Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Elementos Pertencentes a Tríade em Matróide 3-conexos

por

Antonio José Ferreira Gomes Junior

sob orientação do

Prof. Dr. Manoel Lemos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE

Fevereiro/2009

Gomes Junior, Antonio José Ferreira
Elementos pertencentes a tríade em matróide 3-conexos / Antonio José Ferreira Gomes Junior. - Recife: O Autor, 2009.
72 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Matróide. 2. Combinatória. 3. Grafos. I. Título.

005.6 CDD (22. ed.) MEI2010 – 0153

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________________

Manoel José Machado Soares Lemos, UFPE
Orientador

____

Sóstenes Luiz Soares Lins, UFPE

____

Silvio Barros de Melo, UFPE

ELEMENTOS PERTENCENTES A TRÍADE EM MATRÓIDE 3-CONEXOS

Por

Antonio José Ferreira Gomes Júnior

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2009

Dedicatória

A Cecília, que é o motivo principal de eu continuar crescendo na matemática e na vida.

Agradecimentos

Primeiramente, às três mulheres da minha vida: Cecília (minha filha), Dona Sonia (minha mãe) e Claudinha (meu amor - que me ajudou muito na digitação).

Aos familiares em geral, dando destaque a tio Jorge (que não é nem da família) e a minha vó Dona Maria das Dores que foi responsável de forma muito influente na minha educação básica (in memoriam).

Aos amigos das antigas: Pig Face, Ricardo, Mancha e Juni, tio Dudu, xorão e dona dindinha, Gilbertinho, o Cão, Davi, Daniel (filho de Sete), o Lord, Gaúcho, Gilberto (gordão), Paulinho das Candongas, o véi Cariele, Paulinho, Daniel, Dona Judy e Bruno, Deloah, Leo e Davis Pires.

Aos amigos da universidade: em especial, ao grande mestre Gondan (Rodrigo Gondim), que muito me ajudou durante a vida acadêmica e fora dela, aos grandes netos (Raphael e Eudes - que são desde minino), o mulambo (nosso piloto), Lito, Hugo, Gigante, Renato Gabarito, Éder, vovô (Alison - nosso grande representante), Giovana, o pirraia (Tiago) e a pirraia (Karla), Jesus (João Paulo), Fábio (Dr. e brother do metal), Waguinho, Zaqueu, Marcelo, Bruno e Luís Bula (amigos da escolinha pré-exame).

Aos professores: Manoel Lemos (meu orientador), Sóstenes Lins (grande cientista e amante nato da matemática), Antonio Carlos (Carlinho - grande amigo dos alunos), Sérgio Santa Cruz (com toda a sua didática e categoria), Hildeberto Cabral (com toda a sua elegância), Francisco Brito (grande geometra e profundo entendedor de latex), Cleide Martins, Pablo Braz, aos membros da banca Aron Simis, Sílvio Melo e Cláudio Cristino pela atenção dada a minha dissertação e todos que foram responsáveis por minha formação acadêmica.

Aos amigos do mercado: Paulinho Tchatchatcha, todos da banda Elementos (em especial, a Sandro Baia e Brodinho), Erickson Luna (in memoriam), Joca, Bebê, Leleu,

Gomes, dentinho, Dudu Trick-trick, Braulio, professor capitalista, João e o pé de feijão, Carmelo (o rouxinol da boa vista), Maneco e Olívia, Telma, Mércia, Tati, Osman, Freak, Márcia, Neném (meu personal trainer), Paulinho mazela, o monstro, Hugo doido, Valmir Jordão (Coca para os ricos, cola para os pobres, coca-cola, é isso aí), Dr. Josemilson, Dr. Boy, Guaiamum, Felipe, Augusto Pinochet, Banda Jerivá (em especial, a Brôa e ao pequeno Erick - que são das antigas), Tonico, Helcio e Coqueiro.

Epígrafo

Queira!
Basta ser sincero
e desejar profundo.
Você será capaz
de sacudir o mundo.
Vai!
Tente outra vez!

Tente Outra Vez[Raul Seixas / Marcelo Motta / Paulo Coelho]

Resumo

Nesta dissertação provaremos uma conjectura proposta por Leo : uma matróide M minimalmente 3-conexa suficientemente grande tem pelo menos $\frac{5|E(M)|+30}{9}$ dos seus elementos pertencentes a alguma tríade. Também é fornecida uma cota para o número de elementos pertencentes a tríades em matróides 3-conexas com poucos elementos removíveis. Ambas as cotas são atingidas e são construidas famílias infinitas de matróides que atingem tais cotas. É feita ainda uma nova demonstração de resultados obtidos por Lemos e Leo sobre tríades que intersectam circuitos com no máximo um elemento removível em matróides 3-conexas.

Palavras-chave: Matróide, Matróide 3-conexa, Tríade.

Abstract

In this dissertation we prove a conjecture proposed by Leo: a minimal 3-connected matroids M enough large has at least $\frac{5|E(M)|+30}{9}$ of its elements belonging to some triad. Also is provided a bound for the number of elements belonging triads in 3-connected matroids with few elements removable. Both bounds are reached and are built infinite families of matroids reaching such bounds. It still made a new proof of results obtained by Lemos and Leo about triads that intersect circuit with at most one removable element in 3-connected matroids.

Keywords: Matroids, 3-connected Matroids, Triad.

Conteúdo

0.1 Introdução

Nesta dissertação, apresentaremos alguns resultados acerca de matróides 3-conexas. Para isso, definiremos matróides, independentes, circuitos, dualidade, entre outros conceitos através da função posto, os quais serão feitos no capítulo 1. Afim de deixar o trabalho auto-suficiente. A motivação para este trabalho se deu inicialmente por Dirac[1], Halim[2] e Mader[8], que mostraram que um grafo G minimalmente k-conexo tem, pelo menos,

$$\frac{(k-1)|V(G)|+2k}{2k-1} \tag{1}$$

vértices de grau k para $k = 2$, $k = 3$ e $k \geq 4$ respectivamente. As cotas obtidas por Dirac e Halim são de fato atingidas. O resultado de Mader, para um k genérico, está muito perto de ser o melhor possível. A idéia central da prova destes teoremas é a seguinte: um circuito de um grafo minimalmente k-conexo tem pelo menos um vértice de grau k. Este resultado é muito importante e vem sendo extendido de várias formas. Ried e Wu provaram análogos desta cota para arestas. Eles obtiveram uma cota inferior para o número de arestas que encontram um vértice de grau k em função do número total de arestas em um grafo minimalmente k-conexo, tal cota é atingida quando $k = 2$ ou $k = 3$.

Murty[10] e Oxley[11] obtiveram, respectivamente, cotas similares para matróides minimalmente 2- e 3-conexas. Novamente, o passo principal da demonstração destas cotas é que um circuito em uma matróide minimalmente k-conexa, $k = 2$ ou $k = 3$, deve intersectar um cocircuito com k elementos. No decorrer da dissertação, daremos uma demonstração de duas extensões deste último resultado que são citadas no capítulo 6. Resultados similares a estes não são conhecidos para matróides k-conexas com $k \geq 4$. Ried e Wu[13] deram uma cota inferior precisa para o número de elementos que encontram algum cocircuito de tamanho 2 numa matróide minimalmente 2-conexa. Por outro lado, para matróides minimalmente 3-conexas, Ried e Wu enunciaram a seguinte conjectura proposta por Leo:

Conjectura: Seja M uma matróide minimalmente 3-conexa com pelo menos 8 elementos. Então o número de elementos que intersectam um cocircuito de tamanho 3 é pelo menos

$$\frac{5|E(M)|+30}{9}.$$

A demosntração dessa conjectura pode ser encontrada no capítulo 4 deste trabalho. Esta conjectura foi originalmente demonstrada por Lemos. Daremos ainda um exemplo de uma família infinita de matróides minimalmente 3-conexas que atingem a cota da conjectura, o qual é feito no capítulo 4. Para tal, precisamos de um lema sobre 3-separações provado no capítulo 2.

Para uma matróide 3-conexa M, definiremos o conjunto removível de elementos de M como

$R_0(M) = \{e \in E(M) : M\backslash e \text{ é 3-conexa}\}$.

Note que uma matróide M é minimalmente 3-conexa se, e somente se, $R_0(M) = \varnothing$. Uma questão a ser levantada é a seguinte: o que acontece com o número de elementos pertencentes à tríades de uma matróide 3-conexa M tal que $|R_0(M)|$ é pequeno? Essa resposta será dada no teorema a seguir cuja demonstração será feita no capítulo 5:

Teorema 0.1.1. *Seja M uma matróide 3-conexa com pelo menos 5 elementos. Então, o número de elementos que intersectam algum cocircuito de tamanho 3 é pelo menos*

$$\frac{|E(M)|+10}{3} - |R_0(M)|.$$

Observe que a conjectura proposta por Leo não é uma consequência deste teorema. No capítulo 5, descreveremos uma família infinita de matróides que atingem a cota deste teorema. E, para finalizar, no capítulo 6 usaremos a decomposição definida no capítulo 3 para demosntrar os principais resultados de Lemos[3] e Leo[7].

Capítulo 1

Matróides: Definições e Conceitos Básicos

1.1 Matróides

Por um motivo de comodidade, vamos definir matróide através da sua função posto r. Para um conjunto finito E, dizemos que $M = (E, r)$ é uma matróide sobre E, se a função $r : 2^E \to Z$ satisfaz:

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$, para todo $X \subseteq E$;

(R2) $r(X) \leq r(Y)$, para todo $X \subseteq Y \subseteq E$, isto é, r é crescente;

(R3) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(Y \cap X)$, para todo $X, Y \subseteq E$. Esta última propriedade é chamada submodularidade.

Diremos que E é o conjunto dos elementos de uma matróide M e o denotamos por $E(M)$. Dizemos que $X \subseteq E(M)$ é um independente de M se $r(X) = |X|$, e se X é independente de M tal que $r(X)$ é máximo , X é chamado de base de M. Se

$X \subseteq E(M)$ é tal que $r(X) < |X|$, dizemos que X é dependente de M. E se X é tal que $r(X) = |X| - 1$ e para todo $e \in X$, $r(X - e) = r(X)$, dizemos que X é um circuito de M. Um circuito de tamanho um é chamado de laço.

Veremos agora duas propriedades comumente usadas sobre independentes e circuitos:
(I) Se I é independente de M, então para todo $J \subseteq I$ temos que J é independente de M.

Usando (R3) para $I - J$ e J, temos $r(\varnothing) + r(I) \leq r(I - J) + r(J)$. Logo por (R2), segue

$$r(I) = |I| \leq r(I - J) + r(J) \leq |I - J| + |J| = |I|.$$

Então $r(J) = |J|$ e $r(I - J) = |I - J|$. Portanto, J e $I - J$ são independentes de M.

Desta mesma prova, nota-se que ao se retirar ou adicionar um elemento à um conjunto, tem-se que, respectivamente, o posto deste conjunto diminui ou aumenta de no máximo 1.
(C) Não existe um circuito propriamente contido em outro.

Se C é um circuito, temos que $r(C - e) = r(C) = |C| - 1 = |C - e|$, para todo $e \in C$. Logo, todo subconjunto próprio de um circuito é um independente.

Existem mais outras propriedades básicas que não serão utilizadas neste trabalho, portanto, iremos omiti-las.

1.2 Fechados

Seja M uma matróide. Para $X \subseteq E(M)$, seja $\mathcal{F}_X = \{Y \subseteq E(M) : X \subseteq Y$ e $r(X) = r(Y)\}$. A união dos elementos de $\mathcal{F}_X$ é chamada fecho de X em M e denotada por $cl_M(X)$, isto é,

$$cl_M(X) = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}_X} Y.$$

Agora vamos ver algumas propriedades básicas do fecho de X.

Lema 1.2.1. *Seja M uma matróide. Se $X \subseteq E(M)$, então:*

(i) $X \subseteq cl_M(X)$.

(ii) $r(X) = r(cl_M(X))$.

(iii) $cl_M(Y) \subseteq cl_M(X)$, *quando* $Y \subseteq X$.

(iv) $cl_M(cl_M(X)) = cl_M(X)$.

Demonstração. Note que *(i)* vale, pois $X \in \mathcal{F}_X$. Para mostrar *(ii)*, basta que $\mathcal{F}_X$ seja fechado com respeito à união, e assim, $cl_M(X) \in \mathcal{F}_X$.
Suponha $Z, W \in \mathcal{F}_X$. Por submodularidade, temos:

$$2r(X) = r(Z) + r(W) \geq r(Z \cup W) + r(Z \cap W). \tag{1.1}$$

Como $X \subseteq Z \cap W$ e por (R2), temos que

$$r(X) \leq r(Z \cap W) \leq r(Z \cup W). \tag{1.2}$$

Desta forma, as desigualdades (1.1) e (1.2) têm que ser igualdades. Daí, $Z \cup W \in \mathcal{F}_X$. Então $cl_M(X) \in \mathcal{F}_X$ e *(ii)* está provado. Para mostrar *(iii)*, basta que para todo $Z \in \mathcal{F}_Y$ tenhamos $Z \cup X \in \mathcal{F}_X$. Novamente, por submodularidade, temos que:

$$r(X) + r(Y) = r(Y) + r(Z) \geq r(X \cup Z) + r(Z \cap X). \tag{1.3}$$

Como $Y \subseteq X \cap Z$ e por (R2), segue que

$$r(X \cup Z) \geq r(X) \text{ e } r(Z \cap X) \geq r(Y). \tag{1.4}$$

Assim, as desigualdades (1.3) e (1.4) têm que ser igualdades. Logo, $X \cup Z \in \mathcal{F}_X$ e *(iii)* segue. Note que para *(iv)* ser verdade, basta que $\mathcal{F}_{cl_M(X)} \subseteq \mathcal{F}_X$. Tome $Z \in \mathcal{F}_{cl_M(X)}$. Por definição, $cl_M(X) \subseteq Z$ e $r(cl_M(X)) = r(Z)$. Por *(i)* e *(ii)*, segue que $X \subseteq Z$ e $r(X) = r(Z)$. Logo, $Z \in \mathcal{F}_X$. Assim, *(iv)* vale. $\square$

Agora, veremos uma proposição que caracteriza os elementos da matróide pertencentes ao fecho de um dado conjunto.

Proposição 1.2.1. *Seja e um elemento de uma matróide M. Se $X \subseteq E(M) - e$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $e \in cl_M(X)$.

(ii) $r(X \cup e) = r(X)$.

(iii) $e \in C \subseteq X \cup e$, *para algum circuito C de M.*

Demonstração. Veremos inicialmente que (i) implica (ii). Como $e \in cl_M(X)$, existe $Z \in \mathcal{F}_X$ tal que $e \in Z$. Por (R2), temos $r(X) \leq r(X \cup e) \leq r(Z)$. Por definição, $r(Z) = r(X)$. Logo as desigualdades acima são na realidade igualdades. Daí, $r(X) = r(X \cup e)$ e *(ii)* segue.

Mostraremos agora que (ii) implica (iii). Seja I um independente maximal contido em X. Pela definição do posto, $r(X) = |I|$. Como $r(X \cup e) = r(X) < |I \cup e|$, temos que I é um independente maximal contido em $X \cup e$. Logo, $I \cup e$ é dependente de M, assim existe um circuito C de M tal que $C \subseteq I \cup e \subseteq X \cup e$. Observe que $e \in C$, pois I é independente. Logo *(iii)* segue.

Finalmente, provaremos que (iii) implica (i). Por (R3), temos

$r(X) + r(C) \geq r(X \cup C) + r(X \cap C)$.

Note que $X \cup C = X \cup e$ e $X \cap C = C - e$. Logo,

$r(X) + r(C) \geq r(X \cup e) + r(C - e)$.

Como C é circuito de M, segue que $r(C) = r(C - e) = |C| - 1$. Logo

$r(X) \geq r(X \cup e)$.

E, por (R2), temos $r(X \cup e) = r(X)$. Então $X \cup e \in \mathcal{F}_X$ e *(i)* segue. □

Lema 1.2.2. *A interseção de conjuntos fechados de uma matróide M é um conjunto fechado de M.*

Demonstração. Basta mostrar que se X e Y são fechados de M, então $X \cap Y$ e fechado de M. Suponha, por contradição, que $X \cap Y$ não é fechado em M.
Logo, existe $e \in cl_M(X \cap Y) - (X \cap Y)$. E, pela proposição 1.2.1 *(iii)*, temos que $e \in C \subseteq (X \cap Y) \cup e$, para algum circuito C de M.
Note que $e \notin X$ ou $e \notin Y$, digamos $e \notin X$. Como $C \subseteq X \cup e$, obtemos, pela proposição 1.2.1 *(i)*, que $e \in cl_M(X) = X$; uma contradição e o lema segue. □

Vamos terminar este capítulo dando mais uma definição, que será usada várias vezes durante o restante do trabalho. Seja $X \subseteq E(M)$, dizemos que X é hiperplano de M, se X é fechado e $r(X) = r(M) - 1$.

1.3 Dualidade

Neste capítulo, vamos definir um conceito importantíssimo, que é o de matróide dual de uma matróide M. Antes disso, veremos um teorema que dá consistência à esta definição.

Teorema 1.3.1. *Seja r a função posto de uma matróide M. Então $r^* : 2^{E(M)} \to Z$ definida por $r^*(X) = |X| + r_M(E(M) - X) - r(M)$, para $X \subseteq E(M)$, é a função posto de uma matróide sobre $E(M)$.*

Demonstração. Note que (R1) segue, pois $r_M(E(M) - X) \leq r(M)$ e $r(X) \leq |X|$ daí

$$0 \leq r(X) + r(E(M) - X) - r(M) \leq r^*(X) = |X| + r_M(E(M) - X) - r(M) \leq |X|.$$

Logo $0 \leq r^*(X) \leq |X|$. Agora, mostraremos (R2). Seja $X \subseteq Y \subseteq E(M)$. E seja α o inteiro não-negativo tal que $|Y| = |X| + \alpha$. Assim, $|E(M) - X| = |E(M) - Y| + \alpha$ e então,

$$r(E(M) - X) \leq r(E(M) - Y) + \alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r^*(Y) &= |Y| + r_M(E(M) - Y) - r(M) \\ &\geq (|X| + \alpha) + (r(E(M) - X) - \alpha) - r(M) \\ &= |X| + r_M(E(M) - X) - r(M) = r^*(X), \end{aligned}$$

e (R2) segue. Finalmente, mostraremos (R3).
Para isto, basta observar que $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$ e

$$r_M(E(M) - X) + r_M(E(M) - Y) \geq r_M(E(M) - (X \cup Y)) + r_M(E(M) - (X \cap Y)),$$

esta última desigualdade é obtida usando (R3) em M para $E(M) - X$,
$E(M) - Y \subseteq E(M)$ e também o fato de

$(E(M)-X)\cup(E(M)-Y) = E(M)-(X\cap Y)$ e $(E(M)-X)\cap(E(M)-Y) = E(M)-(X\cup Y)$.

Com isto, temos

$$\begin{aligned} r^*(X) + r^*(Y) &= (|X| + |Y|) + (r_M(E(M) - X) + r(E(M) - Y)) - 2r(M) \\ &\geq r^*(X \cup Y) + r^*(X \cap Y) \end{aligned}$$

e assim (R3) segue, e o teorema está provado. □

Esta tal matróide sobre $E(M)$ cuja função posto é r^* é chamada de matróide dual de M e é denotada por M^*. Uma base, circuito, independente, laço, etc de M^* são chamados respectivamente de cobase, cocircuito, coindependente, colaço, etc de M. Agora, vamos descrever a família de circuitos de M^*.

Lema 1.3.1. *Seja M uma matróide. Então, C^* é um cocircuito de M se, e somente se, $E(M) - C^*$ é um hiperplano de M.*

Demonstração. Suponha C^* cocircuito de M, então $r^*(C^*) = |C^*| - 1$ e $r(C^* - e) = r(C^*)$ para todo $e \in C^*$. Assim, $r^*(C^*) = |C^*| - 1 = |C^*| + r_M(E(M) - C^*) - r(M)$, logo

$$r_M(E(M) - C^*) = r(M) - 1.$$

Agora para concluir que $E(M) - C^*$ é um hiperplano, basta mostrar que $E(M) - C^*$ é fechado em M. Para isto, suponha que existe $e \notin E(M) - C^*$ tal que

$$r_M((E(M) - C^*) \cup e) = r_M(E(M) - C^*).$$

Assim,

$$\begin{aligned} r^*(C^*) &= |C^*| + r_M(E(M) - C^*) - r(M) \\ &= 1 + (|C^*| - 1) + r_M((E(M) - C^*) \cup e) - r(M) \\ &= 1 + r^*(C^* - e), \end{aligned}$$

donde temos uma contradição. Reciprocamente, suponha que $E(M) - C^*$ é hiperplano de M. Então

$$r(E(M) - C^*) = r(M) - 1 \text{ e } r_M((E(M) - C^*) \cup e) = r(E(M) - C^*) + 1,$$

para todo $e \notin E(M) - C^*$. Assim,

$$r^*(C^*) = |C^*| + r(E(M) - C^*) - r(M) = |C^*| + (r(M) - 1) - r(M) = |C^*| - 1$$

e

$$\begin{aligned} r^*(C^* - e) &= |C^* - e| + r_M((E(M) - C^*) \cup e) - r(M) \\ &= (|C^*| - 1) + (r(E(M) - C^*) + 1) - r(M) \\ &= (|C^*| - 1) + ((r(M) - 1) + 1) - r(M) = |C^*| - 1 = |C^* - e| \end{aligned}$$

Logo C^* é cocircuito de M, e o lema está provado. $\square$

Agora veremos uma importante propriedade em forma de proposição conhecida como ortogonalidade:

Proposição 1.3.1. *Se C e C^* são respectivamente um circuito e um cocircuito de uma matróide M, então $|C \cap C^*| \neq 1$.*

Demonstração. Suponha que $|C \cap C^*| = 1$, digamos $C \cap C^* = \{e\}$, então, pelo lema (1.3.1), existe um hiperplano H tal que $H = E(M) - C^*$.
Em particular, $cl(H) = H$. Note que $C - \{e\} \subseteq H$ e daí $e \in C \subseteq H \cup e$. Portanto, pela proposição (1.2.1), $e \in cl(H) = H$; um absurdo, pois $e \in C^*$ e $H \cap C^* = \varnothing$. $\square$

1.4 Menores

Nesta seção, vamos apresentar mais um conceito importante sobre matróides, chamado de menores. Seja M uma matróide e r sua função posto. Observe que $r' : 2^{E(M)-e} \to Z$ definida por $r'(X) = r(X)$ para todo $X \in E(M) - e$ é uma função posto de uma matróide sobre $E(M) - e$. Diremos que esta tal matróide é obtida de M removendo-se o elemento e, e a denotaremos por $M \backslash e$. É também fácil de ver que os independentes de $M \backslash e$ são os independentes de M que evitam e. A contração de e em M, que é denotada por M/e, é definida da seguinte forma: $M/e = [M^* \backslash e]^*$

Lema 1.4.1. *Se e é um elemento de uma matróide M, então*
$r_{M/e}(X) = r_M(X \cup e) - r_M(e)$, para todo $X \in E(M) - e$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
r_{M/e}(X) &= r_{(M^*\backslash e)^*}(X) \\
&= r^*_{M^*\backslash e}(X) \\
&= |X| + r_{M^*\backslash e}(E(M^*\backslash e) - X) - r(M^*\backslash e) \\
&= |X| + r_{M^*}(E(M^*) - (X \cup e)) - r_{M^*}(E(M^*) - e) \\
&= r_M(X \cup e) - r_M(e).
\end{aligned}$$

□

Com este lema é fácil ver que se $r_M(\{e\}) \neq 0$, então os independentes de M/e são os subconjuntos $I \subseteq E(M) - e$ tais que $I \cup e$ é independente de M.

Da definição de deleção, é fácil de ver que $[M\backslash e]\backslash f = [M\backslash f]\backslash e$ para todo $e, f \in E(M)$. Desta identidade e da definição de contração, temos que $[M/e]/f = [M/f]/e$. Esta última identidade pode ser verificada através da função posto. De fato, para
$X \subseteq E(M) - \{e, f\}$ temos:

$$\begin{aligned}
r_{[M/f]/e}(X) &= r_{M/f}(X \cup e) - r_{M/f}(\{e\}) \\
&= [r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{f\})] - [r_M(\{e, f\}) - r_M(\{f\})] \\
&= r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{e, f\}).
\end{aligned}$$

Analogamente temos $r_{[M/e]/f} = r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{e, f\})$.
Utilizando a fórmula do posto da deleção e da contração, é fácil de ver que $[M/e]\backslash f = [M\backslash f]/e$. Logo, quando A e B são subconjuntos disjuntos de $E(M)$, a ordem em que os elmentos de A são deletados e os de B são contraídos é irrelevante. E a matróide obtida ao final dessas operações é dita um menor de M, sendo denotada por $M\backslash A/B$.

Lema 1.4.2. *Seja M uma matróide. Se A e B são subconjuntos disjuntos de $E(M)$, então para $X \subseteq E(M) - (A \cup B)$, temos que*

$$r_{M\backslash A/B}(X) = r_M(X \cup B) - r_M(B).$$

Demonstração. Basta mostrar que $r_{M/B}(X) = r_M(X \cup B) - r_M(B)$ para todo $X \subseteq E(M) - B$, já que o posto de um subconjunto de $E(M) - (A \cup B)$ é o mesmo em $M\backslash A/B$ e em M/B.

Vamos mostrar este fato por indução em $|B|$. Se $|B| = 0$, então o resultado segue. Assuma $|B| \geq 1$. Escolha $e \in B$. Por indução, o resultado vale para $B - e$, ou seja, se $Y \subseteq E(M) - (B - e)$, temos

$r_{M/(B-e)}(Y) = r_M(Y \cup (B - e)) - r_M(B - e)$.
Como $M/B = [M/(B - e)]/e$, temos que

$r_{M/B}(X) = r_{[M/(B-e)]/e}(X) = r_{M/(B-e)}(X \cup e) - r_{M/(B-e)}(\{e\})$, para $X \subseteq E(M) - B$.
Substituindo a penúltima igualdade na última, para $Y = X \cup e$ e $Y = \{e\}$ temos

$$\begin{aligned} r_{M/B}(X) &= [r_M((X \cup e) \cup (B - e)) - r_M(B - e)] - [r_M(\{e\} \cup (B - e)) - r_M(B - e)] \\ &= r_M(X \cup B) - r_M(B), \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Deste lema é fácil ver que, se B é independente de M, os independentes de $M\backslash A/B$ são os $I \subseteq E(M) - (A \cup B)$ tais que $X \cup B$ é independente de M.

1.5 Representação Geométrica

Esta seção tem a finalidade de representar algumas matróides de forma mais simples, a saber sua representação geométrica. Por motivo de objetividade, não vamos dar uma definição formal desta representação. Basicamente, os principais entes usados no trabalho são pontos, linhas e planos, onde:

- Cada ponto representa um elemento da matróide que não é um laço (já que nossas matróides são 3-conexas, logo não têm laços).

- Cada linha L é um subconjunto fechado da matróide M, tal que $r_M(L) = 2$. Se $x \in L$, temos $r_M(x) = 1$ e se $X \subseteq L$ com $|X| \geq 2$, temos que $r(X) = 2$.

- Cada plano P é um subconjunto fechado de M tal que $r_M(P) = 3$. Se $X \subseteq P$ com $|X| = 1$ ou $|X| = 2$, temos que $r_M(X) = 1$ ou $r_M(X) = 2$ respectivamente, e se $X \subseteq P$ com $|X| \geq 3$ e X não está contido numa linha, temos que $r_M(X) = 3$

Daremos exemplos de planos com linhas no decorrer da dissertação. Para que a representação geométrica fique consistente, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Quaisquer duas linhas distintas se intersectam no máximo em um ponto;

- Quaisquer dois planos que se intersectam em mais de dois pontos, se intersectam numa linha;

- Quaisquer duas linhas que se intersectam num ponto, estão contidas no mesmo plano;

- Toda linha que não está contida num plano intersecta o mesmo no máximo em um ponto.

1.6 Conexão Paralela Generalizada

O último pré-requisito para o entendimento do trabalho é o de conexão paralela generalizada. Mais uma vez, por motivo de objetividade, não daremos uma definição formal para este conceito.

Sejam M_1 e M_2 duas matróides cujos conjuntos base são E_1 e E_2 e cujas funções posto são r_1 e r_2 respectvamente. E seja N uma restrição comum a M_1 e M_2. Seja

$E = E_1 \cup E_2$. Vamos assumir que $M_1|L = M_2|L = N$, onde $L = E_1 \cap E_2$. A função posto na restrição comum a M_1 e M_2 será denotada por r. Se M é uma matróide sobre E tal que $M|E_1 = M_1$ e $M|E_2 = M_2$, então M é chamada de amalgama de M_1 e M_2. Na dissertação, as restrições comuns entre as matróides serão linhas. Dizemos que M é a conexão paralela generalizada de M_1 e M_2 se o conjunto $\mathcal{F}_M$ dos fechados de M é $\mathcal{F}_M = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \cap L = F_2 \cap L\}$ onde F_1 é fechado de M_1 e F_2 é fechado de M_2. Uma condição necessária para se fazer esta operação é que a linha L de interseção de M_1 e M_2 seja modular, isto é,

$r_M(L) + r_M(F) = r_M(L \cup F) + r_M(L \cap F)$ para todo $F \in \mathcal{F}_M$.
Mas se a linha não for modular, acrescentando elementos na linha podemos torná-la modular.

No trabalho, não iremos nos preocupar com isto. No decorrer da dissertação, veremos alguns exemplos de conexão paralela generalizada. Mais uma observação a ser feita é que, ao "colarmos"um plano em uma matróide, o posto da mesma aumenta de 1.

Capítulo 2

Um Lema Sobre 3-Separações

Definição 2.0.1. *Dizemos que uma partição* $\{X, Y\}$ *do conjunto base de uma matróide* M *é uma* k*-separação, para um inteiro positivo* k*, se*

$$r(X) + r(Y) - r(M) < k \leq \min\{|X|, |Y|\}.$$

Além disso, quando

$$r(X) + r(Y) - r(M) = k - 1$$

dizemos que esta k*-separação é exata.*

Uma matróide M *é dita* k*-conexa se* M *não admite uma* k'*-separação, para todo inteiro* k' *tal que* $0 < k' < k$*.*

Vamos definir ainda a função conectividade de M como
$\xi_M(X, Y) = r_M(X) + r_M(Y) - r(M)$, onde $\{X, Y\}$ é partição de $E(M)$.

Antes de demonstrar o lema principal deste capítulo, vamos mostrar alguns lemas introdutórios que serão usados tanto no lema principal como no decorrer da dissertação.

Lema 2.0.1. *Seja* M *uma matróide e* r *sua função posto. Então*
$\xi_M(X, Y) = r(X) + r^*(X) - |X|$ *para todo* $X \subseteq E(M)$*. Mais ainda, se* M *é 3-conexa,*

M^* também é.

Demonstração. Por definição,

$$\xi_M(X,Y) = r(X) + r(Y) - r(M) \text{ e } r^*(X) = |X| + r(Y) - r(M).$$

Agora, substituindo a segunda igualdade na primeira, temos

$$\xi_M(X,Y) = r(X) + r^*(X) - |X|.$$

Logo, $\xi_M(X,Y) = \xi_{M^*}(X,Y)$. Assim, se M é 3-conexa, M^* também é. □

Lema 2.0.2. *Seja M uma matróide 3-conexa com pelo menos 4 elementos. Então, M é simples e cosimples.*

Demonstração.

- M não tem laços, pois se $e \in E(M)$ é um laço, $r(e) = 0$. E, como $r(E(M) - e) \leq r(M)$, temos que $r(e) + r(E(M) - e) - r(M) = 0$. Assim, $\{e\}$ é um conjunto 1-separador de M; absurdo.

- M não tem elementos em paralelo, pois se tivesse, teríamos um circuito C com $|C| = 2$. Como $r(E(M) - C) \leq r(M)$ e $r(C) = |C| - 1 = 1$, temos que

$$r(C) + r(E(M) - C) - r(M) \leq 1.$$

  Assim, C seria 2-separador de M; um absurdo.

- Como M é 3-conexa, temos que M^* também é. Assim, pelos ítens anteriores, M é cosimples.

□

Lema 2.0.3. *Seja M uma matróide 3-conexa e $e \in E(M)$. Seja $\{Z, W\}$ uma 2-separação de M/e. Então $\xi_{M/e}(Z,W) = \xi_M(Z \cup e, W) - 1$. Além disso, ambos Z e W geram e em M.*

Demonstração. Por definição,

$$\xi_{M/e}(Z, W) = r_{M/e}(Z) + r_{M/e}(W) - r(M/e) \leq 1.$$

Então

$$[r_M(Z \cup e) + r_M(e)] + [r_M(W \cup e) - r_M(e)] - [r(M) - r_M(e)] \leq 1.$$

Logo

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W \cup e) - r(M) \leq 2.$$

Note que W gera e em M senão teríamos

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 1.$$

Assim, $\{W, Z \cup e\}$ seria um 2-separação de M; um absurdo.

Portanto,

$$\xi_M(Z \cup e, W) = r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 2.$$

Assim,

$$\xi_{M/e}(Z, W) = \xi_M(Z \cup e, W) - 1.$$

□

Lema 2.0.4. *Se X é um conjunto 3-separador de uma matróide M 3-conexa tal que $|X| = 3$, então X é uma tríade ou um triângulo de M.*

Demonstração. Como

$$\xi_M(X, E(M) - X) = r_M(X) + r_{M^*}(X) - |X| = 2,$$

temos

$$r_M(X) + r_{M^*}(X) = 5.$$

Se X não fosse tríade nem triângulo de M, teríamos $r_M(X) = 3$ e $r_{M^*}(X) = 3$; um absurdo com a equação acima. □

Lema 2.0.5. *Sejam M uma matróide 3-conexa e $X \subseteq E(M)$. Se $M|X \cong U_{2,4}$, então $M\backslash e$ é 3-conexa, para todo $e \in X$.*

Demonstração. Note que X é uma linha com 4 elementos. Assim, $r_M(X) = r_{M\backslash e}(X - e)$ e $r(M) = r(M\backslash e)$. Logo, $\xi_M(X, E(M) - X) = \xi_{M\backslash e}(X - e, E(M\backslash e) - (X - e)$ e o resultado segue. □

Lema 2.0.6. *Seja M uma matróide 3-conexa e $e \in E(M)$. Seja $\{X, Y\}$ uma 2-separação de M/e com $|X| = 2$. Então $X \cup e$ é triângulo de M.*

Demonstração. Como X é conjunto 2-separador de M/e com $|X| = 2$, segue, pelo lema 2.0.3, que $X \cup e$ é conjunto 3-sepadro de M. Logo, $X \cup e$ é uma tríade ou um triângulo de M. Se $X \cup e$ fosse uma triade de M, teríamos

$$r_{M^*}(X \cup e) + r_{M^*}(Y) - r(M^*) = 2.$$

Logo,

$$r_{M^*\backslash e}(X) + r_{M^*\backslash e}(Y) - r(M^*\backslash e) = 2.$$

e assim, $\{X, Y\}$ não seria 2-separação de $M/e = (M^*\backslash e)^*$. Daí, $X \cup e$ é triângulo de M. □

Agora, demonstraremos o lema principal deste capítulo.

Lema 2.0.7. *Seja $\{X, Y\}$ uma 3-separação de uma matróide 3-conexa M. Se $e \in X$ e M/e não é 3-conexa, então:*

(i) Existe uma 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e, tal que $Z \subseteq X$; ou

(ii) Para toda 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e, $min\{|Z|, |W|\} = 2$ e ambos Z e W intersectam ambos X e Y; ou

(iii) Para toda 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e, $|Z \cap X| = |W \cap X| = 1$ e X é uma tríade de M.

Demonstração. Assuma que (i) não vale, e seja $\{Z, W\}$ uma 2-separação de M/e. Então, pelo lema (2.0.3), temos

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 2. \tag{2.1}$$

Como, $\{X, Y\}$ é 3-separação de M, temos que

$$r_M(X) + r_M(Y) - r(M) \leq 2. \tag{2.2}$$

Juntando (2.1) e (2.2), temos que

$$[r(X) + r(Y) - r(M)] + [r(Z \cup e) + r(W) - r(M)] = 4.$$

Por submodularidade, temos:

(a)

$$\begin{aligned} r(X) + r(Z \cup e) - r(M) &\geq r(X \cup (Z \cup e)) + r(X \cap (Z \cup e)) - r(M) \\ &= r(X \cup Z) + r((X \cap Z) \cup e) - r(M), \end{aligned}$$

pois $e \in X$;

(b) $r(Y) + r(W) - r(M) \geq r(Y \cup W) + r(Y \cap W) - r(M)$.

Donde, organizando os termos e somando (a) com (b), temos:

$$[r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M)] + [r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M)] \leq 4. \tag{2.3}$$

Em seguida, provaremos que

$$|Y \cap W| \leq 1 \text{ ou } |X \cap Z| \leq 1 \tag{2.4}$$

Suponha que (2.4) não vale, i.e., $|Y \cap W| \geq 2$ e $|X \cap Z| \geq 2$.

Agora, note que $\{X \cup Z, Y \cap W\}$ é uma partição de M e se

$$r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M) \leq 1,$$

teríamos uma 2-separação para M que é 3-conexa, um absurdo.

Logo,

$$r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M) \geq 2$$

e de forma análoga temos que

$$r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M) \geq 2.$$

Por (2.3), temos a igualdade. Em particular,

$$r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M) = 2.$$

Como W e, portanto, $Y \cup W$ geram e em M, segue que $\{X \cap Z, Y \cup W\}$ é 2-separação de M/e, visto que:

- $\min\{|X \cap Z|, |Y \cup W|\} \geq 2$, pois $|X \cap Z| \geq 2$ e $|Y \cup W| \geq 2$.
- E, pelo lema 2.0.3, temos $r_{M/e}(X \cap Z) + r_{M/e}(Y \cup W) - r(M/e) = 1$

Sendo assim, (i) vale, pois $X \cap Z \subseteq X$, contradição. Logo, (2.4) segue.
Similarmente, trocando W por Z, temos

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ ou } |X \cap W| \leq 1. \tag{2.5}$$

Combinando (2.4) com (2.5), temos uma das quatro possibilidades:

$$|X \cap Z| \leq 1 \text{ e } |X \cap W| \leq 1, \tag{2.6}$$

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ e } |Y \cap W| \leq 1, \tag{2.7}$$

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ e } |X \cap Z| \leq 1, \tag{2.8}$$

$$|Y \cap W| \leq 1 \text{ e } |X \cap W| \leq 1. \tag{2.9}$$

Assuma que (2.6) ocorre.
Como $|X| \geq 3$, temos que $|X \cap Z| = |X \cap W| = 1$, pois se $X \cap W = \varnothing$, teríamos $|X \cap Z| \geq 2$, contradição com (2.6) e o análogo é válido para $X \cap Z$. Agora, como

$|X \cap Z| = |X \cap W| = 1$, $Z \cap W = \varnothing$, $e \in X$,$e \notin Z$, $e \notin W$,$Z \cup W = E(M) - e$, temos $|X| = 3$. Então, pelo lema 2.0.4, X é uma tríade ou um triângulo de M.

Se X é um triângulo de M, então $X - e$ é um conjunto 2-separador de M/e, pois $X - e$ é um par de elementos em paralelo de M/e e $|E(M)| \geq 6$

Como $X - e \subset X$ e $X - e$ é um conjunto 2-separador de M/e, então (i) vale, absurdo. Logo, X é um tríade. Nesse caso, (iii) segue. Vamos supor que (2.6) não ocorre para toda 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e.

Note que (2.7) não ocorre, pois $|Y| \geq 3$ e $e \notin Y$. Então, (2.8) ou (2.9) ocorre. Daí, $|Y \cap Z| = 1$ e $|X \cap Z| = 1$ ou $|Y \cap W| = 1$ e $|X \cap W| = 1$. Se $|Y \cap Z| = 1$ e $|X \cap Z| = 1$, temos $|Z| = 2$ e Z intersepta ambos X e Y, e como $|X| \geq 3$ e $|Y| \geq 3$ segue que $X \cap W \neq \varnothing$, $Y \cap W \neq \varnothing$ e $|W| \geq 2$. Como $|Z| = 2$ e $|W| \geq 2$, segue que $\min\{|Z|, |W|\} = 2$, e o análogo vale se $|Y \cap W| = 1$ e $|X \cap W| = 1$. Assim, (ii) segue. $\square$

Capítulo 3

Uma Decomposição

Neste capítulo, vamos decompor uma matróide cominimalmente 3-conexa em duas matróides cominimalmente 3-conexas de tamanho menor.

Seja L uma linha de M. Para um elemento e tal que $e \notin E(M)$, considere a seguinte função $r : 2^{E(M)\cup e} \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$r(Z) = \begin{cases} r_M(Z), \text{ se } e \notin Z \\ r_M(Z-e), \text{ se } e \in Z \text{ e } L \subseteq cl_M(Z-e) \\ r_M(Z-e)+1, \text{ se } e \in Z \text{ e } L \nsubseteq cl_M(Z-e). \end{cases} \tag{3.1}$$

Vamos mostrar que r é a função posto de uma matróide:

(i) $r(Z) \leq |Z|$, pois

- se $e \notin Z$, $r(Z) = r_M(Z) \leq |Z|$
- se $e \in Z$ e $L \subseteq cl_M(Z-e)$, $r(Z) = r_M(Z-e) \leq |Z-e| < |Z|$
- se $e \in Z$ e $L \nsubseteq cl_M(Z-e)$, $r(Z) = r_M(Z-e)+1 \leq |Z-e|+1 = |Z|$

(ii) Se $X \subseteq Y \subseteq E(M)\cup e$, então $r(X) \leq r(Y)$, pois: Para $X \subseteq E(M)\cup e$, temos que

$$r(X) = r_M(X-e) + \eta(X),$$

com $\eta(X) = 0$ (se X gera L) ou $\eta(X) = 1$ (se X não gera L). Suponha que exista $X \subseteq Y$ tal que $r(X) > r(Y)$, então

$$r_M(X - e) + \eta(X) > r_M(Y - e) + \eta(Y).$$

Observe que

$$0 \geq r_M(X - e) - r_M(Y - e) > \eta(Y) - \eta(X) \geq -1,$$

pois $X - e \subseteq Y - e$. Logo, $\eta(Y) = 0$ e $\eta(X) = 1$. Mais ainda, $r_M(X - e) = r_M(Y - e)$; um absurdo, pois $L \subseteq cl_M(X - e)$ se, e somente se, $L \subseteq cl_M(Y - e)$. (iii) Submodularidade

$$(r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y), \text{ para todo } X, Y \subseteq E(M) \cup e), \text{ pois:}$$

Suponha que existam X e Y subconjuntos de $E(M) \cup e$ tais que

$$r(X) + r(Y) < r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

Portanto,

$$r_M(X-e)+\eta(X)+r_M(Y-e)+\eta(Y) < r_M((X\cup Y)-e)+\eta(X\cup Y)+r_M((X\cap Y)-e)+\eta(X\cap Y).$$

Por submodularidade para M, temos

$$r_M(X - e) + r_M(Y - e) \geq r_M((X \cup Y) - e) + r_M((X \cap Y) - e)$$

e daí

$$r_M(X-e)+r_M(Y-e)-[r_M((X\cup Y)-e)+r_M((X\cap Y)-e)] < \eta(X\cap Y)+\eta(X\cup Y)-\eta(X)-\eta(Y). \tag{3.2}$$

Logo, $\eta(X \cup Y) = 1$ ou $\eta(X \cap Y) = 1$. Observe que se $\eta(X \cup Y) = 1$, temos $\eta(X) = 1$ e $\eta(Y) = 1$, pois se $X \cup Y$ não gera L, então nem X nem Y gera; um absurdo com (3.2). Então $\eta(X \cap Y) = 1$ e $\eta(X \cup Y) = 0$. Agora, como

$$\eta(X \cap Y) + \eta(X \cup Y) - \eta(X) - \eta(Y) \geq 1$$

segue que $\eta(X) = \eta(Y) = 0$. Assim, X e Y geram L em M. Logo, $X \cap Y$ gera L em M; um absurdo com $\eta(X \cap Y) = 1$.

Dizemos que esta tal matróide sobre $E(M) \cup e$ é obtida de M por adição de e livremente em L e a denotamos por N.

Nós dizemos que $X \subseteq E(M)$ é um conjunto k-separador de M (ou k-separador exato) se $\{X, E(M) - X\}$ é uma k-separação de M (ou k-separação exata de M).
Suponha que X é um conjunto 3-separador exato de uma matróide M tal que $r(X) \geq 3$. Neste parágrafo vamos definir um fator de M com respeito a X. Se B_1 e B_2 são bases de $M|X$ e $M\backslash X$ respectivamente, então,

$$|B_1| + |B_2| = r(X) + r(E(M) - X) = r(M) + 2,$$

pois X é um conjunto 3-separador exato de M.
Então existem elementos a e b de B_2 tais que $(B_1 \cup B_2) - \{a, b\}$ é uma base de M. Isto acontece pois $|B_1| + |B_2| = r(M) + 2$ e $3 \leq |B_1| \leq r(M)$, daí $|B_2| \geq 2$. Então B_1 é base e $\{a, b\}$ é independente de $M/(B_2 - \{a, b\})$, pois $B_1 \cup (B_2 - \{a, b\}) = (B_1 \cup B_2) - \{a, b\}$ é base de M e $\{a, b\} \cup (B_2 - \{a, b\}) = B_2$ é base de $M\backslash X$, logo independente de M.
Em particular, $[M/(B_2 - \{a, b\})]|X = M|X$. Como B_2 gera $E(M) - X$ em M, segue que $\{a, b\}$ gera $E(M) - [X \cup (B_2 - \{a, b\})]$ em $M/(B_2 - \{a, b\})$. Então a linha L' de $M/(B_2 - \{a, b\})$ que contém $\{a, b\}$ também contém $E(M) - [X \cup (B_2 - \{a, b\})]$.
Assim, $E(M/(B_2 - \{a, b\})) = X \cup L'$. Observe que
$X \cap L' \subseteq cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X) \subseteq L'$. Seja A um conjunto minimal tal que
$A \cap E(M) = \varnothing$ e $L = A \cup [cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X)]$ tenha no mínimo 3 elementos.
Seja N' a matróide obtida de $M/(B_2 - \{a, b\})$ por adição dos elementos de A livremente na linha L'. Nós dizemos que $N = N'\backslash(L' - L)$ é um fator de M com respeito a X tendo L como linha especial.

Lema 3.0.8. *Suponha que X é um conjunto 3-separador exato de M tal que $r(X) \geq 3$. Seja N um fator de M com respeito a X tendo L como linha especial. Se $Y \subseteq cl_M(X)$ e*

$|Y \cap L| \leq 1$, *então* Y *é linha de* M *se, e somente se,* Y *é linha de* N.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$M|cl_M(X) = [M/(B_2 - \{a,b\})]|cl_M(X) = N'|cl_M(X) = N|cl_M(X) = N\backslash A.$$

Daí, se $Y \subseteq cl_M(X)$, então $r_M(Y) = r_N(Y)$. Suponha Y linha de M. Já que $r_M(Y) = r_N(Y) = 2$, basta mostrar que Y é fechado em N. Se Y não fosse fechado em N, existiria $y \in cl_N(Y) - Y$ e deveríamos ter que $y \notin cl_M(Y)$, senão Y não seria fechado em M, logo $y \in A$. Como $y \in A$ e $r_N(Y \cup y) = r_N(Y)$, temos que $cl_{M/(B_2-\{a,b\})}(Y) \supseteq L'$ e como Y tem posto 2, temos que $Y \subseteq L'$. Daí, $Y \subseteq cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X) \subseteq L$. Logo, $|Y \cap L| \geq 2$, o que geraria um absurdo. Suponha agora Y linha de N. Já temos $r_M(Y) = r_N(Y) = 2$. Basta mostrar que Y é fechado em M. Se Y não fosse fechado em M, Y geraria $y \in E(M) - Y$ em M. Como $y \in cl_M(Y) \subseteq cl_M(X)$ e $M|cl_M(X) = N|cl_M(X)$, temos que Y gera $y \in E(N) - Y$ em N; contradição. $\square$

Lema 3.0.9. *Suponha que* X *é um conjunto 3-separador exato de* M *tal que* $r(X) \geq 3$. *Seja* N *um fator de* M *com respeito a* X *tendo* L *como linha especial. Então:*
(i) Quando $L \subseteq Y \subseteq E(N)$ *e* $A = L - E(M)$, *temos*

$$r_M([Y - A] \cup [E(M) - X]) = r_N(Y) + r_M(E(M) - X) - 2.$$

(ii) Quando $Y \subseteq X - L$, *temos*

$$\xi_N(Y, E(N) - Y) = \xi_M(Y, E(M) - Y).$$

(iii) Quando $Y \subseteq X - L$, *temos que* Y *é cocircuito de* M *se, e somente se,* Y *é cocircuito de* N.

Demonstração. Sejam B_1, B_2, a, b, L', A e N' como definimos anteriormente. Provaremos primeiro (i):

Em N', a, b estão no fecho de L. Logo, Y gera a e b em N'. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
r_N(Y) &= r_{N'}(Y) = r_{N'}(Y \cup \{a,b\}). \text{ Pela definição de } N' \text{ temos a igualdade abaixo}\\
&= r_{N'}([Y-A] \cup \{a,b\}). \text{ Pelo mesmo motivo, temos}\\
&= r_{M/(B_2-\{a,b\})}([Y-A] \cup \{a,b\}). \text{ Pela fórmula do posto da contração, temos}\\
&= r_M(([Y-A] \cup B_2) - r_M(B_2 - \{a,b\}). \text{ Como } B_2 \text{ gera } E(M)-X \text{ em } M\text{, temos}\\
&= r_M(([Y-A] \cup B_2) - [r_M(E(M)-X)-2].
\end{aligned}$$

Como $[Y-A] \cup B_2$ gera $E(M)-X$ em M, pois B_2 o gera, segue que:

$$r_M(([Y-A] \cup [E(M)-X]) = r_M(([Y-A] \cup B_2) = r_N(Y) + r_M(E(M)-X) - 2$$

e (i) está provado.

Agora vamos mostrar (ii). Por (i) aplicado a $E(N)-Y$, temos

$$\begin{aligned}
r_M([(E(N)-Y)-A] \cup [E(M)-X]) &= r_M([E(N)-(Y \cup A)] \cup [E(M)-X])\\
&= r_N(E(N)-Y) + r_M(E(M)-X) - 2,
\end{aligned}$$

porque $L \subseteq E(N)-Y \subseteq E(N)$. Note que $[E(N)-(Y \cup A)] \cup [E(M)-X] = E(N)-Y$, pois $E(N) = cl_M(X) \cup A$.

Agora, somando $r_M(Y)$ em ambos os lados e substituindo $[E(N)-(Y \cup A)] \cup [E(M)-X]$ por $E(M)-Y$, obtemos:

$$r_M(Y) + r_M(E(M)-Y) = r_M(Y) + r_N(E(N)-Y) + r_M(E(M)-X) - 2.$$

Como $L \subseteq Y \subseteq E(N)$, temos que $Y \subseteq E(N)-L \subseteq cl_M(X)$. Daí, $r_M(Y) = r_N(Y)$. Note ainda que $r(N) = r_M(X)$, pois

$$r(N) = r_N(E(N)) = r_N(cl_M(X) \cup A) = r_{N'}(cl_M(X) \cup A) = r_{M/(B_2-\{a,b\})}(cl_M(X)) = r_M(X).$$

Como $r(N) = r_M(X)$ e $r_M(Y) = r_N(Y)$, temos

$$r_N(Y) + r_N(E(M)-Y) = \xi_N(Y, E(N)-Y) + r(N) = \xi_N(Y, E(N)-Y) + r_M(X).$$

Com isto, segue que

$$\begin{aligned} r_M(Y) + r_M(E(M) - Y) &= r_M(Y) + r_N(E(N) - Y) + r_M(E(M) - X) - 2 \\ &= r_N(Y) + r_N(E(N) - Y) + r_M(E(M) - X) - 2 \\ &= (\xi_N(Y, E(N) - Y) + r_M(X)) + r_M(E(M) - X) - 2. \end{aligned}$$

Observe que (ii) segue, pois $r_M(X) + r_M(E(M) - X) - 2 = r(M)$ (X é um conjunto 3-separador exato de M).

Agora, provaremos (iii):

Aplicando (i) a $E(N) - Y$ e $[E(N) - Y] \cup c$, com $c \in Y$, temos respectivamente:

$$r_M(E(M) - Y) = r_N(E(N) - Y) + r_M(E(M) - X) - 2, \text{ pois } L \subseteq E(N) - Y \subseteq E(N)$$

e $r_M([E(M) - Y] \cup c) = r_N([E(N) - Y] \cup c) + r_M(E(M) - X) - 2$, pois $L \subseteq (E(N) - Y) \cup c \subseteq E(N)$.

Como $r(N) = r_M(X)$ e $r_M(E(M) - X) - 2 = r(M) - r_M(X)$, segue que

$$r(M) - r_M(E(M) - Y) = r(N) - r_N(E(N) - Y) \tag{3.3}$$

e

$$r(M) - r_M([E(M) - Y] \cup c) = r(N) - r_N([E(N) - Y] \cup c).$$

Note de (3.3) que $r_M(E(M) - Y) = r(M) - 1$ se , e somente se, $r_N(E(N) - Y) = r(N) - 1$. Note também que se $E(M) - Y$ gera c em M, temos

$$\begin{aligned} r(M) - r_M([E(M) - Y] \cup c) &= r(M) - r_M(E(M) - Y) \\ &= r(N) - r_N(E(N) - Y) \\ &= r(N) - r_N([E(N) - Y] \cup c), \end{aligned}$$

logo $E(N) - Y$ gera c em N. Analogamente, se $E(N) - Y$ gera c em N, então $E(M) - Y$ gera c em M. Como isso, temos que $E(M) - Y$ é hiperplano de M se, e somente se, $E(N) - Y$ é hiperplano de N. E como os cocircuitos são os complementares dos hiperplanos e vice-versa, (iii) segue. $\square$

Uma matróide M é dita minimalmente 3-conexa se M é 3-conexa e, para todo $e \in E(M)$, $M \backslash e$ não é 3-conexa. Nós dizemos que M é cominimalmente 3-conexa se M^* é minimalmente 3-conexa. Para um elemento $e \in E(M)$, denotamos por $si(M/e)$ a simplificação de M/e e por $co(M \backslash e)$ a cosimplificação de $M \backslash e$.

Lema 3.0.10. *Suponha que X é um conjunto 3-separador de uma matróide 3-conexa M tal que $r(X) \geq 3$. Se N é um fator de M com respeito a X tendo L como linha especial, então:*

(i) N é 3-conexa.

(ii) Se $r(N) = 3$, $e \in E(N) - L$ e $si(M/e)$ não é 3-conexa, então $cl_M(X)$ é a união de duas linhas que contém e.

(iii) Para $e \in E(N) \cap E(M)$, se M/e não é 3-conexa, então:

(a) N/e não é 3-conexa; ou

(b) $cl_M(X)$ é uma tríade de M.

(iv) Para $e \in E(N) \cap E(M)$, se M/e é 3-conexa, então N/e é 3-conexa.

(v) Se M é cominimalmente 3-conexa, então N é cominimalmente 3-conexa.

Demonstração. Sejam B_1, B_2, a, b, L', A e N' como definimos anteriormente. Para provar (i), suponha que N não é 3-conexa e seja $\{Z, W\}$ uma 1- ou 2-separação de N. Primeiro mostraremos que

$$\min\{|Z|, |W|\} \geq 3. \tag{3.4}$$

Note que ao estabelecermos (3.4) toda 1-separação também será uma 2-separação. Suponha que $|Z| \leq 2$. Note que Z contém um cocircuito C^* de N, pois:

- N é simples, pois M é simples;

- Como $\xi_N(Z, W) = r_N(Z) + r_N(W) - r(N) \leq 1$, temos pelo lema 2.0.1 que

$$r_N(Z) + r^*_N(Z) \leq |Z| + 1 \leq 3.$$

Donde $r_N(Z) \leq 1$ ou $r_N^*(Z) \leq 1$, mas $r_N(Z) \leq 1$ não pode acontecer, pois N é simples. Então, $r_N^*(Z) \leq 1$ e Z é cocircuito de N.

Como $Z = C^*$ é cocircuito de N, $|L| \geq 3$ e L é linha de N, por ortogonalidade temos $C^* \subseteq L$ ou $C^* \cap L = \varnothing$, mas não podemos ter $C^* \subseteq L$, pois $E(N) - L$ gera L, o que contraria a orogonalidade. Então, $C^* \cap L = \varnothing$, isto é, $C^* \subseteq X - L$ e pelo lema 3.0.9 (iii), C^* é um cocircuito de M; uma contradição, pois M é 3-conexa. Então (3.4) segue. Escolha uma 2-separação $\{Z, W\}$ de N tal que $|L \cap Z|$ seja máxima. Como $|L| \geq 3$, segue que $|L \cap Z| \geq 2$, pois se fosse $|L \cap Z| \leq 1$, teríamos $|L \cap W| \geq 2$ e trocaríamos Z por W. Se $e \in W \cap L$, então Z gera e em N, pois $|L \cap Z| \geq 2$ e $r_N(L) = 2$. E então $\{Z \cup e, W - e\}$ é uma 1- ou 2-separação de N, pois:

- Como $min\{|Z|, |W|\} \geq 3$, temos que $min\{|Z \cup e|, |W - e|\} \geq 2$.
-

  $$r_N(Z \cup e) + r_N(W - e) - r(N) = r_N(Z) + r_N(W) - r(N), \text{ se } r_N(W - e) = r_N(W)$$

  ou

  $$r_N(Z \cup e) + r_N(W - e) - r(N) = r_N(Z) + r_N(W) - 1 - r(N), \text{ se } r_N(W - e) = r_N(W) - 1,$$

- Como $\{Z, W\}$ é uma 2-separaçãode N, temos que
  $r_N(Z \cup e) + r_N(W - e) - r(N) \leq 1$.

O que gera uma contradição com a escolha de $\{Z, W\}$, pois $|L \cap (Z \cup e)| > |L \cap Z|$. Então, $L \subseteq Z$. Agora, $W \subseteq X - L$ e, pelo lema 3.0.9 (ii), $\{W, E(M) - W\}$ é uma 2-separação de M, pois $\xi_N(W, E(N) - W) = \xi_M(W, E(M) - W)$, donde obtemos uma contradição com a 3-conexidade de M. Logo $\{Z, W\}$ não existe e N é 3-conexa.

Agora vamos demonstrar (ii). Para isto, vamos escolher elementos de $si(M/e)$ de maneira que $cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X) \subseteq si(M/e)$. Note que podemos fazer esta escolha, pois M é simples, $e \in E(N) - L$ e $L = A \cup (cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X))$.

Observe ainda que $L_1 = cl_M(X) \cap E(si(M/e)) = cl_{M/e}(X-e) \cap E(si(M/e))$ é uma linha de $si(M/e)$, já que L_1 é fechado em M/e e

$$r_{M/e}[L_1] = r_{M/e}[cl_{M/e}(X-e) \cap E(si(M/e))] = r_{M/e}(X-e) = r_M(X) - 1 = r(N) - 1 = 2,$$

pois por hipótese, $r(N) = 3$. Seja N_1 uma matróide obtida de $si(M/e)$ por adição livremente em L_1 dos elementos de A', onde A' é minimal no sentido de $L_2 = A' \cup [cl_M(X) \cap cl_M(E(M) - X)]$ ter no mínimo 3 elementos. Desta forma, $N_1 \backslash (L_1 - L_2)$ é um fator de M com respeito a $E(M) - X$ e então $N_1 \backslash (L_1 - L_2)$ é 3-conexa, por i). Então, N_1 é 3-conexa, já que N_1 é simples. Como $si(M/e) = N_1 \backslash A'$ não é 3-conexa (por hipótese), segue que $|L_1| = 2$, visto que $L_1 \cup A'$ é linha de N_1. Então, $cl_{M/e}(X-e)$ é união de duas classes paralelas de M/e. Então, $cl_M(X)$ é a união de duas linhas de M que contem e, e assim (ii) está provado.

Agora vamos provar (iii). Para isso, assuma (a) e (b) falsos. Em particular, N/e é 3-conexa e então $e \in X - L$, pois L é uma linha de 3 pontos de N, e se $e \in L$, teríamos um par de elementos em paralelo em N/e, e assim N/e não seria 3-conexa. Pelo Lema 2.0.7 aplicado a 3-separação $\{X - L, cl_M(E(M) - X)\}$ de M, concluímos que:

1. Existe uma 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e tal que $Z \subseteq X - L$; ou

2. Para toda 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e, $min\{|Z|, |W|\} = 2$ e ambos Z e W intersectam ambos $X - L$ e $cl_M(E(M) - X)$; ou

3. $X - L$ é uma tríade de M.

Primeiro provaremos que

$$r(N) \geq 4. \tag{3.5}$$

Suponha $r(N) = 3$. Como toda linha de N que contem e tem dois elementos, já que N/e é 3-conexa, segue pelo lema 3.0.8, que toda linha M que contem e tem dois elementos e então $si(M/e) = M/e$. Por (ii), $cl_M(X)$ é a união de duas linhas de M que contem e.

Como todas estas linhas tem dois elementos, segue que $cl_M(X)$ tem 3 elementos, e então $cl_M(X)$ é uma tríade de M, pois $r_{M^*}(cl_M(X)) = |cl_M(X)| + r_M(E(M) - cl_M(X)) - r(M) = |cl_M(X)| + 2 - r(X) = 2$. Então, o caso (iii b) ocorre ; uma contradição. Então (3.5) vale. Em particular, (3) não ocorre, pois $r(N) = r_M(X - L) \geq 4$. Logo $|X - L| \geq 4$. Assuma (2) válido. Sejam $L_1, ..., L_n$ as linhas de M que tem no mínimo 3 elementos e que contenham e. Então, $n \geq 1$, $|L_1| = ... = |L_n| = 3$ e, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $L_i = \{e, x_i, y_i\}$, onde $x_i \in X - (L \cup e)$ e $y_i \in cl_M(E(M) - X)$, pois todo 2-separação $\{Z, W\}$ de M/e intersecta ambos $X - L$ e $cl_M(E(M) - X)$ e $L_i - e$ é conjunto 2-separador de M/e. Como $L_i - y_i$ gera y_i em M, segue que $y_i \in cl_M(X)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, já que $e \in X - L$ e, então $y_i \in L$. Pelo lema 3.0.8, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, L_i é uma linha de N e, então, (a) vale; uma contradição. Assuma (1) verdadeiro. Como $r(X) = r(N) \geq 4$, temos que $r_{M/e}(X - e) = r_M(X) - 1 \geq 3$. Como $r(X) + r(E(M) - X) - r(M) = 2$ e $E(M) - X$ não gera e em M (pois $e \in X - L$), temos

$$r_{M/e}(X - L) + r_{M/e}(E(M/e) - (X \cup e)) - r(M/e) = r(X) + r(E(M) - X) - r(M) = 2.$$

Assim $X - e$ é 3-separador de M/e. Desta forma, N/e é um fator de M/e em relação a $X - e$ tendo L como linha especial. Como $Z \subseteq X - L$, $\{Z, W\}$ é 2-separação de M/e e N/e é fator de M/e, segue pelo lema 3.0.9 (ii) que Z é 2-separador de N/e e (a) segue; uma contradição. E então (iii) segue.

Neste parágrafo, mostraremos (iv). Como já vimos, se M/e é 3-conexa, então $e \notin L$. Mais ainda, toda linha de M que contem e tem apenas dois elementos e, pelo lema 3.0.8, toda linha de N que contem e tem exatamente dois elementos. Se $r(N) = 3$, então N/e é 3-conexa. Então, podemos supor $r(N) = r_M(X) \geq 4$. Como N/e é um fator de M/e com respeito a $X - e$, tendo L como linha especial, segue, por (i), que N/e é 3-conexa e, então (iv) segue.

Agora, provaremos (v). Para isto, vamos usar o dual do lema do triângulo de Tutte (que não será provado) que diz o seguinte: Seja M uma matróide 3-conexa com $|E(M)| \geq 4$, suponha que $\{e, f, g\}$ seja um triângulo de M e que nem $M \backslash e$ nem $M \backslash f$ seja 3-conexa. Então M tem uma tríade que contem e e exatamente ou f ou g. Suponha que M é cominimalmente 3-conexa. Para concluir que N é cominimalmente 3-conexa, para todo $e \in E(N)$, temos que provar que N/e não é 3-conexa. Observe que (v) segue de (iii), a não ser que $cl_M(X)$ seja uma tríade de M. Mas, neste caso, pelo lema do triangulo de Tutte, todo elemento de $cl_M(X)$ pertence a um triangulo de M e, então de N, pelo Lema 3.0.8. Então, (v) também vale neste caso, pois ao contraírmos um elemento a de $cl_M(X)$ criamos um par de elementos paralelos em M/a e em N/a, assim N/a não é 3-conexa. $\square$

Capítulo 4

Provando A Conjectura De Leo

Para uma matróide M, denotamos por $T(M)$ o conjunto dos elementos de M pertencentes a algum triângulo de M. Denotamos $t(M) = |T(M)|$ e $e(M) = |E(M)|$. Quando M é 3-conexa, denotamos por $R_1(M) = \{e \in E(M) : co(M \backslash e) \text{ é } 3-conexa\}$.

Teorema 4.0.1. *Seja M uma matróide cominimalmente 3-conexa. Se $|E(M)| \geq 8$, então*

$$9t(M) \geq 5e(M) + 30.$$

Antes da demonstração deste resultado, vamos dar um exemplo onde o limite é atingido. Para um inteiro positivo n, sejam M_0, M_1, ..., M_n matróides isomorfas a $U_{3,6}$ tal que

$$|E(M_i) \cap E(M_j)| = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad |i-j| \geq 2 \\ 2 & , \text{ se } \quad |i-j| = 1 \end{cases}$$

Para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, vamos definir $A_i = E(M_i) - [E(M_{i-1}) \cup E(M_{i+1})]$. Sejam A_{-1}, A_0 e A_n, A_{n+1} conjuntos de 2 elementos que particionam, respectivamente, $E(M_0) - E(M_1)$ e $E(M_n) - E(M_{n-1})$. Sejam C_{-1}, C_0, C_1, ..., C_n, C_{n+1}, $E(M_0) \cup E(M_1) \cup ... \cup E(M_n)$ uma família de conjuntos dois a dois disjuntos. Para todo $i \in \{-1, 0, 1, 2, ..., n, n+1\}$, suponha $|C_i| = 5$ e que N_i seja uma matróide sobre

$(C_i \cup A_i)$ de posto 3 tal que C_i seja união de duas linhas de 3 pontos e os elementos de A_i sejam livremente colocados em N_i. Observe que a conexão paralela generalizada de M_0, M_1, ..., M_n, N_{-1}, N_0, N_1, ..., N_n, N_{n+1} é uma matróide M cominimalmente 3-conexa tal que $T(M) = C_{-1} \cup C_0 \cup C_1 \cup ... \cup C_n \cup C_{n+1}$. Então, $t(M) = 5n + 15$, pois os únicos elementos que pertencem a triângulos de M são os elementos dos $n + 3$ $C_i's$ os quais têm 5 elementos cada e, $e(M) = (6n + 6) - 2n + (5n + 15) = 9n + 21$, onde $6n + 6$ é referente aos elementos de $U_{3,6}$, $2n$ é referente aos elementos da interseção entre os planos $U_{3,6}$, e $5n + 15$ é referente aos elementos dos $C_i's$. Então,

$$t(M) = 5n + 15 = \frac{5(9n + 21) + 30}{9} = \frac{5e(M) + 30}{9}.$$

Observe que M é 3-conexa, pois $U_{3,6}$ e N_i são. Temos também que M é cominimalmente 3-conexa, pois ao contraírmos um elemento e dos $C_i's$ criamos um par de elementos em paralelo e assim M/e não é 3-conexa, para todo $e \in C_i$. Se contraírmos um elemento e das linhas de conexão entre os planos, tendo em vista que existe uma 3-separação exata $\{X, E(M) - X\}$ de M tal que X e $E(M) - X$ gerem e, temos que M/e não é 3-conexa já que $\{X - e, E(M/e) - (X - e)\}$ é uma 2-separação de M/e.
De fato, sem perda de generalidade, que $e \notin X$, e daí

$$r_{M/e}(X-e)+r_{M/e}(E(M/e)-(X-e))-r(M/e) = r_M(X)+r_M(E(M)-X)-r(M)-1 = 1,$$

já que X é 3-separador de M. Esta 3-separação é obtida tomando

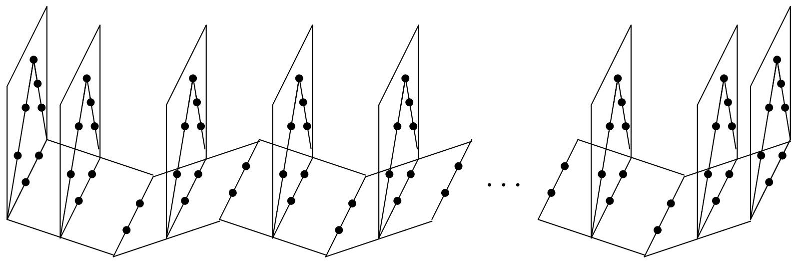
$$X = (E(N_i) - e) \cup (\bigcup_{k=-1}^{i-1} E(N_k)) \cup (\bigcup_{k=0}^{i-1}(E(M_k) \cap E(M_{k+1}))).$$

Vamos ver que X é 3-separador exato de M. Para isso, suponha $e \in A_i$, para $i \in \{0, ..., n\}$, então $r(X) = 4 + 2i$, $r(E(M) - X) = 2(n - i + 2)$ e $r(M) = 8 + 2(n - 1)$; daí $\xi_M(X, E(M) - X) = 2$. Se $e \in E(M) - [(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \cup (\bigcup_{i=-1}^{n+1} C_i)]$, então tomamos

$$X = (L_j - e) \cup (E(M_j) - L_j) \cup (\bigcup_{i=0}^{j-1} E(M_i)) \cup ((\bigcup_{i=0}^{j} E(N_i)),$$

para $j \in \{0, ..., n-1\}$, onde L_j é a j-ésima linha a qual e pertence. Daí temos $r(X) = 5 + 2j$, $r(E(M) - X) = 5 + 2(n - j - 1)$ e $r(M) = 8 + 2(n - 1)$. Assim, $r(X) + r(E(M) - X) - r(M) = 2$. E com isso, provamos a existencia do X.

A figura abaixo mostra a representação geométrica da matróide M acima:



Demonstração. Sunhonha o resultado falso e escolha um contra-exemplo M tal que $(r(M), e(M), t(M))$ seja mínimo na ordem lexográfica. Para simplificar a notação, faça $\alpha = \frac{5}{9}$ e $\beta = \frac{30}{9}$. Se $t(M) = e(M)$, então $e(M) < \alpha e(M) + \beta$, logo

$$(1 - \alpha)8 \leq (1 - \alpha)e(M) < \beta; \tag{4.1}$$

uma contradição. Então, $E(M) - T(M) \neq \varnothing$. Escolha $e \in E(M) - T(M)$. Pelo fato de M ser cominimalmente 3-conexa, temos que $M^* \backslash e = (M/e)^*$ não é 3-conexa, logo M/e não é 3-conexa. Então, seja $\{X, Y\}$ uma 2-separação de M/e. Observe que $\min\{r_M(X), r_M(Y)\} \geq 3$, pois: (a) X e Y geram e em M, (b) e não pertence a triângulo de M e daí $r_{M/e}(X) \geq 2$ e $r_{M/e}(Y) \geq 2$. Além disso, X e Y são conjuntos 3-separadores de M. Para $Z \in \{X, Y\}$, seja M_Z um fator de M com respeito a Z tendo L_Z como linha especial. Pelo lema 3.0.10 (v), M_Z é uma matróide cominimalmente 3-conexa. Como visto acima, e é gerado por Z e por $E(M) - Z$, e com isto, segue que $e \in cl_M(Z) \cap cl_M(E(M) - Z) \subseteq L_Z$, logo $e \in L_Z$, para $Z \in \{X, Y\}$. Então, $e \in L_X \cap L_Y$. Se $|L_Z \cap E(M)| \geq 3$, então $L_X = L_Y$, pois não vamos acrescentar em L_Z elementos não pertencentes a $E(M)$. Assim, $L_X = L_Y$ é uma linha de M que contem e, uma contradição, pois $e \notin T(M)$. Então $1 \leq |L_Z \cap E(M)| \leq 2$, pois $e \in L_Z$. Em particular, $|L_X| = |L_Y| = 3$. Como podemos adicionar os mesmos elementos não pertencentes a $E(M)$ em L_X e L_Y, assumiremos que $L_X = L_Y = L$.

Agora, provaremos que existe $X_e \in \{X - L, Y - L\}$ tal que:

(X1) $e \in L_e$, onde $L_e = cl_M(X_e) - X_e$.

(X2) $|L_e| \leq 2$.

(X3) $X_e \subseteq R_1(M^*)$.

(X4) $L_e = cl_M(E(M) - X_e) \cap cl_M(X_e)$.

(X5) Existem linhas de 3-pontos L_{1e} e L_{2e} de M tal que

$$X_e \cup [L_e \cap T(M)] = L_{1e} \cup L_{2e} \text{ e } L_{1e} \cap L_{2e} = \{x_e\},$$

para algum $x_e \in X_e \cup [L_e \cap T(M)]$.

Para provar a existência de X_e, dividiremos em dois casos.
Caso 1: $[L \cap E(M)] \cap T(M) \neq \varnothing$.
Como $e \in L$, $e \notin T(M)$ e $1 \leq |L \cap E(M)| \leq 2$, segue que

$$L \cap E(M) = \{e, f\}, \text{ para algum } f \in T(M).$$

Como $\{E(M_X) - L, E(M_Y) - L, L \cap E(M)\}$ é uma partição de $E(M)$, segue que:

$$\begin{aligned} e(M) &= |E(M_X) - L| + |E(M_Y) - L| + |L \cap E(M)| \\ &= (e(M_X) - 3) + (e(M_Y) - 3) + 2 \\ &= e(M_X) + e(M_Y) - 4 \end{aligned}$$

pois para $Z \in \{X, Y\}$, temos que $L \subseteq E(M_Z)$, $|L| = 3$ e $|L \cap E(M)| = 2$. Logo,

$$e(M) = e(M_X) + e(M_Y) - 4. \tag{4.2}$$

Note que, pelo lema 3.0.8, toda linha de M_Z diferente de L é linha de M, pois intersecta L em num máximo um elemento. Donde temos que um elemento de $Z - L$ pertence a um triângulo de M_Z se, e somente se, este elemento pertence a um triângulo de M. Como f pertence a um triângulo de M, segue que:

$$\begin{aligned} t(M) &= (t(M_X) - 3) + (t(M_Y) - 3) + |\{f\}| \\ &= (t(M_X) - 3) + (t(M_Y) - 3) + 1 \\ &= t(M_X) + t(M_Y) - 5, \end{aligned}$$

pois L é triângulo de M_X e M_Y. Logo,

$$t(M) = t(M_X) + t(M_Y) - 5. \tag{4.3}$$

Vamos assumir o resultado válido para M_X e M_Y. Então

$$t(M_Z) \geq \alpha e(M_Z) + \beta, \text{ para } Z \in \{X, Y\}.$$

Somando as desigualdades temos:

$$t(M_X) + t(M_Y) \geq \alpha[e(M_X) + e(M_Y)] + 2\beta$$

Substituindo (4.2) e (4.3), temos:

$$t(M) + 5 \geq \alpha[e(M) + 4] + 2\beta.$$

Esta desigualdade pode ser reescrita como

$$t(M) - \alpha e(M) - \beta \geq 4\alpha + \beta - 5 \tag{4.4}$$

Donde obtemos uma contradição, pois α e β satisfazem

$$4\alpha + \beta - 5 \geq 0 \tag{4.5}$$

e estamos assumindo o resultado do teorema falso para M.

Então, o resultado não vale para M_X ou M_Y, digamos M_Y. Como $r(M_Y) < r(M)$ e M é contra-exemplo minimal, segue que M_Y não satisfaz as hipóteses do teorema. Logo, $e(M_Y) \leq 7$ e assim, $|Y - L| \leq 4$. Agora, vamos provar que $r(M_Y) = 3$. Se $r(M_Y) > 3$, então $r(M_Y) = r_M(Y) = r_M(Y - L) = 4$. Logo, $T_c^* = Y - (L \cup c)$ é uma tríade de M_Y para todo $c \in Y - L$. Este fato se dá, pois neste caso $e(M_Y) = 7$,

$$r^*_{M_Y}(Y - (L \cup c)) = |Y - (L \cup c)| + r_{M_Y}(E(M_Y) - (Y - (L \cup c))) - r(M_Y)$$

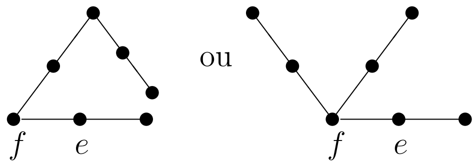
e

$$r_{M_Y}(E(M_Y) - (Y - (L \cup c))) = r_{M_Y}(L \cup c) = 3.$$

Então, $M_Y^*|(Y - L) \cong U_{2,4}$. Logo, pelo lema 2.0.5, $M_Y^* \backslash c$ é 3-conexa, para todo $c \in Y - L$; um absurdo com cominimalidade de M_Y, já que $M_Y/c = (M_Y^* \backslash c)^*$. Então, $r(M_Y) = 3$. Como $r(M_Y) = 3$ e M_Y é cominimalmente 3-conexa, temos que a contração de um elemento a de M_Y nos dá um par de elementos em paralelo em M_Y/a, desta forma todo elemento de M_Y pertence a uma linha com pelo menos 3 elementos. Sejam $L_1, L_2, ..., L_n$ as linhas de M_Y distintas de L que tenham pelo menos 3 elementos. Observe que $L_i \subseteq E(M_Y) - (L - f)$, pois os elementos pertencentes a $L - E(M)$ são livremente colocados em L, e e, por hipótese, não pertence a nenhum triângulo de M, e pelo lema 3.0.8, e não pertence a nenhum triângulo de M_Y. Então, $L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n \in \{Y - L, (Y \cup f) - (L - f)\}$. Observe que $L_i - f$ está propriamente contido em $Y - L$, pois se $L_i - f = Y - L$, teríamos

$$r_M(Y - L) + r_M(E(M) - (Y - L)) - r(M) = r_M(L_i - f) + r_M(cl_M(X)) - r(M),$$

mas $r_M(L_i - f) = 2$ e $r_M(cl_M(X)) = r(M) - 1$. Assim $L_i - f$ e, portanto, $Y - L$ seria um conjunto 2-separador de M, que é 3-conexa; um absurdo. Logo, $n \geq 2$. Então, $n = 2$ e $|L_1| = |L_2| = 3$, pois, caso cotrário, teríamos $e(M_Y) \geq 8$. Observe que L_1 ou L_2 contem f, senão $e(M_Y) \geq 8$. Assim, as possíveis representações geométricas para M_Y são



Neste caso, tomemos $X_e = Y - L$. Claramente, $Y - L$ satisfaz (X1), (X2) e (X4), observando que $L_e = \{e, f\}$ e que $L - \{e, f\} \notin cl_M(X_e)$. $X_e = Y - L$ também satisfaz (X5) tomando $x_e = f$. Como para todo $a \in E(M_Y) - L = Y - L$, temos que $cl_M(Y)$ não é a união de duas linhas que contem a. Com isto, e como $r(M_Y) = 3$, M é 3-conexa e Y é um conjunto 3-separador de M, segue, pelo lema 3.0.10 (ii), que $si(M/a)$ é 3-conexa para todo $a \in Y - L$, assim $X_e \subseteq R_1(M^*)$, já que

$$\begin{aligned} R_1(M^*) &= \{a \in E(M) : co(M^* \backslash a) \text{ é } 3-conexa\} \\ &= \{a \in E(M) : co((M/a)^*) \text{ é } 3-conexa\} \\ &= \{a \in E(M) : si(M/a) \text{ é } 3-conexa\}. \end{aligned}$$

Logo (X3) segue.

Caso 2: $[L \cap E(M)] \cap T(M) = \varnothing$

Para $Z \in \{X, Y\}$, seja H_Z uma matróide (ver representação geométrica na próxima figura) tal que:

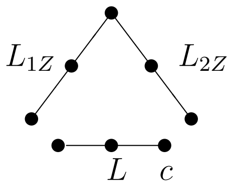
i) $L = E(H_X) \cap E(H_Y)$;

ii) $E(H_X) - L$, $E(H_Y) - L$ e $E(M)$ são dois a dois disjuntos;

iii) $|E(H_X)| = |E(H_Y)| = 8$;

iv) $r(H_X) = r(H_Y) = 3$; e

v) Para $Z \in \{X, Y\}$, H_Z tem apenas três linhas L, L_{1Z}, L_{2Z} tendo 3 pontos cada e $L_{1Z} \cup L_{2Z} = E(H_Z) - L$.



Pelo Lema 3.0.10 (v), para $Z \in \{X, Y\}$, M_Z é cominimalmente 3-conexa. Seja K_Z a conexão paralela generalizada de M_Z e H_Z sobre L. Observe que K_Z é cominimalmente 3-conexa, pois:

- K_Z é 3-conexa, pois M_Z e H_Z são.
- Como $K_Z|E(M_Z) = M_Z$, se $a \in E(M_Z)$, temos que M_Z/a não é 3-conexa (M_Z é cominimalmente 3-conexa). Logo, K_Z também não é.
- Como $K_Z|E(H_z) = H_Z$, se $a \in E(H_Z)$, temos que H_Z/a forma um circuito C de tamanho 2, já que todos os seus elementos estão em linhas de 3 pontos, e $C \subseteq E(K_Z/a)$ e assim K_Z/a não é 3-conexa.

Escolha $c \in L - E(M)$. Agora, vamos provar que $N_Z = K_Z \backslash c$ é 3-conexa. Se W é um conjunto 2-separador de N_Z, então $|W| > 2$, senão pelo dual do lema 2.0.6 temos que $T^* = W \cup c$ é uma tríade de K_Z. Mas isto contraria a ortogonalidade, pois como $c \in T^* \cap L$ temos $|T^* \cap L| \geq 2$, e $T^* \cap L_{iZ} \neq \varnothing$ para algum $i \in \{1, 2\}$, e então $|T^* \cap L_{iZ}| \geq 2$, donde $L \cap L_{iZ} \neq \varnothing$; um absurdo. Então $W - d$ é um conjunto 2-separador de $K_Z \backslash c/d$, para $d \in L_{1Z} \cap L_{2Z}$, pois

$$(*) \quad r_{K_Z \backslash c/d}(W - d) + r_{K_Z \backslash c/d}(E(K_Z \backslash c/d) - (W - d)) - r(K_Z \backslash c/d)$$

$$= (r_{N_Z}(W \cup d) - 1) + (r_{N_Z}(E(N_Z) - W) - 1) - (r(N_Z) - 1),$$

neste caso estamos supondo, sem perda de generalidade, que $d \notin W$. Como $r_{N_Z}(W \cup d) = r_{N_Z}(W) + 1$ ou $r_{N_Z}(W)$ e W é 2-separador de N_Z, temos que $(*) = 0$ ou 1. Assim, $W - d$ é conjunto 2-separador de $K_Z \backslash c/d$. Mas, os únicos conjuntos

2-separadores de $K_Z\backslash c/d$ são $L_{1Z} - d$, $L_{2Z} - d$ e seus complementos, para ver isto, basta contrair d em N_Z, observar os dois circuitos de tamanho 2 que irão se formar em $K_Z\backslash c/d$ e notar que em $E(N_Z) - E(H_Z)$ não tem conjuntos 2-separadores. Note que L_{1Z} e L_{2Z} não são conjuntos 2-separdores de N_Z, já que
$(r_{N_Z}(L_{iZ}) + r_{N_Z}(E(N_Z) - L_{iZ}) - r(N_Z) = (r_{K_Z}(L_{iZ}) + r_{K_Z}(E(K_Z) - (L_{iZ} \cup c)) - r(K_Z)$, $r_{K_Z}(L_{iZ}) = 2$ e $r_{K_Z}(E(K_Z) - (L_{iZ} \cup c)) = r(K_Z)$. Donde temos uma contradição, pois W é 2-separador de N_Z. Então N_Z é 3-conexa. Como K_Z é cominimalmente 3-conexa e c pertence a exatamente uma linha de K_Z com pelo menos 3 pontos (pois, para fazer a conexão paralela generalizada pode haver a necessidade de adicionar alguns pontos à linha afim de torná-la modular) chamada L, segue que N_Z é cominimalmente 3-conexa, pois N_Z/g não é 3-conexa, para todo $g \in L - c$. Veja que de fato N_Z/g não é 3-conexa para $g \in L - c$: Seja X um conjunto 3-separador de N_Z tal que X e $E(N_Z) - X$ gerem $g \in L - c$ em N_Z. Vamos mostrar que $X - g$ é um conjunto 2-separador de N_Z/g. Isto ocorre, pois $\{E(M_Z) - L, E(H_Z)\}$ é 3-separação exata de K_Z visto que

$$r_{KZ}(E(M_Z) - L) + r_{KZ}(E(H_Z)) - r(K_Z) = r(M_Z) + 3 - (r(M_Z) + 1) = 2.$$

Assim, $\{E(M_Z) - L, E(H_Z) - g\}$ é 2-separação exata de K_Z/g e ambos os conjuntos geram g. Assim, N_Z/g não é 3-conexa para $g \in L - c$.
Como $\{E(N_X) - E(H_X), E(N_Y) - E(H_Y), L \cap E(M)\}$ é uma partição de $E(M)$, segue que

$$\begin{aligned} e(M) &= |E(N_X) - E(H_X)| + |E(N_Y) - E(H_Y)| + |L \cap E(M)| \\ &= e(N_X) + e(N_Y) + |L \cap E(M)| - 14 \end{aligned}$$

pois $|E(N_Z) - E(H_Z)| = e(N_Z) - 7$ para $Z \in \{X, Y\}$. Logo,

$$e(M) = e(N_X) + e(N_Y) + |L \cap E(M)| - 14. \tag{4.6}$$

Pelo Lema 3.0.8, para $Z \in \{X, Y\}$, um elemento de $cl_M(Z) = Z \cup (L \cap E(M))$ pertence a um triângulo de N_Z se, e somente se, pertence a um triângulo de M. Então,

$$t(M) = (t(N_X) - 5) + (t(N_Y) - 5) = t(N_X) + t(N_Y) - 10,$$

onde esta diferença de 5 se deve aos elementos de $L_{1Z} \cup L_{2Z}$ os quais pertencem a triângulos de N_Z e $[L \cap E(M)] \cap T(M) = \varnothing$ (por hipótese). Logo,

$$t(M) = t(N_X) + t(N_Y) - 10. \tag{4.7}$$

Assuma o resultdo válido para N_X e N_Y. Então

$t(N_Z) \geq \alpha e(N_Z) + \beta$,

para $Z \in \{X, Y\}$. Somando essas desigualdades para $Z \in \{X, Y\}$, obtemos:

$t(N_X) + t(N_Y) \geq \alpha[e(N_X) + e(N_Y)] + 2\beta$.

Substituindo (4.6) e (4.7), temos:

$t(M) + 10 \geq \alpha[e(M) + 14 - |L \cap E(M)|] + 2\beta$.

Reorganizando a desigualdade, temos:

$$t(M) - \alpha e(M) - \beta \geq [14 - |L \cap E(M)|]\alpha + \beta - 10. \tag{4.8}$$

Donde obtemos uma contradição, pois $1 \leq |L \cap E(M)| \leq 2$ e α e β satisfazem

$$12\alpha + \beta - 10 \geq 0 \tag{4.9}$$

Então o resultado é falso para N_X ou N_Y, digamos N_X.

Pela escolha de M, e pelo fato de $|E(N_X)| \geq 8$, segue que $r(N_X) \geq r(M)$. Agora, como $r(N_X) = r(M_X) + 1 = r(X) + 1$e $r(M) = r(X) + r(Y) - 2$, temos $r(X) + 1 \geq r(X) + r(Y) - 2$, logo $r(Y) \leq 3 = r(H_Y)$, donde $r(Y) = 3$ já que $r(Y) \geq 3$, e então $r(M) = r(N_X)$. Ainda pela escolha de M, temos $e(N_X) \geq e(M)$. Como $e(N_X) = |X - L| + (|L| - 1) + 5 = |X - L| + 7$ e $e(M) = |Y - L| + |X - L| + |E(M) \cap L|$, temos $|Y - L| \leq 7 - |L \cap E(M)|$. Se fosse

$|Y-L|=6$ teríamos $|L\cap E(M)|=1$ e $e(M)=e(N_X)$. E novamente pela escolha de M, temos $t(N_X)\geq t(M)$. Por (4.7), temos $t(M)=t(N_X)+t(N_Y)-10$, logo $t(N_Y)\leq 10$; um absurdo (pois $t(N_Y)\geq 11$, já que $r(M_Y)=r(Y)=3$ e M_Y é cominimalmente 3-conexa, logo $Y-L\subseteq T(N_Y)$, mas ainda tem os cinco elementos de H_Y os quais pertencem à triângulos de N_Y.). Assim $|Y-L|\leq 5$ e $|L\cap E(M)|=2$.

Como $r(M_Y)=r(Y)=3$ e M_Y é cominimalmente 3-conexa, segue que todo elemento de M_Y pertence a uma linha tendo no mínimo 3 elementos. Sejam $L_1,...,L_n$ as linhas de M_Y distintas de L que tenham pelo menos 3 elementos. Observe que $L_i\subsetneq E(M_Y)-L$, pois a) os elementos de $L-E(M)$ são livremente colocados em L; b) os elementos de $L\cap E(M)$ não pertencem a triângulos de M (por hipótese), e pelo lema 3.0.8, não pertencem a triângulos de M_Y. Então, $L_1\cup...\cup L_n=Y-L$. Como L_i está propriamente contida em $Y-L$, pois $2=r(L_i)<r(Y-L)=r(Y)=3$, segue que $n\geq 2$. Então $n=2$, pois $|Y-L|\leq 5$. Logo, $|L_1|=|L_2|=3$. Neste caso, tomamos $X_e=Y-L$. Vamos ver que, de fato, $X_e=Y-L$ satisfaz (X1), (X2), (X3), (X4), (X5). $X_e=Y-L$ satisfaz (X1), pois $e\in cl_M(Y-L)$ e $e\notin(Y-L)$, logo

$$e\in L_e=cl_M(X_e)-X_e=cl_M(Y-L)-(Y-L).$$

Satisfaz (X2), pois $L_e=cl_M(Y-L)-(Y-L)\subseteq cl_M(Y)\cap cl_M(E(M)-Y)=L\cap E(M)$ e $1\leq|L\cap E(M)|\leq 2$, logo $|L_e|\leq 2$. $X_e=Y-L$ saitisfaz (X3), pois para todo $a\in E(M_Y)-L=Y-L$, temos que $cl_M(Y)$ não é a união de duas linhas que contêm a, $r(M_Y)=3$, M é 3-conexa, Y é 3-separador de M, assim pelo lema 3.0.10 (ii), temos que $si(M/a)$ é 3-conexa, para todo $a\in Y-L$ e assim (X3) está provado, já que $X_e=Y-L\subseteq\{a\in E(M); si((M/a)\text{ é }3-conexa\}=R_1(M^*)$. $X_e=Y-L$ satisfaz (X4), pois $L_e=cl_M(Y-L)-(Y-L)=cl_M(Y-L)\cap(E(M)-(Y-L)\subseteq cl_M(Y-L)\cap cl_M(E(M)-(Y-L)=L\cap E(M)$. Para ver que $X_e=Y-L$ satisfaz (X5), basta observar que $L_e\cap T(M)=\varnothing$, pois $L_e\subseteq L\cap E(M)$ e $[L\cap E(M)]\cap T(M)=\varnothing$ (por hipótese), e agora tomamos L_{1e} e L_{2e} como L_1 e L_2, daí $X_e\cup[L_e\cap T(M)]=X_e=Y-L=L_1\cup L_2=L_{1e}\cup L_{2e}$.

Em seguida provaremos que

$$X_e = X_f \text{ ou } X_e \cap X_f = \varnothing, \text{ onde } \{e, f\} \text{ é um 2-subconjunto de } E(M) - T(M). \quad (4.10)$$

Além disso, quando o primeiro caso ocorre, temos $L_e = L_f = \{e, f\}$. Suponha que (4.10) não vale para algum e e f. Em particular,

$$X_e \cap X_f \neq \varnothing. \quad (4.11)$$

Como $E(M) - X_e$ não gera nenhum elemento de X_e, por (X1) e (X4), e $X_f \cup [L_f \cap T(M)] = L_{1f} \cup L_{2f}$, por (X5), segue que:

$$|L_{if} - X_e| \neq 2, \text{ para } i \in \{1, 2\} \quad (4.12)$$

Em seguida, provaremos que

$$(X_f \cup L_f) \cap (X_e \cup L_e) \text{ não contem uma base de } X_f \cup L_f. \quad (4.13)$$

Se $(X_f \cup L_f) \cap (X_e \cup L_e)$ contem uma base de $X_f \cup L_f$, então $X_e \cup L_e$ gera $X_f \cup L_f$. Logo,

$$X_f \cup L_f \subseteq cl_M(X_e \cup L_e) = X_e \cup L_e,$$

pois $L_e \cup X_e = cl_M(X_e)$ é fechado em M. Como $X_e \subseteq R_1(M^*)$ por (X3) e $f \notin R_1(M^*)$ (pois $f \in L$ e $co(M^* \backslash f)$ não é 3-conexa para $f \in L$), segue $f \in L_e$ e assim $L_e = \{e, f\}$ por (X1) e (X2). Então, $X_e = X_f$ e $L_e = L_f$, por (X2) e (X5), ($|L_e| \leq 2$, $L_e \subseteq L \cap E(M)$, $[L \cap E(M)] \cap T(M) = \varnothing$ visto que $1 \leq |L \cap E(M)| \leq 2$); uma contradição. Então, $(X_f \cup L_f) \cap (X_e \cup L_e)$ não contem uma base de $X_f \cup L_f$ e (4.13) vale. Então, por (4.11), (4.12) e (4.13), segue que $L_e = \{e, x_f\}$ e $L_{if} - x_f = X_e \cap X_f$, para algum $i \in \{1, 2\}$. Digamos $i = 1$ e $L_2 f - x_f = X_f - (X_e \cap L_e)$. Então, L_{1f} é uam linha de três pontos contida em $X_e \cup [L_e \cap T(M)]$. Então, $L_{1f} = L_{je}$, para algum $j \in \{1, 2\}$, digamos $j = 1$. Similarmente, $L_f = \{f, x_e\}$ e $x_e \in L_{1f} = L_{1e}$. Como $\{x_e, x_f\} \subseteq L_{1e}$ e $|L_{1e} \cap X_e| \geq 2$, segue por (X3) e (X5) que $x_e = x_f$. Como X_e e X_f são conjuntos 3-separadores de M tais que $X_e \cap X_f = L_{1e} - x_e$, segue por submodularidade que $X_e \cup X_f$ é um conjunto 3-separador de M. Observe que e, f e x_e são elementos de M que não pertencem a $X_e \cup X_f$. Como $\{e, f, x_e\} \subseteq cl_M(X_e \cup X_f)$, segue que $\{e, f, x_e\}$ está contido numa linha de M; uma contradição. Assim, (4.10) segue.

Existem elementos $e_1, ..., e_n$ pertencentes à $E(M) - T(M)$ tal que
$L_{e_1} - T(M), ..., L_{e_n} - T(M)$ é uma partição de $E(M) - T(M)$.
Então,

$$|E(M) - T(M)| = n + r, \tag{4.14}$$

onde r é o número de índices $i \in \{1, ..., n\}$ tais que $|L_{e_i} - T(M)| = 2$. Como $X_{e_1}, ..., X_{e_n}$ são disjuntos dois a dois por (4.10) e $X_{e_i} \cup [L_{e_i} \cap T(M)] \subseteq T(M)$ segue que

$$t(M) \geq 4n + r = |X_{e_1}| + ... + |X_{e_n}|.$$

E então

$$t(M) = 4n + r + \gamma, \tag{4.15}$$

para algum inteiro γ não-negativo. Observe que os elementos de $T(M) \cap [L_{e_1} \cup ... \cup L_{e_n}]$ são contados em γ. Como $t(M) < \alpha e(M) + \beta$, segue que:

$$4n + r + \gamma < \alpha(5n + 2r + \gamma) + \beta.$$

Esta desigualdade pode ser reescrita como

$$\gamma(1 - \alpha) < n(5\alpha - 4) + r(2\alpha - 1) + \beta.$$

Substituindo os valores de α e β, temos:

$$\gamma\big(1 - \frac{5}{9}\big) < n\big(\frac{25}{9} - 4\big) + r\big(\frac{10}{9} - 1\big) + \frac{30}{9},$$

donde

$$0 \leq 4\gamma < -11n + r + 30 \tag{4.16}$$

Como $0 \leq r \leq n$, temos uma contradição, a não ser que $n \leq 2$.

Para concluir a demonstração, vamos dividir em alguns casos.

Se $n = 1$ e $r = 1$, então X_{e_1} e $E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})$ tem ambos pelo menos cinco elementos(se $|E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})| \leq 4$, então podemos trocar $E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})$ por X_{e_1} no caso 2 e obtermos assim uma contradição). Então, $\gamma \geq 5$ donde temos uma contradição com (4.16).

Se $n = 1$ e $r = 0$, então X_{e_1} e $E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})$ tem ambos pelo menos quatro elementos (se $|E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})| \leq 3$, então podemos trocar $E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})$ por X_{e_1} no caso 1 e obtermos assim uma contradição). Então, $\gamma \geq 5$ donde temos novamente uma contradição com (4.16). Então $n = 2$. Se $c \in T(M) - [X_{e_1} \cup X_{e_2}]$, então existe um triângulo T de M tal que $c \in T$. Por (X1) e (X4), $T \cap X_{e_1} = \varnothing$ ou $|T \cap X_{e_i}| = 2$, para $i \in \{1, 2\}$. Se $T \cap X_{e_1} = T \cap X_{e_2} = \varnothing$, então $\gamma \geq 3$, já que X_{e_1}, $X_{e_2} \subseteq T(M)$ e $t(M) = 4n + r + \gamma = 10 + \gamma$ e $t(M) \geq 13$, pois $|X_{e_1}| = |X_{e_2}| = 5$ e $|T| = 3$, logo $\gamma \geq 3$ e assim obtemos uma contradição com (4.16). Então, $|T \cap X_{e_i}| = 2$ e $c \in L_{e_i}$ para algum $i \in \{1, 2\}$. Então, $E(M) = X_{e_1} \cup X_{e_2} \cup L_{e_1} \cup L_{e_2}$.

Seja M_1 um fator de M com respeito a $X_{e_2} \cup L_{e_1} \cup L_{e_2}$ tendo L_1 como linha especial. Note que $L_{e_1} \subseteq L_1$, pois $L_1 \supseteq cl_M(X_{e_1}) \cap cl_M(X_e \cup L_{e_2} \cup L_{e_1}) = L_{e_1}$, por (X4). Pelo Lema 3.0.10 (i), M_1 é 3-conexa. Como X_{e_2} é um conjunto 3-separador de M, pelo Lema 3.0.9 (ii), segue que X_{e_2} é 3-separador de M_1. Seja M_2 um fator de M_1 com respeito a $L_{e_1} \cup L_{e_2}$. Pelo Lema 3.0.10 (i), M_2 é 3-conexa, mas $E(M_2) = L_1 \cup L_2$ e $|L_1| = |L_2| = 3$, uma contradição, pois $\{L_1, L_2 - L_1\}$ é 2-separação de M_2, já que $r(L_1) + r(L_2 - L_1) - r(M) = 2 + 2 - 3 = 1$. $\square$

Capítulo 5

Demonstração do Teorema 0.1.1

Para uma matróide 3-conexa M, seja $r_0(M) = |R_0(M)|$, onde

$$R_0(M) = \{e \in E(M) : E(M)\backslash e \text{ é 3-conexa}\}.$$

Nesta seção, vamos provar a dual do Teorema 0.1.1, chamemos:

Teorema 5.0.2. *Seja M uma matróide 3-conexa. Se $|E(M)| \geq 5$, então*

$$3(t(M) + r_0(M^*)) \geq e(M) + 10.$$

Antes da demonstração deste resultado, vamos dar um exemplo onde o limite é atingido. Para um inteiro positivo n, sejam $A_0, B_1, A_1, B_2, A_2, B_3, A_3, ..., A_{n-1}, B_n, A_n$ conjuntos disjuntos dois a dois tais que , para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $|A_i| = 2$ e, para todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, $|B_j| = 1$. Para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, seja M_i uma matróide isomorfa a $U_{3,5}$ sobre $A_{i-1} \cup B_i \cup A_i$. Seja M a conexão paralela generalizada de $M_1, M_2, ...M_n$. Note que M é 3-conexa, pois $U_{3,5}$ é 3-conexa.

Afirmação 1. *M/e não é 3-conexa se, e somente se, $e \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}$.*

Demonstração. Para mostrar que M/e é 3-conexa para $e \in \bigcup_{j=1}^{n} B_j \cup A_0 \cup A_n$, basta ver que para qualquer partição $\{X, E(M/e) - X\}$ de M/e, vale

$r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) \geq 2$. De fato,

$r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) = r_M(X \cup e) + r_M((E(M) - X) \cup e) - r(M) - 1.$

Se $|X| \in \{1, 2\}$, temos que apenas $E(M) - X$ gera e em M e, portanto,

$$r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) \geq 2.$$

Se $|X| > 2$ e só o X gera e em M (neste caso, o X tem que ter pelo menos 3 elementos no mesmo plano de e e, assim, $E(M) - X$ não gera e), daí

$$r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) \geq 2.$$

Se $|X| > 2$ e e é gerado por ambos X e $E(M) - X$ em M, temos que

$$r_M(X) + r_M(E(M) - X) - r(M) \geq 3$$

e assim

$$r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) \geq 2.$$

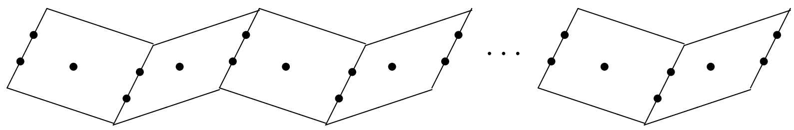
Agora vamos mostrar que M/e não é 3-conexa se $e \in \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, para isso vamos tomar um conjunto 3-separador exato X de M, tal que X e $E(M) - X$ gerem e em M. Este tal conjunto X pode ser tomado como $X = e \cup B_i \cup B_{i-1} \cup ... \cup B_1 \cup A_{i-1} \cup A_{i-2} \cup ... \cup A_0$, para $i \in \{1, ..., n - 1\}$. Logo, $r(X) = 2 + i$, $r(E(M) - X) = 2 - i + n$, $r(M) = n + 2$. Daí $r(X) + r(E(M) - X) - r(M) = 2$ e assim,

$$\begin{aligned} r_{M/e}(X) + r_{M/e}(E(M/e) - X) - r(M/e) &= \\ = r_M(X \cup e) + r_M((E(M) - X) \cup e) - r(M) - 1 & \\ = r_M(X) + r(E(M) - X) - r(M) - 1 = 1. & \end{aligned}$$

Logo, M/e não é 3-conexa se, e somente se, $e \in \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. $\square$

Agora, como M não tem nenhum triângulo, segue que:
$t(M) + r_0(M^*) = n + 4 = \frac{(3n+2)+10}{3} = \frac{e(M)+10}{3}$,
onde $n + 4$ representa os elementos de $\bigcup_{j=1}^{n} B_j \cup A_0 \cup A_n$ e
$e(M) = 5n - (2n - 2) = 3n + 2$, onde $5n$ representa os elementos das n $U_{3,5}$ e $2n - 2$ representa os elementos das $n - 1$ interseções entre os planos.

Abaixo veremos a representação geométrica da matróide M definida acima:



Demonstração. Vamos definir

$$\delta(M) = \begin{cases} 1 & \text{se } M \text{ tem diferentes triângulos com interseção não vazia,} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em vez de mostrar o teorema 5.0.2, vamos mostrar que

$$3(t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)) \geq e(M) + 10 \text{ se } |E(M)| \geq 7. \tag{5.1}$$

O teorema 5.0.2 é uma conseqüência de (5.1) a não ser que $|E(M)| \in \{5, 6\}$. Mas neste caso, $E(M) \subseteq T(M) \cup R_0(M^*)$ e o teorema 5.0.2 segue. Para ver isto, podemos observar as possíveis representações geométricas para M e conferir. Suponha (5.1) falso e escolha um contra-exemplo M tal que $(r(M), e(M), t(M), r_0(M^*))$ seja mínimo na ordem lexográfica. Se $t(M) + r_0(M^*) = e(M)$, então $3e(M) < e(M) + 3\delta(M) + 10$, logo $e(M) < \frac{13}{2}$; contradição. Então,

$$E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)] \neq \varnothing.$$

Escolha $e \in E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)]$. Como $e \notin R_0(M^*)$, temos que M/e não é 3-conexa, então seja $\{X, Y\}$ uma 2-separação de M/e. Como $|X| \geq 2$, $e \notin T(M)$ e M é simples, temos que $r_{M/e}(X) = r_M(X \cup e) - r_M(e) \geq 2$, analogamente, temos $r_{M/e}(Y) \geq 2$. Assim,

$$\min\{r_{M/e}(X), r_{M/e}(Y)\} \geq 2.$$

Como $\{X, Y\}$ é 2-separação de M/e, temos, pelo lema 2.0.3, que X e Y geram e em M. Com isto, temos que $r_M(X) = r_M(X \cup e) = r_{M/e}(X) + r(e) \geq 3$, analogamente, $r_M(Y) \geq 3$. Logo,

$$\min\{r_M(X), r_M(Y)\} \geq 3.$$

Além disso, X e Y são conjuntos 3-separadores de M. Para $Z \in \{X, Y\}$, seja M_Z um fator de M com respeito a Z tendo L_Z como linha especial. Como visto acima, e é gerado por Z e $E(M) - Z$, logo $e \in L_Z = A \cup (cl_M(Z) \cap cl_M(E(M) - Z))$. Então, $e \in L_x \cap L_Y$. Se $|L_Z \cap E(M)| \geq 3$, então $L_X = L_Y$ é uma linha de M que contem e; uma contradição, pois $e \notin T(M)$. Então, $1 \leq |L_Z \cap E(M)| \leq 2$. Em particular, $|L_X| = |L_Y| = 3$. Vamos assumir $L_X = L_Y$, e denotar $L = L_X$, para fazer isto basta colocar o mesmo elemento que não pertence à $E(M)$ em L_X e em L_Y. Observe que $cl_M(Z)$ não é tríade de M, pois se fosse teríamos $|cl_M(Z)| = 3$ e $cl_M(Z) = Z$, já que $|Z| \geq 3$. Como Z é conjunto 3-separador de M e Z é fechado em M, segue, pelo lema 2.0.4, que Z é um triângulo de M, logo não pode ser uma tríade. Pelo lema 3.0.10 (iii) e (iv), M/f é 3-conexa se, e somente se, M_Z/f é 3-conexa para todo $f \in cl_M(Z)$. Então,

$$R_0(M^*) = R_0(M_X^*) \cup R_0(M_Y^*). \tag{5.2}$$

Vamos provar que existe $X_e \in \{X - L, Y - L\}$ tal que

(X1) X_e é tríade de M;

(X2) $X_e \cup e$ é um circuito de M;

(X3) $e \in L_e$, onde $L_e = cl_M(X_e) - X_e$;

(X4) $L_e = cl_M(X_e) \cap cl_M(E(M) - X_e)$ tenha pelo menos 2 elementos; e

(X5) $X_e \subseteq T(M) \cup R_0(M^*)$.

Para provar a existência do X_e, vamos dividir em dois casos.

Caso 1: Existe $f \in [L \cap E(M)] \cap T(M)$ tal que, para todo $Z \in \{X, Y\}$, existe uma linha L'_Z tal que $f \in L'_Z \subseteq cl_M(Z)$ e $|L'_Z| \geq 3$.

Então $L \cap E(M) = \{e, f\}$, já que $e \in L \cap E(M)$, $e \notin T(M)$ e $1 \leq |L \cap E(M| \leq 2$. Como $\{E(M_X) - L, E(M_Y) - L, L \cap E(M)\}$ é uma partição de $E(M)$, segue que

$$\begin{aligned} e(M) &= |E(M_X) - L| + |E(M_Y) - L| + |L \cap E(M)| \\ &= (e(M_X) - 3) + (e(M_Y) - 3) + 2 \\ &= e(M_X) + e(M_Y) - 4. \end{aligned}$$

Logo,

$$e(M) = e(M_X) + e(M_Y) - 4. \tag{5.3}$$

Note que, pelo lema 3.0.8, toda linha de M_Z diferente de L é linha de M, pois intersecta L em no máximo um elemento. Donde temos que um elemento de $Z - L$ pertence a um triângulo de M_Z se, e somente se, este elemento pertence à um triângulo de M. Como, f pertence a um triângulo de M, segue que

$$\begin{aligned} t(M) &= (t(M_X) - 3) + (t(M_Y) - 3) + 1 \\ &= t(M_X) + t(M_Y) - 5, \end{aligned}$$

pois L é triângulo de M_X e M_Y. Logo,

$$t(M) = t(M_X) + t(M_Y) - 5. \tag{5.4}$$

Note que $R_0(M^*_X) \cap R_0(M^*_Y) = \varnothing$, pois se $a \in R_0(M^*_X) \cap R_0(M^*_Y)$, temos que $a \in E(M_X) \cap E(M_Y)$, logo $a \in cl_M(Z) \cap cl_M(E(M) - Z)$, para $Z \in \{X, Y\}$, mas nestas condições M_Z/a não é 3-conexa, pois $a \in L$ e L é triângulo de M_Z, para $Z \in \{X, Y\}$. Com isto e por (5.2), temos que

$$r_0(M^*) = |R_0(M^*_X)| + |R_0(M^*_Y)| - |R_0(M^*_X) \cap R_0(M^*_Y)| = r_0(M^*_X) + r_0(M^*_Y). \tag{5.5}$$

Vamos assumir o resultado válido para M_X e M_Y. Então,

$3[t(M_Z) + r_0(M_Z^*) - \delta(M_Z)] \geq e(M_Z) + 10,$

para $Z \in \{X, Y\}$. Somando as desigualdades, temos:

$3[t(M_X) + t(M_Y)] + 3[r_0(M_X^*) + r_0(M_Y^*)] - 3[\delta(M_X) + \delta(M_Y)] \geq [e(M_X) + e(M_Y)] + 20.$

Sustituindo (5.3), (5.4) e (5.5), temos:

$3[t(M) + 5] + 3[r_0(M^*)] - 3[\delta(M_X) + \delta(M_Y)] \geq [e(M) + 4] + 20.$

Esta desigualdade pode ser reordenada como

$$3[t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)] \geq [e(M) + 10] + 3[\delta(M_X) + \delta(M_Y) - \delta(M)] - 1. \tag{5.6}$$

Para $Z \in \{X, Y\}$, $\delta(M_Z) = 1$, pois L_Z e L'_Z são linhas distintas de M_Z que têm pelo menos 3 pontos e $f \in L_Z \cap L'_Z$, donde por (5.6) temos

$$\begin{aligned} 3[t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)] &\geq [e(M) + 10] + 6 - 3\delta(M) - 1 \\ &= e(M) + 15 - 3\delta(M) \\ &\geq e(M) + 10, \end{aligned}$$

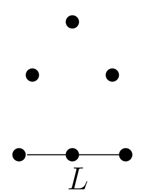
uma contradição, pois estamos supondo o resultado falso para M. Então o resultado não é válido para M_X ou M_Y, digamos M_Y. Como $r(M_Y) < r(M)$ e pela escolha de M, segue que $e(M_Y) \leq 6$ e então $|Y - L| \leq 3$. Daí $r(M_Y) = r_M(Y - L) \leq 3$, logo $r(M_Y) = 3$. Então $r_0(M_Y^*) + t(M_Y) = e(M_Y)$. Como o resultado é falso para M_Y, temos $3[t(M_Y) + r_0(M_Y^*) - \delta(M_Y)] \geq [e(M_Y) + 10]$, e como $t(M_Y) + r_0(M_Y^*) = e(M_Y)$ segue que $e(M_Y) < \frac{10+3\delta(M_Y)}{2}$, o que é uma contradição a não ser que $\delta(M_Y) = 1$ e $e(M_Y) = 6$.

Observe que $X_e = Y - L$ satisfaz (X1), pois
$r_{M^*}(X_e) = |Y - L| + r_M(E(M) - (Y - L)) - r(M)$, $r_M(E(M) - (Y - L)) = r_M(X)$, $r_M(E(M) - X) = r_M(Y) = 3$ e $r(X) - r(M) = 2 - r_M(E(M) - X)$, daí segue que $r_{M^*}(X_e) = 2$ e assim, $X_e = Y - L$ é uma tríade de M. Para ver que $X_e = Y - L$ satisfaz (X3), basta observar que $L_e = cl_M(X_e) - X_e = cl_M(Y - L) - (Y - L) = \{e, f\}$.
$X_e = Y - L$ satisfaz (X4), pois $cl_M(X_e) = cl_M(Y - L) = cl_M(Y)$ e

$cl_M(E(M) - X_e) = cl_M(E(M) - (Y - L)) = cl_M(X) = cl_M(E(M) - Y)$. Logo $cl_M(X_e) \cap cl_M(E(M) - X_e) = cl_M(Y) \cap cl_M(E(M) - Y) = \{e, f\}$ e assim, (X4) está verificada. Note que (X2) é satisfeita, pois X_e gera e em M, logo existe um circuito C de M tal que $e \in C \subseteq X_e \cup e$. Como $|X_e \cup e| = 4$ e $e \in T(M)$, segue que $C = X_e \cup e$. Se M_Y é união de duas linhas que contem e para todo $e \in X_e = Y - L$, então $X_e \subseteq T(M)$. Se M_Y não é união de duas linhas que contem e para todo $e \in X_e = Y - L$, então, pela contrapositiva do lema 3.0.10 (ii), temos que $si(M/e)$ é 3-conexa para todo $e \in X_e = Y - L$ e assim, $X_e \subseteq R_0(M^*)$ e (X5) segue. Com isso, provamos a existência de X_e.

Caso 2: Se $f \in [L \cap E(M)] \cap T(M)$, então existe $Z \in \{X, Y\}$ tal que f não pertence à nenhum triângulo de M contido em $cl_M(Z)$.

Para $Z \in \{X, Y\}$, seja H_Z uma matróide isomorfa à P_6 tal que L é linha de H_Z e $H_X - L$, $H_Y - L$, $E(M)$ sejam conjuntos dois a dois disjuntos (obs.: A matróide P_6 tem $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como conjunto base e $\{X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : |X| = 3 \text{ e } X \neq \{1, 2, 3\}\}$ como conjunto das bases.). Ver representação geométrica:



Seja K_Z a conexão paralela generalizada de M_Z e H_Z sobre L. Escolha $c \in L - E(M)$. Como na demosntração do teorema 4.0.1, $N_Z = K_Z \backslash c$ é 3-conexa. Como os elementos de $E(H_Z) - L$ não pertence à triângulos, segue que $R_0(N_Z^*) = R_0(M_Z^*) \cup [E(H_Z) - L]$. Então, por (5.2),

$$r_0(M^*) = r_0(M_X^*) + r_0(M_Y^*) = (r_0(N_X^*) - 3) + (r_0(N_Y^*) - 3) = r_0(N_X^*) + r_0(N_Y^*) - 6 \quad (5.7)$$

onde cada -3 é referente aos elementos de $H_Z - L$ para $Z \in \{X, Y\}$.

Como $\{E(N_X) - E(H_X), E(N_Y) - E(H_Y), L \cap E(M)\}$ é uma partição de $E(M)$, segue que

$$\begin{aligned} e(M) &= |E(N_X) - E(H_X)| + |E(N_Y) - E(H_Y)| + |L \cap E(M)| \\ &= (e(N_X) - 5) + (e(N_Y) - 5) + |L \cap E(M)| \\ &= e(N_X) + e(N_Y) + |L \cap E(M)| - 10, \end{aligned}$$

pois $c \notin E(N_Z)$ e $|E(H_Z) - c| = 5$ para $Z \in \{X, Y\}$. Logo,

$$e(M) = e(N_X) + e(N_Y) + |L \cap E(M)| - 10. \tag{5.8}$$

Pelo lema 3.0.8, para $Z \in \{X, Y\}$, um elemento de $cl_M(Z) = Z \cup [L \cap E(M)]$ pertence à um triângulo de N_Z se, e somente se, pertence à um triângulo de $M|cl_M(Z)$. Por hipótese, nenhum elemento de $L \cap E(M)$ pertence à triângulos de N_Z para $Z \in \{X, Y\}$. Então,

$$t(M) = t(N_X) + t(N_Y). \tag{5.9}$$

Assuma (5.1) válido para N_X e N_Y. Então

$3[t(N_Z) + r_0(N_Z^*) - \delta(N_Z)] \geq e(N_Z) + 10$, para $Z \in \{X, Y\}$. Somando as desigualdades, obtemos:

$3[t(N_X) + t(N_Y)] + 3[r_0(N_X^*) + r_0(N_Y^*)] - 3[\delta(N_X) + \delta(N_Y)] \geq [e(N_X) + e(N_Y)] + 20.$

Sustituindo (5.7), (5.8) e (5.9), temos:

$3[t(M)] + 3[r_0(M^*) + 6] - 3[\delta(N_X) + \delta(N_Y)] \geq [e(M) + 10 - |L \cap E(M)|] + 20.$

Esta desigualdade pode ser reordenada como

$3[t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)] \geq [e(M) + 10] + [2 - |L \cap E(M)|] + 3[\delta(N_X) + \delta(N_Y) - \delta(M)].$

Donde temos uma contradição, a não ser que

$[2 - |L \cap E(M)|] + 3[\delta(N_X) + \delta(N_Y) - \delta(M)] < 0.$

Como $|L \cap E(M)| \leq 2$, segue que

$\delta(N_X) + \delta(N_Y) < \delta(M).$

Então $\delta(N_X) = \delta(N_Y) = 0$. Logo, $\delta(M) = 1$. Como nenhum elemento de L pertence à triângulos contidos em $cl_M(X)$ e $cl_M(Y)$, temos que $\delta(M) = \max\{\delta(N_X), \delta(N_Y)\}$, donde temos uma contradição com $\delta(N_X) = \delta(N_Y) = 0$ e $\delta(M) = 1$. Então (5.1) não vale para N_X ou N_Y, digamos N_X.

Como $e(N_X) \geq 7$ e pela escolha de M, temos que $r(N_X) \geq r(M)$. Mas, $r(N_X) = r(M_X) + 1$ e $r(M) = r(X) + r(Y) - 2$, logo $r(M_X) + 1 \geq r(X) + r(Y) - 2$ e então, $r(Y) \leq 3$. Como $r(Y) \geq 3$, segue que $r(Y) = 3$ e então, $r(M) = r(N_X)$. Ainda pela escolha de M, temos que $e(N_X) \geq e(M)$. Como $e(N_X) = |X - L| + (|L| - 1) + 3 = |X - L| + 5$ e $e(M) = |Y - L| + |X - L| + |E(M) \cap L|$, temos $5 - |E(M) \cap L| \geq |Y - L|$. Se fosse $|Y - L| = 4$, teríamos $|L \cap E(M)| = 1$ e $e(M) = e(N_X)$. E, novamente pela escolha de M, temos $t(N_X) \geq t(M)$. Por (5.9), temos $t(M) = t(N_X) + t(N_Y)$ e então, $t(N_Y) = 0$. Daí, $t(M) = t(N_X)$. Mais uma vez pela escolha de M, temos que $r_0(N_X^*) \geq r_0(M^*)$. Agora, por (5.7), temos que $r_0(N_Y^*) \leq 6$, mas $r_0(N_Y^*) = 6$. Logo, $r_0(M^*) = r_0(N_X^*)$ e assim, M e N_X são isomorfas. Neste caso, podemos tomar $X_e = Y - L$. Agora, se $|Y - L| \leq 3$ e $|E(M) \cap L| = 2$, podemos tomar $X_e = Y - L$, como no caso anterior.

Agora, vamos provar que

$$X_e = X_f \text{ ou } X_e \cap X_f = \varnothing, \text{ para todo 2-subconjunto } \{e, f\} \text{ de } E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)] \tag{5.10}$$

Suponha (5.10) falso. Em particular, $X_e \cap X_f \neq \varnothing$. Como X_e e X_f são tríades de M, por (X1), e $X_e \cup e$ e $X_f \cup f$ são circuitos de M por (X2), por ortogonalidade, segue que

$$3 \geq |X_e \cap (X_f \cup f)| \geq 2 \text{ e } 3 \geq |X_f \cap (X_e \cup e)| \geq 2,$$

e assim $|X_e \cap X_f| = 2$ ou $e \in X_f$ e $f \in X_e$. Por (X5), $X_e, X_f \subseteq T(M) \cup R_0(M^*)$, assim $f \notin X_e$ e $e \notin X_f$, já que $\{e, f\} \subseteq E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)]$, e então $|X_e \cap X_f| = 2$. Por submodularidade, $X_e \cup X_f$ é um conjunto 3-separador de M, pois $|E(M) - (X_e \cup X_f)| \geq 3$. Como $X_e \cup X_f$ gera e e f em M, por (X2), segue que

$cl_M(X_e \cup X_f) = X_e \cup X_f \cup \{e, f\}$, pois $\{e, f\}$ não está contido em um triângulo de M. Além disso, pelo lema 2.0.3, $X_e \cup X_f$ é um conjunto 2-separador de M/e. Entao, $T^* = E(M) - [X_e \cup X_f \cup \{e, f\}$ é tríade de M, visto que podemos substituir X_e por um conjunto pertencente a $\{X_e \cup X_f, T^*\}$, mas X_e é uma tríade de M por (X1) e então, $X_e = T^*$. Em particular, $e(M) = 9$. Como $X_e \cup X_f$ está contido em um colinha de M, segue que $X_e \cup X_f \subseteq R_0(M^*)$. Observe que M não tem um triângulo, caso contrário ele estaria contido em $E(M) - [X_e \cup X_f \cup \{e, f\}]$. Então, por (X5), $T^* \subseteq R_0(M^*)$. Donde temos uma contradição, pois

$3[t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)] = 21 > 19 = |E(M)| + 10$.
Então (5.10) vale.

Existem elementos $e_1, ..., e_n$ pertencentes a $E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)]$ tais que

$$L_{e_1} - [T(M) \cup R_0(M^*)], ..., L_{e_n} - [T(M) \cup R_0(M^*)]$$

seja uma partição de $E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)]$. Então

$$|E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)]| = n + r, \tag{5.11}$$

onde r é o número de índices $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $|L_{e_i} - [T(M) \cup R_0(M^*)]| = 2$. Por (5.10), $Xe_1, ..., Xe_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos, daí
$|T(M) \cup R_0(M^*)| \geq 3n = |X_{e_1}| + ... + |X_{e_n}|$ (isto se dá devido ao fato de $T(M) \cup R_0(M^*)$ conter os X_{e_i} que tem 3 elementos cada) e então

$$|T(M) \cup R_0(M^*)| = 3n + \gamma \tag{5.12}$$

para algum inteiro não negativo γ. Note que os elementos de $[T(M) \cup R_0(M^*)] \cap [L_{e_1} \cup ... \cup L_{e_n}]$ são contados em γ. Como

$$3[t(M) + r_0(M^*) - \delta(M)] < e(M) + 10,$$

segue que

$$3[3n + \gamma - \delta(M)] < 4n + r + \gamma + 10$$

pois, $T(M) \cap R_0(M^*) = \varnothing$. Esta desigualdade pode ser reescrita como

$$0 \leq 2\gamma < 10 + r + 3\delta(M) - 5n. \tag{5.13}$$

Como $0 \leq r \leq n$, temos uma contradição a não ser que $n \leq 3$.
Se $n = 3$, então $\gamma = 0$, $r = 3$ e $\delta(M) = 1$. Em particular,
$T(M) \cup R_0(M^*) = Xe_1 \cup Xe_2 \cup Xe_3$ e $E(M) - [T(M) \cup R_0(M^*)] = Le_1 \cup Le_2 \cup Le_3$.
Como $\delta(M) = 1$, segue que M tem um triângulo T. Então, $T \cap Xe_i \neq \varnothing$, para algum $i \in \{1, 2, 3\}$. Por (X1) e ortogonalidade, temos $|T \cap Xe_i| = 2$ (não podemos ter $|T \cap Xe_i| = 3$, pois $r^*(T) = |T| + r(E(M) - T) - r(M) \geq |T| + 2 - r(T)$, daí temos $2 \geq 3 + 2 - 2$, absurdo). Donde temos uma contradição, pois $T \subseteq cl_M(X_{e_i}) = X_{e_i} \cup L_{e_i}$ e $L_{e_i} \cap T = \varnothing$. Então $n \leq 2$.
Se $n = 1$, então $|E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1})| \geq 3$ e então $\gamma \geq 3$. Por (5.13), $\delta(M) = 1$. Sejam T_1 e T_2 triângulos de M. Por ortogonalidade, $T_i \cap X_{e_1} = \varnothing$ ou $T_i \subseteq X_{e_1} \cup L_{e_1}$, para $i \in \{1, 2\}$. Como todo triângulo de M que está contido em $X_{e_1} \cup L_{e_1}$, contem um elemento pertencente a $L_{e_1} - e_1$, não podemos ter $T_1, T_2 \subseteq X_{e_1} \cup L_{e_1}$, senão teríamos $|T_1 \cap T_2| \geq 2$, então $T_1 = T_2$. Então $T_i \cap X_{e_1} = \varnothing$, para algum $i \in \{1, 2\}$, digamos $i = 1$. Como M é 3-conexa, segue que $|E(M) - (X_{e_1} \cup L_{e_1} \cup T_1)| \geq 1$. Então $\gamma \geq 4$. Por (5.13), $\gamma = 4$ e $r = 1$. Em particular, $e(M) = 9$ e, como $r = 1$, M não tem triângulos, uma contradição. Então $n = 2$. Agora, vamos mostrar que todo triângulo T de M está contido em $X_{e_i} \cup L_{e_i}$, para algum $i \in \{1, 2\}$. Se T não está contido em $X_{e_i} \cup L_{e_i}$, para todo $i \in \{1, 2\}$, então, por ortogonalidade, $T \cap X_{e_1} = T \cap X_{e_2} = \varnothing$. Assim, como $X_{e_1}, X_{e_2} \subseteq T(M) \cup R_0(M^*)$ e $|T(M) \cup R_0(M^*)| = 6 + \gamma$, temos $\gamma \geq 3$, uma contradição com (5.13). Em seguida provaremos que $\delta(M) = 0$. Suponha $\delta(M) = 1$. Como $X_{e_i} \cup L_{e_i}$ contem ao menos um triângulo, para $i \in \{1, 2\}$, segue que $X_{e_i} \cup L_{e_i}$ contem um triângulo T_i de M, para todo $i \in \{1, 2\}$. Então $T_i \cap Le_i = \{f_i\}$, logo $r = 0$ e $\gamma \geq 2$. Donde temos uma contradição. Então $\delta(M) = 0$ e, por (5.13), $\gamma = 0$ e $r \geq 1$. Como $\gamma = 0$, segue que $E(M) = X_{e_1} \cup X_{e_2} \cup L_{e_1} \cup L_{e_2}$. Seja M_1 um fator de M com respeito à $X_{e_2} \cup L_{e_1} \cup L_{e_2}$ tendo L_1 como linha especial. Note que $L_{e_1} \subseteq L_1$ Pelo Lema 3.0.10 (i), M_1 é 3-conexa.

Pelo Lema 3.0.9 (ii), X_{e_2} é um conjunto 3-separador de M_1. Seja M_2 um fator de M_1 com respeito à $L_{e_2} \cup L_1$ tendo L_2 como linha especial. Note que $L_{e_2} \subseteq L_2$ Pelo Lema 3.0.10 (i), M_2 é 3-conexa. Mas $E(M_2)$ é a união de duas linhas de 3 elementos chamadas L_1 e L_2, donde temos uma contradição, já que desta forma M_2 não pode ser 3-conexa. Então o teorema 5.0.2 segue. (Obs.: Os detalhes deste último parágrafo são idênticos aos do Teorema 4.0.1, por isso foram omitidos). $\square$

Capítulo 6

Teoremas de Lemos e Leo

Neste capítulo, vamos provar os resultados principais de Lemos e Leo. Primeiramente, vamos estudar os cocircuitos de uma matróide 3-conexa que intersectam ambos os conjuntos de uma 3-separação vertical, isto é, $\min\{r(X), r(E(M)-X)\} \geq 3$, para todo conjunto 3-separador X de uma matróide 3-conexa M.

Lema 6.0.11. *Suponha que X é um conjunto 3-separador de uma matróide 3-conexa M tal que* $\min\{r(X), r(E(M)-X)\} \geq 3$. *Seja N um fator de M com respeito à X tendo L como linha especial. Se $L - E(M) \neq \varnothing$ e C^* é um cocircuito de M tal que C^* intersecta ambos $X \cup L$ e $[E(M)-X] \cup L$, então existe $Y \subseteq L$ tal que $|Y| \leq 1$ e $[(X-L) \cap C^*] \cup (L-Y)$ é um cocircuito de N.*

Demonstração. Faça $M_1 = N$. Seja M_2 um fator de M com respeito à $E(M)-X$ tendo L_2 como linha especial. Podemos rotular os elementos de L_2 tal que $L_2 = L$. Seja $H = E(M) - C^*$. Para $i \in \{1,2\}$, sejam $C_i^* = E(M_i) \cap C^*$ e $H_i = E(M_i) \cap H$. Como $E(M_1) = X \cup L$, $E(M_2) = [E(M)-X] \cup L$ e, por hipótese, C^* intersepta ambos $X \cup L$ e $[E(M)-X] \cup L$, temos que $C_i^* \neq \varnothing$. Note também que $cl_{M_i}(H_i) \subseteq cl_M(H_i) \cup (L - E(M))$ e $[cl_M(H_i) \cup (L-E(M))] \cap C^* = \varnothing$, logo H_i não gera

M_i. Daí, $r(H_i) = r(M_i) - 1 - \delta_i$, para algum $\delta_i \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} r(H_1) + r(H_2) &= r(M_1) + r(M_2) - 2 - \delta_1 - \delta_2 \\ &= r(M) - \delta_1 - \delta_2. \end{aligned}$$

Como $r(H_1) + r(H_2) = r(H) + \delta = r(M) - 1 + \delta$, para algum $\delta \geq 0$, segue que

$$\delta + \delta_1 + \delta_2 = 1. \tag{6.1}$$

Em particular, $\{\delta, \delta_1, \delta_2\} \subseteq \{0, 1\}$. Se $\delta_i = 0$, então $cl_{M_i}(H_i)$ é um hiperplano de M_i. Agora, vamos provar que $L \nsubseteq cl_{M_i}(H_i)$. Se $L \subseteq cl_{M_i}(H_i)$, então $C_i^* - L$ contem um cocircuito D^* de M_i, já que $D^* = E(M_i) - cl_{M_i}(H_i)$ é cocircuito de M_i e
$D^* = E(M_i) - cl_{M_i}(H_i) \subseteq C_i^* - L$. Como $D^* \subseteq C_i^* - L \subseteq E(M_i) - L$, segue pelo Lema 3.0.9 (iii) que D^* é cocircuito de M; contradição, pois $D^* \subseteq C_i^* - L \subsetneq C^*$ $(C^* \cap L \neq \varnothing)$. Então $L \nsubseteq cl_{M_i}(H_i)$. Logo, $|cl_{M_i}(H_i) \cap L| \leq 1$. Tomando $Y = cl_{M_i}(H_i) \cap L$ e observando que $C_i^* \cup L$ ou $C_i^* \cup (L - t)$ é cocircuito de M, o resultado segue neste caso, já que
$[X - L) \cap C^*] \cup (L - Y) = \begin{cases} C_i^* \cup L & \text{, se} \quad Y = \varnothing \\ C_i^* \cup (L - t) & \text{, se} \quad Y = \{t\} \end{cases}.$
Então, vamos assumir que $\delta_1 = 1$. Logo, $\delta_2 = \delta = 0$, por (6.1). Como $\delta = 0$, temos

$$\begin{aligned} r(H) &= r(H_1) + r(H_2) \\ &= r(H \cap (X \cup L)) + r(H \cap [(E(M) - X) \cup L]) \\ &= r((H \cap X) \cup (H \cap L)) + r((H \cap (E(M) - X)) \cup (H \cap L)), \end{aligned}$$

mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} r(H) &= r(H_1) + r(H_2) \\ &= r(H \cap (X \cup L)) + r(H \cap [(E(M) - X) \cup L)) \\ &= r(H \cap X) + r(H \cap (E(M) - X)), \end{aligned}$$

já que X e $E(M) - X$ geram L em M. Assim, $H \cap L = \varnothing$ e então $L \cap E(M) \subseteq C^*$. Tome $e \in C_1^* - L$ (este e existe, pois $r(X - L) = r(X \cup L)$, daí

$1 \leq r(C_1^*) = r((X \cup L) \cap C^*) = r((X - L) \cap C^*)$, logo existe $e \in (X - L) \cap C_1^*)$. Se $H_1 \cup e$ gera L em M_1, temos que $cl_{M_1}(H_1 \cup e)$ é hiperplano de H_1, já que $r(H_1) = r(M_1) - 2$ e H_1 não gera e. Assim, $E(M) - cl_{M_1}(H_1 \cup e) \subseteq C_1^* - L$ é cocircuito de M_1, e segue pelo Lema 3.0.9 (iii) que é um cocircuito de M contido propriamente em C^*; uma contradição. Então, $H_1 \cup e$ não gera L em M_1. Então $H_1 \cup e$ não gera nenhum elemento de $A = L - E(M)$, e então, quando $c \in A$, $H_1 \cup c$ não gera nenhum elemento de $C_1^* - L$. Como $C_1^* - L$ não pode ser um cocircuito de M, segue pelo lema 3.0.9(iii) que $C_1^* - L$ não é um cocircuito de M_1 e então $H_1 \cup c$ não gera nenhum elemento de $L - c$. Então, $(C_1^* - L) \cup (L - c)$ é um cocircuito de M_1. Então o resultado também segue nesse caso, tomando $Y = \{c\}$. □

Agora, vamos provar uma extensão do resultado principal de Lemos.

Teorema 6.0.3. *Suponha que C^* é cocircuito de uma matróide M 3-conexa tal que $r(M) \geq 3$. Se M/e não é 3-conexa, para todo $e \in C^*$, então C^* intersecta diferentes linhas de M, todas com pelo menos 3 elementos.*

O Teorema de Lemos diz unicamente que C^* intersecta dois triângulos de M, mas pode ser que esses triângulos estejam contidos na mesma linha.

Demonstração. Suponha este resultado falso e escolha um contra-exemplo M tal que $r(M)$ é mínimo. Primeiro, mostraremos que existe $e \in C^*$ tal que $e \notin T(M)$. Suponha que para $e \in C^*$ existe uma linha L_e de M tal que $e \in L_e$ e $|L_e| \geq 3$. Pela escolha de M, C^* intersecta no máximo uma linha de M com pelo menos 3 elementos, assim, $L_e = L_f$ para todo 2-subconjunto $\{e, f\}$ de C^*. Então $C^* \subseteq L_e$, para todo $e \in C^*$. Então

$$\xi(C^*, E(M) - C^*) = r(C^*) + r^*(C^*) - |C^*| = 2 + (|C^*| - 1) - |C^*| = 1.$$

Assim, $|E(M) - C^*| \leq 1$, senão C^* seria 2-separador de M. E como $C^* \subseteq L_e$, temos que $r(M) = r(C^*) = 2$; uma contradição. Então existe $e \in C^*$ tal que $e \notin T(M)$. Seja $\{X, Y\}$ uma 2-separação de M/e. Como $e \notin T(M)$, temos que

$r_{M/e}(X) = r_M(X \cup e) - r(e) \geq 2$ e, analogamente, $r_{M/e}(Y) \geq 2$, assim $\min\{r_{M/e}(X), r_{M/e}(Y)\} \geq 2$.

Para $Z \in \{X, Y\}$, seja M_Z um fator de M com respeito à Z tendo L_Z como linha especial. Nós podemos escolher os elementos de L_X e L_Y tais que $L_X = L_Y$, digamos $L = L_X$. Como já vimos X e Y geram e em M, logo $e \in L$, e se $L - E(M) = \varnothing$, temos $|L| \geq 3$ e então $e \in T(M)$; absurdo. Assim, $L - E(M) \neq \varnothing$. Como $L - E(M) \neq \varnothing$, $e \in C^* \cap L$, segue, pelo Lema 6.0.11, que $C_Z^* = [(Z - L) \cap C^*] \cup A_Z$ é um cocircuito de M_Z para algum $A_Z \subseteq L$ tal que $|L - A_Z| \leq 1$. Pelo Lema 3.0.10 (ii), M_Z/f não é 3-conexa para todo $f \in C_Z^* - L \subseteq C^* - L$ e então M_Z/f não é 3-conexa para todo $f \in C_Z^*$, pois M_Z/f não é 3-conexa para todo $f \in L$, já que L é triângulo de M_Z. Pela escolha de M, segue que C_Z^* intersecta uma linha L'_Z de M_Z tal que $L'_Z \neq L_Z$ e $|L'_Z| \geq 3$ (pois $r(M_Z) < r(M)$, logo C_Z^* tem que interseptar no mínimo duas linhas de M_Z com no mínimo 3 elementos cada). Note que $L'_Z \subseteq cl_M(Z)$ e então $L'_X \neq L'_Y$. Pelo Lema 3.0.8, L'_X e L'_Y são diferentes linhas de M que intersectam C_Z^*, logo intersectam C^*, pois $C_Z^* \cap C^* \neq \varnothing$; uma contradição, e o resultado segue. □

Teorema 6.0.4. *Suponha que C^* é um cocircuito de uma matróide 3-conexa M com $|E(M)| \geq 4$. Seja f um elemento de C^*. Se M/e não é 3-conexa, para todo $e \in C^* - f$, então C^* intesecta pelo menos um triângulo de M.*

Demonstração. Suponha falso o resultado e seja M um contra-exemplo tal que $r(M)$ é mínimo. Então C^* não intersecta nenhum triângulo de M. Pela contrapositiva do teorema 6.0.3, M/f é conexa. Escolha $e \in C^* - f$. Seja $\{X, Y\}$ uma 2-separação de M/e tal que $f \in Y$. Seja N um fator de M com respeito à X, tendo L como linha especial. Note que $f \notin L$, pois:

Se $f \in L$, temos que $f \in cl_M(X) \cap cl_M(Y)$. Já vimos que se $\{X, Y\}$ é uma 2-separação de M/e, então X e Y são 3-separadores de M, assim

$$r_{M/f}((Y \cup e) - f) + r_{M/f}(X) - r(M/f) =$$

$$= (r_M(Y \cup \{e, f\}) - 1) + (r_M(X \cup f) - 1) - (r(M) - 1)$$
$$= [r_M(Y \cup e) + r_M(X) - r(M)] - 1 = 2 - 1 = 1,$$

logo M/f não é 3-conexa; um absurdo. E assim, $f \notin L$.

Se $e \in T(M)$, temos um absurdo com a escolha de M. Então $e \notin T(M)$ e assim $L - E(M) \neq \varnothing$. Então, pelo Lema 6.0.11, $C^*_N = [(X - L) \cap C^*] \cup A$ é um cocircuito de N para algum $A \subseteq L$ tal que $|L - A| \leq 1$. Pelo Lema 3.0.10 (iii), N/a não é 3-conexa para todo $a \in C^*_N - L \subseteq C^* - L$ (Observe que $f \notin C^*_N$ já que $f \in Y$) e então N/a não é 3-conexa, para todo $a \in C^*_N$, pois se $a \in L$, N/a não é 3-conexa, já que L é triângulo de N. Como $r(N) < r(M)$ e pela escolha de M, temos que C^*_N intersecta uma linha $L' \subseteq cl_M(X)$ de N, com $L' \neq L$ e $|L'| \geq 3$. Então, pelo Lema 3.0.8, L' é uma linha de M que intersecta C^*, já que $C^*_N \subseteq C^* - A$; um absurdo. □

Bibliografia

[1] Dirac, G. A., *Minimally 2-connected graphs*, J. Reine Angew. Math. 228 (1967), 204-216.

[2] Halin, R., *Untersuchugen über minimale n-fach zusammenhängende graphen*, Math. Ann. 182 (1969), 175-188.

[3] Lemos, M., *On 3-connected matroids*, Discreet Mathematics 73 (1989) 273-283.

[4] Lemos, M. e Oxley, J., *On packing minors into connected matroids*, Discrete Math. 189 (1998), 283-289.

[5] Lemos, M. e Oxley, J., *On size, cicunference end cicuit removal in 3-connected matroids*, Discreet Mathematics 220 (2000) 145-157.

[6] Lemos, M., *Elements belonging to triads in 3-connected matroids*, Discreet mathematics 285 (2004) 167-181.

[7] Leo, J.W., *Triads and triangles in 3-connected matroids*, Discreet Mathematics 194 (1999) 173-193.

[8] Mader, W., *Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen*, Arch. Math. (Basel) 23 (1972), 219-224.

[9] Lemos, M., *Notas de Aula do Curso de Estruturas Discretas*, 2008.

[10] Murty, U. S. R., *Extremal critically connected matroids*, Discrete Math. 8 (1974), 49-58.

[11] Oxley, J. G., *On matroid connectivity*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 32 (1981), 193-208.

[12] Oxley, J., *Matroids Theory*, Oxford University Press, New York, 1982.

[13] Reid, T. J. e Wu, H., *On elements in small cocircuits in minimally k-connected graphs and matroids*, Discrete Math. 243 (2002), 273-282.