



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

Aplicações birracionais
em
característica arbitrária

ANDRÉ VINICIUS SANTOS DÓRIA
Tese de Doutorado

Recife, 2011.

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

ANDRÉ VINICIUS SANTOS DÓRIA

Aplicações birracionais
em
característica arbitrária

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Orientador: Aron Simis

Recife
18 de março de 2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Dória, André Vinicius Santos
Aplicações birracionais em característica arbitrária /
André Vinicius Santos Dória - Recife: O Autor, 2011.
vii, 31 folhas

Orientador: Aron Simis.
Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Álgebra. 2. Álgebra comutativa. I. Simis, Aron
(orientador). II. Título.

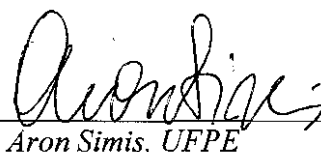
512

CDD (22. ed.)

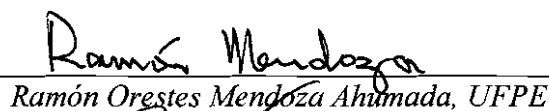
MEI2011 – 035

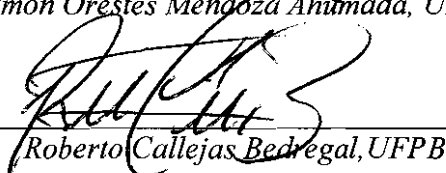
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

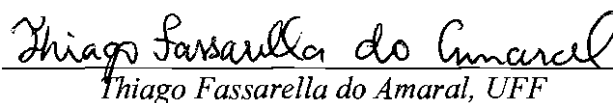
Aprovado: _____

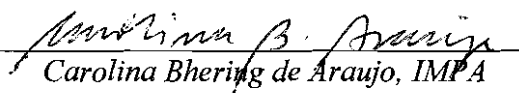

Aron Simis, UFPE

Orientador


Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE


Roberto Callejas Bedregal, UFPB


Thiago Fassarella do Amaral, UFF


Carolina Bhering de Araujo, IMPA

**APLICAÇÕES BIRRACIONAIS EM
CARACTERÍSTICA ARBITRÁRIA**

Por

André Vinícius Santos Dória

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Março – 2011

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Ayr Gomes Fonseca Dória e Maria Inácia dos Santos Dória, por vários motivos que não vou explicitá-los aqui, pois gastaria muitas páginas.

A minha esposa Jussara da Cruz Abreu Dória, pela amizade, companheirismo e compreensão.

As minhas irmãs Maria do Carmo e Sandra Cristina, que sempre torceram por mim.

Ao professor Aron Simis por sua orientação, dedicação e disponibilidade.

À CAPES e ao CNPq, pelo auxílio financeiro durante a preparação desta tese.

A todos meus colegas do dmat-UFPE e do dma-UFS que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho.

Aos meus amigos que compartilharam comigo seu conhecimento e sua amizade.

A todos os professores e funcionários do Dmat-UFPE e do Dma-UFS que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação.

A todos os meus amigos que sempre torceram por mim.

RESUMO

Esta tese representa uma sequência natural a trabalhos de vários autores, em que se busca obter resultados novos sobre aplicações birracionais usando técnicas de álgebra comutativa. Uma das lacunas conhecidas é o problema da característica do corpo de base. Habitualmente tratados separadamente, o caso de característica zero e de característica prima, deixam a desejar do ponto de vista da unificação dos resultados gerais. Outro aspecto relevado é o do enunciado de critérios de birracionalidade alternativos ao tradicional cálculo do grau de uma aplicação racional. O principal objetivo deste trabalho é discutir um invariante numérico de birracionalidade válido em característica arbitrária, denominado *posto Jacobiano dual*. Este invariante depende fortemente da estrutura graduada da álgebra de Rees do ideal de base da aplicação racional, a qual permite uma análise mais precisa do que o tratamento geométrico habitual do gráfico como variedade “blowup”.

PALAVRAS-CHAVE

Birracionalidade Álgebra de Rees Matriz Jacobiana Dual

ABSTRACT

This thesis stands as a natural sequence to the work of several authors, seeking to obtain new results on birational maps using techniques from commutative algebra. One of the classical problems in the theory of birational maps is the case where the characteristic of the base field is positive. The usual separate treatment of the case of characteristic zero and characteristic prime falls short of unifying general results. Another aspect scarcely dealt with is the statement of a birationality criterion which stands as an alternative to the traditional calculation of the degree of a rational map. The main objective of this work is a numerical invariant of birationality valid in arbitrary characteristic, called the Jacobian dual rank. This invariant depends strongly on the structure of the graded Rees algebra of the base ideal of a rational map, which allows a more precise analysis than the usual geometric treatment of the graph as a “blowup”.

KEYWORDS

Birationality Rees Algebra Jacobian dual matrix

Conteúdo

1	Um critério de birracionalidade	3
1.1	Preliminares	3
1.2	Um resultado de cunho Cramer-Lagrange	7
1.3	O posto Jacobiano dual e seu papel em birracionalidade	9
1.4	Teorema principal	13
2	Aplicações e variações	18
2.1	O posto linear do ideal de base	18
2.2	Extensão birracional de anéis	23
2.3	Transformações monomiais de Cremona com ideal de base saturado .	24
2.4	Aplicação birracional monomial com inversa definida por monômios .	26
2.5	Ideais de tipo fibrado	28
	Bibliografia	31

Introdução

Uma aplicação racional $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ entre espaços projetivos é definida por $m + 1$ formas de mesmo grau, em $n + 1$ variáveis, não todas nulas, $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$. A introdução das sizigias das formas $\mathbf{f}$ na teoria das aplicações racionais parece ter sido empregada, pela primeira vez, por Hulek, Katz e Schreyer ([16]), que forneceram uma condição suficiente para $\mathfrak{F}$ ser uma aplicação de Cremona. Posteriormente, Russo e Simis ([18]) desenvolveram um método no caso em que $m \geq n$, estendendo o dossiê existente a importantes aplicações racionais com imagem variedades clássicas, tais como rolos racionais (“rational scrolls”).

Ainda mais recentemente, Simis ([19]) estendeu os resultados anteriores ao caso geral de uma aplicação racional entre duas variedades projetivas reduzidas e irreduzíveis, em característica arbitrária. Como consequência, foi obtido um critério efetivo – isto é, implementável em um programa típico de computação algébrica – para decidir se uma aplicação é birracional (sobre a imagem) e, em caso afirmativo, fornecer a aplicação inversa.

Este critério foi implementado por Simis com bastante sucesso, em uma versão anterior do Programa *Macaulay*. Para esta tese, lançamos mão fartamente de uma implementação paralela em *Singular*, criando uma pequena máquina de produzir aplicações birracionais.

Voltando aos aspectos teóricos, algumas questões especiais só valiam plenamente em característica zero, mantendo-se abertas em característica positiva. No caso de $\mathfrak{F}$ ser definida por monômios, Simis e Villarreal desenvolveram uma teoria em característica arbitrária, através de uma transcrição adequada à aritmética inteira e à combinatória ([27]). Por outro lado, mesmo em característica zero algumas questões mantinham-se persistentes.

Existe um interesse em estender a teoria e os critérios efetivos obtidos ao caso de variedades projetivas reduzidas, mas não necessariamente irreduzíveis. Embora comumente descartável em geometria algébrica como uma “generalização óbvia” do caso irreduzível, por passagem às componentes irreduzíveis, a extensão ao caso geral mantém algumas dificuldades peculiares, tais como a própria definição de uma aplicação racional e seu comportamento funtorial, até a manutenção do análogo do critério clássico do isomorfismo dos corpos de funções. Esta etapa preliminar implica em uma cuidadosa revisão, sem a qual torna-se impossível a etapa seguinte que é a do enunciado de um critério efetivo de birracionalidade e da explicitação da inversa em caso afirmativo.

Este projeto foi contemplado em [7].

O objetivo principal desta tese, pode-se assim dizer, é uma revisão *ab initio* da teoria em característica arbitrária, no caso de variedades integrais. Reformulamos o critério de birracionalidade enunciado em [19], de modo a mantê-lo dependente de um único invariante (numérico) – aqui chamado o *posto Jacobiano dual*. Embora a formulação dada no [loc.cit.] já houvesse envolvido este invariante, o enunciado completo parecia depender virtualmente de outra condição, em termos da igualdade de dois módulos livres de torção. Um aspecto deste trabalho é a verificação de que a condição modular é, de fato, uma consequência da primeira condição numérica. Para tal, faz-se necessário uma revisão cuidadosa do posto Jacobiano dual e de suas propriedades preliminares. O resultado final representa um ganho computacional e oferece uma melhor visão da teoria.

A título de bonificação, revisitamos o caso das aplicações de Cremona e algumas questões periféricas sobre aplicações racionais.

Passamos a descrever, brevemente, o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo I fazemos uma breve introdução das noções fundamentais sobre aplicações racionais, fixando a notação que será utilizada no decorrer deste e dos demais capítulos. Seguiremos de perto a apresentação em [19], que é a mais conveniente para a transcrição algébrica. Em sequência aos preliminares, relacionamos o posto Jacobiano dual com as dimensões das variedades envolvidas (Teorema 1.9). Este resultado esclarece o papel desempenhado por este invariante numérico por analogia com o clássico grau de transcendência, esclarecendo a igualdade das dimensões entre “domínio e contradomínio”. Inspirando-nos em [19, Lemma 3.6], desenvolveremos um estudo mais preciso sobre a natureza da aplicação inversa de uma aplicação birracional em termos dos menores de ordem apropriada de uma matriz Jacobiana dual. Concluindo, enunciamos uma reformulação do critério de birracionalidade para subvariedades integrais.

No Capítulo II exporemos algumas consequências naturais dos resultados anteriores, revelando alguns aspectos ainda mal compreendidos, mesmo no caso de uma aplicação de Cremona. Estendemos, em característica arbitrária, certos resultados obtidos em [19].

Em continuação, damos relevo a certas questões de natureza subjacente. A intenção é a interveniência de propriedades típicas de álgebra comutativa no que elas podem, potencialmente, representar um dado adicional na área. Estes aspectos tocam profundamente a natureza de uma aplicação de Cremona individual e dão um toque algébrico sutil ao cabedal clássico da teoria.

Capítulo 1

Um critério de birracionalidade

1.1 Preliminares

Seja k um corpo infinito arbitrário, que será suposto algebricamente fechado na transcrição geométrica de alguns resultados obtidos. Consideremos o espaço projetivo $\mathbb{P}_k^n$ n -dimensional sobre k (ou simplesmente $\mathbb{P}^n$, se o corpo envolvido for claro do contexto). O anel de coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$ é o anel de polinômios $k[\mathbf{X}] = k[X_0, \dots, X_n]$ munido da graduação standard. Consideremos uma subvariedade projetiva reduzida e irredutível $V \subset \mathbb{P}^n$. Como de hábito, denotamos $I(V)$ o seu ideal homogêneo de definição e poremos $R := k[\mathbf{X}]/I(V)$ – o anel de coordenadas homogêneas de V em $\mathbb{P}^n$. Notemos que R é um domínio de integridade.

Uma aplicação racional $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é definida por um conjunto ordenado de $m+1$ formas de um mesmo grau, não todas nulas. Dada uma variedade projetiva irredutível $V \subset \mathbb{P}^n$, podemos definir aplicações racionais de V em $\mathbb{P}^m$ de tal maneira a se estender ao ambiente $\mathbb{P}^n$. Assim sendo, estas aplicações estão completamente definidas por um conjunto ordenado de formas $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R$ de mesmo grau, com algum $f_j \neq 0$. O conjunto $\mathbf{f}$ é dito um *representante* de $\mathfrak{F}$.

Fixada uma aplicação racional $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, não existe um único representante para $\mathfrak{F}$, contudo há relação entre tais conjuntos de formas: dados $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \subset R$, temos que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}'$ representam a mesma $\mathfrak{F}$ se, e somente se,

$$I_2 \begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_m \\ f'_0 & \cdots & f'_m \end{pmatrix} = 0 \text{ em } R, \quad (1.1)$$

onde $I_t(M)$ é o ideal de R gerado pelos menores $t \times t$ da matriz M . Além disso, uma condição equivalente a (1.1) é que o posto da matriz acima seja 1.

O conjunto de representantes de $\mathfrak{F}$ foi examinado em [19], onde foi observado que coincide com os vetores homogêneos não nulos do R -módulo $\text{Hom}_R(I, R)$ ([19, Proposition 1.1]). Em particular, dada uma submatriz $(m+1) \times m$ σ de posto m da matriz de sizigias de $I = (\mathbf{f})$, um representante de $\mathfrak{F}$ é o vetor cujas coordenadas são os menores máximos (com sinal) de σ . Este último fenômeno é usado frequentemente na teoria a seguir.

É conhecido que a imagem de $\mathfrak{F}$ é uma variedade projetiva irredutível de $\mathbb{P}^m$,

que será denotada por W . Além disso, o anel de coordenadas homogêneas de W identifica-se, a menos de normalização dos graus, com a k -subálgebra $S = k[\mathbf{f}] \subset R$.

Definição 1.1 Sejam $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva irredutível e uma aplicação racional $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ com imagem $W \subset \mathbb{P}^m$. Diremos que $\mathfrak{F}$ é uma *aplicação birracional* quando existir uma aplicação racional $\mathfrak{G} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que a imagem de $\mathfrak{G}$ é V e as aplicações $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ são equivalentes às aplicações idênticas de W e V , respectivamente. A aplicação $\mathfrak{G}$ é, então unicamente determinada, denominada a *inversa* de $\mathfrak{F}$ e denotada $\mathfrak{F}^{-1}$.

É conhecido que uma aplicação racional definida pelas formas $\mathbf{f} \in R$ de um grau fixo d é birracional se, e somente se, dá-se a igualdade na inclusão de corpos $k(\mathbf{f}) \subset k(R_d)$, onde R_d é k -subespaço vetorial gerado por todos os “monômios” de grau d de R – ver [26, Prova da Proposição 2.1] e [21]. Uma prova detalhada pode ser encontrada na Seção 2.2 (Proposição 2.10). Infelizmente, esta equivalência não fornece um critério efetivo.

Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional. Fixemos um representante $\mathbf{f}$ de $\mathfrak{F}$. Consideremos a álgebra $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ de Rees de $\mathbf{f}$, onde $R = k[\mathbf{X}]/I(V)$ é o anel de coordenadas de V . Seja $\mathcal{J}_{\mathbf{f}} \subset R[\mathbf{Y}]$ o núcleo do homomorfismo sobrejetivo natural de R -álgebras

$$R[\mathbf{Y}] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbf{f}),$$

definido por $Y_j \mapsto f_j$, sendo $\mathbf{Y} = Y_0, \dots, Y_m$ indeterminadas. Assim,

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{Y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}.$$

O ideal acima é conhecido como *ideal de apresentação* ou *definição* de $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$. Sempre que possível, para simplificarmos a notação, usaremos $\mathcal{J}$ ao invés de $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$.

O anel $R[\mathbf{Y}]$ é naturalmente bigraduado standard. O bigrau de uma forma será denotado (p, q) . Como $(\mathbf{f})$ é gerado em mesmo grau, $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ é uma k -álgebra bigraduada standard. Logo, $\mathcal{J}$ é um ideal bihomogêneo e, assim, temos:

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{J}_{(p,q)},$$

onde $\mathcal{J}_{(p,q)}$ denota o k -espaço vetorial das formas de bigrau (p, q) .

Embora a definição do ideal $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ seja baseada em um representante particular de $\mathfrak{F}$, pode-se mostrar facilmente que é um invariante de $\mathfrak{F}$.

O resultado a seguir obtido em [19] serve de ponte entre a formulação geométrica via explosões (blowup) e a transcrição algébrica de birracionalidade. Por completude, daremos uma demonstração – ligeiramente diferente da originalmente dada no [loc.cit]. Um argumento similar foi também obtido por S. H. Hassanzadeh (comunicação oral).

Proposição 1.2 ([19, Proposition 2.1]) *Sejam $V \subset \mathbb{P}^n$ e $W \subset \mathbb{P}^m$ variedades projetivas integrais de dimensões positivas. Dadas aplicações racionais $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$*

e $\mathfrak{G} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tais que as imagens são W e V , respectivamente. Consideremos $R = k[\mathbf{X}]/I(V)$ e $S = k[\mathbf{Y}]/I(W)$ os respectivos anéis de coordenadas de V e W . Fixemos representantes $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ e $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_n\}$ de $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ são inversas uma da outra;
- (ii) A aplicação identidade de $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(I(V), I(W))$ induz um isomorfismo bigraduado $\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \mathcal{R}_S(\mathbf{g})$.

Prova. Observemos que

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{Y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}} = \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))},$$

onde $\sim$ indica imagem inversa em $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Analogamente,

$$\mathcal{R}_S(\mathbf{g}) \simeq \frac{S[\mathbf{X}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} = \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}, I(W))}.$$

Por outro lado, $I(W) \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))$ e, por razão análoga, $I(V) \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}, I(W))$. Segue que (ii) é equivalente às inclusões $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}, I(W))$ e $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por uma simetria óbvia, basta provarmos a inclusão $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))$.

A hipótese de que $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ é a aplicação identidade de V traduz-se na existência de $\alpha, \beta \in R$, não nulos, tais que $\beta g_i(\mathbf{f}) = \alpha x_i$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, onde x_i denota a classe de X_i em R . Em outras palavras, $g_i(\mathbf{f})x_j - g_j(\mathbf{f})x_i = 0 \in R$ ou, ainda, $g_i(\mathbf{Y})x_j - g_j(\mathbf{Y})x_i \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}} \subset R[\mathbf{Y}]$ para $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Isto significa que $g_i(\mathbf{Y})X_j - g_j(\mathbf{Y})X_i \in (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))$ que, lendo módulo $I(W)$, dá

$$g_iX_j - g_jX_i = 0 \text{ em } \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V), I(W))} = \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))}.$$

Notemos que as relações acima são precisamente as sizigias de Koszul de $\mathbf{g}$ vistas como 1-formas, gerando um subideal $K_{\mathbf{g}} \subset \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. Por outro lado, $\mathcal{J}_{\mathbf{g}} = K_{\mathbf{g}} : (\mathbf{g})^{\infty}$. Ora, existe pelo menos um i tal que $g_i \neq 0 \in S$, logo também $g_i \neq 0 \in \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))}$. Segue que $\mathcal{J}_{\mathbf{g}} = \{0\}$ em $\frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Considerando as relações de Koszul, temos

$$g_i(\mathbf{Y})X_j - g_j(\mathbf{Y})X_i \in (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}, I(W)).$$

Por hipótese, então segue que $g_i(\mathbf{Y})X_j - g_j(\mathbf{Y})X_i \in (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}, I(V))$. Assim, $g_i(\mathbf{Y})x_j - g_j(\mathbf{Y})x_i \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$, implicando nas igualdades $g_i(\mathbf{f})x_j = g_j(\mathbf{f})x_i$ em R . Sem perda de generalidade podemos supor que $x_0 \neq 0$ em R . Neste caso, vejamos que $g_0(\mathbf{f})$ é não nulo em R . Ora, se $g_0(\mathbf{f}) = 0 \in R$, segue que $g_0(\mathbf{Y}) \in I(W) \Rightarrow X_0 \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. Pela

condição (ii), temos que $X_0 \in (\widetilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{f}}, I(W)) \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ e assim $X_0 \in I(V)$, que contradiz a hipótese de $x_0 \neq 0$ em R .

Por definição as relações $g_i(\mathbf{f})x_0 = g_0(\mathbf{f})x_i$ dizem-nos que $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ é a inclusão de V em $\mathbb{P}^n$. Do mesmo modo, podemos mostrar que $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ é a inclusão de W em $\mathbb{P}^m$. Portanto, $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ são inversas uma da outra. ■

Voltemos à análise de $\mathcal{J}$. A imagem de $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é uma variedade projetiva irredutível W de $\mathbb{P}^m$. Temos que, o anel de coordenadas homogêneas de W é

$$k[\mathbf{f}] \simeq k[\mathbf{Y}]/(\mathcal{J}_{0,*})k[\mathbf{Y}] \simeq k[\mathbf{Y}]/I(W)$$

como k -álgebras graduadas, onde $\mathcal{J}_{0,*} := \bigoplus \mathcal{J}_{(0,q)}$ é o k -espaço vetorial gerado pelas biformas de grau $(0, q)$ pertencentes a $\mathcal{J}$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

Uma outra componente bihomogênea básica no presente contexto é $\mathcal{J}_{1,*} := \bigoplus \mathcal{J}_{(1,q)}$, o k -espaço vetorial gerado pelas biformas de grau $(1, q)$, com $q \geq 1$, pertencentes ao ideal de definição $\mathcal{J}$ da álgebra de Rees de $\mathbf{f}$. Fixemos um conjunto de biformas de grau $(1, s)$ que geram $(\mathcal{J}_{1,*})$ minimamente. Calculando as derivadas parciais, em relação a x , destes geradores obtemos uma matriz ψ com $n + 1$ colunas, onde suas entradas são elementos de $k[\mathbf{Y}]$ e as coordenadas de qualquer linha fixada são homogêneas de mesmo grau. A matriz ψ é a *matriz Jacobiana dual* da aplicação racional $\mathfrak{F}$. O posto de ψ sobre o anel de coordenadas de W é chamado de *posto Jacobiano dual*.

Notemos que embora a matriz Jacobiana dual não seja unicamente definida, pode-se mostrar que o posto de uma tal matriz é um invariante de $\mathfrak{F}$ (ver Lema 1.7).

O seguinte critério de birracionalidade foi obtido em [19, Theorem 2.4]:

Teorema 1.3 *Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional, onde $V \subset \mathbb{P}^n$ denota uma variedade projetiva integral e $W \subset \mathbb{P}^m$ imagem de $\mathfrak{F}$. Então $\mathfrak{F}$ é birracional sobre W se, e somente se, as seguintes condições abaixo são verificadas:*

- (a) $\dim V = \dim W$;
- (b) $\mathfrak{F}$ admite uma matriz Jacobiana dual ψ de posto n sobre o anel de coordenadas homogêneas $k[\mathbf{Y}]/I(W)$ de W ;
- (c) $\text{Im}(\psi^t) = \text{Im}(\psi)^*$.

Além disso, quando as condições acima têm lugar, $\ker_S(\psi)$ é o S -módulo dos representantes da aplicação inversa.

O teorema não se aplica exatamente neste formato se a variedade V admite alguma forma linear em $I(V)$, isto é, se V é degenerada na imersão dada. Por exemplo,

$$\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

onde $V = \{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2/X = 0\}$, dada por $(y : z)$. Temos que, neste exemplo, o posto Jacobiano dual é 1 e não 2 conforme prevê o enunciado. Apesar disso, a aplicação é birracional. Felizmente, este é o único problema no formato enunciado. Incluindo a hipótese de não degenerescência corrige o enunciado do teorema, mas deixa em suspenso o caso degenerado.

A maneira de lidar com este problema será apresentada nas próximas seções.

1.2 Um resultado de cunho Cramer-Lagrange

Nesta seção, usando um lema inspirado na regra de Cramer-Lagrange, faremos uma conexão entre menores maximais de qualquer submatriz de tamanho $n \times (n+1)$ de ψ com o ideal $\mathcal{J}$ de definição da álgebra de Rees de $\mathbf{f}$, onde ψ é a matriz Jacobiana dual de uma aplicação racional arbitrária $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ fixada. Enfatizamos que o caso do nosso interesse é quando o posto de tal submatriz de ψ é máximo (ou seja, igual a n pelo Teorema 1.9).

O resultado a seguir não foi encontrado explicitamente na literatura. Para uma demonstração alternativa, ver [7, Proposition 2.1].

Proposição 1.4 *Seja M uma matriz, com n linhas e $(n+1)$ colunas, formada por elementos pertencentes a um anel A comutativo com identidade. Denotamos por $L \subset A^{n+1}$ o A -submódulo gerado pelas linhas de M . Para todo $i, j \in \{0, \dots, n\}$, com $i < j$, temos que*

$$(0, \dots, 0, (-1)^j \Delta_j, 0, \dots, 0, -(-1)^i \Delta_i, 0, \dots, 0) \text{ pertence a } L,$$

onde Δ_s é o determinante da matriz obtida de M excluindo a coluna $s+1$, para todo $s \in \{0, \dots, n\}$, e $(-1)^j \Delta_j$ e $-(-1)^i \Delta_i$ encontram-se nas posições $i+1$ e $j+1$, respectivamente.

Prova. Para simplificarmos a notação começaremos a contar as colunas da matriz M a parti do zero. Podemos escrever a matriz M da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \dots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ definiremos por M_i a matriz quadrática obtida de M retirando a coluna i . Temos que, $\Delta_i = \det(M_i)$. Fixada a matriz M_i definiremos, para todo $t \in \{1, \dots, n\}$, δ_t como sendo o determinante da matriz obtida de M_i excluindo a linha t e a coluna j (aqui a contagem das colunas está sendo iniciada a parti de 1). Segue das propriedades de determinantes, em especial a regra de Cramer-Lagrange, que

$$\Delta_i = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+j} \delta_t \alpha_{t,j}. \quad (1.2)$$

Retornamos a matriz original M . Multiplicando cada t -ésima linha de M por $(-1)^{t+j} \delta_t$ e depois somando-as, obtemos um vetor linha, digamos $(a_0, \dots, a_n)$. Mostraremos que, este vetor linha é igual à

$$(0, \dots, 0, (-1)^{j-(i+1)} \Delta_j, 0, \dots, 0, \Delta_i, 0, \dots, 0), \quad (1.3)$$

onde $(-1)^{j-(i+1)} \Delta_j$ e Δ_i encontram-se nas posições $i+1$ e $j+1$, respectivamente. De fato, no caso $s \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$,

$$a_s = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+j} \delta_t \alpha_{t,s} = 0,$$

pois este somatório representa o determinate de uma matriz com duas colunas iguais. Caso $s = j$, temos que

$$a_j = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+j} \delta_t \alpha_{t,j} = \Delta_i,$$

por 1.2. Por último, o caso $s = i$, segue que

$$a_i = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+j} \delta_t \alpha_{t,i} = (-1)^{j-(i+1)} \Delta_j.$$

Logo, o vetor 1.3 pertence a L e assim

$$(0, \dots, 0, (-1)^j \Delta_j, 0, \dots, 0, -(-1)^i \Delta_i, 0, \dots, 0) \in L.$$

■

Ajustaremos a proposição acima ao nosso contexto. Seja ψ' uma submatriz de tamanho $n \times (n+1)$ de ψ . Para todo $i = 0, \dots, n$, definiremos

$$\Delta_i \in k[\mathbf{Y}] \subset R[\mathbf{Y}]$$

como sendo o determinante da matriz obtida de ψ' excluindo a coluna $i+1$.

Todo vetor linha de ψ pode ser visto como um elemento de $\mathcal{J}$ da seguinte forma: seja $(\alpha_0 \dots \alpha_n)$ vetor linha de ψ , segue da definição de ψ que

$$\sum_{i=0}^n x_i \alpha_i \in \mathcal{J}.$$

Daí, quando falarmos que um vetor linha

$$(\alpha_0 \dots \alpha_n)$$

pertence a $\mathcal{J}$ estamos fazendo referência a $\sum_{i=0}^n x_i \alpha_i$, onde $\alpha_i \in S$.

Usando o fato de que $\mathcal{J}$ é um ideal de $R[\mathbf{Y}]$, temos que o ideal gerado pelas linhas de ψ' pertence a $\mathcal{J}$. Portanto, a Proposição 1.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

Proposição 1.5 *Usando a notação fixada. Temos que, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$,*

$$(0, \dots, 0, (-1)^j \Delta_j, 0, \dots, 0, -(-1)^i \Delta_i, 0, \dots, 0) \text{ pertence a } \mathcal{J},$$

onde $(-1)^j \Delta_j$ e $-(-1)^i \Delta_i$ encontram-se nas posições $i+1$ e $j+1$, respectivamente.

Prova. Basta aplicarmos a Proposição 1.4 no argumento acima. ■

É interessante notarmos que a Proposição 1.5 nos diz que as relações de Koszul do ideal $(\Delta_0, -\Delta_1, \dots, (-1)^n \Delta_n)$ pertencem a $\mathcal{J}$.

1.3 O posto Jacobiano dual e seu papel em birracionalidade

Vamos recapitular a ferramenta algébrica presente na birracionalidade, que corre em paralelo com a ideia geométrica das fibras lineares de uma aplicação racional. Este conceito tem evoluído continuamente a partir de noções anteriores, onde a origem é o dual Jacobiano em [23] (ver também [18] e [19]).

Como veremos, o ideal base de uma aplicação racional desempenha um papel essencial, que não ficou inteiramente claro na subseção anterior.

Assim, seja $\mathbf{f} \in R = k[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$ um representante de uma aplicação racional $\mathfrak{F}$ definida em $\text{Proj}(R)$, com $\dim R \geq 1$ um domínio de integridade.

Como $\mathbf{f}$ é gerado em mesmo grau, a álgebra de Rees $\mathcal{R}_R((\mathbf{f}))$ é uma k -álgebra bigraduada standard. Em particular, existe um homomorfismo

$$R[\mathbf{Y}] = R[Y_0, \dots, Y_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R((\mathbf{f}))$$

aplicando $Y_j \mapsto f_j$. Seja $\mathcal{J} = \ker(R[\mathbf{Y}] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R((\mathbf{f})))$ o núcleo correspondente, conhecido como *ideal de definição* de $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$. Assim como a imagem de uma aplicação racional, $\mathcal{J}$ não depende do representante escolhido. Notemos que este ideal é bihomogêneo na bigraduação standard natural de $R[\mathbf{Y}]$ induzida do anel de polinômios $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Assim, segue que

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{J}_{(p,q)},$$

onde $\mathcal{J}_{(p,q)}$ denota o k -espaço vetorial das formas de bigrau (p, q) .

O primeiro pedaço relevante do nosso ideal acima é $\mathcal{J}_{0,*}$, cujos elementos são as formas de bigrau $(0, q)$, para todo $q \geq 1$. Já que estas formas tem coeficientes somente em k , podemos considerá-las como elementos de $k[\mathbf{Y}]$ e, como tal, geram o ideal de todas as relações polinomiais (sobre k) de $\mathbf{f}$. Logo,

$$k[\mathbf{Y}]/(\mathcal{J}_{0,*})k[\mathbf{Y}] \simeq k[\mathbf{f}],$$

como k -álgebras graduadas standard, a menos de uma renormalização dos graus em $k[\mathbf{f}]$. Denotaremos o anel quociente $k[\mathbf{Y}]/(\mathcal{J}_{0,*})k[\mathbf{Y}]$ por S .

Para a birracionalidade, o seguinte subconjunto de biformas é importante:

$$\mathcal{J}_{1,*} := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_{1,q}$$

onde $\mathcal{J}_{1,q}$ denota a parte bigraduada de $\mathcal{J}$ gerada por formas de bigrau $(1, q)$ para todo $q \geq 1$. Notemos que $\mathcal{J}_{1,*} = \{0\}$ pode acontecer em geral.

Uma forma de bigrau $(1, *)$ pode ser escrita como $\sum_{i=0}^n Q_i(\mathbf{Y}) x_i$, para certos polinômios homogêneos $Q_i(\mathbf{Y}) \in k[\mathbf{Y}] \subset R[\mathbf{Y}]$ de mesmo grau. Já que $\mathbf{Y}$ são indeterminadas sobre R , duas representações de uma mesma forma diferem a menos de uma k -dependência linear dos $\{x_0, \dots, x_n\}$, ou seja, de elementos de $\mathfrak{a}_1$.

Em particular, se a *dimensão de mergulho* de R – i.e., a dimensão do k -espaço vetorial $\text{edim}(R) := \dim_k(R_1) = n + 1 - \dim_k \mathfrak{a}_1$ – é $n + 1$ então toda forma acima tem uma única expressão.

Dando continuidade, fixaremos um conjunto gerador minimal do ideal $(\mathcal{J}_{1,*})$ consistindo de um número finito de formas de bigrau $(1, q)$, para vários q 's. Sejam

$$\{P_1, \dots, P_s\} \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

tais que suas respectivas classes representem as biformas acima e $\{\ell_1, \dots, \ell_r\} \subset k[\mathbf{X}]$ uma k -base do espaço vetorial $\mathfrak{a}_1$. Consideremos a matriz Jacobiana dos polinômios $\{\ell_1, \dots, \ell_r, P_1, \dots, P_s\}$ com respeito a $\mathbf{X}$, uma matriz com entradas em $k[\mathbf{Y}]$. Denotaremos por ψ a matriz correspondente sobre S , aqui chamada de *matriz Jacobiana fraca* associada a um dado conjunto de geradores de $(\mathcal{J}_{1,*})$. Notemos que ψ tem uma perceptível submatriz ρ de tamanho $(n + 1 - \text{edim}(R)) \times (n + 1)$ com entradas em $k[\mathbf{Y}]_0 = k$, além disso ρ é não singular. Este número de linhas $r = n + 1 - \text{edim}(R) = \dim_k \mathfrak{a}_1$ chamaremos de *índice de degeneração* e o denotaremos por $\text{idg}(\mathfrak{a})$.

Observação 1.6 Pela definição de ψ segue que $\mathbf{X} \cdot \psi^t = 0$ em $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$, em particular o vetor $(\mathbf{X})^t$ pertence ao espaço nulo de ψ sobre $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$. Logo o posto de ψ sobre $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$, que está bem definido já que esta última não tem divisores próprios de zero, é no máximo n . Por maior razão, esta cota superior vale para ψ sobre o anel de resíduos $\mathcal{R}_R((\mathbf{f})) \rightarrow S$. O Teorema 1.9 abaixo estabelece um resultado mais preciso.

Notemos que a matriz Jacobiana fraca ψ não é unicamente definida, devido à falta da unicidade na expressão de cada forma e a escolha dos geradores bihomogêneos. Contudo seus postos são iguais.

Lema 1.7 *Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional, onde V é uma variedade projetiva irredutível de $\mathbb{P}^n$. Se ψ e ψ' são matrizes Jacobianas fracas de $\mathfrak{F}$, então*

$$\text{rk}_S \psi = \text{rk}_S \psi',$$

onde S é o anel de coordenadas da imagem de $\mathfrak{F}$.

Prova. Verificaremos que as duas matrizes Jacobianas duais têm o mesmo submódulo linha sobre S .

Sejam $\{P_1, \dots, P_s\}, \{Q_1, \dots, Q_s\} \subset k[X, Y]$ os conjuntos de biformas de vários bigraus $(1, q)$, com $q \geq 1$, que geram individualmente $(\mathcal{J}_{1,*})$ e estão associados a ψ e ψ' , respectivamente. Embora os conjuntos possam ser diferentes, temos que os correspondentes bigraus são unicamente definidos a menos de reordenação dos geradores. Assim, podemos supor que os bigraus

$$\text{gr}(P_t) = \text{gr}(Q_t) = (1, d_t),$$

com $1 \leq t \leq s$ e $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_s$. Portanto, para $t = 1, \dots, s$, podemos escrever

$$Q_t = \sum_{j=1}^s (\lambda_{tj} p_{tj}(\mathbf{Y}) P_j) + \sum_{|\alpha_t|=d_t} a_{\alpha_t}(\mathbf{X}) \mathbf{Y}^{\alpha_t},$$

sendo $\lambda_{tj} \in k$, $p_{tj}(\mathbf{Y}) \in k[\mathbf{Y}]$ de grau $(d_t - \text{gr}_{\mathbf{Y}}(P_j))$ e $a_{\alpha_t}(\mathbf{X}) \in \mathfrak{a}_1$. Considerando $a_{\alpha_t}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^r \mu_{tk} \ell_k(\mathbf{X})$, segue que

$$\frac{\partial Q_t}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^s \left(\lambda_{tj} p_{tj}(\mathbf{Y}) \frac{\partial P_j}{\partial X_i} \right) + \sum_{|\alpha_t|=d_t} \left(\sum_{k=1}^r \mu_{tk} \mathbf{Y}^{\alpha_t} \frac{\partial \ell_k(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right).$$

Isso mostra que o $k[\mathbf{Y}]$ -submódulo linha de ψ' está contido no $k[\mathbf{Y}]$ -submódulo linha de ψ . Por simetria, os dois $k[\mathbf{Y}]$ -submódulos linha coincidem, logo o S -submódulo $\text{Im}(\psi^t)$ é igual à $\text{Im}(\psi'^t)$, daí $\text{rk}_S \psi = \text{rk}_S \psi'$, como queríamos. ■

Devido ao lema anterior, diremos que qualquer matriz Jacobiana fraca associada a um conjunto de geradores mínimos de $(\mathcal{J}_{1,*})$ é uma *matriz Jacobiana dual* de $\mathfrak{F}$. Além disso, o lema anterior revela um invariante numérico de $\mathfrak{F}$.

Definição 1.8 Seja $\mathfrak{F}$ uma aplicação racional. Definiremos o *posto Jacobiano dual* de $\mathfrak{F}$ como sendo o posto de qualquer matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, o denotaremos por $\text{jdrk}(\mathfrak{F})$. Na mesma situação, o *posto Jacobiano dual não-degenerado* de $\mathfrak{F}$ é $\text{jdrk}_+(\mathfrak{F}) := \text{jdrk}(\mathfrak{F}) - \text{idg}(\mathfrak{a}) \geq 0$.

O resultado seguinte mostra que o posto introduzido acima é sensível à diferença entre as dimensões das variedades de partida e de chegada.

Teorema 1.9 *Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional, sendo V uma variedade projetiva irredutível e $W \subset \mathbb{P}^m$ a imagem de $\mathfrak{F}$. Temos que*

$$\dim V - \dim W \leq n - \text{jdrk}(\mathfrak{F}) = \text{edim}(\mathbf{R}) - 1 - \text{jdrk}_+(\mathfrak{F}).$$

Prova. Denotemos por R e S os anéis de coordenadas de V e W , respectivamente.

Daí,

$$R = \frac{k[\mathbf{X}]}{I(V)} = k[\mathbf{x}] \text{ e } S = \frac{k[\mathbf{Y}]}{I(W)} = k[\mathbf{y}].$$

Seja $\mathbf{f}$ um representante de $\mathfrak{F}$. Consideremos a álgebra de Rees

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{Y}]}{\mathcal{J}_f} \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\widetilde{\mathcal{J}_f}, I(V))},$$

onde $\sim$ indica imagem inversa em $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Além disso, sabemos que $\dim \mathcal{R}_R(\mathbf{f}) = \dim R + 1$.

Poremos $E := \text{coker}_S(\psi^t)$, onde ψ é a matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Notemos que,

$$\text{jdrk}(\mathfrak{F}) = \text{rk}_S(\psi) = \text{rk}_S(\psi^t) = (n+1) - \text{rk}_S(E).$$

Assim, $\dim \mathcal{R}_S(E) = \dim S + (n+1) - \text{jdrk}(\mathfrak{F})$.

É interessante observarmos que a desigualdade a ser provada é equivalente a

$$\dim \mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \leq \dim \mathcal{R}_S(E).$$

Provaremos a desigualdade acima.

É conhecido que,

$$\mathcal{R}_S(E) \simeq \frac{\mathbb{S}_S(E)}{\mathcal{T}},$$

onde $\mathbb{S}_S(E)$ é a álgebra simétrica de E e $\mathcal{T}$ a torção de $\mathbb{S}_S(E)$ com respeito a S . Temos que,

$$\mathbb{S}_S(E) = \frac{S[\mathbf{X}]}{I_1(\psi\mathbf{X}^t)} \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{(\ell_1, \dots, \ell_r, P_1, \dots, P_s, I(W))},$$

onde $\{\ell_1, \dots, \ell_r, P_1, \dots, P_s\}$ é o conjunto associado a ψ .

Seja $q \in k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ tal que sua classe em $\mathbb{S}_S(E)$ pertença a $\mathcal{T}$. Segue que, existe um $s(\mathbf{Y}) \notin I(W)$ tal que

$$s(\mathbf{Y})q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in (\ell_1, \dots, \ell_r, P_1, \dots, P_s, I(W)).$$

O que implica que $s(\mathbf{Y})q(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = 0$ em $R[t]$. Como $s(\mathbf{Y}) \notin I(W)$ vamos ter $q(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = 0$ em $R[t]$. Logo, $q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in (\widetilde{\mathcal{J}}_f, I(V))$. Assim,

$$\mathcal{R}_S(E) \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{\mathcal{I}},$$

com $\mathcal{I} \subset (\widetilde{\mathcal{J}}_f, I(V))$.

Portanto, $\dim \mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \leq \dim \mathcal{R}_S(E)$. ■

Corolário 1.10 *Com a notação do teorema anterior, $\text{jdrk}_+(F) \leq \text{edim}(R) - 1$. Além disso, se a igualdade ocorre, então $\dim S = \dim R$.*

Temos, também, as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{idg}(\mathfrak{a}) &\leq \text{jdrk}(\mathfrak{F}) \leq n \\ 0 &\leq \text{jdrk}_+(\mathfrak{F}) \leq \text{edim}(R) - 1. \end{aligned}$$

Observação 1.11 Notemos que a afirmação suplementar do corolário tem uma tradução de natureza geométrica: $\text{jdrk}_+(\mathfrak{F}) = \text{edim}(R) - 1$ implica em que a fibra geral de $\mathfrak{F}$ é um conjunto finito de pontos. Assim, a estimativa preliminar do Teorema 1.9 coloca em evidência que o posto da matriz Jacobiana dual desempenha um papel importante.

1.4 Teorema principal

Antes do teorema principal enunciaremos um lema que fornece uma condição suficiente para birracionalidade. Tal versão será bastante útil na verificação de quando uma aplicação racional é a aplicação inversa de uma outra.

Lema 1.12 *Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional, onde $V \subset \mathbb{P}^n$ é variedade irredutível de dimensão positiva. Denotemos a imagem de $\mathfrak{F}$ por W . Se existe uma aplicação racional $\mathfrak{G} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ é a aplicação inclusão de V em $\mathbb{P}^n$, então:*

(i) *A imagem de $\mathfrak{G}$ é V ;*

(ii) $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = id_W$.

Consequentemente, essas condições dizem que $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem e $\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{G}$.

Prova. Sejam $R := \frac{k[\mathbf{X}]}{I(V)} = k[\mathbf{x}]$ e $S := \frac{k[\mathbf{Y}]}{I(W)} = k[\mathbf{y}]$ os anéis de coordenadas de V e W , respectivamente. Consideremos $\mathbf{f} \in R$ e $\mathbf{g} \in S$ representantes de $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, respectivamente. Por hipótese, $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ é a aplicação inclusão de V em $\mathbb{P}^n$, assim

$$\text{rk}_R \begin{pmatrix} g_0(\mathbf{f}) & \cdots & g_n(\mathbf{f}) \\ x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = 1$$

(ver 1.1). Logo, existem $\alpha(\mathbf{x})$ e $\beta(\mathbf{x})$ elementos de R não nulos tais que

$$g_i(\mathbf{f}) = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} x_i, \quad (1.4)$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

(i) Como a imagem de $\mathfrak{F}$ é W , temos que $k[\mathbf{f}] \simeq k[\mathbf{y}]$, onde cada f_i é levado em y_i . Temos que o anel de coordenadas da imagem de $\mathfrak{G}$ é isomorfo a $k[\mathbf{g}] \subset k[\mathbf{y}]$. Pelo isomorfismo anterior

$$k[\mathbf{g}] \simeq k[g_0(\mathbf{f}), \dots, g_n(\mathbf{f})] \simeq k \left[\frac{\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} x_0, \dots, \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} x_n \right] \simeq k[x_0, \dots, x_n],$$

sendo que esses isomorfismos levam $g_i \leftrightarrow g_i(\mathbf{f}) \leftrightarrow \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} x_i \leftrightarrow x_i$, respectivamente. Logo, a imagem de $\mathfrak{G}$ é V .

(ii) Segue do item (i) que a composição $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ está bem definida. A igualdade $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = id_W$ é equivalente a provarmos que posto de

$$\begin{pmatrix} f_0(\mathbf{g}) & \cdots & f_m(\mathbf{g}) \\ y_0 & \cdots & y_m \end{pmatrix}$$

seja igual a 1 em S . Suponhamos que o posto é diferente de 1, logo este posto é 2 e assim existe, pelo menos, um menor 2×2 da matriz acima não nulo em S . Digamos

$$f_i(\mathbf{g})y_j - f_j(\mathbf{g})y_i \neq 0$$

tal menor. Já que, $S = k[\mathbf{y}] \simeq k[f]$, segue que

$$f_i(g_0(\mathbf{f}), \dots, g_n(\mathbf{f}))f_j - f_j(g_0(\mathbf{f}), \dots, g_n(\mathbf{f}))f_i \neq 0$$

em R . Por outro lado, aplicando a igualdade 1.4, temos que

$$f_i(g_0(\mathbf{f}), \dots, g_n(\mathbf{f}))f_j - f_j(g_0(\mathbf{f}), \dots, g_n(\mathbf{f}))f_i = 0$$

em R , absurdo. Logo, o posto em questão é igual a 1.

Portanto, $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = id_W$. ■

Finalmente enunciaremos o teorema central deste trabalho, que dá um critério de birracionalidade atrelado a um único invariante numérico, este sendo efetivamente calculável. Manteremos a notação das subseções anteriores.

Teorema 1.13 *Seja $R = k[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$ um domínio de dimensão ≥ 1 e $\mathbf{f} \in R = k[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$, um representante de uma aplicação racional $\mathfrak{F}$ definida em $V := \text{Proj}(R)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem;
- (b) $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$ (logo, igual a n , pelo Teorema 1.9).

SUPLEMENTO. *Suponha que alguma, e portanto todas, das condições acima acontecem. Seja ψ uma matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Então a inversa de $\mathfrak{F}$ é definida por qualquer vetor homogêneo, não nulo, pertencente ao núcleo de ψ sobre S , sendo S o anel de coordenadas da imagem de $\mathfrak{F}$. Em particular, podemos tomar $(n+1)$ -tuple*

$$(\Delta_0 : \dots : \Delta_n),$$

onde os Δ_i 's são n -menores, a menos de sinal, de qualquer submatriz de ψ de tamanho $n \times (n+1)$ e posto máximo no anel de coordenadas da imagem.

Prova.

(a) $\Rightarrow$ (b) Como $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem W , segue de [19, Proposition 2.1.] ou da Proposição 1.2 que a aplicação identidade de $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(I(V), I(W))$ induz um isomorfismo bigraduado $\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \mathcal{R}_S(\mathbf{g})$, ou seja, os ideais de definição destas álgebras de Rees são iguais, onde $\mathbf{g}$ é um representante de $\mathfrak{F}^{-1}$. Logo,

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{Y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}} \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(I(V), I(W))}{\mathcal{J}} \quad (1.5)$$

e do mesmo modo,

$$\mathcal{R}_S(\mathbf{g}) \simeq \frac{S[\mathbf{X}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(I(V), I(W))}{\mathcal{J}}. \quad (1.6)$$

Além disso, $\mathcal{J} = \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{g}} = \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{f}}$, onde $\sim$ indica imagem inversa em $\frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{I(V), I(W)}$.

Consideremos uma apresentação livre de $\mathbf{g}$,

$$S^q \xrightarrow{\psi^t} S^{n+1} \longrightarrow (\mathbf{g}) \longrightarrow 0,$$

onde q é um inteiro positivo. Temos que o posto de ψ em S é n .

Verificaremos que, ψ faz parte da matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, ou seja,

$$Im(\psi^t) \subset Im((\psi_{\mathbf{f}})^t),$$

onde $\psi_{\mathbf{f}}$ é uma matriz Jacobiana dual. Com efeito, sejam $P = \{P_1, \dots, P_s\} \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ um conjunto de biformas de vários bigraus $(1, q)$, com $q \geq 1$, e $\ell = \{\ell_1, \dots, \ell_r\} \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ um conjunto de biformas de bigrau $(1, 0)$ tais que suas classes em $S[\mathbf{X}]$ representam no ideal $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ as sizigias de $(\mathbf{g})$ que estão associadas a matriz ψ . Segue dos isomorfismos (1.5) e (1.6) que as classes de P pertencem ao ideal $(\mathcal{J}_{1,*})$ e $\ell \subset \mathfrak{a}_1$.

Portanto, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Fixemos uma ψ matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Seja ψ' submatriz de ψ de posto n e tamanho $n \times (n+1)$. Poremos Δ_i como os menores maximais de ψ' , sem perda de generalidade podemos supor que $\Delta_{n+1} \neq 0$ em S . Já que, Δ_i são polinômios homogêneos de mesmo grau e existe pelo menos um deles que é não nulo em S , temos que $\mathbf{g} := (\Delta_0, -\Delta_1, \dots, (-1)^n \Delta_n)$ define uma aplicação de W em $\mathbb{P}^n$. Denotaremos tal aplicação por $\mathfrak{G}$.

Veremos explicitamente a composição $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$.

Aplicando a Proposição 1.5 segue que

$$(0, \dots, \Delta_n, \dots, 0, (-1)^{n-i+1} \Delta_i)$$

pertence a $\mathcal{J}$, onde Δ_n encontra-se na posição $i = \{0, \dots, n-1\}$. Em outras palavras,

$$x_i \Delta_n + x_n (-1)^{n-i+1} \Delta_i \in \mathcal{J} \subset R[\mathbf{Y}].$$

Já que, Δ_i 's são polinômios de $R[\mathbf{y}]$, podemos considerar $\Delta_i(\mathbf{f})$ como sendo a substituição dos y_i pelos f_i .

Segue que,

$$(x_i \Delta_n + x_n (-1)^{n-i+1} \Delta_i)(\mathbf{f}) = 0$$

em $R[\mathbf{Y}]$ e assim

$$\begin{aligned} x_i \Delta_n(\mathbf{f}) &= -x_n (-1)^{n-i+1} \Delta_i(\mathbf{f}) \\ &= x_n (-1)^{n-i} \Delta_i(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

Logo, temos a igualdade

$$x_i \Delta_n(\mathbf{f}) = x_n (-1)^{n-i} \Delta_i(\mathbf{f})$$

em R .

Antes de calcularmos a composição $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ mostraremos que $\Delta_n(\mathbf{f})$ e x_n são não nulos em R . Com efeito, Δ_n pode ser visto como uma aplicação racional de W em k

e por hipótese, $\mathfrak{F}$ é dominante sobre W , logo a composição $\Delta_n \circ \mathfrak{F}$ está definida e é representada por $\Delta_n(\mathbf{f})$. Daí, $\Delta_n(\mathbf{f})$ é não nulo em R . Suponha que x_n é nulo em R , segue da igualdade

$$x_i \Delta_n(\mathbf{f}) = x_n (-1)^{n-i} \Delta_i(\mathbf{f})$$

que x_i 's são nulos em R , assim a dimensão de R é zero, absurdo. Portanto, $\Delta_n(\mathbf{f})$ e x_n são não nulos em R .

Agora iremos explicitar a composição $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}(\mathbf{x}) &= \mathfrak{G}(\mathbf{f}) \\ &= (\Delta_0(\mathbf{f}) : -\Delta_1(\mathbf{f}) : \Delta_2(\mathbf{f}) : \dots : (-1)^n \Delta_n(\mathbf{f})) \\ &= (x_n \Delta_0(\mathbf{f}) : -x_n \Delta_1(\mathbf{f}) : x_n \Delta_2(\mathbf{f}) : \dots : (-1)^n x_n \Delta_n(\mathbf{f})) \end{aligned} .$$

Se $i \in \{0, \dots, n\}$ é par, então

$$x_n \Delta_i(\mathbf{f}) = (-1)^{n-i} x_i \Delta_n(\mathbf{f}) = (-1)^n x_i \Delta_n(\mathbf{f}).$$

Caso contrário,

$$-x_n \Delta_i(\mathbf{f}) = -(-1)^{n-i} x_i \Delta_n(\mathbf{f}) = (-1)^{n+(-i+1)} x_i \Delta_n(\mathbf{f}) = (-1)^n x_i \Delta_n(\mathbf{f}).$$

Assim,

$$\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} = ((-1)^n x_0 \Delta_n(\mathbf{f}) : \dots : (-1)^n x_n \Delta_n(\mathbf{f})) = (x_0 : \dots : x_n).$$

Logo, $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ é a aplicação inclusão de V em $\mathbb{P}^n$. Pelo Lema 1.12, segue que $\mathfrak{F}$ é birracional.

Finalizada a prova da equivalência, passemos ao suplemento. Seja ψ uma matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ e $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ qualquer vetor homogêneo, não nulo, pertencente ao núcleo de ψ sobre S . Basta provarmos que $\text{rk}_S(\rho) = 1$, onde

$$\rho = \begin{pmatrix} \Delta_0 & \dots & (-1)^n \Delta_n \\ u_0 & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

Para tal, consideremos a sequência exata de S -módulos

$$S^\beta \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S^{n+1} \xrightarrow{\rho} S^2.$$

Ora, como $\text{Im}(\psi) \subset \text{Im}(\tilde{\varphi})$ e ψ tem posto máximo pela hipótese de birracionalidade, segue que $\text{rk}_S(\tilde{\varphi}) \geq n$. Logo $\text{rk}_S(\rho) \leq 1$. Mas ρ tem posto ≥ 1 por hipótese, resultando $\text{rk}_S(\rho) = 1$. ■

O exemplo a seguir, apesar de sua simplicidade, explica que no argumento do teorema não se exclui a possibilidade de uma matriz Jacobiana dual envolver entradas numéricas. Esta situação “patológica” ocorre quando a variedade de partida é degenerada, cujo impacto se reflete de maneira precisa nas relações de dependência linear entre os Δ 's.

Exemplo 1.14 Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, onde $V = \mathcal{Z}(X_0) \subset \mathbb{P}^2((X_0 : X_1 : X_2))$, dada por $(X_1 : X_2)$. Temos que,

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & -Y_0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, sendo $\mathbf{Y} = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$ as variáveis adicionais referente a Álgebra de Rees. Assim, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) = 2$. Pelo teorema acima segue que $\mathfrak{F}$ é birracional sobre a imagem $\mathbb{P}^1$ e $\mathfrak{F}^{-1}$ é dada por $(0 : Y_0 : Y_1)$.

Observação 1.15 :

(1) Este critério de birracionalidade chama a atenção para o seguinte problema: é possível calcular $\mathcal{J}_{0,*}$ e $\mathcal{J}_{1,*}$ sem precisamos obter todo o ideal de definição de $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$? A primeira parte homogênea é um problema conhecido da teoria da eliminação. Uma das técnicas mais comuns é tentar obter as equações implícitas por meio do chamado método de Sylvester onde o dado inicial são as equações de definição da álgebra simétrica de $(\mathbf{f})$ (ou seja, os bihomogêneos de bigraus $(*, 1)$). Em situações especiais, este método frequentemente dá uma ideia sobre os elementos de $\mathcal{J}_{1,*}$ - ver, por exemplo, [15, Exemplo 5.7].

(2) Notemos que o teorema não dá nenhuma informação precisa sobre o grau mínimo possível das formas dos representantes da aplicação inversa. Mesmo no caso de uma aplicação de Cremona, o grau será elusivo pois o representante dado pelos menores normalmente carregam um fator comum não-trivial. Assim, surge a questão de como calcular o grau do mdc dos menores. Muitas vezes isso pode ser computado por uma análise cuidadosa da série de Hilbert (ver, por exemplo [18, Proposition 3.1]) ou pela estrutura local (ver [18, Examples 2.4, 2.5] e também [28, Theorem 3.1]).

(3) Existe um interesse em estender a teoria e os critérios efetivos obtidos ao caso de variedades projetivas reduzidas, mas não necessariamente irredutíveis. Embora comumente descartável em geometria algébrica como uma “generalização óbvia” do caso irredutível, por passagem às componentes irredutíveis, a extensão ao caso geral mantém algumas dificuldades peculiares, tais como a própria definição de uma aplicação racional e seu comportamento funtorial, até a manutenção do análogo do critério clássico do isomorfismo dos corpos de funções. Esta etapa preliminar implica em uma cuidadosa revisão, sem a qual torna-se impossível a etapa seguinte que é a do enunciado de um critério efetivo de birracionalidade e da explicitação da inversa em caso afirmativo.

Este projeto foi contemplado em [7].

Capítulo 2

Aplicações e variações

Neste capítulo desenvolveremos algumas aplicações e outras variações em torno do tema, algumas das quais respondem questões propostas em [19], em particular aquelas que dizem respeito à característica do corpo de base.

2.1 O posto linear do ideal de base

Nesta seção o objetivo é provar algumas das questões/conjecturas enunciadas em [19, Seções 3 e 4].

Para maior comodidade, salientemos algumas noções básicas.

Um ideal $I \subset R$ de um anel Noetheriano é *perfeito* se R/I tem dimensão homológica finita sobre R e esta atinge seu mínimo, que é a profundidade de R em I .

É conhecido que, se R é anel de Cohen–Macaulay, então um ideal $I \subset R$ é perfeito se e só se R/I é Cohen–Macaulay. O exemplo mais simples – mas nem por tal o menos notável – é o de um ideal perfeito de codimensão 2, por hábito chamado de ideal de Hilbert–Burch. Um tal ideal é gerado pelos menores de ordem n de uma matriz $(n+1) \times n$. Conforme foi observado, tais menores estão no cerne das transformações de Cremona, definindo-as e, frequentemente, gerando um ideal de Hilbert–Burch.

Se R é graduado standard sobre um corpo, um ideal $I \subset R$ homogêneo gerado em um mesmo grau s admite uma apresentação

$$R(-(s+1))^\ell \oplus \sum_{j \geq 2} R(-(s+j)) \xrightarrow{\varphi} R(-s)^n \rightarrow I \rightarrow 0$$

para ℓ conveniente. A imagem de $R(-(s+1))^\ell$ por φ é a *parte linear* de φ ; dizemos que a submatriz correspondente φ_1 tem *posto máximo* se I contém elementos regulares e o posto de φ_1 é igual a $n-1$ – em cujo caso, por abuso de linguagem, diremos que I tem posto linear máximo. Obviamente, esta condição é obtida se, em particular, $\varphi_1 = \varphi$, em cujo caso I é dito ser *linearmente apresentado*.

Um ideal $I \subset R$ é dito ser de *tipo linear* se o homomorfismo $\mathcal{S}_R(I) \rightarrow \mathcal{R}_R(I)$ induzido pelas sobrejeções naturais $I^{\otimes \ell} \twoheadrightarrow I^\ell$, $\ell \geq 0$, é injetivo. Observemos que se $I \subset R = k[X] = k[X_0, \dots, X_n]$ é um ideal homogêneo de tipo linear, então todo

conjunto mínimo de geradores homogêneos de I é algebricamente independente sobre k , ou seja, a aplicação racional $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ induzida por esses geradores é dominante.

Sejam $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R$ formas de grau fixo $d \geq 1$ e denotemos por $\mathfrak{F}$ a aplicação racional $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ induzida. Uma ideia básica subjacente é a introdução de um módulo de natureza “bilinear” que desempenha um papel relevante na teoria ([19, Theorem 4.1], [3, Proposition 4.5]).

O resultado abaixo estabelece claramente este papel.

Lema 2.1 *Sejam $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset k[\mathbf{X}] = k[X_0, \dots, X_n]$ formas de grau ≥ 1 tais que $\text{rk } \varphi_1 = n$. Consideremos a única matriz ρ tal que*

$$\mathbf{Y}\varphi_1 = \mathbf{X}\rho,$$

onde $\mathbf{Y} = \{Y_0, \dots, Y_m\}$. Pondo $E := \text{coker}_{k[\mathbf{Y}]} \rho$, a aplicação identidade de $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ induz um isomorfismo bigraduado

$$\mathcal{R}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) \simeq \frac{k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}},$$

onde $S := k[\mathbf{Y}]/\mathfrak{b}$ é o anel de coordenadas homogêneas da imagem da aplicação racional definida por $\mathbf{f}$.

Prova. Primeiramente, notemos a sobrejeção $\text{coker}(\varphi_1) \twoheadrightarrow I = (\mathbf{f})$, cujo núcleo é de torção já que φ_1 tem posto n por hipótese. Disso segue um isomorfismo

$$\mathcal{R}_{k[\mathbf{X}]}(\text{coker}(\varphi_1)) \simeq \mathcal{R}_{k[\mathbf{X}]}(I). \quad (2.1)$$

Seja $\mathcal{J}$ o ideal de apresentação de $\mathcal{R}_{k[\mathbf{X}]}(I)$ sobre $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, baseado nos geradores $\mathbf{f}$. Como sabemos, $\mathfrak{b} \subset \mathcal{J}$.

Ponhamos $E' := E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S$. Como a álgebra simétrica é funtorial, temos

$$\mathcal{S}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) \simeq \mathcal{S}_{k[\mathbf{Y}]}(E)/\mathfrak{b} \mathcal{S}_{k[\mathbf{Y}]}(E) \simeq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{X} \cdot \rho)) = k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)).$$

Assim, obtemos uma sobrejeção $\mathcal{S}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) \twoheadrightarrow k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/\mathcal{J}$. Afirmamos que esta sobrejeção induz um isomorfismo

$$\mathcal{R}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) \simeq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/\mathcal{J}.$$

É conhecido que a álgebra de Rees é isomorfa à álgebra simétrica módulo sua S -torção. Denotando $\mathcal{T}$ a imagem inversa desta torção em $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, vem

$$\mathcal{R}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) \simeq k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/(\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1), \mathcal{T}).$$

Seja então $G \in \mathcal{T}$. Tem-se $F(\mathbf{Y})G \in (\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)) \subset \mathcal{J}$ para algum $F(\mathbf{Y}) \in k[\mathbf{Y}] \setminus \mathfrak{b}$. Como $\mathcal{J}$ é ideal primo e $F(\mathbf{Y}) \notin \mathcal{J}$ já que $k[\mathbf{Y}] \cap \mathcal{J} = \mathfrak{b}$, necessariamente $G \in \mathcal{J}$. Isto prova a inclusão $(\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1), \mathcal{T}) \subset \mathcal{J}$ uma vez que $(\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)) \subset \mathcal{J}$.

Reciprocamente, seja $G = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathcal{J}$. De acordo com (2.1), $\mathcal{J}$ é a imagem inversa da $k[\mathbf{X}]$ -torção de $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)$ em $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Portanto, existe $F(\mathbf{X}) \in$

$k[\mathbf{X}] \setminus I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)$ – isto é, $F(\mathbf{X}) \neq 0$ – tal que $F(\mathbf{X})G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1)$. Suponhamos que $G \notin (\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1), \mathcal{T})$. Este último ideal é primo, logo $F(\mathbf{X}) \in (\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1), \mathcal{T})$. Pela definição de $\mathcal{T}$ existe $H(\mathbf{Y}) \in k[\mathbf{Y}] \setminus \mathfrak{b}$ tal que $H(\mathbf{Y})F(\mathbf{X}) \in (\mathfrak{b}, I_1(\mathbf{Y} \cdot \varphi_1))$. Substituindo $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{f}$ daria $H(\mathbf{f})F(\mathbf{X}) = 0$, logo $F(\mathbf{X}) = 0$ uma vez que $H(\mathbf{f}) \neq 0$; uma contradição. ■

Proposição 2.2 *Seja $\mathfrak{F}: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional dada por $m+1$ formas $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ de grau fixo. Se $\text{rk } \varphi_1 = n$ (posto máximo) e a dimensão da imagem de $\mathfrak{F}$ é n , então a aplicação racional $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem. Além disso, existe um representante de $\mathfrak{F}^{-1}$ cujas formas têm grau $\leq n$.*

Prova. Pela Lema anterior, tem-se

$$\dim(\mathcal{R}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S)) = \dim(\mathcal{R}_{k[\mathbf{X}]}(\mathbf{f})) = \dim k[\mathbf{X}] + 1 = n + 2.$$

Por outro lado,

$$\dim(\mathcal{R}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S)) = \dim S + \text{rk}_S(E \otimes_{k[\mathbf{Y}]} S) = n + 1 + [(n + 1) - \text{rk}_S(\rho)].$$

Logo, $\text{rk}_S(\rho) = n$, o que implica, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) = n$. Segue do Teorema 1.13 que $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem.

Agora veremos a segunda parte da proposição. Relembrando, dada uma aplicação racional $\mathcal{H}: V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ temos que os menores máximos (com sinal) de qualquer submatriz $(m+1) \times m$ de posto m da matriz de sizigias de $\mathcal{H}$ formam um representante de $\mathcal{H}$. Como $\mathfrak{F}^{-1}$ tem posto de sizigias lineares máximo, temos que existe representante cujas formas têm grau $\leq n$. ■

Não é difícil encontrar exemplos de formas $\mathbf{f}$ que geram um ideal de apresentação linear, mas são algebricamente dependentes. Um dos mais simples tem $\mathfrak{F}: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ definida pelas 2-formas $x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3$.

Por outro lado, pode-se imaginar que a família das aplicações de Cremona com posto linear máximo – ou mesmo $\neq 0$ – é muito especial no grupo de Cremona, causando uma certa perplexidade de como estas hipóteses de natureza pre-homológica atuam na classificação no espírito da teoria dos grupos.

De qualquer maneira, existem famílias importantes de aplicações de Cremona definidas por monômios que admitem posto linear máximo – por exemplo, todas as de grau 2 e várias outras definidas por monômios livres de quadrados (ver [27]).

Pode-se perguntar, otimisticamente, se a Proposição 2.2 admite alguma forma recíproca. De fato, aplicando o Teorema 1.13, podemos provar a recíproca do resultado conhecido como a obstrução linear (ver [19, Proposition 3.5]) em qualquer característica.

Teorema 2.3 *Seja $\mathfrak{F}: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ aplicação racional cujo ideal de base é de tipo linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\mathfrak{F}$ é uma transformação de Cremona.
- (b) O ideal de base tem posto linear máximo.

SUPLEMENTO Além disso, se uma das condições tem lugar, os ideais de base da aplicação $\mathfrak{F}$ e da inversa $\mathfrak{F}^{-1}$ são gerados por formas de grau $\leq n$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sabemos que uma matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ é matriz Jacobiana, em relação a $\mathbf{X}$, de um conjunto de elementos de bigrau $(1, s)$, para algum $s \geq 1$. Da hipótese do ideal base de $\mathfrak{F}$ ser tipo linear resulta então que as coordenadas de qualquer matriz Jacobiana dual ψ são lineares. Logo, $\varphi_1^t \mathbf{Y} = \psi \mathbf{X}$. Seguindo o argumento da demonstração da Proposição 2.2 e do fato que $\mathfrak{F}$ ser uma transformação de Cremona (isto é, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) = n$, o que implica, em particular, que o posto de ψ é n), temos que φ_1 tem posto máximo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Como o ideal base de $\mathfrak{F}$ é tipo linear, então o representante de $\mathfrak{F}$ é algebricamente independente, ou seja, $\mathfrak{F}$ é dominante. Aplicando Proposição 2.2, segue (b) implica (a).

Sobre o suplemento do teorema, se uma das condições (logo, todas), tem lugar então as coordenadas de uma matriz Jacobiana dual são formas lineares. Como um dos representantes da inversa tem coordenadas que são, a menos de sinal, os menores maximais de uma submatriz da matriz Jacobiana dual de posto n e tamanho $n \times n + 1$ dividido pelo mdc destes menores, segue que o ideal base de $\mathfrak{F}^{-1}$ é um ideal gerado por formas de grau menor ou igual a n . ■

A implicação (a) $\Rightarrow$ (b) também pode ser vista em [19, Proposition 3.5].

Uma classe de aplicações de Cremona com ideal de base de tipo linear é a das monomiais de grau 2 ([27]). Uma generalização natural para o caso em que $m > n$ é obtido através da noção de ideal de tipo fibrado (cf. Proposição 2.17).

O próximo resultado estabelece afirmativamente a conjectura [19, 3.9] em característica arbitrária.

Corolário 2.4 *Sejam $\mathbf{f} \subset k[\mathbf{X}]$ $n + 1$ formas de mesmo grau gerando um ideal $I \subset k[\mathbf{X}]$ de codimensão n e formando sequência regular localmente nos primos mínimos de I . Então $\mathbf{f}$ define uma transformação de Cremona de $\mathbb{P}^n$ se, e somente se, I tem posto linear máximo.*

Prova. Por [25, Proposition 3.7], segue que I é um ideal tipo linear. Aplicando o Teorema 2.3, temos a equivalência acima. ■

Observação 2.5 No caso $n = 2$, a condição local sobre o ideal de base I é equivalente a requerer que o n -ésimo ideal de Fitting de I tenha codimensão 3. Dito de outra maneira, devem existir pelo menos três coordenadas distintas da matriz de sizigias φ de $\mathbf{f}$ contendo efetivamente termos que são potências puras de x_0, x_1, x_2 , respectivamente.

A seguir, poremos em relevo o impacto do ideal $(\mathcal{J}_{1,*})$ diretamente na questão da birracionalidade, em termos de sua codimensão.

Proposição 2.6 *Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional e $W \subset \mathbb{P}^m$, sua imagem. Então a codimensão do ideal $(\mathcal{J}_{1,*}) \subset (k[\mathbf{Y}]/I(W))[\mathbf{X}]$ é menor que ou igual ao posto Jacobiano dual de $\mathfrak{F}$.*

Prova. Ponhamos $E := \text{coker}(\psi^t)$, onde ψ é uma matriz Jacobiana dual. Segue que,

$$\mathcal{S}_S(E) \simeq \frac{S[\mathbf{X}]}{I_1(\mathbf{X} \cdot \psi^t)},$$

onde $S = k[\mathbf{Y}]/I(W)$. Como $(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}] = I_1(\mathbf{X} \cdot \psi^t)$, temos

$$\dim \mathcal{S}_S(E) \leq \dim S + n + 1 - \text{codim}(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}].$$

Por outro lado,

$$\dim \mathcal{S}_S(E) \geq \dim \mathcal{R}_S(E) = \dim S + \text{rk}(E),$$

onde $\mathcal{R}_S(E)$ designa a álgebra de Rees de E . Logo,

$$\begin{aligned} \dim S + n + 1 - \text{codim}(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}] &\geq \dim S + \text{rk}(E) \\ \Rightarrow n + 1 - \text{rk}(E) &\geq \text{codim}(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}]. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) = \text{rk}(\psi) = \text{rk}(\psi^t) \geq \text{codim}(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}]$. ■

Corolário 2.7 *Mantendo a notação anterior, se a codimensão do ideal $(\mathcal{J}_{1,*})$ em $(k[\mathbf{Y}]/I(W))[\mathbf{X}]$ é $\geq n$ então $\mathfrak{F}$ é birracional sobre W .*

Prova. Aplicando a proposição anterior, segue que $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$. Logo, $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem (Teorema 1.13). ■

Observação 2.8 Do mesmo modo podemos provar que:

$$\text{rk}(\varphi_1) \geq \text{codim}(\mathcal{J}_{1,1})S[\mathbf{X}]. \quad (2.2)$$

Além disso, temos a seguinte equivalência

$$\text{rk}(\psi) = \text{alt}(\mathcal{J}_{1,*})S[\mathbf{X}] \Leftrightarrow \dim \mathcal{S}_S(E) = \dim \mathcal{R}_S(E), \quad (2.3)$$

onde $E = \text{coker}(\psi^t)$ e ψ é uma matriz Jacobiana dual.

Contudo, podemos ter $\dim(\mathcal{J}_{1,*}) < n$, como evidencia o exemplo a seguir.

Exemplo 2.9 Seja $\mathfrak{F} = (X^4 : X^2YW : XZY^2 : Y^3Z) : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$. É possível calcular uma matriz Jacobiana dual em *Macaulay* e concluir que $\mathfrak{F}$ é aplicação de Cremona - na verdade, involutiva a menos de permutações das variáveis e coordenadas (para outro método, ver [28]). Portanto o posto Jacobiano dual é 3. Por outro lado, pode-se mostrar que $(\mathcal{J}_{1,*}) \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ tem codimensão 2, com estrutura múltipla sobre um subespaço linear de codimensão 2.

Uma questão curiosa diz respeito à estrutura do ideal $(\mathcal{J}_{1,*}) \subset (k[\mathbf{Y}]/I(W))[\mathbf{X}]$ quando este tem codimensão máxima, em cujo caso o ideal de definição da álgebra de Rees de I é um dos seus primos mínimos.

2.2 Extensão birracional de anéis

O resultado a seguir é bem conhecido no caso em que a variedade de partida é um espaço projetivo (ver, por exemplo, [26, Proposição 1.2]). O caso geral de uma subvariedade reduzida foi explicado em [7, Proposição 2.11]. Daremos uma prova de natureza diferente, lançando mão do critério de birracionalidade provado.

Proposição 2.10 *Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional definida por formas de grau d $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R$, onde $V \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva integral de dimensão positiva e $R := \frac{k[\mathbf{X}]}{I(V)}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\mathfrak{F}$ é birracional sobre a imagem;
- (b) $k[\mathbf{f}] \subset R^{(d)}$ é uma extensão birracional, onde $R^{(d)} \subset R$ denota a subálgebra de Veronese de grau d de R .

Prova.

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $\mathbf{g}$ um representante de $\mathfrak{F}^{-1}$. Logo,

$$\beta(\mathbf{x})g_i(\mathbf{f}) = \alpha(\mathbf{x})x_i \text{ para todo } i = \{0, \dots, n\}, \quad (2.4)$$

onde $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}) \in R$ são formas não-nulas. Provaremos que, todo “monômio” de grau d de R pertence ao corpo de frações $k(\mathbf{f})$ de $k[\mathbf{f}]$. Com efeito, seja $\mathbf{x}^\beta$ monômio de grau d de R . Se $\mathbf{x}^\beta = 0$, então $\mathbf{x}^\beta \in k(\mathbf{f})$. Suponha $\mathbf{x}^\beta \neq 0$. Sejam $x_i, x_j \in R$ tais que $x_j \neq 0$, segue que $\frac{x_i}{x_j}$ pertence ao corpo de frações de R . Aplicando 2.4 temos

$$\frac{x_i}{x_j} \in k(\mathbf{f}).$$

Segue

$$\frac{m}{\mathbf{x}^\beta} \in k(\mathbf{f}),$$

sendo m qualquer monômio de grau d de R . Pela definição de aplicação racional, algum $f_s \neq 0$. Ponhamos $f_s = \sum_t m_t$ como soma de termos. Então

$$\frac{m_t}{\mathbf{x}^\beta} \in k(\mathbf{f}) \Rightarrow \frac{f_s}{\mathbf{x}^\beta} \in k(\mathbf{f}) \Rightarrow \frac{\mathbf{x}^\beta}{f_s} \in k(\mathbf{f}) \Rightarrow \mathbf{x}^\beta \in k(\mathbf{f}).$$

Portanto, $k[\mathbf{f}] \subset k[\mathbf{x}_d]$ é uma extensão birracional.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por hipótese, $k[\mathbf{f}] \subset k[\mathbf{x}_d]$ é uma extensão birracional. Daí,

$$x_0^{d-1}x_i \in k(\mathbf{f}),$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Assim,

$$x_0^{d-1}x_i = \frac{p_i(\mathbf{f})}{q_i(\mathbf{f})} \Rightarrow x_0^{d-1}x_i q_i(\mathbf{f}) = p_i(\mathbf{f}) \text{ em } R,$$

sendo $p_i, q_i \in k[\mathbf{Y}]$ homogêneos e $q_i(\mathbf{f}) \neq 0$ em R . Sem perda de generalidade podemos supor que $x_0 \neq 0$ e assim $p_0(\mathbf{f}) \neq 0$. Temos que,

$$x_0 \left(\frac{p_i(\mathbf{f})}{q_i(\mathbf{f})} \right) - x_i \left(\frac{p_0(\mathbf{f})}{q_0(\mathbf{f})} \right) = 0,$$

no corpo de frações de R . Segue que,

$$x_0 p_i(\mathbf{f}) q_0(\mathbf{f}) - x_i p_0(\mathbf{f}) q_i(\mathbf{f}) = 0,$$

em R . Portanto

$$H_i(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = x_0 p_i(\mathbf{Y}) q_0(\mathbf{Y}) - x_i p_0(\mathbf{Y}) q_i(\mathbf{Y}),$$

$i \in \{1, \dots, n\}$. Temos que, $H_i(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ pertence ao ideal de definição de $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$.

Se $X_0, \dots, X_n \notin I(V)$, então o posto de

$$\psi' = \begin{pmatrix} -p_1(\mathbf{Y})q_0(\mathbf{Y}) & p_0(\mathbf{Y})q_1(\mathbf{Y}) & \dots & 0 \\ -p_n(\mathbf{Y})q_0(\mathbf{Y}) & 0 & \dots & p_0(\mathbf{Y})q_n(\mathbf{Y}) \end{pmatrix}$$

em S é n . Já que, ψ' faz parte da matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, segue que $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$.

Caso contrário, podemos supor que $X_0, \dots, X_t \notin I(V)$ e $X_{t+1}, \dots, X_n \in I(V)$. Consideremos

$$\psi' = \begin{pmatrix} -p_1(\mathbf{Y})q_0(\mathbf{Y}) & p_0(\mathbf{Y})q_1(\mathbf{Y}) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_t(\mathbf{Y})q_0(\mathbf{Y}) & 0 & \dots & p_0(\mathbf{Y})q_t(\mathbf{Y}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

matriz $n \times (n+1)$ de posto n . Do mesmo modo, ψ' faz parte da matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ e assim, $\text{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$. ■

2.3 Transformações monomiais de Cremona com ideal de base saturado

Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ aplicação racional dominante, onde $I = (\mathbf{f}) = (f_0, \dots, f_n)$ é o ideal base de $\mathfrak{F}$, que suporemos de codimensão ≥ 2 .

Se $\mathfrak{F}$ é aplicação de Cremona, põe-se o problema natural de saber quando tem-se $\text{prof}(R/I) > 0$, isto é, quando I é saturado. No caso em que $n = 2$, pergunta-se, equivalentemente, se R/I é de Cohen–Macaulay ou, ainda, se um conjunto de geradores $\mathbf{f}$ são os menores máximos de uma matriz 2×3 . Neste contexto, o problema vem sendo examinado em [20] para aplicações de Cremona gerais de grau pequeno. O problema, nesta generalidade, admite ilações bastante inusitadas.

Nesta seção responderemos afirmativamente a esta questão para aplicações de Cremona monomiais de $\mathbb{P}^2$ de grau arbitrário. O argumento faz uso da classificação preliminar dos tipos de aplicações de Cremona monomiais no plano conforme obtidos em [28].

Proposição 2.11 *Se $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ é aplicação de Cremona monomial de grau $d \geq 2$, então I é ideal saturado.*

Prova. Para provar que I é saturado obteremos diretamente a decomposição primária de I . Por conveniência, vamos usar x, y, z ao invés de x_0, x_1, x_2 . De acordo com [28], as aplicações de Cremona monomiais planas admitem ideal de base de um dos seguintes tipos:

- (1) $(xy : xz : yz)$;
- (2) $(x^d : x^{d-1}y : y^{d-1}z)$, onde $d \geq 2$;
- (3) $(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3} : x^{\beta_1}y^{\beta_2} : z^d)$, onde $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = d \geq 2$.

Explicitemos as decomposições primárias das duas primeiras famílias:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (xy, xz, yz) &= (x, xz, yz) \cap (y, xz, yz) \\
 &= (x, yz) \cap (y, xz) \\
 &= (x, y) \cap (x, z) \cap (y, x) \cap (y, z) \\
 &= (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) \\
 (2) \quad (x^d, x^{d-1}y, y^{d-1}z) &= (x^d, x^{d-1}, y^{d-1}z) \cap (x^d, y, y^{d-1}z) \\
 &= (x^{d-1}, y^{d-1}z) \cap (x^d, y) \\
 &= (x^{d-1}, y^{d-1}) \cap (x^{d-1}, z) \cap (x^d, y)
 \end{aligned}$$

Logo, nos casos (1) e (2), temos que $\text{prof}(R/I) > 0$. Antes de explicitarmos a decomposição do caso (3) faremos algumas considerações. Podemos supor que $\alpha_1 < \beta_1$ e $\alpha_3 \neq 0$. Analisando as possíveis matrizes Jacobianas duais de $\mathfrak{F}$, temos que $\beta_2 \geq \alpha_2$. Com efeito, existe um polinômio bihomogêneo não nulo da seguinte forma:

$$p(x, y, z, \mathbf{u}) = x u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} u_3^{\lambda_3} - z u_1^{\rho_1} u_2^{\rho_2} u_3^{\rho_3} \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}},$$

onde $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ são as variáveis adicionais da álgebra de Rees. Se p não depende de u_3 , segue que

$$p = x u_1^{\lambda_1} - z u_2^{\rho_2} = x u_1 - z u_2.$$

Assim, $\alpha_2 = \beta_2$. No caso em que p depende de u_3 , temos duas possibilidades:

- (a) $p = x u_2^{\lambda_2} u_3^{\lambda_3} - z u_1^{\rho_1}$, sendo $\lambda_2 + \lambda_3 = \rho_1 > 0$;
- (b) $p = x u_1^{\lambda_1} - z u_2^{\rho_2} u_3^{\rho_3}$, sendo $\lambda_1 = \rho_2 + \rho_3 > 0$;

Do item (a), segue que $x(x^{\beta_1}y^{\beta_2})^{\lambda_2}(z^d)^{\lambda_3} = z(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3})^{\rho_1}$. Consequentemente,

$$\beta_2\lambda_2 = \alpha_2\rho_1 \Rightarrow \beta_2 = \frac{\rho_1}{\lambda_2}\alpha_2 > \alpha_2.$$

O item (b) é análogo.

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} (x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}, x^{\beta_1}y^{\beta_2}, z^d) &= (x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}, x^{\beta_1}, z^d) \cap (x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}, y^{\beta_2}, z^d) \\ &= (x^{\alpha_1}, x^{\beta_1}, z^d) \cap (y^{\alpha_2}, x^{\beta_1}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, x^{\beta_1}, z^d) \\ &\quad (x^{\alpha_1}, y^{\beta_2}, z^d) \cap (y^{\alpha_2}, y^{\beta_2}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, y^{\beta_2}, z^d) \\ &= (x^{\alpha_1}, z^d) \cap (y^{\alpha_2}, x^{\beta_1}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, x^{\beta_1}) \\ &\quad (x^{\alpha_1}, y^{\beta_2}, z^d) \cap (y^{\alpha_2}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, y^{\beta_2}) \\ &= (x^{\alpha_1}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, x^{\beta_1}) \cap (y^{\alpha_2}, z^d) \cap (z^{\alpha_3}, y^{\beta_2}). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Classificar transformações de Cremona cujo ideal de base é Cohen–Macaulay é um projeto atrativo. O exemplo a seguir ilustra que uma aplicação de Cremona $\mathfrak{F}$ pode admitir ideal de base Cohen–Macaulay de codimensão 2 com posto linear máximo, mas não linearmente apresentado. O exemplo escolhido é de uma aplicação de grau 4 (ver [17, Theorem 1.8] para uma discussão deste curioso problema).

Exemplo 2.12 *Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ definida pelos menores de ordem 3 da matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & Y_1 & 0 & -Y_2 \\ 0 & Y_0 & -Y_1 & 0 \\ Y_0^2 & 0 & 0 & -Y_1Y_3 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que a aplicação racional definida por $\{X_1X_2X_3, X_1^2X_3, X_1^3, X_0X_2^2\}$ é inversa de $\mathfrak{F}$.

No exemplo acima o ideal de base da inversa não é de Cohen–Macaulay. Isto nos leva à seguinte:

Questão 2.13 Como se classificam as aplicações de Cremona $\mathfrak{F}$ de $\mathbb{P}^3$ tais que os ideais de base de ambas $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{-1}$ sejam perfeitos de codimensão 2? Em particular, quais as que admitem ambos os ideais de posto linear máximo?

2.4 Aplicação birracional monomial com inversa definida por monômios

É conhecido que a inversa de uma aplicação de Cremona definida por monômios também é definida por monômios ([27], [28]). Este resultado pode ser generalizado ao caso de uma aplicação birracional definida sobre uma subvariedade de $\mathbb{P}^n$ cujo ideal homogêneo é gerado por binômios.

Proposição 2.14 *Seja $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R = k[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$ um representante de uma aplicação birracional $\mathfrak{F}$ de $V := \text{Proj}(R)$ sobre a imagem, com $\dim R \geq 1$. Se $\mathbf{f}$ são formas monomiais e $\mathfrak{a}$ é um ideal binomial, então $\mathfrak{F}^{-1}$ possui um representante definido por monômios.*

Prova. É conhecido que $\mathcal{J}_{\mathbf{f}} \subset R[\mathbf{Y}]$ é um ideal binomial (ver [8, Corollary 1.9]).

Fixemos um representante $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_n\} \subset S$ de $\mathfrak{F}^{-1}$, onde $S = k[\mathbf{Y}]/\mathfrak{b}$ é o anel de coordenadas da imagem de $\mathfrak{F}$.

Se $\mathbf{g}$ é dado por monômios, então temos o que queríamos.

Caso contrário, podemos supor sem perda de generalidade que

$$g_0 = \sum_{i=1}^t k_i m_i,$$

sendo $m_i \in S$ monômios distintos e $k_i \in k$ com $t > 1$, além disso g_0 não admite decomposição acima com menos de t monômios. Temos que

$$H_i(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = g_0(\mathbf{Y})x_i - g_i(\mathbf{Y})x_0 \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}},$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Já que $X_0 \notin \mathfrak{a}$, podemos organizar as outras variáveis $\mathbf{X}$ do seguinte modo: existe um $s \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \notin \mathfrak{a}$, para todo $i \leq s$, e $X_i \in \mathfrak{a}$, para todo $i > s$ (no caso $s < n$). Assim, $g_i(\mathbf{y}) \neq 0$, para todo $i = 0, \dots, s$.

Fixemos $j \in \{1, \dots, s\}$. Aplicando [8, Corollary 1.9] ao polinômio $H_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ pertencente ao ideal binomial $(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}})$, onde $\sim$ indica imagem inversa em $k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, segue que existe pelo menos uma das formas abaixo pertencente a $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$:

- $M_0(\mathbf{Y})x_i - M_i(\mathbf{Y})x_0$, onde M_0 e M_i são termos de g_0 e g_i , respectivamente;
- $M_0(\mathbf{Y})x_i - \widetilde{M}_0(\mathbf{Y})x_i$, onde M_0 e $\widetilde{M}_0$ são termos de g_0 .

Se $M_0(\mathbf{Y})x_i - \widetilde{M}_0(\mathbf{Y})x_i \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$, então $M_0(\mathbf{Y}) - \widetilde{M}_0(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{b}$. Assim, g_0 pode ser escrito com $t - 1$ termos, absurdo. Logo, $M_0(\mathbf{Y})x_i - M_i(\mathbf{Y})x_0 \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$.

Consideremos a matriz

$$\psi' = \begin{pmatrix} -M_1(\mathbf{y}) & M_0(\mathbf{y}) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_s(\mathbf{y}) & 0 & \dots & M_0(\mathbf{y}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

de tamanho $n \times (n + 1)$. Temos que $\text{rk}_S(\psi') = n$. Além disso, os menores maximais de ψ' são monômios. Já que, ψ' pode ser usada como submatriz de uma matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, segue que $\mathfrak{F}^{-1}$ possui um representante definido por monômios. ■

O resultado acima deixa de valer se excluirmos a hipótese de $\mathfrak{a}$ ser um ideal binomial.

Exemplo 2.15 Seja $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ aplicação racional dada por $\mathbf{f} = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3\}$, onde $I(V) = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_0^2)$. É possível verificar que $\mathfrak{F}$ é birracional sobre $\mathbb{P}^2$, com inversa $\mathfrak{F}^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow V$ dada por

$$\mathbf{g} = (-y_0y_1^2 - y_0y_1y_2 : y_0^2y_1 : -y_1^3 - y_1^2y_2 : y_0^2y_2).$$

Já que, a variedade de partida de $\mathfrak{F}^{-1}$ é $\mathbb{P}^2$, temos que os representantes de $\mathfrak{F}^{-1}$ são múltiplos de $\mathbf{g}$. Logo, $\mathfrak{F}^{-1}$ não admite representante monomial.

2.5 Ideais de tipo fibrado

Definição 2.16 Dizemos que um ideal $I \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$ é ideal *tipo fibrado* se o ideal $\mathcal{J}$ de definição de sua álgebra de Rees satisfaz a condição

$$\left(\bigoplus_{r,s \geq 1} \mathcal{J}_{(r,s)} \right) \subset \left(\bigoplus_{r \geq 1} \mathcal{J}_{(r,1)} \right),$$

i.e., se $\mathcal{J}$ é gerado pelas formas lineares que definem a álgebra simétrica de I e, adicionalmente, pelas k -relações polinômiais dos geradores de I .

Trata-se de um problema aberto, em geral, determinar condições sobre I que impliquem ser de tipo fibrado. Para classes especiais de ideais este problema tem solução simples. Consideremos ideais gerados por monômios de grau 2 no anel de polinômios $k[X_1, \dots, X_n]$. O resultado em questão é conhecido no caso livre de quadrados (ver [30, Theorem 8.2.1]), O caso geral é citado em [13, Theorem 3.2] sem demonstração.

Por comodidade e completude, fornecemos uma prova deste fato. Nosso argumento é independente da fonte acima.

Proposição 2.17 *Seja $I \subset R = k[X_1, \dots, X_n]$ ser um ideal gerado minimamente por monômios de grau 2. Então I é ideal de tipo fibrado.*

Prova. Seja $I = (f_1, \dots, f_q)$, onde f_j é monômio. É bem conhecido que os geradores de $\mathcal{J} \subset R[Y_1, \dots, Y_q]$ são do tipo

$$\mathbb{X}^\alpha \mathbb{Y}^\beta - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'},$$

onde todas as letras boldfaced denota monômios sem fator comum entre as duas partes. Além disso, devidos aos f_j 's terem o mesmo grau, temos que $|\alpha| = |\alpha'|$ e $|\beta| = |\beta'|$.

Nós assumimos que $|\alpha| > 0$.

Provaremos usando indução sobre $|\beta|$. Se $|\beta| = 1$, segue que a forma do gerador $\mathbb{X}^\alpha \mathbb{Y}^\beta - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'}$ pertence ao ideal de definição da álgebra simétrica de I . Caso $|\beta| > 1$. Seja X_i um divisor de $\mathbb{X}^\alpha$, temos que X_i não divide $\mathbb{X}^{\alpha'}$, assim existe Y_j divisor de $\mathbb{Y}^{\beta'}$ tal que $f_j = X_i X_s$, além disso $\mathbb{Y}^{\beta'} = Y_j \mathbb{Y}^{\beta'_1}$.

Suponhamos que X_s divide $\mathbb{X}^\alpha$, ou seja, f_j divide $\mathbb{X}^\alpha$. Seja Y_t um divisor arbitrário de $\mathbb{Y}^\beta$, daí $\mathbb{X}^\alpha \mathbb{Y}^\beta = f_j Y_t \mathbb{X}^{\alpha_1} \mathbb{Y}^{\beta_1}$. Consideremos a relação de Koszul $f_j Y_t - f_t Y_j$, temos que

$$\mathbb{X}^\alpha \mathbb{Y}^\beta - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'} = \mathbb{X}^{\alpha_1} \mathbb{Y}^{\beta_1} (f_j Y_t - f_t Y_j) + Y_j (f_t \mathbb{X}^{\alpha_1} \mathbb{Y}^{\beta_1} - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'_1}).$$

Notemos que, $f_t \mathbb{X}^{\alpha_1} \mathbb{Y}^{\beta_1} - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'_1}$ pertence a $\mathcal{J}$ e como $|\beta_1| = |\beta'_1| < |\beta|$, segue que $f_t \mathbb{X}^{\alpha_1} \mathbb{Y}^{\beta_1} - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'_1}$ pertence $\mathcal{J}_{*,1}$ e assim $\mathbb{X}^\alpha \mathbb{Y}^\beta - \mathbb{X}^{\alpha'} \mathbb{Y}^{\beta'}$ pertence a $\mathcal{J}_{*,1}$.

Agora precisaremos verificar o caso em que X_s não divide $\mathbb{X}^\alpha$. Temos que, existe um Y_t divisor de $\mathbb{Y}^\beta$ tal que $f_t = X_s X_u$. Considerando a relação de Koszul $X_i Y_t - X_u Y_j$ e seguindo o raciocínio do caso anterior obtemos o resultado desejado. ■

Corolário 2.18 *Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ aplicação monomial dominante de grau 2. Então $\mathfrak{F}$ é aplicação de Cremona se, somente se, o ideal de base de $\mathfrak{F}$ tem posto linear máximo. Neste caso, a inversa de $\mathfrak{F}$ tem grau no máximo n .*

Além disso, para todo n existe uma transformação de Cremona monomial de grau 2 tal que grau da inversa é n (ver [4]).

O argumento usa fortemente o fato das formas serem quadráticas. Existem exemplos de ideais gerados por cúbicas tal que o ideal não é de tipo fibrado (ver [30, Example 8.2.2]). Além disso, a hipótese do ideal ser monomial na Proposição 2.17 é necessária.

Exemplo 2.19 *Seja $I = (X_3^2 - X_1 X_3, -X_1 X_2, X_2^2, X_1^2 + X_2 X_3) \subset k[X_1, X_2, X_3]$. Temos que I não é ideal de tipo fibrado.*

Contudo existe uma evidência computacional para a seguinte questão:

Questão 2.20 Se $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\} \subset k[\mathbf{X}]$ são formas quadráticas, então $I = (\mathbf{f})$ é ideal de tipo fibrado?

Bibliografia

- [1] M. Alberich-Carramiñana, *Geometry of the Plane Cremona Maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, 2002, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg.
- [2] D. Bayer and M. Stillman, *Macaulay: a computer algebra system for algebraic geometry*, Macaulay version 3.0 1994 (Macaulay for Windows by Bernd Johannes Wuebben, 1996).
- [3] C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis, Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian, *Advances in Math.*, **218** (2008) 1759–1805.
- [4] B. Costa and A. Simis, Cremona maps defined by monomials, arXiv:1101.2413v1 [math.AC] 12 Jan 2011.
- [5] L. Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, *Bologna Mem.*, **2** (1863), 621–630 e **5** (1865), 3–35.
- [6] I. V. Dolgachev, Polar Cremona transformations, *Mich. Math. J.*, **48** (2000), 191–202.
- [7] A. V. Doria, S. H. Hassanzadeh and A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, arXiv:1101.0197v1 [math.AC] 31 Dec 2010.
- [8] D. Eisenbud, B. Sturmfels, Binomial Ideals, *Duke Math. J.*, **84** (1996), 1–45.
- [9] S. Fitchett. Maps of linear systems on blow ups of the projective plane, *J. Pure Appl. Algebra* **156** (2001), 1–14.
- [10] B. Harbourne, On Nagata’s conjecture, *J. Algebra* **236** (2001), 692–702.
- [11] J. Harris, *Algebraic Geometry - A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, **133** Springer-Verlag, 1995.
- [12] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [13] J. Herzog, T. Hibi and M. Vladoiu, Ideals of fiber type and polymatroids, *Osaka J. Math.* **42** (2005), 807–829.
- [14] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, Koszul homology and blowing-up rings, in *Commutative Algebra* (S. Greco and G. Valla, eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Math. **84**, Marcel-Dekker, New York, 1983, 79–169.

- [15] J. Hong, A. Simis and W. V. Vasconcelos, The equations of almost complete intersections, arXiv:0906.1591v1 [math.AC] 8 Jun 2009.
- [16] K. Hulek, S. Katz, F.-O. Schreyer, Cremona transformations and syzygies, *Math. Z.* **209** (1992), 419–443.
- [17] I. Pan, F. Russo, Cremona transformations and special double structures, *Manuscripta Math.* **177** (2005), 491 - 510.
- [18] F. Russo and A. Simis, On birational maps and Jacobian matrices, *Compositio Math.* **126** (2001), 335–358.
- [19] A. Simis, Cremona transformations and some related algebras, *J. Algebra* **280** (2004), 162–179.
- [20] A. Simis and N. A. Partner, Plane Cremona maps and the depth of the base ring, *em andamento*.
- [21] A. Simis, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, Codimension, multiplicity and integral extensions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **130**, (2001), 237–257.
- [22] A. Simis, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, Rees algebras of modules, *Proc. London Math. Soc.*, **87** (2003), 610–646.
- [23] A. Simis, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, Jacobian dual fibrations, *Amer. J. Math.* **115** (1993), 47–75.
- [24] A. Simis and W. V. Vasconcelos, On the dimension and Integrality of Symmetric Algebras, *Math. Zeitschrift* **177** (1981) 341–358.
- [25] A. Simis and W. V. Vasconcelos, The syzygies of the conormal module, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 203–224.
- [26] A. Simis and R. H. Villarreal, Constraints for the normality of monomial subrings and birationality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2043–2048.
- [27] A. Simis and R. Villarreal, Linear syzygies and birational combinatorics, *Results Math.* **48** (2005), 326–343.
- [28] A. Simis and R. Villarreal, Combinatorics of monomial Cremona maps, arXiv:0904.4065v1 [math.AG].
- [29] W. V. Vasconcelos, *Arithmetic of Blowup Algebras*. London Math. Soc., Lecture Notes Series **195**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [30] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238**, Marcel Dekker, New Work, 2001.