



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Julio Cesar de Souza Almeida

Uma teoria de regularidade para certas equações de evolução em escala de tempo discreto e contínuo

Recife
2009

Julio Cesar de Souza Almeida

Uma teoria de regularidade para certas equações de evolução em
escala de tempo discreto e contínuo¹

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Matemática.*

Orientador: Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henríquez
Co-orientador: Prof. Dr. Carlos Lizama

Recife

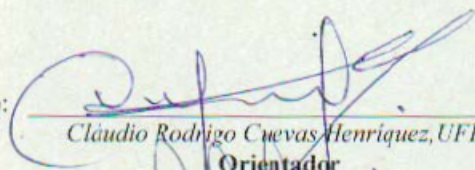
2009

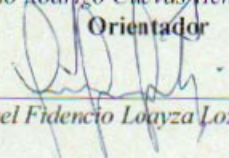
¹Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

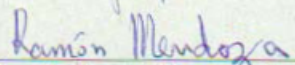
Almeida, Julio Cesar de Souza		
Uma teoria de regularidade para certas equações de evolução em escala de tempo discreto e contínuo / Julio Cesar de Souza Almeida. – Recife : O Autor, 2009. 62 folhas: il., fig.		
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.		
Inclui bibliografia		
1. Matemática – Oscilador Harmônico. 2. Funções assintoticamente periódicas. 3. Equações fracionárias. 4. Espaços UMD. I. Título.		
51	CDU (2.ed.)	UFPE
510	CDD (22.ed.)	BC - 2009 - 97

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

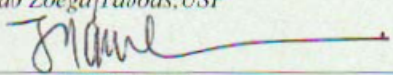
Aprovado:


Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, UFPE
Orientador


Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE


Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE


Plácido Zoega Taboas, USP


Ma To Fu, USP

UMA TEORIA DE REGULARIDADE PARA CERTAS EQUAÇÕES DE
EVOLUÇÃO EM ESCALA DE TEMPO DISCRETO E CONTÍNUO

Por

Júlio Cesar de Souza Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Abril – 2009

Conteúdo

1	Preliminares	10
1.1	Espaços UMD	10
1.2	Famílias R-Limitadas e Regularidade Maximal do Oscilador Harmônico . .	11
1.3	Operador Solução	13
1.4	Funções S -Assintoticamente ω -Periódicas	16
1.5	Um Teorema de Ponto Fixo	18
1.6	Funções Uniformemente L^2	19
1.7	Integral e Derivada Fracionária	21
2	Uma Teoria de perturbação para o Oscilador Harmônico Discreto	23
2.1	Oscilador Harmônico Semilinear	24
2.2	Um Critério de Estabilidade	32
2.3	Perturbações Locais	34
3	Soluções S-Assintoticamente ω-Periódicas de Equações de Evolução Fracionárias	36
3.1	Soluções Brandas S -Assintoticamente ω -Periódicas	37
3.2	Equações Integro-Diferenciais Fracionárias com Retardo Infinito	43
4	Fórmula Complexa da Inversão da Transformada de Laplace	52
4.1	Inversão para famílias (a, k) -regularizadas	52
4.2	Inversão para semigrupos integrados	56

Agradecimentos

Agraço a Deus por todas as oportunidades e conquistas.

A meu pai Alci Felício de Almeida, a minha mãe Edimar Maria de Souza Almeida e as minhas irmãs Priscilla de Souza Almeida e Doriana Martins da Silva, por todas as orações, apoio e presença, mesmo com a distância.

A minha namorada Maria Marta Farias de Sousa que também sempre esteve junto de mim em todas essas conquistas e nas dificuldades. Ao meu orientador Cláudio Cuevas pelo grande apoio e companherismo.

Ao meu co-orientador Carlos Lizama, que, junto com meu orientador, teve uma participação imotante no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço também aos meu colegas do Dmat por todo o companherismo e amizade.

Resumo

Nesta tese estudamos três tipos de equação de evolução.

Para a equação do Oscilador Harmônico semilinear discreto desenvolvemos uma teoria de perturbação e apresentamos um resultado de estabilidade de sua solução. Para isso, utilizamos uma caracterização de regularidade maximal discreta via espaços UMD.

Estudamos também a S -assintoticidade ω -periódica da solução de um problema de equação de evolução semilinear de ordem fracionária previamente considerada na literatura.

Por fim, abordamos o problema da inversão da transformada de Laplace de famílias de operadores limitados que possuem determinada regularidade em um espaço de Banach.

Palavras-chave: Espaços UMD, teoria de regularidade maximal, operador solução, funções assintoticamente periódicas, transformada de Laplace, equações fracionárias, oscilador harmônico.

Abstract

In this work we study three types of evolution equation.

For the discrete semilinear harmonic oscillator we develop a perturbation theory, and present a result about stability of its solution. With this purpose, we use a characterization of discrete maximal regularity via UMD spaces.

We also study the S -asymptotically ω -periodicity of a solution for the semilinear integro-differential equation of fractional order previously considered in the literature.

Finally, we work with the inverse of the Laplace transform for a family of bounded operators that has a particular regularity in a Banach space.

Keywords: UMD spaces, Maximal Regularity Theory, Solution Operator, Asymptotic Periodic Functions, Laplace Transform, Fractional Equation, Harmonic Oscillator.

Introdução

A presente tese versa a respeito de propriedades qualitativas de diversos tipos de equações de evolução em escala de tempo discreto e contínuo, entre essas, a do Oscilador Harmônico semilinear discreto e as equações de evolução fracionárias em tempo contínuo em espaços de fase abstratos de dimensão infinita.

Também se resolve um problema em aberto na literatura à respeito da fórmula complexa da inversão da transformada de Laplace de famílias resolventes k –regularizadas para equações de Volterra.

O Capítulo 1, chamado “Preliminares”, está dedicado à apresentação de conceitos e resultados básicos que serão utilizados no restante do trabalho. Nas três primeiras seções deste capítulo apresentamos os conceitos e algumas propriedades dos espaços UMD, de R –limitação para conjuntos de operadores, de regularidade maximal do Oscilador Harmônico e de operador solução gerado por um operador. Na Seção 1.4, estudamos o conceito de função S –assintoticamente ω –periódica e suas propriedades básicas. Na Seção 1.5 apresentamos um teorema de ponto fixo que será muito útil no desenvolvimento do Capítulo 3. Finalmente, as Seções 1.6 e 1.7 são dedicadas a resultados de funções uniformemente L^2 e aos conceitos e propriedades elementares de derivada fracionária, respectivamente.

No Capítulo 2, intitulado “Uma teoria de perturbação para o Oscilador Harmônico discreto”, apresentamos nossa teoria de perturbação e um resultado de estabilidade para a equação do Oscilador Harmônico semilinear. Uma das mais importantes ferramentas para desenvolver a nossa teoria é uma caracterização de regularidade maximal do Oscilador Harmônico devida a Castro, Cuevas e Lizama [14].

A literatura a respeito das funções S –assintoticamente ω –periódicas é essencialmente

limitada ao estudo de existência deste tipo de soluções para equações diferenciais ordinárias definidas em espaços de dimensão finita. Recentemente uma série de trabalhos têm aparecido devido a Henriquez e colaboradores [34, 35] e Nicolas e Pierre [43]. Nesta direção, apresentamos no Capítulo 3 um estudo da S –assintoticidade ω –periódica das soluções brandas da equação de evolução semilinear de tipo fracionária

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t, v(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

onde $1 < \alpha < 2$ e $A : D(A) \subset X \mapsto X$ é um operador linear setorial do tipo negativo definido em um espaço de Banach complexo X . Um resumo desta pesquisa pode ser encontrado em [22].

Uma outra abordagem nesse mesmo capítulo é considerar a não linearidade definida em $[0, \infty) \times \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de fase definido axiomáticamente via os axiomas de Hale-Kato (ver [33]). Especificamente, estudamos S –assintoticidade ω –periódica das soluções brandas da equação semilinear

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t, v_t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

onde v_t denota a função de história $v_t(\theta) = v(t+\theta)$. Um resumo desta pesquisa se encontra submetido a publicação ([23]). Os métodos e hipóteses para abordar a problemática deste capítulo se baseiam na utilização de Análise Funcional, especificamente a utilização da teoria de operadores de tipo setorial, teoria de funções S –assintoticamente ω –periódicas e um teorema de ponto fixo introduzido na Seção 1.5.

No Capítulo 4, chamado “Fórmula Complexa da Inversão da Transformada de Laplace”, resolvemos um problema em aberto proposto por Haase em [32]. Provamos que, em um espaço UMD, a fórmula de inversão complexa da transformada de Laplace para semigrupos integrados e, em geral, para famílias (k, a) –regularizadas, é válido no sentido forte. Um resumo deste trabalho se encontra submetido ([41]).

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo as definições e resultados básicos necessários para o entendimento deste trabalho.

Na primeira seção relembramos as definições e resultados básicos de espaços UMD, que serão o ambiente natural de trabalho tanto na parte que envolver escala de tempo discreto como na parte contínua (ver Capítulos [2] e [4]). Em seguida, daremos uma importante caracterização de regularidade maximal discreta via propriedades de famílias R -limitadas. Nas seções (1.3) - (1.5) nos dedicamos a preparar o leitor para o entendimento dos estudos das equações de ordem fracionárias que aparecem no Capítulo 3. Por fim, na Seção 1.6, relembramos algumas propriedades das funções uniformemente L^2 de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{B}(X)$, o espaço dos operadores limitados em X , que são utilizadas no desenvolvimento do Capítulo 4.

1.1 Espaços UMD

A definição de espaços UMD (chamados “the unconditional martingale difference property”) foi introduzida por D.L. Burkholder no artigo [9, Seção 9] e é dada como segue:

Definição 1.1. *Um espaço de Banach possui a propriedade UMD se para cada $p \in (1, \infty)$ existe uma constante $C_p > 0$ tal que, para qualquer sequência $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$, quaisquer escolhas de sinais $(\xi_n)_{n \geq 0} \subset \{-1, 1\}$ e qualquer $N \in \mathbb{Z}_+$, vale a estimativa*

$$\|f_0 + \sum_{n=1}^N \xi_n(f_n - f_{n-1})\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)} \leq C_p \|f_N\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)}.$$

Relembramos que um espaço de Banach X possui a propriedade $\mathcal{HT}$ se a transformada de Hilbert se estende a um operador linear limitado em $L^p(\mathbb{R}, X)$, para algum (e portanto para todo) $p \in (1, \infty)$. Aqui, a transformada de Hilbert de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, o espaço de Schwartz das funções rapidamente decrescente em X , é definida por

$$(Hf)(t) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon \leq |s| \leq R} \frac{f(t-s)}{s} ds.$$

Para mais detalhes a respeito da transformada de Hilbert e espaços UMD referimos [2, Seção III.4.3-III.4.5]. Bourgain [8] e Burkholder [10] mostraram que a classe dos espaços $\mathcal{HT}$ coincide com a classe dos espaços UMD.

Os espaços UMD incluem, por exemplo, os espaços de Hilbert, espaços de Sobolev $W_p^s(\Omega)$, $1 < p < \infty$ (veja [3]) e os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ e $L^p(\Omega, \mu; X)$, $1 < p < \infty$, onde X é um espaço UMD. Notemos também que todo subespaço fechado de um espaço UMD é UMD. Além disso, todo espaço UMD é reflexivo. Dessa forma, $L^1(\Omega, \mu; X)$ e $L^\infty(\Omega, \mu; X)$ não são UMD.

1.2 Famílias R-Limitadas e Regularidade Maximal do Oscilador Harmônico

A noção de famílias R-limitadas é de bastante importância em estudos recentes de equações de evoluções discretas (veja as referências [4, 6, 7, 13, 14, 19 e 20]). Conceitos preliminares e propriedades de famílias R-limitadas podem ser encontrados em [3, 27, 39]. Para $j \in \mathbb{N}$, denote por r_j a j -ésima função de Rademacher em $[0, 1]$, isto é, $r_j(t) = \text{sgn}(\sin(2^j \pi t))$. Denotemos por $\mathcal{B}(X, Y)$ o conjunto das aplicações lineares e limitadas de X em Y ; quando $X = Y$ escrevemos $\mathcal{B}(X)$ no lugar de $\mathcal{B}(X, X)$. A definição de famílias R-limitadas é dada a seguir.

Definição 1.2. *Uma família $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ é R-limitada se existe $C_p \geq 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j \otimes T_j x_j \right\|_{L^p(0,1;X)} \leq C_p \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j \otimes x_j \right\|_{L^p(0,1;X)}, \quad (1.1)$$

para todo $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $1 \leq p < \infty$. Aqui denotamos $r_j \otimes x(t) = r_j(t)x$, $t \in [0, 1]$.

Note que o conceito de R -limitado claramente implica uniformemente limitado. Se $X = Y$, a noção de R -limitado é estritamente mais forte que a noção de limitado, a menos que X seja isomorfo a um espaço de Hilbert [veja 3, Proposição 1.17].

Agora considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_{n+1} = f_n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Foi provado em [14] que a equação (1.2) tem uma única solução, que é dada por

$$x_{m+1} = (B * f)_m := \sum_{i=0}^m B(i)f_{m-i},$$

onde $B(n) \in \mathcal{B}(X)$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 B(n) - (I - T)B(n+1) = 0, \\ B(0) = 0, B(1) = I. \end{cases} \quad (1.3)$$

A família $\{B(n)\}$ é chamada solução fundamental de (1.2).

A seguinte definição de regularidade maximal foi introduzida em [14].

Definição 1.3. *Seja $1 < p < +\infty$. Dizemos que a equação (1.2) tem regularidade maximal discreta se $\mathcal{K}f = (I - T)B * f$ define um operador limitado $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$.*

Relembramos que um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ é dito analítico se o conjunto $\{n(T - I)T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $\mathcal{B}(X)$. A seguir apresentamos uma caracterização de regularidade maximal para a equação (1.2) através da propriedade de R -limitação da resolvente do operador T (veja [14] e [15]).

Teorema 1.1. *Sejam X um espaço UMD e $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador analítico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A equação (1.2) tem regularidade maximal discreta.*

(ii) *O conjunto $\left\{ \frac{(z-1)^2}{z} R\left(\frac{(z-1)^2}{z}, I - T\right) \middle/ |z| = 1, z \neq 1 \right\}$ é R -limitado.*

Aqui $R(\omega, A) := (\omega - A)^{-1}$.

1.3 Operador Solução

O seguinte conceito foi introduzido em [11]. Ele corresponde a uma classe mais geral de famílias de operadores que surgem das equações de evolução lineares governadas por um gerador A .

Definição 1.4. *Seja $k \in C(\mathbb{R}_+)$ um Núcleo escalar e $a \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}_+)$. Dizemos que um operador linear fechado A , com domínio $D(A)$, é o gerador de uma família (a, k) -regularizada, $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(R1) $S(t)$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}_+$ e $S(0) = k(0)I$;

(R2) $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;

(R3) Vale a equação resolvente (a, k) -regularizada

$$S(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds, \quad (1.4)$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

Note que semigrupos integrados, semigrupos convoluídos e resolventes de equações de Volterra são todos famílias de operadores (a, k) -regularizadas para diferentes escolhas de a e k .

Definição 1.5. *A é dito o gerador de um operador solução se existem $\mu > 0$ e uma função $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ fortemente contínua tais que $\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re} \lambda > \mu\} \subset \rho(A)$ e*

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \mu, \quad x \in X.$$

Neste caso, S_α é o operador solução gerado por A .

Relembremos que A é setorial do tipo μ se existem $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \pi/2$ e $M > 0$ tais que seu resolvente existe no exterior de

$$\mu + S_\theta := \{\mu + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\arg(-\lambda)| < \theta\},$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Proposição 1.1. *Se A é o gerador de uma família (a, k) -regularizada e exponencialmente limitada $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, onde $a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ e $k(t) \equiv 1$, com $1 < \alpha < 2$, então A é o gerador de um operador solução S_α , com $S_\alpha = S$.*

Demonstração. Suponha que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, com $\omega \geq 0$. Então, para $\lambda > \operatorname{Re} \omega$, defina

$$H(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt.$$

Dessa forma,

$$\|H(\lambda)x\| \leq M \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} S_\alpha(t) dt \|x\|.$$

Logo $H(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$.

Além disso, por (R3), temos

$$\begin{aligned} S(t)x &= x + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} AS(s)x ds \\ &= x + J^\alpha AS(t)x. \end{aligned}$$

Usando as propriedades da integral fracionária (veja a Seção 1.7 seguir),

$$\begin{aligned} H(\lambda)x &= \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^\alpha} AH(\lambda)x \\ \implies (\lambda^\alpha - A)H(\lambda)x &= \lambda^{\alpha-1}x, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

E, por (R2), temos

$$H(\lambda)x = \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^\alpha} H(\lambda)Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Logo

$$\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

e

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt.$$

□

Considere agora o problema

$$\begin{cases} u'(t) = J^{\alpha-1}Au(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Integrando,

$$u(t) = u_0 + J^\alpha Au(t) \quad (1.6)$$

Portanto u satisfaz (1.5) se, e somente se, satisfaz (1.6).

Assim, se A é setorial do tipo μ , com $0 \leq \theta \leq \pi(1 - \alpha/2)$, então a solução de (1.6) é dada por

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0,$$

onde

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda,$$

onde γ é um caminho no exterior de $\mu + S_\theta$.

O seguinte teorema, estabelecido em [26], é de muita importância nos resultados do terceiro capítulo do presente trabalho.

Teorema 1.2. *Se A é setorial do tipo $\mu < 0$, para algum $M > 0$ e $0 < \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, então existe $C > 0$, dependendo somente de θ e α , tal que*

$$\|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{CM}{1 + |\mu|t^\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

Note que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + |\mu|t^\alpha} dt = \frac{|\mu|^{-1/\alpha} \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}, \quad \text{para } 1 < \alpha < 2.$$

Portanto $S_\alpha(t)$ é integrável.

Nessas condições, A é o gerador de uma família (a, k) -regularizada exponencialmente limitada (exceto pela propriedade (R1)), com $k(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ e $a \equiv 1$. E isso é suficiente para que valha a Proposição 1.1. Logo A é o gerador do operador solução

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda.$$

O conceito de operador solução é próximo do conceito de família resolvente de Prüss (ver [44, Capítulo I]). No caso escalar existe uma extensa bibliografia, por exemplo, aqui referimos o livro [31]. Notemos que no caso $\alpha = 1$ a família $S_\alpha(t)$ corresponde a um C_0 -semigrupo, enquanto que no caso $\alpha = 2$ o operador solução corresponde ao conceito de família cosseno (ver [29]).

1.4 Funções S -Assintoticamente ω -Periódicas

A literatura a respeito das funções S -assintoticamente ω -periódicas era até agora restrita ao estudo da existência de soluções S -assintoticamente ω -periódicas de equações diferenciais ordinárias descritas em espaços de dimensão finita. Henríquez, Pierre e Táboas, em [34 e 35] (ver também [43]), recentemente desenvolveram uma teoria para o conjunto dessas funções com valores em um espaço de Banach.

Sejam $C_b([0, \infty), X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em $[0, \infty)$ com valores em X , munido da norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_\infty$, e $C_0([0, \infty), X)$ o subespaço de $C_b([0, \infty), X)$ constituído das funções $x : [0, \infty) \mapsto X$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_X = 0$.

Definição 1.6. *Seja $f \in C_b([0, \infty), X)$. Dizemos f é S -assintoticamente periódica se existe $\omega > 0$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0.$$

Neste caso, dizemos que ω é o período assintótico de f e que f é S -assintoticamente ω -periódica.

Denotaremos por $SAP_\omega(X)$ o subespaço de $C_b([0, \infty), X)$ formado pelo conjunto das funções S -assintoticamente ω -periódicas. Note que $(SAP_\omega(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach (veja [34], Proposição 3.5).

Definição 1.7. *Uma função $f \in C_b([0, \infty), X)$ é dita assintoticamente ω -periódica se existem $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$ e uma função ψ , ω -periódica, tais que $f = \psi + \varphi$.*

Exemplo 1.1. Sejam $X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, munido com a norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

e $f : [0, \infty) \mapsto X$ definida por $f(t) = \left(\frac{2nt}{t^2 + n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observe que $\|f(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$. Além disso, para $t, s \in [0, \infty)$, temos

$$\|f(t+s) - f(t)\| \leq \sup_{n \geq 1} \frac{2ns|n^2 - t^2 - st|}{[(t+s)^2 + n^2](n^2 + t^2)} \leq 2s.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|f(t + \mu) - f(t)\| &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{2n|\mu n^2 - \mu t^2 - \mu^2 t|}{[(t + \mu)^2 + n^2](n^2 + t^2)} \\
&\leq \sup_{n \geq 1} \frac{2n\mu(n^2 + t^2 + \mu t)}{[t^2 + 2\mu t + \mu^2 + n^2](n^2 + t^2)} \\
&\leq \sup_{n \geq 1} \frac{2n\mu}{(n^2 + t^2)} \\
&\leq \frac{\mu}{t}.
\end{aligned}$$

Logo f é S -assintoticamente μ -periódica para todo $\mu > 0$. No entanto, f não é assintoticamente μ -periódica. Para ver isso, suponha que exista ψ , μ -periódica, e $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$ tais que $f = \psi + \varphi$. Se $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então cada coordenada f_n é assintoticamente μ -periódica e $f_n(t + k\mu) = \psi_n(t) + \varphi_n(t + k\mu)$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(t + k\mu) = 0$, segue que $\psi_n(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $\psi = 0$ e $f = \varphi$, o que é um absurdo, pois $\|f(n)\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.8. *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados se, para todo $K \subset X$ limitado, o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega, x) - f(t, x)) = 0,$$

uniformemente em $x \in K$.

Definição 1.9. *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados se, para todo $\epsilon > 0$ e $K \subset X$ limitado, existem $L_{\epsilon, K} \geq 0$ e $\delta_{\epsilon, K} > 0$ tais que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \epsilon$, para todo $t \geq L_{\epsilon, K}$ e $x, y \in K$, com $\|x - y\| \leq \delta_{\epsilon, K}$.*

Encerramos esta seção com os seguintes resultados (veja [34]):

Lema 1.1. *Sejam X, Y espaços de Banach, $u : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função S -assintoticamente ω -periódica e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e uniformemente contínua em conjuntos limitados. Então $v(t) = f(t, u(t))$ é uma função S -assintoticamente ω -periódica.*

Proposição 1.2. *Seja $\varphi \in C_b([0, \infty), X)$. Assuma que existe uma sequência de números naturais $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, com $n_1 = 1$ e $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tal que*

$$\alpha = \sup_{j \in \mathbb{N}} (n_{j+1} - n_j) < \infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t + n_j \omega) - \varphi(t)) = 0,$$

uniformemente para $j \in \mathbb{N}$. Então φ é assintoticamente ω -periódica.

1.5 Um Teorema de Ponto Fixo

Nesta seção apresentamos uma consequência do Teorema do ponto fixo de Banach, que será muito útil no Capítulo 3. Considere Y e Z espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. Assuma a existência de uma relação de ordem parcial $\preceq$ em Z e de uma aplicação $m : Y \rightarrow Z$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Para todo $y \in Y$, $0 \preceq m(y)$;
- (ii) a norma $\|\cdot\|_Z$ é monótona com respeito a ordem parcial $\preceq$, isto é, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $\|z_1\|_Z \leq \|z_2\|_Z$;
- (iii) Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|y\|_Y \leq C_1 \|m(y)\|_Z \text{ e } \|m(y)\|_Z \leq C_2 \|y\|_Y, \text{ para todo } y \in Y.$$

Teorema 1.3. *Sejam $S \subset Y$ um conjunto fechado e não vazio e $P : S \rightarrow S$ uma aplicação contínua. Suponha que existe um operador linear e limitado $B : Z \rightarrow Z$ tal que:*

- (i) O raio espectral $r(B) < 1$;
- (ii) O operador B é crescente com relação a $\preceq$, isto é, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $Bz_1 \preceq Bz_2$;
- (iii) Para todo $y_1, y_2 \in S$, $m(Py_1 - Py_2) \preceq Bm(y_1 - y_2)$.

Então P tem um único ponto fixo.

Demonstração. Ver [36].

□

1.6 Funções Uniformemente L^2

Apresentaremos agora as preliminares para o último capítulo deste trabalho. Aqui X e Y sempre denotarão espaços de Banach complexos e todas as funções definidas em $[0, \infty)$ serão extendidas a $\mathbb{R}$, considerando-as iguais a 0 em $(-\infty, 0)$. Para uma aplicação $S : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ e $\omega \in \mathbb{R}$ definimos seu *shift exponencial* S_ω por

$$S_\omega(t) := e^{-\omega t} S(t), \quad (t \geq 0).$$

Além disso,

$$\omega_0(S) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists M > 0 : \|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \ (t \geq 0)\}$$

denotará o tipo exponencial de S . Se S é fortemente mensurável e do tipo exponencial, escrevemos

$$(\mathcal{L}S)(z) := \int_0^\infty e^{-zt} S(t) dt, \quad (\operatorname{Re} z > \omega_0(S)),$$

para representar sua transformada de *Laplace*. Da mesma forma (e como geralmente se faz) definimos

$$\mathcal{L}(a)(z) := \int_0^\infty e^{-zt} a(t) dt,$$

como sendo a transformada de Laplace de uma função $a : [0, \infty) \rightarrow X$, sempre que essa integral tiver sentido.

Se $S : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ e $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(Y, Z)$ são fortemente mensuráveis e do tipo exponencial, então a convolução $S * T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ dada por

$$(T * S)(t)x := \int_0^\infty T(t-s)S(s)ds \quad (x \in X),$$

é bem definida, fortemente contínua e do tipo exponencial; além disso, tem-se

$$(T * S)_\omega = T_\omega * S_\omega \text{ e } \mathcal{L}(T * S) = \mathcal{L}(T) \cdot \mathcal{L}(S). \quad (1.8)$$

Veja [32] para mais detalhes.

Uma aplicação fortemente mensurável $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ é dita fortemente L^2 se $S(\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ para todo $x \in X$.

Assim, defina $S : X \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$ por

$$(Sx)(t) = S(t)x.$$

Suponha $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é tal que

$$(x_n, Sx_n) \rightarrow (x, f),$$

com $f \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ e $x \in X$. Seja $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$ tal que

$$S(t)x_{n_j} \rightarrow f(t) \text{ qtp.}$$

Então

$$S(t)x = S(t)(\lim_{n_j} x_{n_j}) = \lim_{n_j} S(t)x_{n_j} = f(t) \text{ qtp.}$$

Usando o Teorema do Gráfico Fechado, temos que

$$\|S\|_2 := \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|S(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}, Y)} < \infty. \quad (1.9)$$

Dizemos que S é *uniformemente* L^2 se existe uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $g \geq 0$ e

$$\|S(t)x\|_Y \leq g(t)\|x\|_X \quad (t \in \mathbb{R}, x \in X).$$

Neste caso, dizemos que g é a função majorante escalar de S . Usando (1.9), obtemos a seguinte forma para a desigualdade de Young.

Lema 1.2. *Sejam $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ fortemente L^2 e $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ uniformemente L^2 , com majorante escalar g . Então a convolução $T * S$, definida por*

$$(T * S)(t)x := \int_{\mathbb{R}} T(t-s)S(s)x ds \quad (x \in X, t \in \mathbb{R}),$$

existe e satisfaz

$$\sup_{t \geq 0} \|(T * S)(t)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \|g\|_2 \|S\|_2. \quad (1.10)$$

Para $N > 0$ denotaremos por D_N o *Núcleo de Dirichlet*, isto é,

$$D_N(t) := \frac{\sin(Nt)}{\pi t}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Então, com um simples cálculo, temos

$$D_N * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{its} \hat{f}(s) ds, \quad (1.11)$$

onde f é integrável e $\hat{f}$ denota sua transformada de Fourier.

Se $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ é fortemente contínua e do tipo exponencial $w_0(S)$, então

$$\begin{aligned} K_N(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-iN}^{\omega+iN} e^{tz} \mathcal{L}(S)(z) dz \\ &= e^{\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{its} \mathcal{L}(S)(\omega + is) ds \\ &= e^{\omega t} (D_N * S_\omega)(t); \end{aligned} \tag{1.12}$$

portanto

$$(K_N)_\omega = D_N * S_\omega.$$

Lema 1.3. *Sejam $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ fortemente contínua e do tipo exponencial $\omega > \omega_0(S)$. Então*

$$t(D_N * S_\omega) \sim (D_N * [tS(t)]_\omega),$$

ou seja, para todo $x \in X$ tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [t(D_N * S_\omega) - (D_N * [tS(t)]_\omega)] x = 0,$$

uniformemente em $t \geq 0$.

Demonstração. Ver [32]. □

1.7 Integral e Derivada Fracionária

A noção de integral de ordem fracionária α ($\alpha > 0$) é uma natural consequência da conhecida fórmula (usualmente atribuída a Cauchy), que reduz o cálculo da n -ésima primitiva de uma função f a uma integral do tipo convolução. Em nossas notações, a fórmula de Cauchy é dada por

$$J^n f(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Um modo natural nos leva a estender a fórmula anterior de índices $n \in \mathbb{N}$ para qualquer número real usando a função Gamma.

Lembrado que

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

temos a seguinte definição para a integral fracionária:

Definição 1.10. *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções que são contínuas em $(0, \infty)$ e integráveis em cada subintervalo finito de $[0, \infty)$. Se $f \in \mathcal{C}$, então*

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

e

$$J^0 f(t) = f(t).$$

Por exemplo, se $f(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$, temos

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} t^{\gamma+\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

É interessante mencionar que

$$\mathcal{L}(J^\alpha f)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (1.14)$$

Definimos a derivada fracionária de ordem $\alpha > 0$ da seguinte forma:

Definição 1.11. *Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 < \alpha \leq m$. Então*

$$D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t). \quad (1.15)$$

Usando (1.10), é fácil obter

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > -1, \quad t > 0. \quad (1.16)$$

Teorema 1.4. *Seja $\alpha > 0$. Se $f \in \mathcal{C}$, então*

$$D^\alpha J^\alpha f = f.$$

Observação 1.1. *Todas as definições e propriedades desta seção podem se encontradas em [5], [30] ou [42]*

Capítulo 2

Uma Teoria de perturbação para o Oscilador Harmônico Discreto

O desenvolvimento da teoria das equações de evolução discreta tem sido fortemente promovido pelo avanço tecnológico em computação científica e pelo grande número de aplicações em modelos em biologia, engenharia e outras ciências. Por este motivo, recentemente, tem-se despertado um amplo interesse por parte dos pesquisadores em desenvolver a teoria destas equações em um contexto mais geral. O primeiro autor que abriu caminho na direção de regularidade maximal discreta foi Blunck, veja [7]. Nesse trabalho se estuda regularidade maximal para equações de evolução de primeira ordem. Posteriormente, Cuevas e Lizama, em [20, 25], constroem uma teoria de Permutação para equações semi-lineares de primeira ordem, mediante o uso da regularidade maximal discreta. Cuevas e Vidal, em [24], dão início à teoria de regularidade maximal para equações funcionais em diferença com retardo infinito em espaços de fase abstratos de tipo Hale-Kato (ver também [12]). Nesta direção, apresentamos uma teoria de perturbação e um resultado de estabilidade para o Oscilador Harmônico discreto que pode ser considerada como um primeiro passo para cobrir um trabalho, quase inexistente, na área de equações de evolução discreta. Um resumo dessa pesquisa se encontra por aparecer em [21]. Os métodos e hipóteses para abordar esta problemática se baseiam na utilização de R -limitação de conjuntos de operadores e regularidade maximal discreta.

2.1 Oscilador Harmônico Semilinear

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de soluções da equação

$$\Delta^2 x_n - (I - T)x_{n+1} = f(n, x_n, \Delta x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x_0 = x_1 = 0, \quad (2.1)$$

cujas segunda derivada discreta está em l_p .

Para isso precisamos introduzir a seguinte condição:

Condição (A): Seja $\alpha = (\alpha_n)$ uma sequência positiva tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{2n} < +\infty$. Suponha que as seguintes condições se verificam:

- (i) A função $f : \mathbb{Z}_+ \times X \times X \longrightarrow X$ satisfaz uma condição de tipo Lipschitz em $X \times X$, isto é, para todo $z, w \in X \times X$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, tem-se

$$\|f(n, z) - f(n, w)\|_X \leq \alpha_n \|z - w\|_{X \times X};$$

- (ii) $f(\cdot, 0, 0) \in l_1(\mathbb{Z}_+; X)$.

Observação 2.1. Um exemplo concreto para a condição (i) é

$$f(n, z) = P(n)Q(z),$$

onde $P : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X \times X, X)$, com $\sum_{n=0}^{\infty} \|P(n)\| 2^{2n} < \infty$, e Q satisfaz

$$\|Q(z) - Q(w)\|_{X \times X} \leq C \|z - w\|_{X \times X}.$$

Notemos que condições do tipo (i) têm sido consideradas na literatura (ver [20]).

Definição 2.1. Denotaremos por $\mathcal{H}_0^{2,p}$ o espaço de Banach de todas as sequências $V = (V_n)$ tais que $V_0 = V_1 = 0$ e $\Delta^2 V \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, equipado com a norma $\|V\| = \|\Delta^2 V\|_p$.

Com as notações anteriores temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Assuma que a condição (A) se verifica e que a equação (1.2) tem regularidade maximal discreta. Então existe uma única solução $x = (x_n)$ da equação (2.1) tal que $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Além disso, tem-se as seguintes estimativas a priori:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[\frac{1}{2^{2n}} (\|x_n\|_X + \|\Delta x_n\|_X) \right] \leq (1 + \|\mathcal{K}\|) \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 e^{(1 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}, \quad (2.2)$$

$$\|\Delta^2 x\|_p \leq 2(1 + \|\mathcal{K}\|)^2 \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 e^{(2+\|\mathcal{K}\|) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}, \quad 1 < p < +\infty, \quad (2.3)$$

e

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|((I - T)x_n, (I - T)\Delta x_n)\|_{X \times X} \leq 12(1 + \|\mathcal{K}\|)^3 \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 e^{[\|T\| + 4\|\mathcal{K}\| + 2] \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}. \quad (2.4)$$

Aqui $\mathcal{K}$ denota o operador da Definição 1.3 e $\|\mathcal{K}\|$ denota a norma do operador.

Demonstração. Seja V uma sequência em $\mathcal{H}_0^{2,p}$. Então usando a Condição (A) obtemos que a função $g := f(\cdot, V, \Delta V)$ está em $l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, 0, 0)\|_X^p + 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n, 0, 0)\|_X^p \\ &\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p \|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X}^p + 2^p \|f(\cdot, 0, 0)\|_{\infty}^{p-1} \|f(\cdot, 0, 0)\|_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X} &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i \right\|_X + \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 V_i \right\|_X \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta V_i\|_X + \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta^2 V_i\|_X \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} i \|\Delta^2 V\|_{\infty} + n \|\Delta^2 V\|_{\infty}. \end{aligned}$$

E isso nos dá

$$\|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X} \leq \frac{1}{2}(n^2 + n) \|V\|, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.6)$$

Usando (2.6) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p \|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X}^p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p 2^{2np} \right) \|V\|^p. \quad (2.7)$$

Portanto, de (2.5) e de (2.7), concluímos que $g \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$.

Como a equação (1.2) possui regularidade maximal discreta, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_{n+2} - (3I - T)z_{n+1} + z_n = g_n, \\ z_0 = z_1 = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

tem uma única solução (z_n) tal que $(\Delta^2 z_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, a qual é dada por

$$z_n = [\tilde{\mathcal{K}}V]_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0, 1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} B(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}), & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Mostraremos agora que o operador $\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{H}_0^{2,p} \longrightarrow \mathcal{H}_0^{2,p}$ tem um único ponto fixo. Seja V uma sequência em $\mathcal{H}_0^{2,p}$. Como $B(0) = 0$ e $B(1) = I$, segue que

$$\Delta[\tilde{\mathcal{K}}V]_n = \sum_{k=0}^{n-1} (B(k+1) - B(k))f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}), \quad n \geq 1. \quad (2.10)$$

Por outro lado,

$$\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_n = f(n, V_n, \Delta V_n) + \sum_{k=1}^n (I - T)B(k)f(n-k, V_{n-k}, \Delta V_{n-k}). \quad (2.11)$$

Logo, para V e W em $\mathcal{H}_0^{2,p}$ e $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} & \Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - \Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}W]_n \\ &= f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n) \\ &+ \sum_{k=1}^n (I - T)B(k)(f(n-k, V_{n-k}, \Delta V_{n-k}) - f(n-k, W_{n-k}, \Delta W_{n-k})). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Além disso, usando o fato que $\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_0 = f(0, 0, 0)$, a identidade anterior e a desigualdade de Minkowskii, obtemos

$$\begin{aligned} & \|\Delta^2\tilde{\mathcal{K}}V - \Delta^2\tilde{\mathcal{K}}W\|_p \\ & \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n)\|_X^p \right]^{1/p} \\ & + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^n (I - T)B(k)(f(n-k, V_{n-k}, \Delta V_{n-k}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - f(n-k, W_{n-k}, \Delta W_{n-k})) \right\|_X^p \right]^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como $\mathcal{K}$ é limitado em $l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, podemos usar a desigualdade (2.7) e a condição (A) para concluir que

$$\begin{aligned}
& |||\tilde{\mathcal{K}}V - \tilde{\mathcal{K}}W||| \\
& \leq (1 + ||\mathcal{K}||) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n)\|_X^p \right]^{1/p} \\
& \leq (1 + ||\mathcal{K}||) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p \|((V - W)_n, \Delta(V - W)_n)\|_{X \times X}^p \right]^{1/p} \\
& \leq (1 + ||\mathcal{K}||) (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^{2n}) |||V - W|||.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Observe agora que

$$|(I - T)B(n)| \leq ||\mathcal{K}||, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.15}$$

De fato, como $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$, para todo $f \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, obtemos

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^n (I - T)B(k)f_{n-k} \right\|_X^p \right]^{1/p} \leq ||\mathcal{K}|| \left[\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_X^p \right]^{1/p}. \tag{2.16}$$

Dado $x \in X$, definimos

$$f_n = \begin{cases} x, & \text{para } n = 0, \\ 0, & \text{para } n \neq 0. \end{cases}$$

Um simples cálculo mostrar que

$$|(I - T)B(n)x|_X \leq ||\mathcal{K}|| \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Assim obtemos (2.15).

Agora consideraremos as interações do operador $\tilde{\mathcal{K}}$. Inicialmente, observe que, para $0 \leq k \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
||B(k)|| & \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||\Delta B(i)|| \\
& \leq k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} ||\Delta^2 B(j)|| \\
& = k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} ||(I - T)B(j+1)||.
\end{aligned}$$

Portanto, levando em consideração a desigualdade (2.15), concluímos que

$$\|B(k)\| \leq n^2(1 + \|\mathcal{K}\|), \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.17)$$

Analogamente, temos a seguinte desigualdade

$$\|B(k+1) - B(k)\| \leq (1+n)(1 + \|\mathcal{K}\|), \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.18)$$

Sejam $V, W \in \mathcal{H}_0^{2,p}$. De (2.17) obtemos

$$\begin{aligned} & \|[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - [\tilde{\mathcal{K}}W]_n\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} B(k)(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})) \right\|_X \\ &\leq n^2(1 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \|((V-W)_j, \Delta(V-W)_j)\|_{X \times X}. \end{aligned}$$

Assim, de (2.6), obtemos a estimativa

$$\|[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - [\tilde{\mathcal{K}}W]_n\|_X \leq n^2(1 + \|\mathcal{K}\|) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j 2^{2j} \right) \|V - W\|. \quad (2.19)$$

Por outro lado, usando (2.10), observamos que

$$\begin{aligned} \Delta[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - \Delta[\tilde{\mathcal{K}}W]_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (B(k+1) - B(k))(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\ &\quad - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De (2.18), (2.20) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - \Delta[\tilde{\mathcal{K}}W]_n\|_X &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|B(k+1) - B(k)\| \cdot \|f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\ &\quad - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})\|_X \\ &\leq (1+n)(1 + \|\mathcal{K}\|) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_j}{2} (j^2 + j) \right) \|V - W\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\Delta[\tilde{\mathcal{K}}V]_n - \Delta[\tilde{\mathcal{K}}W]_n\|_X \leq (1+n)(1+\|\mathcal{K}\|)\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j 2^{2j}\right)\|V - W\|. \quad (2.21)$$

Usando as estimativas (2.19) e (2.21) e levando em conta que $(n^2 + 1 + n)/2^{2n} \leq 1$, temos que

$$\|([\tilde{\mathcal{K}}V - \tilde{\mathcal{K}}W]_n, \Delta[\tilde{\mathcal{K}}V - \tilde{\mathcal{K}}W]_n)\|_{X \times X} \leq 2^{2n}(1 + \|\mathcal{K}\|)\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j 2^{2j}\right)\|V - W\|. \quad (2.22)$$

Com isso, e do fato que $\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_0 = f(0, 0, 0)$ para todo $V \in \mathcal{H}_0^{2,p}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|\Delta^2 \tilde{\mathcal{K}}^2 V - \Delta^2 \tilde{\mathcal{K}}^2 W\|_p \\ &= (\|\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}^2 V]_0 - \Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}^2 W]_0\|_X^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}^2 V]_n - \Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}^2 W]_n\|_X^p)^{1/p} \\ &\leq (1 + \|\mathcal{K}\|)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n, [\tilde{\mathcal{K}}V]_n, \Delta[\tilde{\mathcal{K}}V]_n) - f(n, [\tilde{\mathcal{K}}W]_n, \Delta[\tilde{\mathcal{K}}W]_n)\|_X^p\right]^{1/p} \\ &\leq (1 + \|\mathcal{K}\|)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p \|([\tilde{\mathcal{K}}V - \tilde{\mathcal{K}}W]_n, \Delta[\tilde{\mathcal{K}}V - \tilde{\mathcal{K}}W]_n)\|_{X \times X}^p\right]^{1/p} \\ &\leq (1 + \|\mathcal{K}\|)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p 2^{2np} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^{2k}\right)^p\right]^{1/p} \|V - W\| \\ &\leq (1 + \|\mathcal{K}\|)^2 \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j 2^{2j}\right)^2 \|V - W\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\|[\tilde{\mathcal{K}}^2 V - \tilde{\mathcal{K}}^2 W]\| \leq \frac{1}{2} \left((1 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j 2^{2j}\right)^2 \|V - W\|. \quad (2.23)$$

E, finalmente, usando um argumento de indução concluímos:

$$\begin{aligned} & \|([\tilde{\mathcal{K}}^n V - \tilde{\mathcal{K}}^n W]_m, \Delta[\tilde{\mathcal{K}}^n V - \tilde{\mathcal{K}}^n W]_m)\|_{X \times X} \\ &\leq 2^{2m} (1 + \|\mathcal{K}\|)^n \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j 2^{2j}\right)^n \|V - W\|. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Consequentemente

$$||\tilde{\mathcal{K}}^n V - \tilde{\mathcal{K}}^n W|| \leq \frac{1}{n!} \left((1 + ||\mathcal{K}||) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j 2^{2j} \right)^n ||V - W||. \quad (2.25)$$

Como $\frac{1}{n!} \left((1 + ||\mathcal{K}||) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j 2^{2j} \right)^n < 1$ para n suficientemente grande, então, pelo Método dos iterados, $\tilde{\mathcal{K}}$ tem um único ponto fixo $V \in \mathcal{H}_0^{2,p}$. É fácil ver que V é a única solução do problema (2.1).

Observe agora que

$$\begin{aligned} ||V_n||_X &= ||\sum_{k=0}^{n-1} B(k) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k})||_X \\ &\leq n^2 (1 + ||\mathcal{K}||) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k ||(V_k, \Delta V_k)||_{X \times X} + ||f(\cdot, 0, 0)||_1 \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, de (2.10) e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} ||\Delta V_n||_X &= ||\sum_{k=0}^{n-1} (B(k+1) - B(k)) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k})||_X \\ &\leq (1+n)(1 + ||\mathcal{K}||) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k ||(V_k, \Delta V_k)||_{X \times X} + ||f(\cdot, 0, 0)||_1 \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2n}} ||(V_n, \Delta V_n)||_{X \times X} &\leq (1 + ||\mathcal{K}||) ||f(\cdot, 0, 0)||_1 \\ &+ (1 + ||\mathcal{K}||) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^{2k} \frac{1}{2^{2k}} ||(V_k, \Delta V_k)||_{X \times X}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Agora aplicando uma versão discreta da desigualdade de Gronwall (veja [1], Corolário 4.1.2) obtemos a seguinte estimativa:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[\frac{1}{2^{2n}} ||(V_n, \Delta V_n)||_{X \times X} \right] \leq (1 + ||\mathcal{K}||) ||f(\cdot, 0, 0)||_1 e^{(1+||\mathcal{K}||) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}. \quad (2.29)$$

Usando o fato que $\Delta^2 V_0 = f(0, 0, 0)$, procedendo analogamente como em (2.14) e usando (2.29) podemos ver que

$$\begin{aligned}
\|\Delta^2 V\|_p &\leq (1 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n)\|_X \\
&\leq (1 + \|\mathcal{K}\|) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^{2n} \left(\frac{1}{2^{2n}} \|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X} \right) + \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \right] \\
&\leq 2(1 + \|\mathcal{K}\|)^2 \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 e^{(2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

E isto prova a estimativa (2.3). Finalmente, por (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(I - T)V_n\|_X &\leq \|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|(V_k, \Delta V_k)\|_{X \times X} + \|\mathcal{K}\| \cdot \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|(TV_k, T\Delta V_k)\|_{X \times X} \\
&\quad + \|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|((I - T)V_k, (I - T)\Delta V_k)\|_{X \times X} + \|\mathcal{K}\| \cdot \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{K}\| \left[\|T\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k} \right) \|V\| + \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \right] \\
&\quad + \|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|((I - T)V_k, (I - T)\Delta V_k)\|_{X \times X}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Usando (2.10) e procedendo como em (2.31), segue

$$\begin{aligned}
\|(I - T)\Delta V_n\|_X &\leq 2\|\mathcal{K}\| \left[\|T\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k} \right) \|V\| + \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \right] \\
&\quad + 2\|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|((I - T)V_k, (I - T)\Delta V_k)\|_{X \times X}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Das estimativas (2.31) e (2.32) e pela desigualdade de Gronwall, temos

$$\begin{aligned}
\|((I - T)V_n, (I - T)\Delta V_n)\|_{X \times X} &\leq 3\|\mathcal{K}\| \left[\|T\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k} \right) \|V\| \right. \\
&\quad \left. + \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 \right] e^{3\|\mathcal{K}\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}.
\end{aligned}$$

Por fim, usando (2.30), obtemos

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|((I - T)V_n, (I - T)\Delta V_n)\|_{X \times X} \leq 12(1 + \|\mathcal{K}\|)^3 \|f(\cdot, 0, 0)\|_1 e^{[\|T\| + 4\|\mathcal{K}\| + 2] \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^{2k}}.$$

Com isso concluímos a demonstração. $\square$

Se X for um espaço UMD, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.1. *Seja X um espaço UMD. Assuma que a condição (A) se verifica e suponha que T é um operador analítico tal que o conjunto*

$$\left\{ \frac{(z-1)^2}{z} R \left(\frac{(z-1)^2}{z}, I - T \right) \middle/ |z| = 1, z \neq 1 \right\} \quad (2.33)$$

é R -limitado. Então existe uma única solução $x = (x_n)$ da equação (2.1) tal que $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Além disso valem as estimativas (2.2), (2.3) e (2.4).

Exemplo 2.1. Considere o problema semilinear

$$x_{n+2} - (3I - T)x_{n+1} + x_n = q_n f(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x_0 = x_1 = 0, \quad (2.34)$$

onde f satisfaz uma condição de Lipschitz, com constante $L > 0$, em um espaço de Hilbert H . Além disso, suponha que $(2^{2n} q_n) \in l_1(\mathbb{Z}_+)$. Logo a condição (A) é satisfeita. Em nosso caso, aplicando os resultados anteriores, concluímos que se $T \in \mathcal{B}(H)$ é um operador analítico tal que o conjunto em (2.33) é limitado, então existe uma única solução $x = (x_n)$ de (2.34) tal que $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+, H)$. Além disso, tem-se

$$\max \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[\frac{1}{2^{2n}} (\|x_n\|_H + \|\Delta x_n\|_H) \right], \|\Delta^2 x\|_p \right\} \leq C \|f(0)\|_H \|q\|_1 e^{LC \|q 2^{2\cdot}\|_1}, \quad (2.35)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} [\|(I - T)x_n\|_H + \|(I - T)\Delta x_n\|_H] \leq C \|f(0)\|_H \|q\|_1 e^{LC \|q 2^{2\cdot}\|_1}, \quad (2.36)$$

onde C é uma constante positiva.

2.2 Um Critério de Estabilidade

O desenvolvimento da teoria das equações de evolução discreta tem sido fortemente promovida pelo avanço tecnológico em computação científica e pelo grande número de

aplicações em modelos em biologia, engenharia e outras ciências. A estabilidade destes modelos é de grande importância para muitos pesquisadores.

Para a demonstração do Teorema 2.2 a seguir, precisamos dos seguinte resultados (veja [19] e [45]):

Lema 2.1. [19] *Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador linear analítico. Então $\sigma(I - T) \subseteq \mathbb{D}(1, 1) \cup \{0\}$, onde $\mathbb{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$. Em particular, $(z - 1)^2 \in \rho(I - T)$, sempre que $|z| = 1, z \neq 1$.*

Proposição 2.1. [45] *Considere $E \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e K um subconjunto compacto de E . Seja*

$$M : E \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\lambda \rightarrow M(\lambda)$$

analítica. Então o conjunto $\{M(\lambda) / \lambda \in K\}$ é R -limitado.

O próximo resultado é um critério para verificar a estabilidade do Oscilador Harmônico semilinear. Note que a caracterização de regularidade maximal (Teorema 1.1) é a chave para dar condições baseadas somente nos dados da equação dada.

Teorema 2.2. *Seja X um espaço UMD. Assuma a condição (A) e suponha que $T \in \mathcal{B}(X)$ é analítico e $1 \in \rho(T)$. Então a equação (2.1) é estável, isto é, a solução (x_n) de (2.1) é tal que $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Como $1 \in \rho(T)$, usando o Lema 2.1, temos que $(z - 1)^2 \in \rho(I - T)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Agora aplicando a Proposição 2.1, com

$$M(z) = \frac{(z - 1)^2}{z} R \left(\frac{(z - 1)^2}{z}, I - T \right),$$

concluimos que o conjunto em (2.33) é R -limitado. Pelo Corolário 2.1, existe uma única solução $x = (x_n)$ de (2.1) tal que $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Observe que a Condição (A) e a estimativa (2.6) implicam

$$\|f(n, x_n, \Delta x_n)\|_X \leq \alpha_n 2^{2n} \|\Delta^2 x\|_p + \|f(n, 0, 0)\|_X. \quad (2.37)$$

Como $(f(\cdot, 0, 0)) \in l_1(\mathbb{Z}_+, X)$ e $\alpha_n 2^{2n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que $f(n, x_n, \Delta x_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, o resultado segue da hipótese que $1 \in \rho(T)$ e da equação (2.1). $\square$

2.3 Perturbações Locais

Apresentamos nesta seção uma versão local para o Teorema 2.1. Introduzimos a seguinte condição:

Condição (A^*) :

(i)^{*} A função $f(n, z)$ é localmente Lipschitz com respeito a $z \in X \times X$, isto é, para cada número positivo R e para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e $z, w \in X \times X$, com $\|z\|_{X \times X} \leq R, \|w\|_{X \times X} \leq R$, tem-se

$$\|f(n, z) - f(n, w)\|_X \leq \ell(n, R)\|z - w\|_{X \times X},$$

onde $\ell : \mathbb{Z}_+ \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não decrescente com respeito a segunda variável.

(ii)^{*} Existe um número positivo a tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(n, 2^{2n}a)2^{2n} < +\infty$.

(iii)^{*} $f(\cdot, 0, 0) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+; X)$.

Precisamos introduzir algumas notações básicas. Denote por $\mathcal{H}_m^{2,p}$ o espaço de Banach de todas as sequências $V = (V_n)$ tais que $V_n = 0$ if $0 \leq n \leq m$, and $\Delta^2 V \in \ell_p(\mathbb{Z}_+; X)$ equipado com a norma $||| \cdot |||$. E, para $\lambda > 0$, denote por $\mathcal{H}_m^{2,p}[\lambda]$ a bola $|||V||| \leq \lambda$ em $\mathcal{H}_m^{2,p}$.

Teorema 2.3. *Suponha que a condição (A^*) é satisfeita e que a equação (1.2) tem regularidade maximal. Então existe $m \in \mathbb{N}$ e uma única solução $x = (x_n)$ de (2.1) para $n \geq m$ tal que $x_n = 0$ se $0 \leq n \leq m$ e $(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+; X)$, com $\|\Delta^2 x\|_p \leq a$, onde a é a constante dada por (ii)^{*}.*

Demonstração. Seja $\beta \in (0, 1)$. Pelos itens (iii)^{*} e (ii)^{*}, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$(2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=n_1}^{\infty} \|f(j, 0, 0)\|_X \leq \beta a, \quad (2.38)$$

e

$$\mathcal{T} := \beta + (2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=n_2}^{\infty} \ell(j, 2^{2j}a)2^{2j} < 1. \quad (2.39)$$

Seja $V \in \mathcal{H}_m^{2,p}[a]$, com $m = \max\{n_1, n_2\}$. Um argumento similar a (2.5) mostra que a sequência

$$g_n := \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq n \leq m, \\ f(n, V_n, \Delta V_n), & \text{se } n > m, \end{cases} \quad (2.40)$$

é um elemento de l_p . Pela propriedade de regularidade maximal, o problema de Cauchy (2.8), com (g_n) definido como em (2.40), tem uma única solução (z_n) tal que $(\Delta^2 z_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, que é dada por

$$z_n = [\Upsilon V]_n = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq n \leq m, \\ \sum_{k=0}^{n-1-m} B(k) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}), & \text{if } n \geq m+1. \end{cases} \quad (2.41)$$

Provaremos que $\Upsilon V \in \mathcal{H}_m^{2,p}[a]$. Procedendo de modo similar a (2.11), para $n \geq m$, obtemos

$$\Delta^2 [\Upsilon V]_n = f(n, V_n, \Delta V_n) + \sum_{k=1}^{n-m} (I - T) B(k) f(n-k, V_{n-k}, \Delta V_{n-k}). \quad (2.42)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|\Delta^2 \Upsilon V\|_p &\leq \|f(m-1, V_{m-1}, \Delta V_{m-1})\|_X + \left[\sum_{n=m}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n)\|_X \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-m} \|(I - T) B(k) f(n-k, V_{n-k}, \Delta V_{n-k})\|_X^p \right]^{1/p} \\ &\leq (2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{n=m}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n)\|_X. \end{aligned}$$

Como $\|(V_n, \Delta V_n)\|_{X \times X} \leq 2^{2n} \|V\| \leq 2^{2n} a$, segue que

$$\begin{aligned} \|\Upsilon V\| &\leq (2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=m}^{\infty} \ell(j, 2^{2j} a) 2^{2j} a + (2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=m}^{\infty} \|f(j, 0, 0)\|_X \\ &\leq (\mathcal{T} - \beta) a + \beta a \leq a, \end{aligned}$$

o que prova que $\Upsilon V \in \mathcal{H}_m^{2,p}[a]$. Portanto, para $V, W \in \mathcal{H}_m^{2,p}[a]$, podemos provar que

$$\|\Upsilon V - \Upsilon W\| \leq (2 + \|\mathcal{K}\|) \sum_{j=m}^{\infty} \ell(j, 2^{2j} a) 2^{2j} \|V - W\| = (\mathcal{T} - \beta) \|V - W\|.$$

E como $(\mathcal{T} - \beta) < 1$, Υ é uma $(\mathcal{T} - \beta)$ -contração. Isso conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Soluções S -Assintoticamente ω -Periódicas de Equações de Evolução Fracionárias

Neste capítulo estudaremos duas versões semi-lineares para o problema

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

$$v(0) = u_0 \in X, \quad (3.2)$$

Este tipo de problema foi considerado em [26] sob certas condições no operador A e na função $f : [0, \infty) \rightarrow X$. A fórmula de variação de parâmetros nos permite escrever a solução deste problema como

$$v(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

onde $S_\alpha(t)$ é o operador solução gerado por A (veja [26]).

Em nossa primeira abordagem da versão semilinear do problema (3.1)-(3.2) a parte não linear aparece como uma função com valores em X definida em $[0, \infty) \times X$. Em seguida, na nossa segunda abordagem, a função da parte não linear é definida em $[0, \infty) \times \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de fase abstrato definido axiomáticamente (veja Seção 3.2).

3.1 Soluções Brandas S -Assintoticamente ω -Periódicas

Iniciaremos com o estudo de existência e unicidade de soluções da seguinte versão não linear do problema (3.1)-(3.2):

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t, v(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

$$v(0) = u_0 \in X, \quad (3.4)$$

onde X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \mapsto X$ é um operador linear, fechado e densamente definido e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua que satisfaz uma condição de tipo Lipschitz.

Definição 3.1. *Suponha que A é o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função $u \in C_b([0, \infty), X)$ é dita uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica do problema (3.3)-(3.4) se $u(\cdot)$ for S -assintoticamente ω -periódica e satisfaz*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.5)$$

O seguinte Teorema é o mais importante desta seção.

Teorema 3.1. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$ e suponha que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável e existe uma função contínua e integrável $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in X, t \geq 0. \quad (3.6)$$

Então o problema (3.3)-(3.4) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica. Além disso, se u é solução, temos a seguinte estimativa a priori

$$\|u\|_\infty \leq \tilde{C}(\|u_0\| + \|f(\cdot, 0)\|_1) \exp(\tilde{C}\|L\|_1), \quad (3.7)$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante.

Demonstração. No espaço $SAP_\omega(X)$, defina a seguinte aplicação

$$(\Gamma_\alpha u)(t) := S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds = S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t). \quad (3.8)$$

Inicialmente, vamos mostrar que $\Gamma_\alpha u \in SAP_\omega(X)$. Pela desigualdade (1.7), temos que $S_\alpha(\cdot)u_0 \in SAP_\omega(X)$. Por outro lado, a desigualdade

$$\|f(s, u(s))\| \leq L(s)\|u(s)\| + \|f(s, 0)\|$$

nos diz que $s \rightarrow f(s, u(s))$ é integrável em $[0, \infty)$. Logo $v_\alpha(t) \in C_b([0, \infty), X)$ e

$$\int_a^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds \rightarrow 0,$$

quando $a \rightarrow \infty$, uniformemente para $t \geq a$. Note que $\{f(s, u(s)) : 0 \leq s \leq a\}$ é compacto, logo

$$S_\alpha(t+\omega)f(s, u(s)) - S_\alpha(t)f(s, u(s)) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

uniformemente para $s \in [0, a]$. Daí, como

$$\begin{aligned} v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t) &= \int_0^a [S_\alpha(t+\omega-s) - S_\alpha(t-s)]f(s, u(s))ds \\ &+ \int_a^{t+\omega} S_\alpha(t+\omega-s)f(s, u(s))ds - \int_a^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \end{aligned}$$

segue que $v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Isso mostra que $\Gamma_\alpha u \in SAP_\omega(X)$. Além disso, temos que

$$\|(\Gamma_\alpha u_1)(t) - (\Gamma_\alpha u_2)(t)\| \leq C_\alpha \int_0^t L(s)\|u_1(s) - u_2(s)\|ds,$$

para todo $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, onde $C_\alpha := \sup_{t \geq 0} \|S_\alpha(t)\|$. Logo $\Gamma_\alpha : SAP_\omega(X) \rightarrow SAP_\omega(X)$ é uma aplicação contínua. Afim de fazer uso do Teorema 1.3, defina a aplicação linear $B_\alpha : C_b([0, \infty)) \rightarrow C_b([0, \infty))$ por

$$(Bg)(t) = C_\alpha \int_0^t L(s)g(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Observe que B é contínua.

Agora, para cada $\epsilon > 0$, seja $a \geq 0$ de modo que

$$C_\alpha \int_a^\infty L(s)ds \leq \epsilon.$$

E para cada $g \in C_b([0, \infty))$, com $\|g\|_\infty \leq 1$, defina as funções

$$\Gamma_1(g)(t) := \begin{cases} C_\alpha \int_0^t L(s)g(s)ds, & 0 \leq t \leq a, \\ C_\alpha \int_0^a L(s)g(s)ds, & t \geq a, \end{cases}$$

$$\Gamma_2(g)(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ C_\alpha \int_a^t L(s)g(s)ds, & t \geq a. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, segue que $R_0 := \{\Gamma_1(g) : \|g\|_\infty \leq 1\}$ é relativamente compacto. E como $Bg(t) = \Gamma_1(g)(t) + \Gamma_2(g)(t)$ para todo $t \geq 0$, temos que

$$\{Bg : \|g\|_\infty \leq 1\} \subset R_0 + \{\beta : \beta \in C_b([0, \infty)), \|\beta\|_\infty \leq \epsilon\},$$

o que mostra que $\{Bg : \|g\|_\infty \leq 1\}$ é relativamente compacto e, portanto, que B é completamente contínuo. Com isso, o raio espectral de B é igual a zero, pois $\sigma_p(B) = \{0\}$. Por fim, defina $m : C_b([0, \infty), X) \rightarrow C_b([0, \infty))$ como

$$m(u)(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|.$$

Dessa forma, as aplicações Γ_α , B e m satisfazem as hipóteses do Teorema 1.3. Logo Γ_α tem um único ponto fixo.

Seja u esse ponto fixo. Então

$$\begin{aligned} (1 + |\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &\leq CM\|u_0\| + CM \int_0^t \frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{1 + |\mu|(t-s)^\alpha} \|f(s, 0)\| ds \\ &+ CM \int_0^t \frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{1 + |\mu|(t-s)^\alpha} L(s)\|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Da estimativa $\frac{1+|\mu|t^\alpha}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} \leq 2^\alpha(1 + |\mu|s^\alpha)$, $t \geq s$, concluímos que

$$\begin{aligned} (1 + |\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &\leq CM\|u_0\| + 2^\alpha CM(1 + |\mu|t^\alpha)\|f(\cdot, 0)\|_1 \\ &+ 2^\alpha CM \int_0^t L(s)(1 + |\mu|s^\alpha)\|u(s)\| ds \\ &\leq CM\|u_0\| + 2^\alpha CM(1 + |\mu|t^\alpha)\|f(\cdot, 0)\|_1 \\ &+ 2^\alpha CM(1 + |\mu|t^\alpha) \int_0^t L(s)\|u(s)\| ds \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \frac{CM\|u_0\|}{1+|\mu|t^\alpha} + 2^\alpha CM\|f(\cdot, 0)\|_1 + 2^\alpha CM \int_0^t L(s)\|u(s)\|ds \\ &\leq 2^\alpha CM\|u_0\| + 2^\alpha CM\|f(\cdot, 0)\|_1 + 2^\alpha CM \int_0^t L(s)\|u(s)\|ds. \end{aligned}$$

Com isso, usando a desigualdade de Gronwall, concluimos que

$$\|u\|_\infty \leq \tilde{C}(\|u_0\| + \|f(\cdot, 0)\|_1) \exp(\tilde{C}\|L\|_1),$$

onde $\tilde{C} = 2^\alpha MC$. Isto completa a demonstração. $\square$

Note que no Teorema 3.1 não está incluso o caso em que L é uma constante. Para este caso temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e satisfazendo*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todos } x, y \in X, t \geq 0. \quad (3.9)$$

Se $CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin(\pi/\alpha)$, onde C e M são as constantes dadas por (1.7), então o problema (3.3) – (3.4) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Defina Γ_α como em (3.8). Vamos mostrar que Γ_α é uma contração de $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$. Mostremos inicialmente que Γ_α está bem definida. Seja $u \in SAP_\omega(X)$. Como $S_\alpha(t)u_0 \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $S_\alpha(\cdot)u_0 \in SAP_\omega(X)$.

Além disso, como $f(\cdot, u(\cdot))$ é limitada, temos que

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi\|f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.$$

Portanto $v_\alpha \in C_b([0, \infty), X)$. Do Lema 1.1 segue que, para todo $\epsilon > 0$, existe $L_\epsilon > 0$ tal que $\|f(t + \omega, u(t + \omega)) - f(t, u(t))\| \leq \epsilon$, para todo $t \geq L_\epsilon$. Daí, para $t \geq L_\epsilon$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^\omega \|S_\alpha(t + \omega - s)f(s, u(s))\| ds \\
&+ \int_0^{L_\epsilon} \|S_\alpha(t - s)[f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))]\| ds \\
&+ \int_{L_\epsilon}^t \|S_\alpha(t - s)[f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))]\| ds \\
&\leq CM \|f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty \left(\int_t^\infty \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds \right. \\
&+ \left. 2 \int_{t-L_\epsilon}^\infty \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds \right) + \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi\epsilon}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.
\end{aligned}$$

Logo $v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, e $\Gamma_\alpha u \in SAP_\omega(X)$.

Por outro lado, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, temos

$$\|(\Gamma_\alpha u_1)(t) - (\Gamma_\alpha u_2)(t)\| \leq \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \|u_1 - u_2\|_\infty,$$

o que prova que Γ_α é uma contração. Isto completa a prova. $\square$

Para ilustrar o nosso resultado apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. Sejam $A = -\rho^\alpha I$, com $\rho > 0$, $X = \mathbb{C}$ e $f : [0, \infty) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uniformemente S -assintoticamente ω -periódica satisfazendo a condição (3.9). Se $L < \frac{\rho\alpha \sin(\pi/\alpha)}{C\pi}$, então o problema (3.3) – (3.4) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Com efeito, observe que $(\lambda - A)^{-1}$ existe se $\lambda \neq -\rho^\alpha$. Lembrando que $1 < \alpha < 2$, temos, para todo $0 < \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, que o resolvente de A existe fora do setor

$$\mu + S_\theta := \{\mu + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\arg(-\lambda)| < \theta\},$$

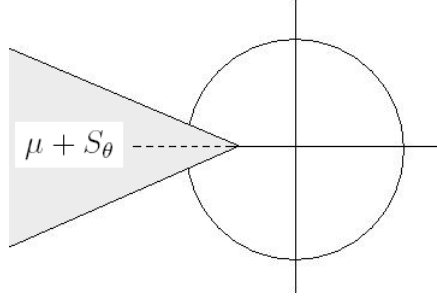
onde $\mu = -\rho^\alpha$.

Além disso,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda - \mu|},$$

para todo $\lambda \notin \mu + S_\theta$.

Com isso, pelas afirmações feitas na Seção 1.3 e pelo Teorema 3.2, concluímos que o problema (3.3) – (3.4) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.



A seguir, apresentamos uma nova versão para o Teorema 3.1.

Teorema 3.3. *Assuma que $f(\cdot, 0)$ é limitada e $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, x) - f(t + n\omega, x)) = 0$ uniformemente em $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, para todo $K \subset X$ limitado. Assuma também que a condição (3.9) vale. Se $CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin(\pi/\alpha)$, então o problema (3.3) – (3.4) tem uma única solução branda assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}(X)$ o espaço de todas as funções $u \in C_b([0, \infty), X)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u(t + n\omega)) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Observe que $\mathcal{S}(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0, \infty), X)$. De fato, se $u_k \rightarrow u_0$, com $\{u_k\} \subset \mathcal{S}(X)$, então da desigualdade

$$\begin{aligned} \|u_0(t) - u_0(t + n\omega)\| &\leq \|u_0(t) - u_k(t)\| + \|u_k(t) - u_k(t + n\omega)\| \\ &\quad + \|u_k(t + n\omega) - u_0(t + n\omega)\|, \end{aligned}$$

concluimos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_0(t) - u_0(t + n\omega)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$.

Se $u \in \mathcal{S}(X)$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + n\omega, u(t + n\omega)) - f(t, u(t))) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Agora considere Γ_α dado por (3.8) definido em $\mathcal{S}(X)$. Das estimativas

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi[L\|u\|_\infty + \|f(\cdot, 0)\|_\infty]/[\alpha \sin(\pi/\alpha)],$$

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t + n\omega) - v_\alpha(t)\| &\leq CM[L\|u\|_\infty + \|f(\cdot, 0)\|_\infty] \left(\int_t^\infty \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{t-L\epsilon}^\infty \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds \right) + \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi\epsilon}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \end{aligned}$$

concluimos que $\Gamma_\alpha u \in \mathcal{S}(X)$. Logo, pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 3.2, concluimos que Γ_α tem um único ponto fixo em $\mathcal{S}(X)$. Daí o teorema segue da Proposição 1.2. $\square$

Exemplo 3.2. *Examinaremos agora a existência e unicidade de soluções brandas S -assintoticamente ω -periódica para a seguinte equação fracionária*

$$\partial_t^\alpha u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - \nu u(t, x) + \partial_t^{\alpha-1} a(t) f(u(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (3.10)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (3.12)$$

onde $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções apropriadas. Para estudar esse sistema na forma abstrata de (3.3) – (3.4) escolhemos $X = L^2[0, \pi]$ e A definido em X por $Au = u'' - \nu u$, ($\nu > 0$), com domínio

$$D(A) = \{u \in L^2[0, \pi] : u'' \in L^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

É sabido que $\Delta u = u''$ é o infinitesimal gerador de um semigrupo analítico em $L^2[0, \pi]$. Com isso, A é setorial do tipo $-\nu$.

Assuma que $a(\cdot)$ é S -assintoticamente ω -periódica e que existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para todo $x, y \in [0, \infty)$. Se $\|a\|_\infty < \frac{\alpha \sin(\pi/\alpha)}{CM|\nu|^{-1/\alpha}\pi L}$, então, pelo Teorema 3.2, existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica de (3.3)-(3.4). Se, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} (a(t + n\omega) - a(t)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então a solução de fato é assintoticamente ω -periódica.

3.2 Equações Integro-Diferenciais Fracionárias com Retardo Infinito

Concluimos este capítulo com a seguinte versão semi-linear do problema (3.1)-(3.2):

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s) ds + f(t, v_t), \quad t \geq 0, \quad (3.13)$$

$$v_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (3.14)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, fechado e densamente definido em um espaço de Banach complexo X e $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função apropriada. Aqui $\mathcal{B}$ é um espaço de fase que será definido a seguir e $v_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, a função de história, dada por $v_t(\theta) = v(t + \theta)$, é um elemento de $\mathcal{B}$. Estes espaços foram introduzidos por Hale-Kato em [33] e foram considerados em [35].

Assim $\mathcal{B}$ denotará o espaço das funções de $(-\infty, 0]$ em X munido com a seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e satisfazendo os seguintes axiomas:

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \rightarrow X$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a)$, $a > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, e $x_\sigma \in \mathcal{B}$, então, para todo $t \in [\sigma, \sigma + a)$, vale o seguinte:

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$;
- (ii) $\|x(t)\|_X \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$;
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{\|x(s)\|_X : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$;
onde $H > 0$ é uma constante, $K, M : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, com K contínua, M localmente limitada e H, K, M independentes de $x(\cdot)$.

(A1) Para a função $x(\cdot)$ em (A), $t \rightarrow x_t$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a)$;

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo;

(C) Se $(\psi_n)_n$ é uma sequência uniformemente limitada de funções contínuas com suporte compacto tal que $\psi^n \rightarrow \psi$ quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente sobre os compactos de $(-\infty, 0]$, então $\psi \in \mathcal{B}$ e $\|\psi^n - \psi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Introduzimos agora o espaço $\mathcal{B}_0 := \{\phi \in \mathcal{B} : \phi(0) = 0\}$ e o operador $S(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, definido por

$$S(t)\phi(\theta) = \begin{cases} \phi(0), & \theta \in [-t, 0], \\ \phi(t + \theta), & \theta \in (-\infty, -t). \end{cases}$$

Observamos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo (veja [38]).

Definição 3.2. Diremos que o espaço $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida se $\|S(t)\phi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para todo $\phi \in \mathcal{B}_0$.

Observação 3.1. Como $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (C), o espaço $C_b((-\infty, 0]), X)$, consistindo de todas as funções contínuas e limitadas $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow X$, está continuamente incluído em $\mathcal{B}$. Assim, existe uma constante $L \geq 0$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq L\|\psi\|_{\infty}$, para todo $\psi \in C_b((-\infty, 0]), X)$. Além disso, se $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, então K e M são funções limitadas (veja [35] e [38]).

Exemplo 3.3. [35] Seja $r \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e $\rho : (-\infty, -r] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e não negativa satisfazendo (g-5)-(g-6) na terminologia de Hino em [38]. Isto significa que ρ é localmente integrável e que existe uma função $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ que é não negativa e localmente limitada e é tal que $\rho(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi)\rho(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e $\theta \in (-\infty, -r] \setminus N_\xi$, onde $N_\xi \subset (-\infty, -r]$ é um conjunto cuja medida de Lebesgue é zero. Denote por $\mathcal{B} = \mathcal{C}_r \times L^p(\rho, X)$ o conjunto de todas as funções $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que φ é contínua em $[-r, 0]$, Lebesgue mensuráveis e $\rho\|\varphi\|^p$ é Lebesgue integráveis em $(-\infty, -r)$. A seminorma em $\mathcal{C}_r \times L^p(\rho, X)$ é definida como

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} := \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\varphi(\theta)\|_X + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\varphi(\theta)\|_X^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Dessa forma, o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{C}_r \times L^p(\rho, X)$ satisfaz os axiomas (A), (A1) e (B). Além disso, quando $r = 0$ e $p = 2$, é possível escolher $H = 1$, $K(t) = 1 + (\int_{-t}^0 \rho(\theta) d\theta)^{1/2}$ e $M(t) = \gamma(-t)^{1/2}$ para $t \geq 0$. Note que se a condição (g-7) de [38] vale, ou seja, $\int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) d\theta < \infty$, então $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida (veja [38]).

O lema a seguir estabelece uma condição para que uma função história pertença a $SAP_\omega(\mathcal{B})$ (veja [35]).

Lema 3.1. Assuma que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida. Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_{[0, \infty)} \in SAP_\omega(X)$. Então $t \rightarrow u_t$ é um elemento de $SAP_\omega(\mathcal{B})$.

Definição 3.3. Suponha que A gera um operador solução $S_\alpha(t)$ que é integrável. Uma função $v : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma solução branda do sistema de retardo infinito (3.13)-(3.14) se $v(\cdot)$ for contínua em $[0, \infty)$, a função $s \rightarrow S_\alpha(t-s)f(s, v_s)$ for integrável em $[0, t]$, para $t \geq 0$, e

$$\begin{cases} v(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, v_s)ds, & \text{para todo } t \geq 0. \\ v_0 = \varphi. \end{cases} \quad (3.15)$$

Necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.2. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$. Seja $u \in SAP_\omega(X)$ e $v_\alpha : [0, \infty) \rightarrow X$ a função definida por*

$$v_\alpha(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s)u(s)ds. \quad (3.16)$$

Então $v_\alpha \in SAP_\omega(X)$.

Demonstração. Das propriedades de $S_\alpha(\cdot)$, temos

$$\|v_\alpha(t)\|_X \leq \frac{CM\|u\|_\infty|\mu|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.$$

Portanto $v_\alpha \in C_b([0, \infty), X)$. Além disso, da mesma forma que na demonstração do Teorema 3.2, concluímos que

$$\|v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t)\|_X \leq CM\left(3\|u\|_\infty + \frac{|\mu|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}\right)\epsilon.$$

□

Agora podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Suponha que A é setorial do tipo $\mu < 0$ e que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida. Seja $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e assuma que existe $L_f > 0$ tal que*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|_X \leq L_f\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (3.17)$$

para todo $(t, \psi_i) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}$, $i = 1, 2$, com $LL_fCM|\mu|^{-1/\alpha}\pi < \alpha \sin(\pi/\alpha)$, onde C e M são as constantes dadas por (1.7) e L é a constante introduzida na Observação 3.1. Então o problema com retardo infinito (3.13)-(3.14) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Inicialmente defina

$$SAP_{\omega,0}(X) = \{x \in SAP_\omega(X) : x(0) = 0\}.$$

É claro que $SAP_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $SAP_\omega(X)$. No que segue identificaremos os elementos de $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ com sua extensão a $\mathbb{R}$ dada por $x(\theta) = 0$ para

$\theta \leq 0$. Além disso, denotaremos por $y(\cdot)$ a função definida por $y_0 = \varphi$ e $y(t) = S_\alpha(t)\varphi(0)$ para $t \geq 0$. Tendo em mente que $\sup_{t \geq 0} \|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{B}(X)} < \infty$, veja (1.7), temos que $y \in C_b([0, \infty), X)$. Por outro lado, a estimativa (1.7) nos diz que $y|_{[0, \infty)} \in SAP_\omega(X)$. Logo, pelo Lema 3.1, a função $t \rightarrow y_t$ é um elemento de $SAP_\omega(\mathcal{B})$.

Agora defina a aplicação Γ_α em $SAP_{\omega,0}(X)$ por

$$\begin{cases} (\Gamma_\alpha x)_0 = 0 & \text{e} \\ (\Gamma_\alpha x)(t) := \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, x_s + y_s)ds, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pelo Lema 3.1 e levando em conta que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, temos que $s \rightarrow x_s + y_s$ é um elemento de $SAP_\omega(\mathcal{B})$. Como f é uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados segue, pelo Lema 1.1, que a função $s \rightarrow f(s, x_s + y_s)$ está em $SAP_\omega(X)$. Dessa forma, pelo Lema 3.2, concluímos que $\Gamma_\alpha x \in SAP_{\omega,0}(X)$, para todo $x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Além disso, temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_\alpha x)(t) - (\Gamma_\alpha z)(t)\|_X &\leq CML_f \int_0^t \frac{1}{1 + |\mu|(t-s)^\alpha} \|x_s - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq CML_f L \left(\int_0^t \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds \right) \|x - z\|_\infty \\ &\leq \frac{LL_f CM |\mu|^{-1/\alpha} \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \|x - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo Γ_α é uma contração e, portanto, tem um único ponto fixo $x \in SAP_{\omega,0}(X)$. Definindo $u(t) = y(t) + x(t)$ para $t \in \mathbb{R}$, podemos confirmar que $u \in SAP_\omega(X)$ é uma solução branda do problema (3.13)-(3.14). Isto completa a prova. $\square$

Teorema 3.5. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.4. Suponha que para todo subconjunto limitado $K \subset \mathcal{B}$ tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, \psi) - f(t + n\omega, \psi)) = 0,$$

uniformemente em $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Então o problema (3.3)-(3.4) tem uma única solução branda assintoticamente ω -periódica.

Para demonstrar o teorema anterior faremos uso do seguinte lema:

Lema 3.3. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$. Sejam $u \in SAP_\omega(X)$ e $v_\alpha : [0, \infty) \rightarrow X$ a função definida por (3.16). Se $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u(t + n\omega)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_\alpha(t) - v_\alpha(t + n\omega)) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $L_1 > 0$ suficientemente grande. Então, para $t \geq L_1$, temos a seguinte estimativa para $\|v_\alpha(t + n\omega) - v_\alpha(t)\|_X$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{n\omega} \|S_\alpha(t + n\omega - s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(s)\|_X ds + \int_0^{L_1} \|S_\alpha(t - s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(s + n\omega) - u(s)\|_X ds \\ & + \int_{L_1}^t \|S_\alpha(t - s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(s + n\omega) - u(s)\|_X ds \\ & \leq CM \|u\|_\infty \int_t^{t+n\omega} \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds + 2CM \|u\|_\infty \int_{t-L_1}^t \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds + CM\epsilon \int_0^\infty \frac{1}{1 + |\mu|s^\alpha} ds. \end{aligned}$$

E isso conclui a prova. $\square$

Prova do Teorema 3.5. Seja $S_{\omega,0}(X)$ o espaço consistindo das funções $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x(t + n\omega)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $S_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $SAP_{\omega,0}(X)$. Novamente identificaremos os elementos de $x \in S_{\omega,0}(X)$ com sua extensão a $\mathbb{R}$ dada por $x(\theta) = 0$, para $\theta \leq 0$. Com as mesmas notações introduzidas na prova do Teorema 3.4, considere a aplicação Γ_α definida em $S_{\omega,0}(X)$. Como $s \rightarrow f(s, x_s + y_s)$ está em $SAP_\omega(X)$, pelo lema anterior, podemos concluir que Γ_α tem seus valores em $S_{\omega,0}(X)$. Portanto o ponto fixo de Γ_α está em $S_{\omega,0}(X)$ e a afirmação segue da Proposição 1.2. $\square$

Temos o seguinte resultado complementar:

Teorema 3.6. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$ e que $\mathcal{B}$ um espaço de memória amortecida. Seja $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados, satisfazendo a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|_X \leq L(t) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad (3.19)$$

para todo $(t, \psi_i) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}$, $i = 1, 2$, onde $L \in L^1(\mathbb{R})$.

Então o problema (3.13)-(3.14) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Novamente usaremos as notações introduzidas na demonstração do Teorema 3.4. Considere a aplicação Γ_α definida em $SAP_{\omega,0}(X)$. Pelo Lema 3.2, segue que $(\Gamma_\alpha x) \in SAP_{\omega,0}(X)$, para todo $x \in SAP_\omega(X)$. Sejam $x, z \in SAP_{\omega,0}(X)$. Daí, se $C_\alpha := \sup_{t \geq 0} \|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{B}(X)}$, então

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_\alpha x)(t) - (\Gamma_\alpha z)(t)\|_X &= \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)[f(s, x_s + y_s) - f(s, z_s + y_s)] \right\|_X ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^t L(s) \|x_s - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \leq LC_\alpha \|L\|_1 \|x - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Se $K_\infty := \sup_{t \geq 0} K(t)$, então, pelo axioma (A)(iii), temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_\alpha x)_s - (\Gamma_\alpha z)_s\|_{\mathcal{B}} &\leq K_\infty C_\alpha \sup_{0 \leq \tau \leq s} \int_0^\tau L(u) \|x_u - z_u\|_{\mathcal{B}} du \\ &\leq LK_\infty C_\alpha \left(\int_0^s L(u) du \right) \|x - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto $\|(\Gamma_\alpha^2 x)(t) - (\Gamma_\alpha^2 z)(t)\|_X$ é estimado por

$$\begin{aligned} &C_\alpha \int_0^t L(s) \|(\Gamma_\alpha x)_s - (\Gamma_\alpha z)_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq LK_\infty C_\alpha^2 \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(u) du \right) ds \right) \|x - z\|_\infty \\ &\leq \frac{LK_\infty C_\alpha^2}{2} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^2 \|x - z\|_\infty \\ &\leq \frac{L(K_\infty C_\alpha \|L\|_1)^2}{2K_\infty} \|x - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Em geral, temos

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_\alpha^n x)(t) - (\Gamma_\alpha^n z)(t)\|_X &\leq \frac{L(K_\infty C_\alpha)^n}{K_\infty (n-1)!} \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(u) du \right)^{n-1} ds \right) \|x - z\|_\infty \\ &\leq \frac{L(K_\infty C_\alpha)^n}{K_\infty n!} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^n \|x - z\|_\infty \\ &\leq \frac{L(K_\infty C_\alpha \|L\|_1)^n}{K_\infty n!} \|x - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto, como $\frac{L(K_\infty C_\alpha \|L\|_1)^n}{K_\infty n!} < 1$ para n suficientemente grande, segue que Γ_α tem um único ponto fixo $x \in SAP_{\omega,0}(X)$. $\square$

O próximo resultado assegura a existência de soluções brandas em $C_0([0, \infty), X)$.

Teorema 3.7. *Assuma que A é setorial do tipo $\mu < 0$ e que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida. Se $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável em $[0, \infty)$ e satisfaz a condição de Lipschitz (3.19), com $L \in L^1(\mathbb{R})$, então existe uma única solução branda $u(\cdot)$ de (3.13)-(3.14) tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Demonstração. Seja $C_{0,0}(X)$ o espaço das funções contínuas $x \in C_0([0, \infty), X)$ tais que $x(0) = 0$. Observamos que $C_{0,0}(X)$ é um subespaço fechado de $C_0([0, \infty), X)$. Identifique os elementos de $C_{0,0}(X)$ com sua extensão em $\mathbb{R}$ dada por $x(\theta) = 0$ para $\theta \leq 0$. Defina Γ_α em $C_{0,0}(X)$ como em (3.18). Dessa forma, temos a estimativa

$$\|(\Gamma_\alpha x)(t)\|_X \leq CM \int_0^\infty \frac{\chi_{[0,t]}(s)}{1 + |\mu|(t-s)^\alpha} \|f(s, x_s + y_s)\|_X ds.$$

Aqui $\chi_{[0,t]}$ denota a função característica de $[0, t]$.

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Gamma_\alpha x)(t) = 0$. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.6 temos que

$$\|\Gamma_\alpha^n x - \Gamma_\alpha^n z\|_\infty \leq \frac{L(K_\infty C_\alpha \|L\|_1)^n}{K_\infty n!} \|x - z\|_\infty.$$

□

Exemplo 3.4. Para ilustrar nossos resultados, examinaremos a existência e unicidade de uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica da equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t, \xi) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) - \nu u(t, \xi) \\ &+ \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \left[\int_{-\infty}^t b(s-t) u(s, \xi) ds + c(t) F(u(t, \xi)) \right], \quad t \geq 0, \xi \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.21)$$

$$u(0, \xi) = \varphi(\theta, \xi), \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.22)$$

No que segue $X = L^2[0, \pi]$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o operador definido por $Au = u'' - \nu u$, ($\nu > 0$), com domínio $D(A) = \{u \in L^2[0, \pi] : u'' \in L^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$.

Como espaço de fase, escolhemos o espaço $\mathcal{B} := \mathcal{C}_0 \times L^2(\rho, X)$ definido no Exemplo 3.3, e assumimos que as condições (g-6)-(g-7) na nomenclatura de [38] são satisfeitas. Note que, sob estas condições, $\mathcal{B}$ é um espaço de fase de memória amortecida e que (veja Observação 3.1)

$$L = 1 + \left(\int_{-\infty}^0 \rho(\theta) d\theta \right)^{1/2}. \quad (3.23)$$

Para estudar esse sistema, assumimos que a função $\varphi(\theta)(\xi) = \varphi(\theta, \xi)$ é um elemento de $\mathcal{B}$, $b : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $c(\cdot)$ é S -assintoticamente ω -periódica, a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana, com constante de Lipschitz $L_F > 0$, e $L_f^1 = \left(\int_{-\infty}^0 \frac{b^2(s)}{\rho(s)} ds \right)^{1/2} < \infty$. Sob estas condições, podemos definir a função $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ por

$$f(t, \psi)(\xi) = \int_{-\infty}^0 b(s) \psi(s, \xi) ds + c(t) F(\psi(0, \xi)).$$

Com essas notações, o sistema (3.20)-(3.22) se reduz a forma abstrata (3.13)-(3.14). Além disso, observamos que $f(t, \cdot)$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz

$$L_f := L_f^1 + \|c\|_{\infty} L_F. \quad (3.24)$$

Por outro lado, para todo $\psi \in \mathcal{B}$, a função $f(\cdot, \psi)$ é limitada, com

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t, \psi)\|_X \leq L_f^1 \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|c\|_{\infty} [L_F \|\psi\|_{\mathcal{B}} + |F(0)| \sqrt{\pi}].$$

Agora assumamos que

$$LL_f CM |\nu|^{-1/\alpha} \pi < \alpha \sin(\pi/\alpha),$$

onde L e L_f são constantes dadas por (3.23) e (3.24), respectivamente. Então existe uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ do problema (3.20)-(3.22). Se, além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c(t + n\omega) - c(t)) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então $u(\cdot)$ é assintoticamente ω -periódica.

Capítulo 4

Fórmula Complexa da Inversão da Transformada de Laplace

É bem sabido que a fórmula de inversão complexa da transformada de Laplace para órbitas de C_0 -semigrupos produz somente uma representação de soluções clássicas do problema de Cauchy bem posto. Em [28], foi provado que existe uma classe de espaços de Banach onde a representação é válida para soluções brandas. Estes resultados tem sido extendidos para órbitas de famílias cosseno fortemente contínuas em [17] e para órbitas de famílias resolventes fortemente contínuas em [18]. Recentemente, Haase [32], melhora os resultados apresentados em [18] mediante uso de técnicas de Análise de Fourier elementar. Neste artigo Haase propõe o problema em aberto de estabelecer o resultado análogo para órbitas de semigrupos integrados. Um resumo desta pesquisa se encontra submetido em [41].

4.1 Inversão para famílias (a, k) -regularizadas

Trataremos agora a fórmula complexa da inversão da transformada de Laplace de famílias resolventes (a, k) -regularizadas .

Seja A o gerador de uma família $S(t)$ (a, k) -regularizada, com $k(t) \equiv 1$ e $a \in L^1_{loc}(R_+)$ e assumamos que K_N é como em (1.12), com $\omega > \omega_0$. Então Haase, em [32], obteve o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Sejam S e a como antes. Suponha que existe $b \in L^1_{Loc}[0, \infty)$ tal que*

$$(1) (a * b)(t) = ta(t), \quad (t \geq 0);$$

$$(2) b_\omega \in L^2(0, \infty), \quad \text{onde } b_\omega(t) = e^{-\omega t}b(t);$$

$$(3) (b' * S)_\omega \text{ é uniformemente } L^2 \text{ (} b' \text{ representa a derivada da distribuição } b \text{ em } \mathbb{R}).^1$$

Se X é um espaço UMD, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} tK_N(t)x = tS(t)x$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$, para cada $x \in X$.

No teorema anterior e no restante deste capítulo, assumimos que a e S são do tipo exponencial $\omega_0 \geq 0$ (ver Seção 1.6), ou seja, existe $M \geq 0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega_0 t} \text{ e } \|a(t)\| \leq Me^{\omega_0 t}. \quad (4.1)$$

Dessa forma as transformadas de Laplace de a e de S existem.

O próximo lema será necessário para estabelecer o resultado mais importante desta seção.

Lema 4.1. *Sejam X um espaço UMD e $f \in L^2(\mathbb{R}; X)$. Então $D_N * f \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}; X)$ quando $N \rightarrow \infty$ (Aqui D_N denota o núcleo de Dirichlet definido na Seção 1.6).*

Demonstração. Veja [32]. □

Assuma agora que $\mathcal{L}(k)$ existe e que $\mathcal{L}(a)(z), \mathcal{L}(k)(z) \neq 0$, para $\text{Re}(z) > \omega$. Assuma também que $\frac{1}{\mathcal{L}(a)(z)} \in \rho(A)$, para $\text{Re}(z) > \omega$.

Teorema 4.2. *Seja A o gerador de uma família $S(t)$ (a, k) -regularizada. Suponha que existe $b, v \in L^1_{loc}[0, \infty)$ tais que*

$$(i) (a * b)(t) = ta(t) \quad \text{e} \quad k * v = tk, \quad (t \geq 0);$$

$$(ii) b_\omega, v_\omega \in L^2(0, \infty);$$

¹Para que a expressão $(b' * S)_\omega$ tenha sentido basta exigir que b' seja uma medida de Radon, ou seja, $b \in BV_{loc}[0, \infty)$.

(iii) Existe uma família $\{R(t)\}_{t \geq 0}$ tal que $\mathcal{L}(R)$ existe, $b*S = k*R$ e R_ω é uniformemente L^2 .

Então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} tK_N(t)x = tS(t)x, \quad (4.2)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$, para cada $x \in X$.

Demonstração. Como $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uma família (a, k) -regularizada, então

$$S(t) = k(t) + A \int_0^t a(t-s)S(s)xd s, \quad x \in X, \quad t \geq 0.$$

Logo, tomando a transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(k) + \mathcal{L}(a)A\mathcal{L}(S).$$

Portanto

$$\mathcal{L}(S)(z) = \frac{\mathcal{L}(k)(z)}{\mathcal{L}(a)(z)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)(z)} - A \right)^{-1}, \quad \text{Re}(z) > \omega. \quad (4.3)$$

Se $H = \mathcal{L}(S)$, segue de (4.3) que

$$\begin{aligned} H' &= \frac{\mathcal{L}(k)'\mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(k)\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)^2} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \\ &+ \frac{\mathcal{L}(k)}{\mathcal{L}(a)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)^2} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{L}(k)'}{\mathcal{L}(a)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} - \frac{\mathcal{L}(a)'\mathcal{L}(k)}{\mathcal{L}(a)^2} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \\ &+ \frac{\mathcal{L}(k)}{\mathcal{L}(a)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)^2} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(a)} - A \right)^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{L}(k)'}{\mathcal{L}(k)} H - \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)} H + \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)\mathcal{L}(k)} H^2. \end{aligned}$$

Logo

$$H'(z) = \frac{\mathcal{L}(k)'}{\mathcal{L}(k)} H(z) - \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)} H(z) - \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)\mathcal{L}(k)} H^2(z), \quad \text{Re}(z) > \omega.$$

Por outro lado, pelo ítem (i), tem-se

$$\mathcal{L}(a)\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(a)' \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(k)\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(k)'.$$

Portanto

$$H'(z) = \mathcal{L}(v)H(z) - \mathcal{L}(b)H(z) - \frac{\mathcal{L}(b)}{\mathcal{L}(k)}H^2(z).$$

Com isso, pelo ítem (iii), segue que

$$\begin{aligned} H'(z) &= [(\mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(R))]H(z) \\ &= \mathcal{L}(v - b - R)\mathcal{L}(S). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(tS(t)) = -H'(t)$, temos

$$tS(t) = C * S(t), \tag{4.4}$$

onde $C(t) = -v(t) + b(t) + R(t)$. Dessa forma, pelas condições (ii) e (iii), segue que C_ω é uniformemente L^2 .

Agora, por (1.12), temos

$$K_N = e^{t\omega}(D_N * S_\omega).$$

Utilizando o Lema 1.3 e (4.4) obtemos

$$e^{-t\omega}tK_N = t(D_N * S_\omega) \sim D_N * [tS(t)]_\omega = D_N * [C * S(t)]_\omega = S_\omega * (D_N * C_\omega).$$

Fixe $x \in X$. Pelo Lema 4.1,

$$D_N * C_\omega x \longrightarrow C_\omega x \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}; X), \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty.$$

Logo, pela desigualdade de Young (Lema 1.2), vale

$$S_\omega * (D_N * C_\omega) \longrightarrow S_\omega * C_\omega = [tS(t)x]_\omega,$$

uniformemente em $t \geq 0$. Finalmente, concluímos que

$$e^{-t\omega}tK_N \rightarrow [tS(t)x]_\omega,$$

uniformemente em $t \geq 0$.

Com isso concluímos a demonstração. □

Com o corolário a seguir, mostramos que o Teorema 4.1 é uma consequência do Teorema 4.2.

Corolário 4.1. *Seja A o gerador de uma família $S(t)$ $(a, 1)$ -regularizada. Assuma que existe $b \in C^1[0, \infty)$ tal que*

$$(i-1) \quad (a * b)(t) = ta(t), \quad (t \geq 0);$$

$$(ii-1) \quad b_\omega \in L^2(0, \infty);$$

$$(iii-1) \quad (b' * S)_\omega \text{ uniformemente } L^2.$$

Então vale (4.2).

Demonstração. Note que $k(t) \equiv 1$ e $v(t) \equiv 1$ satisfazem $k * v = tk$.

Defina

$$R(t) := (b' * S)(t) + b(0)S(t).$$

Então, por (iii-1), R_ω é uniformemente L^2 e, como $R(t) = (b * S)'(t)$, temos que $1 * R = b * S$. Com isso as condições do Teorema 4.2 são satisfeitas. $\square$

4.2 Inversão para semigrupos integrados

Para o nosso próximo resultado precisamos da seguinte definição:

Definição 4.1. *Seja A um operador linear em um espaço de Banach X e $\alpha \geq 0$. Dizemos que A é o gerador de um semi-grupo α -integrável se, e somente se, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$, para algum $\omega \in \mathbb{R}$, e existe uma aplicação fortemente contínua $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ satisfazendo*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \geq 0),$$

para algum $M \geq 0$, tal que

$$R(z, A) = z^\alpha \int_0^\infty e^{-zt} S(t) dt \quad (z > \max\{\omega, 0\}).$$

Neste caso, dizemos que $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semi-grupo α -integrável gerado por A .

Em particular, um semi-grupo 0-integrável é um C_0 -semigrupo. Para mais detalhes a respeito de semigrupos α -integráveis, referimos [37].

Utilizando as propriedades da integral e da derivada fracionária apresentadas na Seção 1.7, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.2. *Seja A o gerador de um semigrupo α -integrável $S_\alpha(t)$ e suponha que existe $\{R(t)\}_{t \geq 0}$ fortemente contínua tal que $\mathcal{L}(R)$ existe e*

$$J_t^{\alpha+1} R(t) = 1 * S_\alpha(t).$$

Assuma que $(D_t^\alpha S_\alpha(t))_\omega$ é uniformemente L^2 . Então vale (4.2).

Demonstração. Como S_α é um semigrupo α -integrável, temos

$$S_\alpha(t) - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = A(1 * S_\alpha(t)).$$

Assim, na terminologia do Teorema 4.2, temos que $a \equiv 1$ e $k(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Portanto, podemos utilizar a propriedade em (1.16) e o Teorema 1.4 para obter

$$v(t) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Portanto as condições (i) e (ii) do Teorema 4.2 valem. Por outro lado, como $J_t^{\alpha+1} R(t) = 1 * S_\alpha(t)$, obtemos

$$S_\alpha(t) = \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} * R(t).$$

Portanto

$$R(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} D_t^\alpha S_\alpha(t) + R(0)\Gamma(\alpha+1)$$

e a condição (iii) do Teorema 4.2 é satisfeita. □

Para ilustrar nosso resultado, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1. Seja $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $A(z) = 2z$. Então A é o gerador do semigrupo 1-integrável $S_1(t) = -t$.

Considere agora $R(t) = -1$. Então

$$J_t^2 R(t) = - \int_0^t (t-s) ds = -\frac{t^2}{2} = 1 * S_1(t).$$

Além disso,

$$\|e^{-t} D_t^1 S_2(t) z\| = \| -e^{-t} z\| = e^{-t} \|z\|.$$

Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{t(is+1)} G(is+1) z ds = -t^2 z,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$, para cada $x \in \mathbb{C}$, onde $G(z) = \mathcal{L}(-t) = -\frac{1}{z^2}$; o que era de se esperar.

Na seguinte versão do Corolário 4.2 não é necessário exigir que $(D_t^\alpha S_\alpha(t)x)_\omega$ seja uniformemente L^2 .

Teorema 4.3. *Seja $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ fortemente contínua e satisfazendo*

$$S(t) - k(t) = Aa * S(t) \quad (t \geq 0), \quad (4.5)$$

onde $k(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$. Suponha que X é um espaço UMD e que $a \in L_{Loc}^1(\mathbb{R}_+)$. Assuma que existe uma função b , n -diferenciável, com $b^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, tal que

$$(I) \quad a * b = ta;$$

$$(II) \quad b_\omega \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Se $0 \leq \alpha \leq n-2$, então (4.2) vale.

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 4.2, se $H = \mathcal{L}(S)$, então

$$H'(z) = \frac{\mathcal{L}(k)'}{\mathcal{L}(k)} H(z) - \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)} H(z) - \frac{\mathcal{L}(a)'}{\mathcal{L}(a)\mathcal{L}(k)} H^2(z).$$

Sabendo que $\frac{\mathcal{L}(k)'}{\mathcal{L}(k)} = -(\alpha+1)z^{-1}$ e $\frac{1}{\mathcal{L}(k)} = z^{\alpha+1}$, e utilizando (1.14), temos

$$H'(z) = [-(\alpha+1)z^{-1} + \mathcal{L}(b) + \mathcal{L}(b)z^n H(z)z^{\alpha+1-n}]H(z)$$

$$= [-\mathcal{L}(\alpha+1) + \mathcal{L}(b) + \mathcal{L}(b^{(n)} * J^{n-(\alpha+1)} S)]\mathcal{L}(S).$$

Portanto

$$tS(t) = C * S(t),$$

onde $C(t) = \alpha + 1 - b - b^{(n)} * J^{n-(\alpha+1)}S$.

Note que

$$\begin{aligned} \|J^{n-(\alpha+1)}S\| &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{n-(\alpha+2)} S(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(n-\alpha-1)} t^{n-(\alpha+2)} \int_0^t e^{-\omega s} ds \\ &= \frac{M}{\Gamma(n-\alpha-1)} t^{n-(\alpha+2)} (1 - e^{-\omega t}) \\ &\leq \frac{M}{\omega \Gamma(n-\alpha-1)} t^{n-(\alpha+2)} (e^{-\omega t} + 1), \end{aligned}$$

onde M é a constante que aparece em (4.1). Portanto

$$\|(b^{(n)} * J^{n-(\alpha+1)}S)_\omega\| \leq \frac{2Me^{-\omega t}}{\omega \Gamma(n-\alpha-1)} t^{n-(\alpha+2)} \|b^{(n)}\|_1.$$

Logo $(b^{(n)} * J^{n-(\alpha+1)}S)_\omega$ é uniformemente L^2 . Dessa forma, usando o Teorema 4.1, concluimos a demonstração. $\square$

Bibliografia

- [1] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **228**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [2] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*. Monographs in Mathematics. **89**. Basel, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [3] W. Arendt, S. Bu, *The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity*, Math. Z. **240** (2002), 311-343.
- [4] A. Ashyralyev, C. Cuevas and S.Piskarev, *On Well-posedness of difference schemes for abstract elliptic problems in $L^p([0, T]; E)$ spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (1-2), (2008), 43-65.
- [5] E. Bazhlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 2001.
- [6] S. Blunck, *Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations*, Studia Math. **146**(2) (2001), 157-176.
- [7] S. Blunck, *Analyticity and discrete maximal regularity of L_p -spaces*, J. Funct. Anal. **183**(1)(2001), 211-230.
- [8] J. Bourgain, *Some remarks on Banach spaces in which martingale differences sequences are unconditional*, Arkiv Math., **21** (1) (1983), 163-168.
- [9] D.L. Burkholder. *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. In Probability and Analysis*, Lecture Notes in Math. 1206. Springer Verlag 1986, 61-108.

- [10] D.L. Burkholder, *A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals on Banach-space-valued functions*. In: Conference on Harmonic Analysis in Honour of Antoni Zygmund, Vol. I, II, Chicago, ill., 1981, W. Becker, A.P. Calderón, R. Fefferman, P.W. Jones, Eds, Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth, Belmont, Calif, USA,(1983), 270-286.
- [11] C. Lizama, *Regularized solutions for abstract Volterra equations*. J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 278-292.
- [12] F. Cardoso ; C. Cuevas, *Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations*. J. Differ. Equ. Appl., v. 15, p. 261-290, 2009.
- [13] A. Castro, C. Cuevas, C. Lizama, *Well-posedness of second order evolution equation on discrete times*, J. Differ. Equ. Appl., to appear.
- [14] A. Castro, C. Cuevas and C. Lizama, *Maximal regularity of the Discrete Harmonic Oscillator Equation*, Adv. Difference Equ., to appear.
- [15] A. Castro, *Teoria de boa colocação para equações de evolução de segunda ordem em escala de tempo discreto e aplicações*, Tese Doutorado, UFPE (2009).
- [16] J.L. Cieřliński, B Ratkiewicz, *On Simulations of the classical harmonic oscillator equation by difference equations*, Adv. Difference Equ. (2006). 1-17
- [17] I. Cioranescu, V. Keyantuo, *On operator cosine functions in UMD spaces*, Semigroup Forum, 63 (3) (2001), 429-440.
- [18] I. Cioranescu, C. Lizama, *On the inversion of the Laplace transform for resolvent families in UMD spaces*, Arch. Math. (Basel), 81(2)(2003), 182-192.
- [19] C. Cuevas, C. Lizama, *Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces*, J. Differ. Equ. Appl., **13** (12) (2007), 1129-1138.
- [20] C. Cuevas, C. Lizama, *Semilinear evolution equations of second order via maximal regularity* , Adv. Difference Equ., (2008), doi:10.1155/2008/316207.
- [21] C. Cuevas, J.C. de Souza, *A perturbation theory for the discrete harmonic oscillator equation*, J. Differ. Equ. Appl. (2009), a aparecer.

- [22] C. Cuevas, J.C. de Souza, *S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Applied Mathematics Letters (2009).
- [23] C. Cuevas, J.C. de Souza, *Existence S-asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay*, Submetido.
- [24] C. Cuevas, C. Vidal, *A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay*, Adv. Difference Equ., v.2006, 1-11.
- [25] C. Cuevas, C. Lizama, *Semilinear evolution equations on discrete time and maximal regularity*, submitted.
- [26] E. Cuesta, *Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007), 277-285.
- [27] R. Denk, M. Hieber and J. Prüss, *R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, Mem. Amer. Math. Soc., **166** (788), 2003.
- [28] A. Driouich, O. El-Mennaoui, *On the inverse formula of Laplace transforms*, Arch. Math. 72 (1999), 56-63.
- [29] H. O. Fattorini, *Second Order Linear Differential equations in Banach spaces*. North-Holland Math. Studies, **108**. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland, 1985.
- [30] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, A. Carpinteri and F. Mainardi (Editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Vienna and New York 1997, 223-276.
- [31] G. Gripenberg, S-O Londen, O. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations*. Encyclopedia of Mathematics and Applications, **34**, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1990.
- [32] M. Haase, *The complex inversion formula revisited*. J. Aust. Math. Soc. 84 (2008), no. 1, 73-83.
- [33] J.K. Hale, J. Kato, *Phase space for retarded equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. 21 (1978), 11-41.

- [34] H. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *On S -asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2) (2008), 1119-1130.
- [35] H. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *Existence of S -asymptotically ω -periodic solutions for abstract neutral equations*, Bull. Austral. Math. Soc. (2008), doi:10.1017/S0004972708000713
- [36] H. Henríquez, *Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay*. Indian J. Pure Appl. Math. **27** (4) (1996), 357-386.
- [37] M. Hieber. *Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces*, Math. Ann. 291, (1991), 1-16.
- [38] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional-differential Equations with Infinite Delay*, Lectures Notes in Mathematics, **1473** (2002), Springer, Berlin.
- [39] T. HytÄonen, *R -boundedness and Multiplier Theorems*, Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports.
- [40] C. Lizama, *Regularized solutions for abstract Volterra equations*. J. Math. Anal. Appl., **243** (2000), 278-292.
- [41] C. Lizama, J.C. de Souza, *The complex inversion formula for integrated semigroups*, submetido.
- [42] K.S. Miller, B. Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York 1993.
- [43] S. Nicola, M. Pierri, *A note on S -asymptotically ω -periodic functions*, Nonlinear Analysis, Real World Applications (2008), doi:10.1016/j.nonrwa.2008.09.011
- [44] J. Prüss, *Evolution integral equations and applications*, Monographs Math. 87, Birkhäuser Verlag, 1993.
- [45] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, Math. Ann., **319**(4) (2001), 735-758.