do sistema (1.4) reduz-se a estudar propriedades espectrais do semigrupo solução $V(t)$.

Estamos em condição de estabelecer o primeiro resultado sobre comportamento assintótico do semigrupo solução.

Teorema 1.1. *Assuma que o semigrupo $T(t)$ é uniformemente estável e que o operador $T(t)L : C \rightarrow X$ é compacto para todo $t > 0$. Então o semigrupo $V(t)$ é quase-compacto.*

Demonstração. Definimos o operador $U(t) : C \rightarrow C$ para $t \geq 0$ como

$$[U(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)L(V(s)\varphi)ds, & -t \leq \theta \leq 0, \\ 0, & -r \leq \theta < -t. \end{cases}$$

É claro de (1.3) que

$$V(t) = W(t) + U(t), \quad t \geq 0,$$

o qual implica que $U(t)$ é um operador linear. Além disso, de [69, Teorema 1] podemos afirmar que $U(t)$ é um operador compacto. Por outro lado, existem constantes $M \geq 1$ e $\alpha > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Portanto, para $t \geq r$ temos que

$$\begin{aligned} \|W(t)\varphi\| &= \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|T(t+\theta)\varphi(0)\| \leq M \sup_{-r \leq \theta \leq 0} e^{-\alpha(t+\theta)} \|\varphi(0)\| \\ &\leq Me^{\alpha r} e^{-\alpha t} \|\varphi\| \end{aligned}$$

o qual implica que $W(t)$ é uniformemente estável. □

Existem situações muito interessantes nas quais o semigrupo $T(t)$ não é compacto mas o operador $T(t)L : C \rightarrow X$ é compacto para $t > 0$. A seguir, mencionamos um par de casos gerais:

(i) O operador $L : C \rightarrow X$ é compacto. Por exemplo, $L(\varphi) = \sum_{i=1}^k A_i \varphi(-r_i)$, onde $A_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k$, é um operador linear compacto, ou $L(\varphi) = \int_{-r}^0 N(\theta)\varphi(\theta)d\theta$, onde $N : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é uma aplicação uniformemente contínua tal que $N(\theta)$ é um operador compacto para cada $-r \leq \theta \leq 0$.

(ii) Uma situação mais geral é a seguinte. Assuma que existe uma decomposição topológica de $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i são espaços invariantes sob $T(t)$, e X_1 tem dimensão finita. Seja P_0 a projeção em X_0 com núcleo X_1 . Se $T(t)P_0L$ é compacto, então o produto $T(t)L$ também é compacto.

Coletamos no seguinte lema um par de resultados fundamentais ([51, Corolário IV.2.11, Proposição V.3.5]) para nosso futuro desenvolvimento.

Lema 1.2. (Engel-Nagel [51]) *Seja $G(t)$ um semigrupo fortemente contínuo. As seguintes condições são satisfeitas.*

(i) *O semigrupo G é quase-compacto se e somente se $\omega_{ess}(G) < 0$.*

(ii) $\omega_0(G) = \max\{\omega_{ess}(G), s(D)\}$.

Combinando o Teorema 1.1 com o Teorema V.3.7 em [51] podemos estabelecer a seguinte propriedade de comportamento assintótico para o semigrupo solução associado a problema homogêneo (1.4)-(1.5).

Corolário 1.1. *Assuma que o semigrupo $T(t)$ é uniformemente estável e que o operador $T(t)L : C \rightarrow X$ é compacto para todo $t > 0$. Então o semigrupo $V(t)$ é uniformemente estável se, e somente se $\sup \operatorname{Re} \sigma_p(A_V) < 0$.*

Para estudar o $\sigma_p(A_V)$, a seguinte propriedade espectral é bem conhecida (ver Henríquez [67] e as referencias citadas nesse trabalho). Para $\lambda \in \mathbb{C}$, sejam $L_\lambda : X \rightarrow X$ e $\Delta(\lambda) : D(A) \rightarrow X$ operadores lineares definidos por

$$L_\lambda x = L(e^{\lambda\theta}x), \quad x \in X, \quad (1.6)$$

$$\Delta(\lambda)x = \lambda x - Ax - L_\lambda x, \quad x \in D(A). \quad (1.7)$$

Lema 1.3. *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $\lambda \in \sigma_p(A_V)$ se, e somente se existe $u \in D(A)$, $u \neq 0$, tal que $\Delta(\lambda)u = 0$. Neste caso a função $\varphi = e^{\lambda\theta}u$ é o vetor próprio de A_V correspondente a λ . Além disso, se $\lambda \in \sigma(A + L_\lambda)$, então $\lambda \in \sigma(A_V)$.*

Observação 1.1. Assuma que o semigrupo $V(t)$ é quase-compacto. Neste caso o conjunto $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A_V) : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$ é finito e consiste de pólos de $R(\cdot, A_V)$ com multiplicidade algébrica finita [51, Teorema V.3.7]. Portanto, o espaço C decompõe-se como

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda, \quad (1.8)$$

onde P_Λ e Q_Λ são espaços invariantes sob $V(t)$ e o espaço P_Λ é a imagem da projeção espectral Π^P correspondente a Λ . Consequentemente, P_Λ consiste do vetores próprios generalizados correspondentes ao valor próprio $\lambda_i \in \Lambda$. Especificamente, se $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, então

$$P_\Lambda = \bigoplus_{i=1}^m \ker(\lambda_i I - A_V)^{k_i} \quad (1.9)$$

para certos $k_i \in \mathbb{N}$. Denotamos por $V^P(t)$, (respectivamente, $V^Q(t)$) as restrições de $V(t)$ em P_Λ (respectivamente, em Q_Λ). Similarmente, A_V^P e A_V^Q representam as restrições de A_V em P_Λ e Q_Λ , respectivamente. Como P_Λ é um espaço de dimensão finita d , o semigrupo $V^P(t)$ é uniformemente contínuo e A_V^P é um operador linear limitado definido em P_Λ . Seja $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^d$ uma base de P_Λ . Usaremos a notação $\Phi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^d)$. Conseqüentemente, procedendo como de costume na teoria de equações diferenciais funcionais ([66]), existe uma matriz G de ordem $d \times d$ tal que $\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{G\theta}$, para $-r \leq \theta \leq 0$, $V^P(t)\Phi = \Phi e^{Gt}$, para $t \geq 0$, e $\sigma_p(G) = \Lambda$. Seja Ψ a base dual de Φ associada a decomposição (1.8), como construída em [82]. Nessas condições, foi estabelecido em [82, Proposição 4.2] que existe $x^* = \text{col}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_d^*) \in X^{*d}$ tal que a projeção $x_t^P = \Pi^P x_t$ em P_Λ da solução de (1.1) é dada por $x_t^P = \Phi z(t)$, onde o d -vetor $z(t)$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$z'(t) = Gz(t) + \langle x^*, f(t) \rangle, \quad t \geq \sigma. \quad (1.10)$$

A seguir estabelecemos um par propriedades do vetor x^* .

Lema 1.4. *As componentes $x_i^* \in D(A')$, $i = 1, \dots, d$. Além disso, se $v \in (\mathbb{R}^d)^*$ é um vetor próprio à esquerda de G correspondente a $\lambda \in \Lambda$, então $(\lambda I - A' - L'_\lambda)vx^* = 0$.*

Demonstração. Para provar a primeira afirmação escolhemos $y \in D(A)$ e tomamos a função constante $f(t) = -Ay - L(\bar{y})$, onde por $\bar{y}$ denotamos a função constante $\bar{y}(\theta) = y$ para todo $-r \leq \theta \leq 0$. A equação (1.1) é

$$x'(t) = A(x(t) - y) + L(x_t - \bar{y}).$$

Seja $x(\cdot)$ a solução desta equação com condição inicial $x_0 = \bar{y}$. Então $x_t - \bar{y} = V(t)(0) = 0$ para $t \geq 0$. Assim x_t não depende de t e, aplicando (1.10) obtemos que

$$x_t^P = \Phi \langle \Psi, \bar{y} \rangle = \Phi z(t),$$

onde

$$z'(t) = Gz(t) + \langle x^*, -Ay - L(\bar{y}) \rangle = 0.$$

Portanto

$$\langle x^*, Ay \rangle = G \langle \Psi, \bar{y} \rangle - \langle x^*, L(\bar{y}) \rangle$$

é uma função contínua de y . Isto mostra a afirmação.

Para estabelecer a segunda afirmação procedemos de forma similar. Neste caso definimos $f(t) = e^{\lambda t}(\lambda y - Ay - L_\lambda y)$. Seja $x(t) = e^{\lambda t}y$, $t \geq -r$. Está claro que $x_t = e^{\lambda t}\psi$, onde $\psi(\theta) = e^{\lambda\theta}y$. Assim,

$$L(x_t) = e^{\lambda t}L(\psi) = e^{\lambda t}L_\lambda(y).$$

De isto se segue que $x(\cdot)$ é a solução da equação (1.1) com condição inicial $x_0 = e^{\lambda\theta}y$. Concluimos que

$$x_t^P = \Phi\langle\Psi, x_t\rangle = \Phi\langle\Psi, e^{\lambda t}e^{\lambda\theta}y\rangle = e^{\lambda t}\Phi\langle\Psi, e^{\lambda\theta}y\rangle. \quad (1.11)$$

Por outro lado, utilizando novamente (1.10), $x_t^P = \Phi z(t)$, onde

$$z(t) = e^{Gt}z(0) + \int_0^t e^{G(t-s)}\langle x^*, f(s)\rangle ds,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} vz(t) &= e^{\lambda t}vz(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}v\langle x^*, f(s)\rangle ds \\ &= e^{\lambda t}vz(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\langle vx^*, f(s)\rangle ds \\ &= e^{\lambda t}vz(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\langle vx^*, e^{\lambda s}(\lambda y - Ay - L_\lambda y)\rangle ds \\ &= e^{\lambda t}(vz(0) + t\langle vx^*, \lambda y - Ay - L_\lambda y\rangle). \end{aligned}$$

Como a equação (1.11) mostra que $e^{-\lambda t}z(t)$ é limitado em $t \geq 0$, a equação anterior implica que $\langle vx^*, \lambda y - Ay - L_\lambda y\rangle = 0$. Em vista que y é um elemento arbitrário no $D(A)$ e $D(A)$ é denso em X . Isto completa a demonstração. $\square$

Lema 1.5. *Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $v \in (\mathbb{R}^d)^*$ tal que $\lambda v = vG$ e $vx^* = 0$. Então $v = 0$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in P_\Lambda$, $\varphi \neq 0$, um vetor proprio de A_V correspondente a $\mu \in \Lambda$. Do Lema 1.3 obtemos que $\varphi(\theta) = e^{\mu\theta}\varphi(0)$ para $-r \leq \theta \leq 0$. Para certo $\gamma \in \mathbb{C}$ tomamos $\varphi^1(\theta) = e^{(\gamma+\mu)\theta}\varphi(0)$. Pondo $x(t) = e^{(\gamma+\mu)t}\varphi(0)$, para $t \geq -r$. Claramente $x_t = e^{(\gamma+\mu)t}\varphi^1$ para $t \geq 0$. Isto implica que $x(\cdot)$ é uma solução da equação (1.1) para

$$f(t) = e^{(\gamma+\mu)t}[(\gamma + \mu)\varphi(0) - A\varphi(0) - L(\varphi^1)].$$

Seja $z(\cdot)$ dado por $x_t^P = \Phi z(t) = \Phi\langle\Psi, x_t\rangle$. De (1.10) obtemos que

$$vz'(t) = vGz(t) + \langle vx^*, f(t)\rangle = \lambda vz(t),$$

o qual implica que $vz(t) = e^{\lambda t}c$ para $t \geq 0$. Por outro lado, temos que

$$vz(t) = v\langle \Psi, x_t \rangle = v\langle \Psi, e^{(\gamma+\mu)t}\varphi^1 \rangle = e^{(\gamma+\mu)t}v\langle \Psi, \varphi^1 \rangle = e^{\lambda t}c,$$

para $t \geq 0$. Se $\mu \neq \lambda$ podemos tomar $\gamma = 0$ para concluir que $v\langle \Psi, \varphi \rangle = 0$. Em caso que $\mu = \lambda$, podemos tomar $\gamma > 0$ para concluir que $v\langle \Psi, e^{\gamma\theta}\varphi \rangle = 0$. Tomado limite quando $\gamma \rightarrow 0^+$ também obtemos que $v\langle \Psi, \varphi \rangle = 0$.

Por outro lado, usando a representação de P_Λ dada em (1.9) e argumentando como antes, inferimos que $v\langle \Psi, \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in P_\Lambda$. Como $\langle \Psi, \Phi \rangle = I$ finalmente obtemos que $v = 0$. $\square$

Nosso resultado é baseado na fórmula de variação de constantes para a equação não-homôgenea (1.1) com condição inicial (1.2). É claro que a equação (1.1) pode ser considerada como uma equação com retardo infinito. De fato nós podemos prolongar a aplicação N a $(-\infty, 0]$ definindo $N(\theta) = 0$ for $\theta < -r$. Ainda antes de definir formalmente o conceito de espaço de fase para equações com retardo infinito, podemos considerar um espaço de fase $\mathcal{B}$ com memória uniformemente amortecida tal que $\mathcal{B} \subseteq C((-\infty, 0], X)$ e $L(\varphi) = \int_{-\infty}^0 d_\theta N(\theta)\varphi(\theta)$, para $\varphi \in \mathcal{B}$, define uma aplicação linear limitada de $\mathcal{B}$ em X .

Esta propriedade nos permite aplicar a teoria desenvolvida em [82] para representar a solução branda da equação (1.1). Provou-se (Hino et al. [82]) que a solução pode ser expressa por meio da fórmula de variação das constantes. Em seguida, vamos adotar as notações utilizadas neste trabalho. Seja $\Gamma^n : X \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$\Gamma^n(\theta)x = \begin{cases} (n\theta + 1)x, & -1/n \leq \theta \leq 0, \\ 0, & -\infty < \theta < -1/n, \end{cases}$$

Se f é uma função contínua, a fórmula ([82, Teorema 3.1])

$$x_t(\cdot, \sigma, \varphi, f) = V(t - \sigma)\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^t V(t - s)\Gamma^n f(s) ds \quad (1.12)$$

define a solução branda de (1.1)-(1.2) no espaço de fase.

1.1.2 Equações diferenciais funcionais com retardo infinito

Neste trabalho, usamos a definição axiomática de espaço de fase $\mathcal{B}$ introduzida em Hino et al. [81]. Especificamente, $\mathcal{B}$ é um espaço vetorial de funções que aplicam $(-\infty, 0]$ em X munido com uma seminorma denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e tal que têm os seguintes axiomas:

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \mapsto X$, $a > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a)$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}$, então para todo $t \in [\sigma, \sigma + a)$ tem-se as seguintes propriedades:

(i) $x_t \in \mathcal{B}$.

(ii) $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$.

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + M(t - \sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$,

onde $H > 0$ é uma constante, $K, M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, K é contínua, M é localmente limitada e H, K, M não dependem de $x(\cdot)$.

(A₁) Se $x(\cdot)$ é uma função como em (A), então a aplicação $[\sigma, \sigma + a) \rightarrow \mathcal{B}$, $t \mapsto x_t$, é contínua.

(B) O espaço de fase $\mathcal{B}$ é completo.

Adicionalmente, consideraremos o seguinte axioma:

(C-2) Se $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência uniformemente limitada de funções contínuas com suporte compacto e $\psi^n \rightarrow \psi$, $n \rightarrow \infty$, na topologia compacto-aberta, então $\psi \in \mathcal{B}$ e $\|\psi^n - \psi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.2. Se o espaço de fase $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (C-2), então o espaço $C_b((-\infty, 0], X)$ está continuamente incluído em $\mathcal{B}$. Assim, existe uma constante $Q \geq 0$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq Q\|\psi\|_{\infty}$, para todo $\psi \in C_b((-\infty, 0], X)$ (ver [81, Proposição 7.1.1]).

Definição 1.1. ([Hino et al. [81]]) Seja $S(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ o C_0 -semigrupo definido por $S(t)\varphi(\theta) = \varphi(0)$ em $[-t, 0]$ e $S(t)\varphi(\theta) = \varphi(t + \theta)$ em $(-\infty, -t]$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{\varphi \in \mathcal{B} : \varphi(0) = 0\}$ e $S_0(t)$ a restrição de $S(t)$ a $\mathcal{B}_0$.

O espaço de fase $\mathcal{B}$ é chamado espaço de fase com memória amortecida se verifica (B), e (C-2) e $\|S_0(t)\varphi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $\varphi \in \mathcal{B}_0$.

O espaço de fase $\mathcal{B}$ é chamado espaço de fase com memória uniformemente amortecida se verifica (C-2) e $\|S_0(t)\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Observação 1.3. Se $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida as funções $K(\cdot)$ e $M(\cdot)$ são limitadas. Neste caso vamos escrever $K = \sup_{t \geq 0} K(t)$ e $M = \sup_{t \geq 0} M(t)$, vide [81, Proposição 7.1.5]) para detalhes. Além disso, neste caso podemos escolher $Q = K$, onde Q é dado por pela observação 1.2.

Exemplo 1.1. (O espaço de fase $C_r \times L^p(\rho, X)$.) Sejam $r \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e seja $\rho : (-\infty, -r] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa mensurável que satisfaz as condições (g-5) – (g-6) na terminologia de Hino et al. [81]. Brevemente, isto significa que ρ é localmente integrável e que existe uma função não-negativa localmente limitada $\gamma(\cdot)$ em $(-\infty, 0]$ tal que $\rho(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi)\rho(\theta)$ para todo $\xi \leq 0$ e $\theta \in (-\infty, -r] \setminus N_\varepsilon$, onde $N_\varepsilon \subset (-\infty, -r]$ é um conjunto cuja medida de Lebesgue é zero. Denotamos por $\mathcal{B} = C_r \times L^p(\rho, X)$ o conjunto de todas as funções $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que φ é contínua em $[-r, 0]$, Lebesgue mensurável e $\rho\|\varphi\|^p$ é Lebesgue integrável em $(-\infty, -r)$. A seminorma em $C_r \times L^p(\rho, X)$ é definida como segue:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\varphi(\theta)\| + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\varphi(\theta)\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^p(\rho, X)$ satisfaz os axiomas (A), (A₁) e (B). Além disso, quando $r = 0$, e $p = 2$, é possível escolher $H = 1$,

$$K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^0 \rho(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$$

para $t \geq 0$ (ver [81, Teorema 1.3.8]). Note que se além das condições anteriores a função ρ é integrável em $(-\infty, -r]$, então $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida e se $\text{ess sup} \left\{ \frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq -r \right\} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ então $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória uniformemente amortecida (ver [81, Exemplo 7.1.8]).

1.2 Conceitos de periodicidade para funções vetoriais

Nesta seção apresentamos os conceitos de periodicidade que seram utilizados no decorrer deste trabalho.

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dois espaços de Banach. Neste trabalho denotamos por $C_0(\mathbb{R}^+, X)$ o espaço formado pelas funções contínuas de $[0, \infty)$ em X que são nulas no infinito munido com a norma da convergência uniforme.

1.2.1 Funções quase periódicas

Neste trabalho empregamos o conceito de função quase periódica no sentido de Bohr.

Definição 1.2. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica se é contínua e para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto relativamente denso P_ε em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon, \quad (1.13)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\tau \in P_\varepsilon$.

Para as propriedades de funções quase periódicas referimos ao leitor a [25, 127]. No que segue denotamos por $AP(X)$ o espaço consistente das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ que são quase periódicas munido da norma da convergência uniforme. Com esta norma $AP(X)$ é um espaço de Banach.

1.2.2 Funções assintoticamente quase automórficas

Definição 1.3. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita quase automórfica se para cada seqüência de números reais (s'_n) , existe uma subsequência (s_n) tal que*

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n)$$

é bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Se a convergência indicada nos limites anteriores é uniforme para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ diz-se que a função f é quase automórfica compacta.

Denotaremos por $AA(X)$ o conjunto consistente das funções quase automórficas e por $AA_c(X)$ conjunto consistente de tais funções quase automórficas compactas.

Se a convergência anterior é uniforme em $t \in \mathbb{R}$, então f é uma função quase periódica no sentido de Bohr. Assim as funções quase automórficas no sentido de Bochner's constituem uma classe de funções mais grande que a classe das quase periódicas. Por outro lado, a função $\sin \frac{1}{2 + \cos t + \cos \sqrt{2}t}$ é quase automórfica, mas não é quase periódica.

Note que a função g na definição anterior é mensurável, mas não necessariamente contínua. Ademais,

$$\overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}.$$

A inclusão $\overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subseteq \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}$ foi provada em (N'Guérékata [104]). A inclusão recíproca pode ser provada similarmente.

É bem conhecido que uma função quase automórfica é limitada e $AA(X)$ é um espaço de Banach quando munido com a norma da convergência uniforme.

Definição 1.4. (Ding et al. [48]) Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times Y \rightarrow X$ é dita quase automórfica em t uniformemente para y em subconjuntos compactos de Y se para todo subconjunto compacto K de Y e toda seqüência de números reais (s'_n) , existe a subsequência (s_n) tal que

$$g(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n, y)$$

é bem definido para cada $t \in \mathbb{R}$, a convergência é uniforme para $y \in K$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n, y) = f(t, y)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ e a convergência é uniforme para $y \in K$.

Denotamos por $AA(\mathbb{R} \times Y, X)$ o conjunto de tais funções.

Definição 1.5. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times Y \rightarrow X$ é dita quase automórfica compacta se para toda seqüência de números reais (s'_n) , existe a subsequência (s_n) tal que

$$g(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n, y)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n, y) = f(t, y)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$ e a convergência é uniforme para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $AA_c(\mathbb{R} \times Y, X)$ o conjunto de tais funções.

Para as propriedades de funções quase automórficas referimos o leitor a [104, 105]. Unicamente mencionamos aqui que a imagem de uma função quase automórfica é um conjunto relativamente compacto.

Definição 1.6. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é dita assintoticamente quase automórfica se existem duas funções $g \in AA(X)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ tal que

$$f(t) = g(t) + \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

A função g é chamada termo quase automórfico de f .

Denotamos por $AAA(X)$ o espaço de todas as funções assintoticamente quase automórficas $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$. O espaço $AAA(X)$ é um espaço de Banach com a norma da convergência uniforme. Ademais, $AAA(X) = AA(X) \oplus C_0(\mathbb{R}^+, X)$.

Observação 1.4. Algumas propriedades adicionais são as seguintes:

(i) O espaço $AAA(X)$ também pode ser dotado com a norma equivalente ([104, Teorema 1.41])

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| + \sup_{t \geq 0} \|\varphi(t)\|,$$

onde $f = g + \varphi$ com $g \in AA(X)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$.

(ii) A imagem de qualquer função assintoticamente quase automórfica é relativamente compacta ([48, Lemma 1.9]).

(iii) Se $f \in AAA(X)$ e $f = g + \varphi$ é a decomposição com $g \in AA(X)$ y $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$, então $\overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subseteq \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}$ ([48, Lema 1.7]).

Definição 1.7. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é dita assintoticamente quase automórfica compacta se existem duas funções $g \in AA_c(X)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ tal que

$$f(t) = g(t) + \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Denotamos por $AAA_c(X)$ o espaço de todas as funções assintoticamente quase automórficas compactas $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$.

No que segue denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ o espaço de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow X$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y) = 0$ uniformemente para y em qualquer subconjunto compacto de Y .

Definição 1.8. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow X$ é dita assintoticamente quase automórfica se existem duas funções $g \in AA(\mathbb{R} \times Y, X)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ tal que

$$f(t, x) = g(t, x) + \varphi(t, x), \quad x \in X, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Usaremos a notação $AAA(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ para o espaço consistente das funções envolvidas na Definição 1.8.

De maneira similar estabelecemos o seguinte conceito.

Definição 1.9. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow X$ é dita assintoticamente quase automórfica compacta se existem duas funções $g \in AA_c(\mathbb{R} \times Y, X)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ tal que

$$f(t, x) = g(t, x) + \varphi(t, x), \quad x \in X, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Usaremos a notação $AAA_c(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ para o espaço consistente das funções envolvidas na Definição 1.9.

Definição 1.10. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow X$ é dita uniformemente contínua em conjuntos limitados uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$ se para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto limitado $\mathcal{K}$ de Y , existe $\delta_{\varepsilon, \mathcal{K}} > 0$ tal que $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e todo $y_1, y_2 \in Y$ com $\|y_1 - y_2\| \leq \delta_{\varepsilon, \mathcal{K}}$.

Lema 1.6. (Ding et al. [48]) Seja $f : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow X$ uma função assintoticamente quase automórfica e uniformemente contínua em conjuntos limitados uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$. Seja $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$ uma função assintoticamente quase automórfica. Então a função $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$, $t \mapsto f(t, u(t))$, é assintoticamente quase automórfica.

Lema 1.7. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida.

(a) Sejam $f \in AA_c(\mathbb{R} \times Y, X)$ e $u \in AA_c(Y)$. Seja $\Phi(t) = f(t, u(t))$ para $t \in \mathbb{R}$. Se a família $\{f(t, \cdot) : t \in \mathbb{R}\}$ é equi uniformemente contínua no conjunto $\overline{\mathcal{R}(u)}$, então $\Phi \in AA_c(X)$.

(b) Sejam $f \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times Y, X)$ e $u \in AAA_c(Y)$. Seja $\Phi(t) = f(t, u(t))$ para $t \geq 0$. Se a família $\{f(t, \cdot) : t \geq 0\}$ é equi uniformemente contínua no conjunto $\overline{\mathcal{R}(u)}$, então $\Phi \in AAA_c(X)$.

1.2.3 Funções S-assintoticamente ω -periódicas

Lembraremos a noção de função S-assintoticamente ω -periódica.

A literatura concernente às funções S-assintoticamente ω -periódicas com valores num espaço de Banach é muito nova. Recentemente alguns artigos foram publicados por Henríquez et al. [72, 73], Nicola e Pierri [108], Cuevas e de Souza [36, 37], de Andrade e Cuevas [41], Caicedo e Cuevas [20], Cuevas e Lizama [32].

Definição 1.11. (Henríquez et al. [72]) Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ é chamada S-assintoticamente periódica se existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$. Neste caso, dizemos que ω é o período assintótico de f e que f é S-assintoticamente ω -periódica.

Neste trabalho usamos a notação $SAP_\omega(X)$ para representar o subespaço do espaço $C_b(\mathbb{R}^+, X)$ de todas as funções S-assintoticamente ω -periódicas. No resto desta seção $\omega > 0$ é um número real fixo.

Note que $SAP_\omega(X)$ munido da norma do supremo é um espaço de Banach.

Definição 1.12. ([72]) Uma função contínua $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é dita assintoticamente ω -periódica se existe uma função ω -periódica g e $\phi \in C_0(\mathbb{R}^+; X)$ tal que $f = g + \phi$.

Observação 1.5. Em [72] foi mostrado o surpreendente fato de que a propriedade $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$ não caracteriza funções assintoticamente ω -periódicas. Especificamente, os autores mostraram que o conjunto das funções assintoticamente ω -periódicas esta propriamente contido em $SAP_\omega(X)$.

Definição 1.13. ([72]) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é dita uniformemente S-assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados se para todo subconjunto limitado K de X , o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega, x) - f(t, x)) = 0$, uniformemente para $x \in K$.

Definição 1.14. ([72]) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é dita assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados se para todo $\epsilon > 0$ e para todo subconjunto limitado K de X , existem $L_{\epsilon, K} \geq 0$ e $\delta_{\epsilon, K} > 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq L_{\epsilon, K}$ e todo $x, y \in K$ com $\|x - y\| \leq \delta_{\epsilon, K}$.

Lema 1.8. ([72]) Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados. Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma função S -assintoticamente ω -periódica, então a função $v(t) = f(t, u(t)) \in SAP_{\omega}(Y)$.

Lema 1.9. (Henríquez et al. [73]) Se $u \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ é uma função tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t + n\omega) - u(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, então $u(\cdot)$ é assintoticamente ω -periódica.

Lema 1.10. ([72]) Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados. Suponha que para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t + n\omega, x) - f(t, x)\| = 0$, uniformemente para $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja $u \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t + n\omega) - u(t) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t + n\omega, u(t + n\omega)) - f(t, u(t)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.11. (Caicedo et al. [21]) Seja $\{R(t) : t \geq 0\}$ uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados em X satisfazendo $\|R(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\mu t}$ para todo $t \geq 0$, onde $\widetilde{M}, \mu > 0$ são constantes. Seja $u \in SAP_{\omega}(X)$. Definimos

$$v(t) = \int_0^t R(t-s)u(s)ds. \quad (1.14)$$

Então $v \in SAP_{\omega}(X)$.

Demonstração. A estimativa $\|v\|_{\infty} \leq \frac{\widetilde{M}}{\mu} \|u\|_{\infty}$ mostra que $v \in C_b([0, \infty), X)$. Para $\epsilon > 0$, selecionamos $T > 0$ tal que $\|u(t + \omega) - u(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq T$ e $\int_T^{\infty} e^{-\mu s} ds \leq \epsilon$. Portanto, para $t \geq 2T$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t + \omega) - v(t)\| &\leq \widetilde{M} \|u\|_{\infty} \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} ds + 2\widetilde{M} \|u\|_{\infty} \int_T^t e^{-\mu s} ds + \epsilon \widetilde{M} \int_0^T e^{-\mu s} ds \\ &\leq \widetilde{M} \left(3\|u\|_{\infty} + \frac{1}{\mu} \right) \epsilon, \end{aligned}$$

o qual completa a demonstração. □

De maneira similar, podemos estabelecer.

Lema 1.12. *Seja $\{R(t) : t \geq 0\}$ uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados em X satisfazendo $\|R(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\mu t}$ para todo $t \geq 0$. Seja $u : [0, \infty) \rightarrow X$ assintoticamente ω -periódica. Então a função $v(\cdot)$ definida por (1.14) é assintoticamente ω -periódica.*

Para estudar equações diferenciais funcionais com retardo finito $r > 0$ usaremos a seguinte propriedade que é uma consequência imediata de nossas definições.

Lema 1.13. *Seja $u : [-r, \infty) \rightarrow X$ uma função contínua. Se $u|_{[0, \infty)} \in SAP_\omega(X)$ e u_t é a função dada por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ para $t \geq 0$ e $-r \leq \theta \leq 0$, então a função $[0, \infty) \rightarrow C([-r, 0], X)$, $t \mapsto u_t$, é S -assintoticamente ω -periódica (u_t é chamada função história).*

De maneira similar, a relação entre os conceitos de funções S -assintoticamente ω -periódicas e espaço de fase é fornecida pelo seguinte resultado.

Lema 1.14. *([73, Lema 2.10]) Suponha que $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $u_0 \in \mathcal{B}$.*

(i) *Se $u|_{[0, \infty)} \in SAP_\omega(X)$. Então a função $t \mapsto u_t$ pertence a $SAP_\omega(\mathcal{B})$.*

(ii) *Se $u|_{[0, \infty)}$ é assintoticamente ω -periódica, então a função $t \mapsto u_t$ também é assintoticamente ω -periódica.*

1.3 Equações integro-diferenciais

Nesta seção, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador linear fechado e $\{B(t) : t \geq 0\}$ é uma família de operadores lineares fechados com $D(B(t))$ não depende de t e que $D(A) \subseteq D(B(t))$ para todo $t \geq 0$.

Para estudar o problema de Cauchy abstrato

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (1.15)$$

$$x(0) = z \in X, \quad (1.16)$$

definiremos o conceito de operador resolvente (Diagana et al. [47]).

Definição 1.15. (Desh et al. [45]) Uma família fortemente contínua $\{R(t) : t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ é chamada um operador resolvente para (1.15) se as seguintes condições são satisfeitas:

(R1) Para cada $x \in X$, $R(0)x = x$.

(R2) Se $x \in D(A)$, então $R(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$, a função $AR(\cdot)x$ é contínua e a função $R(\cdot)x$ é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$.

(R3) Para $x \in D(A)$, as seguintes equações são verificadas:

$$\frac{d}{dt}R(t)x = AR(t)x + \int_0^t B(t-s)R(s)x ds, \quad t \geq 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt}R(t)x = R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)B(s)x ds, \quad t \geq 0. \quad (1.18)$$

Observação 1.6. Para maiores detalhes sobre equações integro-diferenciais, condições para existência do operador resolvente, aplicações e temas relacionados, referimos ao leitor a [44, 60, 61]. Em particular, é imediato de (R2) que a aplicação $R : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}([D(A)])$ é fortemente contínua.

No seguinte assumiremos que existe um operador resolvente para (1.15). A existência de soluções da equação

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.19)$$

com condição inicial (1.16) tem sido estudada por muitos autores.

Definição 1.16. (Grimmer [60]) Seja $f : [0, \infty) \rightarrow X$ localmente integrável. Dizemos que a função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por

$$u(t) = R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

é uma solução branda do problema (1.19)-(1.16).

Nos capítulos seguintes assumiremos também que o operador resolvente satisfaz a seguinte condição de comportamento assintótico.

(R4) Existem constantes $\widetilde{M}, \mu > 0$ tal que $\|R(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\mu t}$ para todo $t \geq 0$.

Para condições que asseguram a existência de operadores resolventes que satisfazem a condição **(R4)** referimos ao leitor a [60, Teorema 4.1].

Para estabelecer alguns resultados, utilizaremos a seguinte propriedade de compacidade.

Seja $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ uma função contínua não-decrescente tal que $h(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Em seguida, denotamos $C_h(Z)$ o espaço

$$C_h(Z) = \left\{ u \in C([0, \infty), Z) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\}$$

munido com a norma $\|u\|_h = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}$.

Lema 1.15. (Cuevas-Henríquez [27]) *Um conjunto $K \subseteq C_h(Z)$ é relativamente compacto em $C_h(Z)$ se verifica as seguintes condições:*

(c-1) *Para todo $b > 0$, o conjunto $K_b = \{u|_{[0,b]} : u \in K\}$ é relativamente compacto in $C([0, b], Z)$.*

(c-2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|u(t)\|}{h(t)} = 0$ *uniformemente para $u \in K$.*

No que segue vamos considerar um tipo particular de equação integro-diferencial

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-2} Au(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.20)$$

$$u(0) = z, \quad (1.21)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador setorial e $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é uma função contínua.

Definição 1.17. (Lunardi [94]) *Um operador linear fechado A com domínio denso $D(A)$ em X é dito setorial de tipo ω e ângulo θ se existem constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $N > 0$ tal que seu resolvente existe fora do setor*

$$\omega + \Sigma_\theta := \{\lambda + \omega : \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\}, \quad (1.22)$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{N}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \notin \omega + \Sigma_\theta. \quad (1.23)$$

Para mais detalhes sobre operadores setoriais referimos a [94].

Definição 1.18. (Bazhelekova [14]) *Seja A um operador linear fechado com domínio $D(A)$ definido em X . Dizemos que A é o gerador de um operador solução para (1.20) se existe $\omega \in \mathbb{R}$ e uma função fortemente contínua $E_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que $\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ e*

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_\alpha(t) x dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega, x \in X.$$

Neste caso, E_α é dito operador solução gerado por A para (1.20).

Se assumimos que A é setorial com $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, então A é o gerador de um operador solução dado por

$$E_\alpha(t) = \int_\Gamma e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

com Γ um caminho apropriado que se encontra fora do setor $\omega + \Sigma_\theta$.

Lema 1.16. (Cuesta [26, Teorema 1]) *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial em X , satisfazendo as hipóteses (1.22)-(1.23), para algum $N > 0$, $\omega < 0$ e $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$. Então existe $C(\theta, \alpha) > 0$ dependendo unicamente de θ e α , tal que*

$$\|E_\alpha(t)\| \leq \frac{C(\theta, \alpha)N}{1 + |\omega|t^\alpha}. \quad (1.24)$$

Vamos considerar a seguinte condição.

(S) O operador A é setorial de tipo $\omega < 0$ e ângulo θ satisfazendo $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$.

Lema 1.17. *Seja $1 < \alpha < 2$. Assumamos que se tem (S) e $u \in AAA(X)$. Seja Φ a função definida por*

$$\Phi(t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)u(s)ds$$

então $\Phi \in AAA(X)$.

Demonstração. Como $u \in AAA(X)$ escrevemos $u(t) = g(t) + h(t)$, com $g \in AA(X)$ e $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+, X)$, então podemos decompor

$$\Phi(t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)g(s)ds + \int_0^t E_\alpha(t-s)h(s)ds.$$

Agora definimos as funções $G : \mathbb{R} \rightarrow X$ e $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ por

$$G(t) = \int_{-\infty}^t E_{\alpha}(t-s)g(s) ds$$

e

$$H(t) = - \int_{-\infty}^0 E_{\alpha}(t-s)g(s) ds + \int_0^t E_{\alpha}(t-s)h(s) ds.$$

Como $g \in AA(\mathbb{R}, X)$, podemos dizer que $G \in AA(\mathbb{R}, X)$ em vista de [11, Lema 3.1].

Mostraremos que $H \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+, X)$. Claramente H é contínua e limitada em $\mathbb{R}^+$. Além disso, para $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|h(s)\| \leq \epsilon$ para todo $s \geq T$. Definindo

$$h_T = \sup_{s \in [0, T]} \|h(s)\| < \|h\|_{\infty} < \infty.$$

e usando (1.24), obtemos

$$\begin{aligned} \|H(t)\| &= \left\| \int_0^T E_{\alpha}(t-s)h(s)ds + \int_T^t E_{\alpha}(t-s)h(s)ds - \int_{-\infty}^0 E_{\alpha}(t-s)g(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \frac{C(\theta, \alpha)M}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} \|h(s)\| ds + \int_T^t \frac{C(\theta, \alpha)M\epsilon}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} ds + \int_{-\infty}^0 \frac{C(\theta, \alpha)M}{1 + |\omega|(-s)t^{\alpha}} \|g(s)\| ds \\ &\leq \int_0^T \frac{C(\theta, \alpha)M}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} h_T ds + \int_T^t \frac{C(\theta, \alpha)M\epsilon}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} ds + \int_{-\infty}^0 \frac{C(\theta, \alpha)M}{1 + |\omega|(-s)t^{\alpha}} \|g\|_{\infty} ds \\ &\leq \frac{C(\theta, \alpha)M}{|\omega|} \left[\int_0^T (t-s)^{-\alpha} h_T ds + \int_{-\infty}^0 (t-s)^{-\alpha} \|g\|_{\infty} ds \right] + \int_T^t \frac{C(\theta, \alpha)M\epsilon}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} ds. \end{aligned}$$

Como

$$\int_T^t \frac{1}{1 + |\omega|(t-s)^{\alpha}} ds \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + |\omega|s^{\alpha}} ds = \frac{|\omega|^{-1/\alpha} \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$$

para $1 < \alpha < 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \|H(t)\| &\leq \frac{C(\theta, \alpha)M}{|\omega|} \left[\int_0^T (t-s)^{-\alpha} h_T ds + \int_{-\infty}^0 (t-s)^{-\alpha} \|g\|_{\infty} ds \right] + \int_0^{\infty} \frac{C(\theta, \alpha)M\epsilon}{1 + |\omega|s^{\alpha}} ds \\ &\leq \frac{C(\theta, \alpha)M}{(\alpha-1)|\omega|} \left[((t-T)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}) \|h\|_{\infty} + t^{1-\alpha} \|g\|_{\infty} \right] + C(\theta, \alpha)M\epsilon \frac{|\omega|^{-1/\alpha} \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}. \end{aligned}$$

De $(t-T) < t$ e $1-\alpha < 0$, temos $(t-T)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha} > 0$. Assim $t^{1-\alpha} \rightarrow 0$ e $(t-T)^{1-\alpha} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0$. A demonstração está completa já que $\Phi(t) = G(t) + H(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Lema 1.18. ([48], Lema 2.2) *Suponhamos que $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, X)$ é uniformemente contínua em todo subconjunto K de X , uniformemente em $t \in \mathbb{R}$. Então $u \in AA(\mathbb{R}, X)$ implica que a função $G(\cdot) = g(\cdot, u(\cdot))$ pertence $AA(\mathbb{R}, X)$.*

Capítulo 2

Soluções Quase Periódicas de Equações Diferenciais Parciais com Retardo

Este capítulo é dedicado a estudar a existência de soluções quase periódicas e quase automórficas de equações diferenciais funcionais parciais com retardo.

Neste capítulo denotamos por X um espaço de Banach complexo com norma $\|\cdot\|$. De agora em diante, representaremos por A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $T(t)$ em X .

2.1 Equações diferenciais parciais com retardo finito

Nesta seção continuamos a usar a notação C para o espaço das funções contínuas $C([-r, 0]; X)$, $r > 0$, munido com a norma da convergência uniforme. Estamos interessados na existência de soluções quase periódicas e quase automórficas para o problema de Cauchy

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

onde $x(t) \in X$, a função $x_t : [-r, 0] \rightarrow X$, denota o segmento de $x(\cdot)$ em t , é dada por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $L : C \rightarrow X$ é uma aplicação linear limitada, e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função contínua. A condição usual para a existência de soluções quase periódicas para esse problema é que o semigrupo $T(\cdot)$ é compacto. Por exemplo, o problema de existência de soluções

quase automórficas tem sido estudado recentemente por Ezzinbi e N'Guérékata [53] usando essa condição. Nosso objetivo nesta seção é estabelecer a existência de soluções quase periódicas para uma classe de equações em que o semigrupo $T(\cdot)$ não é compacto.

Como modelo consideramos a equação de onda com retardo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(\xi, t) + \beta \frac{\partial}{\partial t} w(\xi, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi, t) + \int_{-r}^0 d_\theta N(\theta) w(\xi, t + \theta) + b(\xi, t), \\ w(0, t) &= w(\pi, t) = 0, \end{aligned}$$

para $0 \leq \xi \leq \pi$ e $t \geq 0$, onde a função escalar $N(\cdot)$ tem variação limitada em $[-r, 0]$ e $b(\cdot)$ é uma função apropriada.

Em toda esta seção assumiremos que A e L satisfazem a condições gerais consideradas na seção 1.1 e usaremos todas as notações y resultados estabelecidos nessa seção.

Inicialmente estabelecemos formalmente o seguinte conceito.

Definição 2.1. *Uma função contínua $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma solução branda para a equação (2.1) se para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ a restrição $x : [\sigma, \infty) \rightarrow X$ é uma solução branda da equação (1.1) com condição inicial x_σ em $t = \sigma$.*

Se o semigrupo V é quase-compacto, podemos aplicar as propriedades e notações introduzidas na Observação 1.1 em relação com a equação homogênea (1.4). Em particular, colocamos $\Lambda = \{\lambda \in \sigma_p(A_V) : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$.

Uma aplicação direta de [82, Teorema 4.3] fornece a seguinte propriedade.

Proposição 2.1. *(Henríquez et al. [70]) Assuma que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Se $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução branda de (2.1) em $\mathbb{R}$, então $z(t) = \langle \Psi, x_t \rangle$ é uma solução da equação diferencial*

$$z'(t) = Gz(t) + \langle x^*, f(t) \rangle, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Reciprocamente, se f é uma função limitada em $\mathbb{R}$ e $z(\cdot)$ é uma solução de (2.2), então a função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por

$$x(t) = \left[\Phi z(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t V^Q(t-s) \Pi^Q(\Gamma^n f(s)) ds \right] (0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

é uma solução branda de (2.1).

Agora estamos em posição de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 2.1. *Assuma que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Se a equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$, então tem uma solução branda quase periódica.*

Demonstração. Seja $x(\cdot)$ a solução branda de (2.1) dada por (2.3). Como $z(t)$ satisfaz a equação (2.2) e $\sigma_p(G) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$, então $z(\cdot)$ é limitado em $\mathbb{R}$. Segue-se de [25, Teorema 4.2] que $z(\cdot)$ é uma função quase periódica. Por outro lado, se denotamos

$$Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t V^Q(t-s) \Pi^Q(\Gamma^n f(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

e

$$Y^n(t) = \int_{-\infty}^t V^Q(t-s) \Pi^Q(\Gamma^n f(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

então

$$\begin{aligned} Y^n(t+\tau) - Y^n(t) &= \int_{-\infty}^{t+\tau} V^Q(t+\tau-s) \Pi^Q(\Gamma^n f(s)) ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^t V^Q(t-s) \Pi^Q(\Gamma^n f(s)) ds \\ &= \int_{-\infty}^t V^Q(t-s) \Pi^Q(\Gamma^n (f(s+\tau) - f(s))) ds. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ e P_ε um conjunto relativamente denso em $\mathbb{R}$ para o qual a estimativa (1.13) se satisfaz. Utilizando que $V^Q(t)$ é um semigrupo uniformemente estável, existem constantes $M_1 \geq 1$ e $\alpha > 0$ tal que $\|V^Q(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$. Como $\|\Gamma^n\| \leq 1$, da expressão anterior se segue que

$$\|Y^n(t+\tau) - Y^n(t)\| \leq \frac{M_2}{\alpha} \varepsilon,$$

para certa constante $M_2 \geq 0$. Como essa estimativa é não depende de n , nós também obtemos que

$$\|Y(t+\tau) - Y(t)\| \leq \frac{M_2}{\alpha} \varepsilon,$$

o qual mostra que a função $Y(\cdot)$ é quase periódica. Completamos a demonstração combinando esta afirmação com a expressão (2.3). $\square$

Agora estamos em posição de estabelecer um resultado análogo no caso de funções quase automórficas:

Teorema 2.2. *Assuma que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase automórfica. Se a equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$, então ela tem uma solução branda quase automórfica.*

Demonstração. Seja $x(\cdot)$ uma solução branda de (2.1) dada por (2.3). Como $z(t)$ satisfaz a equação (2.2) e $\sigma_p(G) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$, então $z(\cdot)$ é limitado em $\mathbb{R}$. Segue-se de [104, Teorema 2.4] que $z(\cdot)$ é um função quase automórfica. Por outro lado, de (2.5) podemos escrever

$$Y^n(t) = \int_0^\infty V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t-s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja (s'_k) uma seqüência arbitrária de números reais. Como f é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_k) \subset (s'_k)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + s_k) = g(t)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} g(t - s_k) = f(t)$ em $\mathbb{R}$. Conseqüentemente, se fixamos $t \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t - s + s_k) = g(t - s)$$

para cada $s \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$Y^n(t + s_k) = \int_0^\infty V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t - s + s_k)) ds.$$

Utilizando que $V^Q(t)$ é um semigrupo uniformemente estável e que $\|\Gamma^n\| \leq 1$ obtemos que a função $V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t - s + s_k))$ é limitada por uma função integrável em $[0, \infty)$. Agora, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue ([104, Teorema 1.9]), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y^n(t + s_k) = \int_0^\infty V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n g(t - s)) ds := X^n(t),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. É claro que podemos aplicar o mesmo argumento para obter $\lim_{k \rightarrow \infty} X^n(t - s_k) = Y^n(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, o qual mostra que a função $Y^n(\cdot)$ é quase automórfica.

Por outro lado, para $a > 0$ podemos escrever

$$Y^n(t) = \int_0^a V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t-s)) ds + \int_a^\infty V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t-s)) ds$$

e

$$\int_a^\infty V^Q(s) \Pi^Q(\Gamma^n f(t-s)) ds \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty,$$

uniformemente em relação com $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como f é limitada, utilizando a construção no Teorema 3.1 em (Hino et al. [82]), especialmente o Lema 3.3, podemos concluir que $Y^n(\cdot)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ a $Y(\cdot)$, todo o qual mostra que $Y(\cdot)$ é quase automórfica. Completamos a demonstração com o argumento utilizado em Teorema 2.1. $\square$

A condição do semigrupo T ser uniformemente estável é um pouco exigente. No entanto, existem importantes sistemas de controle distribuídos sem retardo modelados por uma equação do tipo

$$x'(t) = Ax(t) + B_1 u(t), \quad (2.6)$$

onde $B_1 : \mathbb{C}^k \rightarrow X$ é uma aplicação linear, que são estabilizáveis. Referimos a [35, 120] para uma discussão sobre esse assunto. Vamos formalizar essa idéia.

Definição 2.2. Dizemos que um semigrupo $T(t)$ com gerador infinitesimal A é estabilizável se existe uma aplicação linear compacta $K : X \rightarrow X$ tal que o semigrupo $S(t)$ gerado por $A + K$ é uniformemente estável.

Corolário 2.1. Assuma que o semigrupo $T(\cdot)$ é estabilizável e o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Se a equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$, então tem uma solução branda quase periódica.

Demonstração. Segue-se de nossas hipóteses que existe um operador linear compacto $K : X \rightarrow X$ tal que o semigrupo $\tilde{T}(t)$ gerado por $\tilde{A} = A + K$ é uniformemente estável. A equação (2.1) pode-se escrever

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A + K)x(t) + \tilde{L}(x_t) + f(t) \\ &= \tilde{A}x(t) + \tilde{L}(x_t) + f(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o operador $\tilde{L} : C \rightarrow X$ é dado por

$$\tilde{L}(\varphi) = L(\varphi) - K\varphi(0).$$

Além disso,

$$\tilde{T}(t)\tilde{L}(\varphi) = \tilde{T}(t)L(\varphi) - \tilde{T}(t)K\varphi(0). \quad (2.8)$$

Como K é um operador compacto, podemos afirmar que o operador definido pelo segundo termo no lado direito de (2.8) define um operador compacto. Similarmente, é bem conhecido ([112]) que

$$\tilde{T}(t)x = T(t)x + \int_0^t \tilde{T}(t-s)KT(s)xds$$

e argumentando como na demonstração do Teorema 1.1, obtemos que $\tilde{T}(t)L$ é um operador compacto. Consequentemente, $\tilde{T}(t)\tilde{L}$ é um operador compacto, e podemos afirmar que a equação (2.7) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1. $\square$

Combinando esse resultado com os critérios de estabilização estabelecidos em [38, 120], podemos apresentar alguns resultados para a existência de soluções quase periódicas da equação (2.1) em termos da controlabilidade do sistema (2.6).

Definição 2.3. Dizemos que o sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito se para todo $x_1 \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ e $u \in L^1([0, t_1], \mathbb{C}^k)$ tal que a solução branda $x(\cdot)$ de (2.6) satisfaz $\|x(t_1) - x_1\| \leq \varepsilon$.

Em relação com esta definição é importante mencionar que na literatura existem numerosos critérios de controlabilidade aproximada para diferentes classes de sistemas.

No resultado seguinte assumiremos que existe uma decomposição topológica $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i são subespaços invariantes em A , e X_1 é um espaço de dimensão finita. Seja $T_i(t)$ a restrição do semigrupo $T(t)$ em X_i para $i = 0, 1$. Combinando o Corolário 2.1 com [35, Corolário 3.33] obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Assuma que se tem a seguinte condição:

- (a) O semigrupo $T_0(t)$ é uniformemente estável.
- (b) O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.
- (c) O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.
- (d) A equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$.

Então a equação (2.1) tem uma solução branda quase periódica.

Em [38, 114, 120] o leitor encontrará muitos sistemas que satisfazem as condições do Corolário 2.2. Similarmente, do Corolário 2.2 e dos resultados de [15], obtemos a seguinte consequência da controlabilidade.

Corolário 2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Assuma que X é um espaço de Hilbert e que $T(t)$ é um semigrupo de contrações tal que $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$.*

Assuma além disso, que as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.*
- (b) O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.*
- (c) A equação (2.1) tem uma solução branda em $\mathbb{R}^+$.*

Então a equação (2.1) tem uma solução branda quase periódica.

Demonstração. Segue de [15, Theorem 3.4.1] que o semigrupo $S(t)$ gerado por $A - B_1 B_1^*$ é fortemente estável. Além disso, de

$$S(t)x = T(t)x - \int_0^t S(t-s)BB^*T(s)xds,$$

obtemos que $S(t_0)$ é um operador compacto. Usando agora [16, Theorem 1.4.6] deduzimos que $S(t)$ é uniformemente estável. Portanto, o semigrupo $T(t)$ é estabilizável e a afirmação é consequência do Corolário 2.1. $\square$

Resultados similares podem estabelecerse em relação com a existência de soluções quase automórficas.

Corolário 2.4. *Assuma que o semigrupo $T(\cdot)$ é estabilizável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase automórfica. Se a equação (2.1) tem uma solução branda em $\mathbb{R}^+$, então ela tem uma solução branda quase automórfica.*

No resultado seguinte assumiremos que existe uma decomposição topológica $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i são subespaços invariantes em A , e X_1 é um espaço de dimensão finita. Seja $T_i(t)$ uma restrição do semigrupo $T(t)$ em X_i para $i = 0, 1$.

Corolário 2.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase automórfica. Assuma que se têm as seguintes condições:*

- (a) *O semigrupo $T_0(t)$ é uniformemente estável.*
- (b) *O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.*
- (c) *O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.*
- (d) *A equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$.*

Então a equação (2.1) tem uma solução branda quase automórfica.

Corolário 2.6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase automórfica. Assuma que X é um espaço de Hilbert, e que $T(t)$ é um semigrupo de contrações tal que $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$. Assuma, além disso, que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.*
- (b) *O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.*
- (c) *A equação (2.1) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$.*

Então a equação (2.1) tem uma solução branda quase automórfica.

2.2 Aplicações

Em esta seção aplicamos nossos resultados ao estudo da existência de soluções quase periódicas e quase automórficas de duas classes de equações diferenciais abstratas.

2.2.1 Aplicação 1

Inicialmente vamos considerar sistemas regidos por equações diferenciais parciais de primeiro ordem. Este tipo de equações descreve interessantes fenômenos tais como modelos de transporte (Salsa [118]) ou modelos de crescimento de populações (Murray [103]). Para simplificar a exposição vamos considerar

$$\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \alpha w(t, \xi) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) w(t - r, \eta) d\eta = \tilde{f}(t, \xi), \quad (2.9)$$

$$w(\theta, \xi) = \varphi(\theta, \xi), \quad (2.10)$$

para $\xi \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $-r \leq \theta \leq 0$, onde $\alpha, r > 0$ e $g, \tilde{f}, \varphi$ são funções que satisfazem condições apropriadas que seram especificadas mais adiante. É conhecido [13, Exemplo 4.6.1] que o problema de valores iniciais

$$\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \alpha w(t, \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (2.11)$$

$$w(0, \xi) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

pode ser modelado por um problema de Cauchy abstrato no espaço $X = L^2(\mathbb{R})$.

Por essa razão, no que segue vamos supor que $h \in X$, $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por $f(t) = \tilde{f}(t, \cdot)$ é uma função contínua limitada, e que $\varphi \in C([-r, 0], X)$, onde nos abreviamos a notação escrevendo $\varphi(\theta)(\xi) = \varphi(\theta, \xi)$. Seja A o operador

$$Az(\xi) = -\frac{dz(\xi)}{d\xi} - \alpha z(\xi)$$

no domínio $D(A) = H^1(\mathbb{R})$. O operador A é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo $T(t)$ em X definido por

$$T(t)z(\xi) = e^{-\alpha t} z(\xi - t), \quad t, \xi \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, o problema (2.11)-(2.12) reduz-se ao problema de Cauchy abstrato

$$x'(t) = Ax(t),$$

$$x(0) = h.$$

Ademais, o semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, é uniformemente estável, e o operador $T(t)$ não é compacto já que $T(t)$ têm inversa limitada $T(-t)$.

Alem disso, vamos a supor que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi < \infty$.

Lema 2.1. *Nas condições anteriores, o operador linear $N : X \rightarrow X$ definido por*

$$Nz(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta$$

é compacto.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $N_n : X \rightarrow X$ por

$$N_n z(\xi) = \int_{-n}^n g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta, \quad -n \leq \xi \leq n,$$

e $N_n z(\xi) = 0$ para $|\xi| > n$. De [50, Proposition 9.5.2] obtemos que N_n é um operador compacto. No que segue mostraremos que $N_n \rightarrow N$, quando $n \rightarrow \infty$ na norma de operadores. De fato, para $z \in X$ temos

$$\begin{aligned} \|Nz - N_n z\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |Nz(\xi) - N_n z(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{-n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta \right|^2 d\xi + \int_{-n}^n \left| \int_{-\infty}^{-n} g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_n^{\infty} g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta \right|^2 d\xi + \int_n^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)z(\eta)d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \|z\|^2 + 2 \int_{-n}^n \int_{-\infty}^{-n} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \|z\|^2 \\ &\quad + 2 \int_{-n}^n \int_n^{\infty} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \|z\|^2 + \int_n^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \|z\|^2. \end{aligned}$$

Seja $D_n = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \in [-n, n]\}$. A estimativa precedente mostra que

$$\|N - N_n\|^2 \leq 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_n} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

pelo teorema da convergência limitada de Lebesgue. $\square$

Este resultado é também válido para algumas funções descontínuas [95, Proposition V.4.1].

Agora definimos $L : C([-r, 0], X) \rightarrow X$ por $L(\psi) = -N\psi(-r)$. Segue-se do Lema 2.1 que L é uma aplicação compacta. O sistema original (2.9)-(2.10) é representado pelo o sistema abstrato

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + L(x_t) + f(t), \\ x_0 &= \varphi, \end{aligned}$$

e como consequência do Teorema 2.1 e do Teorema 2.2 podemos estabelecer.

Corolário 2.7. *Nas anteriores condições, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica (respectivamente, quase automórfica). Se o problema (2.9)-(2.10) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$. Então o problema (2.9)-(2.10) tem uma solução branda quase periódica (respectivamente, quase automórfica).*

2.2.2 Aplicação 2

No que sigue aplicamos nossos resultados para estudar a existência de soluções quase periódicas e quase automórficas da equação da onda abstrata com retardo.

Seja H um espaço de Hilbert real. Seguindo [38, Exemplo 2.16] consideraremos a equação de onda abstrata

$$x''(t) + \beta x'(t) + Ax(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$x(0) = x^0, \quad x'(0) = x^1, \quad (2.14)$$

onde $x(t) \in H$, $\beta > 0$ e A é um operador auto-adjunto positivo com domínio $D(A)$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq k \|x\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

para alguma constante $k > 0$.

Introduzindo o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = D(A^{1/2}) \times H$ com produto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle A^{1/2}x^1, A^{1/2}x^2 \rangle + \langle y^1, y^2 \rangle,$$

podemos escrever (2.13) como um sistema de primeira ordem

$$w'(t) = \mathcal{A}w(t),$$

onde $w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -\beta \end{bmatrix}$ é definido em $D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A^{1/2})$.

Então $\mathcal{A}$ gera um grupo fortemente contínuo $G(t)$ em $\mathcal{H}$. Consequentemente, $G(t)$ não é compacto.

Agora consideramos a equação de onda não-homogênea

$$x''(t) + \beta x'(t) + Ax(t) = f(t). \quad (2.15)$$

Usando a transformação anterior, podemos reduzir (2.15) a uma equação de primeira ordem

$$w'(t) = \mathcal{A}w(t) + \tilde{f}(t),$$

onde $\tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$.

Sem perda de generalidade, assumiremos que $G(t)$ é uniformemente estável.

Finalmente consideramos a equação de onda com retardo

$$x''(t) + \beta x'(t) + Ax(t) = f(t) + L_1(x_t), \quad (2.16)$$

onde $L_1 : C([-r, 0], H) \rightarrow H$ é um operador linear limitado. Usando a transformação anterior, podemos reduzir (2.16) a uma equação de primeira ordem com retardo

$$w'(t) = \mathcal{A}w(t) + L(w_t) + \tilde{f}(t), \quad (2.17)$$

onde $L : C([-r, 0], \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ é dada por

$$L \left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1(\varphi) \end{bmatrix}.$$

A propriedade seguinte é uma consequência direta do Teorema 2.1.

Corolário 2.8. *Nas condições anteriores, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow H$ uma função quase periódica (respectivamente, quase automórfica). Assuma que L_1 é um operador compacto, e que a equação (2.16) tem uma solução branda limitada em $\mathbb{R}^+$. Então a equação (2.16) tem uma solução branda quase periódica (respectivamente, quase automórfica).*

Demonstração. Está claro que L é um operador compacto assim que $G(t)L$ também é compacto para todo $t > 0$. □

2.3 Equações diferenciais parciais com retardo infinito

Nesta seção denotaremos por $\mathcal{B}$ um espaço de fase de funções $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$.

Estamos interessados na existência de soluções quase periódicas e quase automórficas para equações diferenciais funcionais abstratas semi lineares com retardo infinito

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u_t), \quad t \geq 0, \quad (2.18)$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (2.19)$$

onde $u(t) \in X$, $u_t : (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ e $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função apropriada e A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Vamos a supor que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente estável, especificamente existem $\widetilde{M} \geq 1$ e $\omega < 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq \widetilde{M}e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.20)$$

Para estudar este problema, vamos a supor que $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua. Comparando com o problema abstrato de Cauchy (Pazy [112]), estabelecemos o seguinte conceito de solução.

Definição 2.4. Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma solução branda para o problema (2.18)-(2.19) se $u_0 = \varphi$, u é contínua em $[0, \infty)$ e

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t \geq 0. \quad (2.21)$$

Agora estabelecemos o seguinte resultado de existência.

Teorema 2.3. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Suponhamos que $f \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L_f \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (2.22)$$

para todo $(t, \psi_i) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. Se $\frac{\widetilde{M}L_f K}{|\omega|} < 1$, então o problema (2.18)-(2.19) possui uma única solução branda $u \in AAA_c(X)$.

Demonstração. Defina o espaço $\mathcal{D} = \{u \in AAA_c(X) : u(0) = \phi(0)\}$ munido com a métrica dada por $d(u, v) = \|u - v\|_\infty$. Definimos o operador Γ em $\mathcal{D}$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{u}_s)ds, \quad t \geq 0,$$

onde $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é a função tal que $\tilde{u}_0 = \phi$ em $(-\infty, 0]$ e $\tilde{u} = u$ em $[0, \infty)$. Seja $f = g + h$, onde $g \in AA_c(\mathbb{R} \times \mathcal{B}, X)$ e $h \in C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$. Seja u em $\mathcal{D}$, com decomposição $u = y + z$ com $y \in AA_c(X)$ e $z \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$. Então $\tilde{u}_t = y_t + z_t$. Pelo [47, Lema 3.5] a função $t \mapsto y_t \in AA_c(\mathcal{B})$ e $t \mapsto z_t \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$.

Usando (2.22) e o Lema 1.7 obtemos que a função $t \mapsto f(t, \tilde{u}_t) \in AAA_c(X)$. Notamos que $T(t)\phi(0) \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$. Agora é possível usar o mesmo argumento como no [47, Lema 3.4] para mostrar que $\int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{u}_s)ds \in AAA_c(X)$. Assim $\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ é bem definido e contínua.

Agora para $u, v \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \widetilde{M}L_f \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \frac{\widetilde{M}L_f K}{|\omega|} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim $d(\Gamma u, \Gamma v) \leq \frac{\widetilde{M}L_f K}{|\omega|} d(u, v)$.

Deduzimos a existência e unicidade de soluções assintoticamente quase automórficas compactas como consequência do princípio da contração de Banach. $\square$

Podemos evitar a condição $\frac{\widetilde{M}L_f K}{|\omega|} < 1$ com o seguinte resultado complementar.

Teorema 2.4. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ uma função assintoticamente quase automórfica compacta que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L(t)\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (2.23)$$

para todo $(t, \psi_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$, $i=1,2$, onde $L \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Então o problema (2.18)-(2.19) possui uma solução branda $u \in AAA_c(X)$.

Demonstração. Seja Γ a aplicação introduzida na demonstração do Teorema 2.3. Então $\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ esta bem definida. Ademais, para $u, v \in \mathcal{D}$ temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_0^t L(s) \|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \widetilde{M} K \int_0^t L(s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\|. \end{aligned}$$

Repetindo a ideia, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma^2 u(t) - \Gamma^2 v(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_0^t L(s) \|\tilde{\Gamma} u_s - \tilde{\Gamma} v_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \widetilde{M} K \int_0^t L(s) \sup_{0 \leq \xi \leq s} \|\Gamma u(\xi) - \Gamma v(\xi)\| ds \\ &\leq (\widetilde{M} K)^2 \int_0^t L(s) \int_0^s L(\xi) d\xi ds \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\| \\ &\leq \frac{(\widetilde{M} K)^2}{2} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^2 \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\| \\ &\leq \frac{(\widetilde{M} K \|L\|_1)^2}{2} \|u - v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Em geral, conseguimos

$$d(\Gamma^n u, \Gamma^n v) \leq \frac{(\widetilde{M} K \|L\|_1)^n}{n!} d(u, v).$$

Portanto, como $\frac{(\widetilde{M} K \|L\|_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande, podemos afirmar que Γ tem um único ponto fixo. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Em seguida estabelecemos duas versões do Teorema 2.3 que nos permitem considerar perturbações localmente Lipschitz para a equação (2.18).

Teorema 2.5. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ uma função assintoticamente quase automórfica compacta que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L(R) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (2.24)$$

para cada $t \geq 0$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ tal que $\|\psi_1\|_{\mathcal{B}} \leq R$, $\|\psi_2\|_{\mathcal{B}} \leq R$, onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não-decrescente tal que $L(0) = 0$ e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$. Então

existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada ϕ satisfazendo $\|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon$, existe uma unica solução branda assintoticamente quase autom3rfica compacta para o problema (2.18)-(2.19).

Demonstração. Vamos escolher $\lambda, R > 0$ tal que

$$\widetilde{M}\lambda + \frac{\widetilde{M}}{|\omega|}L((K + \lambda M)R)(K + \lambda M) < 1.$$

Comprovaremos que a afirmação é valida para $\varepsilon = \lambda R$. De fato, seja $\phi \in \mathcal{B}$ tal que $\|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq \lambda R$. Definamos o espaço $\mathcal{D}_R = \{u \in AAA_c(X) : u(0) = \phi(0), \|u(t)\| \leq R, t \geq 0\}$ munido com a métrica dada por $d(u, v) = \|u - v\|_{\infty}$. Definimos o operador Γ como na demonstração do Teorema 2.3 no domínio $\mathcal{D}_R$. O argumento usado na demonstração do Teorema 2.3 mostra que $\Gamma(AAA_c(X)) \subseteq AAA_c(X)$.

Em seguida, para qualquer $u \in \mathcal{D}_R$ dado, mostrarmos que $\Gamma u \in \mathcal{D}_R$. É suficiente demonstrar que $\|\Gamma u(t)\| \leq R$ para todo $t \geq 0$. De fato

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t)\| &\leq \widetilde{M}\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M} \int_0^t e^{\omega(t-s)}L((K + \lambda M)R)(K + \lambda M)Rds \\ &\leq \left[\widetilde{M}\lambda + \frac{\widetilde{M}}{|\omega|}L((K + \lambda M)R)(K + \lambda M) \right] R \leq R. \end{aligned}$$

Portanto $\Gamma(\mathcal{D}_R) \subseteq \mathcal{D}_R$. Por outro lado $u, v \in \mathcal{D}_R$ vemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_0^t e^{\omega(t-s)}L((K + \lambda M)R)\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_{\mathcal{B}}ds \\ &\leq \frac{\widetilde{M}K}{|\omega|}L((K + \lambda M)R)\|u - v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Inferimos que Γ    uma contração de $\mathcal{D}_R$ em $\mathcal{D}_R$. □

No seguinte vamos estudar a existência de soluções assintoticamente quase autom3rficas.

Teorema 2.6. *Seja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}^{\infty}((-\infty, 0], X)$ um espaço de fase com memória amortecida. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^{\infty}((-\infty, 0], X) \rightarrow X$ uma função que satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *A função $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathcal{L}^{\infty}((-\infty, 0], X), X)$ e verifica a condição de Lipschitz (2.22).*
- (b) *Se $\psi^n \in \mathcal{L}^{\infty}((-\infty, 0], X)$ é uma seqüência uniformemente limitada que converge pontualmente a ψ , então $f(t, \psi^n) \rightarrow f(t, \psi)$, $n \rightarrow \infty$, uniformemente para $t \geq 0$.*

Se $\frac{\widetilde{ML}_f K}{|\omega|} < 1$, então o problema (2.18)-(2.19) possui uma única solução branda $u \in AAA(X)$.

Demonstração. Defina o espaço $\mathcal{D} = \{u \in AAA(X) : u(0) = \phi(0)\}$ munido com a métrica dada por $d(u, v) = \|u - v\|_\infty$. Definimos o operador Γ em $\mathcal{D}$ como na demonstração do Teorema 2.3.

Seja u em $\mathcal{D}$, com decomposição $u = y + z$ com $y \in AA(X)$ e $z \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$. Então $\tilde{u}_t = y_t + z_t$ e $\|z_t\|_B \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Temos também a seguinte decomposição

$$f(s, \tilde{u}_s) = f(s, \tilde{u}_s) - f(s, y_s) + f(s, y_s).$$

Como

$$\|f(s, \tilde{u}_s) - f(s, y_s)\| \leq L_f \|z_s\|_B \rightarrow 0, s \rightarrow \infty,$$

a função $f(t, \tilde{u}_t) - f(t, y_t) \in C_0((-\infty, 0], X)$.

Seja $(s'_n)_n$ uma seqüência em $\mathbb{R}$. Então existe uma subsequência $(s_n)_n$ tal que $y(t + s_n) \rightarrow \tilde{y}(t)$, $\tilde{y}(t - s_n) \rightarrow y(t)$, $n \rightarrow \infty$, e $f(t + s_n, \psi) \rightarrow \tilde{f}(t, \psi)$, $\tilde{f}(t - s_n, \psi) \rightarrow f(t, \psi)$, $n \rightarrow \infty$, para toda $\psi \in \mathcal{L}^\infty((-\infty, 0], X)$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(t + s_n, y_{t+s_n}) - \tilde{f}(t, \tilde{y}_t) &= f(t + s_n, y_{t+s_n}) - f(t + s_n, \tilde{y}_t) \\ &\quad + f(t + s_n, \tilde{y}_t) - \tilde{f}(t, \tilde{y}_t). \end{aligned}$$

É claro que o primeiro termo do lado direito de esta decomposição converge a zero pela condição (b) e o segundo termo também converge a zero pela construção. Ademais, se $\psi^n \in \mathcal{L}^\infty((-\infty, 0], X)$ é uma seqüência uniformemente limitada que converge pontualmente a ψ , da decomposição

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, \psi^n) - \tilde{f}(t, \psi) &= \tilde{f}(t, \psi^n) - f(t + s_k, \psi^n) + f(t + s_k, \psi^n) - f(t + s_k, \psi) \\ &\quad + f(t + s_k, \psi) - \tilde{f}(t, \psi) \end{aligned}$$

e usando as propriedades da construção obtemos que $\tilde{f}(t, \psi^n) - \tilde{f}(t, \psi) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Usando agora esta propriedade e a decomposição

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t - s_n, \tilde{y}_{t-s_n}) - f(t, y_t) &= \tilde{f}(t - s_n, \tilde{y}_{t-s_n}) - \tilde{f}(t - s_n, y_t) \\ &\quad + \tilde{f}(t - s_n, y_t) - f(t, y_t) \end{aligned}$$

obtemos que $\tilde{f}(t - s_n, \tilde{y}_{t-s_n}) - f(t, y_t) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Combinando estas afirmações obtemos que a função $t \rightarrow f(t, y_t)$ é quase automórfica.

Por [48, Lema 2.6], $\Gamma(u) \in AAA(X)$. Completamos a demonstração como na demonstração do Teorema 2.3. $\square$

Exemplo 2.1. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}^\infty((-\infty, 0], X)$. Seja

$$f(t, \psi) = a(t) \int_{-\infty}^0 \beta(\theta) \psi(\theta) d\theta + h(t),$$

onde $a(\cdot) \in AA(\mathbb{R})$, $h(\cdot) \in AA(X)$ e $\beta : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável. Se β satisfaz uma condição de integrabilidade apropriada tal que

$$\int_{-\infty}^0 |\beta(\theta)| \|\psi(\theta)\| d\theta \leq C \|\psi\|_{\mathcal{B}}$$

para todo $\psi \in \mathcal{B}$ e certa constante $C \geq 0$, então f satisfaz as hipóteses do Teorema 2.6.

2.4 Equações integro-diferenciais semilineares

Nesta seção estudamos a equação integro-diferencial com retardo infinito

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-2} A u(s) ds + f(t, u_t), \quad t \geq 0, \quad (2.25)$$

$$u_0 = \phi, \quad (2.26)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $\phi \in \mathcal{B}$, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador setorial e $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função contínua.

Em Cuevas e de Souza [37], os autores estudaram a existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas para a equação (2.25). Observamos que existe muito interesse em desenvolver a análise teórica e métodos numéricos para equações deste tipo porque recentemente tem provado ser de grande valor em vários campos da ciência e da engenharia. Para detalhes, incluindo algumas aplicações e resultados recentes, o leitor pode vêr as monografias de Ahn e Mac Vinish [8], Gorenflo e Mainardi [57], Ross [116], e os artigos de Agarwal et al. [2, 3, 4, 5, 6], Benchohra et al. [16], Mophou e N'Guérékata [97, 98, 99, 100], Cuevas et al. [31, 34, 36, 37, 41, 49], Lakshmikantham et al. [85, 86, 87], e suas referências.

Assumindo que A é um operador setorial que é o gerador de um operador solução $E_\alpha(t)$, estabelecemos o seguinte conceito.

Definição 2.5. Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma solução branda para (2.25)-(2.26) se u é contínua em $[0, \infty)$, $u_0 = \phi$ e

$$u(t) = E_\alpha(t)\phi(0) + \int_0^t E_\alpha(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.27)$$

Teorema 2.7. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Seja $1 < \alpha < 2$. Assumamos que se tem a condição (S) e que $f \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$ com a decomposição $f = g + h$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(a) A função $g \in AA_c(\mathbb{R} \times \mathcal{B}, X)$ é uniformemente contínua em todo subconjunto limitado $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ uniformemente em $t \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$.

(b) A função f verifica a condição de Lipschitz (2.22).

(c) $\gamma := L_f K \frac{C(\theta, \alpha)N|\omega|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} < 1$, onde $C(\theta, \alpha)$ e N são as constantes dadas em (1.24).

Então a equação (2.25)-(2.26) possui uma única solução branda assintoticamente quase automática compacta.

Demonstração. Usamos as mesmas notações introduzidas na demonstração do Teorema 2.3. Neste caso definimos Γ em $\mathcal{D}$ por

$$(\Gamma u)(t) := E_\alpha(t)\phi(0) + \int_0^t E_\alpha(t-s)f(s, \tilde{u}_s)ds.$$

Como $f(\cdot, \tilde{u}_\cdot) \in AAA(X)$, procedendo como na demonstração do Teorema 2.3 e usando o Lema 1.17 obtemos que $\int_0^t E_\alpha(t-s)f(s, \tilde{u}_s)ds \in AAA_c(X)$ quando $u \in \mathcal{D}$. Assim $\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ é bem definido. Agora para $u, v \in \mathcal{D}$ temos

$$\begin{aligned} \|(\Gamma u)(t) - (\Gamma v)(t)\| &\leq \int_0^t E_\alpha(t-s)\|f(s, \tilde{u}_s) - f(s, \tilde{v}_s)\|ds \\ &\leq \int_0^t \frac{C(\theta, \alpha)NL_f}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \frac{L_f KC(\theta, \alpha)N|\omega|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_\infty \leq \gamma \|u - v\|_\infty,$$

a qual mostra que Γ é uma contração estrita. Em consequência Γ tem um ponto fixo que é uma solução branda assintoticamente quase automórfica compacta. $\square$

Teorema 2.8. *Nas mesmas hipóteses do Teorema 2.4. Então a equação (2.25) possui uma única solução branda assintoticamente quase automórfica compacta.*

Demonstração. Usando a notação introduzida na demonstração do Teorema 2.7, consideramos a aplicação Γ definida em $\mathcal{D}$. Segue-se de nossas suposições que Γ é bem definido. Procedendo como na demonstração do Teorema 2.4, inferimos que

$$\|\Gamma^n u - \Gamma^n v\|_\infty \leq \frac{(KC(\theta, \alpha)N\|L\|_1)^n}{n!} \|u - v\|_\infty, \quad u, v \in \mathcal{D}.$$

Como $\frac{(KC(\theta, \alpha)N\|L\|_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande, pelo método dos iterados obtemos que Γ tem um único ponto fixo $u \in \mathcal{D}$. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Capítulo 3

Soluções S -assintoticamente ω -Periódicas de Equações Integro-Diferenciais Funcionais

Este capítulo está orientado a estabelecer a existencia de soluções com comportamento de tipo periódico para diferentes equações integro-diferenciais abstractas com e sem retardo.

3.1 Equações integro-diferenciais abstratas

Nesta seção estudamos a existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas para a classe de equações integro-diferenciais abstratas

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

$$u(0) = z, \quad (3.2)$$

onde $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ e $B(t) : D(B(t)) \subseteq X \rightarrow X$ para $t \geq 0$ são operadores lineares fechados densamente definidos num espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ e $D(A) \subset D(B(t))$ para toda $t \geq 0$. Assumimos que o problema de Cauchy (1.15)-(1.16) admite uma família resolvente $R(t)$ que satisfaz a condição de estabilidade **(R4)** e que $g : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua.

Os resultados que vamos a apresentar encontrassem também em nosso trabalho [21]. Inicialmente seguindo a Definição 1.16 estabelecemos o conceito de solução branda para o problema (3.1)-(3.2).

Definição 3.1. *Seja $g : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ localmente integrável. Dizemos que a função contínua $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma solução branda do problema (3.1)-(3.2) se satisfaz*

$$u(t) = R(t)z + \int_0^t R(t-s)g(s, u(s))ds, \quad t \geq 0,$$

Teorema 3.1. *Assumamos que $g : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_g \|x - y\|, \quad (3.3)$$

para todo $x, y \in X$ e toda $t \geq 0$. Se $\frac{L_g \widetilde{M}}{\mu} < 1$, então o problema (3.1)-(3.2) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definimos a aplicação Γ no espaço $SAP_\omega(X)$ pela expressão

$$\Gamma u(t) = R(t)z + \int_0^t R(t-s)g(s, u(s))ds, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

A seguir provaremos que Γ é uma contração de $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$. Mostraremos inicialmente que Γ é uma aplicação com valores em $SAP_\omega(X)$. Seja $u \in SAP_\omega(X)$. Abreviamos a notação escrevendo

$$w(t) = \int_0^t R(t-s)g(s, u(s))ds \quad (3.5)$$

Levando em consideração que a função $R(\cdot)z \in SAP_\omega(X)$, só resta mostrar que a função $w(\cdot)$ dada por (3.5) pertence a $SAP_\omega(X)$. Usando o fato de que g é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados e aplicando o Lema 1.8, se segue que a função $g(\cdot, u(\cdot)) \in SAP_\omega(X)$. Pelo Lema 1.11, obtemos que $w \in SAP_\omega(X)$. Por outro lado, se $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$ temos a estimativa

$$\|(\Gamma u_1)(t) - (\Gamma u_2)(t)\| \leq L_g \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \leq \frac{L_g \widetilde{M}}{\mu} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

O ponto fixo de Γ é a única solução branda de (3.1)-(3.2). A demonstração está agora completa. $\square$

Um resultado similar pode ser estabelecido quando g satisfaz uma condição local de Lipschitz.

Teorema 3.2. *Assumamos que $g(\cdot)$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condição local de Lipschitz*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_g(r)\|x - y\|, \quad (3.6)$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x, y \in X$ com $\|x\| \leq r$ e $\|y\| \leq r$, onde $L_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não-decrescente. Seja $C = \sup_{t \geq 0} \|g(t, R(t)z)\|$. Se existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{\widetilde{M}}{\mu} (L_g(r_0 + \widetilde{M}\|z\|) + \frac{C}{r_0}) < 1, \quad (3.7)$$

então existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica de (3.1)-(3.2).

Demonstração. Seja $SAP_\omega^0(X) = \{v \in SAP_\omega(X) : v(0) = 0\}$. Está claro que $SAP_\omega^0(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $SAP_\omega(X)$, pelo que podemos afirmar que $SAP_\omega^0(X)$ é um espaço de Banach. Seja $\Gamma : SAP_\omega^0(X) \rightarrow SAP_\omega^0(X)$ a aplicação definida por

$$\Gamma v(t) = \int_0^t R(t-s)g(s, v(s) + R(s)z)ds.$$

Como g é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados, podemos argumentar como na demonstração do Teorema 3.1 para concluir que Γ está bem definida. Para $v_1, v_2 \in SAP_\omega^0(X)$ com $\|v_1\|_\infty \leq r$ e $\|v_2\|_\infty \leq r$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma v_1(t) - \Gamma v_2(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_g(r + \widetilde{M}\|z\|) \|v_1(s) - v_2(s)\| ds \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g(r + \widetilde{M}\|z\|) \|v_1 - v_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|\Gamma v_1 - \Gamma v_2\|_\infty \leq \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g(r + \widetilde{M}\|z\|) \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

Por outro lado, para $v \in SAP_\omega^0(X)$ com $\|v\|_\infty \leq r$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma v\|_\infty &\leq \|\Gamma v - \Gamma(0)\|_\infty + \|\Gamma(0)\|_\infty \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g(r + \widetilde{M}\|z\|) r + \frac{C\widetilde{M}}{\mu}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\|v\|_\infty \leq r_0$ de (3.7) segue que $\|\Gamma v\|_\infty \leq r_0$. Das observações anteriores segue-se que Γ é uma contração em $B_{r_0}(SAP_\omega^0(X))$. Assim existe um único ponto fixo $v \in B_{r_0}(SAP_\omega^0(X))$ de Γ . É imediato agora que $u(t) = v(t) + R(t)z$ é uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica de (3.1)-(3.2). Para finalizar a demonstração notamos que a unicidade é consequência da Definição 3.1 e do Lema de Gronwall da maneira usual. $\square$

Também podemos evitar uma condição de Lipschitz uniforme no tempo t tal como (3.3).

Teorema 3.3. *Assumamos que $g(\cdot)$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_g(t)\|x - y\|, \quad (3.8)$$

para todo $x, y \in X$ e todo $t \geq 0$, onde a função $L_g(\cdot)$ é localmente integrável em $[0, \infty)$. Se

$$\Theta = \widetilde{M} \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L(s) ds < 1,$$

então o problema (3.1)-(3.2) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definimos a aplicação Γ no espaço $SAP_\omega(X)$ pela expressão (3.4). Para $u \in SAP_\omega(X)$, seja v a função dada por (3.5). Como a função $u(\cdot)$ é limitada, segue-se da Definição 1.13 que $C = \sup_{s \geq 0} \|g(s, u(s))\| < \infty$. Logo

$$\|v(t)\| \leq \int_0^t \widetilde{M} e^{-\mu(t-s)} \|g(s, u(s))\| ds \leq \frac{C\widetilde{M}}{\mu}$$

o qual mostra que Γu é uma função contínua limitada em $[0, \infty)$.

A seguir provaremos que Γ é uma Θ -contração de $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$. Mostraremos inicialmente que a imagem de Γ pertence a $SAP_\omega(X)$. Seja $u \in SAP_\omega(X)$. Então $u(\cdot)$ e $t \mapsto g(t, u(t))$ são funções limitadas em $[0, \infty)$. No que se segue, seja $B = \{u(t) : t \geq 0\}$. Para $t \geq T$, podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t + \omega) - v(t) &= \int_0^t R(s)[g(t + \omega - s, u(t + \omega - s)) - g(t - s, u(t - s))] ds \\ &\quad + \int_t^{t+\omega} R(s)g(t + \omega - s, u(t + \omega - s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T R(s)[g(t+\omega-s, u(t+\omega-s)) - g(t-s, u(t+\omega-s))]ds \\
&\quad + \int_0^T R(s)[g(t-s, u(t+\omega-s)) - g(t-s, u(t-s))]ds \\
&\quad + \int_T^t R(s)[g(t+\omega-s, u(t+\omega-s)) - g(t-s, u(t-s))]ds \\
&\quad + \int_t^{t+\omega} R(s)g(t+\omega-s, u(t+\omega-s))ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Abaixo estimaremos cada um dos termos $I_i, i : 1, 2, 3, 4$, da expressão anterior separadamente. Para cada $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \min\{\frac{\mu}{M}, \frac{1}{\Theta}\}\frac{\varepsilon}{3}$. Escolhemos $T > 0$ tal que se tem a seguintes condições :

- (i) $e^{-\mu T} \leq \frac{\varepsilon\mu}{9CM}$,
- (ii) $\|u(t+\omega) - u(t)\| \leq \varepsilon', e$
- (iii) $\|g(t+\omega, x) - g(t, x)\| \leq \varepsilon'$,

para todo $t \geq T$ e $x \in B$. Seja $t \geq 2T$. Como $t-s \geq t-T \geq T$ para $0 \leq s \leq T$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq \widetilde{M}\varepsilon' \int_0^T e^{-\mu s} ds \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\
\|I_2\| &\leq \varepsilon' \widetilde{M} \int_0^T e^{-\mu s} L_g(t-s) ds \leq \varepsilon' \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu s} L_g(t-s) ds \leq \varepsilon' \Theta \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\
\|I_3\| &\leq \widetilde{M} \int_T^t e^{-\mu s} 2C ds \leq \frac{2C\widetilde{M}}{\mu} e^{-\mu T} \leq 2\frac{\varepsilon}{9}, \\
\|I_4\| &\leq \widetilde{M} \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} C ds \leq \frac{C\widetilde{M}}{\mu} e^{-\mu T} \leq \frac{\varepsilon}{9}.
\end{aligned}$$

Combinando estas estimativas encontramos

$$\|v(t+\omega) - v(t)\| \leq \varepsilon,$$

para $t \geq 2T$. Portanto $v \in SAP_\omega(X)$.

Por outro lado, se $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$ temos

$$\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| \leq \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_g(s) \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \leq \Theta \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Completamos a demonstração argumentando como na demonstração do Teorema 3.1. $\square$

Presentamos a continuação um exemplo de uma função g que satisfaz as condições do Teorema 3.3.

Exemplo 3.1. Sejam $a, b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $a(\cdot)$ é S -assintoticamente ω -periódica e $b(\cdot)$ é contínua ω -periódica. Seja $q : X \rightarrow X$ uma função limitada que verifica a condição de Lipschitz uniforme

$$\|q(x) - q(y)\| \leq Q\|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

onde $Q > 0$ é uma constante. Seja $g(t, x) = a(t)q(b(t)x)$. É fácil verificar que $g(\cdot)$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que verifica a condição de Lipschitz (3.8).

Como uma consequência das condições de Lipschitz (3.3), (3.6) ou (3.8), nossos resultados mostram a existência de soluções do problema (3.1)-(3.2) para funções $g(t, x)$ tal que a dependência em x é bem regular. No que se segue mostraremos que usando adequadamente a estabilidade do operador resolvente podemos estabelecer resultados de existência para funções g com outro tipo de comportamento. Para estabelecer nosso resultado, consideraremos a seguinte condição.

(W-1) Existe uma função contínua não-decrescente $W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\|g(t, x)\| \leq W(\|x\|), \quad \text{para todo } t \geq 0, x \in X.$$

No resultado seguinte h satisfaz as condições consideradas no Lema 1.15.

Teorema 3.4. *Seja $g : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados, assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados e que satisfaz a condição (W-1). Suponha-se, além disso, que as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W(\nu h(s)) ds = 0$. Seja

$$\sigma_\nu(t) = \|R(t)z\| + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W(\nu h(s)) ds \quad \text{e} \quad \rho(\nu) = \|\sigma_\nu\|_h.$$

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica que

$$\int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s, u(s)) - g(s, v(s))\| ds \leq \epsilon,$$

para todo $t \geq 0$.

(c) Para todo $a \geq 0$ e $r > 0$, o conjunto $\{g(s, x) : 0 \leq s \leq a, x \in X, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .

(d) $\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{\rho(\xi)} > 1$.

Então o problema (3.1)-(3.2) tem uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Seja $\Gamma : C_h(X) \rightarrow C([0, \infty), X)$ a aplicação definida pela expressão (3.4). Em seguida provaremos que Γ tem um ponto fixo em $SAP_\omega(X)$. Dividiremos a demonstração em vários passos.

(i) Para $u \in C_h(X)$, temos que

$$\frac{\|\Gamma u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \|z\| + \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W(\|u\|_h h(s)) ds. \quad (3.9)$$

Segue-se da condição (a) que $\Gamma(u) \in C_h(X)$. Portanto, $\Gamma : C_h(X) \rightarrow C_h(X)$.

(ii) A aplicação Γ é contínua de $C_h(X)$ em $C_h(X)$. De fato, para $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ a constante envolvida na condição (b). Para $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h \leq \delta$, tendo em conta que $h(t) \geq 1$, obtemos

$$\frac{\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\|}{h(t)} \leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s, u(s)) - g(s, v(s))\| ds \leq \widetilde{M}\epsilon,$$

o qual implica que $\|\Gamma u - \Gamma v\|_h \leq \widetilde{M}\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra a afirmação.

(iii) A seguir mostraremos que Γ é completamente contínua. Seja $r \geq 0$ e $V = \Gamma(B_r(C_h(X)))$. Seja $v = \Gamma(u)$ para $u \in B_r(C_h(X))$. Inicialmente, provamos que $V(t) = \{v(t) : v \in V\}$ é um subconjunto relativamente compacto de X para cada $t \geq 0$. Do teorema do valor médio para a integral de Bochner

$$v(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(s)g(t-s, u(t-s))ds \in R(t)x_0 + \overline{tc(K)},$$

onde

$$K = \{R(s)g(\xi, x) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\}.$$

Combinando o fato de que $R(\cdot)$ é fortemente contínua junto a propriedade (c), inferimos que K é um conjunto relativamente compacto, e $V(t) \subseteq R(t)x_0 + \overline{tc(K)}$ é também um conjunto relativamente compacto. Seja $b > 0$. A seguir mostraremos que o conjunto $V_b = \{v|_{[0,b]} : v \in V\}$ é equicontínuo. De fato, para $t \geq 0$ fixo podemos decompor $v(t+s) - v(t)$ como se segue

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= (R(t+s) - R(t))z + \int_t^{t+s} R(t+s-\xi)g(\xi, u(\xi))d\xi \\ &\quad + \int_0^t (R(\xi+s) - R(\xi))g(t-\xi, u(t-\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Para cada $\epsilon > 0$, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left\| \int_t^{t+s} R(t+s-\xi)g(\xi, u(\xi))d\xi \right\| \leq \widetilde{M} \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} W(rh(\xi))d\xi \leq \epsilon/3,$$

para $s \leq \delta_1$. Além disso, como $\{g(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \leq \xi \leq t, u \in B_r(C_h(X))\}$ é um conjunto relativamente compacto e $R(\cdot)$ é fortemente contínua, podemos escolher $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$ tal que $\|(R(t+s) - R(t))z\| \leq \epsilon/3$, para $s \leq \delta_2$ e

$$\|(R(\xi+s) - R(\xi))g(t-\xi, u(t-\xi))\| \leq \frac{\epsilon}{3(b+1)},$$

para $s \leq \delta_3$. Combinando estas estimativas, obtemos $\|v(t+s) - v(t)\| \leq \epsilon$ para $|s| \leq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ com $t+s \geq 0$ e para todo $u \in B_r(C_h(X))$.

Finalmente, aplicando a condição (a), podemos mostrar que

$$\frac{\|v(t)\|}{h(t)} \leq \frac{\widetilde{M}\|z\|}{h(t)} + \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W(rh(s))ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

e esta convergência é independente de $u \in B_r(C_h(X))$. Portanto V satisfaz as condições **(c-1)** e **(c-2)** do Lema 1.15, o qual completa a demonstração que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$.

(iv) Se $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda = \lambda\Gamma(u^\lambda)$ para algum $0 < \lambda < 1$, temos a estimativa $\frac{\|u^\lambda\|_h}{\rho(\|u^\lambda\|_h)} \leq 1$ e, combinando esta estimativa com a condição (d), concluimos que o conjunto $K = \{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\Gamma(u^\lambda), \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado.

(v) Como $SAP_\omega(X) \subset C_h(X)$, podemos aplicar Lema 1.8 e o Lema 1.11 para concluir que $\Gamma(SAP_\omega(X)) \subseteq SAP_\omega(X)$ e, conseqüentemente, podemos considerar

$$\Gamma : \overline{SAP_\omega(X)}^{C_h(X)} \rightarrow \overline{SAP_\omega(X)}^{C_h(X)},$$

onde $\overline{B}^{C_h(X)}$ denota o fecho do conjunto B no espaço $C_h(X)$. Temos que esta aplicação é completamente contínua. Aplicando (iv) e o Teorema Alternativa de Leray-Schauder [58, Teorema 6.5.4] deduzimos que a aplicação Γ tem um ponto fixo $u \in \overline{SAP_\omega(X)}^{C_h(X)}$. Seja $(u_n)_n$ uma seqüência em $SAP_\omega(X)$ tal que $u_n \rightarrow u$ na norma de $C_h(X)$. Usando novamente a condição (b) observamos que $(\Gamma u_n)_n$ converge a $\Gamma u = u$ uniformemente em $[0, \infty)$. Isto implica que $u \in SAP_\omega(X)$, e completa a demonstração. $\square$

3.2 Equações integro-diferenciais funcionais abstratas

Nesta seção aplicaremos os resultados estabelecidos na seção anterior para estudar a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para equações integro-diferenciais com retardo. Mantendo as notações e as hipóteses consideradas na seção anterior.

Inicialmente estaremos preocupados com o problema de valor inicial

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

$$u_0 = \varphi, \quad (3.11)$$

com retardo finito $r > 0$. Aqui $\varphi \in C([-r, 0]; X)$ e $g : [0, \infty) \times C([-r, 0]; X) \rightarrow X$ é uma função contínua.

Definição 3.2. Uma função $u \in C([-r, \infty); X)$ é dita uma solução branda de (3.10) - (3.11) se $u_0 = \varphi$ e a equação integral

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)g(s, u_s)ds, \quad t \geq 0,$$

for verificada.

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Lema 1.13 e a demonstração é similar à do Teorema 3.1.

Proposição 3.1. *Assumamos que $g(\cdot)$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\| \leq L_g \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

para todo $\psi_1, \psi_2 \in C([-r, \infty); X)$ e todo $t \geq 0$. Se $\frac{L_g \widetilde{M}}{\mu} < 1$, então o problema (3.10) - (3.11) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Para este tipo de problemas podemos também estabelecer resultados de existência similares aos Teorema 3.2 e Teorema 3.3. Por motivos de brevidade omitimos os detalhes.

Por outro lado, procedendo de forma similar, podemos estudar a existência de soluções para equações com retardo infinito. Especificamente, no que se segue consideramos o problema (3.10)-(3.11) quando o segmento u_t da função $u(\cdot)$ contém a história completa de $u(\cdot)$ em todo $(-\infty, t]$, e é dada por $u_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ para $\theta \leq 0$. Para modelar este problema assumiremos que u_t pertence a? algum espaço de fase $\mathcal{B}$ que satisfaz condições apropriadas.

A seguir assumiremos que $\varphi \in \mathcal{B}$ e que $g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função contínua.

Definição 3.3. *A função $u \in C(\mathbb{R}; X)$ é dita uma solução branda de (3.10)-(3.11) se $u_0 = \varphi$ e a equação integral*

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)g(s, u_s)ds, \quad t \geq 0,$$

for verificada.

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Lema 1.14 e a demonstração é similar à do Teorema 3.1.

Proposição 3.2. *Assumamos que $g(\cdot)$ é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\| \leq L_g \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e toda $t \geq 0$. Se $\frac{L_g \widetilde{M}Q}{\mu} < 1$, então o problema (3.10)-(3.11) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Como foi mencionado para o problema com retardo finito, podemos também estabelecer resultados similares aos Teorema 3.2 e Teorema 3.3.

3.3 Aplicações à condução do calor

Nesta seção, vamos aplicar os resultados estabelecidos nas Seções 3.1 e 3.2 para o estudo da condução do calor.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira C^∞ . Sejam α e β funções em $C^2([0, \infty), \mathbb{R})$ com $\alpha(0)$ e $\beta(0)$ positivos, e sejam $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ funções apropriadas.

Consideraremos a seguinte equação que surge no estudo da condução do calor em materiais com memória (ver [24, 60, 89, 96])

$$\theta''(t) + \beta(0)\theta'(t) = \alpha(0)\Delta\theta(t) - \int_0^t \beta'(t-s)\theta'(s)ds + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s)ds + a(t)P(\theta(t)), \quad (3.12)$$

para $t \geq 0$, onde Δ é o Laplaciano em Ω e $\theta(t)$ representa no tempo t e posição $\xi \in \Omega$.

Consideramos (3.12) com a condição inicial

$$\theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \eta^0. \quad (3.13)$$

Para modelar este problema, consideramos o espaço $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e os operadores lineares

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(0)\Delta & -\beta(0)I \end{pmatrix}$$

no domínio $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, e $B(t) = F(t)A$, onde $F(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, é o operador

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta'(t)I + \beta(0)\frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)}I & \frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)}I \end{pmatrix}.$$

Introduzindo a variável

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \in X,$$

e definindo

$$g(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t)P(x) \end{pmatrix},$$

o problema (3.12)-(3.13) toma a forma abstrata (3.1)-(3.2) com

$$z = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \eta^0 \end{pmatrix}.$$

Segue-se de (Chen [23]) que A gera um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$ e algumas constantes $\widetilde{M}, \gamma > 0$. Assumamos que $\alpha'(t)e^{\gamma t}$, $\alpha''(t)e^{\gamma t}$, $\beta'(t)e^{\gamma t}$, $\beta''(t)e^{\gamma t}$ são funções limitadas e uniformemente contínuas em $[0, \infty)$, e que para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\beta'(t)| + \max\{\beta(0), 1\} \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(0)} &\leq \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{2\widetilde{M}}, \\ |\beta''(t)| + \max\{\beta(0), 1\} \frac{|\alpha''(t)|}{\alpha(0)} &\leq \frac{\gamma^2 e^{-\gamma t}}{4\widetilde{M}^2}. \end{aligned}$$

Então, por Grimmer [60, Teorema 4.1], existe um operador resolvente $R(t)$ associado à equação (1.15)-(1.16), e satisfazendo

$$\|R(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

Além disso, suponha que $a \in SAP_\omega(\mathbb{R})$ e $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfaz

$$\|P(x) - P(y)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_P \|x - y\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (3.15)$$

para todo $x, y \in H_0^1(\Omega)$.

Afirmamos que para cada $\theta^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta^0 \in L^2(\Omega)$ o problema (3.12)-(3.13) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1. De fato, da hipótese **(R4)** segue-se de (3.14). É imediato também que g satisfaz a condição de Lipschitz (3.3) com $L_g = \|a\|_\infty L_P$. Além disso, as estimativas

$$\begin{aligned} \|g(t, (x, y))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} &\leq \|a\|_\infty \left(L_P \|x\|_{H_0^1(\Omega)} + \|P(0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \\ \|g(t + \omega, (x, y)) - g(t, (x, y))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} &\leq |a(t + \omega) - a(t)| \left(L_P \|x\|_{H_0^1(\Omega)} + \|P(0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

as quais são verificadas para $t \geq 0$ e $(x, y) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mostram que

$$g : [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados. Como uma consequência do Teorema 3.1 obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *Nas condições anteriores, se $\frac{2\tilde{M}}{\gamma}\|a\|_{\infty}L_P < 1$, então o problema (3.12)-(3.13) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Agora vamos a estudar uma equação mais complicada. Consideremos a equação

$$\begin{aligned}\theta''(t) + \beta(0)\theta'(t) &= \alpha(0)\Delta\theta(t) - \int_0^t \beta'(t-s)\theta'(s)ds + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s)ds \\ &\quad + a(t)P(\theta(t)) + f(t),\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde α, β verificam as condições anteriores, porém $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfazem outro tipo de condições as quais seram detalhadas mais adiante, e $f : [0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ é S -assintoticamente ω -periódica.

Nós vamos a modificar a condição (3.15) supondo que $P(\cdot)$ é apenas Hölder contínua, é dizer, existe $0 < \tau < 1$ tal que

$$\|P(x) - P(y)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_P \|x - y\|_{H_0^1(\Omega)}^{\tau},$$

para todo $x, y \in H_0^1(\Omega)$.

Para estabelecer o seguinte resultado, assumiremos que existe uma função contínua não-decrescente $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ tal que $h(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e que satisfaz as condições:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{\frac{-\gamma}{2}(t-s)} h(s)^{\tau} ds = 0$.
- (ii) $\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\frac{-\gamma}{2}(t-s)} |a(s)| h(s)^{\tau} ds < \infty$.

Do Teorema 3.4, podemos deduzir o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Nas condições anteriores, o problema (3.16)-(3.13) tem uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Seja agora

$$g(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) + a(t)P(x) \end{pmatrix}.$$

As seguintes estimativas

$$\|g(t, (x, y))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\infty, L^2(\Omega)} + \|a\|_{\infty} \left(L_P \|x\|_{H_0^1(\Omega)}^{\tau} + \|P(0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{3.17}$$

e

$$\begin{aligned} \|g(t + \omega, (x, y)) - g(t, (x, y))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} &\leq \|f(t + \omega) - f(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ |a(t + \omega) - a(t)| \left(L_P \|x\|_{H_0^1(\Omega)}^\tau + \|P(0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

são verificadas para $t \geq 0$ e $(x, y) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Segue-se de (3.17)-(3.18) que a função

$$g : [0, \infty) \times (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados. Além disso, da estimativa

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq |a(t)| L_P \|u - v\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^\tau,$$

para todo $t \geq 0$ e $u, v \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, obtemos que g é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados. Por (3.17) somos levados a definir

$$W(\xi) = \|f\|_{\infty, L^2(\Omega)} + \|a\|_{\infty} (L_P \xi^\tau + \|P(0)\|_{L^2(\Omega)}) = C_1 + C_2 \xi^\tau,$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Conseqüentemente, a função g satisfaz a hipótese **(W)**. Além disso, da condição (i) segue que

$$\frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} W(\nu h(s)) ds \leq \frac{2C_1}{\gamma h(t)} + C_2 \nu^\tau \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} h(s)^\tau ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

e para $u, v \in C_h(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ da condição (ii) podemos inferir que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} \|g(s, u(s)) - g(s, v(s))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} ds \\ \leq \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} |a(s)| h(s)^\tau ds \right) \|u - v\|_h^\tau. \end{aligned}$$

Assim, as condições (a) e (b) do Teorema 3.4 são satisfeitas. Ademais, se

$$\rho(\xi) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} (\|R(t)z\| + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} W(\xi h(s)) ds)$$

um cálculo direto mostra que $\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{\rho(\xi)} > 1$.

Finalmente, Como Ω é um conjunto limitado com fronteira C^∞ , o Teorema de Rellich-Kondrachov's [19, Teorema IX.16] leva a conclusão que

$$\{a(s)b(\theta) : 0 \leq s \leq s_0, \theta \in H_0^1(\Omega), \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r\}, \quad s_0 > 0,$$

é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$. Portanto, se tem a condição (c). Usando o Teorema 3.4, concluimos que o problema (3.16)-(3.13) tem uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica. $\square$

Para completar estas aplicações consideramos a equação (3.12) com uma fonte de calor, dependendo do passado da temperatura. Essa é uma situação comum em sistemas de controle. Para simplificar nossa exposição, consideramos somente um sistema que apresenta transmissão finita com retardo $r > 0$. Nesse caso a equação é

$$\theta''(t) + \beta(0)\theta'(t) = \alpha(0)\Delta\theta(t) - \int_0^t \beta'(t-s)\theta'(s)ds + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s)ds + a(t)P(\theta(t-r)), \quad (3.19)$$

para $t \geq 0$. Utilizando o desenvolvimento anterior, modelamos o problema no espaço $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e consideramos $u_t \in C([-r, 0]; X)$ para $t \geq 0$. Para ser consistentes com nosso modelo, estudamos a equação (3.19) com condição inicial

$$u_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

onde $\varphi \in C([-r, 0]; H_0^1(\Omega))$ e $\psi \in C([-r, 0]; L^2(\Omega))$. A função $g : [0, \infty) \times C([-r, 0]; X) \rightarrow X$ é dada por

$$g(t, (\varphi^1, \psi^1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t)P(\varphi^1(-r)) \end{pmatrix}.$$

Nas condições gerais consideradas na Proposição 3.3, e aplicando agora a Proposição 3.1 obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.5. *Nas condições anteriores, se $\frac{2\widetilde{M}}{\gamma}\|a\|_\infty L_P < 1$, então o problema (3.19)-(3.20) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

3.4 Equações integro-diferenciais parciais neutras com retardo infinito

Equações diferenciais parciais neutras com retardo infinito têm sido usadas para modelar sistemas físicos de evolução nos quais a resposta do sistema depende não só do estado atual, mas também da história do sistema. Esta situação apresenta-se por exemplo na teoria desenvolvida por Gurtin e Pipkin [61] e Nunziato [109] para a descrição da condução do calor em materiais com memória amortecida. Equações diferenciais funcionais abstratas neutras de primeira ordem com retardo infinito foram introduzidas por Henríquez e Hernández em [74, 75]. Recentemente Agarwal et al. [7] investigaram soluções pseudo quase periódicas com peso para uma classe de equações diferenciais funcionais parciais abstratas; Baghli e Benchora [12] deram condições suficientes para a existência de soluções brandas, na semi-reta positiva, para duas classes de equações diferenciais funcionais neutras perturbadas e funcionais de primeira-ordem com retardo infinito; recentemente, Cuevas et al. [22, 29] investigaram a existência de soluções para equações diferenciais funcionais impulsivas neutras com retardo infinito; Caicedo e Cuevas [20] estudaram a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para equações parciais integro-diferenciais abstratas neutras com retardo infinito.

Esta seção é principalmente concernente com a existência e unicidade de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para a equação integro-diferencial parcial neutra com retardo infinito

$$\frac{d}{dt}D(t, u_t) = AD(t, u_t) + \int_0^t B(t-s)D(s, u_s)ds + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \quad (3.21)$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (3.22)$$

onde $D(t, \psi) = \psi(0) + f(t, \psi)$, os operadores lineares $A, B(t) : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ são densamente definidos e fechados com domínio comum $D(A)$, o qual é independente de t , no espaço de Banach X , a função história $u_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, é definida por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, pertencendo a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomáticamente na Subseção 1.1.2, e f, g são funções que satisfazem algumas condições adicionais.

Desde o trabalho inicial de Datko [39], este tipo de equações tem sido amplamente estudadas. O leitor pode ver [1, 63] para uma discussão sobre o tema.

Como nas seções anteriores, assumimos que o problema de Cauchy (1.15)-(1.16) admite

uma família resolvente $R(t)$ que satisfaz a condição de estabilidade **(R4)** e que $f, g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ são funções contínuas.

Definição 3.4. (Grimmer-Prüss [61]) Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita *solução branda do sistema* (3.21)-(3.22) se $u_0 = \varphi \in \mathcal{B}$, $u(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$ e verifica-se a equação integral

$$u(t) = R(t)(\varphi(0) + f(0, \varphi)) - f(t, u_t) + \int_0^t R(t-s)g(s, u_s)ds, \quad t \geq 0.$$

Para estabelecer o seguinte resultado, precisamos introduzir a condição:

(H-1) A função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (3.23)$$

para todo $(t, \psi_i) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}$, $i = 1, 2$.

No seguinte resultado, denotamos por L_f (respectivamente, L_g) a constante L envolvida na condição **(H-1)** para a função f (respectivamente, g). Ademais,

Teorema 3.5. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Suponha que f e g satisfazem a condição **(H-1)**. Se $(L_f + \frac{\bar{M}}{\mu}L_g)K < 1$, então existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.21)-(3.22).*

Demonstração. Seja $SAP_{\omega,0}(X) = \{x \in SAP_{\omega}(X) : x(0) = 0\}$. Está claro que $SAP_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $SAP_{\omega}(X)$. A seguir identificamos os elementos $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ com suas extensões a $\mathbb{R}$ dadas por $x(\theta) = 0$ para $\theta \leq 0$. Além disso, denotamos por $y(\cdot)$ a função definida por $y_0 = \varphi$ e $y(t) = R(t)\varphi(0)$ para $t \geq 0$. Tendo em mente que $R(t)\varphi(0) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, temos que $y \in C_0([0, \infty), X)$. De outro lado, por [81, Proposition 7.1.3] a função $t \rightarrow y_t$ pertence a $C_0([0, \infty), \mathcal{B}) \subseteq SAP_{\omega}(\mathcal{B})$. Agora, definimos a aplicação Γ em $SAP_{\omega,0}(X)$ por $(\Gamma x)_0 = 0$ e

$$\Gamma x(t) = R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t) + \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds, \quad t \geq 0. \quad (3.24)$$

Observamos que $R(t)f(0, \varphi) \in C_0([0, \infty), X)$. Tendo em conta que $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida e o Lema 1.14, temos que a função $s \rightarrow x_s + y_s$ pertence a $SAP_{\omega}(\mathcal{B})$.

Como f e g são assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados, pelo Lema 1.8, concluímos que as funções $t \rightarrow f(t, x_t + y_t)$ e $s \rightarrow g(s, x_s + y_s)$ pertencem a $SAP_\omega(X)$. Do Lema 1.11, inferimos que Γ é uma aplicação de $SAP_{\omega,0}(X)$ em $SAP_{\omega,0}(X)$.

Além disso, Γ verifica a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t) - \Gamma z(t)\| &\leq \|f(t, x_t + y_t) - f(t, z_t + y_t)\| \\ &\quad + \int_0^t \|R(t-s)\| \|g(s, x_s + y_s) - g(s, z_s + y_s)\| ds \\ &\leq L_f \|x_t - z_t\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M} L_g \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|x_s - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq (L_f + \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g) K \|x - z\|_\infty, \end{aligned}$$

o qual prova que Γ é uma contração e concluímos que Γ tem um único ponto fixo $x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Definindo $u(t) = y(t) + x(t)$ para $t \in \mathbb{R}$, podemos confirmar que $u \in SAP_\omega(X)$ é uma solução branda do problema (3.21)-(3.22). $\square$

Com o argumento usado na demonstração do Teorema 3.5, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Seja $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Suponha que f, g satisfazem (3.23) e $f(t, 0) \rightarrow 0$ e $g(t, 0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $(L_f + \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g)K < 1$, então existe uma única solução branda $u \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ do problema (3.21)-(3.22).*

A seguir, examinamos soluções assintoticamente periódicas de (3.21)-(3.22). Desde uma perspectiva aplicada um sistema assintoticamente periódico descreve nosso mundo de maneira mais realista e mais precisa que os sistemas periódicos (ver [122, 123]).

Teorema 3.6. *Assumimos que as hipóteses do Teorema 3.5 são satisfeitas, e que para todo subconjunto limitado $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, \psi) - f(t + n\omega, \psi)) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, \psi) - g(t + n\omega, \psi)) = 0$, uniformemente para $\psi \in \mathcal{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então o problema (3.21)-(3.22) tem uma única solução branda assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Seja $S_{\omega,0}(X)$ o espaço consistente de todas as funções $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ que são assintoticamente ω -periódicas. É fácil ver que $S_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $SAP_{\omega,0}(X)$.

No que se segue identificamos os elementos $x \in S_{\omega,0}(X)$ com sua extensão a $\mathbb{R}$ dado por $x(\theta) = 0$ para $\theta \leq 0$. Consideramos a aplicação Γ definida em $S_{\omega,0}(X)$ por (3.24). Observamos que $R(\cdot)f(0, \varphi) \in C_0([0, \infty), X)$ e logo $\lim_{t \rightarrow \infty} (R(t+n\omega)f(0, \varphi) - R(t)f(0, \varphi)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Do Lema 3.16 em [113] e o Lema 1.10, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + n\omega, x_{t+n\omega} + y_{t+n\omega}) - f(t, x_t + y_t)) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (g(t + n\omega, x_{t+n\omega} + y_{t+n\omega}) - g(t, x_t + y_t)) &= 0, \end{aligned}$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Aplicando Lema 1.9 e Lema 1.12, inferimos que as imagens de Γ estão em $S_{\omega,0}(X)$. Portanto o ponto fixo de Γ pertence a $S_{\omega,0}(X)$. A demonstração está completada. $\square$

Agora, estabelecemos a versão do Teorema 3.5 o qual nos permite considerar perturbações localmente Lipschitz para a equação (3.21).

Precisamos introduzir a seguinte condição

(H-2) A função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e existe uma função contínua e não decrescente $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que para cada número positivo $r \geq 0$, e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$, $\|\psi_1\|_{\mathcal{B}} \leq r$, $\|\psi_2\|_{\mathcal{B}} \leq r$, tem-se

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L(r)\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (3.25)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Logo obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Suponhamos que f, g satisfazem (H-2), $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e que existe uma constante $r > 0$ tal que*

$$KL_f(Kr) + K \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g(Kr) + \frac{\widetilde{M}}{\mu r} \|g(t, 0)\|_{\infty} < 1, \quad (3.26)$$

onde L_f (respectivamente, L_g) denotam as funções envolvidas na estimativa (3.25) para f (respectivamente, para g). Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada φ com $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon$, existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica de (3.21)-(3.22).

Demonstração. Seja φ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon$. Vamos escrever $\epsilon = \lambda Kr$ para $\lambda > 0$. Identificamos os elementos $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ com suas extensões a $\mathbb{R}$ dados por $x_0 = 0$ e definimos o espaço $B_r := B_r(SAP_{\omega,0}(X)) := \{x \in SAP_{\omega,0}(X) : \|x\|_{\infty} \leq r\}$, dotado com a métrica definida por $d(u, v) = \|u - v\|_{\infty}$. Também definimos o operador Γ no espaço B_r por (3.24). Observamos que

$$\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq K\widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (K\widetilde{M}H + M)\epsilon, \quad t \geq 0.$$

Seja x em B_r . Então

$$\|x_t + y_t\|_{\mathcal{B}} \leq Kr + (K\widetilde{M}H + M)\lambda Kr = [1 + (K\widetilde{M}H + M)\lambda]Kr.$$

Seja $\xi = [1 + (K\widetilde{M}H + M)\lambda]K$.

De modo similar como a demonstração do Teorema 3.5 segue-se que $\Gamma x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Além disso, Γ verifica a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\| &\leq \widetilde{M}\|f(0, \varphi)\| + L_f(\xi r)\xi r + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_g(\xi r)\xi r ds \\ &\quad + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s, 0)\| ds \\ &\leq \widetilde{M}L_f(\lambda Kr)\lambda Kr + \frac{\widetilde{M}}{\mu}\|g(s, 0)\|_{\infty} + L_f(\xi r)\xi r + \frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(\xi r)\xi r \\ &\rightarrow r[KL_f(Kr) + K\frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(Kr) + \frac{\widetilde{M}}{\mu r}\|g(s, 0)\|_{\infty}], \quad \lambda \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

De (3.26) segue então que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\widetilde{M}L_f(\lambda Kr)\lambda K + \frac{\widetilde{M}}{\mu r}\|g(s, 0)\|_{\infty} + L_f(\xi r)\xi + \frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(\xi r)\xi < 1.$$

Portanto $\Gamma(B_r) \subseteq B_r$. Por outro lado, para $x, z \in B_r$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t) - \Gamma z(t)\| &\leq L_f(\xi r)\|z_t - y_t\|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_g(\xi r)\|x_s - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq [KL_f(\xi r) + K\frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(\xi r)]\|x - z\|_{\infty} \\ &\leq [L_f(\xi r)\xi + \frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(\xi r)\xi]\|x - z\|_{\infty} \end{aligned}$$

o qual mostra que Γ é uma contração de B_r em B_r . A afirmação é agora uma consequência do princípio da contração de Banach. $\square$

Observação 3.1. *Um resultado similar foi obtido por Diagana et al. [47] para a existência de soluções assintoticamente quase automórficas.*

O Teorema 3.7 estabelece existência de soluções somente no caso $\varphi \leq \epsilon$ para ϵ pequeno. Isto deve-se a condição local de Lipschitz que devem verificar f, g . Por isso vamos a estudar um pouco a condição de Lipschitz local. Não é difícil verificar que a estimativa para obter existência de solução dependem das diferenciais $|L(Kr + C) - L(Kr)|$, onde $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função crescente envolvida na condição local de Lipschitz (3.25). Portanto, podemos estabelecer um resultado que unifica os Teoremas 3.5 e 3.7.

Vamos denotar por C uma constante tal que $\|y_s\| \leq C$, para todo $0 \leq s < \infty$. Supondo que $f(t, 0) = 0$ e $g(t, 0)$ é limitada em $\mathbb{R}$, é imediato que

$$\begin{aligned} & \|R(t)f(0, \varphi) - f(t, y_t) - \int_0^t R(t-s)g(s, y_s)ds\| \\ & \leq \widetilde{M}\|\varphi\|_{\mathcal{B}}L_f(\|\varphi\|) + L_f(C)C + \frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(C)C + \frac{\widetilde{M}}{\mu}\sup_{s \geq 0}\|g(s, 0)\| \\ & := C_1. \end{aligned}$$

Teorema 3.8. *Seja $\mathcal{B}$ é a um espaço de fase com memória amortecida. Suponhamos que f, g satisfazem (H-2), $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e que existe uma constante $r > 0$ tal que*

$$\frac{C_1}{r} + K \left[L_f(Kr + C) + \frac{\widetilde{M}}{\mu}L_g(Kr + C) \right] < 1, \quad (3.27)$$

onde L_f (respectivamente, L_g) denotam as funções envolvidas na estimativa (3.25) para f (respectivamente, para g). Então existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.21)-(3.22).

Demonstração. A demonstração segue o mesmo caminho que a demonstração do Teorema 3.7.

Definamos Γ por (3.24). Suponha que $\|x(t)\| \leq r$, então $\|x_t + y_t\| \leq Kr + C$. Da estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\| &\leq C_1 + L_f(Kr + C)Kr + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_g(Kr + C)Krd s \\ &\leq C_1 + L_f(Kr + C)Kr + \frac{\widetilde{M}}{\mu} L_g(Kr + C)Kr \\ &= C_1 + [L_f(Kr + C) - L_f(C)]Kr + \frac{\widetilde{M}}{\mu} [L_g(Kr + C) - L_g(C)]Kr \\ &\quad + L_f(C)Kr + \frac{\widetilde{M}}{\gamma} L_g(C)Kr \end{aligned}$$

e da condição (3.27) deduz-se que $\|\Gamma x(t)\| \leq r$. A contractividade do operador Γ demonstra-se igual que antes. $\square$

Observação 3.2. Como $L(kr + C) = [L(kr + C) - L(kr)] + L(kr)$, comparando a condição (3.27) com a condição (3.26) vemos que podemos evitar a hipótese $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} < \epsilon$ quando L'_f e L'_g são pequenas.

Teorema 3.9. Assuma que se tem as hipóteses do Teorema 3.7, e suponhamos que para todo subconjunto limitado $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, \psi) - f(t + n\omega, \psi)) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, \psi) - g(t + n\omega, \psi)) = 0,$$

uniformemente para $\psi \in \mathcal{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada φ satisfazendo $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon$, existe uma única solução branda assintoticamente ω -periódica de (3.21)-(3.22).

Demonstração. Isto requer somente pequenas modificações na demonstração do Teorema 3.7, pelo que omitiremos esta demonstração. $\square$

No que segue vamos estudar uma situação onde a função g não satisfaz uma condição de Lipschitz. Para isto vamos a reforzar a condição **(W-1)** considerada na Seção 3.1.

(W-2) A função $g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados e existe uma função contínua e não decrescente $W_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\|g(t, \psi)\| \leq W_g(\|\psi\|_{\mathcal{B}}), \tag{3.28}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $\psi \in \mathcal{B}$.

Lema 3.1. *Seja $u \in C_h(X)$, então $\frac{1}{h(t)} \max_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|$ converge a zero, quando $t \rightarrow \infty$ e*

$$\max_{t \geq 0} \left(\frac{1}{h(t)} \max_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\| \right) \leq \|u\|_h.$$

Demonstração. Como $\max_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\| = \|u(\bar{s})\|$, para certo $\bar{s} = \bar{s}(t) \leq t$, podemos afirmar

$$\frac{1}{h(t)} \max_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\| = \frac{\|u(s)\|}{h(\bar{s})} \frac{h(\bar{s})}{h(t)} \leq \frac{\|u(s)\|}{h(\bar{s})} \leq \|u\|_h.$$

Vamos considerar dois casos. Se $\{\bar{s}(t) : t \geq 0\}$ é limitado, então $\frac{h(\bar{s})}{h(t)}$ converge a zero, quando $t \rightarrow \infty$. Se $\{\bar{s}(t) : t \geq 0\}$ não é limitado, então $\frac{\|u(\bar{s})\|}{h(\bar{s})}$ converge a zero, quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, nos dois casos da estimativa acima obtemos a afirmação. $\square$

Teorema 3.10. *Seja $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Além disso, suponha que se tem as seguintes propriedades:*

(a) *A função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz a condição (H-1) da seção 3.4 e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

(b) *A função $g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados, satisfaz a condição (W-2) e para cada $a \in [0, \infty)$ e $r > 0$ o conjunto $\{g(s, \psi) : 0 \leq s \leq a, \psi \in \mathcal{B}, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

(c) *Para cada $L > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(Lh(s)) ds = 0.$$

Seja $\beta(L) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(Lh(s)) ds$.

(d) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|g(t, u_t) - g(t, v_t)\| \leq \epsilon$, para todo $t \geq 0$ e $u, v \in C_h(X)$ com $u_0 = v_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\|u - v\|_h \leq \delta$.*

(e) *Assumamos que*

$$L_f K + \widetilde{M} K \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1.$$

Então existe uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.21)-(3.22).

Demonstração. Seja $C_h^0(X)$ o espaço formado pelas funções $x \in C_h(X)$ talque $x(0) = 0$. É claro que $C_h^0(X)$ é um subespaço fechado de $C_h(X)$. Para $x \in C_h^0(X)$ identificamos x com sua extensão á $\mathbb{R}$ definida por $x(\theta) = 0$ para $\theta \leq 0$.

Definimos o operador Γ em $C_h^0(X)$ por (3.24). Vamos a decompor $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1 x(t) &= R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t), \\ \Gamma_2 x(t) &= \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds,\end{aligned}$$

para $t \geq 0$ e $(\Gamma_1 x)_0 = (\Gamma_2 x)_0 = 0$.

Para $x \in C_h^0(X)$, temos que

$$\begin{aligned}\|x_t + y_t\|_{\mathcal{B}} &\leq K \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s)\| + C \\ &\leq Kh(t)\|u\|_h + C\end{aligned}\tag{3.29}$$

e, do Lema 3.1, $\frac{\|x_t + y_t\|_{\mathcal{B}}}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Portanto

$$\|\Gamma_1 x(t)\| \leq \widetilde{M}\|f(0, \varphi)\| + L_f\|x_t + y_t\|_{\mathcal{B}}\tag{3.30}$$

o que mostra que $\Gamma_1(x) \in C_h(X)$. Alem disso, se $x, z \in C_h^0(X)$ de

$$\|\Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 z(t)\| \leq L_f K \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - z(s)\|$$

e, voltando a usar o Lema 3.1, segue-se que $\|\Gamma_1 x - \Gamma_1 z\|_h \leq L_f K \|x - z\|_h$, é dizer Γ_1 é uma contração em $C_h^0(X)$.

Agora vamos estudar Γ_2 . Deduz-se da (3.29) com $L = K\|x\|_h + C$, e das condições (b) e (c) que

$$\frac{\|\Gamma_2 x(t)\|}{h(t)} \leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(h(s)L)ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.\tag{3.31}$$

Portanto obtem-se que $\Gamma_2 : C_h^0(X) \rightarrow C_h^0(X)$.

Dividimos o resto da demonstração em varias partes.

(i) Monstraremos que Γ_2 é contínua. Esta afirmação é consequência direta da condição (d), já que se $x, z \in C_h^0(X)$ e $\|x - z\|_h \leq \delta$, então

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma_2 x(t) - \Gamma_2 z(t)\|}{h(t)} &\leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s, x_s + y_s) - g(s, z_s + y_s)\| ds \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \epsilon ds \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{\mu} \epsilon, \end{aligned}$$

o qual mostra a afirmação.

(ii) Nesta parte vamos mostrar que Γ_2 é completamente contínua. Escolhamos $r > 0$ e definamos os conjuntos

$$V = \Gamma_2(B_r(C_h^0(X))) \quad \text{e} \quad V(t) = \{\Gamma_2 x(t) : x \in B_r(C_h^0(X))\}.$$

Vamos provar primeiro que $V(t)$ é um subconjunto relativamente compacto em X para cada $t \geq 0$. É claro que $V(t) \in \overline{tc(\mathcal{K})}$ onde

$$\mathcal{K} = \{R(s)g(\xi, \psi) : 0 \leq s, \xi \leq t, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq \rho\},$$

e $\rho = h(t)(Kr + C)$. Usando que a aplicação $[0, t] \times X \rightarrow X$, $(s, x) \mapsto R(s)x$, é contínua e combinando com a condição (b), inferimos que $\mathcal{K}$ é um conjunto relativamente compacto e que $V(t)$ também é relativamente compacto.

Seja agora $b > 0$ e V_b o conjunto formado pelas funções $v \in V$ restritas ao intervalo $[0, b]$. Afirmamos que o conjunto V_b seja equicontínuo. De fato, se $v = \Gamma_2 x$ com $x \in B_r(C_h^0(X))$, podemos decompor

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \int_t^{t+s} R(t+s-\xi)g(\xi, x_\xi + y_\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t [R(t+s-\xi) - R(t-\xi)]g(\xi, x_\xi + y_\xi) d\xi, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|v(t+s) - v(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} W_g(Lh(\xi)) d\xi \\ &\quad + \int_0^t \|(R(t+s-\xi) - R(t-\xi))\| \|g(\xi, x_\xi + y_\xi)\| d\xi, \end{aligned}$$

para $L = Kr + C$. É imediato que o primeiro termo converge a zero quando $s \rightarrow 0$ e, usando que o conjunto

$$\{g(\xi, x_\xi + y_\xi) : 0 \leq \xi \leq t\} \subseteq \{g(\xi, \psi) : 0 \leq \xi \leq t, \|\psi\| \leq \rho\}$$

é relativamente compacto e $R(\cdot)$ é uma aplicação fortemente contínua, obtemos que a segunda integral converge a zero quando $s \rightarrow 0$ independente da função $x(\cdot)$. Isto prova a nossa afirmação inicial.

Com as mesmas notações, vamos agora mostrar que $\frac{v(t)}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, independente de $x \in B_r(C_h^0(X))$. De fato,

$$\frac{\|v(t)\|}{h(t)} \leq \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(Lh(s)) ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

pela condição (c).

Combinando as observações previas, segue do Lema 1.15 que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h^0(X)$. Como r foi escolhido arbitrariamente, isto mostra que Γ_2 é completamente contínua.

(iii) Nesta parte mostraremos que existe $r_0 > 0$ talque $\Gamma(B_{r_0}(C_h^0(X))) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X))$. De fato, se assumimos que esta afirmação é falsa, então para todo $r > 0$ podemos escolher $x^r \in B_r(C_h^0(X))$ tal que $\|\Gamma(x^r)\|_h > r$. Combinando (3.29), (3.30) e (3.31) resulta

$$r < \|\Gamma(x^r)\|_h \leq \widetilde{M}\|f(0, \varphi)\| + L_f Kr + L_f C + \widetilde{M}\beta(L),$$

onde $L = Kr + C$. Portanto

$$1 \leq \frac{\widetilde{M}\|f(0, \varphi)\| + L_f C}{r} + L_f K + \widetilde{M} \frac{L}{r} \frac{\beta(L)}{L},$$

e

$$1 \leq L_f K + \widetilde{M} K \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi},$$

o que contradiz a condição (f) e mostra a afirmação.

(iv) Usando agora as condições (a) e (b), e usando os Lemas 1.8, 1.14 e 1.11 deduzimos que $\Gamma_i(SAP_{\omega,0}(X)) \subseteq SAP_{\omega,0}(X)$, $i=1,2$, e combinando com a afirmação (iii), temos que

$$\Gamma(B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)$$

e também

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\overline{B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)}^h\right) &\subseteq \overline{\Gamma(B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X))}^h \\ &\subseteq \overline{B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)}^h\end{aligned}$$

onde $\overline{\mathcal{K}}^h$ denota o fecho (topológico) de $\mathcal{K}$ em $C_h(X)$. Aplicando o Teorema de Schauder, deduzimos que Γ tem um ponto fixo $x \in \overline{B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)}^h$.

(v) Finalmente, vamos mostrar que $x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Seja $(x^n)_n$ uma sequência em $B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap SAP_{\omega,0}(X)$ que converge à x para a topologia em C_h . Segue da condição (d) que $\Gamma_2(x^n) \rightarrow \Gamma_2(x)$, $n \rightarrow \infty$, uniformemente no intervalo $[0, \infty)$. Como $\Gamma_2(x^n) \in SAP_{\omega,0}(X)$, obtem-se que $\Gamma_2 x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Vamos definir $F : SAP_{\omega,0}(X) \rightarrow SAP_{\omega,0}(X)$ por

$$Fz = \Gamma_1 z + \Gamma_2 x.$$

É consequência de (e) e da observação anterior que F está bem definida e que . Além disso, é uma contração. Por tanto F tem um único ponto fixo z . Como x é também ponto fixo de F , então $z = x$. $\square$

No seguinte resultado vamos a estudar uma situação particular. Nesta parte vamos supor que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_{loc}^1((-\infty, 0], X)$ e que para cada $\sigma < 0$ a inclusão $\mathcal{B} \hookrightarrow L^1([\sigma, 0], X)$ é contínua. Sejam $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{g} : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ funções contínuas tais que $\alpha(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e, para todo $\sigma < 0$ y $u : [\sigma, 0] \rightarrow X$ integrável, a função $s \mapsto \tilde{g}(s, u(s))$ é integrável. Seja

$$g(t, \psi) = \int_{-t}^0 \alpha(-s) \tilde{g}(s+t, \varphi(s)) ds, \quad \varphi \in \mathcal{B},$$

onde $\tilde{g}(t, x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Definimos a função $\nu = e^{-\mu t} * |\alpha|(t)$. É bem conhecido que a convolução de funções nulas no infinito não é, em geral, uma função nula no infinito. Isto motiva o seguinte resultado.

Teorema 3.11. *Seja $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Além disso, suponha que se tem as seguintes propriedades:*

(a) *A função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz a condição (H-1) e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

(b) *A função $\tilde{g} : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados, existe uma função contínua não decrescente $W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que*

$\|\tilde{g}(t, x)\| \leq W(\|x\|)$ para $t \geq 0$ e $x \in X$. Ademais, para cada $a \in [0, \infty)$ e $r > 0$ o conjunto $\{\tilde{g}(s, \psi) : 0 \leq s \leq a, x \in X, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .

(c) Para cada $L > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \nu(t-s)W(Lh(s))ds = 0.$$

Seja $\beta(L) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \nu(t-s)W(Lh(s))ds$.

(d) Para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e T_ϵ tal que $\|\tilde{g}(t, x_1) - \tilde{g}(t, x_2)\| \leq \epsilon$, para todo $t \geq T_\epsilon$ e $x_1, x_2 \in X$ tal que $\|x_1 - x_2\| \leq \delta h(t)$.

(e) Assumamos que

$$L_f K + \widetilde{M} K \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1.$$

Então existe uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.21)-(3.22).

Demonstração. Usamos as notações introduzidas na demonstração do Teorema 3.10.

Portanto Γ_1 é uma contração em $C_h^0(X)$.

Seja $x \in C_h^0(X)$. De

$$\Gamma_2 x(t) = \int_0^t R(t-s) \int_0^s \alpha(s-\xi) \tilde{g}(\xi, x_\xi + y_\xi) d\xi ds$$

obtemos

$$\|\Gamma_2 x(t)\| \leq \widetilde{M} \int_0^t \nu(t-s)W(\|x + y\|_h h(s))ds$$

o qual implica $\Gamma_2 x \in C_h^0(X)$. Além disso, é consequência de (d) que Γ_2 é contínua. É claro também que Γ_2 é completamente contínua.

De maneira similar, da condição (e) obtemos que existe $r_0 > 0$ tal que $\Gamma(B_{r_0}(C_h^0(X))) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X))$.

Completamos o argumento como na demonstração do Teorema 3.10. □

Teorema 3.12. *Seja $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Além disso, suponha que se tem as seguintes propriedades:*

(a) A função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz a condição **(H-1)** e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

(b) Existe uma decomposição $g = g_0 + g_1$, onde $g_0, g_1 : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ são funções contínuas que satisfazem as seguintes condições: $g_0(\cdot, \psi)$ é ω -periódica para cada $\psi \in \mathcal{B}$, existe uma constante $L_0 \geq 0$ tal que

$$\|g_0(t, \psi_1) - g_0(t, \psi_2)\| \leq L_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $t \geq 0$ e todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$, e para cada $r > 0$, $g_1(t, \psi) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, uniformemente para $\psi \in \mathcal{B}$ com $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r$.

(c) Existe uma função contínua não decrescente $W_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\|g_1(t, \psi)\| \leq W(\|\psi\|_{\mathcal{B}})$ para $t \geq 0$ e $x \in X$. Ademais, para cada $a \in [0, \infty)$ e $r > 0$ o conjunto $\{g_1(s, \psi) : 0 \leq s \leq a, \psi \in \mathcal{B}, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X .

(d) Assumamos que

$$L_f K + \frac{L_0 \widetilde{M} K}{\mu} + \frac{\widetilde{M} K}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{W_1(\xi)}{\xi} < 1.$$

Então existe uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.21)-(3.22).

Demonstração. Definimos o operador Γ em $SAP_{\omega,0}(X)$ por (3.24). Vamos a decompor $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t) + \int_0^t R(t-s)g_0(s, x_s + y_s)ds, \\ \Gamma_2 x(t) &= \int_0^t R(t-s)g_1(s, x_s + y_s)ds, \end{aligned}$$

para $t \geq 0$ e $(\Gamma_1 x)_0 = (\Gamma_2 x)_0 = 0$.

Para $x, z \in SAP_{\omega,0}(X)$ de

$$\|\Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 z(t)\| \leq (L_f + \frac{L_0}{\mu})K \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - z(s)\|$$

é dizer Γ_1 é uma contração em $SAP_{\omega,0}(X)$.

Agora vamos estudar Γ_2 . Deduz-se de (b) que $g_1(s, x_s + y_s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. Portanto obtem-se que $\Gamma_2 : SAP_{\omega,0}(X) \rightarrow C_0(X)$. Usando um argumento similar aos anteriores, podemos mostrar que Γ_2 é completamente contínua.

Além disso, existe $r_0 > 0$ talque $\Gamma(B_{r_0}(C_b(X))) \subseteq B_{r_0}(C_b(X))$. De fato, se assumimos que esta afirmação é falsa, então para todo $r > 0$ podemos escolher $x^r \in B_r(C_b(X))$ tal que $\|\Gamma(x^r)\| > r$. Da definição de Γ resulta

$$r < \|\Gamma(x^r)\| \leq C_1 + L_f K r + \frac{\widetilde{M} L_0 K}{\mu} r + \frac{\widetilde{M}}{\mu} W_1(Kr + C),$$

onde C_1 é uma constante independente de r . Portanto

$$1 \leq L_f K + \frac{\widetilde{M} L_0 K}{\mu} + \frac{\widetilde{M} K}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{W_1(\xi)}{\xi},$$

o que contradiz a condição (d) e mostra a afirmação.

Aplicando o Teorema de Schauder, deduzimos que a aplicação Γ tem um ponto fixo $x \in B_{r_0}(SAP_{\omega,0}(X))$ □

Em seguida discutiremos a existência de uma solução branda assintoticamente quase automórfica para a equação diferencial parcial neutra abstrata com retardo infinito (3.21)-(3.22). Para tratar este problema usaremos o método desenvolvido no Teorema 3.12.

Teorema 3.13. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Além disso, suponha que se tem as seguintes propriedades:*

(a) *A função $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é assintoticamente quase automórfica compacta, satisfaz a condição (3.23) e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

(b) *A função $g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é assintoticamente quase automórfica compacta, satisfaz a condição (W-2) e para cada $a \in [0, \infty)$ e $r > 0$ o conjunto $\{g(s, \psi) : 0 \leq s \leq a, \psi \in \mathcal{B}, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

(c) *Para cada $L > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(Lh(s)) ds = 0.$$

Seja $\beta(L) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} W_g(Lh(s)) ds$.

(d) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s, u_s) - g(s, v_s)\| ds \leq \epsilon,$$

para todo $t \geq 0$ e $u, v \in C_h(X)$ com $u_0 = v_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\|u - v\|_h \leq \delta$.

(e) Assumamos que

$$L_f K + \widetilde{M} K \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1.$$

Então existe uma solução branda assintoticamente quase automórfica compacta do problema (3.21)-(3.22).

Demonstração. Usando todas as notações e propriedades estabelecidas na demonstração do Teorema 3.10, temos que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde Γ_1 é uma contração em $C_h^0(X)$ e Γ_2 é completamente contínua em $C_h^0(X)$. Além disso, existe $r_0 > 0$ tal que $\Gamma(B_{r_0}(C_h^0(X))) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X))$.

Seja $AAA_0(X) = \{x \in AAA_c(X) : x(0) = 0\}$. Está claro que $AAA_0(X)$ é um subespaço fechado de $AAA_c(X)$. Como $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, segue que se $x \in AAA_0(X)$, então a função $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}$, $t \mapsto x_t + y_t$ está em $AAA_c(\mathcal{B})$. Como $f \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$ é uniformemente contínua em subconjuntos limitados de $\mathcal{B}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$, obtemos de Lema 1.7, que $t \rightarrow f(t, x_t + y_t) \in AAA(X)$ e também que $\Gamma_1(AAA_0(X)) \subseteq AAA_0(X)$. Por outro lado, como g é uniformemente contínua em subconjuntos compactos de $\mathcal{B}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$, obtemos de que $\Gamma_2(AAA_0(X)) \subseteq AAA_0(X)$. Assim $\Gamma(AAA_0(X)) \subseteq AAA_0(X)$. Repetindo o argumento da parte (iv) da demonstração do Teorema 3.10, concluimos que Γ tem um ponto fixo $x \in \overline{B_{r_0}(C_h^0(X)) \cap AAA_0(X)}^h$. Usando agora o argumento da parte (v) da demonstração do Teorema 3.10 podemos afirmar que $x \in AAA_0(X)$. $\square$

3.4.1 Aplicações

Nesta subseção voltamos estudar o problema da condução do calor já considerado na seção 3.3. Mantendo as notações e propriedades já estabelecidas na seção 3.3, neste caso vamos estudar um modelo de tipo neutro

$$\begin{aligned} \theta''(t) + \int_{-\infty}^t q(t-s)\theta''(s)ds &= \alpha(0)\Delta[\theta(t) + \int_{-\infty}^t q(t-s)\theta(s)ds] \\ &\quad - \beta(0)[\theta'(t) + \int_{-\infty}^t q(t-s)\theta'(s)ds] - \int_0^t \beta'(t-s)[\theta'(s) + \int_{-\infty}^s q(s-\tau)\theta'(\tau)d\tau]ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta[\theta(s) + \int_{-\infty}^s q(s-\tau)\theta(\tau)d\tau]ds + a(t) \int_{-\infty}^t p(t-s, \theta(s))ds, \end{aligned} \quad (3.32)$$

para $t \geq 0$, onde $p, q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que satisfazem condições apropriadas. Utilizando o desenvolvimento da Seção 3.3, modelamos o problema no espaço $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e consideramos $u(t) = (\theta(t), \theta'(t))^T$ tal que $u_t \in \mathcal{B}$ para $t \geq 0$, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de fase de funções com valores em X com memória amortecida e constante K . Para ser consistentes com nosso modelo, estudamos a equação (3.32) com condição inicial

$$u_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

onde $(\varphi, \psi)^T \in \mathcal{B}$. A função $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é dada por

$$f(t, (\varphi^1, \psi^1)) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^0 q(-\tau) \varphi^1(\tau) d\tau \\ \int_{-\infty}^0 q(-\tau) \psi^1(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

Nos vamos a supor que f satisfaz uma condição de Lipschitz com constante L_f . De maneira similar, a função $g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é dada por

$$g(t, (\varphi^1, \psi^1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t) \int_{-\infty}^0 p(-\tau) \varphi^1(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

e vamos a supor que g satisfaz uma condição de Lipschitz com constante L_g . Nestas condições a equação (3.32) é modelada na forma abstrata (3.21)-(3.22). Aplicando agora o Teorema 3.5 obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.6. *Nas condições anteriores, se $a(\cdot) \in SAP_\omega(\mathbb{R})$ e $(L_f + \frac{2\tilde{M}}{\gamma} L_g)K < 1$, então o problema (3.19)-(3.33) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Para completar esta subseção, examinamos a existência de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódicas para a seguinte equação diferencial parcial neutra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(x(t, \xi) + \int_{-\infty}^t \int_0^\xi p(t) a(t-s) x(s, \eta) d\eta ds \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(x(t, \xi) + \int_{-\infty}^t \int_0^\xi p(t) a(t-s) x(s, \eta) d\eta ds \right) \\ + e^{-\lambda t} \left| \int_0^\xi x(s, \eta) d\eta \right|^\beta \sin \xi, \quad t \geq 0, \xi \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$x(t, 0) = x(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.35)$$

$$x(\theta, \xi) = \phi(\theta, \xi), \quad -\infty < \theta \leq 0, \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.36)$$

onde $\beta \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função S -assintoticamente ω -periódica.

Para estudar este sistema na forma abstrata (3.21), escolhemos o espaço $X = L^2[0, \pi]$ e o operador A definido em X por $Au = u''$, com domínio

$$D(A) = \{u \in L^2[0, \pi] : u'' \in L^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

É bem conhecido que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo uniformemente exponencialmente estável $(T(t))_{t \geq 0}$ em $L^2[0, \pi]$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ para todo $t \geq 0$.

Denotamos $\mathcal{B} = C_0 \times L^2(\rho, L^2[0, \pi])$ o espaço de fase definido no Exemplo 1.1 com ρ uma função integrável em $(-\infty, 0]$.

A seminorma em $C_0 \times L^2(\rho, L^2[0, \pi])$ é definida por

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}} = \|\psi(0)\|_2 + \left(\int_{-\infty}^0 \rho(\theta) \|\psi(\theta)\|_2^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{e } K = 1 + \left(\int_{-\infty}^0 \rho(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A equação (3.34) pode ser expressada como um sistema abstrato da forma (3.21). De fato, assumindo que

$$C := \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a^2(-s)}{\rho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

vamos a definir $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow L^2[0, \pi]$ por

$$\begin{aligned} f(t, \varphi)(\xi) &= p(t) \int_{-\infty}^0 \int_0^\xi a(-s) \varphi(s, \eta) d\eta ds, \quad \xi \in [0, \pi], \\ g(t, \varphi)(\xi) &= e^{-\lambda t} \left| \int_0^\xi \varphi(0, \eta) d\eta \right|^\beta \sin \xi, \quad \xi \in [0, \pi], \\ D(t, \varphi)(\xi) &= \varphi(0, \xi) + f(t, \varphi)(\xi). \end{aligned}$$

Portanto, $f(t, \cdot)$ é uma aplicação linear limitada e temos as seguintes estimativas:

$$\|f(t, \psi)\|_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \|p\|_\infty C \|\psi\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{B}, \quad (3.37)$$

$$\|g(t, \psi)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \pi^{\frac{\beta+1}{2}} \|\psi\|_{\mathcal{B}}^\beta, \quad t \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{B}, \quad (3.38)$$

$$\|f(t+\omega, \psi) - f(t, \psi)\|_2 \leq |p(t+\omega) - p(t)| \frac{\pi}{\sqrt{2}} C \|\psi\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{B}, \quad (3.39)$$

Observamos que as estimativas (3.37) e (3.39) implicam que f é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados. De maneira similar, a estimativa (3.38) implica que $g(t, \psi) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, uniformemente para ψ em conjuntos limitados. Além disso, como a função $W_0(s) = s^\beta$ é uniformemente contínua para $s \geq 0$, segue da definição que g é uniformemente contínua em conjuntos limitados. Por outro lado, escolhemos a função

$$W(s) = \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \pi^{\frac{\beta+1}{2}} s^\beta.$$

É imediato que as condições (a) e (b) do Teorema 3.10 são verificadas. Em particular,

$$L_f := \frac{\pi}{\sqrt{2}} \|p\|_\infty C.$$

Seja $h(t) = e^{\frac{\lambda}{\beta}t}$. Podemos inferir que

$$\frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-(t-s)} W(Lh(s)) ds \leq \frac{L^\beta}{1+\lambda} \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \pi^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-\lambda(\frac{1}{\beta}-1)t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Assim, a condição (c) no Teorema 3.10 se satisfaz e

$$\tilde{\beta}(L) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-(t-s)} W(Lh(s)) ds \leq C_1 L^\beta,$$

para certa constante $C_1 > 0$.

Ademais, se $u, v \in C_h(X)$, então

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{|u(t, \eta)|}{h(t)} - \frac{|v(t, \eta)|}{h(t)} \right) d\eta &\leq \pi^{1/2} \left(\int_0^\pi \left(\frac{|u(t, \eta)|}{h(t)} - \frac{|v(t, \eta)|}{h(t)} \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \\ &\leq \pi^{1/2} \|u - v\|_h. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \|g(t, u_t) - g(t, v_t)\|_2^2 &= \int_0^\pi e^{-2\lambda t} \left[\left| \int_0^\xi u(t, \eta) d\eta \right|^\beta - \left| \int_0^\xi v(t, \eta) d\eta \right|^\beta \right]^2 d\xi \\ &= \int_0^\pi \left[\left| \int_0^\xi \frac{u(t, \eta)}{h(t)} d\eta \right|^\beta - \left| \int_0^\xi \frac{v(t, \eta)}{h(t)} d\eta \right|^\beta \right]^2 d\xi \\ &\leq \pi \left[W_0 \left(\int_0^\pi \frac{|u(t, \eta)|}{h(t)} d\eta \right) - W_0 \left(\int_0^\pi \frac{|v(t, \eta)|}{h(t)} d\eta \right) \right] \end{aligned}$$

e voltando a usar o fato que W_0 é uniformemente contínua, obtemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica que $\|g(t, u_t) - g(t, v_t)\|_2 \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Isto mostra que a condição (d) no Teorema 3.10 é satisfeita. Como $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\beta}(r)}{r} = 0$, se $L_f K < 1$ temos que a condição (e) no Teorema 3.10 também é verificada. Assim, pelo Teorema 3.10 o problema (3.34)-(3.36) tem uma solução S -assintoticamente ω -periódica.

3.5 Equações integro-diferenciais abstrata singular de tipo neutro com retardo infinito

3.5.1 Soluções assintoticamente quase automórficas

Em dos Santos e Cuevas [49] os autores provaram a existência e unicidade de uma solução branda assintoticamente quase automórfica para a equação integro-diferencial parcial fracionária abstrata neutra com retardo infinito

$$\frac{d}{dt}D(t, u_t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} AD(s, u_s) ds + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \quad (3.40)$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (3.41)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $D(t, \psi) = \psi(0) + f(t, \psi)$, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador setorial e f, g são funções sujeitas a? algumas condições adicionais.

Definição 3.5. Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma solução branda para o problema (3.40)-(3.41) se u é contínua em $[0, \infty)$, $u_0 = \varphi$, e verifica-se a equação integral

$$u(t) = E_\alpha(t) (\varphi(0) + f(0, \phi)) - f(t, u_t) + \int_0^t E_\alpha(t-s) g(s, u_s) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.42)$$

O seguinte resultado complementa aqueles em [49].

Teorema 3.14. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de fase com memória amortecida. Assuma que as condições (a) e (b) do Teorema 3.13 são satisfeitas, e que se tem as seguintes condições:

(i) Para cada $L > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \frac{W(Lh(s))}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds = 0.$$

Seja

$$\beta(\xi) := C(\theta, \alpha)N \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \frac{W(\nu h(s))}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds,$$

onde $C(\theta, \alpha)$ e N são as constantes definidas em (1.24).

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\|g(s, u_s) - g(s, v_s)\|}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$ e $u, v \in C_h(X)$ com $u_0 = v_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\|u - v\|_h \leq \delta$.

(iii) Assumamos que

$$L_f K + K \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1.$$

Então o problema (3.40)-(3.41) tem uma solução branda assintoticamente quase auto-mórfica compacta.

Demonstração. Denotamos por $y(\cdot)$ a função definida por $y_0 = \varphi$ e $y(t) = E_\alpha(t)\varphi(0)$ for $t \geq 0$. Definimos o operador Γ em $C_h^0(X)$ por $(\Gamma u)_0 = 0$ e

$$\Gamma u(t) = E_\alpha(t)f(0, \varphi) - f(t, u_t + y_t) + \int_0^t E_\alpha(t-s)g(s, u_s + y_s)ds, \quad t \geq 0. \quad (3.43)$$

Consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 u(t) &= E_\alpha(t)f(0, \varphi) - f(t, u_t + y_t), \\ \Gamma_2 u(t) &= \int_0^t E_\alpha(t-s)g(s, u_s + y_s)ds, \end{aligned}$$

para $t \geq 0$ e $(\Gamma_1 u)_0 = (\Gamma_2 u)_0 = 0$.

É fácil verificar que Γ_1 tem valores em $C_h^0(X)$ e que Γ_1 é uma contração. Ademais, da seguinte estimativa

$$\frac{\|\Gamma_2 u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{C(\theta, \alpha)N}{h(t)} \int_0^t \frac{W((K\|u\|_h + C)h(s))}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds, \quad (3.44)$$

obtemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\Gamma_2 u(t)\|}{h(t)} = 0$, portanto Γ_2 é uma aplicação com valores em $C_h^0(X)$. Segue-se da condição (ii) que $\Gamma_2 : C_h^0(X) \rightarrow C_h^0(X)$ é uma aplicação contínua. O restante da demonstração se faz de modo análogo à demonstração do Teorema 3.13. $\square$

3.5.2 Soluções S-assintoticamente ω -periódicas

Nesta subseção discutiremos a existência de uma solução branda S-assintoticamente ω -periódica para o problema (3.40)-(3.41). O seguinte resultado complementa aqueles obtidos em Cuevas e de Souza [37].

Teorema 3.15. *Seja $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida. Além disso, assuma que as condições (a) e (b) Teorema 3.10 e as condições (i), (ii), (iii) do Teorema 3.14 são satisfeitas. Então o problema (3.40)-(3.41) tem uma solução branda S-assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Descrevemos brevemente o argumento da demonstração. Utilizamos a mesma notação na demonstração do Teorema 3.14. Temos, da demonstração do Teorema 3.14, que Γ_1 é uma contração e Γ_2 é completamente contínua. Segue-se dos Lema 1.8, 1.14 e [37, Lema 3.2] que $\Gamma_i(SAP_{\omega,0}(X)) \subseteq SAP_{\omega,0}(X)$, $i = 1, 2$. Assim $\Gamma(SAP_{\omega,0}(X)) \subseteq SAP_{\omega,0}(X)$ e

$$\Gamma : \overline{SAP_{\omega,0}(X)}^h \rightarrow \overline{SAP_{\omega,0}(X)}^h.$$

O restante da demonstração utiliza um argumento similar ao da demonstração do Teorema 3.10. □

3.5.3 Aplicação

Para completar esta seção, examinamos a existência de uma solução branda S-assintoticamente ω -periódica para a equação diferencial de tipo neutro

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[u(t, \xi) + p(t) \int_{-\infty}^0 \int_0^\xi a(t-s)u(s, \eta) d\eta ds \right] \\ &= J_t^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu \right) \left(u(t, \xi) + p(t) \int_{-\infty}^0 \int_0^\xi a(t-s)u(s, \eta) d\eta ds \right) \\ & \quad + e^{-\lambda t} \left| \int_0^\xi u(s, \eta) d\eta \right|^\beta \sin \xi, \quad t \geq 0, \quad \xi \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.46)$$

$$u(\theta, \xi) = \phi(\theta, \xi), \quad -\infty < \theta \leq 0, \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.47)$$

onde $\beta \in (0, 1)$, $\alpha \in (1, 2)$, $\lambda, \nu > 0$, $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função S -assintoticamente ω -periódica. Ademais, usamos a notação

$$J_t^{\alpha-1} f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(s) ds.$$

Para representar esse sistema na forma abstrata (3.40) escolhemos o espaço $X = L^2[0, \pi]$ e definimos o operador A associado a? (3.45) por

$$Az = z'' - \nu z,$$

com domínio

$$D(A) = \{z \in L^2[0, \pi] : z'' \in L^2[0, \pi], z(0) = z(\pi) = 0\}.$$

É bem conhecido que $\Delta u = u''$ é o gerador de um semigrupo analítico em $L^2[0, \pi]$. Assim, A é um operador setorial com constante $\omega = -\nu < 0$. Agora usamos as definições de $\mathcal{B}$, f , g , C , W_0 , W e h introduzidas em relação ao problema (3.34)-(3.36).

Portanto, o problema (3.45)-(3.47) pode-se formular na forma abstrata (3.40), onde $u(t)(\xi) = u(t, \xi)$.

Das propriedades estabelecidas para o problema (3.34)-(3.36) temos que as funções $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow L^2[0, \pi]$ são uniformemente S -assintoticamente ω -periódicas em conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínuas em conjuntos limitados. Assim as condições (a), (b) do Teorema 3.10 são satisfeitas.

Por outro lado, podemos inferir que

$$\frac{1}{h(t)} \int_0^t \frac{W(Lh(s))}{1 + \nu(t-s)^\alpha} ds \leq \frac{\pi^{\frac{\beta+3}{2}} \nu^{-1/\alpha} L^\beta}{\sqrt{\beta+1} \alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} e^{-\lambda(\frac{1}{\beta}-1)t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

o qual mostra que a condição (i) do Teorema 3.14 é satisfeita e que

$$\tilde{\beta}(L) = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \frac{W(Lh(s))}{1 + \nu(t-s)^\alpha} ds \leq C_1 L^\beta,$$

para certa constante $C_1 > 0$. Por outro lado, se $u, v \in C_h(X)$, o argumento usado no problema (3.34)-(3.36) mostra que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica que $\|g(t, u_t) - g(t, v_t)\|_2 \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Portanto

$$\int_0^t \frac{\|g(s, u_s) - g(s, v_s)\|_2}{1 + \nu(t-s)^\alpha} ds \leq C_2 \varepsilon$$

para certa constante $C_2 > 0$. Isto mostra que a condição (ii) no Teorema 3.14 é satisfeita. Finalmente,

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\beta}(r)}{r} = 0$, se $L_f K < 1$ temos que a condição (iii) no Teorema 3.14 também é verificada. Assim, pelo Teorema 3.15 o problema (3.45)-(3.47) tem uma solução S -assintoticamente ω -periódica.

Capítulo 4

Estabilização de Sistemas de Controle com Retardo

Neste capítulo estudaremos o problema de estabilização de sistemas de controle modelados pela equação diferencial funcional abstrata

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

com retardo $r > 0$.

Vamos a supor que $u(t) \in \mathbb{R}^m$ denota a variável de controle e $B : \mathbb{R}^m \rightarrow X$ é uma aplicação linear. Além disso, A e L satisfazem as condições consideradas na seção 1.1. Denotamos por $V(t)$ o semigrupo solução associado à equação (4.1), com gerador infinitesimal A_V .

4.1 Resultados de estabilização

Iniciaremos esta seção estabelecendo nosso conceito de estabilização.

Definição 4.1. *O sistema (4.1) é dito estabilizável se existe uma aplicação linear limitada $F : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que o sistema*

$$x'(t) = Ax(t) + (L + BF)(x_t) \quad (4.2)$$

é uniformemente estável.

A seguir denotamos por $\tilde{V}(t)$ o semigrupo solução associado a (4.2), com gerador infinitesimal $\tilde{A}_V$.

Inicialmente, nós estabelecemos algumas condições necessárias para o sistema (4.1) ser estabilizável.

Proposição 4.1. *Se o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$ e o sistema (4.1) é estabilizável, então o semigrupo $V(t)$ é quase compacto.*

Demonstração. Procedendo como na demonstração do Teorema 1.1 podemos escrever

$$\begin{aligned} V(t) &= W(t) + U(t), \\ \tilde{V}(t) &= W(t) + \tilde{U}(t), \end{aligned}$$

onde o operador $\tilde{U}(t)$ é dado por

$$[\tilde{U}(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)(L+BF)(\tilde{V}(s)\varphi) ds, & -t \leq \theta \leq 0, \\ 0, & -r \leq \theta < -t. \end{cases}$$

Como B é um operador linear compacto, o mesmo argumento mencionado na demonstração do Teorema 1.1 para obter que $U(t)$ é compacto permite afirmar que $\tilde{U}(t)$ é compacto. Portanto,

$$V(t) = U(t) + \tilde{V}(t) - \tilde{U}(t). \quad (4.3)$$

Como $U(t) - \tilde{U}(t)$ é compacto e o semigrupo $\tilde{V}(t)$ é uniformemente estável, podemos afirmar que o semigrupo $V(t)$ é quase compacto. $\square$

Assumiremos que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Nesse caso, o semigrupo V é quase compacto e podemos aplicar as propriedades e notações introduzidas na Observação 1.1 em relação com a equação homogênea (1.4). Em particular, colocamos $\Lambda = \{\lambda \in \sigma_p(A_V) : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$. Além disso, como $Bu = \sum_{j=1}^m u_j b_j$, para algum $b_j \in X$, introduzimos a notação x^*B para a matriz $d \times m$ cujos (i, j) coeficientes são $\langle x_i^*, b_j \rangle$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$.

Proposição 4.2. *Assuma que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$. Então $\mathcal{R}[\lambda I - G, x^*B] = d$.*

Demonstração. Seja $v \in \mathbb{R}^{d^*}$ um vetor tal que $vG = \lambda v$ e $vx^*B = 0$. Segue-se do Lema 1.4 que $\Delta'(\lambda)vx^* = 0$. Consequentemente, $vx^* \in \mathcal{R}[\Delta(\lambda), B]^\perp$, o que por sua vez implica que $vx^* = 0$. Aplicando, agora o Lema 1.5 inferimos que $v = 0$. $\square$

Agora estamos em posição de estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 4.1. *Assuma que o semigrupo T é uniformemente estável e que o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$. Então o sistema (4.1) é estabilizável se, e somente se, $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Seja $x(\cdot)$ a solução branda de (4.1) com condição inicial $x_0 = \varphi$. Aplicando a Observação 1.1 podemos escrever $x_t^P = \Phi z(t)$, $t \geq 0$, onde $z(t)$ satisfaz a equação

$$z'(t) = Gz(t) + x^*Bu(t), \quad (4.4)$$

o qual é um sistema de controle com estados em $\mathbb{R}^d$.

Assumiremos primeiro que $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$ for $\lambda \in \Lambda$. Da Proposição 4.2 obtemos que $\mathcal{R}[\lambda I - G, x^*B] = d$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $\sigma_p(G) = \Lambda$ o critério de Hautus ([79]) implica que o sistema (4.4) é estabilizável. Consequentemente, existe uma matriz H de ordem $m \times d$ tal que $\sigma(G + x^*BH) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ está incluído em $\mathbb{C}^- \setminus \sigma(A_V)$.

Definimos $F(\varphi) = H\langle \Psi, \varphi \rangle$ para $\varphi \in C$. Como o argumento usado para estabelecer [68, Teorema 3.1] só depende das propriedades estabelecidas na Observação 1.1 e no Lema 1.4 e Lema 1.5, nós vamos incluir as ideias principais da demonstração.

Sejam $y(\cdot)$ e $\tilde{x}(\cdot)$ as soluções brandas de (1.4) e (4.2), respectivamente, com condição inicial φ . Inicialmente nós mostraremos que se $\varphi \in Q_\Lambda$, então $y(t) = \tilde{x}(t)$ para todo $t \geq 0$. De fato, $y_t = V(t)\varphi \in Q_\Lambda$ e $F(y_t) = H\langle \Psi, y_t \rangle = 0$. Consequentemente $y(t)$ também é solução de (4.2) e desta propriedade nos podemos concluir que $\tilde{V}(t)\varphi = V(t)\varphi$. Assim, o espaço Q_Λ é invariante pelo operador $\tilde{V}(t)$. Portanto, em termos da decomposição $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$, nos podemos representar $\tilde{V}(t)$ como o operador

$$\tilde{V}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(t) & 0 \\ \tilde{V}_2(t) & V^Q(t) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Usando a teoria de semigrupo de operadores, no que segue vamos demonstrar que

$$\sigma_p(\tilde{A}_V) \subseteq \{\lambda \in \sigma_p(A_V) : \operatorname{Re}(\lambda) < 0\} \cup \sigma(G + x^*BH) \subseteq \mathbb{C}^-. \quad (4.6)$$

Para fazer esta demonstração, indiquemos por λ um autovalor de $\tilde{A}_V$. Seja $\varphi \neq 0$ um autovetor correspondente de $\tilde{A}_V$. Portanto $\tilde{V}(t)\varphi = e^{\lambda t}\varphi$. Sejam $\varphi^P = \Phi w$, $w \in \mathbb{R}^d$, e φ^Q as projeções de φ no subespaço P_Λ e Q_Λ , respectivamente.

Se $w = 0$, então $\varphi^P = 0$ e $\varphi \in Q_\Lambda$. Segue-se então que $V(t)\varphi = \tilde{V}(t)\varphi = e^{\lambda t}\varphi$ e, voltando aplicar a teoria de semigrupo, obtemos que $\lambda \in \sigma_p(A_V^Q) = \{\lambda \in \sigma_p(A_V) : \text{Re}(\lambda) < 0\}$.

Se assumimos que $w \neq 0$ aplicando (4.5), de

$$\tilde{V}(t)\varphi = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \varphi^P \\ \varphi^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(t) & 0 \\ \tilde{V}_2(t) & V^Q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^P \\ \varphi^Q \end{bmatrix}$$

segue-se que

$$\tilde{x}_t^P = \tilde{V}_1(t)\varphi^P = e^{\lambda t}\varphi^P.$$

Vamos escrever $\tilde{x}_t^P = \Phi z(t)$, então $z(t) = e^{\lambda t}w$. Por outra parte, como $z(t)$ satisfaz a equação

$$z'(t) = Gz(t) + \langle x^*, BF\tilde{x}_t^P \rangle$$

é imediato que

$$\lambda w = (G + x^*BH)w$$

e λ é um autovalor de $G + x^*BH$.

Dado que o semigrupo $V(t)$ é quasi-compacto, usando (4.3) obtemos que $\tilde{V}(t)$ também é um semigrupo quasi-compacto. Segue agora do Lema 1.2 e da inclusão (4.6) que o semigrupo $\tilde{V}(t)$ é uniformemente estável e, portanto que o sistema (4.1) é estabilizável.

Reciprocamente, se (4.1) é estabilizável, existe um controle de realimentação $u(t) = F(x_t)$ para o qual o semigrupo solução $\tilde{V}(t)$ de (4.2) é uniformemente estável. Portanto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ temos que $\lambda \notin \sigma(\tilde{A}_V)$. Se segue do Lema 1.3 que $\lambda \notin \sigma(A + L_\lambda + BF_\lambda)$, o qual claramente implica que $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$. $\square$

Corolário 4.1. *Assuma que o semigrupo $T(\cdot)$ é estabilizável e o operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$ e $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Então o sistema (4.1) é estabilizável.*

Demonstração. Segue-se de nossas hipóteses que existe um operador linear $K : X \rightarrow X$ tal que o semigrupo $\tilde{T}(t)$ gerado por $\tilde{A} = A + K$ é uniformemente estável. O sistema (4.1) pode-se

escrever

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A + K)x(t) + \tilde{L}(x_t) + Bu(t) \\ &= \tilde{A}x(t) + \tilde{L}(x_t) + Bu(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde o operador $\tilde{L} : C \rightarrow X$ é dado por

$$\tilde{L}(\varphi) = L(\varphi) - K\varphi(0).$$

Além disso,

$$\tilde{T}(t)\tilde{L}(\varphi) = \tilde{T}(t)L(\varphi) - \tilde{T}(t)K\varphi(0). \quad (4.8)$$

Como K é um operador compacto, podemos afirmar que o operador definido pelo segundo termo no lado direito de (4.8) define um operador compacto. Similarmente, é bem conhecido ([112]) que

$$\tilde{T}(t)x = T(t)x + \int_0^t \tilde{T}(t-s)KT(s)xds$$

e argumentando como na demonstração do Teorema 1.1, obtemos que $\tilde{T}(t)L$ é um operador compacto. Consequentemente, $\tilde{T}(t)\tilde{L}$ é um operador compacto. Finalmente, como

$$\mathcal{R}[\lambda I - \tilde{A} - \tilde{L}_\lambda, B] = \mathcal{R}[\lambda I - A - L_\lambda, B] = X$$

podemos afirmar que o sistema (4.7) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1. Portanto o sistema (4.1) é estabilizável. $\square$

Combinando esse resultado com o critério de estabilização estabelecido em [38, 120], podemos apresentar alguns resultados para a estabilização do sistema (4.1) em termos da controlabilidade do sistema (2.6).

No resultado seguinte assumiremos que existe uma decomposição topológica $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i são subespaços invariantes por A , e X_1 é um espaço de dimensão finita. Seja $T_i(t)$ a restrição do semigrupo $T(t)$ em X_i para $i = 0, 1$. Combinando o Corolário 4.1 com [38, Corolário 3.33] obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.2. *Assuma que se tem as seguintes condições:*

(a) *O semigrupo $T_0(t)$ é uniformemente estável.*

(b) O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.

(c) O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.

(d) $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

Então o sistema (4.1) é estabilizável.

Corolário 4.3. Assumamos que X é um espaço de Hilbert e que $T(t)$ é um semigrupo de contrações tal que $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$. Se as seguintes condições são verificadas:

(a) O sistema (2.6) é aproximadamente controlável em tempo finito.

(b) O operador $T(t)L$ é compacto para $t > 0$.

(c) $\mathcal{R}[\Delta(\lambda), B] = X$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

Então o sistema (4.1) é estabilizável.

Demonstração. Segue de [15, Theorem 3.4.1] que o semigrupo $S(t)$ gerado por $A - B_1 B_1^*$ é fortemente estável. Além disso, de

$$S(t)x = T(t)x - \int_0^t S(t-s)BB^*T(s)xds,$$

obtemos que $S(t_0)$ é um operador compacto. Usando agora [16, Theorem 1.4.6] deduzimos que $S(t)$ é uniformemente estável. Portanto, o semigrupo $T(t)$ é estabilizável e a afirmação é consequência do Corolário 4.2. $\square$

4.2 Aplicações

Em esta seção aplicamos nossos resultados ao estudo da estabilização de dois classes de sistemas de controle com retardo.

Primeiro vamos considerar sistemas redigidos por equações diferenciais parciais de primeiro ordem. Como foi mencionado na Aplicação 1 na Seção 2.2, este tipo de equações descreve interessantes fenômenos tais como modelos de transporte [118] ou modelos de crescimento de

populações [103]. Para simplificar a exposição vamos considerar um sistema de controle com retardo descrito pela equação

$$\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \alpha w(t, \xi) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) w(t - r, \eta) d\eta = \sum_{i=1}^m b_i(\xi) u_i(t), \quad (4.9)$$

$$w(\theta, \xi) = \varphi(\theta, \xi), \quad (4.10)$$

para $\xi \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $-r \leq \theta \leq 0$, onde $\alpha, r > 0$ e g, b_i, φ são funções que satisfazem condições apropriadas que seram especificadas mais adiante.

Definimos $X = L^2(\mathbb{R})$. No que segue vamos supor que $f, b_i \in X$ para $i = 1, \dots, m$ e que $\varphi \in C([-r, 0], X)$. Seja A o operador

$$Az(\xi) = -\frac{dz(\xi)}{d\xi} - \alpha z(\xi)$$

no domínio $D(A) = H^1(\mathbb{R})$. O operador A é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo $T(t)$ em X definido por

$$T(t)z(\xi) = e^{-\alpha t} z(\xi - t), \quad t, \xi \in \mathbb{R}.$$

Seja $L : C([-r, 0], X) \rightarrow X$ definido por $L(\psi) = -N\psi(-r)$ e $B : \mathbb{R}^m \rightarrow X$ por $Bcol(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m b_i(\cdot) u_i$.

Vamos a supor também que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi < \infty$.

Como foi estabelecido na Aplicação 1 na Seção 2.21 o sistema original (4.9)-(4.10) é representado pelo o sistema abstrato

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + L(x_t) + Bu(t), \\ x_0 &= \varphi, \end{aligned}$$

e como consequência do Lema 2.1 e do Teorema 4.1 podemos estabelecer.

Corolário 4.4. *Nas condições precedentes, se $\mathcal{R}[\lambda I - A - e^{-\lambda r} N, B] = X$ para todo $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, então o sistema (4.9) é estabilizável.*

Como segunda aplicação vamos a estudar a estabilização da equação de onda abstrata com retardo ([38, Exemplo 2.16]). Especificamente vamos considerar a equação de onda controlada com retardo

$$x''(t) + \beta x'(t) + Ax(t) = B_1 u(t) + L_1(x_t), \quad (4.11)$$

onde $L_1 : C([-r, 0], H) \rightarrow H$ é um operador linear limitado e $B_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow H$ é uma aplicação linear.

Nesta aplicação vamos a usar a teoria desenvolvida na Aplicação 2 da Seção 2.2. No seguinte usamos as notações e resultados estabelecidos nessa aplicação.

Seja H um espaço de Hilbert real, $\beta > 0$ e A é um operador auto-adjunto positivo com domínio $D(A)$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq k\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

para alguma constante $k > 0$.

Introduzimos o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = D(A^{1/2}) \times H$ com produto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle A^{1/2}x^1, A^{1/2}x^2 \rangle + \langle y^1, y^2 \rangle.$$

Usando a transformação estabelecida na Aplicação 2 da Seção 2.2., podemos reduzir (4.11) a um sistema de controle de primeira ordem abstrato com retardo no espaço $\mathcal{H}$ redigido pela equação

$$w'(t) = \mathcal{A}w(t) + L(w_t) + Bu(t), \quad (4.12)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -\beta \end{bmatrix},$$

$L : C([-r, 0], \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ é dada por

$$L\left(\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\text{e } Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u.$$

A propriedade seguinte é uma consequência direta do Teorema 4.1.

Corolário 4.5. *Nas condições anteriores, assuma que L_1 é um operador compacto e $\mathcal{R}[\lambda(\lambda + \beta)I + A - L_{1,\lambda}, B_1] = H$ para todo $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Então o sistema de controle (2.16) é estabilizável.*

Demonstração. Está claro que L é um operador compacto assim que $G(t)L$ também é compacto para todo $t > 0$. Por outro lado, tomamos $\varphi_1 \in D(A^{1/2})$ and $\varphi_1 \in H$. Como

$$\lambda I - \mathcal{A} - L_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ A - L_{1,\lambda} & (\alpha + \beta)I \end{bmatrix}$$

a condição

$$(\lambda I - \mathcal{A} - L_\lambda) \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda\varphi - \varphi_1 \\ \lambda(\lambda + \beta)\varphi + (A - L_{1,\lambda})\varphi + B_1u &= \psi_1, \end{aligned}$$

o qual implica que $\mathcal{R}[\lambda I - \mathcal{A} - L_\lambda, B] = \mathcal{H}$. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. Adimy, K. Ezzinbi, M. Laklach, *Spectral decomposition for partial neutral functional differential equations*, Canadian Applied Math. Quart. **9** (1) (2001) 1–34.
- [2] R. P. Agarwal, B. de Andrade, C. Cuevas, *On type of peridicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations*, Adv. Difference Equ. (2010), article ID 179750, 25 pp.
- [3] R. P. Agarwal, B. de Andrade, C. Cuevas, *Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations*, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, **11** (2010), 3532-3534.
- [4] R. P. Agarwal, M. Belmekki, M. Benchohra, *A survey on semilinear differential equations and inclusions involving Riemann-liouville fractional derivative*, Adv. Difference Equ. (2009), Art. ID 981728, 47 pp.
- [5] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, *A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions*, Acta Appl. Math. **109** (3) (2010), 973-1033.
- [6] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, *Boundary value problems for fractional differential equations*, Georgian Math. J. **16** (3) (2009), 401-411.
- [7] R. P. Agarwal, T. Diagana, E. Hernández, *Weighted pseudo almost periodic solutions to some partial neutral functional differential equations*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (3) (2007), 397–415.

- [8] V. V. Ahn, R. Mac Vinish, *Fractional differential equations driven by Levy noise*, J. Appl. Math. Stoch. Anal., **16** (2) (2003), 97-119.
- [9] S. Aizicovici, H. Lee, *Nonlinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces*, Appl. Math. Lett. **18** (2005), 401-407.
- [10] S. Aizicovici, M. McKibben, *Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems*, Nonlinear Anal. **39** (2000), 649-668.
- [11] D. Araya, C. Lizama, *Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations*, Nonlinear Anal. **69** (11) (2008), 3692-3705.
- [12] S. Baghli, M. Benchohra, *Perturbed functional and neutral functional evolution equations with infinite delay in Fréchet spaces*, Electron. J. Differential Equations **69** (2008), 19 pp.
- [13] A. V. Balakrishnan, *Applied Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [14] E. Bazhlekova, *Fractional evolution equations in Banach spaces*, Thesis (Dr.) Technische Universiteit Eindhoven (The Netherlands). (2001). 113 pp, ProQuest LLC, Thesis.
- [15] C. D. Benchimol, *Feedback stabilizability in Hilbert spaces*, Appl. Math. Optim. **4** (1978), 225-248.
- [16] M. Benchohra, J Henderson, S. K. Ntouyas, A. Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*. J. Math. Anal. Appl. **338** (2) (2008), 1340-1350.
- [17] N. Boukli-Hacene, K. Ezzinbi, *Weighted pseudo almost periodic solutions for some partial functional differential equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3612-3621.
- [18] S. Boulite, L. Maniar, G. M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations*, Semigroup Forum **71** (2005), 231-240.
- [19] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, (1993).
- [20] A. Caicedo, C. Cuevas, *S-asymptotically ω -periodic solutions of abstract partial neutral integro-differential equations*. Functional Differential Equations, **17** (1-2) (2010), 387-405.

- [21] A. Caicedo, C. Cuevas, H. Henríquez, *Asymptotic periodicity for a class of partial integro-differential equations*, ISRN Mathematical Analysis, por aparecer.
- [22] A. Caicedo, C. Cuevas, G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces*. Journal of Franklin Institute, por aparecer.
- [23] C. Chen, *Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain*, SIAM J. Control **17** (1979), 66-81.
- [24] B. Coleman, M. Gurtin, *Equipresence and constitutive equations for rigid heat Conductors*, Z. Angew. Math. Phys. **18** (1967), 199-208.
- [25] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, second ed., Chelsea, New York, (1989).
- [26] E. Cuesta, *Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007) 277-285.
- [27] C. Cuevas, H. R. Henríquez, *Solutions of second order abstract retarded functional differential equations on the line*, J. Nonlinear Convex Anal. (2011), por aparecer.
- [28] C. Cuevas, E. Hernández, *Pseudo-almost periodic solutions for abstract partial functional differential equations*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 534-538.
- [29] C. Cuevas, E. Hernández, M. Rabelo, *The existence of solutions for impulsive neutral functional differential equations*, Comput. Math. Appl. **58** (2009), 774-757.
- [30] C. Cuevas, C. Lizama, *Almost automorphic solutions to a class of semilinear fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **21** (2008), 1315-1319.
- [31] C. Cuevas, C. Lizama, *Almost automorphic solutions to integral equations on the line*, Semigroup Forum, **79** (2009), 461-472.
- [32] C. Cuevas, C. Lizama, *S-asymptotically ω -periodic solutions for semilinear Volterra equations*, Mathematical Methods in Applied Sciences **33** (2010), 1628-1636.

- [33] C. Cuevas, G. N'Guérékata, M. Rabelo, *Mild solutions for impulsive neutral functional differential equations with state-dependent delay*, Semigroup Forum **80** (3) (2010), 375-390.
- [34] C. Cuevas, M. Rabelo, H. Soto, *Pseudo-almost automorphic solutions to a class of semilinear fractional differential equations*. Communications on Applied Nonlinear Analysis, **17** (1) (2010), 33-48.
- [35] C. Cuevas, M. Pinto, *Existence and uniqueness of pseudo-almost periodic solutions of semilinear Cauchy problems with non dense domain*. Nonlinear Anal. **45** (1) (2001), 73-83.
- [36] C. Cuevas, J.C. de Souza, *S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 865-870.
- [37] C. Cuevas, J. C. de Souza, *Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1683-1689.
- [38] R. F. Curtain, A. J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Lect. Notes in Control and Information Sciences, **8**, Springer-Verlag, Berlin, (1978).
- [39] R. Datko, *Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space*, J. Differential Equations **25** (1977), 258-274.
- [40] B. de Andrade, *Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução*. Tese Doutorado, UFPE (2010).
- [41] B. de Andrade, C. Cuevas. *S-asymptotically ω -periodic and asymptotically ω -periodic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain*. Nonlinear Anal. **72**, (2010) 3190-2008.
- [42] B. de Andrade, C. Cuevas, *Almost automorphic and pseudo almost automorphic solutions to semilinear evolution equations with non dense domain* , Journal of Inequalities and Applications, (2009), Article ID 298207, 8 pp.

- [43] B. de Andrade, C. Cuevas, *Compact almost automorphic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain*, Applied Mathematics and Computation, **215** (2009), 2843-2849.
- [44] W. Desch, R. Grimmer, W. Schappacher, *Well-posedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space*, J. Differential Equations **74** (2) (1988), 391-411.
- [45] W. Desch, R. Grimmer, W. Schappacher, *Some considerations for linear integro-differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 219-234.
- [46] T. Diagana, G. M. N'Guérékata, N. V. Minh, *Almost automorphic solutions of evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3289-3298.
- [47] T. Diagana, E. Hernández, J. P. C. dos Santos, *Existence of asymptotically almost automorphic solutions to some abstract partial neutral integro-differential equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 248-257.
- [48] H. S. Ding, T. J. Xiao, J. Liang, *Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 141-151.
- [49] J. P. C. dos Santos, C. Cuevas, *Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differential neutral equations*, Appl. Math. Lett. **23** (9) (2010), 960-965.
- [50] R. E. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Dover Publications, Inc. New York, 1995.
- [51] K. J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, (2000).
- [52] K. Ezzinbi, S. Fatajou, G. M. N'Guérékata, *Pseudo almost automorphic solutions for some partial functional differential equations with infinite delay*, Applicable Analysis **87** (5) (2008), 591-605.
- [53] K. Ezzinbi, G. M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for some partial functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **328** (2007), 344-358.

- [54] A. M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lectures Notes in Mathematics **377**, Springer-Verlag.
- [55] Goldberg, S., *Unbounded Linear Operator*, Dover Publ., New York, (1985).
- [56] J. A. Goldstein, G. M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions of semilinear evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (8) (2005), 2401-2408.
- [57] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, in: A.Carpinteri, F. Mainardi (EDS), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Udine, 1996), CISM Courses and Lectures, **378**, Springer, Vienna, (1997), 223-276.
- [58] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, (2003).
- [59] R. C. Grimmer, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 109-115.
- [60] R. C. Grimmer, *Resolvent operators for integral equations in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 333-349.
- [61] R. Grimmer, J. Prüss, *On linear Volterra equations in Banach spaces, Hyperbolic partial differential equations II*, Comput. Math. Appl. **11** (1-3) (1985), 189-205.
- [62] M. E. Gurtin, A. C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speed*, Arch. Ration. Mech. Anal. **31** (1968), 113-126.
- [63] S. Hadd, *Singular functional differential equations of neutral type in Banach spaces*, J. Functional Analysis **254** (2008), 2069-2091.
- [64] J. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, (1977).
- [65] J. Hale, J. Kato, *Phase space for retarded equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. **21** (1) (1978), 11-41.
- [66] J. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer Verlag, New York, (1993).

- [67] H. R. Henríquez, *Stabilization of hereditary distributed parameter control systems*, Systems & Control Letters, **44** (2001), 35-43.
- [68] H. R. Henríquez, *Asymptotically almost periodic solutions of abstract retarded functional differential equations of first order*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **10** (4) (2009), 2441-2454.
- [69] H. R. Henríquez, *On non-exact controllable systems*, Internat. J. Control **42** (1) (1985), 71-83.
- [70] H. R. Henríquez, C. Cuevas, A. Caicedo, *Almost periodic solutions of partial differential equations with delay*, sometido.
- [71] H. R. Henríquez, C. Cuevas, M. Rabelo, A. Caicedo *Stabilization of distributed control systems with delay*, Systems & Control Letters, por aparecer.
- [72] H. R. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *On S -asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2) (2008), 1119-1130.
- [73] H. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *Existence of S -asymptotically ω -periodic for abstract neutral equations*, Bull. Austral. Math. Soc. **78** (2008), 365-382.
- [74] E. Hernández, H. R. Henríquez, *Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay*, J. Math. Anal. Appl. **221** (1) (1998), 499-522.
- [75] E. Hernández, H. R. Henríquez, *Existence results for partial neutral functional equations with unbounded delay*, J. Math. Anal. Appl. **221** (2) (1998), 452-475.
- [76] E. Hernández, M. A. McKibben, *Some comments on: Existence of solutions of abstract-nonlinear second-order neutral functional integrodifferential equations in: [Comput. Math. Appl. **46** (8-9) (2003), 1313-1324], Comput. Math. Appl. **50** (5-6)(2006), 655-669.*
- [77] E. Hernández, M. Rabelo, H. R. Henríquez, *Existence of solutions for impulsive partial neutral functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **331** (2) (2007), 1135-1158.

- [78] E. Hernández, J. P. C. dos Santos, *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of partial integro-differential equations*, Electron. J. Differential Equations **38** (2006), 1-8.
- [79] M. L. J. Hautus, *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems*, Indag. Math. **31** (1969), 443-448.
- [80] Y. Hino, S. Murakami, *A generalization of processes and stabilities in abstract functional differential equations*. Funkcialaj Ekvacioj **41** (1998), 235-255.
- [81] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional-Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics. **1473** (2002), Springer-Berlin.
- [82] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, N. Van Minh, *A variation of constants formula for abstract functional differential equations in the phase space*, J. Differential Equations **179** (2002), 336-355.
- [83] Y. Hino, T. Naito, N. Van Minh, J.S. Shin, *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach spaces*, Taylor and Francis, London, (2002).
- [84] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, (1992).
- [85] V. Lakshmikantham, *Theory of fractional functional differential equations*. Nonlinear Anal. **69** (10) (2008), 3337-3343.
- [86] V. Lakshmikantham, J. V. Devi, *Theory of fractional differential equations in a Banach space*. Eur. J. Pure Appl. Math. **1** (1) (2008), 38-45.
- [87] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations*, Nonlinear Anal. **69** (8) (2008), 2677-2682.
- [88] J. Liang, J. van Casteren, T. J. Xiao, *Nonlocal Cauchy problems for semilinear evolution equations*, Nonlinear Anal. **50** (2002), 173-189.
- [89] J. Liang, T. J. Xiao, *Semilinear integro-differential equations with nonlocal initial conditions*, Comput. Math. Appl. **47** (2004), 863-875.

- [90] J. Liang, J. Zhang, T.-J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1493-1499.
- [91] J. Liu, G. M. N'Guérékata, N. Van Minh, *Topics on Stability and Periodicity in Abstract Differential Equations*, Series on Concrete and Applicable Mathematics, **6**, World Scientific Publ. Co., Singapore, (2008).
- [92] Q. Liu, R. Yuan, *Asymptotic behavior of solutions to abstract functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), 405-417.
- [93] Q. Liu, N. Van Minh, G. N'Guérékata, R. Yuan, *Massera type theorems for abstract functional differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 329-350.
- [94] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel (1995).
- [95] R. H. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, (1987).
- [96] R. K. Miller, *An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory*, J. Math. Anal. Appl. **66** (1978), 313-332.
- [97] G. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Mild solutions for semilinear fractional differential equations*, Electron. J. Differential Equations (2009), No. 21. pp. 1-9.
- [98] G. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Existence of the mild solution for some fractional differential equations with nonlocal conditions*, Semigroup Forum **79** (2009) (2), 315-322.
- [99] G. Mophou, G. M. N'Guérékata, *On integral solutions of some nonlocal fractional differential equations with nondense domain*. Nonlinear Anal. **71** (10)(2009), 4668-4675.
- [100] G. Mophou, G. M. N'Guérékata, *On some classes of almost automorphic functions and applications to fractional differential equations*, Comput. Math. Appl. **59** (3) (2010), 1310-1317.
- [101] S. Murakami, *Periodic solutions of some functional differential equations with diffusion*, Funkcialaj Ekvacioj **40** (1997), 1-17.

- [102] S. Murakami, Y. Nagabuchi, *Invariant manifolds for abstract functional differential equations and related Volterra difference equations in a Banach space*, Funkcialaj Ekvacioj **50** (2007), 133-170.
- [103] J. D. Murray, *Mathematical Biology, I. An Introduction*, Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [104] G. M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer Science + Business Media, Inc, New York, (2005).
- [105] G. M. N'Guérékata. *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Acad/Plenum, New York-Boston-Moscow-London, (2001).
- [106] G. M. N'Guérékata, *Sur les solutions presque automorphes d'équations différentielles abstraites*, Ann. Sci. Math. Québec **5** (1981), 69-79.
- [107] G. M. N'Guérékata, *Existence and uniqueness of almost automorphic mild solution to some semilinear abstract differential equations*, Semigroup Forum **69** (2004), 80-86.
- [108] S. Nicola, M. Pierri, *A note on S -asymptotically ω -periodic functions*, Nonlinear Analysis, Real World Applications **10** (5) (2009), 2937-2938.
- [109] J. W. Nunziato. *On the heat conduction in materials with memory*, Quart. Appl. Math. **29** (1971), 187-204.
- [110] J. O'Reilly, *Observers for Linear Systems*, Academic Press, London, (1983).
- [111] L. Pandolfi, *Feedback stabilization of functional differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital. **(4)**, Suppl. fasc. (3) (1975), 626-635.
- [112] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [113] M. Pierri, *S -asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications to differential equations*, Tese Universidade de São Paulo, Brazil, (2009).
- [114] A. J. Pritchard, J. Zabczyk, *Stability and stabilizability of infinite dimensional systems*, SIAM Review **23** (1) (1981), 25-52.

- [115] J. Pruss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monographs Math. **87**, Birkhäuser-Verlag, (1993).
- [116] B. Ross. *Fractional calculus and its applications*. Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, West Haven, Conn., June 15-16, 1974. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **457**, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1975). vi+381 pp.
- [117] W. M. Ruess, *Compactness and asymptotic stability for solutions of functional differential equations with infinite delay*. In Evolution Equations. (G. Ferreyra, G. Ruiz Goldstein and F. Neubrander Eds.) Lect. Notes Pure and Appl. Math. **168**, Marcel Dekker, (1995), pp. 361-374.
- [118] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*, Springer-Verlag, Milan, 2008.
- [119] C. C. Travis, G. F. Webb, *Existence and stability for partial functional differential equations*, Trans. Am. Math. Soc. **200** (1974), 395-418.
- [120] R. Triggiani, *On the stabilizability problem in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **52** (3) (1975), 383-403.
- [121] W. R. Utz, P. Waltman, *Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 597- 601.
- [122] F. Wei, K. Wang, *Global stability and asymptotically periodic solutions for nonautonomous cooperative Lotka-Volterra diffusion system*, Applied Math. and Computation **182** (2006), 161-165.
- [123] F. Wei, K. Wang, *Asymptotically periodic solutions of N -species cooperation system with time delay*, Nonlinear Analysis: Real World and Applications **7** (2006), 591-596.
- [124] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer Verlag, Berlin, (1979).
- [125] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1996).

- [126] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Applied Mathematical Sciences **14**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1975).
- [127] S. D. Zaidman, *Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces*, Pitman, London, (1985).
- [128] L. Zhang, Y. Xu, *Weighted pseudo almost periodic solutions for functional differential equations*, Electron. J. Differential Equations (2007), No. 146, 7 pp.