



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

AMPLITUDES DO CALOR ESPECÍFICO PARA SISTEMAS
COMPETITIVOS

por

Marcone Isidorio de Sena Júnior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Marcelo de Moura Leite (Orientador - UFPE)

Prof. Flávio Menezes de Aguiar (DF - UFPE)

Prof. Victor de Oliveira Rivelles (IF - USP)

Recife - PE, Brasil
Abril - 2010

Sena Junior, Marcone Isidorio.

Amplitudes do calor específico para sistemas competitivos / Marcone Isidorio de Sena Junior. - Recife: O Autor, 2010.

x, 104 folhas. il. fig. tab.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Mecânica estatística. 2. Fenômenos críticos (Física).
3. Teoria de campos (Física). 4. Grupo de renormalização.
I. Título.

530.13

(22.ed.)

FQ 2010-033



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Marcone Isidorio de Sena Júnior

AMPLITUDES DO CALOR ESPECÍFICO PARA SISTEMAS COMPETITIVOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Marcelo de Moura Leite (Presidente e Orientador), Flávio Menezes de Aguiar, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Victor de Oliveira Rivelles, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

Aprovado

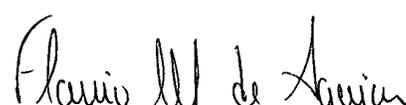
Reprovado

Em exigência

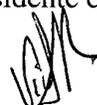
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em quinze de abril de dois mil e dez.



Prof. Marcelo de Moura Leite
Presidente e Orientador



Prof. Flávio Menezes de Aguiar



Prof. Victor de Oliveira Rivelles

Ao meu filho Luiz, a minha esposa Luana, a minha avó Nadir, à minha irmã Marcia e aos meus pais Edna e Marcione.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por todas as experiências que me permitiram o enriquecimento dos valores que edificam o meu espírito.

À minha família que é fonte das minhas felicidades e propulsora das minhas emoções.

Ao meu orientador Professor Marcelo de Moura Leite pelos anos de convivência que promoveram diretrizes profissionais e morais de responsabilidade e de ética.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFPE que contribuíram de alguma forma para a minha formação ou propiciaram um ambiente melhor para o exercício do trabalho.

Ao amigo e compadre Cláudio Farias pelas discussões sobre a pesquisa desenvolvida e pela convivência prazerosa nesses anos de universidade e que provavelmente se perpetuarão nos próximos anos.

À amizade de Fábio Novaes desde o início da graduação pelas diversas discussões sobre a física e a vida. Especialmente nesse trabalho pela paciente atenção de me ensinar a usar software \LaTeX inclusive a atenção direcionada para a construção dos diagramas de Feynman.

Ao amigo Messias Vilbert pela amizade de alguns bons anos e pelo aprendizado conjunto desde a graduação em teoria de campos.

Ao colega e amigo José Borba pelas oportunas discussões a respeito do trabalho e do ambiente acadêmico.

Ao colega Arlan da Silva Ferreira que gentilmente elaborou os gráficos deste trabalho.

À minha cunhada Luciane Alcoforado pelas sugestões de correção ortográfica.

À minha esposa Luana Sena pela atenção e pelo carinho durante toda a elaboração deste trabalho. A ela agradeço a construção das tabelas deste trabalho através do software *Excel*.

A todos os colegas que permitiram um ambiente de conforto intelectual e de alegria neste departamento. Aqui cito alguns colegas e amigos que contribuíram com isso como Rafael Alves, Tiago Nunes, Dibartolomei Lima, Eduardo Dias, Plínio Ribeiro, Cláudio Farias, Fábio Novaes, Messias Vilbert, José Borba, Arlan Ferreira, Milton Viana, Thiago Sobral entre outros.

Ao professor Gilberto de Holanda Calvacanti pelos agradáveis anos do ensino médio no antigo CEFET-PE, que me fizeram escolher pela carreira de físico.

Ao CNPq pelo financiamento.

*(...) a verdadeira convicção só se adquire pelo estudo, pela reflexão e
por uma observação contínua (...)*

—ALLAN KARDEC

RESUMO

Neste trabalho, usamos técnicas de teoria de campos escalares e argumentos de grupo de renormalização para determinarmos a razão entre as amplitudes críticas do calor específico para sistemas competitivos arbitrários. Os resultados são obtidos pela primeira vez na literatura em primeira ordem na expansão em *loops*. Utilizamos um campo (parâmetro de ordem) de N componentes com simetria $O(N)$. Calculamos as amplitudes críticas primeiramente para os casos anisotrópicos e isotrópicos para os comportamentos críticos do tipo Lifshitz m -axial. Posteriormente, computamos as amplitudes críticas para o sistema competitivo de Lifshitz mais geral, que corresponde à criticalidade de Lifshitz de caráter genérico, para os casos anisotrópicos e isotrópicos. Os valores obtidos são consistentes com a hipótese de universalidade.

Palavras-chave: Ponto de Lifshitz, sistemas em competição, calor específico, razão de amplitudes.

ABSTRACT

In this work we utilize a scalar field-theoretic setting along with renormalization group arguments in the determination of the specific heat critical amplitude ratios for arbitrary competing systems. The results are obtained for the first time in the literature at first order in the loop expansion. We employed a field (order parameter) with $O(N)$ symmetry. We computed the critical amplitude ratios for the anisotropic as well as isotropic cases for m -axial Lifshitz critical behaviors. In addition, we determined the critical amplitudes for generic competing systems of the Lifshitz type, also known as arbitrary higher character Lifshitz criticalities, for anisotropic and isotropic situations. Our findings are consistent with the universality hypothesis.

Keywords: Lifshitz point, competing systems, specific heat, amplitude ratios.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
Capítulo 2—Métodos Funcionais em Fenômenos Críticos	10
2.1 Teoria de Campos em Mecânica Estatística	10
2.2 Potencial Efetivo e a Expansão em <i>1-Loop</i>	18
2.3 Renormalização da Teoria $\lambda\Phi^4$	23
2.4 Renormalização para Sistemas Competitivos	35
2.4.1 Ponto de Lifshitz <i>m</i> -axial	35
2.4.2 Ponto de Lifshitz de Caráter Genérico	40
Capítulo 3—Amplitudes para o Ponto de Lifshitz <i>m</i>-Axiais	45
3.1 Caso Anisotrópico	46
3.2 Caso Isotrópico	53
3.2.1 Cálculo com a Aproximação Ortogonal	55
3.2.2 Cálculo Exato	58
Capítulo 4—Amplitudes para o Ponto de Lifshitz de Caráter Genérico	61
4.1 Caso Anisotrópico	61
4.2 Caso Isotrópico	69
4.2.1 Cálculo com a Aproximação Ortogonal Generalizada	71
4.2.2 Cálculo Exato	74
Capítulo 5—Conclusão	81
Apêndice A—Transformação de Hubbard-Stratonovich	84
Apêndice B—Cálculo de Algumas Integrais	88
B.1 Identidades Matemáticas	88
B.2 Integrais Anisotrópicas	90
B.3 Integrais Isotrópicas	97

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação esquemática dos spins em (a) na fase paramagnética, (b) na fase ferromagnética.	2
1.2	Calor específico próximo da transição superfluida em $T_\lambda \approx 2,18K$ com experimento em microgravidade [2].	3
1.3	Representação das interações no modelo ANNNI.	5
1.4	Diagrama de fases do modelo ANNNI. A linha tracejada indica a transição de primeira ordem entre as duas fase ordenadas. A linha contínua corresponde a transição de segunda ordem entre as fases desordenada e ordenadas. A intersecção das linhas das transições é o denominado de ponto multicrítico de Lifshitz (PL). O parâmetro p é definido por $p = J_2/J_1$. . .	6
1.5	Representação esquemática dos spins na fase modulada em (g) para o modelo ANNNXY e (h) para o modelo ANNNH. Ambas são chamadas de fases hélicas.	6
1.6	Diagrama de fases do comportamento crítico de Lifshitz genérico de terceiro caráter do caso uniaxial. Além das fases paramagnética e ferromagnética, há duas fases moduladas onde a linha que as separa é de primeira ordem.	9
2.1	Exemplos de diagramas desconexos.	15
2.2	Exemplares de diagramas conexos.	15
4.1	Gráficos de A_+/A_- para a competição do tipo anisotrópica uniaxial . . .	67
4.2	Gráficos de A_+/A_- para a competição do tipo anisotrópica biaxial . . .	69
4.3	Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 1$	79
4.4	Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 2$	79
4.5	Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 3$	80

LISTA DE TABELAS

2.1	Tabela comparativa entre os funcionais geradores de TQC e os potenciais termodinâmicos da ME.	23
3.1	Tabela das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico de Lifshitz m -axial do caso anisotrópico em $d = 3$	52
4.1	Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de L -ésimo caráter uniaxial em $d = 3$.	66
4.2	Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de caráter infinito uniaxial em $d = 3$.	67
4.3	Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de L -ésimo caráter biaxial em $d = 3$.	68
4.4	Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de caráter infinito biaxial em $d = 3$.	68

INTRODUÇÃO

O estudo das *transições de fase* tem grande importância em várias áreas da Física. Em particular, estas transições podem ocorrer em vários contextos, desde a formação do universo, passando pela estrutura microscópica das interações fundamentais, e mais importante, na descrição de sistemas em física da matéria condensada. A importância da última é que partindo deste conhecimento, seria possível em princípio construir novos materiais, cuja utilidade em novos artefatos tecnológicos podem levar a um melhor bem-estar da humanidade.

As investigações dos fenômenos críticos iniciaram-se com o cientista francês Barão Caignard de La Tour em 1822 pela descoberta do que hoje chamamos de ponto crítico em sistemas de líquido-vapor de diversas substâncias, inclusive água, álcool, éter e bissulfeto de carbono [1]. Ele notou que a existência de uma temperatura limite acima da qual um líquido se vaporizava independentemente da pressão aplicada, era um fenômeno geral. Nos dias de hoje, os fenômenos críticos deixaram de ser uma curiosidade exótica e vivem sua plena maturidade, formando um dos pilares da física de sistemas complexos e muitos corpos.

As transições de fase podem ser classificadas quanto à sua *ordem*. A transição de fase de primeira ordem, a exemplo da transição líquido-gás, é caracterizada pela descontinuidade na derivada primeira da energia livre. Na temperatura de transição tem-se a coexistência das duas fases e o tamanho típico das bolhas de gás no líquido são de tamanho finito na ebulição. Ao passo que as transições de fase de segunda ordem, a exemplo do ferromagnetismo de Curie, caracterizam-se pela descontinuidade na segunda derivada (ou de ordem mais alta) da energia livre, e quando se aproxima do ponto crítico as fases transformam-se continuamente. As formações ferromagnéticas (ou domínios magnéticos) mergulhadas na fase paramagnética e vice-versa ocorrem em todas as escalas de distância, conforme aumentamos ou diminuimos a temperatura em torno da temperatura crítica.

Na fase ferromagnética, a interação entre os spins é mais forte que os efeitos térmicos e os deixam alinhados com uma ordenação uniforme no espaço. Ao passo que na fase paramagnética, os efeitos térmicos vencem a interação entre os spins e os desalinham desordenadamente.



Figura 1.1 Representação esquemática dos spins em (a) na fase paramagnética, (b) na fase ferromagnética.

Para as transições de segunda ordem, a exemplo da transição ferro-paramagnética, estendemos aos demais sistemas na criticalidade, o conceito de *parâmetro de ordem* representado pela magnetização $\mathbf{M}(x)$ da linguagem de sistemas magnéticos, a quantidade que assume um valor espontâneo não nulo na fase abaixo da temperatura crítica, e decresce continuamente até anular-se na fase acima da temperatura crítica.

Em outras transições, o parâmetro de ordem é identificado por uma grandeza específica. A exemplo da diferença de densidade das fases na transição líquido-vapor, da amplitude de probabilidade na teoria BCS, do valor esperado da função de onda para a superfluidez, etc.

No limite termodinâmico, alguns *potenciais termodinâmicos* apresentam divergências quando o sistema sob investigação está próximo da temperatura crítica. Essas divergências são explicitadas como leis de potência na variável $t = (T - T_c)/T_c$ caracterizadas por seus respectivos expoentes críticos. Por exemplo, o calor específico próximo à temperatura crítica diverge da seguinte maneira

$$C = \begin{cases} \frac{A_+}{\alpha} t^{-\alpha} & \text{se } t > 0; \\ \frac{A_-}{\alpha'} (-t)^{-\alpha'} & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aqui α e α' são os expoentes críticos¹ para os estados acima e abaixo da temperatura crítica T_c . Também, A_+ e A_- são as amplitudes do calor específico acima e abaixo de T_c .

Da linguagem de sistemas magnéticos, o calor específico é a soma das funções de correlação energia-energia sobre todo o espaço por $C = \beta^2 \int \langle \delta E(x) \cdot \delta E(0) \rangle$, onde $\delta E(x) \equiv E(x) - \langle E(x) \rangle$. O símbolo $\langle \dots \rangle$ mede a média termo-estatística de uma quantidade.

É rica a variedade de sistemas que exibem transições de fase de segunda ordem. A descrição é comum em sistemas magnéticos, estruturas cristalinas, supercondutividade, superfluidez, polímeros, etc. Essas transições estão associadas a uma mudança de um

¹Verifica-se das propriedades de escala sobre os potenciais termodinâmicos que os expoentes acima e abaixo da temperatura crítica T_c são iguais, ou seja, $\alpha = \alpha'$.

estado desordenado de alta temperatura para um estado ordenado de baixa temperatura. O comportamento crítico do calor específico obtido experimentalmente é mostrado para a transição ^4He na figura abaixo.

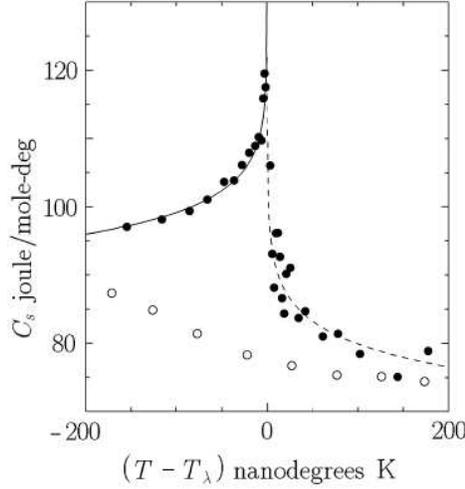


Figura 1.2 Calor específico próximo da transição superfluida em $T_\lambda \approx 2,18\text{K}$ com experimento em microgravidade [2].

A correlação spin-spin entre pontos distantes tem o seguinte comportamento:

$$\langle \delta s(x) \cdot \delta s(0) \rangle \sim \exp(-x/\xi), \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Aqui, ξ é o comprimento de correlação do sistema, que caracteriza a escala do alcance das correlações. Próximo ao ponto crítico, o comprimento de correlação diverge na variável t da seguinte maneira:

$$\xi = \begin{cases} f_+ t^{-\nu} & \text{se } t > 0, \\ f_- (-t)^{-\nu'} & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Acima da temperatura crítica, a fase paramagnética (ou fase desordenada) possui uma magnetização nula ($M = 0$). Abaixo da temperatura crítica, a fase ferromagnética (ou fase ordenada) é caracterizada por uma magnetização que pode ser escrita como:

$$M = B(-t)^\beta. \quad (1.4)$$

Essa relação bem como as anteriores, são definidas a campo externo (ou, campo conjugado) nulo ($\mathbf{h} = 0$). Para sistemas magnéticos, o campo conjugado pode ser identificado

com o campo magnético externo. Ele acopla com a magnetização (parâmetro de ordem), sendo a interação entre eles corresponde a energia de Zeeman $\int d^d x \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{h}(x)$.

Na isoterma crítica ($T = T_c$), a magnetização é descrita por:

$$M = Dh^{1/\delta}. \quad (1.5)$$

Os *expoentes críticos* e bem como algumas outras quantidades físicas não dependem dos detalhes microscópicos do sistema crítico descrito. Coloquialmente, tais grandezas são chamadas *universais*. Diferentes sistemas físicos que apresentam fenômenos críticos podem apresentar os mesmos conjuntos de expoentes críticos. Isso significa que tais grandezas não dependem dos detalhes microscópicos dos sistemas, mas apenas dos parâmetros geométricos das simetrias envolvidas como o número de dimensões espaciais, do número de componentes do parâmetro de ordem e da interação.

Além dos expoentes críticos, certas razões entre amplitudes de potenciais termodinâmicos são exemplos de grandezas universais. Aí se verifica, por exemplo, em fenômenos críticos, a universalidade dos expoentes críticos e das *razões de amplitudes* acima e abaixo da temperatura crítica de grandezas termodinâmicas como o do comprimento de correlação f_+/f_- e do *calor específico* A_+/A_- , além de outras razões mistas que envolvem também as amplitudes B da curva de coexistência e D da magnetização na isoterma crítica [3].

Entre os modelos estatísticos clássicos para a descrição de sistemas magnéticos, vale destacar o modelo para as interações entre os primeiros sítios vizinhos com vetores de spin com simetria $O(N)$. A média termo-estatística do vetor de spin corresponde ao parâmetro de ordem (ou magnetização) de N componentes do sistema. Exibem uma fase ordenada ferromagnética a baixas temperatura (com $M \neq 0$) e uma fase paramagnética em altas temperaturas com ($M = 0$). Escrevemos a energia deste sistema para um modelo de rede de spins com espaçamento a entre os vizinhos através de:

$$E\{\mathbf{s}_i\} = -\frac{1}{2} J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j + \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{s}_i, \quad (1.6)$$

onde $\mathbf{s}_i = (s_i^1, \dots, s_i^N)$ é o spin N -vetorial sobre o i -ésimo sítio definido sobre a esfera de raio unitário S_N . Em que (1.6), J é a constante de acoplamento entre os vetores de spins do i -ésimo e j -ésimo sítios. O acoplamento ferromagnético ($J > 0$) favorece o paralelismo dos spins, e o acoplamento antiferromagnético entre os spins ($J < 0$) favorece o antiparalelismo dos spins. \mathbf{h}_i é o campo externo sobre o i -ésimo sítio. Para $N = 1$ obtemos o modelo de Ising, em que os spins podem assumir os valores $s_i = \pm 1$,

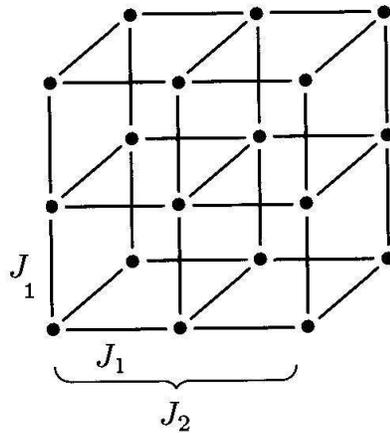


Figura 1.3 Representação das interações no modelo ANNNI.

descrevem sistemas com anisotropia unidimensional. Para $N > 1$ obtemos os modelos XY para $N = 2$ e Heisenberg para $N = 3$.

Um cenário de competição em sistemas magnéticos pode ser introduzido através da interação simultânea entre primeiros e segundos vizinhos de sítios de spins. Em mecânica estatística, um modelo simples de interações competitivas axiais entre spins de alcance finito [4] é denominado por ANNNI (Axial-Next-Nearest-Neighbor Ising). A competição ocorre ao longo de uma única direção com interações entre primeiros vizinhos com acoplamento J_1 , e entre os segundos vizinhos com acoplamento J_2 . E nas $d - 1$ direções restantes as interações ocorrem somente entre os primeiros sítios vizinhos de spin com acoplamento ferromagnético $J_1 > 0$. A versão tridimensional do modelo ANNNI é representada esquematicamente por uma rede com espaçamento a entre os sítios vizinhos na figura 1.3.

Supondo $J_1 > 0$ e $J_2 < 0$, observaremos a competição das estruturas ferromagnética e anti-ferromagnética. Interações competitivas são também observadas para $J_1 < 0$ e $J_2 < 0$, onde dois tipos diferentes de ordenamentos antiferromagnéticas são favorecidas, mas não serão investigadas neste trabalho.

O diagrama de fase do modelo ANNNI apresenta uma fase desordenada (paramagnética), uma fase ordenada uniformemente (ferromagnética), e uma região de fase modulada. Em cristais, a fase modulada no modelo ANNNI descreve uma organização quasi-periódica unidimensional desenvolvida ao longo da direção da magnetização. Nesta fase o spin é representado por $s(x) = \cos(k_0 z)$, onde $k_0 = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda da modulação. A fase incomensurada tem a razão λ/a irracional, em que a é o espaçamento da rede. O diagrama de fase do modelo é representado na figura 1.4.

A confluência das fases do modelo ANNNI caracteriza o ponto multicrítico do tipo Lifshitz (PL). A investigação de pontos multicríticos e dos diagramas de fase com transições de fase de segunda ordem envolvidas tiveram os estudos de suas propriedades críticas desenvolvidas com o ponto multicrítico de Lifshitz, ou simplesmente ponto de Lifshitz (PL) formulado por Hornreich, Luban e Shtrikman [5].

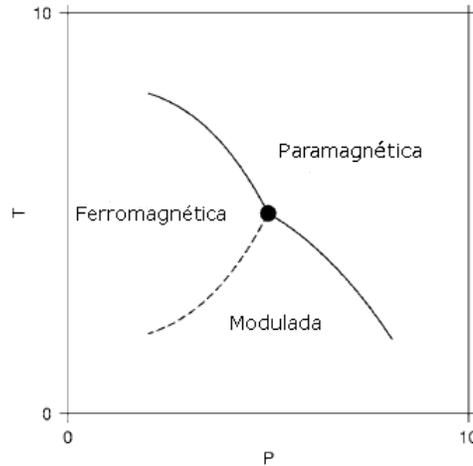


Figura 1.4 Diagrama de fases do modelo ANNNI. A linha tracejada indica a transição de primeira ordem entre as duas fase ordenadas. A linha contínua corresponde a transição de segunda ordem entre as fases desordenada e ordenadas. A intersecção das linhas das transições é o denominado de ponto multicrítico de Lifshitz (PL). O parâmetro p é definido por $p = J_2/J_1$.

De acordo com a anisotropia do sistema, a magnetização pode ter uma estrutura vetorial de N componentes, que pertencem à descrição de modelos estendidos de competição axial. Os modelos ANNNXY (Axial-Next-Nearest-Neighbor XY) e ANNNH (Axial-Next-Nearest-Neighbor Heisenberg) exibem o mesmo cenário de competição do ANNNI através de um parâmetro de ordem com $N = 2$ e $N = 3$, respectivamente. Esses modelos possuem diagramas de fase similares. Nestes últimos a fase modulada apresenta vetores de spin que precessionam em torno do eixo de modulação (ver figura 1.5).

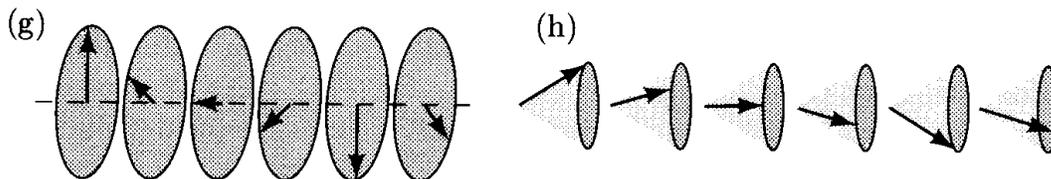


Figura 1.5 Representação esquemática dos spins na fase modulada em (g) para o modelo ANNNXY e (h) para o modelo ANNNH. Ambas são chamadas de fases hélicas.

Os modelos do tipo-ANNN em d dimensões podem ser estendidos para m direções axiais competitivas e $d - m$ direções restantes sem competição para descrever o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial através de uma representação de campos contínuos com simetria $O(N)$. A formulação deste modelo com $m = 1$ (uma única direção axial competitiva e $d - 1$ direções não-competitivas) naturalmente reproduz os modelos do tipo-ANNN nas vizinhanças do PL.

Inicialmente, o PL aparece com a introdução de interações competitivas de curto alcance em sistemas magnéticos, e de cuja linguagem continuaremos a fazer uso. Atualmente, as aplicações em sistemas físicos se diversificaram desde cristais líquidos ferroelétricos, supercondutores de alta temperatura [6, 7, 8], ferroelétricos uniaxiais [9, 10, 11], alguns tipos de polímeros [12, 13, 14, 15], materiais magnéticos [16, 17, 18, 19], e recentemente até fora da área de matéria condensada, em gravidade quântica [20, 21].

Os pontos de Lifshitz m -axiais são caracterizados por um novo conjunto de relações de escala, que são obtidos por técnicas de teoria de campos e grupo de renormalização via expansão ϵ_L . Estes sistemas são caracterizados por dois comprimentos de correlação independentes $\xi_{L4} \sim |t|^{-\nu_{L4}}$ e $\xi_{L2} \sim |t|^{-\nu_{L2}}$ ao longo do subespaço competitivo \mathbb{R}^m e não-competitivo \mathbb{R}^{d-m} , respectivamente [22]. Sempre temos que $m \leq d$, e quando $m \neq d$ o comportamento de Lifshitz corresponde ao caso anisotrópico, que possui uma classe de universalidade caracterizada por (N, d, m) . No comportamento crítico isotrópico quando $m = d$ é manifestado apenas um único comprimento de correlação ξ_{L4} em todo espaço \mathbb{R}^m . A classe de universalidade do caso isotrópico é expressa através de (N, m) .

Podemos, por exemplo, incluir um acoplamento ferromagnético entre terceiros vizinhos ($J_3 > 0$) ao longo de uma única direção, e assim o presente sistema possui um ponto de Lifshitz de terceiro caráter para um conjunto de determinados valores para as razões J_2/J_1 e J_3/J_1 , e a uma correspondente temperatura de crítica de Lifshitz [23, 24]. Quando estendemos este tipo de competição ao longo de m_3 direções espaciais, apresentamos o ponto de Lifshitz de terceiro caráter de m_3 -fold [25]. Por outro lado, se interações competitivas acontecem simultaneamente e independentemente entre segundo vizinhos ao longo de m_2 direções espaciais e entre terceiros vizinhos ao longo de m_3 direções espaciais, e então o sistema apresenta um ponto crítico de Lifshitz m_3 -fold de terceiro caráter genérico [25]. A classe de universalidade correspondente ao terceiro caráter genérico é definida através de (N, d, m_2, m_3) , enquanto que o comportamento crítico isotrópico de terceiro caráter tem a classe de universalidade expressa através de (N, d, m) .

Podemos estender o cenário das competições quando consideramos acoplamentos $J_1, J_2, \dots, J_{L-1}, J_L$ de sinais alternados até o L -ésimo vizinho ao longo de uma direção

axial e definimos o ponto de Lifshitz de L -ésimo caráter de m_L -fold para um determinado conjunto de valores das razões $J_L/J_1, J_{L-1}/J_1, \dots, J_2/J_1$ e a uma temperatura crítica de Lifshitz T_L [26, 27, 28]. Contudo, uma situação mais ampla das competições anisotrópicas é realizada quando consideramos diversos subespaços competitivos simultaneamente e independentes em que as interações competitivas ocorrem até os segundos vizinhos ao longo de m_2 direções, até os terceiros vizinhos ao longo m_3 direções, e sucessivamente até o L -ésimo vizinho ao longo de m_L direções, de tal maneira que todos os eixos são ortogonais entre si [25]. Assim, o então chamado comportamento crítico de Lifshitz de L -ésimo caráter genérico tem a sua classe de universalidade dependente do número de componentes N do parâmetro de ordem, da dimensão espacial d , das dimensões dos subespaços competitivos e de seus respectivos alcances de interação. O comportamento isotrópico é realizado quando as interações competitivas até o L -ésimo vizinho ocorrem em todas as direções ($d = m_L$). A classe de universalidade do caso isotrópico depende do número N de componentes do parâmetro de ordem, da dimensão espacial $d = m_L$ e do maior alcance L das interações envolvidas. Esta classe é representada através de (N, d, L) ou $(N, d = m_L)$ [25].

Na figura (1.6) é exibido o diagrama de fases do comportamento crítico de Lifshitz de terceiro caráter genérico. Existem interações competitivas ferro para os terceiros vizinhos, antiferro para os segundos vizinhos e ferro para os primeiros vizinhos ao longo de uma direção ($m_3 = 1$) espacial. Ao longo de uma direção perpendicular a esta, permitimos acoplamentos $J_1 > 0$ e $J_2 < 0$. Finalmente ao longo de $(d - 2)$ direções só acoplamentos ferromagnéticos ocorrem entre primeiros vizinhos. Agora, além das fases para e ferromagnética, há duas fases moduladas Hélica₂ e Hélica₃. O comportamento genérico é acompanhado de um diagrama de fases com uma diversidade de fases moduladas.

Note que podemos obter a descrição do comportamento crítico de Lifshitz m -axial por uma *redução* da classe de universalidade do comportamento crítico de Lifshitz genérico de L -ésimo caráter quando fazemos $m_3 = m_4 = \dots = m_L = 0$ e $m_2 = m$, e assim conseguimos a classe (N, d, m) já apresentada anteriormente. Em seguida, podemos obter a classe de universalidade do modelo N -vetorial livre de competições do último comportamento quando realizamos $m = 0$, e portanto (N, d) .

O objetivo deste trabalho é calcular pela primeira vez os valores da razão entre amplitudes do calor específico acima e abaixo da temperatura crítica para os sistemas competitivos que foram apresentados neste capítulo.

No capítulo 2, apresentamos uma revisão dos métodos funcionais da teoria de campos em fenômenos críticos. Através do formalismo de integral de trajetória realizamos o

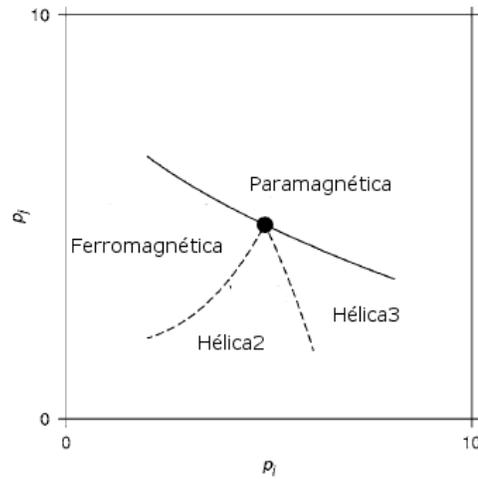


Figura 1.6 Diagrama de fases do comportamento crítico de Lifshitz genérico de terceiro caráter do caso uniaxial. Além das fases paramagnética e ferromagnética, há duas fases moduladas onde a linha que as separa é de primeira ordem.

tratamento de renormalização da teoria $\lambda\phi^4$ para os sistemas ausentes de interações competitivas e em seguida, para os sistemas que apresentam competição.

No capítulo 3 através dos resultados alcançados no capítulo anterior iremos calcular as amplitudes do calor específico acima e abaixo da temperatura crítica para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial. Assim, obteremos as razões universais de amplitudes A_+/A_- para os casos anisotrópicos e isotrópicos dos cenários de competição, separadamente.

No capítulo 4, similarmente ao capítulo anterior, calculamos as amplitudes do calor específico para o comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter genérico arbitrário. Logo, obtemos as razões universais de amplitudes A_+/A_- para um cenário de competições generalizadas e arbitrárias para os casos anisotrópicos e isotrópicos.

Nos apêndice A, apresentamos a transformação de Hubbard-Stratonovich para o modelo N -vetorial. No apêndice B, resolvemos algumas identidades e integrais utilizadas nos capítulos anteriores.

MÉTODOS FUNCIONAIS EM FENÔMENOS CRÍTICOS

Métodos funcionais são de grande aplicação nas áreas da física formuladas por teorias de campo. O desenvolvimento das técnicas de teoria quântica de campos (TQC) e de outras áreas vem contribuindo também para a mecânica estatística (ME), e particularmente na descrição dos fenômenos críticos de sistemas que sofrem transições de fase a uma temperatura absoluta não-nula T .

De fato, usando teorias de campos, é possível descrever as propriedades críticas universais de tais sistemas utilizando a teoria de perturbação diagramática em conjunto com argumentos de grupo de renormalização. Neste capítulo, descreveremos de forma sucinta os principais resultados desenvolvidos nos últimos anos que serão úteis para o cálculo da razão entre amplitudes acima e abaixo da temperatura crítica. Não tentaremos dar uma descrição detalhada, mas o leitor interessado pode consultar as referências [29, 30, 31, 32] para uma discussão autocontida dos tópicos discutidos neste capítulo para sistemas livres de competição. Sistemas com competição são discutidos em [4, 22, 25] e deixamos para o leitor encontrar os detalhes em tal referência. O objetivo deste capítulo é preparar o terreno para uma melhor compreensão dos resultados mais importantes deste trabalho, que serão discutidos nos capítulos subsequentes.

2.1 TEORIA DE CAMPOS EM MECÂNICA ESTATÍSTICA

Poderemos relacionar a TQC em $(d, 1)$ dimensões espaço-temporais com a ME em $d + 1$ dimensões espaciais. Consideremos a amplitude de transição de estados vácuo-vácuo da TQC para campos escalares $[\phi]_{a=1, \dots, N}$ no espaço de Minkowski $\mathbb{M}^{(d,1)}$ denotada pelo *gerador funcional* das funções de Green da teoria:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^d x dt \mathcal{L}(\phi, J) \right], \quad (2.1)$$

em que $\hbar = 1 = c$ no sistema natural de medidas.

O elemento de distância de $\mathbb{M}^{(d,1)}$ é definido da seguinte maneira:

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx_\mu = (dt)^2 - (d\vec{x})^2. \quad (2.2)$$

Podemos levar a TQC no espaço minkowskiano $\mathbb{M}^{(d,1)}$ para a ME no espaço euclidiano \mathbb{R}^{d+1} operando a rotação de Wick $t \rightarrow ix_{d+1}$. Recuperamos o elemento de distância euclidiana e transformamos o elemento de volume como $i d^d x dt \rightarrow -d^{d+1}x$.

Assim, escrevemos o funcional gerador para o espaço euclidiano através de

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^{d+1}x \mathcal{L}(\phi, J) \right] \equiv \int \mathcal{D}\phi W\{\phi\}, \quad (2.3)$$

que corresponderá à função partição¹ da ME com o peso estatístico de Boltzmann $W\{\phi\}$ no parâmetro de ordem ϕ para uma correspondente lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$ construída.

Podemos considerar o modelo N -vetorial para as interações entre spins vetoriais até os primeiros sítios vizinhos, o qual corresponde ao modelo de Ising para o sistema de spins escalares $s_l = \pm 1$. A energia para esse modelo sujeito a um campo externo microscópico \mathbf{h}_l é dada por

$$E\{\mathbf{s}_l\} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle l, l' \rangle} J_{l, l'} \mathbf{s}_l \cdot \mathbf{s}_{l'} + \sum_l \mathbf{h}_l \cdot \mathbf{s}_l. \quad (2.4)$$

No Apêndice A mostramos que esta descrição em termos de variáveis de spin pode ser eficientemente substituída por uma formulação em termos de campos contínuos escalares através da transformação de Hubbard-Stratonovich acompanhado de um procedimento heurístico. Em termos destes campos, a função de partição termodinâmica pode ser escrita como

$$Z[\mathbf{H}] = \text{Tr} \exp [- \beta E\{\mathbf{s}_l\}] = A \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \mathbf{H}(x)) \right], \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, \mathbf{H})$ é a energia livre de Ginzburg-Landau, e a escrevemos como

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^2)^2 - \mathbf{H} \cdot \phi, \quad (2.6)$$

que vai corresponder a lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \mathbf{H})$ do gerador funcional euclidiano de (2.3), em que fazemos $d+1 \rightarrow d$. $\mathbf{H}(x)$ é o campo externo, ou fonte² da teoria.

A função partição é escrita como uma integral funcional sobre o campo escalar ϕ . O

¹Ou melhor, funcional partição.

²Denotaremos daqui em diante, a fonte por J da notação tradicional da literatura de TQC.

campo ϕ vai corresponder ao parâmetro de ordem da teoria, ou na linguagem de sistemas magnéticos, à magnetização \mathbf{M} do sistema.

Na ausência do termo de interação $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2$, o funcional gerador euclidiano para os campos livres é escrito:

$$Z_0[\mathbf{J}] = A_0 \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}_0(\phi) + (\mathbf{J}, \phi) \right] = \exp \left[- \frac{1}{2}(\mathbf{J}, \mathbf{G}_0 \mathbf{J}) \right]. \quad (2.7)$$

Determinamos a constante A_0 pela condição de normalização $Z_0[0] = 1$. Denotamos a lagrangiana livre da teoria como $\mathcal{L}_0(\phi) \equiv \frac{1}{2} \phi \cdot \mathbf{G}_0^{-1} \phi = \frac{1}{2} \phi \cdot (-\nabla^2 + \mu^2) \phi$.

Escrevemos o propagador livre euclidiano no espaço das coordenadas como:

$$G_{0ab}^{(2)}(x, x') = \delta_{ab} \delta^d(x - x') \overline{G}_0(x), \quad (2.8)$$

onde,

$$\overline{G}_0(x) = (-\nabla^2 + \mu^2)^{-1} \quad (2.9)$$

Verificamos que $\overline{G}_0(x)$ é uma expressão de operadores diferenciais.

É possível mostrar que o funcional gerador euclidiano das funções de Green para campos interagentes com a lagrangiana $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) - \mathbf{J} \cdot \phi$ é expresso por

$$Z[\mathbf{J}] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ - \int d^d x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J_a(x)} \right) \right\} Z_0[\mathbf{J}]. \quad (2.10)$$

Em que o fator \mathcal{N}^{-1} é ajustado pela condição de normalização $Z[0] = 1$, que elimina divergências provenientes dos diagramas de vácuo. Um diagrama de vácuo é caracterizado pela ausência de linhas externas ou inserções de operadores compostos.

A interação que estamos interessados é do tipo

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2 = \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{a=1}^N \phi_a^2 \right)^2 = \frac{\lambda}{4!} S_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \quad (2.11)$$

onde,

$$S_{abcd} = \frac{1}{3}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}), \quad (2.12)$$

que também é conhecida como interação do caso simétrico $O(N)$. Acima vale a notação de soma de Einstein para os índices repetidos, isto é, $x_a x_a \equiv \sum_a x_a x_a$.

Portanto, o gerador funcional para esta interação segue de (2.10)

$$Z[\mathbf{J}] = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!} S_{abcd} \int d^d x \frac{\delta^4}{\delta J_a(x) \delta J_b(x) \delta J_c(x) \delta J_d(x)} \right)^n Z_0[\mathbf{J}]. \quad (2.13)$$

Então podemos desenvolver a expansão do funcional gerador das funções de Green de N pontos em potências da fonte $J_a(x)$

$$Z[J] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots \int d^d x_n J_{a_1}(x_1) \dots J_{a_n}(x_n) G_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.14)$$

onde, as funções de Green de n pontos podem ser escritas como

$$\begin{aligned} G_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \left. \frac{\delta^n Z[J_a]}{\delta J_{a_1}(x_1) \dots \delta J_{a_n}(x_n)} \right|_{J_a=0} \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) \exp \left\{ - \int d^d x \mathcal{L}(\phi, J) \right\} \Big|_{J_a=0} \\ &\equiv \langle \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Elas correspondem às funções de correlação de n pontos em ME. Em TQC, o valor esperado das funções de Green fornece a amplitude dos processos de espalhamento das partículas. Em ME, apesar de não corresponder a nenhum processo de espalhamento, as funções de Green tem uma analogia direta com as funções de correlação spin-spin. Esta analogia nos permite extrair resultados analíticos como será observado no decorrer deste trabalho.

Para uma eficiência analítica dos nossos cálculos, é estratégico efetuarmos a transformada de Fourier nos campos, e trabalharmos no espaço dos momentos. As expressões de operadores diferenciais dão lugar a expressões algébricas, que são mais fáceis de serem tratadas. Isso se dá inclusive no estudo do Grupo de Renormalização (GR), que trataremos mais adiante. O tratamento do GR no espaço dos momentos introduzido por Wilson [33, 34, 35, 36] facilita o tratamento analítico, ao passo que o GR no espaço das coordenadas desenvolvido por Kadanoff [37] pode ser realizado por processos de dizimação na rede com resultados satisfatórios quando implementados via simulações numéricas. Iremos nos

concentrar no primeiro, em vista do nosso interesse em tratar o problema analiticamente.

Realizamos a transformada de Fourier nos campos e nas fontes usando as expressões

$$\phi_a(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi_a(k), \quad (2.16)$$

$$J_a(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} J_a(k). \quad (2.17)$$

Escrevemos as funções de Green no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned} G_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \int d^d x_1 \dots \int d^d x_n e^{i(k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n)} G_{a_1 \dots a_n}^{(N)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_{a_1}(k_1) \dots \phi_{a_n}(k_n) \exp \left\{ - \int d^d x \mathcal{L}(\phi, J) \right\} \Bigg|_{J_a=0} \\ &= \langle \phi_{a_1}(k_1) \dots \phi_{a_n}(k_n) \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podemos escrever o propagador livre euclidiano no espaço dos momentos na forma

$$G_{0ab}^{(2)}(k, k') = \delta_{ab} \delta^d(k + k') \overline{G}_0^{(2)}(k), \quad (2.19)$$

onde,

$$\overline{G}_0^{(2)}(k) = \frac{1}{k^2 + \mu^2}. \quad (2.20)$$

Verificamos que $\overline{G}_0^{(2)}(k)$ é uma expressão algébrica no espaço dos momentos.

A ação é então escrita com os campos e fontes no espaço dos momentos através da expressão:

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= \int d^d x \mathcal{L}(\phi, J) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \phi_a(-k) [\delta_{ab}(k^2 + \mu^2)] \phi_b(k) - J_a(-k) \phi_a(k) \right] \\ &+ \int \frac{d^d k_a}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{d^d k_d}{(2\pi)^d} \left[\frac{\lambda}{4!} S_{abcd} (2\pi)^d \delta^d(k_a + k_b + k_c + k_d) \right] \phi_a(k_a) \dots \phi_d(k_d). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A expansão perturbativa das funções de Green pode ser representada pelos diagramas de Feynman. Estas envolvem construções diagramáticas conexas e desconexas. São diagramas desconexos aqueles que são representados pelo produto disjuntivo de outros diagramas como verificamos na figura 2.1. Já os diagramas conexas não são representados



Figura 2.1 Exemplos de diagramas desconexos.



Figura 2.2 Exemplos de diagramas conexos.

pelo produto disjuntos de outros diagramas conforme vimos na figura 2.2.

Consideremos os diagramas no espaço dos momentos, e aqui apenas construiremos para a teoria $(\phi^2)^2$. Um diagrama é formado por linhas e vértices. Cada linha de extremidades a e b e um momento propagante k corresponde ao propagador $\delta_{ab} (k^2 + \mu^2)^{-1}$, e essas podem ser em número E de linhas externas e de I linhas internas. Cada vértice do qual emanam quatro extremidades de rótulos a, b, c e d com momentos k_a, k_b, k_c e k_d , respectivamente, corresponde a $\frac{-\lambda}{4!} S_{abcd} (2\pi)^d \delta^d(k_a + k_b + k_c + k_d)$, se desenvolvem em um número igual a n -ésima ordem de perturbação. Por fim, integramos em todos os momentos internos propagantes, e multiplicamos pelo fator de simetria do diagrama que contempla o número de diagramas topologicamente equivalentes, acompanhados de um fator $\frac{1}{n!}$ decorrente da expansão em (2.13). A expansão perturbativa da função de Green de E pontos envolverá os diagramas com E extremidades livres, e com n vértices para a n -ésima ordem de perturbação da função.

Alguns diagramas conexos, à exceção do próprio propagador livre, possuem a formação de *loops* (laços) em sua estrutura. Os diagramas em que todas as linhas internas participam da construção de algum loop são chamados de 1-PI, ou irredutíveis a uma partícula. Por outro lado, diagramas redutíveis a uma partícula são aqueles que podem ser separados em duas partes pelo corte de apenas uma linha interna.

Apesar de operarmos uma expansão na constante de acoplamento perturbativa, os *loops* presentes nos diagramas são essencialmente divergentes. Para o programa de regularização da teoria deveremos definir a noção de *grau de divergência superficial* D do diagrama, o qual diverge com Λ^D , onde $\Lambda \rightarrow \infty$ é o *cutoff* da integral ou limite superior da mesma. Este tipo de comportamento caracteriza as divergências ultravioletas para

$D \geq 0$. Para um diagrama 1-PI com I linhas internas e n vértices, D é dado por

$$D = d [I - (n - 1)] - 2I = dl - 2I, \quad (2.22)$$

onde, $l = I - n + 1$ é o número de loops do diagrama 1-PI.

Na teoria ϕ^4 , cada vértice emana quatro linhas, e as linhas internas conectam dois vértices distintos. Então contamos

$$4n = E + 2I. \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.22), expressamos o grau de divergência de um diagrama de E pernas externas e n vértices por

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right)E + n(d - 4). \quad (2.24)$$

A teoria será renormalizável se um número finito de funções de Green $G^{(E)}$ forem divergentes ($D \geq 0$). Para $d > 4$ o grau de divergência D é crescente com a ordem de perturbação n , e a teoria ϕ^4 tornar-se-á não-renormalizável. Na dimensão crítica $d = d_c = 4$, o grau de divergência $D = 4 - E$ será positivo para um número restrito de funções de Green, e a teoria tornar-se-á renormalizável. São $G^{(2)}$ e $G^{(4)}$ as funções de Green que possuem diagramas primitivamente divergentes na teoria ϕ^4 com divergências quadrática ($D = 2$) e logarítmica ($D = 0$), respectivamente.

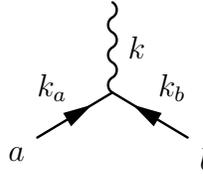
Além do termo de fonte $-J(x) \cdot \phi(x)$ podemos adicionar o termo à lagrangiana presente em (2.6), o termo para a geração das inserções do operador composto do tipo ϕ^2 através de

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\phi^2}(t, \phi) = \int d^d x \frac{1}{2!} t(x) \phi^2(x). \quad (2.25)$$

Definimos a função de Green para operadores compostos pela expressão

$$\begin{aligned} G_{a_1, \dots, a_E}^{(E, L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) &= \frac{\delta^{E+L} Z[J, t]}{\delta J_{a_1}(x_1) \cdots \delta J_{a_E}(x_E) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_L)} \Bigg|_{J_a=0=t} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^L \langle \phi_{a_1}(x_1) \cdots \phi_{a_N}(x_N) \phi^2(y_1) \cdots \phi^2(y_L) \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A transformada de fourier na fonte $t(x)$ do operador composto é dada por



$$: \quad \delta_{ab} \frac{1}{2!} (2\pi)^d \delta^d(k_a + k_b - k)$$

Consideremos a teoria de campo com uma lagrangiana $a^{-1}\mathcal{L}$. O gerador funcional (2.10) é reescrito

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}] &= \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ -a^{-1} \int d^d x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J_a(x)} \right) \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, a^{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \phi) + (\mathbf{J}, \phi) \right] \\ &= \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ -a^{-1} \int d^d x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J_a(x)} \right) \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{J}, a \mathbf{G}_0 \mathbf{J}) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para cada vértice de interação, o diagrama aparecerá multiplicado por a^{-1} e para cada propagador interno por a . Cada diagrama com I linhas internas e n vértices de interação aparecerá multiplicado por $a^{I-n} = a^{l-1}$, em que l é o número de *loops* do diagrama. A expansão em potências da constante a , corresponderá à expansão no número de *loops* $l = 0, 1, 2, \dots$. Em TQC, a constante a corresponde à constante de Planck \hbar , e assim, a expansão vai consistir de correções sobre a teoria clássica.

É importante frisar que a expansão de diferentes funções para um mesmo número de *loops*, não é necessariamente realizada na mesma ordem de interação.

2.2 POTENCIAL EFETIVO E A EXPANSÃO EM 1-LOOP

Como mencionamos na seção anterior, os diagramas de Feynman são formados por diagramas conectados e desconectados. Os diagramas conectados podem ser obtidos do gerador funcional

$$F[J] = \ln Z[J] = \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-S[\phi] + (J, \phi) \right) \right\}, \quad (2.31)$$

que gera as funções de Green conectadas de N -pontos através da expressão

$$G_c^{(E)}(1, \dots, E) = \frac{\delta^E F[J]}{\delta J_{a_1}(1) \cdots \delta J_{a_E}(E)} \Bigg|_{J_a=0}. \quad (2.32)$$

Ainda assim, a estrutura dos diagramas das funções de Green conectadas $G_c^{(N)}$ podem ser formados por outros subdiagramas. Esses subdiagramas são chamados de partes de vértices irredutíveis a uma partícula (ou diagramas “1PI” do inglês “one-particle irreducible”).

Introduzimos o gerador funcional dos diagramas 1PI utilizando a equação

$$\Gamma[\phi] = (J, \phi) - F[J] = S[\phi] + \frac{1}{2} \text{Tr}_{(a,b;k,k')} \ln \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_a(-k) \delta \phi_b(-k')} \quad (2.33)$$

que é a transformada de Legendre sobre o gerador funcional dos diagramas conectados.

As relações entre a fonte J_a e o campo ϕ_a são expressas por

$$\phi_a(i) = \frac{\delta F[J]}{\delta J_a(i)}, \quad (2.34)$$

ou,

$$J_a(i) = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_a(i)}. \quad (2.35)$$

Podemos escrever a parte de vértice 1PI de N -pontos como

$$\Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(1, \dots, E) \equiv \frac{\delta^E \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{a_1}(1) \cdots \delta \phi_{a_E}(E)} \Bigg|_{\phi_a = \bar{\phi}_a}, \quad (2.36)$$

em que $\bar{\phi}_a$ é definido para o valor o qual $J_a \rightarrow 0$ em (2.35), ou seja,

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_a(k)} \Bigg|_{\bar{\phi}_a} = 0. \quad (2.37)$$

Na presença do termo de fonte de (2.25), escrevemos as partes de vértice na forma

$$\Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E,L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) \equiv \frac{\delta^{E+L} \Gamma[\phi, t]}{\delta \phi_{a_1}(x_1) \cdots \delta \phi_{a_E}(x_E) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_L)} \Bigg|_{\phi_a = \bar{\phi}_a, t=0}. \quad (2.38)$$

Para o momento, por motivo de simplicidade, façamos $L = 0$. Entretanto, permitiremos $L \neq 0$ quando retornarmos à nossa discussão sobre a renormalização do funcional $\Gamma[\phi]$.

A expansão funcional do gerador das partes de vértice 1PI pode ser escrita como

$$\Gamma[\phi] = \sum_{E=1}^{\infty} \frac{1}{E!} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) \times [\phi_{a_1}(k_1) - \bar{\phi}_{a_1}(k_1)] \cdots [\phi_{a_E}(k_E) - \bar{\phi}_{a_E}(k_E)]. \quad (2.39)$$

A equação de (2.37) possui duas soluções: i) a solução trivial $\phi = 0$ que corresponde ao estado que chamaremos de simétrico, no qual a simetria $O(N)$ é preservada; ii) e a solução degenerada $\phi^2 \neq 0$ que corresponde a um estado em que a simetria $O(N)$ é quebrada para $O(N-1)$.

Para uma distribuição uniforme $\phi_a(x) = \Phi_a$ ou $\phi_a(k) = (2\pi)^d \delta^d(k) \Phi_a$, reescrevemos (2.39) como

$$\Gamma[\phi] = \sum_{E=1}^{\infty} \frac{1}{E!} \Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(0, \dots, 0) \Phi_{a_1} \cdots \Phi_{a_E}. \quad (2.40)$$

Da invariância por translações no espaço das coordenadas nas partes de vértice, podemos escrevê-las no espaço dos momentos através de

$$\Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(k_1 \dots k_E) = (2\pi)^d \delta^d(\sum_i^E k_i) \bar{\Gamma}_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E). \quad (2.41)$$

Usando (2.41) em (2.40), escrevemos

$$\Gamma[\phi] = (2\pi)^d \delta^d(0) \sum_{E=1}^{\infty} \frac{1}{E!} \bar{\Gamma}_{a_1 \dots a_E}^{(E)}(0, \dots, 0) \Phi_{a_1} \cdots \Phi_{a_E} = (2\pi)^d \delta^d(0) U_{\text{eff}}(\Phi). \quad (2.42)$$

Então, $U_{\text{eff}}(\Phi)$ é denominado potencial efetivo da teoria. Aqui iremos obtê-lo expandindo até a ordem de 1-loop, seguindo a expansão da ação $S[\phi, J] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi) - (J, \phi)$ pelo método do ponto-de-sela. Então obtemos:

$$S[\phi, J] = S[\phi^o, J] + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} [\phi_a(k) - \phi_a^o(k)] [\phi_b(k') - \phi_b^o(k')] \times \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_a(-k) \delta \phi_b(-k')} \right|_{\phi^o} + (\cdots). \quad (2.43)$$

Na expressão acima, expandimos em torno da trajetória clássica ϕ^o da condição de

extremização da ação, como

$$\left. \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_a(-k)} \right|_{\phi^o} = 0. \quad (2.44)$$

Fazendo $\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \phi^o(k)$, escrevemos o gerador funcional $Z[\phi]$ de maneira que

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi, J]) \\ &= e^{-S[\phi^o, J]} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)\right] = e^{-S[\phi^o, J]} (\det A)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Escrevemos a matriz hessiana A como

$$[A(\phi^o)]_{ab}(k, k') \equiv \frac{\delta^2 S[\phi^o]}{\delta \phi_a^o(-k) \delta \phi_b^o(-k')} \quad (2.46)$$

em que consideramos que A não seja singular, ou seja, $\det A \neq 0$.

Escrevemos o funcional gerador dos diagramas conectados

$$\begin{aligned} F[J] &= \ln Z[J] = -S[\phi^o, J] - \frac{1}{2} \ln \det A(\phi^o) \\ &= (J, \phi^o) - \int d^d x \mathcal{L}(\phi^o) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln A(\phi^o) \end{aligned} \quad (2.47)$$

em que usamos acima $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$. Aqui denotamos o traço sobre os índices internos e as variáveis de momento, ou seja, $\text{Tr} \equiv \text{Tr}_{(a,b;k,k')}$.

Tomando $\phi^o \rightarrow \phi$ acima, escrevemos o funcional gerador das partes de vértices 1PI na forma

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] &= (J, \phi) - F[J] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln A(\phi) \\ &= S[\phi] + \frac{1}{2} \text{Tr}_{(a,b;k,k')} \ln \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_a(-k) \delta \phi_b(-k')}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Observamos no segundo membro de (2.48), a ação $S[\phi]$ seguida da correção de 1-loop.

Para a ação da teoria $\lambda \phi^4$ em (2.21) no caso de uma distribuição uniforme do campo como $\phi_a(x) = \Phi_a \equiv \text{cte}$, ou no espaço dos momentos $\phi_a(k) = (2\pi)^d \delta^d(k) \Phi_a$, escrevemos (2.48) como:

$$\Gamma(\Phi) = (2\pi)^d \delta^d(0) U_{\text{eff}}(\Phi) = (2\pi)^d \delta^d(0) [U_{\text{Landau}}(\Phi) + U_{1\text{-loop}}(\Phi)] \quad (2.49)$$

O primeiro termo é a contribuição de Landau para a energia livre, que é dada por:

$$U_{\text{Landau}}(\Phi) = \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\Phi^2)^2, \quad (2.50)$$

que corresponde ao termo em 0-loop do potencial efetivo. Minimizando esta energia livre, as configurações de campo ser de dois tipos, isto é,

$$\Phi^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu^2 > 0; \\ -\frac{6\mu^2}{\lambda} & \text{se } \mu^2 < 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Dependendo do sinal de $\mu^2 \sim T - T_0$, as configurações de campo correspondem a dois estados: acima ou abaixo da temperatura de transição T_0 . Acima da temperatura de transição, temos o estado simétrico com o vácuo³ trivial $\Phi^2 = 0$ que apresenta a simetria $O(N)$ preservada. E abaixo da temperatura de transição, o estado de simetria quebrada para um vácuo degenerado $\Phi^2 \neq 0$ que dá origem a uma nova simetria escondida expresso pelo subgrupo $O(N - 1)$.

Abaixo da dimensão crítica $d_c = 4$, a teoria de Landau é corrigida com a contribuição em 1-loop do potencial efetivo. Da discussão do topo desta página escrevemos a correção da energia em 1-loop a menos de uma constante por meio de

$$U_{1\text{-loop}}(\Phi) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{(a,b)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[(k^2 + \mu^2) \delta_{ab} + \frac{\lambda}{6} (\delta_{ab} \Phi^2 + 2 \Phi_a \Phi_b) \right] - \ln k^2 \right\}. \quad (2.52)$$

Para simplificar o cálculo do traço em (2.52), rotacionamos o sistema de eixos do espaço interno dos campos a fim de escrevermos Φ_a na seguinte forma

$$\Phi_a = (\Phi, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}), \quad (2.53)$$

onde, continuamos preservando a norma do campo, isto é, $\Phi_a \Phi_a = \Phi^2$. É similar a maneira que se escreve, em relatividade restrita, o momento quadridimensional k_μ no referencial de repouso da partícula através de $k_\mu = (m, 0, 0, 0)$, o que satisfaz a relação relativística $k_\mu k^\mu = m^2$.

³Entendemos por vácuo, as soluções que minimizam a energia livre.

Usando (2.53), desenvolvemos o traço⁴ de (2.52) e obtemos

$$U_{1-loop}(\Phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi^2}{k^2} \right] + (N-1) \ln \left[1 + \frac{\mu^2 + \frac{\lambda}{6}\Phi^2}{k^2} \right] \right\}. \quad (2.54)$$

O potencial efetivo $U_{\text{eff}}(\Phi)$ ainda se apresenta não renormalizado. Deveremos redefinir os campos, a massa e a constante de acoplamento a fim de que as partes de vértice sejam finitas com a remoção de suas divergências ultravioletas, pelo menos na ordem de 1-*loop*.

Após definirmos os funcionais geradores dos diversos tipos de diagramas de Feynman, podemos escrever a analogia dos elementos da TQC com a ME utilizando a tabela abaixo:

Teoria Quântica de Campos	Mecânica Estatística
Funcional Gerador $Z[J]$	Função Partição $Z[\mathbf{h}]$
F. Gerador de diagramas conectados $F[J] = \ln Z[J]$	Energia Livre de Helmholtz $A[\mathbf{h}] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\mathbf{h}]$
F. Gerador de diagramas irreduzíveis $\Gamma[\phi] = (J, \phi) - F[J]$	Energia livre de Gibbs $G[M] = (M, \mathbf{H}) - A[\mathbf{H}]$

Tabela 2.1 Tabela comparativa entre os funcionais geradores de TQC e os potenciais termodinâmicos da ME.

É importante frisar que $\Gamma[\phi]$ é o objeto central para a discussão da transição de fase e o grupo de renormalização.

2.3 RENORMALIZAÇÃO DA TEORIA $\lambda\Phi^4$

Podemos obter o grau de divergência superficial das integrais que ocorrem na expansão diagramática das partes de vértices 1PI utilizando as definições das dimensões canônicas destes objetos.

No sistema de unidades naturais, a constante de Planck, a velocidade da luz e a constante de Boltzmann são adimensionais e valem $\hbar = c = k_B = 1$. A análise dimensional expressará qualquer grandeza na dimensão de comprimento L ou de momento Λ (que é o inverso de L). Assim, a dimensão canônica x de um objeto X é apresentado por $[X] = \Lambda^x$. A ação $S[\Phi]$ tem a dimensão de \hbar , e esta é adimensional. Da ação da teoria $\lambda\Phi^4$ em (2.21) a parte livre

⁴Representamos o traço por $\text{Tr}_{(a,b)} = \sum_{a,b=1}^N \delta_{ab}$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_a(-k) [\delta_{ab}(k^2 + \mu^2)] \phi_b(k), \quad (2.55)$$

pode ser utilizada para determinar as dimensões canônicas para o campo e para a massa que são dadas em termos da unidade de momento Λ como

$$[\phi_a(k)] = \Lambda^{-(1+d/2)} \quad \text{e} \quad [\mu] = \Lambda \quad (2.56)$$

Da última igualdade a dimensão canônica também é chamada de dimensão de massa. Como cada termo da ação deve ser adimensional, o termo de interação presente em (2.21) define a dimensão canônica para a constante de acoplamento, isto é,

$$[\lambda] = \Lambda^{4-d}. \quad (2.57)$$

A dimensão crítica da teoria é definida como aquela que torna a constante de acoplamento adimensional. Wilson descobriu que podemos desenvolver a teoria perturbativa através da expansão no parâmetro pequeno $\epsilon \equiv d_c - d = 4 - d > 0$.

Da discussão desenvolvida na primeira seção $\Gamma_{ab}^{(2)}$, $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ e $\Gamma^{(0,2)}$ são as partes de vértices que apresentam as divergências primitivas para a teoria $\lambda\Phi^4$. Estas funções dependem da massa μ^2 , da constante de acoplamento λ e do *cutoff* Λ (onde o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ deve ser tomado no limite superior das integrais de Feynman) das integrais das partes de vértices 1PI que divergem com Λ^D , onde D é o grau de divergência ultravioleta em (2.29). Removeremos essas divergências ultravioletas redefinindo a massa e a constante de acoplamento renormalizadas e encontrando os fatores multiplicativos de renormalização Z_ϕ e Z_{ϕ^2} pela fixação das condições de normalização nas partes de vértices 1PI.

Renormalizamos as partes de vértices que podem ser renormalizados multiplicativamente usando a seguinte expressão [29]:

$$\Gamma_{R a_1 \dots a_E}^{(E,L)}(k_1, \dots, k_E, p_1, \dots, p_L; m^2, g) = Z_\phi^{E/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(E,L)}(k_i, p_i, \mu^2, \lambda, \Lambda), \quad (2.58)$$

em que, para $d \leq 4$, $\Gamma_R^{(E,L)}$ são finitos com $\Lambda \rightarrow \infty$ para todo⁵ E e L , em todas as ordens da perturbação em g . Note que, m^2 e g são a massa e a constante de acoplamento renormalizadas.

As condições de normalização de uma teoria crítica (sem massa) são definidas pelo conjunto de equações dadas por

⁵Todo $\Gamma^{(E,L)}$ exceto $\Gamma^{(0,1)}$ e $\Gamma^{(0,2)}$. Conforme veremos, esta última exigirá uma renormalização aditiva.

$$\Gamma_{R\ ab}^{(2)}(k; g) \Big|_{k^2=0} = 0; \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_{R\ ab}^{(2)}(k; g) \Big|_{k^2=\kappa^2} = \delta_{ab}; \quad (2.60)$$

$$\Gamma_{R\ abcd}^{(4)}(k_i; g) \Big|_{SP} = g S_{abcd}; \quad (2.61)$$

$$\Gamma_{R\ ab}^{(2,1)}(k_1, k_2, p; g) \Big|_{\overline{SP}} = \delta_{ab}; \quad (2.62)$$

$$\Gamma_R^{(0,2)}(p; g) \Big|_{p^2=\kappa^2} = 0 \quad (2.63)$$

onde κ é a escala dos momentos em que fixamos a normalização. As condições (2.59), (2.60), (2.61) e (2.62) definem o parâmetro de massa, Z_ϕ , a constante de acoplamento e Z_{ϕ^2} , respectivamente. A condição (2.63) será satisfeita através de uma renormalização aditiva e será importante no cálculo das amplitudes do calor específico. Os pontos de simetria SP e \overline{SP} (pontos de renormalização, em inglês “symmetry point”) tornam idênticas as integrais dos diagramas que diferem entre si apenas por uma permutação dos momentos externos. A vantagem do ponto de simetria em momentos externos diferentes de zero em uma teoria sem massa é que nos livramos das divergências infravermelhas que necessariamente apareceriam se os momentos externos anulassem.

Definimos o SP e o \overline{SP} através de

$$SP : k_i \cdot k_j = \frac{\kappa^2}{4}(4\delta_{ij} - 1), \quad (2.64)$$

e

$$\overline{SP} : k_i^2 = \frac{3}{4}\kappa^2 \text{ e } k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}\kappa^2 \quad \therefore \quad p^2 = (k_1 + k_2)^2 = \kappa^2. \quad (2.65)$$

Com a interação do tipo (2.11), podemos escrever as partes de vértice 1PI simétricas *bare* como

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(k) = \Gamma^{(2)}(k) \delta_{ab}, \quad \Gamma_{abcd}^{(4)} \Big|_{SP} = \Gamma^{(4)} \Big|_{SP} S_{abcd} \quad \text{e} \quad \Gamma_{ab}^{(2,1)} \Big|_{\overline{SP}} = \Gamma^{(2,1)} \Big|_{\overline{SP}} \delta_{ab}; \quad (2.66)$$

e as renormalizadas através de

$$\Gamma_{R\ ab}^{(2)}(k) = \Gamma_R^{(2)}(k) \delta_{ab} , \quad \Gamma_{R\ abcd}^{(4)} \Big|_{SP} = \Gamma_R^{(4)} \Big|_{SP} S_{abcd} \quad \text{e} \quad \Gamma_{R\ ab}^{(2,1)} \Big|_{\overline{SP}} = \Gamma_R^{(2,1)} \Big|_{\overline{SP}} \delta_{ab} . \quad (2.67)$$

A partir dos resultados (2.66) e (2.67) em (2.58), reescrevemos as partes de vértice 1“PI” renormalizadas através de

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0; g) = Z_\phi \Gamma_R^{(2)}(k = 0; \mu_c^2, \lambda) = 0 ; \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; g) \Big|_{k^2=\kappa^2} = Z_\phi \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k; \mu_c^2, \lambda) \Big|_{k^2=\kappa^2} = 1 ; \quad (2.69)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i; g) \Big|_{SP} = Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(k_i; \mu_c^2, \lambda) \Big|_{SP} = g ; \quad (2.70)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_{1,2}, p; g) \Big|_{\overline{SP}} = Z_\phi Z_\phi^{1/2} \Gamma(k_{1,2}, p; \mu_c^2, \lambda) \Big|_{\overline{SP}} = 1 ; \quad (2.71)$$

A expansão diagramática das partes de vértices que manifestam as divergências primitivas da teoria Φ^4 podem ser representadas da seguinte forma

$$\Gamma^{(2,0)}(k) = \left(\text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \right)^{-1} + \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} + O(2\text{-loops}) \quad (2.72)$$

$$= k^2 + \mu^2 + \lambda \frac{N+2}{6} D_1(\mu^2, \Lambda) + O(2\text{-loops}) ;$$

$$\Gamma^{(4,0)} \Big|_{SP} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{SP} + O(2\text{-loops}) \quad (2.73)$$

$$= \lambda - \lambda^2 \frac{N+8}{6} I_{SP}(\mu^2, \Lambda) + O(2\text{-loops}) ;$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2,1)} \Big|_{\overline{SP}} &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{\overline{SP}} + O(2\text{-loops}) \\
&= 1 + \lambda \frac{N+2}{3} I_{\overline{SP}}(\mu^2, \lambda) + O(2\text{-loops});
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(0,2)}(p) \Big|_{p^2=\kappa^2} &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{p^2=\kappa^2} + O(2\text{-loops}) \\
&= -\frac{N}{2} I_{SP}(\mu^2, \Lambda) + O(2\text{-loops}).
\end{aligned} \tag{2.75}$$

onde escrevemos

$$D_1(\mu^2, \Lambda) = \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \tag{2.76}$$

$$I_{SP}(\mu^2, \Lambda) = I_{\overline{SP}}(\mu^2, \Lambda) = \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \mu^2) [(k+K)^2 + \mu^2]} \Big|_{K^2=\kappa^2}. \tag{2.77}$$

Substituindo o resultado (2.72) na condição (2.68), obtemos perturbativamente

$$\mu_c^2 \equiv \mu^2(m^2 = 0) = -g \frac{N+2}{6} \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} + O(2\text{-loops}) \tag{2.78}$$

onde usamos $\lambda = g + O(1\text{-loop})$.

A partir de (2.78) e (2.72) na condição (2.69), temos

$$1 = Z_\phi \frac{\partial}{\partial k^2} \left[k^2 + O(2\text{-loops}) \right]_{k^2=\kappa^2} \implies Z_\phi = 1 + O(2\text{-loops}) \tag{2.79}$$

Dos resultados de (2.78), (2.79) e (2.73) na condição (2.70) obtemos

$$g = \lambda - \lambda^2 \frac{N+8}{6} I_{SP}(\mu_c^2, \Lambda) + O(2\text{-loops}) \implies \lambda = g + g^2 \frac{N+8}{6} I_{SP} + O(2\text{-loops}) \tag{2.80}$$

onde usamos (2.78) e escrevemos

$$I_{SP} \equiv I_{SP}(0, \Lambda) = \int^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k+K)^2} \Big|_{K^2=\kappa^2} \quad (2.81)$$

E dos últimos resultados (2.78)-(2.81) e (2.74) na condição (2.71), escrevemos

$$1 = Z_{\phi} Z_{\phi^2} \left[1 - \lambda \frac{N+2}{6} I_{SP} + O(2 - \text{loops}) \right] \implies Z_{\phi^2} = 1 + g \frac{N+2}{6} I_{SP} + O(2 - \text{loops}) \quad (2.82)$$

As equações (2.78) até (2.82) reúnem as renormalizações da massa e da constante de acoplamento e determinam as constantes multiplicativas de renormalização em 1-*loop*. Mas, a função $\Gamma^{(0,2)}$ exige adicionalmente uma renormalização aditiva pois, desde a ordem zero da expansão perturbativa na constante de acoplamento, ela possui uma divergência logarítmica desenvolvida no termo de 1-*loop*. Definimos a renormalização por

$$\Gamma_R^{(0,2)}(p; g, \kappa) = Z_{\phi^2}^2 \left[\Gamma^{(0,2)}(p; \mu_c^2, \lambda, \Lambda) - \bar{\Gamma}^{(0,2)} \right] \quad (2.83)$$

onde, $\bar{\Gamma}^{(0,2)}$ é determinada pela condição de normalização (2.63) e obtemos

$$\bar{\Gamma}^{(0,2)} = \Gamma^{(0,2)}(p; 0, \lambda, \Lambda) \Big|_{p^2=\kappa^2} = -\frac{N}{2} I_{SP} + O(2 - \text{loops}). \quad (2.84)$$

Próximo ao ponto crítico, deveremos desenvolver a renormalização para as partes de vértices 1PI fora da temperatura crítica. Podemos expandir as partes de vértice 1PI de uma teoria com massa em termos das partes de vértices 1PI de uma teoria sem massa utilizando a expressão

$$\Gamma_{a_1 \dots a_E}^{(E,L)}(k_i, p_i; \mu^2, \lambda, \Lambda) = \sum_{I,J=0}^{\infty} \frac{1}{I!J!} \int^{\Lambda} \frac{d^d l_1}{(2\pi)^d} (\dots) \int^{\Lambda} \frac{d^d l_I}{(2\pi)^d} \int^{\Lambda} \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} (\dots) \int^{\Lambda} \frac{d^d q_J}{(2\pi)^d} \phi_{a_{E+1}}(l_1) \dots \phi_{a_{E+I}}(l_I) t(q_1) \dots t(q_J) \Gamma_{a_1 \dots a_E a_{E+1} \dots a_{E+I}}^{(E+I,L+J)}(k_i, l_i, p_i, q_i; \mu_c^2, \lambda, \Lambda), \quad (2.85)$$

onde $t(q_i)$ é a fonte do operador composto $\phi^2(-q_i)$. Renormalizando o lado direito de (2.85) com as condições de normalização das partes de vértices 1PI da teoria sem massa, aplicamos as mesmas condições na parte de vértice 1PI da teoria massiva e no limite uniforme dos campos e da fonte, isto é,

$$\phi_a(l_i) = \Phi_a (2\pi)^d \delta^d(l_i) \quad \text{e}, \quad (2.86)$$

$$t(q_i) = t(2\pi)^d \delta^d(q_i). \quad (2.87)$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{R a_1 \dots a_E}^{(E,L)}(k_i, p_i; m^2, g, \kappa) &\equiv Z_\phi^{E/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma_{a_E \dots a_E}^{(E,L)}(k_i, p_i; \mu^2, \lambda, \Lambda) \\ &= \sum_{I,J=0}^{\infty} \frac{1}{I!J!} M_{a_{E+1}} \cdots M_{a_{E+I}} (t_R)^J \Gamma_{R a_1 \dots a_{E+I}}^{(E+I,L+J)}(k_i, l_i = 0, p_i, q_i = 0; g, \kappa), \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde, definimos o campo e a fonte do operador composto renormalizados, respectivamente, através das fórmulas

$$M_a = Z_\phi^{-1/2} \Phi_a \quad \text{e}, \quad (2.89)$$

$$t_R = Z_{\phi^2}^{-1} t. \quad (2.90)$$

Usando as constantes multiplicativas Z_ϕ e Z_{ϕ^2} obtidas de (2.79) e (2.82) em (2.89) e (2.90), temos que

$$\Phi_a = M_a + O(2 - \text{loops}) \quad \text{e}, \quad (2.91)$$

$$t = t_R + g \frac{N+2}{6} t_R I_{SP} + O(2 - \text{loops}) \quad . \quad (2.92)$$

Introduzimos uma massa *bare* (não-renormalizada) para a descrição em torno do ponto crítico, através de

$$\mu^2 = \mu_c^2 + (\mu^2 - \mu_c^2) \equiv \mu_c^2 + \delta\mu^2 \quad \text{onde,} \quad \delta\mu^2 \equiv t \rightarrow 0 \quad (2.93)$$

Substituindo as expressões de (2.78) e (2.92) em (2.93), obtemos:

$$\mu^2 = t + \mu_c^2 = t_R + g \frac{N+2}{6} \left(t_R I_{SP} - \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \right) + O(2 - \text{loops}). \quad (2.94)$$

Usando as renormalizações da constante de acoplamento (2.80), do campo (2.91) e da massa (2.94) no potencial efetivo $U_{\text{eff}}(\Phi)$ em 1-*loop* encontrado na seção anterior, escrevemos

$$\Gamma_R(M, t_R) = U_{\text{eff}}(\Phi(M), \lambda(g), \mu^2(t_R, g)) \quad (2.95)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma_R(M, t_R) = & \frac{1}{2} t_R M^2 + \frac{1}{4!} g M^4 + \frac{1}{2} \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{gM^2}{2}}{k^2} \right] + (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{gM^2}{6}}{k^2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^2} \frac{N+2}{6} g M^2 \right\} + \frac{1}{4} I_{SP} \left[\frac{2(N+2)}{3} g M^2 t_R + \frac{N+8}{36} (g M^2)^2 \right] + O(2 - \text{loops}). \end{aligned} \quad (2.96)$$

É o potencial efetivo renormalizado em 1-loop da teoria $\lambda\Phi^4$. Para contemplar a renormalização aditiva da parte de vértice $\Gamma^{(0,2)}$ de (2.84), podemos realizar:

$$\Gamma_R(M, t_R) \longrightarrow \Gamma_R^{(\text{nov})}(M, t_R) = \Gamma_R(M, t_R) - \frac{t_R^2}{2!} \bar{\Gamma}_R^{(0,2)} = \Gamma_R(M, t_R) + t_R^2 \frac{N}{4} I_{SP}. \quad (2.97)$$

Em razão das dimensões canônicas das diferentes quantidades envolvidas na descrição da teoria $\lambda\Phi^4$, podemos adimensionalizá-las por uma escala na variável de dimensão canônica unitária κ , através das transformações:

$$k_i \rightarrow \kappa k_i, \quad (2.98)$$

$$\lambda \rightarrow \kappa^\epsilon u_0, \quad (2.99)$$

$$g \rightarrow \kappa^\epsilon u, \quad (2.100)$$

$$t_R \rightarrow \kappa^2 t, \quad (2.101)$$

$$M \rightarrow \kappa^{1-\epsilon/2} M, \quad (2.102)$$

$$\Gamma_R(M, t_R) \rightarrow \kappa^{4-\epsilon} \Gamma_R(M, t), \quad (2.103)$$

em que, $\epsilon = 4 - d$.

Por conveniência, podemos reescrever o potencial efetivo renormalizado nas variáveis renormalizadas t e

$$y = u M^2. \quad (2.104)$$

Explicitando $\Gamma_R(y, t)$ através dos resultados (2.96) à (2.104) achamos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Gamma_R(y, t) &= \frac{1}{2u} \left(ty + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{k^2} \right] + (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{k^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k^2} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \right\} + \frac{1}{4} I_{SP} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2}{3} y \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] + O(2 - \text{loops}). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Por conveniência adicionamos na integral acima, o termo linear em $t - \frac{N}{2} t \frac{1}{k^2}$, que é irrelevante no potencial $\Gamma_R(y = uM^2, t)$ definido por um polinômio do segundo grau (ou, superior) na variável t para a descrição das transições de segunda ordem. Esta expressão confere com a encontrada na referência [38] e da qual obteremos os nossos resultados para a razão das amplitudes críticas em ordem ϵ .

Podemos reunir as partes de vértices 1-PI renormalizadas da teoria sem-massa (ou seja, no ponto crítico) através de

$$\Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_i; u, \kappa) = Z_\phi^{E/2} Z_{\phi^2}^L \left[\Gamma^{(E,L)}(k_i, p_i; \lambda, \Lambda) - \delta_{0,E} \delta_{2,L} \bar{\Gamma}^{(0,2)}(p_i; \lambda, \Lambda) \Big|_{p^2=\kappa^2} \right]. \quad (2.106)$$

em que já contemplamos a renormalização aditiva da função $\Gamma^{(0,2)}$.

As funções renormalizadas $\Gamma_R^{(E,L)}$ são dependentes do parâmetro arbitrário κ . Mas funções *bare* $\Gamma^{(E,L)}$ não dependem explicitamente de κ e portanto são invariantes sobre a transformação

$$\kappa \rightarrow e^s \kappa \quad \text{onde, } s \in (-\infty, \infty). \quad (2.107)$$

Estas transformações formam o *grupo de renormalização* (GR). Introduzindo o operador diferencial⁶ adimensional $\kappa(d/d\kappa)_{\lambda, \Lambda}$, nós temos

$$\left(\kappa \frac{d}{d\kappa} \right)_{\lambda, \Lambda} \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_i; \lambda, \Lambda) = 0. \quad (2.108)$$

Substituindo (2.106) em (2.108), obtemos a equação do grupo de renormalização por

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\phi(u) + L \gamma_{\phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(E,L)}(p_i, q_i; u, \kappa) = \delta_{0,E} \delta_{2,L} \kappa^{-\epsilon} B(u), \quad (2.109)$$

⁶Este operador é invariante pela transformação (2.107)

em que,

$$\kappa^{-\epsilon} B(u) = -Z_{\phi^2}^2 \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \Gamma^{(0,2)}(p; \lambda, \Lambda) \Big|_{p^2=\kappa^2}, \quad (2.110)$$

é o termo inhomogêneo para equação do GR de $\Gamma_R^{(0,2)}$.

E também, escrevemos as funções de Wilson na forma:

$$\beta(u) = \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \right)_\lambda = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}; \quad (2.111)$$

$$\gamma_\phi(u) = \kappa \left(\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa} \right)_\lambda = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u} \equiv \eta(u); \quad (2.112)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = -\kappa \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial \kappa} \right)_\lambda = -\beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial u} \equiv 2 - \frac{1}{\nu(u)}. \quad (2.113)$$

A evolução da solução de (2.111) leva a constante de acoplamento $u(\kappa)$ no ponto fixo u^* estável na região do infravermelho da escala dos momentos. De outra maneira,

$$\beta(u) \xrightarrow{u \rightarrow u^*} \beta(u^*) = 0. \quad (2.114)$$

No ponto fixo obtemos os expoentes universais η e ν através de (2.112) e (2.113), respectivamente. E obtemos os demais expoentes da descrição dos fenômenos críticos através de outras relações, as quais chamamos de *leis de escala* obtidas por propriedades de escala nos potenciais termodinâmicos [29].

Para a descrição do calor específico em torno da temperatura crítica, deveremos obter a equação do GR para a parte de vértice $\Gamma_R^{(0,2)}$ fora do ponto crítico. Fazendo $E = 0$ e $L = 2$ em (2.88) e usando (2.109), podemos verificar o seguinte resultado:

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} \gamma_\phi(u) M_b \frac{\partial}{\partial M_b} + \gamma_{\phi^2}(u) \left(2 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \Gamma_R^{(0,2)}(p; M_b, t, u, \kappa) = \kappa^{-\epsilon} B(u), \quad (2.115)$$

que é a equação do GR da parte de vértice $\Gamma_R^{(0,2)}$ fora do ponto crítico (acima ou abaixo da temperatura crítica T_c).

Por uma transformação de escala em $\Gamma_R^{(0,2)}$, a escrevemos como uma função homogênea de grau $d - 4$ (que corresponde à sua dimensão canônica), através de

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(0,2)}(\rho p; t, M, u, \kappa) &= \rho^{d-4} \Gamma_R^{(0,2)}(p; t/\rho^2, M/\rho^{\frac{d-2}{2}}, \kappa/\rho, u) \\ &= \kappa^{d-4} \Gamma_R^{(0,2)}\left(\frac{\rho p}{\kappa}; \frac{t}{\kappa^2}, \frac{M}{\kappa^{\frac{d-2}{2}}}, u\right).\end{aligned}\quad (2.116)$$

Então verificamos que (2.116) satisfaz a seguinte EDP

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{d-2}{2} \right) M_b \frac{\partial}{\partial M_b} - (d-4) \right] \Gamma_R^{(0,2)}(\rho p; M_b, t, u, \kappa) = 0. \quad (2.117)$$

A equação (2.117) decorre da propriedade de escala que é verificada nas partes de vértice 1-PI. Subtraindo (2.117) da (2.115) obtemos

$$\begin{aligned}\left[-\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}(\eta(u) + d - 2) M_b \frac{\partial}{\partial M_b} - \frac{1}{\nu(u)} t \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ \left. + \left(2 - \frac{2}{\nu(u)} \right) \right] \Gamma_R^{(0,2)}(p; \rho, t, M_b, u, \kappa) = \kappa^{-\epsilon} B(u).\end{aligned}\quad (2.118)$$

Pelo método das funções características, obtemos abaixo a solução de (2.118) por meio de

$$\kappa^\epsilon \Gamma_R^{(0,2)}(p \rightarrow 0; \rho, t, M_b, u, \kappa) = f(\rho) \Gamma_R^{(0,2)}(t(\rho), M_b(\rho), u(\rho), \kappa) - \frac{\nu(u(\rho))}{2-d\nu(u(\rho))} B(u(\rho)). \quad (2.119)$$

Verificamos as seguintes relações,

$$f(\rho) = \rho^{d-2\nu^{-1}} X^2(u, \rho), \quad f(1) = 1. \quad (2.120)$$

$$M_b(\rho) = M_b \rho^{-\frac{d-2+\eta}{2}} Y(u, \rho), \quad M_b(1) = M_b. \quad (2.121)$$

$$t(\rho) = t \rho^{\nu^{-1}} X(u, \rho), \quad t(1) = t, \quad (2.122)$$

$$\rho \frac{\partial u(\rho)}{\partial \rho} = \beta(u(\rho)). \quad (2.123)$$

em que, as funções X e Y são dadas por

$$X(u, \rho) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_1^\rho \frac{dx}{x} [\eta(u(x)) - \eta] \right\}, \quad (2.124)$$

$$Y(u, \rho) = \exp \left\{ - \int_1^\rho \frac{dx}{x} \left[\nu^{-1}(u(x)) - \nu^{-1} \right] \right\}. \quad (2.125)$$

Note que quando u se aproxima do ponto fixo u^* , escrevemos as funções $\eta(u) \rightarrow \eta$ e $\nu(u) \rightarrow \nu$, que levam em dois expoentes críticos universais e independentes. No limite que $\rho \rightarrow 0$, e portanto $u \rightarrow u^*$, as funções X e Y são dependentes dos valores iniciais de u , e conseqüentemente as duas amplitudes (acima e abaixo de T_c) não são universais.

Para estudar o efeito de X e Y , escolhemos escrever o valor arbitrário de ρ em função de t a partir de (2.122) pela condição

$$t(\rho) = 1 \implies \rho = (Xt)^\nu. \quad (2.126)$$

Caminhando para o ponto crítico quando $\rho \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 0$, reescrevemos (2.119) junto às equações (2.120) à (2.126) por

$$\Gamma_R^{(0,2)}(p=0; t, M_b, u, \kappa) = t^{-(2-d\nu)} X^{d\nu} \Gamma_R^{(0,2)}(p=0; 1, YM(Xt)^\beta, u(\rho)) - \frac{\nu}{2-d\nu} B(u(\rho)) \quad (2.127)$$

Sem perda de generalidade, tomamos a liberdade de fixar $\kappa = 1$. A dependência de κ é facilmente reconstruída por análise dimensional.

Suficientemente próximo do ponto crítico podemos escrever o calor específico através de

$$\begin{aligned} C(t) &= -\Gamma_R^{(0,2)}(p=0; t, M, u^*) - \frac{\nu}{2-d\nu} B(u^*) \\ &= -t^{-(2-d\nu)} [X(u, 0)]^{d\nu} \Gamma_R^{(0,2)}(p=0; 1, YM(Xt)^{-\beta}, u^*) \\ &= t^{-\alpha} A_\pm \end{aligned} \quad (2.128)$$

Note que (2.128) naturalmente define a lei de escala para o expoente crítico do calor específico $\alpha = 2 - d\nu$. Acima da temperatura crítica, ou seja, na fase simétrica no limite $M_b \rightarrow 0$ escrevemos a amplitude A_+ na forma

$$A_+ = -[X(u, 0)]^{d\nu} \Gamma_R^{(0,2)}(0; 1, 0, u^*). \quad (2.129)$$

A amplitude abaixo da temperatura crítica, ou seja, na fase de simetria quebrada, a magnetização possui um valor não-nulo na curva de existência ($M \rightarrow z$) pode ser escrita como

$$A_- = -[X(u, 0)]^{d\nu} \Gamma_R^{(0,2)}(0; 1, z, u^*). \quad (2.130)$$

Como dissemos anteriormente, de fato as amplitudes não são universais. Mas a razão

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{\Gamma_R^{(0,2)}(; 1, 0, u^*)}{\Gamma_R^{(0,2)}(; 1, z, u^*)}, \quad (2.131)$$

é universal.

2.4 RENORMALIZAÇÃO PARA SISTEMAS COMPETITIVOS

Nesta seção abordaremos a renormalização em sistemas competitivos que apresentam o comportamento crítico do tipo Lifshitz. Na seção anterior, expusemos com um pouco de detalhes a renormalização do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\phi^4$, que descreve os sistemas livres de competição. A renormalização em sistemas competitivos é realizada de uma maneira similar à descrita na última seção, e aqui destacaremos os principais resultados do GR aplicados no cenário com interações competitivas.

2.4.1 Ponto de Lifshitz m -axial

O diagrama de fases dos modelos com interações competitivas entre primeiros e segundos sítios vizinhos de spins apresenta o ponto de intersecção das fases denominado de ponto de Lifshitz. A representação deste modelo em variáveis contínuas é expressa através de uma modificação da teoria $\lambda\phi^4$ quando incluímos termos de derivadas de ordem superior ao longo de m direções competitivas. A densidade de energia livre de Ginzburg-Landau para um sistema com competições anisotrópicas ($d \neq m$) com um campo de parâmetro de ordem N -vetorial ϕ é escrita como

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} |\nabla_{(d-m)}\phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(m)}^2\phi|^2 + \frac{\delta_0}{2} |\nabla_{(m)}\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^2)^2. \quad (2.132)$$

Em que, usamos acima a seguinte notação:

$$\nabla_{(D)}^n \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \cdots + \frac{\partial^n}{\partial x_D^n}, \quad \text{onde, } D = d - m, m \quad (2.133)$$

$$|\nabla_{(D)}^n\phi|^2 \equiv \nabla_{(D)}^n\phi^a \nabla_{(D)}^n\phi^a \quad (2.134)$$

A região crítica do PL é definida em torno da temperatura crítica T_L e a um determi-

nado valor da razão J_2/J_1 , o qual anula δ_0 . Portanto, expressamos a ação funcional para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial por meio de

$$S[\phi] = \int d^{d-m}x_{\perp} d^m x_{\parallel} \mathcal{L}(\phi) = \int d^{d-m}p d^m k \frac{1}{2} \phi(-p, -k) \cdot [p^2 + (k^2)^2 + \mu^2] \phi(p, k) + \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi). \quad (2.135)$$

em que $\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ representa o setor de interação da ação.

Consideramos x_{\perp} definida no espaço \mathbb{R}^{d-m} ausente de competições e x_{\parallel} definido no subespaço competitivo \mathbb{R}^m . São definidas as dimensões das coordenadas por meio de $[x_{\parallel}] = [x_{\perp}]^{1/2} = \Lambda^{-1/2}$. Neste caso, o elemento de integração desenvolve a dimensão $[d^{d-m}x_{\parallel} d^m x_{\perp}] = \Lambda^{-(d-m/2)}$. Como a ação é mantida adimensional no sistema natural de medidas, a dimensão canônica da variável de campo é $[\phi] = \Lambda^{\frac{1}{2}(d-\frac{m}{2})-1}$. E por conseguinte, a dimensão canônica da constante de acoplamento é então definida através de

$$[\lambda] = \Lambda^{4+\frac{m}{2}-d} \equiv \Lambda^{d_c-d} \quad (2.136)$$

A dimensão que torna a constante de acoplamento adimensional é chamada de dimensão crítica d_c da teoria. Daí introduzimos o parâmetro de regularização dimensional como

$$\epsilon_L = d_c - d = 4 + \frac{m}{2} - d \quad (2.137)$$

O propagador livre da teoria no espaço dos momentos é então expresso por meio de

$$G_{0ab} = \delta_{ab} \frac{1}{p^2 + (k^2)^2 + \mu^2} \quad (2.138)$$

Em que k é o momento definido ao longo das m direções competitivas ($[k] = \Lambda^{1/2}$) e p é o momento ao longo das $d - m$ direções não competitivas ($[p] = \Lambda$).

Para sistemas competitivos, o tratamento do GR é semelhante àquele usado para sistemas sem competição. As integrais de Feynman para o caso das competições anisotrópicas envolvem duas escalas para os momentos externos. A definição de dois conjuntos de condições de normalização [22] são aplicados separadamente nos subespaços não-competitivo \mathbb{R}^{d-m} e competitivo \mathbb{R}^m semelhantemente ao desenvolvido em (2.63, 2.68 - 2.71) através de

$$\Gamma_R^{(2)}(p = 0; g_1) = 0; \quad (2.139)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p; g_1) \right|_{p^2 = \kappa_1^2} = 1; \quad (2.140)$$

$$\left. \Gamma_R^{(4)}(p_i; g_1) \right|_{SP} = g_1; \quad (2.141)$$

$$\left. \Gamma_R^{(2,1)}(p_1, p_2, p; g_1) \right|_{\overline{SP}} = 1; \quad (2.142)$$

$$\left. \Gamma_R^{(0,2)}(p, g_1) \right|_{p^2 = \kappa_1^2} = 0 \quad (2.143)$$

Em que as condições de normalização acima estão definidos no subespaço não-competitivo com os momentos externos fixados nos pontos de simetria SP : $p_i \cdot p_j = (\kappa_1^2/4)(4\delta_{ij} - 1)$ e \overline{SP} : $p^2 = (p_1 + p_2)^2 = \kappa_1^2$. A escala κ_1 dos momentos no subespaço \mathbb{R}^{d-m} é fixada em $\kappa_1^2 = 1$.

Definimos o conjunto complementar das condições de normalização para o subespaço competitivo por meio de

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0; g_2) = 0; \quad (2.144)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (k^2)^2} \Gamma_R^{(2)}(k; g_2) \right|_{(k^2)^2 = \kappa_1^4} = 1; \quad (2.145)$$

$$\left. \Gamma_R^{(4)}(k_i; g_2) \right|_{SP} = g_2; \quad (2.146)$$

$$\left. \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, k; g_2) \right|_{\overline{SP}} = 1; \quad (2.147)$$

$$\left. \Gamma_R^{(0,2)}(k, g_2) \right|_{(k^2)^2 = \kappa_2^4} = 0 \quad (2.148)$$

As condições de normalização expressas acima estão definidas no subespaço competitivo com os momentos externos fixados nos pontos de simetria SP : $k_i \cdot k_j = (\kappa_2^2/4)(4\delta_{ij} - 1)$ e \overline{SP} : $k^2 = (k_1 + k_2)^2 = \kappa_2^2$. E portanto, a escala κ_2 dos momentos externos no subespaço \mathbb{R}^m é fixada em $\kappa_2 = 1$.

Assim então, o sistema apresenta dois comprimentos de correlação independentes $\xi_{L2} \sim |t|^{\nu_{L2}}$ e $\xi_{L4} \sim |t|^{\nu_{L4}}$ em cada subespaço (não-competitivo e competitivo, respectivamente) [22]. Similarmente ao que obtemos em (2.115), escrevemos a equação do GR para a parte de vértice $\Gamma_{R(\tau)}^{(0,2)}$ como

$$\left[\kappa_\tau \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} + \beta_\tau(u_\tau) \frac{\partial}{\partial u_\tau} - \frac{1}{2} \gamma_{\phi(\tau)}(u_\tau) M_b \frac{\partial}{\partial M_b} + \gamma_{\phi^2(\tau)}(u_\tau) \left(2 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \Gamma_{R(\tau)}^{(0,2)} = \kappa_\tau^{-\tau \epsilon_L} B_\tau(u_\tau), \quad (2.149)$$

que é definida acima ou abaixo da temperatura crítica T_c .

$$\kappa_\tau^{-\tau \epsilon_L} B_\tau(u_\tau) = -Z_{\phi^2(\tau)}^2 \kappa_\tau \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} \Gamma^{(0,2)}(p; \lambda_\tau, \Lambda_\tau) \Big|_{p^2 = \kappa_\tau^2 \tau}. \quad (2.150)$$

O rótulo $\tau = 1$ ou 2 nas variáveis diz respeito aos subespaços \mathbb{R}^{d-m} ou \mathbb{R}^m , respectivamente, em que é tratado as quantidades.

Denotamos as funções de Wilson especificadas no subespaço τ através de

$$\beta_\tau(u) = \left(\kappa_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \kappa_\tau} \right)_{\lambda_\tau} = -\tau \epsilon_L \left(\frac{\partial \ln u_{0\tau}}{\partial u_\tau} \right)_{\lambda_\tau}^{-1}; \quad (2.151)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)}(u_\tau) = \kappa_\tau \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial \kappa_\tau} \right)_{\lambda_\tau} = \beta_\tau(u_\tau) \frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial u_\tau} \equiv \eta_\tau(u_\tau); \quad (2.152)$$

$$\gamma_{\phi^2(\tau)}(u_\tau) = -\kappa_\tau \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi^2(\tau)}}{\partial \kappa_\tau} \right)_{\lambda_\tau} = -\beta_\tau(u_\tau) \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(\tau)}}{\partial u_\tau} \equiv 2 - \frac{1}{\nu_\tau(u_\tau)}. \quad (2.153)$$

A partir das funções de Wilson é possível obter os expoentes críticos no ponto fixo ν_τ e η_τ . Das propriedades de escala nas partes de vértices, verificamos o conjunto das leis de escala, e a partir das mesmas, o restante dos expoentes críticos.

Seguindo os mesmos passos da seção anterior e equivalentemente à expressão (2.128), podemos mostrar o calor específico como

$$C(t) = -\Gamma_{R(\tau)}^{(0,2)}(0; t, M, u_\tau^*) - \frac{\nu_\tau}{\alpha_\tau} B_\tau(u_\tau^*), \quad \forall \tau \quad (2.154)$$

em que o expoente crítico do calor específico é expresso por meio da lei de escala $\alpha_\tau = 2 - \tau \nu_\tau \left(d - \frac{m}{2} \right)$.

Ao passo que o comportamento crítico isotrópico acontece quando a competição entre primeiros e segundos vizinhos ocorre em todas as direções do espaço, ou seja, $d = m$. A densidade de energia livre de Ginzburg-Landau para este caso com um parâmetro de

ordem N -vetorial ϕ é expressa por meio de

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}|\nabla_{(m)}^2\phi|^2 + \frac{\delta_0}{2}|\nabla_{(m)}\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2 \quad (2.155)$$

O ponto de Lifshitz é definido para uma temperatura crítica T_L e quando $\delta_0 = 0$ na equação (2.155). A ação é, então, definida como

$$S[\phi] = \int d^m x_{\parallel} \mathcal{L}(\phi) = \int d^m k \frac{1}{2} \phi(-k) \cdot [(k^2)^2 + \mu^2] \phi(k) + \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi). \quad (2.156)$$

em que $\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ é setor de interação do tipo $\lambda\phi^4$.

Definimos a dimensão canônica das coordenadas através de $[x_{\parallel}] = \Lambda^{-1/2}$, e o elemento de volume como $[d^m x_{\parallel}] = \Lambda^{-d/2}$. Desde que a ação acima seja adimensional, calculamos a dimensão canônica por $[\phi] = \Lambda^{d/4-1}$ e por conseguinte a dimensão canônica da constante de acoplamento é definida por meio de

$$[\lambda] = \Lambda^{4-d/2} = \Lambda^{\frac{1}{2}(d_c-d)} \quad (2.157)$$

E assim definimos a dimensão crítica como $d_c = 8$, a qual torna a λ adimensional. Logo, introduzimos o parâmetro da regularização dimensional como

$$\epsilon_L = d_c - d = 8 - d \quad (2.158)$$

E escrevemos o propagador livre para o caso isotrópico através de

$$G_{0ab} = \delta_{ab} \frac{1}{(k^2)^2 + \mu^2} \quad (2.159)$$

No caso isotrópico, apenas um conjunto de condições de normalização é definido para todo o espaço [22]. E portanto, o sistema exibe um único comprimento de correlação comum a todas as direções. As condições de normalização para o caso isotrópico são as mesmas definidas no subespaço competitivo do caso anisotrópico descrito anteriormente em (2.144-2.148), onde reescrevemos as quantidades rotuladas por $g_2 \rightarrow g_3$ e $\kappa_2 \rightarrow \kappa_3$ que distiguem o subespaço competitivo no comportamento anisotrópico ($\tau = 2$) do espaço das competições isotrópicas ($\tau = 3$). Desta maneira, o sistema apresenta um único comprimento de correlação $\xi_{L4} \sim |t|^{\nu_{L4}}$ ao longo de todas as direções do espaço.

A equação do GR para a parte de vértice $\Gamma_{R(3)}^{(0,2)}$ é então expressa como [22]:

$$\left[\kappa_3 \frac{\partial}{\partial \kappa_3} + \beta_3(u_3) \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{1}{2} \gamma_{\phi(3)}(u_3) M_b \frac{\partial}{\partial M_b} + \gamma_{\phi^2(3)}(u_3) \left(2 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \Gamma_{R(3)}^{(0,2)} = \kappa_3^{-\epsilon_L} B_3(u_3), \quad (2.160)$$

em que o segundo membro de 2.160 é expresso como

$$\kappa_3^{-\epsilon_L} B_3(u_3) = -Z_{\phi^2(3)}^2 \kappa_3 \frac{\partial}{\partial \kappa_3} \Gamma^{(0,2)}(p; \lambda_3, \Lambda_3) \Big|_{p^2=\kappa_3^2}. \quad (2.161)$$

As funções de Wilson correspondem às expressões (2.152) e (2.153) rotuladas com $\tau = 3$ e também a equação abaixo

$$\beta_3(u) = \left(\kappa_3 \frac{\partial u_3}{\partial \kappa_3} \right)_{\lambda_3} = -\epsilon_L \left(\frac{\partial \ln u_0(3)}{\partial u_3} \right)_{\lambda_3}^{-1}; \quad (2.162)$$

Da mesma maneira que na descrição do caso anisotrópico, definimos o calor específico pela expressão (2.154) com $\tau = 3$. O expoente do calor específico α_{L4} é então definido pela relação de escala $\alpha_{L4} = 2 - m\nu_{L4}$ [22].

2.4.2 Ponto de Lifshitz de Caráter Genérico

A extensão do cenário das competições é realizada pelo modelo CECI N -vetorial (do inglês “competing exchange coupling Ising”)[25]. Neste modelo com interações competitivas arbitrárias, há vários subespaços ortogonais entre si, que definem diferentes tipos de eixos de competição caracterizados pelo número de vizinhos acoplados via interações competitivas. O diagrama de fases para esse cenário envolve uma variedade de fases moduladas. O ponto de coexistência dessas fases é denominado um ponto de Lifshitz (PL) de caráter generalizado (ou arbitrário).

A representação deste modelo em variáveis contínuas é expressa através de uma modificação da teoria $\lambda\phi^4$ quando incluímos termos de derivadas de ordem superior ao longo de todas as m_2, m_3, \dots, m_L direções competitivas. A densidade de energia livre de Ginzburg-Landau para um sistema de competições anisotrópicas com um campo de parâmetro de ordem N -vetorial ϕ é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi) = & \frac{1}{2} \left| \nabla_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \phi \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \left| \nabla_{(m_n)}^n \phi \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \delta_{0n} \left| \nabla_{(m_n)} \phi \right|^2 \\ & + \sum_{n=3}^{L-1} \sum_{n'=2}^{n-1} \tau_{nn'} \left| \nabla_{(m_n)}^{n'} \phi \right|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^2)^2 \quad (2.163) \end{aligned}$$

A região crítica do PL de caráter arbitrário é definida em torno da temperatura crítica T_L e a um determinado conjunto de valores das razões J_2/J_1 , J_3/J_1 , etc, J_L/J_1 os quais anulam os coeficientes δ_{0n} e $\tau_{nn'}$ [25]. Então expressamos a ação funcional para o comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter generalizado anisotrópico por meio de

$$\begin{aligned} S[\phi] = \int Dx_{\perp} Dx_{\parallel} \mathcal{L}(\phi) = \int Dp Dk \frac{1}{2} \phi(-p, -k) \cdot \left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + \mu^2 \right] \phi(p, k) \\ + \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \quad (2.164) \end{aligned}$$

onde as medidas de integração foram usadas: $Dx_{\perp} Dx_{\parallel} \equiv d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} x_{\perp} \prod_{n=2}^L d^{m_n} x_{(n)}$ e $Dp Dk \equiv d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} p \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}$

Consideramos x_{\parallel} definida no espaço $\mathbb{R}^{d-\sum_{n=2}^L m_n}$ ausente de competições e $x_{(n)}$ definido no subespaço \mathbb{R}^{m_n} com competições até o n -ésimo vizinho (com $n = 2, \dots, L$). Então encontramos as dimensões canônicas das coordenadas por meio de $[x_{\perp}] = \Lambda^{-1}$ e $[x_{(n)}] = \Lambda^{-1/n}$. Neste caso, a medida de integração possui a dimensão $[d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} x_{\perp} \prod_{n=2}^L d^{m_n} x_{(n)}] = \Lambda^{-d+\sum_{n=2}^L (1-\frac{1}{n})m_n}$. No sistema natural de medidas, a ação é adimensional, e portanto a dimensão canônica da variável de campo é $[\phi] = \Lambda^{\frac{d}{2}-\sum_{n=2}^L (1-\frac{1}{n})\frac{m_n}{2}} - 1$. E logo, obtemos a dimensão massiva da constante de acoplamento por meio de

$$[\lambda] = \Lambda^{4+\sum_{n=2}^L (1-\frac{1}{n})-d} \equiv \Lambda^{d_c-d}. \quad (2.165)$$

A dimensão que torna a constante de acoplamento adimensional é chamada de dimensão crítica d_c da teoria. Daí definimos o parâmetro de regularização dimensional como

$$\epsilon_n = d_c - d = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) - d. \quad (2.166)$$

Encontramos o propagador livre da teoria no espaço dos momentos através de

$$G_{0ab} = \delta_{ab} \frac{1}{p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + \mu^2} \quad (2.167)$$

Aqui o momento $k_{(n)}$ ($[k_{(n)}] = \Lambda^{1/n}$) é o momento definido ao longo das m_n direções com interações competitivas até o n -ésimo vizinho (com $n = 2, \dots, L$). O momento p ($[p] = \Lambda$) é definido no subespaço não competitivo ao longo das $d - \sum_{n=2}^L m_n$ direções.

O tratamento do GR para sistemas competitivos de caráter arbitrário, é semelhante àquele usado para sistemas com competição apresentada na subseção anterior. As integrais de Feynman envolvidas possuem L escalas de momentos externos. A definição de L conjuntos de condições de normalização [25] são aplicados separadamente nos subespaços. No subespaço não-competitivo $\mathbb{R}^{d - \sum_{n=2}^L m_n}$ são definidas as mesmas condições de normalização (2.139 - 2.143) já utilizadas no comportamento crítico de Lifshitz m -axial, ao passo que nos subespaços competitivos \mathbb{R}^{m_n} 's (com $2 \leq n \leq L$) as condições de normalização são

$$\Gamma_R^{(2)}(K_{(n)} = 0; g_n) = 0; \quad (2.168)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (K_{(n)}^2)^n} \Gamma_R^{(2)}(K; g_n) \right|_{(K^2)^n = \kappa_n^{2n}} = 1; \quad (2.169)$$

$$\left. \Gamma_R^{(4)}(K_{i(n)}; g_n) \right|_{SP_n} = g_n; \quad (2.170)$$

$$\left. \Gamma_R^{(2,1)}(K_{1(n)}, K_{2(n)}, K_{(n)}; g_n) \right|_{\overline{SP}_n} = 1; \quad (2.171)$$

$$\left. \Gamma_R^{(0,2)}(K_{(n)}, g_n) \right|_{(K_{(n)}^2)^n = \kappa_n^{2n}} = 0 \quad (2.172)$$

em que aqui definimos os pontos de simetria por meio de $SP_n : K_{i(n)} \cdot K_{j(n)} = (\kappa_n^2/4)(4\delta_{ij} - 1)$ e $\overline{SP}_n : K_{(n)}^2 = (K_{1(n)} + K_{2(n)})^2 = \kappa_n^2$ (e subsidiariamente: $K_{(n')} = 0$ quando $n \neq n'$).

O sistema apresenta L comprimentos de correlação $\xi_1 \sim |t|^{\nu_1}$, $\xi_2 \sim |t|^{\nu_2}$ até $\xi_L \sim |t|^{\nu_L}$ em cada subespaço correspondente.

Tomando os mesmos resultados descritos em (2.149 - 2.154) e alterando a notação do rótulo através de $\tau \rightarrow n$, escrevemos a equação do GR e as correspondentes funções

de Wilson, e bem como a expressão do calor específico válido para todo n . Por lei de escala denotamos o expoente crítico do calor específico por meio de $\alpha_n = 2 - n \left(d - \sum_{n'=2}^L \frac{n'-1}{n'} m_{n'} \right) \nu_n \forall n$ [25].

O comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter generalizado isotrópico é realizado quando ocorre competição até o n -enésimo vizinho em todas as direções, ou seja, $d = m_n$. A densidade de energia de Ginzburg-Landau para esse caso é expressa como

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} |\nabla_{(m_n)}^n \phi|^2 + \frac{1}{2} \delta_{0n} |\nabla_{(m_n)} \phi|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^2)^2 \quad (2.173)$$

O ponto de Lifshitz é então definido sobre a temperatura crítica T_L e quando os coeficientes δ_{0n} são anulados. Ou seja, escrevemos a ação através de

$$S[\phi] = \int d^{m_n} x_{\parallel} \mathcal{L}(\phi) = \int d^{m_n} k \frac{1}{2} \phi(-k) \cdot [(k_{(n)}^2)^n + \mu^2] \phi(k) - \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi). \quad (2.174)$$

Definimos a dimensão canônica das coordenadas como $[x_{\parallel}] = \Lambda^{-1/n}$ e assim, o elemento de volume por $[d^{m_n} x_{\parallel}] = \Lambda^{-d/n}$. A dimensão canônica do campo é expressa através de $[\phi]^{d/2n-1}$ da análise do termo de interação obtemos a dimensão canônica da constante de acoplamento como

$$[\lambda] = \Lambda^{\frac{4n-d}{n}} = \Lambda^{\frac{d_c-d}{n}} \quad (2.175)$$

Encontramos, assim, a dimensão crítica através de $d_c = 4n$, que adimensionaliza a constante de acoplamento quando $d = d_c$. Por conseguinte, definimos o parâmetro da regularização dimensional como

$$\epsilon_n = d_c - d = 4n - d. \quad (2.176)$$

Escrevemos o propagador livre para o caso isotrópico por meio de

$$G_{0ab} = \delta_{ab} \frac{1}{(k_{(n)}^2)^n + \mu^2} \quad (2.177)$$

Um único conjunto de condições de normalização são definidos para todo o espaço no caso isotrópico \mathbb{R}^d [25]. O mesmo conjunto de equações

O conjunto das equações (2.168 - 2.172) para um n fixo são as condições de normalização para o caso das competições isotrópicas generalizadas, onde o rótulo n é fixo.

Também aqui podemos seguir a mesma sequência de (2.160 - 2.162) com a alteração de rótulos ($\tau = 3 \rightarrow n = \text{fixo}$), obtemos desde a equação do GR até o calor específico. A lei de escala que define o expoente do calor específico para este caso é expresso por $\alpha_n = 2 - m_n \nu_n$ [25].

AMPLITUDES PARA O PONTO DE LIFSHITZ *m*-AXIAIS

No capítulo anterior, revimos a descrição dos métodos funcionais em fenômenos críticos. Vimos também que na teoria $\lambda\Phi^4$ podemos introduzir uma modificação no termo cinético de sua densidade lagrangiana para descrevermos o comportamento crítico do tipo Lifshitz *m*-axial. Esse comportamento em sistemas magnéticos corresponde à competição das interações ferro e antiferro entre os primeiros e segundos sítios vizinhos (de spins), respectivamente.

O cálculo dos expoentes e razões de amplitudes universais podem ser realizados via grupo de renormalização. A razão de amplitudes do calor específico A_+/A_- apresenta o mesmo valor para diversos sistemas independente dos detalhes microscópicos, desde que os sistemas pertençam a uma mesma classe de universalidade (N, d, m) .

O comportamento crítico do tipo Lifshitz uniaxial ($m = 1$) pode ser realizado em sistemas magnéticos, cujo representante mais estudado é o *MnP* ($N = 1$). O *MnP* apresenta muitos resultados experimentais medidos [18, 19, 39], o que permite uma comparação com os resultados teóricos. Em [40] é calculada a razão A_+/A_- para o *MnP*, que apresenta uma classe de universalidade $(N = 1, d = 3, m = 1)$.

O estudo do caso *m*-axial estimula o interesse em novos materiais com suas propriedades previstas teoricamente. Os cálculos realizados podem ser usados para a comparação com resultados experimentais disponíveis, e mais, podem servir de fonte de inspiração para a fabricação de novos materiais que realizam, em princípio, as classes de universalidade abordadas teoricamente.

Neste capítulo iremos obter razões de amplitudes do calor específico para o comportamento crítico do tipo Lifshitz para os casos anisotrópico e isotrópico, separadamente. No caso anisotrópico, o número de eixos de competição é menor que a dimensão d do espaço ($m < d$). No caso isotrópico a competição acontece em todas as direções do espaço, ou seja, $m = d$. Mantendo fixo o número de componentes do parâmetro de ordem, realizamos a expansão em $\epsilon_L \equiv d_c - d$ que exigirá um tratamento diferenciado para os dois casos. Com o auxílio da aproximação ortogonal [22] conseguiremos realizar os dois casos. Mas, o caso isotrópico pode ser calculado exatamente e ser comparado com a aproximação.

3.1 CASO ANISOTRÓPICO

No capítulo anterior conhecemos a ação e o potencial efetivo renormalizado em 1-*loop* da teoria $\lambda\Phi^4$ obtidos no espaço dos momentos e expressos em (2.21) e (2.105), respectivamente.

Comparando as expressões das ações do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\Phi^4$ e do comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial enunciada em (2.164), podemos construir o conjunto de transformações abaixo que levam a primeira ação na segunda, por meio de

$$k^2 \implies p^2 + (k^2)^2 \quad (3.1)$$

$$(k + K)^2 \implies (p + P)^2 + [(k + K)^2]^2 \quad (3.2)$$

$$\int d^d k \implies \int d^{d-m} p d^m k \quad (3.3)$$

Efetuamos essas transformações nos momentos dos propagadores e nas medidas de integração dos vértices nas regras de Feynman para o caso das competições anisotrópicas.

Aplicando as transformações acima no potencial efetivo renormalizado do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\Phi^4$ em (2.105) expresso em (2.105), obtemos o potencial correspondente para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial do caso anisotrópico por meio de

$$\begin{aligned} \Gamma_R(y = u^* M^2, t) &= \frac{1}{2u^*} \left(ty + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int d^{d-m} p d^m k \left\{ (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{p^2 + (k^2)^2} \right] \right. \\ &+ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{p^2 + (k^2)^2} \right] - \frac{1}{p^2 + (k^2)^2} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \left. \right\} + \frac{1}{4} I_{SP(\tau)} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2}{3} y \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] \\ &+ O(\epsilon_L). \quad (3.4) \end{aligned}$$

onde, definimos o parâmetro perturbativo da regularização através de $\epsilon_L = 4 + m/2 - d$.

A integral $I_{SP(\tau)}$ é resolvida em (B.38), e a explicitamos abaixo

$$I_{SP(\tau)} = \int d^{d-m} p d^m k \frac{1}{(p^2 + (k^2)^2) [(p + P)^2 + ((k + K)^2)^2]} \Big|_{SP\tau}. \quad (3.5)$$

O rótulo τ na integral acima diz respeito às normalizações nos subespaços \mathbb{R}^{d-m} ausente de competição ($\tau = 1$) ou \mathbb{R}^m onde ocorre a competição ($\tau = 2$) nos quais

realizamos a condição de normalização através do ponto simétrico $SP_{(\tau)}$ através de

$$SP_{(\tau=1)} \quad : \quad P^2 = 1, \quad (K^2)^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$SP_{(\tau=2)} \quad : \quad P^2 = 0, \quad (K^2)^2 = 1. \quad (3.7)$$

A minimização da energia livre fornece o valor de M que descreve os vácuos com simetria $O(N)$ da fase desordenada ($M = 0$) e o vácuo da fase ordenada ($M \neq 0$) descrevendo a quebra espontânea da simetria $O(N)$. Ao invés de M , podemos usar a variável y . A minimização em termos da variável y pode ser escrita como

$$0 = \frac{\partial \Gamma_R}{\partial M} = 2u^* M \frac{\partial \Gamma_R}{\partial y} \implies M = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Gamma_R}{\partial y} \right|_{\bar{y}} = 0. \quad (3.8)$$

Temos então, dois tipos de solução: o vácuo trivial $M = 0$ e o vácuo degenerado $y = \bar{y}(t)$. Determinamos o último através de

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{\partial \Gamma_R}{\partial y} \right|_{\bar{y}} &= \frac{1}{2u^*} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \frac{1}{2} \int d^{d-m} p d^m k \left\{ \frac{N-1}{6} \left[\frac{1}{p^2 + (k^2)^2 + t + \bar{y}/6} - \frac{1}{p^2 + (k^2)^2} \right] \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p^2 + (k^2)^2 + t + \bar{y}/2} - \frac{1}{p^2 + (k^2)^2} \right] \right\} + \frac{1}{4} I_{SP(\tau)} \left[\frac{N-1}{3} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2u^*} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) - \frac{N-1}{12} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \left[\int d^{d-m} p d^m k \frac{1}{[p^2 + (k^2)^2][p^2 + (k^2) + t + \bar{y}/6]} \right. \\ &\left. - I_{SP(\tau)} \right] - \frac{1}{4} \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \left[\int d^{d-m} p d^m k \frac{1}{[p^2 + (k^2)^2][p^2 + (k^2) + t + \bar{y}/2]} - I_{SP(\tau)} \right] \\ &\quad + O(\epsilon_L). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Através da fórmula de Feynman (B.24) e do resultado (B.22), resolvemos a seguinte integral abaixo

$$\int d^{d-m}p d^m k \frac{1}{[p^2 + (k^2)^2][p^2 + (k^2)^2 + m^2]} = I_{SP}(\tau) - \frac{1}{2}(1 + \ln m^2) + O(\epsilon_L). \quad (3.10)$$

onde usamos a expressão da integral $I_{SP}(\tau)$ expressa em (B.38).

Portanto, usando (3.10) em (3.9) através de $m^2 = t + y/2$ e $m^2 = t + y/6$, obtemos

$$\left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \frac{u^*}{4} \left\{ \frac{N-1}{3} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \left[1 + \ln \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \right] + \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \left[1 + \ln \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \right] \right\} + O(\epsilon_L^2) = 0. \quad (3.11)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.10) corresponde a contribuição da energia livre de Landau já encontrado em (2.51) para o modelo N -vetorial de sistemas sem competição. E é seguido da correção de 1-loop na magnetização.

Obtemos a solução da equação acima perturbativamente, que pode ser escrita na forma

$$\bar{y}(t) = u^* M^2(t) = -6t + 3t(1 + \ln(-2t))u^* + O(u^{*2}), \quad (3.12)$$

onde a constante de acoplamento no ponto fixo para o comportamento crítico de Lifshitz m -axial no caso anisotrópico pode ser calculada em [22] através de

$$u^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[1 + \epsilon_L \left(-[i_2]_m + \frac{9N+42}{(N+8)^2} \right) + O(\epsilon_L^2) \right], \quad (3.13)$$

onde definimos $[i_2]_m \equiv 1 + \frac{1}{2}[\psi(1) - \psi(2 - \frac{m}{4})]$ e o parâmetro $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$.

Correspondemos $M = 0$ à fase desordenada (paramagnética) a qual é definida acima da temperatura crítica ($T > T_c$), e o resultado $\bar{y}(t) = u^* M^2(t) \neq 0$ à fase ordenada (ferromagnética ou modulada) definida abaixo da temperatura crítica ($T < T_c$).

De acordo com a discussão desenvolvida na seção 2.4, podemos calcular o calor específico $C_{\pm}(t)$ acima ou abaixo da temperatura crítica por meio de

$$C_{\pm} = -\Gamma_{R_{\pm}}^{(0,2)}(t) - \frac{\nu_L \tau}{\alpha_L \tau} B_{\tau}(u^*) \quad \forall \tau, \quad (3.14)$$

onde escrevemos o termo decorrente da contribuição inhomogênea do GR

$$B_{\tau}(u^*) = -\kappa_{\tau} \left(\frac{\partial \Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)}}{\partial \kappa_{\tau}} \right) \Big|_{\kappa_{\tau}^2=1} = -\frac{N}{2} \tau \epsilon_L I_{SP} \tau, \quad (3.15)$$

em que a parte de vértice não renormalizada é expressa por meio de

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa_{\tau}^{-\tau \epsilon_L} I_{SP\tau}. \quad (3.16)$$

Na referência [22] os expoentes críticos do comprimento de correlação ξ_{τ} foram calculados. Eles são dados por

$$\nu_{L\tau} \equiv \frac{1}{\tau} \nu_L = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2) \right), \quad (3.17)$$

e usando lei de escala, o expoente do calor específico resulta em

$$\alpha_{L\tau} \equiv \alpha_L = \frac{4-N}{2(N+8)} \epsilon_L - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4(N+8)^3} \epsilon_L^2 + O(\epsilon_L^3). \quad (3.18)$$

Usando os resultados de (3.15), (3.17) e (3.18), obtemos a constante aditiva de renormalização presente na expressão calor específico em (3.14) através de

$$-\frac{\nu_{\tau}}{\alpha_{\tau}} B_{\tau}(u^*) = \frac{N(N+8)}{2(4-N)\epsilon_L} \left\{ 1 + \epsilon_L \left[\frac{N+2}{2(N+8)} + \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{2(N+8)^2(4-N)} + [i_2]_m \right] + O(\epsilon_L^2) \right\} \quad \forall \tau. \quad (3.19)$$

Em termos da constante de acoplamento no ponto fixo anunciado em (3.13), a última expressão pode ser escrita como

$$-\frac{\nu_{\tau}}{\alpha_{\tau}} B_{\tau}(u^*) = \frac{3N}{(4-N)u^*} + \frac{2N(N+8)}{(4-N)^2} \quad \forall \tau. \quad (3.20)$$

Calor Específico para $T > T_L$

Na fase paramagnética (ou acima da temperatura crítica T_L) a magnetização no material é nula. Escrevemos a energia livre Γ_{R+} para o estado simétrico a partir da expressão (3.4) com $y = u^* M^2 = 0$ por meio de

$$\Gamma_{R+}(t) = \frac{N}{2} \int d^{d-m} p d^m k \left\{ \ln \left[1 + \frac{t}{p^2 + (k^2)^2} \right] - \frac{t}{p^2 + (k^2)^2} \right\} + \frac{N}{4} t^2 I_{SP\tau}. \quad (3.21)$$

Usando (3.20) e (3.21) em (3.14) podemos então calcular o calor específico acima da temperatura crítica e obtemos:

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left[I_{SP(\tau)} - \int d^{d-m}p d^m k \frac{1}{(p^2 + (k^2)^2 + t)^2} \right] + \frac{3N}{(4-N)u^*} + \frac{2N(N+8)}{(4-N)^2}. \quad (3.22)$$

Usando (B.40) na integral expressa acima, escrevemos o calor específico C_+ como uma lei de potência na variável t através de:

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_L} t^{-\alpha_L}. \quad (3.23)$$

Note que o expoente do calor específico é expandido até $O(\epsilon_L)$ como $\alpha_L = \frac{4-N}{2(N+8)}\epsilon_L$. E A_+ é a amplitude do calor específico acima da temperatura crítica, e a expressamos como

$$A_+ = \frac{N}{4} \left[1 + \epsilon_L \left(\frac{4}{4-N} + \mathcal{A}_{(N,m)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right] \quad (3.24)$$

em que a constante

$$\mathcal{A}_{(N,m)} = [i_2]_m - \frac{9N+42}{(N+8)^2} - \frac{4-N}{N+8} - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{2(4-N)(N+8)^2} \quad (3.25)$$

é responsável pela não-universalidade das amplitudes do calor específico e é cancelada no cálculo da razão entre elas.

Calor Específico para $T < T_L$

Em qualquer uma das fases ordenadas (ou abaixo da temperatura crítica T_L) o material assume espontaneamente uma magnetização não nula, correspondente ao vácuo degenerado encontrado em (3.12). A correção em 1-loop da magnetização espontânea mostra-se não relevante nos cálculos das amplitudes do calor específico em $O(\epsilon_L)$. Expressamos a energia livre $\Gamma_{R-}(t)$ para o estado de simetria quebrada a partir de (3.4) com $y = u^* M^2 = -6t + O(1-loop)$ através da equação

$$\Gamma_{R-}(t) = -\frac{3}{2u^*}t^2 + \frac{1}{2} \int d^{d-m}p d^m k \left\{ \ln \left[1 + \frac{-2t}{p^2 + (k^2)^2} \right] - \frac{-2t}{p^2 + (k^2)^2} \right\} + t^2 I_{SP\tau}. \quad (3.26)$$

Usando (3.20) e (3.26) em (3.14) calculamos o calor específico abaixo da temperatura crítica por meio de

$$C_- = \frac{12}{(4-N)u^*} - 2 \left[I_{SP} - \int d^{d-m}p d^m k \frac{1}{(p^2 + (k^2)^2 - 2t)^2} \right] + \frac{2N(N+8)}{(4-N)^2}. \quad (3.27)$$

Efetuando $t \rightarrow -2t$ no resultado de (B.40) substituímos na integral expressa acima, e então escrevemos o calor específico C_- através de uma lei de potência na variável t como

$$C_-(t) = \frac{A_-}{\alpha_L} (-t)^{-\alpha_L}. \quad (3.28)$$

em que o expoente do calor específico é expandido até $O(\epsilon_L)$ como $\alpha_L = \frac{4-N}{2(N+8)}\epsilon_L$. Aqui A_- é a amplitude do calor específico abaixo da temperatura crítica, e a expressamos como

$$A_- = 1 + \epsilon_L \left(\frac{N}{4-N} - \frac{4-N}{2(N+8)} \ln 2 + \mathcal{A}_{(N,m)} \right) + O(\epsilon_L^2), \quad (3.29)$$

observe que a constante $\mathcal{A}_{(N,m)}$ é expressa em (3.25) quando já aparece na amplitude A_+ calculada em (3.24).

Razão das Amplitudes do Calor Específico

A exemplo do que foi discutido na seção 2.3, as amplitudes críticas do calor específico não são universais, ao contrário dos expoentes críticos que são comuns a sistemas que estejam em uma mesma classe de universalidade. No entanto, na mesma seção mostramos que as razões das amplitudes críticas integram o conjunto das grandezas universais na descrição dos fenômenos críticos.

A razão entre as amplitudes do calor específico A_+ em (3.24) e A_- em (3.29) acima e abaixo da temperatura crítica, respectivamente, é então expressa através de

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_L} (1 + \epsilon_L)}. \quad (3.30)$$

O expoente do calor específico na expressão acima é utilizado em $O(\epsilon_L)$, isto é, $\alpha_L = \frac{4-N}{2(N+8)}\epsilon_L + O(\epsilon_L^2)$.

A razão universal A_+/A_- é, então determinada dentro de uma classe de universali-

dade (N, d, m) para a descrição de sistemas que exibem o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial para o caso anisotrópico ($m < d$). Os valores de N correspondem ao número de componentes do parâmetro de ordem, e que podemos tomar, por exemplo, como $N = 1, 2$, e 3 . As variáveis d e m são, respectivamente, as dimensões do espaço e do subespaço competitivo. Das condições de que $\epsilon_L > 0$ e $m < d$, as variáveis d e m assumem valores dentro da faixa $m < d < 4 + m/2 < 8$.

Imediatamente, a realização física em $d = 3$ se revela de interesse maior, e conseqüentemente podemos tomar os casos: $m = 0$ ($\epsilon_L = 1$), em que reproduzimos os resultados do modelo N -vetorial para sistemas sem competição; e $m = 1$ ($\epsilon_L = 1, 5$) e $m = 2$ ($\epsilon_L = 2$) que revelam competições uni e biaxiais. Podemos colecionar os seguintes valores de razões A_+/A_- em 1-loop em $d = 3$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$N = 1$	0,53	0,67	0,81
$N = 2$	1,03	1,30	1,57
$N = 3$	1,52	1,91	2,30

Tabela 3.1 Tabela das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico de Lifshitz m -axial do caso anisotrópico em $d = 3$.

Os resultados da primeira coluna ($m = 0$) conferem com a literatura para sistemas livres de competição e são consistentes com os experimentos envolvidos. Para uma revisão destes resultados, conferir [30] e referências citadas. A substância MnP apresenta competição uniaxial descrita através do modelo ANNNI e uma classe de universalidade ($N = 1, m = 1, d = 3$) com resultado experimental $A_+/A_- = 0,65 \pm 0,05$ [39] e está muito próximo com a nossa predição teórica de $A_+/A_- = 0,67$ com um desvio de apenas 3,1%. Apesar que o expoente α_L medido em experiência [39] entre 0,4 e 0,5 difere significativamente do resultado teórico de $-0,05$ com o cálculo em dois loops [22] para a classe de universalidade do modelo ANNNI.

Outras substâncias que possuem fases moduladas podem também apresentar o PL, a exemplos dos materiais $CeSb$ [41], $Sn_2P_2(Se_xS_{1-x})_6$ [42]. A substância NbO_2 [43, 44] é descrita com $N = 2$ e $m = 1$. Experimentos indicam que o perovskita $RbCaF_3$ [45, 46] possuem um PL. O elemento Tb e outras terras raras com a mesma classe de universalidade do Dy e Ho [47] são apontados por [48] serem candidatos em apresentar o PL. Uma revisão a respeito de sistemas e estruturas modulados pode ser consultada em [4, 49, 50].

3.2 CASO ISOTRÓPICO

No caso isotrópico, a competição é estendida a todas as direções axiais. Até o momento, o caso isotrópico do comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial não tem muitas aplicações fenomenológicas para $d = m$ próximo de sua dimensão crítica $d_c = 8$. Por outro lado, os casos em $d = 3$ tem aplicações concretas. O formalismo apresentado nesta tese não consegue explicar os comportamentos isotrópicos em $d = m = 3$, no entanto espera-se que no futuro estes comportamentos possam ser explicados.

O tratamento deste caso é inteiramente similar ao do caso anisotrópico e por isso, vamos ser o mais econômicos que pudermos. Mas, efetuamos a renormalização através da expansão no novo parâmetro perturbativo $\epsilon_L = 8 - d > 0$ e, calculamos novas integrais, as quais classificamos de isotrópicas.

Similarmente à maneira que procedemos na seção anterior, podemos comparar as ações do comportamento crítico de Lifshitz m -axial isotrópico (2.156) e do modelo N -vetorial de sistemas sem competição (2.21) e obtemos o seguinte mapa

$$k^2 \implies (k^2)^2 \quad (3.31)$$

$$(k + K)^2 \implies [(k + K)^2]^2. \quad (3.32)$$

Essas transformações podem ser aplicadas diretamente nos propagadores das regras de Feynman para o caso de competições isotrópicas.

Aplicando as transformações acima no potencial efetivo renormalizado do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\Phi^4$ expresso em (2.105), obtemos o potencial correspondente para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial do caso isotrópico por meio de

$$\begin{aligned} \Gamma_R(y, t) = & \frac{1}{2u^*} \left(ty + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int d^m k \left\{ (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{(k^2)^2} \right] + \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{(k^2)^2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{(k^2)^2} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \right\} + \frac{1}{4} I_{SP(\tau=3)} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2y}{3} \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] + O(\epsilon_L). \end{aligned} \quad (3.33)$$

A integral $I_{SP(\tau=3)}$ é resolvida em (B.57) através da aproximação ortogonal e em (B.50) pelo cálculo exato, e a explicitamos abaixo

$$I_{SP(\tau=3)} = \int d^m k \frac{1}{(k^2)^2 [(k+K)^2]^2} \Big|_{SP\tau=3}. \quad (3.34)$$

O rótulo $\tau = 3$ na integral acima diz respeito a normalização para o comportamento competitivo isotrópico que ocorre em todo \mathbb{R}^d através do ponto de simetria SP: $(K^2) = 1$. Aqui vale a condição de isotropia $d = m$.

Além da solução do vácuo trivial paramagnético $M = 0$, a energia livre Γ_R apresenta o vácuo degenerado obtido por meio da condição

$$\frac{\partial \Gamma_R}{\partial y} \Big|_{\bar{y}(t)} = 0 \implies \bar{y}(t) = u^* M^2 = -6t + O(1 - loop) \quad (3.35)$$

Aqui também a correção em 1-loop na magnetização espontânea não é relevante nos cálculos do calor específico.

Na fase desordenada, a magnetização no sistema é nula. Escrevemos a energia livre Γ_{R+} para o vácuo trivial $y = u^* M^2 = 0$ na forma de:

$$\Gamma_{R+}(t) = \frac{N}{2} \int d^m k \left\{ \ln \left[1 + \frac{t}{(k^2)^2} \right] - \frac{t}{(k^2)^2} \right\} + \frac{N}{4} t^2 I_{SP(\tau=3)} \quad (3.36)$$

No estado de simetria quebrada ($T < T_L$), com uma magnetização espontânea $u^* M^2 = \bar{y}(t) = -6t + O(1 - loop)$ no sistema, denotamos a energia livre Γ_{R-} através de

$$\Gamma_{R-}(t) = -\frac{3}{2u^*} t^2 + \frac{1}{2} \int d^m k \left\{ \ln \left[1 + \frac{-2t}{(k^2)^2} \right] - \frac{-2t}{(k^2)^2} \right\} + t^2 I_{SP(\tau=3)} \quad (3.37)$$

O calor específico acima ou abaixo da temperatura crítica T_L para o comportamento de Lifshitz m -axial isotrópico vale

$$C_{\pm}(t) = -\Gamma_{R\pm}^{(0,2)}(t) - \frac{\nu_{L4}}{\alpha_{L4}} B(u_{L4}^*). \quad (3.38)$$

Em que, ν_{L4} e α_{L4} são os expoentes críticos do comprimento de correlação e do calor específico no espaço competitivo isotrópico. Denotamos o termo inomogêneo do GR para o comportamento isotrópico por meio de

$$B_{(\tau=3)}(u_{L4}^*) = -\kappa_{(\tau=3)} \frac{\partial \Gamma_{\text{bar}}^{(0,2)}}{\partial \kappa_{(\tau=3)}} \Big|_{\kappa_{(\tau=3)}^2=1} = -\kappa_{(\tau=3)} \frac{\partial}{\partial \kappa_{(\tau=3)}} \left(-\frac{N}{2} \kappa_{(\tau=3)}^{-\epsilon_L} I_{SP(\tau=3)} \right) \Big|_{\kappa_{(\tau=3)}^2=1} \quad (3.39)$$

Na próxima subseção calcularemos a razão entre as amplitudes utilizando a aproximação ortogonal. Entretanto, o caso isotrópico tem a flexibilidade suficiente para que as integrais de Feynman sejam resolvidos exatamente, tópico que abordaremos mais adiante.

3.2.1 Cálculo com a Aproximação Ortogonal

Nesta seção iremos obter as amplitudes críticas do calor específico com o emprego da aproximação ortogonal desenvolvida em [22], é apresentada aqui no cálculo de algumas integrais no apêndice B. Na próxima subseção, discutiremos o cálculo exato até 1-loop das amplitudes críticas.

Os expoentes críticos ν_{L4} e α_{L4} para o caso isotrópico com a aproximação ortogonal [22] são apresentadas por meio de

$$\nu_{L4} = \frac{1}{4} + \frac{N+2}{16(N+8)} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2), \quad (3.40)$$

$$\alpha_{L4} = \frac{4-N}{4(N+8)} \epsilon_L - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{16(N+8)^3} \epsilon_L^2 + O(\epsilon_L^3). \quad (3.41)$$

Através do resultado da integral $I_{SP(\tau=3)}$ em (B.57), obtemos

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa_{(\tau=3)}^{-\epsilon_L} I_{SP(\tau=3)} = -\frac{N}{2} \kappa_{(\tau=3)}^{-\epsilon_L} \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 + \frac{\epsilon_L}{4} + O(\epsilon_L^2) \right) \quad (3.42)$$

Conseqüentemente escrevemos (3.39) na forma

$$B_{L4}(u_{L4}^*) = -\frac{N}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_L}{4} + O(\epsilon_L^2) \right). \quad (3.43)$$

Expressamos a constante aditiva de renormalização do calor específico através de

$$\begin{aligned}
-\frac{\nu_{L4}}{\alpha_{L4}} B_{L4}(u_{L4}^*) &= \frac{N(N+8)}{2(4-N)\epsilon_L} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} \left[1 + \frac{N+2}{N+8} + \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{(4-N)(N+8)^2} \right] + O(\epsilon_L^2) \right\} \\
&= \frac{3N}{(4-N)u_{L4}^*} + \frac{N(N+8)}{(4-N)^2}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

em que usamos a constante de acoplamento no ponto fixo para o caso isotrópico é calculada por meio da aproximação ortogonal em [22] como

$$u_{L4}^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[1 - \epsilon_L \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2(9N+42)}{(N+8)^2} \right) + O(\epsilon_L^2) \right]. \tag{3.45}$$

Calor Específico para $T > T_L$

Substituindo (3.36) e (3.44) em (3.38) calculamos o calor específico na fase em que a magnetização é nula por

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left(I_{SP(\tau=3)} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^2 + t)^2} \right) + \frac{3N}{(4-N)u_{L4}^*} + \frac{N(N+8)}{(4-N)^2}. \tag{3.46}$$

Substituindo o resultado de (B.59) em (3.46), expressamos o calor específico como uma lei de potência em t através de

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_{L4}} t^{-\alpha_{L4}}, \tag{3.47}$$

onde o expoente α_{L4} é da ordem $O(\epsilon_L)$ expresso em (3.41), e A_+ é a amplitude do calor específico acima da temperatura crítica, que é expressa como

$$A_+ = \frac{N}{8} \left[1 + \epsilon_L \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4-N} + \mathcal{B}_{(N)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right]. \tag{3.48}$$

Expressamos a constante presente na amplitude através da identificação

$$\mathcal{B}_{(N)} = \frac{1}{2} - \frac{9N+42}{(N+8)^2} - \frac{4-N}{N+8} - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{2(4-N)(N+8)^2}. \tag{3.49}$$

Se comparamos a constante acima com $\mathcal{A}_{(N,m)}$ enunciada em (3.25), constatamos

$$\mathcal{B}_{(N)} = \mathcal{A}_{(N,m=0)}.$$

Calor Específico para $T < T_L$

Substituindo (3.44) e (3.37) em (3.38), escrevemos o calor específico na fase de magnetização espontânea na forma

$$C_- = \frac{12}{(4-N)u_{L4}^*} - 2 \left(I_{SP_{L4}} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^2 - 2t)^2} \right) + \frac{N(N+8)}{(4-N)^2}. \quad (3.50)$$

Substituindo (B.59) em (3.50) identificamos o calor específico pela seguinte lei de potência

$$C_- = \frac{A_-}{\alpha_{L4}} (-t)^{-\alpha_{L4}}. \quad (3.51)$$

A quantidade A_- é a amplitude do calor específico acima da temperatura crítica, que é expressa como

$$A_- = \frac{1}{2} \left[1 + \epsilon_L \frac{1}{2} \left(\frac{N}{4-N} - \frac{4-N}{2(N+8)} \ln 2 + \mathcal{B}_{(N)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right] \quad (3.52)$$

note que $\mathcal{B}_{(N)}$ é expressa em (3.49).

Razão das Amplitudes do Calor Específico

A razão universal das amplitudes do calor específico usando (3.48) e (3.52) torna-se

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_{L4}} \left(1 + \frac{\epsilon_L}{2} \right)} \quad (3.53)$$

em que $\alpha_{L4} = \epsilon_L \frac{4-N}{4(N+8)} + O(\epsilon_L^2)$.

Note que esta expressão é muito similar ao resultado encontrado para o comportamento anisotrópico em (3.30). O expoente α_{L4} e o parâmetro perturbativo ϵ_L são diferentes para os dois casos. Na próxima subseção iremos calcular a razão das amplitudes exatamente.

3.2.2 Cálculo Exato

Os expoentes críticos e a constante de acoplamento no ponto fixo calculados em [22] para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial através da aproximação ortogonal e o cálculo exato são iguais em 1-*loop* e passam a diferir-se apenas em $O(\epsilon_L^2)$. Particularmente, o cálculo das amplitudes críticas do calor específico em 1-*loop* depende de α_{L4} e da constante de acoplamento u_{L4}^* em 2-*loops*, e desta última crucialmente. Por isso, é importante calcular a razão entre estas amplitudes exatamente, e comparar com a aproximação. A comparação pela primeira vez na literatura entre os dois resultados tem aspectos importantes.

Os expoentes críticos para o caso isotrópico ν_{L4} e α_{L4} do comprimento de correlação e do calor específico, respectivamente, são calculados exatamente em [25] por meio de

$$\nu_{L4} = \frac{1}{4} + \frac{N+2}{16(N+8)} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2) \quad \text{e,} \quad (3.54)$$

$$\alpha_{L4} = \frac{4-N}{4(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(-15N^2+62N+952)}{240(N+8)^3} \epsilon_L^2 + O(\epsilon_L^3) \quad (3.55)$$

Através do resultado da integral $I_{SP(\tau=3)}$ em (B.59) obtemos

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa^{-\epsilon_L} \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{12} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2) \right) \quad (3.56)$$

E portanto, reescrevemos (3.39) por meio de

$$B_{L4}(u_{L4}^*) = -\frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{12} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2) \right) \quad (3.57)$$

A constante aditiva de renormalização do calor específico é expresso através de

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_{L4}}{\alpha_{L4}} B_{L4}(u_{L4}^*) &= \frac{N(N+8)}{2(4-N)\epsilon_L} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} \left[\frac{N+2}{N+8} - \frac{(N+2)(-15N^2+62N+952)}{15(4-N)(N+8)^2} + \frac{1}{3} \right] \right. \\ &\quad \left. + O(\epsilon_L^2) \right\} \\ &= \frac{3N}{(4-N)u_{L4}^*} - \frac{N(N+8)}{3(4-N)^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

observe que usamos a constante de acoplamento no ponto fixo para o caso isotrópico

calculado em [25] expressa por

$$u_{L4}^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[1 - \epsilon_L \frac{1}{3} \left(\frac{41N+202}{10(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right) + O(\epsilon_L^2) \right] \quad (3.59)$$

Calor Específico para $T > T_L$

Substituindo (3.36) e (3.58) em (3.38) calculamos o calor específico na fase de magnetização $M = 0$ através de

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left(I_{SP(\tau=3)} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^2 + t)^2} \right) + \frac{3N}{(4-N)u_{L4}^*} - \frac{N(N+8)}{3(4-N)^2}. \quad (3.60)$$

Obtemos o calor específico através de uma lei de potência em t , quando substituímos (B.59) em (3.60) através de

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_{L4}} t^{-\alpha_{L4}}. \quad (3.61)$$

aqui o expoente α_{L4} é expresso até $O(\epsilon_L)$ em (3.55). Em 3.61, utilizamos a seguinte expressão para a amplitude do calor específico

$$A_+ = \frac{N}{8} \left[1 - \epsilon_L \left(\frac{2}{3(4-N)} + \mathcal{D}_{(N)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right]. \quad (3.62)$$

A constante $\mathcal{D}_{(N)}$ presente na amplitude acima como

$$\mathcal{D}_{(N)} = \frac{1}{12} - \frac{41N+202}{30(N+8)^2} - \frac{(N+2)(-15N^2+62N+952)}{60(4-N)(N+8)^2} + \frac{4-N}{6(N+8)}. \quad (3.63)$$

Calor Específico para $T < T_L$

Substituindo (3.58) e (3.37) em (3.38), o calor específico na fase de magnetização espontânea é dado por

$$C_-(t) = \frac{12}{(4-N)u_{L4}^*} - 2 \left(I_{SP_{L4}} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^2 - 2t)^2} \right) - \frac{N(N+8)}{3(4-N)^2}. \quad (3.64)$$

Usando (B.59) na equação acima, obtemos o calor específico como

$$C_- = \frac{A_-}{\alpha_{L4}} (-t)^{-\alpha_{L4}} \quad (3.65)$$

onde o expoente α_{L4} é da $O(\epsilon_L)$ na expressão de (3.55). A amplitude A_- do calor específico abaixo da temperatura crítica, lê-se

$$A_- = \frac{1}{2} \left[1 - \epsilon_L \left(\frac{N}{6(4-N)} + \frac{4-N}{4(N+8)} \ln 2 + \mathcal{D}_{(N)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right], \quad (3.66)$$

onde, $\mathcal{D}_{(N)}$ é expresso em (3.63).

Razão das Amplitudes do Calor Específico

A razão universal das amplitudes do calor específico das expressões (3.62) e (3.66)

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_{L4}} \left(1 - \frac{\epsilon_L}{6} \right)}, \quad (3.67)$$

perceba que denotamos $\alpha_{L4} = \epsilon_L \frac{4-N}{4(N+8)} + O(\epsilon_L^2)$ e o parâmetro perturbativo como $\epsilon_L = 8 - d$.

Observamos aqui uma diferença em $O(\epsilon_L)$ das razões de amplitudes críticas calculadas através das duas abordagens utilizadas nesta seção, isto é, da aproximação ortogonal e do cálculo exato. As razões entre as amplitudes de outros potenciais termodinâmicos em 1-loop, a exemplo da susceptibilidade [51], são escritos inteiramente em termos dos expoentes críticos em 1-loop, onde os mesmos se apresentam iguais nas duas abordagens em $O(\epsilon_L)$. No entanto, o calor específico apresenta um termo multiplicativo, o qual difere nas duas abordagens. O desvio relativo entre as razões A_+/A_- nas duas abordagens é de 2/3 quando efetuamos o parâmetro perturbativo igual a unidade ($\epsilon_L = 1$ ou $d = 7$). Ao passo que, a razão entre as amplitudes do calor específico no caso anisotrópico do comportamento crítico de Lifshitz m -axial oferece ótimos resultados quando comparamos com valores experimentais [40].

Voltaremos no próximo capítulo a refletir um pouco mais sobre a comparação das duas abordagens no comportamento competitivo isotrópico.

AMPLITUDES PARA O PONTO DE LIFSHITZ DE CARÁTER GENÉRICO

A competição generalizada de caráter arbitrário foi apresentada no capítulo 2 por meio do modelo CECI que apresenta uma classe de universalidade do tipo (N, d, m_2, \dots, m_L) .

A realização de pontos de Lifshitz de até quinta ordem são observadas em sistemas de alguns tipos de polímeros [52]. No entanto, não há na literatura resultados teóricos ou experimentais para a amplitudes do calor específico para sistemas com alto caráter de competição. Por isso, e pelos resultados alcançados no capítulo anterior, motivamo-nos a obter as razões para as amplitudes do calor específico para o comportamento crítico do tipo Lifshitz generalizado de caráter arbitrário. Os expoentes críticos em $O(\epsilon_L^2)$ são calculados em [25], a partir deles desenvolveremos os resultados deste capítulo.

Na primeira seção descreveremos o caso anisotrópico deste comportamento e destacaremos os resultados para as interações uni e biaxiais em $d = 3$. Na segunda seção abordaremos o caso isotrópico com classe de universalidade (N, d, m_L) com o emprego da AOG e do cálculo exato, e os compararemos.

4.1 CASO ANISOTRÓPICO

De uma maneira similar ao que foi procedido no capítulo anterior, comparamos as ações do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\phi^4$ e do comportamento crítico de tipo Lifshitz de caráter genérico anisotrópico e podemos construir um conjunto de transformações que levam uma descrição na outra através de

$$k^2 \implies p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n, \quad (4.1)$$

$$(k + K)^2, \implies (p + P)^2 + \sum_{n=2}^L ((k_{(n)} + K_{(n)})^2)^n, \quad (4.2)$$

$$\int d^d k \implies \int Dp Dk. \quad (4.3)$$

Onde, $Dp \equiv d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} p$ e $Dk \equiv \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}$.

Essas transformações são uma maneira simples e eficiente de traduzirmos a linguagem descrita no capítulo 2 dos sistemas críticos que não apresentam competição para o cenário de competições generalizadas.

Obtemos a energia livre do comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter genérico quando aplicamos o conjunto das transformações acima na energia livre do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\Phi^4$ expressa em (2.105). Neste caso,

$$\begin{aligned} \Gamma_R(y = u_n^* M, t) &= \frac{1}{2u^*} \left(ty + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int Dp Dk \left\{ (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n} \right] - \frac{1}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} I_{SP(n)} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2}{3} y \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] + O(\epsilon_L). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Note que definimos o parâmetro perturbativo $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n} \right) m_n - d$ para o caso anisotrópico.

Definimos a integral I_{SP_n} explicitada abaixo e resolvida em (B.39) através de:

$$I_{SP(n)} = \int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n \right] \left\{ (p+P)^2 + \sum_{n=2}^L \left[(k_{(n)} + K_{(n)})^2 \right]^n \right\}} \Big|_{SP_n} \quad (4.5)$$

O subscripto n diz respeito ao subespaço no qual o ponto de simetria é definido, a saber:

$$SP_{(1)} \quad : \quad P^2 = 1, \quad (K_{(n)}^2)^n = 0 \quad (4.6)$$

$$SP_{(n)} \quad : \quad P^2 = 0, \quad (K_{(n')}^2)^{n'} = \delta_{n,n'} \quad \text{para } n = 2, \dots, L. \quad (4.7)$$

Similarmente ao capítulo anterior, a energia livre (4.4) apresenta o vácuo trivial $M = 0$ e o vácuo degenerado $\bar{y}(t) = u_n^* M^2 = -6t + 3t(1 + \ln(-2t))u_n^* = -6t + O(1 - \text{loop})$. Onde esta última é encontrada através da condição

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R}{\partial y} \right|_{\bar{y}(t)} = 0. \quad (4.8)$$

Usando o resultado:

$$\int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n \right] \left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + m^2 \right]} = I_{SP(n)} - \frac{1}{2} (1 + \ln m^2) + O(\epsilon_L), \quad (4.9)$$

que é verificada através da fórmula de Feynman (B.24) e do resultado de (B.21), podemos obter o vácuo degenerado usando (4.4), (4.8) e (4.9).

A transição de segunda ordem existe entre a fase paramagnética ($M = 0$) que acontece acima da temperatura crítica T_L e a plethora de fases ordenadas ($M \neq 0$) que existem abaixo da temperatura crítica. Calculamos o calor específico C_{\pm} para acima e abaixo da temperatura crítica T_L através de

$$C_{\pm} = -\Gamma_{R\pm}^{(0,2)}(t) - \frac{\nu_n}{\alpha_n} B_{(n)}(u^*) \quad \forall n. \quad (4.10)$$

Em que, escrevemos o termo decorrente da contribuição inomogênea do GR através de

$$B_{(n)}(u_n^*) = -\kappa_{(n)} \left(\frac{\partial \Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)}}{\partial \kappa_{(n)}} \right) \Bigg|_{\kappa_{(n)}^2=1} = -\frac{N}{2} n \epsilon_L I_{SP(n)}. \quad (4.11)$$

onde, a parte de vértice não renormalizada é expressa por meio de

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa_{(n)}^{-n\epsilon_L} I_{SP(n)}. \quad (4.12)$$

O expoente crítico do comprimento de correlação ξ_n é calculado no artigo [25] através de

$$\nu_n \equiv \frac{1}{n} \nu_L = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon_L + O(\epsilon_L^2) \right) \quad (4.13)$$

e o expoente do calor específico por meio de

$$\alpha_n \equiv \alpha_L = \frac{4-N}{2(N+8)} \epsilon_L - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4(N+8)^3} \epsilon_L^2 + O(\epsilon_L^3) \quad (4.14)$$

Substituindo os resultados de (4.11), (4.13) e (4.14) na constante aditiva de renorma-

lização presente na expressão calor específico de (4.10) através de

$$-\frac{\nu_n}{\alpha_n} B_{(n)}(u_n^*) = \frac{3N}{(4-N)u_n^*} + \frac{2N(N+8)}{(4-N)^2} \quad \forall n \quad (4.15)$$

onde, a constante de acoplamento no ponto fixo é calculada em [25] e expressa por meio de

$$u_n^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[1 + \epsilon_L \left(-h_{m_L} + \frac{9N+42}{(N+8)^2} \right) + O(\epsilon_L^2) \right] \quad (4.16)$$

Calor Específico para $T > T_L$

A energia livre $\Gamma_{R+}(t)$ para o estado simétrico na qual a magnetização no material é nula ($M = 0$) é obtida a partir de (4.4) e pode ser escrita na forma

$$\Gamma_{R+}(t) = \frac{N}{2} \int Dp Dk \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n} \right] - \frac{t}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n} \right\} + \frac{N}{4} t^2 I_{SPn}. \quad (4.17)$$

Para calcular o calor específico C_+ acima da temperatura crítica, usamos (4.17) e (4.15) em (4.10) e, então obtemos

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left[I_{SPn} - \int Dp Dk \frac{1}{(p^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + t)^2} \right] + \frac{3N}{(4-N)u_n^*} + \frac{2N(N+8)}{(4-N)^2}. \quad (4.18)$$

Usando o resultado (B.39) na integral expressa acima, escrevemos a lei de potência em t para o calor específico C_+ por meio de

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_L} t^{-\alpha_L} \quad (4.19)$$

onde o expoente α_L é até da $O(\epsilon_L)$ na expressão de (4.14). Novamente, A_+ é a amplitude crítica do calor específico abaixo da temperatura crítica, que é expressa por meio de

$$A_+ = \frac{N}{4} \left[1 + \epsilon_L \left(\frac{4}{4-N} + \mathcal{E}_{(N,m)} \right) + O(\epsilon_L^2) \right] \quad (4.20)$$

em que definimos a constante

$$\mathcal{E}_{(N,m)} = h_{m_L} - \frac{9N + 42}{(N + 8)^2} - \frac{4 - N}{N + 8} - \frac{(N + 2)(N^2 + 30N + 56)}{2(4 - N)(N + 8)^2} \quad (4.21)$$

que é comum nas duas amplitudes do calor específico e será cancelada no cálculo da razão.

Calor Específico para $T < T_L$

Em qualquer uma da plethora de fases ordenadas do modelo CECI, o material assume espontaneamente uma magnetização $M \neq 0$. A exemplo do capítulo anterior, não precisamos da correção em $1 - loop$ da magnetização no cálculo do calor específico em $O(\epsilon_L)$. Substituindo $y = u^*M^2 = -6t + O(1 - loop)$ em (4.4), obtemos a energia livre $\Gamma_{R-}(t)$ para $T < T_L$ como

$$\Gamma_{R-}(t) = -\frac{3}{2u_n^*}t^2 + \frac{1}{2} \int Dp Dk \left\{ \ln \left[1 + \frac{-2t}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_n^2)^n} \right] - \frac{-2t}{p^2 + \sum_{n=1}^L (k_n^2)^n} \right\} + t^2 I_{SP_n}. \quad (4.22)$$

Usando (4.22) em (4.10) obtemos a expressão do calor específico para abaixo da temperatura crítica por meio de

$$C_- = \frac{12}{(4 - N)u_n^*} - 2 \left[I_{SP_n} - \int Dp Dk \frac{1}{(p^2 + \sum_{n=1}^L (k_n^2)^n)} \right] + \frac{2N(N + 8)}{(4 - N)^2} \quad (4.23)$$

Usando o resultado de (B.39) na expressão entre chaves na equação acima, escrevemos $C_-(t)$ através de:

$$C_-(t) = \frac{A_-}{\alpha_L} (-t)^{-\alpha_L} \quad (4.24)$$

perceba que o expoente α_L é da $O(\epsilon_n)$ na expressão (4.14). E A_- é a amplitude crítica do calor específico para abaixo da temperatura crítica. Consequentemente, a amplitude tem o valor

$$A_- = 1 + \epsilon_L \left(\frac{N}{4 - N} - \frac{4 - N}{2(N + 8)} \ln 2 + \mathcal{E}_{(N,m)} \right) + O(\epsilon_L^2), \quad (4.25)$$

note que a constante $\mathcal{E}_{(N,m)}$ é expressa em (4.21).

Razão de Amplitudes do Calor Específico

A razão universal das amplitudes do calor específico para o comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter genérico é calculada a partir das amplitudes expressas em (4.20) e (4.25) por meio de

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_L} (1 + \epsilon_L)}. \quad (4.26)$$

Mais uma vez, usamos o expoente em $O(\epsilon_L)$, isto é, $\alpha_L = \epsilon_L \frac{4 - N}{2(N + 8)} + O(\epsilon_L^2)$ e o parâmetro perturbativo da regularização dimensional como $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_n - d$.

Os resultados deste trabalho a respeito das razões de amplitudes do calor específico em sistemas competitivos genéricos de caráter arbitrário são os primeiros obtidos até então.

Sistemas de naturezas diferentes na criticalidade podem apresentar uma mesma razão de amplitudes A_+/A_- e demais quantidades universais se estiverem numa mesma classe de universalidade do tipo (N, d, m_2, \dots, m_L) . Os parâmetros envolvidos na universalidade estão definidos na faixa $\sum_{n=2}^L m_n < d < 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_n \equiv d_c$.

É de maior interesse físico encontrarmos realizações em $d = 3$. Podemos tratar, especialmente, das competições ao longo de uma ou de duas direções (uni ou biaxial) com interações até o L -ésimo vizinho.

i) Subcaso: Uniaxial em $d = 3$

O subcaso uniaxial é realizado através de $m_n = \delta_{n,L}$ (com $n = 2, \dots, L$) que corresponde tomarmos a classe de universalidade $(N, d = 3, 0, \dots, 0, m_L = 1)$. Podemos, então, colecionar uma tabela com valores da razão A_+/A_- para $L \in [1; 10]$ e $N \in [1; 3]$ em $d = 3$ e um parâmetro perturbativo $\epsilon_L = 2 - \frac{1}{L}$ por meio de

	$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 5$	$L = 6$	$L = 7$	$L = 8$	$L = 9$	$L = 10$
$N = 1$	0,53	0,67	0,71	0,74	0,75	0,76	0,77	0,77	0,78	0,78
$N = 2$	1,03	1,30	1,39	1,43	1,46	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52
$N = 3$	1,52	1,91	2,04	2,10	2,14	2,17	2,19	2,20	2,21	2,22

Tabela 4.1 Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de L -ésimo caráter uniaxial em $d = 3$.

	$L \rightarrow \infty$
$N = 1$	0,81
$N = 2$	1,57
$N = 3$	2,30

Tabela 4.2 Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de caráter infinito uniaxial em $d = 3$.

Em $d = 3$, para o caso uniaxial quando o alcance generalizado é infinito ($L \rightarrow \infty$), obtemos $\epsilon_L = 2 - \frac{1}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 2$ e expressamos as razões como

$$\frac{A_+}{A_-} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{3N}{4} \left[1 + \frac{4-N}{3(N+8)} \ln 2 \right]. \quad (4.27)$$

Os valores da tabela 4.1 são limites superiores em 1-loop das razões de amplitudes do calor específico para sistemas uniaxiais quando variamos o alcance L das interações.

Podemos ainda representar os resultados do caso uniaxial pelos gráficos A_+/A_- versus L para $N = 1, 2$ e 3

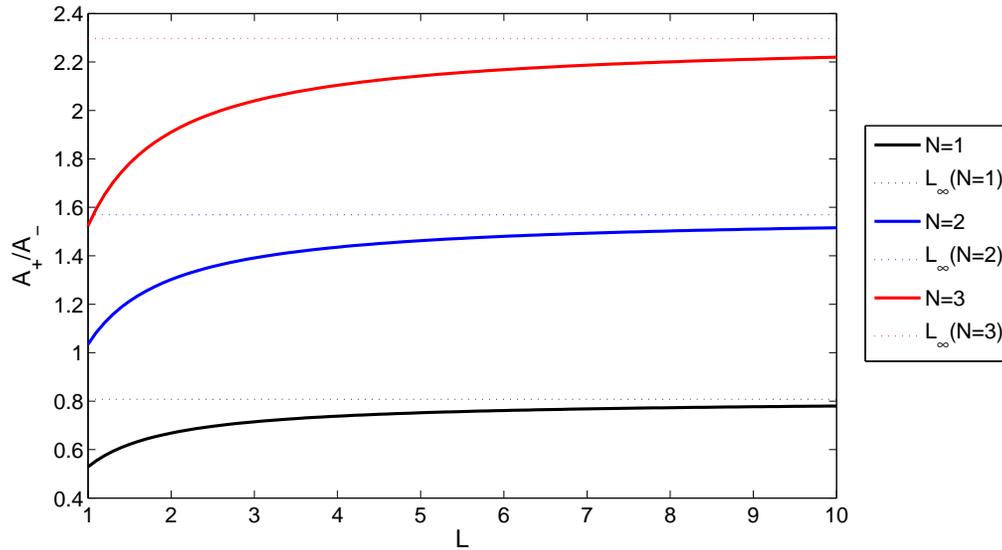


Figura 4.1 Gráficos de A_+/A_- para a competição do tipo anisotrópica uniaxial

Acima tomamos a variável L contínua em \mathbb{R} . Notamos que as curvas dos gráficos assumem valores limites conforme os relatados na tabela 4.1.

ii) Subcaso: Biaxial em $d = 3$

Também podemos colecionar alguns resultados da razão A_+/A_- para o subcaso biaxial em $d = 3$ para um alcance generalizado L . Obtemos por meio de $m_n = 2\delta_{n,L}$ (com $n = 2, \dots, L$) que corresponde à classe de universalidade $(N, d = 3, 0, \dots, 0, m_L = 2)$, e escrevemos $\epsilon_L = 3 - \frac{2}{L}$. Para $L \in [1; 10]$ e $N \in [1; 3]$ em $d = 3$, construímos a tabela 4.1, como

	$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 5$	$L = 6$	$L = 7$	$L = 8$	$L = 9$	$L = 10$
$N = 1$	0,53	0,81	0,90	0,95	0,97	0,99	1,01	1,02	1,02	1,03
$N = 2$	1,03	1,57	1,75	1,84	1,89	1,93	1,95	1,97	1,99	2,00
$N = 3$	1,52	2,30	2,56	2,68	2,76	2,81	2,85	2,88	2,90	2,92

Tabela 4.3 Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de L -ésimo caráter biaxial em $d = 3$.

Em $d = 3$ quando o alcance generalizado é infinito ($L \rightarrow \infty$), o parâmetro perturbativo é dado por $\epsilon_L = 3 - \frac{2}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 3$ para o caso biaxial, e assim obtemos as razões de amplitudes A_+/A_- como

$$\frac{A_+}{A_-} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} N \left[1 + \frac{3(4-N)}{8(N+8)} \ln 2 \right] \quad (4.28)$$

Os valores da tabela 4.1 são os limites superiores da razão de amplitudes A_+/A_- para o caso biaxial de L -ésimo caráter.

	$L \rightarrow \infty$
$N = 1$	1,09
$N = 2$	2,10
$N = 3$	3,07

Tabela 4.4 Tabela com valores das razões de amplitudes A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz genérico de caráter infinito biaxial em $d = 3$.

Avaliamos que os valores limites das razões A_+/A_- do caso biaxial são superiores que os correspondentes (para o mesmo valor de N) do caso uniaxial.

Os valores das razões A_+/A_- para $L = 1$ nas tabelas 4.1 e 4.1 correspondentes para os casos uni e biaxiais, respectivamente, recuperam os valores presentes na literatura

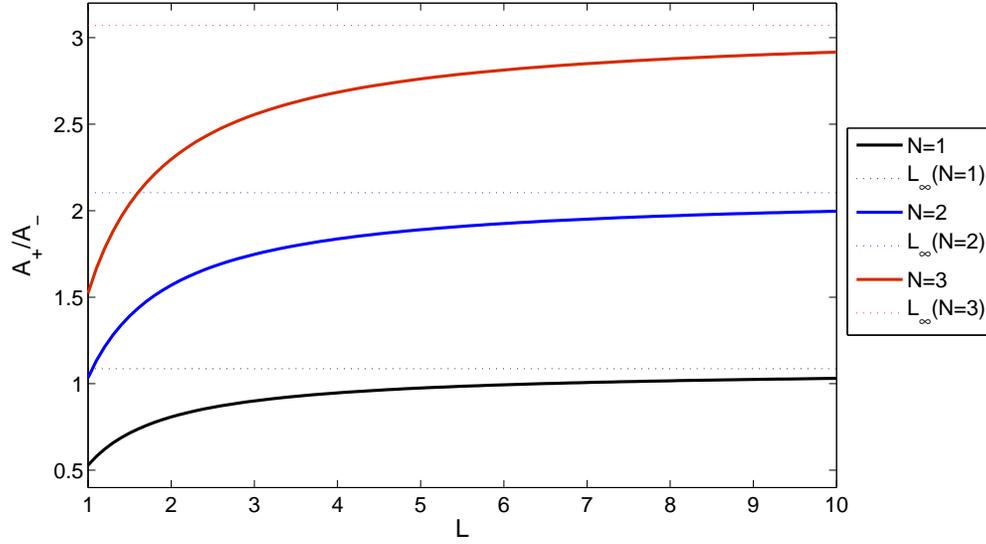


Figura 4.2 Gráficos de A_+/A_- para a competição do tipo anisotrópica biaxial

dos sistemas não-competitivos para o modelo de Ising, XY e Heisenberg ausentes de interações competitivas ao longo das 3 direções.

4.2 CASO ISOTRÓPICO

Similarmente a outras seções, comparando as ações do modelo N -vetorial da teoria $\lambda\Phi^4$ em (2.21) e a do comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter generalizado do caso isotrópico em (2.174), podemos então operar o conjunto das transformações que leva a primeira ação na segunda, através de

$$k^2 \implies (k^2)^n \quad (4.29)$$

$$(k + K)^2 \implies [(k + K)^2]^n \quad (4.30)$$

Essas regras conseguem implementar as regras de Feynman para o caso das competições isotrópicas de caráter generalizado, um aspecto de grande simplicidade, ao compararmos a nossa descrição do sistema não-competitivo com o deste caso.

A partir do potencial renormalizado da teoria $\lambda\Phi^4$, aplicamos as transformações acima e construímos a energia livre correspondente ao comportamento crítico do tipo Lifshitz isotrópico de caráter generalizado por meio de

$$\Gamma_R(y, t) = \frac{1}{2u_n^*} \left(ty + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int d^{m_n} k \left\{ (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{(k^2)^n} \right] + \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{(k^2)^n} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{(k^2)^n} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \right\} + \frac{1}{4} I_{SP_n} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2y}{3} \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] + O(\epsilon_n^2), \quad (4.31)$$

em que definimos o parâmetro de regularização através de $\epsilon_n = 4n - d$.

A integral I_{SP_n} se encontra resolvida por meio da AOG em (B.49), e exatamente em (B.56). Explicitamos a referida integral através de

$$I_{SP_n} = \int d^{m_n} k \frac{1}{(k^2)^n [(k+K)^2]^n} \Big|_{SP_n}. \quad (4.32)$$

O subscrito n na integral acima corresponde a normalização para o comportamento competitivo isotrópico generalizado que ocorre em todo \mathbb{R}^d através do ponto de simetria $SP_n : (K^2)^n = 1$. É claro que é válida a condição de isotropia generalizada $d = m_n$.

A energia livre Γ_{R+} apresenta o vácuo trivial $M = 0$, além do degenerado por meio da condição de minimização:

$$\frac{\partial \Gamma_R(y, t)}{\partial y} \Big|_{\bar{y}(t)} = 0 \implies \bar{y}(t) = u_n^* M^2 = -6t + O(1-loop) \quad (4.33)$$

E também aqui, não é relevante nos cálculos do calor específico, a correção em 1-loop na magnetização espontânea $M \neq 0$.

Na fase simétrica, a magnetização no sistema é nula acima da temperatura crítica. Escrevemos a energia livre $\Gamma_{R+}(t)$ para o vácuo trivial $y = u_n^* M^2 = 0$, por meio de:

$$\Gamma_{R+}(t) = \frac{N}{2} \int d^{m_n} k \left\{ \ln \left[1 + \frac{t}{(k^2)^n} \right] - \frac{t}{(k^2)^n} \right\} + \frac{N}{4} t^2 I_{SP_n} \quad (4.34)$$

No estado de simetria quebrada abaixo da temperatura crítica, a uma magnetização espontânea expressa por meio de $u_n^* M^2 = \bar{y}(t) = -6t + O(1-loop)$ no sistema, denotamos a energia livre $\Gamma_{R-}(t)$ como

$$\Gamma_{R-}(t) = -\frac{3}{2u_n^*} t^2 + \frac{1}{2} \int d^{m_n} k \left\{ \ln \left[1 + \frac{-2t}{(k^2)^n} \right] - \frac{-2t}{(k^2)^n} \right\} + t^2 I_{SP_n} \quad (4.35)$$

O calor específico acima e abaixo da temperatura crítica para o comportamento de Lifshitz isotrópico generalizado vale

$$C_{\pm}(t) = -\Gamma_{R\pm}^{(0,2)}(t) - \frac{\nu_n}{\alpha_n} B_n(u_n^*). \quad (4.36)$$

Em que, ν_n e α_n são os expoentes críticos do comprimento de correlação e do calor específico para a competição isotrópica generalizada. Escrevemos o termo inhomogêneo do GR para o comportamento isotrópico de caráter generalizado por meio de

$$B_n(u_n^*) = -\kappa_n \left. \frac{\partial \Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)}}{\partial \kappa_n} \right|_{\kappa_n^2=1} = -\kappa_n \left. \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \left(-\frac{N}{2} \kappa_n^{-\epsilon_n} I_{SP_n} \right) \right|_{\kappa_n^2=1} \quad (4.37)$$

em que $\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)}$ é a parte de vértice não-renormalizada para o cálculo do calor específico.

O método de aproximação utilizado na descrição do caso anisotrópico, também será aplicado no caso isotrópico. No entanto, este último permite ser resolvido exatamente, e aproveitaremos para efetuar as comparações com o método anterior.

4.2.1 Cálculo com a Aproximação Ortogonal Generalizada

Nesta seção obteremos as amplitudes críticas do calor específico através da aproximação ortogonal generalizada (AOG) desenvolvida em [25] é apresentada no apêndice B no cálculo de algumas integrais. E na seção seguinte, apresentaremos o cálculo exato das amplitudes críticas em *1-loop*.

Os expoentes críticos ν_n do comprimento de correlação e α_n do calor específico para o a competição isotrópica generalizada obtidos por meio da AOG [25] são apresentados como

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{N+2}{4n^2(N+8)} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \quad \text{e}, \quad (4.38)$$

$$\alpha_n = \frac{4-N}{2n(N+8)} \epsilon_n - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4n^2(N+8)^3} \epsilon_n^2 + O(\epsilon_n^3) \quad (4.39)$$

A partir do resultado da integral I_{SP_n} em (B.49) com o emprego da AOG, escrevemos então

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa_n^{-\epsilon_n} I_{SPn} = -\frac{N}{2} \kappa_n^{-\epsilon_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{1}{2n} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \right). \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.37), obtemos

$$B_n(u_n^*) = -\frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{2n} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \right). \quad (4.41)$$

A constante aditiva de renormalização do calor específico presente na equação (4.36) pode então ser escrita na forma:

$$-\frac{\nu_n}{\alpha_n} B_n(u_n^*) = \frac{N(N+8)}{2(4-N)\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \frac{1}{2n} \left[1 + \frac{N+2}{N+8} + \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{(4-N)(N+8)^2} \right] + O(\epsilon_n^2) \right\} \quad (4.42)$$

A constante de acoplamento no ponto fixo para o comportamento isotrópico generalizado por meio da AOG foi calculada em [25], e é dada por

$$u_n^* = \frac{6\epsilon_n}{N+8} \left[1 - \epsilon_n \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{2(9N+42)}{(N+8)^2} \right) + O(\epsilon_n^2) \right]. \quad (4.43)$$

Então, reescrevemos o resultado (4.42) por meio da (4.43) como

$$-\frac{\nu_n}{\alpha_n} B_n(u_n^*) = \frac{3N}{(4-N)u_n^*} + \frac{2N(N+8)}{n(4-N)^2} \quad (4.44)$$

Calor Específico para $T > T_L$

Obtemos a expressão do calor específico na fase paramagnética substituindo as expressões (4.34) da energia livre $\Gamma_{R+}(t)$ e da constante aditiva (4.44) em (4.36) através de

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left(I_{SPn} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^n + t)^2} \right) + \frac{3N}{(4-N)u_n^*} + \frac{2N(N+8)}{n(4-N)^2} \quad (4.45)$$

Usando o resultado de (B.58) na expressão entre parênteses na equação (4.45), obtemos o calor específico através da seguinte lei de potência

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_n} t^{-\alpha_n} \quad \forall n \quad (4.46)$$

observe que o expoente α_n é da $O(\epsilon_n)$ na expressão (4.39). A_+ é a amplitude do calor específico acima da temperatura crítica expressa por meio de

$$A_+ = \frac{N}{4n} \left[1 + \epsilon_n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4-N} + \mathcal{P}_{(N)} \right) + O(\epsilon_n^2) \right], \quad (4.47)$$

em que, definimos a constante

$$\mathcal{P}_{(N)} = \frac{1}{2} - \frac{9N+42}{(N+8)^2} - \frac{4-N}{N+8} - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{2(4-N)(N+8)^2}, \quad (4.48)$$

que é comum nas amplitudes acima e abaixo da temperatura crítica, e que desaparece no cálculo da razão de amplitudes. Observamos que $\mathcal{P}_{(N)} = \mathcal{E}_{(N, m_L=0)}$, onde $\mathcal{E}_{(N, m_L)}$ é expressa em (4.21).

Calor Específico para $T < T_L$

Substituindo as expressões (4.35) da energia livre $\Gamma_{R-}(t)$ e da constante aditiva (4.44) em (4.36), obtemos o calor específico $C_-(t)$ através da expressão

$$C_-(t) = \frac{12}{(4-N)u_n^*} - 2 \left(I_{SPn} - \int d^{m_n} k \frac{1}{((k^2)^n - 2t)^2} \right) + \frac{2N(N+8)}{n(4-N)^2} \quad (4.49)$$

Usando o resultado (B.58) na integral expressa na equação acima, escrevemos a lei de potência em $-t$ para o calor específico abaixo da temperatura crítica

$$C_-(t) = \frac{A_-}{\alpha_n} (-t)^{-\alpha_n} \quad \forall n \quad (4.50)$$

em que o expoente α_n é da $O(\epsilon_n)$ na expressão (4.39). A_- é a amplitude do calor específico abaixo da temperatura crítica expressa por meio de

$$A_- = \frac{1}{2} \left[1 + \epsilon_n \frac{1}{2} \left(\frac{N}{4-N} - \frac{4-N}{2(N+8)} \ln 2 + \mathcal{P}_{(N)} \right) + O(\epsilon_n^2) \right] \quad (4.51)$$

onde, $\mathcal{P}_{(N)}$ é expresso em (4.48).

Razão de Amplitudes do Calor Específico

A razão universal das amplitudes do calor específico usando (4.47) e (4.51) pode ser facilmente calculada, resultando na expressão

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{n} \right)} \quad (4.52)$$

aqui expressamos em 1-*loop* o expoente $\alpha_n = \epsilon_n \frac{4 - N}{2n(N + 8)} + O(\epsilon_n^2)$.

Note que a expressão dessa razão é similar a correspondente para o caso anisotrópico de caráter generalizado encontrado em (4.26). Mas, o expoente e o parâmetro ϵ_n são diferentes da expressão encontrada no caso anisotrópico

A competição isotrópica de n -ésimo caráter possui a dimensão crítica $d_c = 4n = 8, 12, 16, \dots$ para $n > 2$ (o valor de $n=1$ recupera o cenário livre de competições) que se afasta rapidamente de $d = 3$, o que limita, por exemplo, a aplicação da expansão em ϵ_n para valores de $\epsilon_n = 5, 8, 13, \dots$

Na próxima seção iremos obter a razão A_+/A_- para a competição isotrópica generalizada através do cálculo exato e iremos comparar com o resultado obtido por meio da AOG.

4.2.2 Cálculo Exato

O cálculo exato da razão A_+/A_- para o comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter arbitrário do caso isotrópico em 1-*loop* necessita do expoente do calor específico α_n e da constante de acoplamento u_n^* em 2-*loops*. O cálculo exato dos expoentes críticos passam a diferir da AOG na aproximação de 2-*loops* [25]. Então, é importante verificarmos o efeito dessas diferenças na razão de amplitudes do calor específico. E também, essa análise é inédita na literatura e seus resultados tem aspectos importantes.

Os expoentes críticos do comprimento de correlação ν_n e do calor específico α_n para o caso isotrópico generalizado com o cálculo exato [25] são expressos por meio de

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{N + 2}{4n^2(N + 8)} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \quad \text{e}, \quad (4.53)$$

$$\alpha_n = \frac{4-N}{2n(N+8)} \epsilon_n - \frac{N+2}{4n^2(N+8)^3} \epsilon_n^2 \left[(-1)^n \frac{4n \Gamma^2(2n)(N-4)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} + (N-4)(N+8) + 4n D(n)(14N+40) \right] + O(\epsilon_n^3) \quad (4.54)$$

onde $D(n) \equiv \frac{1}{2} \psi(2n) - \psi(n) + \frac{1}{2} \psi(1)$, e a função especial digama pode ser escrita em termos da função gama Γ como $\psi(n) = \frac{d}{dn} \ln \Gamma(n)$.

A partir do cálculo exato da integral I_{SP_n} em (B.49), obtemos

$$\Gamma_{\text{bare}}^{(0,2)} = -\frac{N}{2} \kappa_n^{-\epsilon_n} I_{SP_n} = \frac{N}{2} \kappa_n^{-\epsilon_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + D(n) \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \right) \quad (4.55)$$

Portanto (4.37) pode ser escrita como

$$B_n(u_n^*) = -\frac{N}{2} \left(1 + D(n) \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \right) \quad (4.56)$$

Expressamos a constante aditiva de renormalização do calor específico presente na equação (4.36) na forma

$$-\frac{\nu_n}{\alpha_n} B_n(u_n^*) = \frac{N(N+8)}{2(4-N)\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[D(n) - \frac{2N+4}{(N+8)^2} \left((-1)^n \frac{\Gamma^2(2n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} + D(n) \frac{14N+40}{N-4} \right) \right] + O(\epsilon_n^2) \right\} \quad (4.57)$$

A constante de acoplamento no ponto fixo para o comportamento isotrópico generalizado foi calculada exatamente em [25], e vale

$$u_n^* = \frac{6\epsilon_n}{N+8} \left\{ 1 - \epsilon_n \left[(-1)^n \frac{\Gamma^2(2n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} \frac{2N+4}{(N+8)^2} + D(n) \left(\frac{20N+88}{(N+8)^2} - 1 \right) \right] + O(\epsilon_n^2) \right\} \quad (4.58)$$

Usando (4.58), podemos reescrever (4.57) como

$$-\frac{\nu_n}{\alpha_n} B_n(u_n^*) = \frac{3N}{(4-N)u_n^*} + D(n) \frac{4N(N+8)}{(4-N)^2} \quad (4.59)$$

Calor Específico para $T > T_L$

Obtemos a expressão do calor específico na fase paramagnética substituindo as expressões (4.34) da energia livre $\Gamma_{R+}(t)$ e da constante aditiva (4.58) em (4.36) por meio de

$$C_+(t) = -\frac{N}{2} \left(I_{SPn} - \int d^{m_n} k \frac{1}{((k^2)^n + t)^2} \right) + \frac{3N}{(4-N)u_n^*} - D(n) \frac{4N(N+8)}{(4-N)^2} \quad (4.60)$$

Usando o resultado de (B.58) na integral entre parênteses na equação (4.60), obtemos a lei de potência em t para o calor específico através de

$$C_+(t) = \frac{A_+}{\alpha_n} t^{-\alpha_n} \quad \forall n \quad (4.61)$$

o expoente α_n é da $O(\epsilon_n)$ na expressão (4.54). A amplitude do calor específico acima da temperatura crítica é expressa como

$$A_+ = \frac{N}{4n} \left[1 - \epsilon_n \left(D(n) \frac{8}{4-N} + \mathcal{Q}_{(N,n)} \right) + O(\epsilon_n^2) \right] \quad (4.62)$$

onde, em que, definimos a seguinte constante

$$\mathcal{Q}_{(N,n)} = \frac{4(N+2)}{(N+8)} \frac{\Gamma^2(2n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} - D(n) \left(1 + \frac{4-N}{N+8} - \frac{20N+88}{(N+8)^2} \right) + \frac{N-1}{n(N+8)} \quad (4.63)$$

que é comum nas amplitudes acima e abaixo da temperatura crítica, e será cancelada no cálculo da razão de amplitudes.

Calor Específico para $T < T_L$

Substituindo as expressões (4.35) da energia livre $\Gamma_{R-}(t)$ e da constante aditiva de (4.59) em (4.36) obtemos o calor específico $C_-(t)$ em qualquer uma das fases ordenadas por meio de

$$C_-(t) = \frac{12}{(4-N)u_n^*} - 2 \left(I_{SPn} - \int d^{m_n} k \frac{1}{((k^2)^n - 2t)^2} \right) - D(n) \frac{4N(N+8)}{(4-N)^2} \quad (4.64)$$

Escrevemos a lei de potência em $-t$ para o calor específico abaixo da temperatura crítica, usando o resultado (B.58) na integral entre parênteses na equação acima por meio de

$$C_-(t) = \frac{A_-}{\alpha_n} (-t)^{-\alpha_n} \quad \forall n \quad (4.65)$$

onde, o expoente α_n é da $O(\epsilon_n)$ na expressão (4.54). E A_- é a amplitude do calor específico abaixo da temperatura crítica expressa como

$$A_- = \frac{1}{n} \left[1 - \epsilon_n \left(D(n) \frac{2N}{(4-N)} + \frac{4-N}{2n(N+8)} \ln 2 + \mathcal{Q}_{(N,n)} \right) + O(\epsilon_n^2) \right], \quad (4.66)$$

onde, a constante $\mathcal{Q}_{(N,n)}$ é expressa em (4.63).

Razão de Amplitudes do Calor Específico

Dividindo (4.62) por (4.66), obtemos a razão universal das amplitudes do calor específico para a competição isotrópica generalizada na forma

$$\boxed{\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^{\alpha_n} \left(1 + 2 D(n) \epsilon_n \right)} \quad (4.67)$$

onde o expoente do calor específico em 1-loop $\alpha_n = \epsilon_n \frac{4-N}{2n(N+8)} + O(\epsilon_n^2)$ e o parâmetro de regularização através de $\epsilon_n = 4n - d$. Note que, $2 D(n) = \psi(2n) - 2\psi(n) + \psi(1)$.

A razão exata (4.67) coincide com a razão aproximada (4.52) quando fazemos $n = 1$. E assim, recuperamos os resultados para os modelos N -vetoriais sem competição através de ($\epsilon_n \rightarrow \epsilon = 4 - d$ e $\alpha_n \rightarrow \alpha$)

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{N}{4} 2^\alpha (1 + \epsilon) \quad (4.68)$$

Obtemos os resultados para classe de universalidade ($N, d = 3$) dos sistemas sem competições por meio de $\epsilon = 1$.

A partir do que foi antecipado na página 74, a inspeção dos valores numéricos da razão A_+/A_- em $d = 3, 7, 11, 15, \dots$ são os valores apropriados em todos estes valores com $\epsilon_n = 1$. Outros métodos de regularização podem ser utilizados para estimar tais resultados no futuro.

Obtemos o desvio relativo Δ_{relativo} dos dois métodos por meio de

$$\frac{(A_+/A_-)_{\text{AOG}}}{(A_+/A_-)_{\text{exato}}} = 1 + \Delta_{\text{relativo}} \quad (4.69)$$

Substituindo (4.52) e (4.68) na expressão acima, explicitamos o desvio relativo por meio de

$$\Delta_{\text{relativo}} = \epsilon_n \left(\frac{1}{n} - 2D(n) \right) + O(\epsilon_n^2) \quad (4.70)$$

Quando realizamos $\epsilon_n = 1$ em (4.70), escrevemos

$$\Delta_{\text{relativo}} = \frac{1}{n} - \left(\psi(2n) - \psi(1) \right) + 2 \left(\psi(n) - \psi(1) \right) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n+i)} \quad (4.71)$$

na última igualdade, usamos a seguinte identidade matemática

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \quad \text{onde,} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.72)$$

Através da fórmula assintótica para $\psi(n)$, com $n \gg 1$ [53]

$$\psi(n) = \ln n - \frac{1}{2n} + O(1/n^2) \quad (4.73)$$

expressamos o desvio relativo para valores altos de n por meio de

$$\Delta_{\text{relativo}} = \ln n - \left(\ln 2 + \psi(1) \right) - \frac{1}{4n} + O(1/n^2) \sim \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (4.74)$$

Vemos que o desvio relativo diverge para os valores altos do caráter das interações competitivas isotrópicas. No entanto, os desvios relativos para os expoentes críticos que se manifestam a partir da $O(\epsilon_n^2)$ são pequenos [25] e vão a zero no limite $n \rightarrow \infty$. Representamos os gráficos de A_+/A_- versus n pelos dois métodos para compará-los, para $N = 1, 2, 3$ nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5.

Observamos que as duas curvas dos gráficos da figura 4.3 partem de $A_+/A_- (n = 1) = 0,53$ e divergem rapidamente para $n > 1$. No limite $n \rightarrow \infty$, a curva calculada por meio da AOG assintota para 0,25. Ao passo que, a curva do cálculo exato diverge em valores negativos da razão.

Aqui, as duas curvas dos gráficos 4.4 partem de $A_+/A_- (n = 1) = 1,03$ e logo divergem para $n > 1$. Vemos que o cálculo por meio da AOG tende ao valor 0,5 para valores

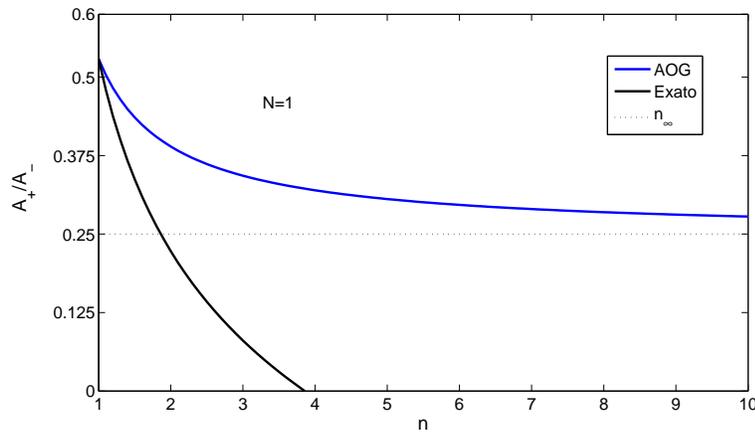


Figura 4.3 Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 1$

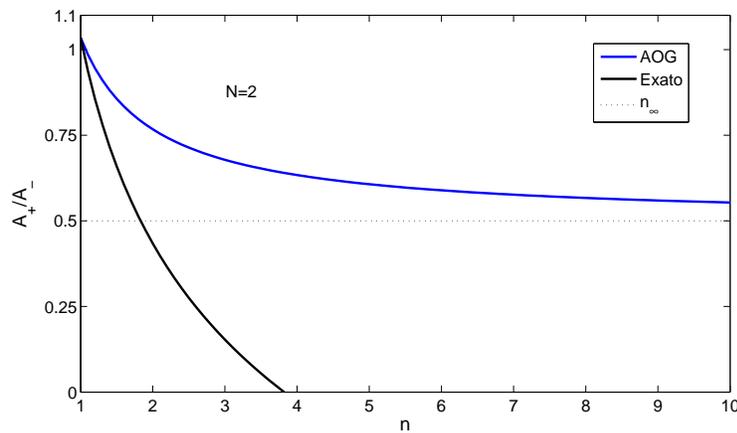


Figura 4.4 Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 2$

$n \rightarrow \infty$. E similarmente ao gráfico anterior, o cálculo exato diverge logaritmicamente em n .

As duas curvas dos gráficos na figura 4.5 iniciam-se juntas em $A_+/A_- (n = 1) = 1,52$ e distanciam-se a partir de $n > 1$. A curva calculada através da AOG tende para o valor 0,75. E a curva calculada exatamente intercepta o eixo da abscissa.

As curvas correspondentes ao emprego da AOG assintotam em $N/4$, que também é o valor para o qual as razões assumem se estivermos calculando sobre a dimensão crítica ($d = d_c = 4n$). Ao passo que, as curvas calculadas exatamente intercepta o eixo horizontal e passa a fornecer valores negativos para a razão A_+/A_- .

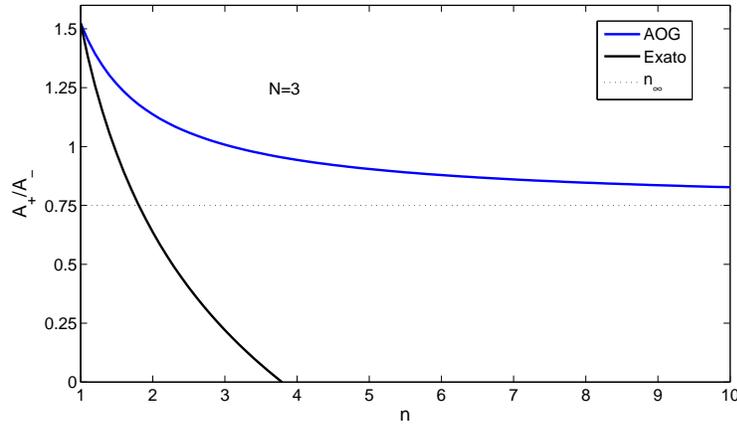


Figura 4.5 Gráfico de A_+/A_- para a competição isotrópica para $N = 3$

As razões de amplitudes de outras grandezas termodinâmicas em 1-loop como a susceptibilidade [51] são calculadas em termos dos expoentes críticos em $O(\epsilon_n)$, os quais são os mesmos em ambos os métodos. Quando fixamos ϵ_n e efetuamos $n \rightarrow \infty$, essas amplitudes e o conjunto dos expoentes críticos em $O(\epsilon_n^2)$ [25] recuperam os valores de campo médio. No entanto, o mesmo não ocorre com a razão de amplitudes do calor específico calculada exatamente, que diverge ($A_+/A_- \rightarrow -\infty$) quando fazemos $\epsilon_n = 1$ e $n \rightarrow \infty$.

O cálculo da razão A_+/A_- , que se inicia desde a ordem de 1-loop, exige, particularmente, a constante de acoplamento no ponto fixo em 2-loops, cuja ordem ocorre o desvio entre os dois métodos.

Decorrente disso, observamos que a razão A_+/A_- em 1-loop calculada exatamente assume valores negativos para $n \geq \bar{n} = 4$, quando fazemos $\epsilon_n = 1$. A inversão de sinal dessa razão em ordens superiores em loops pode permanecer, indicando uma limitação na dimensão crítica do sistema.

CONCLUSÃO

Neste trabalho encontramos as razões de amplitudes críticas do calor específico para alguns tipos de sistemas competitivos através da abordagem do grupo de renormalização no espaço dos momentos. Verificamos que a abordagem dos comportamentos competitivos dos casos anisotrópicos e isotrópicos têm que ser tratadas separadamente. Nesta tese, todos os nossos resultados são inéditos e consistentes com outros trabalhos publicados nos últimos anos dentro deste tema.

O caso isotrópico foi estudado pela primeira vez neste nosso trabalho, de modo que sistemas físicos ainda podem ser propostos como representantes desses comportamentos críticos e esperamos que o nosso trabalho sirva de inspiração para uma possível explicação destes efeitos em novos materiais. A seguir descrevemos um breve sumário do nosso esforço em determinar as amplitudes do calor específico para sistemas competitivos genéricos.

No terceiro capítulo, abordamos o comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial e obtivemos as expressões das razões de amplitudes do caso anisotrópico (por meio da aproximação ortogonal) descritas pela classe de universalidade do tipo (N, d, m) e destacamos os valores numéricos dessas razões em $d = 3$ para o número $N = 1, 2$ e 3 de componentes do parâmetro ordem e uma dimensionalidade $m = 0, 1$ e 2 do subespaço competitivo de interações até segundos vizinhos. Os valores de $m = 0$ recuperam os valores correspondentes aos sistemas livres de competição já encontrados na literatura (ver referência [30]) para os modelos de Ising, XY e Heisenberg. Quando realizamos $N = 1$, $d = 3$ e $m = 1$ a razão de amplitudes do calor específico recai na classe de universalidade tratada na referência [40], que apresenta um desvio relativo de $3,1\%$ se comparado com o valor experimental do composto MnP [39] que possui as suas propriedades críticas descritas pelo modelo ANNNI em torno do PL [18].

Na literatura, outras substâncias são apontadas por realizarem o ponto de Lifshitz, no entanto, não são acompanhadas de valores experimentais para as razões de amplitudes. Os nossos resultados estão de acordo com o exemplar do modelo ANNNI e predizemos os resultados para as outras classes de universalidade.

A razão de amplitudes no caso isotrópico do comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial, que é apresentado com uma classe de universalidade $(N, d = m)$, é calculado

por meio da aproximação ortogonal a exemplo do caso anisotrópico e também é simples o suficiente para ser calculado exatamente. O desvio apreciável entre as duas abordagens em $1-loop$ decorrem da contribuição em $O(\epsilon_L^2)$ da constante de acoplamento, que indica uma limitação do método aproximativo no cálculo das razões A_+/A_- para o caso isotrópico. Ao passo que os expoentes críticos [25] e a razão da susceptibilidade [51] apresentam boa concordância entre os dois métodos de cálculo.

No quarto capítulo, obtemos as razões de amplitudes do calor específico para o comportamento crítico do tipo Lifshitz de caráter genérico para os casos anisotrópico e isotrópico tratados separadamente via argumentos de grupo de renormalização no espaço dos momentos. O caso anisotrópico possui uma classe de universalidade do tipo (N, d, m_2, \dots, m_L) para a qual apresentamos (por meio da aproximação ortogonal generalizada) a expressão da razão A_+/A_- para um caráter de L -ésima ordem e N qualquer. Destacamos a realização em $d = 3$ com resultados para as competições uniaxiais (ou seja, $m_n = \delta_{n,L}$) e biaxiais (isto é, $m_n = 2\delta_{n,L}$) com $N = 1, 2$ e 3 . Por uma redução da classe de universalidade por meio de $m_3 = m_4 = \dots = 0$ obtemos os resultados correspondentes ao comportamento crítico do tipo Lifshitz m -axial. E também fazendo $m_2 = 0$ recuperamos os resultados para sistemas livres de competições.

A razão de amplitudes A_+/A_- do caso isotrópico das interações competitivas de n -ésimo caráter são calculadas por meio da aproximação ortogonal generalizada como foi analisado o caso anterior. Mas, o caso isotrópico com uma classe de universalidade $(N, d = m_n)$ possui uma flexibilidade algébrica que permitiu realizar os resultados exatos para as razões de amplitudes do calor específico. Quando comparamos os dois métodos, observamos um desvio crescente em n , o que indica claramente uma limitação no uso da AOG nas razões de amplitudes do calor específico do caso isotrópico, ao passo que nos expoentes críticos e em outras razões de amplitudes o mesmo não acontece.

Graficamente observamos que a razão de amplitudes do calor específico A_+/A_- para o caso isotrópico de n -ésimo caráter assume valores negativos para $n \geq \bar{n} = 4$ quando fazemos $\epsilon_n = 1$, sinalizando uma instabilidade termodinâmica nesse limite.

Para valores de $n \gg 1$ e $\epsilon_n = 1$ os expoentes críticos do caso isotrópico generalizado [25] em ambos os métodos recuperam os valores em campo médio assintoticamente, ao passo que a razão de amplitudes do calor específico exato diverge com

$$\frac{A_+}{A_-} \sim -\frac{N}{4} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty. \quad (5.1)$$

A investigação em *loops* maiores podem ser realizadas para a verificação da mudança de sinal da razão A_+/A_- para o caso isotrópico de n -ésimo caráter, o que poderia indi-

car a independência desse efeito para ordens superiores de perturbação no parâmetro de regularização.

Uma das perspectivas desse trabalho é a obtenção das razões de amplitudes em *2-loops*, o que exigiria para o calor específico uma constante de acoplamento em *3-loops*.

TRANSFORMAÇÃO DE HUBBARD-STRATONOVICH

Agora iremos encontrar a ação funcional $S[\phi]$ ou energia livre de Ginzburg-Landau do modelo N -vetorial. Consideremos a energia para as interações entre os primeiros sítios vizinhos de spin $\mathbf{s}_l \in S_N$

$$E\{\mathbf{s}_l\} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle l,l'\rangle} J_{l,l'} \mathbf{s}_l \cdot \mathbf{s}_{l'} - \sum_l \mathbf{h}_l \cdot \mathbf{s}_l. \quad (\text{A.1})$$

No limite que o espaçamento a da rede é desprezível ($a \rightarrow 0$), obtemos uma descrição para a distribuição contínua dos spins no espaço operando

$$\sum_l \rightarrow a^{-d} \int d^d x \quad \text{e} \quad J_{l,l'} \rightarrow J(x, x') = J(x) a^d \delta^d(x - x'). \quad (\text{A.2})$$

Os fatores de a^{-d} e a^d acima foram introduzidos por análise dimensional.

Então, a energia do modelo N -vetorial para as interações entre spins vetoriais $\mathbf{s}(x)$ se expressa por¹

$$E\{\mathbf{s}(x)\} = -\frac{1}{2}(\mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{s}) - (\mathbf{s}, \mathbf{h}). \quad (\text{A.3})$$

Agora podemos escrever a função partição para o modelo em descrição

$$Z[\mathbf{H}] = \text{Tr } w\{\mathbf{s}\} \equiv \text{Tr} \exp \left[-\beta E\{\mathbf{s}(x)\} \right] = \text{Tr} \exp \left[\frac{1}{2}(\mathbf{s}, \mathbf{K}\mathbf{s}) + (\mathbf{s}, \mathbf{H}) \right] \quad (\text{A.4})$$

Acima, fazemos $\mathbf{K}(x) \equiv \beta \mathbf{J}(x)$ e $\beta \mathbf{h}(x) \equiv \mathbf{H}(x)$. A expressão $\text{Tr } w\{\mathbf{s}\}$ soma o peso de Boltzmann $w\{\mathbf{s}\}$ sobre todas as configurações de spin efetuando

$$\begin{aligned} \text{Tr } w\{\mathbf{s}\} &= \prod_l \sum_{\{\mathbf{s}_l\}} w\{\mathbf{s}\} = \exp \left[\sum_l \ln \left(\sum_{\{\mathbf{s}_l\}} w\{\mathbf{s}\} \right) \right] \\ &\longrightarrow \exp \left[a^{-d} \int d^d x \ln \left(\int_{S_N} d\Omega_N w\{\mathbf{s}\} \right) \right]. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

¹Representamos o produto interno de $\mathbf{s}(x)$ por $\mathbf{s}'(x)$ como $(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \equiv \sum_{a=1}^N \int d^d x s^a(x) s^{a'}(x)$.

Para escrever a função partição em termos da representação da integral de trajetória, devemos considerar a identidade gaussiana generalizada no espaço de dimensão infinita expressa por meio de

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, \mathbf{K}^{-1} \phi) + (\mathbf{s}, \phi) \right] = (\det \mathbf{K})^{1/2} \exp \left[(\mathbf{s}, \mathbf{K}\mathbf{s}) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Usando a identidade (A.6) em (A.4), podemos escrever

$$Z[\mathbf{H}] = (\det \mathbf{K})^{-1/2} \text{Tr} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, \mathbf{K}^{-1} \phi) + (\mathbf{s}, \phi + \mathbf{H}) \right]. \quad (\text{A.7})$$

O resultado obtido acima corresponde a *transformação de Hubbard-Stratonovich* para a representação da função de partição em termos de campos contínuos. A variável de campo $\phi(x)$ é identificada com o campo, ou parâmetro ordem do modelo. Realizando a translação $\phi(x) \rightarrow \phi(x) - \mathbf{H}(x)$ na expressão acima, obtemos

$$Z[\mathbf{H}] = (\det \mathbf{K})^{-1/2} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} ((\phi - \mathbf{H}), \mathbf{K}^{-1}(\phi - \mathbf{H})) \right] \text{Tr} e^{(\mathbf{s}, \phi)}. \quad (\text{A.8})$$

O traço da expressão acima pode ser desenvolvido usando (A.5) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{(\mathbf{s}, \phi)} &= \exp \left[a^{-d} \int d^d x \ln \left(\int_{S_N} d\Omega_N e^{(\mathbf{s}, \phi)} \right) \right] \\ &\equiv \exp \left[a^{-d} \int d^d x \left(\mathcal{U}(\phi) + \ln \int_{S_N} d\Omega_N \right) \right], \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{U}(\phi)$ é denominado de densidade de potencial do campo ϕ . Desenvolvendo a expressão

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{U}(\phi)} \int_{S_N} d\Omega_N &= \int_{S_N} d\Omega_N e^{(\mathbf{s}, \phi)} = \int_{S_N} d\Omega_N e^{|\phi| \cos \theta} = \int_{S_N} d\Omega_N \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{S_N} d\Omega_N \cos^n \theta \right) |\phi|^n. \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

onde o ângulo azimutal $\theta \in [0, \pi]$ é formado entre o spin \mathbf{s} e o campo ϕ na direção axial do sistema de coordenadas hiperesféricas.

Consideremos as seguintes identidades matemáticas

$$\int_{S_N} d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \equiv S_N \quad (\text{área da hipersuperfície } N\text{-dimensional}) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{n!} \int_{S_N} d\Omega_N \cos^n \theta = S_N (1 + (-1)^n) \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2^{n+1} \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(\frac{N+n}{2})} \quad (\text{A.12})$$

onde a última se anula para os valores ímpares de n .

Retomamos a (A.10), escrevendo

$$\mathcal{U}(\phi) = \ln \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2^{2n} \Gamma(n+1) \Gamma(\frac{N}{2} + n)} (\phi^2)^n \right) = \frac{1}{2N} \phi^2 + \frac{-1}{4N^2(N+2)} (\phi^2)^2 + \dots \quad (\text{A.13})$$

que se desenvolve numa expansão em potências de ϕ^2 e são invariantes de $O(N)$.

Operando $\phi(x) \rightarrow (\mathbf{K}\phi)(x) \simeq \mathbf{K}_0 \left(1 - \frac{a^2}{2} \nabla^2 \right) \phi(x)$ e $\mathcal{D}\phi \rightarrow (\det \mathbf{K}) \mathcal{D}\phi$, reescrevemos a função partição através de

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{H}] &= A \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, \mathbf{K}\phi) + a^{-d} \int d^d x \mathcal{U}(\mathbf{K}\phi) + (\mathbf{H}, \phi) \right] \\ &= A \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\int d^d x \mathcal{L}(\phi(x)) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

em que, denotamos a constante multiplicativa por meio de

$$A = S_N (\det \mathbf{K})^{1/2} \exp \left[-(\mathbf{H}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}) + a^{-d} \int d^d x \right]. \quad (\text{A.15})$$

Portanto, conseguimos escrever a ação por meio de

$$\begin{aligned} S[\phi] &= -a^{-d} \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \phi(x) \cdot \mathbf{K}_0 \left[\left(1 - \frac{\mathbf{K}_0}{N} \right) + \left(\frac{\mathbf{K}_0}{N} - \frac{1}{2} \right) a^2 \nabla^2 \right] \phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{K}_0)^4}{4N^2(N+2)} (\phi^2(x))^2 - \mathbf{H}(x) \cdot \phi(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Acima, fizemos $((\mathbf{K}\phi)^2)^2 \cong (\mathbf{K}_0)^4(\phi^2)^2$ e ignoramos os demais termos de potência superior.

Estudando o comportamento próximo a

$$1 - \frac{\mathbf{K}_0}{N} = 0, \quad \mathbf{K}_0 \equiv \gamma\beta\mathbf{J}_0 \quad (\gamma \ll 1) \quad \therefore \quad T_0 = N\gamma\mathbf{J}_0. \quad (\text{A.17})$$

definimos o parâmetro massivo $\mu^2 \equiv \frac{2}{a^2} \frac{T - T_0}{T} \propto \frac{\delta T}{T}$, escrevemos

$$1 - \frac{\mathbf{K}_0}{N} = \mu^2 + O((\delta T)^2), \quad \frac{\mathbf{K}_0}{N} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + O(\delta T) \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_0 = N + O(\delta T). \quad (\text{A.18})$$

E com o par das transformações abaixo

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{N}} a^{\frac{d}{2}-1} \phi(x) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{N}{2}} a^{1-\frac{d}{2}} \mathbf{H}(x) \quad (\text{A.19})$$

os campos $\phi(x)$ e $\mathbf{H}(x)$ adquirem dimensões canônicas $[\phi] = L^{\frac{d}{2}-1}$ e $[\mathbf{H}] = L^{1-\frac{d}{2}}$, respectivamente.

Reescrevemos a lagrangiana pela energia livre de Ginzburg-Landau através de

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^2)^2 - \mathbf{H} \cdot \phi. \quad (\text{A.20})$$

E $\lambda \equiv \frac{4!}{N+2} a^{-(4-d)}$ é a constante de acoplamento perturbativa da teoria, que possui a dimensão canônica $[\lambda] = L^{d-4}$. O valor de d para a qual λ torna-se adimensional é chamado de dimensão crítica da teoria $d_c = 4$. O parâmetro massivo μ^2 tem dimensão canônica $[\mu^2] = L^{-2}$.

Finalmente, escrevemos a função partição termodinâmica $Z[\mathbf{H}]$ a menos de um fator multiplicativo A

$$Z[\mathbf{H}] = A \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-S[\phi, \mathbf{H}] \right] = A \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \mathbf{H}(x)) \right] \quad (\text{A.21})$$

Que corresponde a construção de um gerador funcional de uma teoria quântica de campos *Euclidiana*.

CÁLCULO DE ALGUMAS INTEGRAIS

Calcularemos para o comportamento crítico do tipo Lifshitz m axial e o modelo CECI nos casos anisotrópico e isotrópico, que serão desenvolvidos na segunda e terceira seções deste apêndice. Mas, na primeira seção iremos resolver duas identidades matemáticas que foram exigidas no apêndice anterior, e outra que será importante nas seções subseqüentes.

B.1 IDENTIDADES MATEMÁTICAS

Nesta seção iremos agora obter as identidades matemáticas (A.11) e (A.12), que exigem uma integração explícita nas coordenadas hiperesféricas.

i) Agora consideremos o seguinte modelo de integral, que será de grande importância nos cálculos subseqüentes

$$I(m^2; D, n, \beta) = \int d^D k \frac{1}{((k^2)^n + m^2)^\beta} \quad (\text{B.1})$$

Fazendo $k_i \rightarrow (m^2)^{1/2n} k_i$ ou seja, $d^D k \rightarrow (m^2)^{D/2n} d^D k$ e $(k^2)^n \rightarrow m^2 (k^2)^n$, reescremos a integral acima por

$$I(m^2; D, n, \beta) = (m^2)^{D/2n-\beta} \int d^D k \frac{1}{((k^2)^n + 1)^\beta} = (m^2)^{D/2n-\beta} S_D \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^{2n} + 1)^\beta} \quad (\text{B.2})$$

onde, fizemos $d^D k = d\Omega_D dk k^{D-1}$.

Operando em (B.2) a mudança de variável $k^n = q$ e $dk k^{D-1} = \frac{1}{n} dq q^{D/n-1}$. Obtemos

$$I(m^2; D, n, \beta) = (m^2)^{D/2n-\beta} S_D \frac{1}{n} \int_0^\infty dq \frac{q^{D/n-1}}{(q^2 + 1)^\beta}. \quad (\text{B.3})$$

Conseguimos expressar o denominador do integrando acima na potência quadrática da variável de integração. E agora efetuando a seguinte mudança de variável $1 + q^2 = \frac{1}{t}$ (com $0 < t < 1$) em (B.3), escrevemos

$$I(m^2; D, n, \beta) = (m^2)^{D/2n-\beta} S_D \frac{1}{2n} \int_0^1 dt t^{(\beta-D/2n)-1} (1-t)^{D/2n-1}. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo $z = \beta - D/2n$ e $\xi = D/2n$ na representação integral da função beta expressa abaixo

$$B(z, \xi) = \int_0^1 dt t^{z-1} (1-t)^{\xi-1} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)}, \quad (\text{B.5})$$

Então substituímos na equação B.4 e conseguimos

$$I(m^2; D, n, \beta) = \int d^D k \frac{1}{((k^2)^n + m^2)^\beta} = S_D \frac{1}{2n} \frac{\Gamma(D/2n)\Gamma(\beta - D/2n)}{\Gamma(\beta)} (m^2)^{(D/2n-\beta)}. \quad (\text{B.6})$$

Observe que (B.6) converge para os valores de $D < 2n\beta$ quando $m^2 \neq 0$. Este resultado será utilizada nas integrais de Feynman das próximas seções.

ii) Neste final de seção, consideremos a integral seguinte que será exigida nos cálculos das integrais de Feynman com momentos externos

$$\int d^D k \frac{1}{[(k^2)^n + 2a(k^2)^{n/2} + m^2]^\beta}. \quad (\text{B.7})$$

Completando o quadrado no denominador da integral acima, isto é

$$(k^2)^n + 2a(k^2)^{n/2} + m^2 = [(k^2)^{n/2} + a]^2 + (m^2 - a^2). \quad (\text{B.8})$$

Então escrevemos a integral de (B.7) por meio de

$$\int d^D k \frac{1}{[(k^2)^n + 2a(k^2)^{n/2} + m^2]^\beta} = S_D \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{1}{[(k^n + a)^2 + (m^2 - a^2)]^\beta}. \quad (\text{B.9})$$

E em seguida, efetuamos as transformações

$$k^n \rightarrow k^n - a \quad \therefore \quad dk k^{D-1} \rightarrow dk k^{D-1} \left(1 - \frac{a}{k^n}\right)^{\frac{D}{n}-1}. \quad (\text{B.10})$$

Então reescrevemos (B.9) através de

$$\begin{aligned}
\int d^D k \frac{1}{[(k^2)^n + 2a(k^2)^{n/2} + m^2]^\beta} &= S_D \int_{a^{1/n}}^{\infty} dk k^{D-1} \left(1 - \frac{a}{k^n}\right)^{\frac{D}{n}-1} \frac{1}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\beta} \\
&= S_D \int_0^{\infty} dk k^{D-1} \frac{1}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\beta} \\
+ \left\{ S_D \int_0^{\infty} dk k^{D-1} \left[\left(1 - \frac{a}{k^n}\right)^{\frac{D}{n}-1} - 1 \right] - S_D \int_0^{a^{1/n}} dk k^{D-1} \left(1 - \frac{a}{k^n}\right) \right\} &\frac{1}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\beta} \\
&= \int d^D k \frac{1}{[(k^2)^n + (m^2 - a^2)]^\beta} + \text{correções.}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

A linha que encerra a equação (B.11) expressa um termo líder seguido da correção. Nela usamos a identidade (B.6), e obtemos

$$\int d^D k \frac{1}{[(k^2)^n + 2a(k^2)^{n/2} + m^2]^\beta} \cong S_D \frac{1}{2n} \frac{\Gamma(D/2n)\Gamma(\beta - D/2n)}{\Gamma(\beta)} (m^2 - a^2)^{(D/2n-\beta)}. \tag{B.12}$$

A expressão acima tem o sinal de aproximação substituído pela igualdade quando $a^2 = 0$, e assim verificamos (B.6).

B.2 INTEGRAIS ANISOTRÓPICAS

Nesta seção iremos obter algumas integrais utilizadas no cálculo do calor específico no caso anisotrópico que surgem naturalmente no comportamento crítico de Lifshitz e no modelo CECI. Elas são integradas em variáveis de momento de vários subespaços simultaneamente.

i) Considere a seguinte integral

$$J(t, b; m_1, \dots, m_L) = \int d^{m_1} k_1 \dots \int d^{m_L} k_L \frac{1}{[k_{(1)}^2 + \dots + (k_{(L)}^2)^L + t]^b} \tag{B.13}$$

onde, $m_1 + \dots + m_L = d$.

Usando (B.6), podemos escrever (B.13) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
J(t, b; m_1, \dots, m_L) &= \int d^{m_1} k_1 \dots \int d^{m_{L-1}} k_{L-1} I(k_1^2 + \dots + (k_{L-1}^2)^{L-1} + t; m_L, L, b) \\
&= S_{m_L} \frac{1}{2L} \frac{\Gamma(\frac{m_L}{2L})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L})}{\Gamma(b)} \int d^{m_1} k_1 \dots \int d^{m_{L-1}} k_{L-1} \frac{1}{[k_1^2 + \dots + (k_{L-1}^2)^{L-1} + t]^{b - m_L/2L}} \\
&= S_{m_L} \frac{1}{2L} \frac{\Gamma(\frac{m_L}{2L})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L})}{\Gamma(b)} J(t, b - m_L/2L; m_1, \dots, m_{L-1}). \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

Obtemos em (B.14) uma regra de recorrência entre as integrais J 's.

Desenvolvendo a recorrência de (B.14), obtemos

$$\begin{aligned}
J(t, b; m_1, \dots, m_L) &= S_{m_L} \frac{1}{2L} \frac{\Gamma(\frac{m_L}{2L})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L})}{\Gamma(b)} J(t, b - \frac{m_L}{2L}; m_1, \dots, m_{L-1}) \\
&= S_{m_L} \frac{\Gamma(\frac{m_L}{2L})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L})}{2L\Gamma(b)} S_{m_{L-1}} \frac{\Gamma(\frac{m_{L-1}}{2(L-1)})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)})}{2(L-1)\Gamma(b - \frac{m_L}{2L})} J(t, b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)}; m_1, \dots, m_{L-2}) \\
&= [S_{m_L} S_{m_{L-1}} \dots S_{m_1}] \frac{1}{2^L L!} \frac{\Gamma(\frac{m_L}{2L})\Gamma(\frac{m_{L-1}}{2(L-1)}) \dots \Gamma(\frac{m_1}{2})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_1}{2})}{\Gamma(b) t^{b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_1}{2}}}. \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

onde, acima usamos

$$\begin{aligned}
J(t, b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4}; m_1) &= \int d^{m_1} k_1 \frac{1}{(k^2 + t)^{b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4}}} \\
&= I(t; m_1, b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4}) = \frac{1}{2} S_{m_1} \frac{\Gamma(\frac{m_1}{2})\Gamma(b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4} - \frac{m_1}{2})}{\Gamma(b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4}) t^{b - \frac{m_L}{2L} - \frac{m_{L-1}}{2(L-1)} - \dots - \frac{m_2}{4} - \frac{m_1}{2}}}. \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

De maneira condensada, escrever o resultado de (B.15), através de

$$\begin{aligned} J(t, b; m_1, \dots, m_L) &= \left(\prod_{n=1}^L \int d^n k_{(n)} \right) \frac{1}{\left[\sum_{n=1}^L (k_{(n)}^2)^n + t \right]^b} \\ &= \left[\frac{1}{2^L L!} \prod_{n=1}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \frac{\Gamma\left(b - \sum_{n=1}^L \frac{m_n}{2n}\right)}{\Gamma(b) t^{b - \sum_{n=1}^L \frac{m_n}{2n}}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Efetuando $b = 2$ e $m_1 = d - \sum_{n=2}^L m_n$ em (B.17), escrevemos a integral da seguinte forma

$$\begin{aligned} J(t, 2; d - m_2 - \dots - m_L, m_2, \dots, m_L) &= \int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L k_{(n)}^2 + t \right]^2} = \\ &= \left[\frac{1}{2^L L!} S_{d - \sum_{n=2}^L m_n} \Gamma\left(\frac{d}{2} - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}\right) \prod_{n=2}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \Gamma\left[2 - \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}\right] \\ &\quad \times t^{-2 + \frac{d}{2} - \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

em que, $Dp = d^{d - \sum_{n=2}^L m_n} p$ e $Dk = \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}$.

Usando a expansão

$$\Gamma(a + b\epsilon_n) = \Gamma(a) \left[1 + b\epsilon_n \psi(a) + O(\epsilon_n^2) \right] \quad \text{onde,} \quad \psi(a) = \frac{d \ln \Gamma(a)}{da}. \quad (\text{B.19})$$

Efetuamos a expansão em $\epsilon_n \equiv d_c - d = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_n - d \rightarrow 0$ na integral de (B.18) através de

$$\begin{aligned} \int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + t \right]^2} &= \left[\frac{1}{2^{L-1} L!} S_{d - \sum_{n=2}^L m_n} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \prod_{n=2}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 - \frac{\epsilon_L}{2} \left(\psi\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) - \psi(1) \right) + O(\epsilon_L^2) \right] t^{-\frac{\epsilon_L}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

O primeiro fator em colchetes no membro direito da equação acima aparece a cada *loop* da expansão em ϵ_n para o cálculo das integrais do caso anisotrópico. Podemos absorvê-lo na constante de acoplamento a cada *loop* realizado, e então obtemos

$$\int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + t\right]^2} = \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 + \epsilon_L \left(h_{m_L} - 1 - \frac{1}{2} \ln t \right) \right] + O(\epsilon_L), \quad (\text{B.21})$$

onde, $h_{m_L} = 1 + \frac{1}{2} \left[\psi(1) - \psi \left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} \right) \right]$. E também $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n} \right) m_n - d$.

Essa integral é utilizada no cálculo do calor específico para o comportamento crítico de competição anisotrópica generalizada descrita pelo modelo CECI. Quando a anisotropia é reduzida a dois subespaços, um não-competitivo ($\tau = 1$) e outro competitivo ($\tau = L = 2$), obtemos o resultado correspondente ao comportamento crítico de Lifshitz. Obtemos,

$$\int d^{d-m} p d^m k \frac{1}{\left[p^2 + (k^2)^2 + t\right]^2} = \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 + \epsilon_L \left([i_2]_m - 1 - \frac{1}{2} \ln t \right) \right] + O(\epsilon_L), \quad (\text{B.22})$$

em que $[i_2]_m = 1 + \frac{1}{2} \left[\psi(1) - \psi \left(2 - \frac{m}{4} \right) \right]$. Note que $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$.

ii) Nesta etapa desta seção, resolveremos a integral de caráter arbitrário I_{SPn} para o caso anisotrópico. Na referência [25] esta mesma integral é resolvida pelo método dos parâmetros de Schwinger. Aqui, aproveitaremos a oportunidade para resolvê-la através do método dos parâmetros de Feynman.

Expressamos a referida integral por meio de

$$I_{SPn} = \int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n\right] \left\{ (p+P)^2 + \sum_{n=2}^L \left[(k_{(n)} + K_{(n)})^2 \right]^n \right\}} \Big|_{SPn}. \quad (\text{B.23})$$

Os denominadores do integrando são combinados através da fórmula de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[az + b(1-z)]^2} \quad (\text{B.24})$$

cuja verificação é imediata.

Identificamos $a = (p+P)^2 + \sum_{n=2}^L \left[(k_{(n)} + K_{(n)})^2 \right]^n$ e $b = p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n$ na identidade acima. Desta maneira, desenvolvemos (B.23) através de

$$I_{SPn} = \int \text{D}p \text{D}k \int_0^1 dz \frac{1}{[(p + zP)^2 + m^2]^2} \Big|_{SPn} \quad (\text{B.25})$$

onde, escrevemos o termo independente presente no denominador por meio de

$$\begin{aligned} m^2 = m^2(z, k) &= z(1-z)P^2 + \sum_{n=2}^L \left\{ z \left[(k_{(n)} + K_{(n)})^2 \right]^n + (1-z)(k_{(n)}^2)^n \right\} \\ &\cong z(1-z)P^2 + \sum_{n=2}^L \left\{ (k_{(n)}^2)^n + 2z(k_{(n)}^2)^{n/2}(K_{(n)}^2)^{n/2} + z(K_{(n)}^2)^n \right\} \\ &= \sum_{n=2}^L \left[(k_{(n)}^2)^{n/2} + z(K_{(n)}^2)^{n/2} \right]^2 + z(1-z) \left[P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Aplicamos acima a aproximação ortogonal generalizada (AOG) desenvolvida em [25], que é expressa através de

$$\left[(k_{(n)} + K_{(n)})^2 \right]^n \cong (k_{(n)}^2)^n + 2(k_{(n)}^2)^{n/2}(K_{(n)}^2)^{n/2} + (K_{(n)}^2)^n \quad (\text{B.27})$$

Conseguimos com a AOG tornar as integrais envolvidas livres de produtos internos do tipo $k_{(n)} \cdot K_{(n)}$. A AOG preserva a propriedade de homogeneidade das integrais por uma escala nos momentos externos de competição arbitrária.

Operando a translação $p_i \rightarrow p_i - zP_i$ em (B.25) e usando a identidade (B.6) para resolver a integral em p , escrevemos

$$\begin{aligned} I_{SPn} &= \int_0^1 dz \int \text{D}k \int d^{d-\sum_{n=2}^L p} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \Big|_{SPn} = \frac{1}{2} S_{d-\sum_{n=2}^L} \Gamma\left(\frac{d}{2} - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(2 - \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}\right) \int_0^1 dz \int \text{D}k \frac{1}{[m^2(z, k)]^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}} \Big|_{SPn}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Para simplificar a exposição dos cálculos, iremos desenvolver separadamente a integral nos momentos de competição presente em (B.28).

Usando (B.26) no denominador da integral de (B.28), obtemos

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{D}k \frac{1}{[m^2(z, k)]^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}} \\ = & \int \mathrm{D}k \frac{1}{\left\{ \sum_{n=2}^L [(k_{(n)}^2)^{n/2} + z(k_{(n)}^2)^{n/2}]^2 + z(1-z)[P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n] \right\}^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Realizando a transformação $(k_{(n)}^2)^{n/2} \rightarrow (k_{(n)}^2)^{n/2} - z(K_{(n)}^2)^{n/2}$ na integral acima, e similarmemente o que foi procedido em (B.11), obtemos

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{D}k \frac{1}{[m^2(z, k)]^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}} \\ = & \int \mathrm{d}^{m_2} k_{(2)} \dots \int \mathrm{d}^{m_L} k_{(L)} \frac{1}{\left\{ (k_{(n)}^2)^n + z(1-z)[P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n] \right\}^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Podemos usar a integral anisotrópica calculada em (B.17), e expressar o resultado de (B.30) por meio de

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{D}k \frac{1}{[m^2(z, k)]^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}}} = \left[\frac{1}{2^{L-1} L!} \prod_{n=2}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \\ & \times \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}\right)}{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}\right) \left[z(1-z) \left(P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n \right) \right]^{2-\frac{d}{2}+\sum_{n=2}^L \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Inserindo o resultado de (B.31) na expressão (B.28), escrevemos

$$\begin{aligned} I_{SPn} = & \left[\frac{1}{2^L L!} S_{d-\sum_{n=2}^L m_n} \Gamma\left(\frac{d}{2} - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2}\right) \prod_{n=2}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \Gamma\left[2 - \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}\right] \\ & \times \int_0^1 \mathrm{d}z \left[z(1-z) \left(P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n \right) \right]^{-2+\frac{d}{2}-\sum_{n=2}^L \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{m_n}{2}} \Bigg|_{SPn}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Antes de resolver a integral em z na expressão acima, efetuamos a expansão em $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_n - d$. Utilizando a expansão da função gama enunciada em (B.19) na equação (B.32), escrevemos

$$I_{SP_n} = \left[\frac{1}{2^{L-1} L!} S_{d - \sum_{n=2}^L m_n} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \prod_{n=2}^L S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \frac{1}{\epsilon_L} \\ \times \left\{ 1 - \frac{\epsilon_L}{2} \left[\psi\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) - \psi(1) + \int_0^1 dz \ln(z(1-z)) \right] + O(\epsilon_L^2) \right\} \left(P^2 + \sum_{n=2}^L (K_{(n)}^2)^n \right)^{-\epsilon_L/2} \Big|_{SP_n} \quad (\text{B.33})$$

Realizamos o ponto simétrico SP_n através de

$$SP_{(1)} : P^2 = 1, \quad (K_{(n)}^2)^n = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$SP_{(n)} : P^2 = 0, \quad (K_{(n')}^2)^{n'} = \delta_{n,n'} \quad \text{para } n = 2, \dots, L. \quad (\text{B.35})$$

E portanto,

$$\left(P^2 + \sum_{n'=2}^L (K_{(n')}^2)^{n'} \right)^{-\epsilon_L/2} \Big|_{SP_n} = 1, \quad \forall n \quad (\text{B.36})$$

A exemplo da integral (B.20), o primeiro fator em colchetes da equação (B.33) pode ser absorvido na constante de acoplamento a cada *loop* realizado.

Resolvendo a integral elementar na variável z e usando o resultado de (B.36), obtemos

$$I_{SP_n} = \frac{1}{\epsilon_L} (1 + \epsilon_L h_{m_L}) + O(\epsilon_L), \quad (\text{B.37})$$

onde $h_{m_L} \equiv 1 + \frac{1}{2} \left[\psi(1) - \psi\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \right]$.

A integral I_{SP_n} é utilizada na descrição do comportamento crítico competitivo generalizado descrito pelo modelo CECI. Derivamos o resultado desta integral para um único subespaço competitivo com interações até os segundos vizinhos, que é descrito através do comportamento crítico de Lifshitz, fazendo $L = 2$ em (B.37). Ou seja,

$$I_{SP_\tau} = \frac{1}{\epsilon_L} (1 + \epsilon_L [i_2]_m) + O(\epsilon_L) \quad (\text{B.38})$$

onde, $[i_2]_m \equiv 1 + \frac{1}{2} \left[\psi(1) - \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]$.

Finalmente, subtraindo (B.21) de (B.37), escrevemos

$$I_{SP_n} - \int Dp Dk \frac{1}{\left[p^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + t \right]^2} = 1 + \frac{1}{2} \ln t + O(\epsilon_L) \quad (\text{B.39})$$

em que $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_n - d$.

Os pólos em ϵ_L são subtraídos nas integrais acima. O resultado (B.39) é utilizado nos cálculos do calor específico no modelo CECI.

Subtraindo (B.22) de (B.38), obtemos

$$I_{SP_\tau} - \int d^{d-m} p d^m k \frac{1}{\left[p^2 + (k^2)^n + t \right]^2} = 1 + \frac{1}{2} \ln t + O(\epsilon_L) \quad (\text{B.40})$$

em que $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$.

Para o cálculo do calor específico abaixo da temperatura crítica, é suficiente fazer $t \rightarrow -2t$ nas integrais (B.39) e (B.40).

B.3 INTEGRAIS ISOTRÓPICAS

Nesta última seção iremos obter algumas integrais utilizadas para calcular o calor específico no caso isotrópico do comportamento crítico de Lifshitz e do modelo CECI. As integrais isotrópicas são desenvolvidas em uma só variável de momento k definido no domínio de um único espaço competitivo.

i) Consideremos a seguinte integral de interesse para a descrição da competição isotrópica generalizada.

$$\int d^{m_n} k \frac{1}{\left((k^2)^n + t \right)^2}, \quad (\text{B.41})$$

Usando diretamente (B.6), resolvemos a integral acima através da fórmula:

$$\int d^{m_n} k \frac{1}{\left((k^2)^n + t \right)^2} = S_{m_n} \frac{1}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m_n}{2n}\right) t^{-\left(2 - \frac{m_n}{2n}\right)}. \quad (\text{B.42})$$

Através da expansão da função gama expressa em (B.19), efetuamos a expansão em $\epsilon_L = d_c - d = 4n - m_n$ da integral em (B.42) por meio de

$$\int d^{m_n} k \frac{1}{((k^2)^n + t)^2} = S_{m_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \right) t^{-\epsilon_n/2n}. \quad (\text{B.43})$$

O fator S_{m_n} pode ser absorvido em uma redefinição da constante de acoplamento a cada *loop* realizado. Então, expressamos a referida integral através de

$$\int d^{m_n} k \frac{1}{((k^2)^n + t)^2} = \frac{1}{\epsilon_n} \left[1 - \frac{\epsilon_n}{2n} (1 + \ln t) \right] + O(\epsilon_n). \quad (\text{B.44})$$

ii) Agora consideremos a seguinte integral com momento externo,

$$I_{SP_n} = \int d^{m_n} k \frac{1}{(k^2)^n [(k + K)^2]^n} \Big|_{(K^2)^n=1}. \quad (\text{B.45})$$

Esta integral se encontra resolvida em [25] por uso dos parâmetros de Schwinger. Aqui aproveitaremos para resolvê-la através do método dos parâmetros de Feynman. Para resolvê-la podemos fazer uso AOG, como fora aplicado nas integrais anisotrópicas da seção anterior. Mas, temos também a oportunidade de calculá-la exatamente. Por qualquer das duas maneiras, verificaremos que o pólo em ϵ_n é removido na subtração da solução de (B.45) com a (B.44).

ii.1) Para resolver a integral (B.45) através da AOG, consideremos a fórmula de Feynman expressa em (B.24). Escolhendo $a = [(k + K)^2]^n$ e $b = (k^2)^n$ em (B.24), escrevemos (B.45) por meio de

$$\begin{aligned} I_{SP_n} &= \int d^{m_n} k \int_0^1 dz \frac{1}{\left\{ [(k + K)^2]^n z + (k^2)^n (1 - z) \right\}^2} \Big|_{(K^2)^n=1} \\ &\cong \int_0^1 dz \int d^{m_n} k \frac{1}{\left[(k^2)^n + 2z(K^2)^{n/2}(k^2)^{n/2} + z(K^2)^n \right]^2} \Big|_{(K^2)^n=1}, \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

onde aplicamos a AOG enunciada em (B.27).

Usando o resultado de (B.12) na integral (B.46), obtemos

$$I_{SP_n} = S_{m_n} \frac{1}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m_n}{2n}\right) \int_0^1 dz [z(1-z)(K^2)^n]^{-\left(2 - \frac{m_n}{2n}\right)} \Bigg|_{(K^2)^n=1}. \quad (\text{B.47})$$

Realizando a expansão em $\epsilon_n = 4n - m_n$ na equação acima e usando a expansão da função gama de (B.19), obtemos

$$I_{SP_n} = S_{m_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n + O(\epsilon_n^2)\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{-\epsilon_n/2n}. \quad (\text{B.48})$$

Absorvendo o fator S_{m_n} na constante de acoplamento do *loop* realizado e efetuando a integral elementar na variável z na (B.48), escrevemos

$$I_{SP_n} = \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right) + O(\epsilon_n), \quad (\text{B.49})$$

onde $\epsilon_n = 4n - m_n$. Essa integral é utilizada na descrição da competição isotrópica generalizada.

Obtemos a integral correspondente para o comportamento crítico de Lifshitz, realizando $n=2$ em I_{SP_n} através de

$$I_{SP_{n=2}} = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 + \frac{1}{4} \epsilon_L\right) + O(\epsilon_L) \quad (\text{B.50})$$

onde, $\epsilon_L = 8 - m$. Em que, $d = m$.

ii.2) Agora, iremos resolver exatamente a integral I_{SP_n} apresentada em (B.45).

Se nos dois membros da fórmula de Feynman, expressa em (B.24), operamos

$$\frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial a^{\alpha-1} \partial b^{\beta-1}} \quad (\text{B.51})$$

É possível verificar

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dz \frac{z^\alpha (1-z)^\beta}{[az + b(1-z)]^{\alpha+\beta}} \quad (\text{B.52})$$

Efetando $\alpha = 1 = \beta$, recuperamos (B.24).

Identificando $a = (k + K)^2$, $b = K^2$ e $\alpha = n = \beta$, usamos a fórmula de Feynman apresentada em (B.52) nos denominadores da integral (B.45) por meio de

$$I_{SPn} = \int d^{m_n} k \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dz \frac{z^{n-1}(1-z)^{n-1}}{[k^2 + 2zk \cdot K + zK^2]^{2n}} \Big|_{(K^2)^{n=1}} \quad (\text{B.53})$$

Realizando a translação $k \rightarrow k - zK$ em (B.53) e usando em seguida a identidade (B.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} I_{SPn} &= \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma^2(n)} \int_0^1 dz [z(1-z)]^{n-1} \int d^{m_n} k \frac{1}{[k^2 + 2zk \cdot K + zK^2]^{2n}} \\ &= S_{m_n} \frac{\Gamma(2n) \Gamma(m_n/2) \Gamma(2n - m_n/2)}{2 \Gamma^2(n)} \int_0^1 dz [z(1-z)]^{\frac{m_n}{2} - n - 1} [(K^2)^n]^{\frac{m_n}{2n} - 2} \Big|_{(K^2)^{n=1}} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Efetuada a expansão em $\epsilon_n = 4n - m_n$ em (B.54) e usando a expansão da função gama expressa em (B.19), obtemos

$$\begin{aligned} I_{SPn} &= S_{m_n} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma^2(n)} \frac{1}{\epsilon_n} \left[1 - \frac{\epsilon_n}{2} (\psi(2n) - \psi(1)) + O(\epsilon_n^2) \right] \int_0^1 dz [z(1-z)]^{n-1-\epsilon_n/2} \\ &= S_{m_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left[1 + \frac{\epsilon_n}{2} (\psi(2n) - 2\psi(n) + \psi(1)) + O(\epsilon_n^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Na equação (B.55) absorvemos o fator S_{m_n} na constante de acoplamento a cada *loop* realizado, e escrevemos I_{SPn} através de

$$I_{SPn} = \frac{1}{\epsilon_n} (1 + D(n) \epsilon_n) + O(\epsilon_n). \quad (\text{B.56})$$

onde, $D(n) \equiv \frac{1}{2}\psi(2n) - \psi(n) + \frac{1}{2}\psi(1)$. E também $\epsilon_n = 4n - m_n$, (com $m_n = d$). Essa integral é utilizada na descrição de competição isotrópica generalizada realizada pelo modelo CECI para o cálculo do calor específico.

Obtemos a integral correspondente à competição isotrópica descrita pelo comportamento crítico de Lifshitz fazendo $n = 2$ em I_{SPn} através de

$$I_{SPn=2} = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{12} \epsilon_L \right) + O(\epsilon_n). \quad (\text{B.57})$$

Em que, $\epsilon_L = 8 - d$.

iii) Combinando as integrais (B.49) e (B.56) com (B.44), obtemos

$$I_{SPn} - \int d^{mn} k \frac{1}{((k^2)^n + t)^2} = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \ln t + O(\epsilon_n), & \text{através da AOG;} \\ \frac{1}{2n} + D(n) + \frac{1}{2n} \ln t + O(\epsilon_n), & \text{exato.} \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

em que, $\epsilon_n = 4n - d$.

Verificamos acima a subtração dos pólos em ϵ_n nos dois processos de cálculo. A expressão de (B.58) será exigida no cálculo do calor específico para o modelo de Lifshitz isotrópico generalizado do capítulo 5.

Combinando as integrais (B.50) e (B.57) com (B.44), obtemos as expressões para o cálculo do calor específico para o modelo de Lifshitz isotrópico do capítulo 4, por meio de

$$I_{SP\tau=3} - \int d^m k \frac{1}{((k^2)^2 + t)^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln t + O(\epsilon_L), & \text{através da AOG;} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \ln t + O(\epsilon_L), & \text{exato.} \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

Em que, $\epsilon_L = 8 - d$.

Para o cálculo do calor específico abaixo da temperatura crítica é suficiente fazer $t \rightarrow -2t$ nas integrais de (B.58) e (B.59).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. Berche, M. Henkel, and R. Kenna, *Rev. Bras. de Ens. de Fís.* **31**, 2602 (2009).
- [2] J. A. Lipa, J. Nissen, and U. E. Israelson, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 944 (1996).
- [3] C. Bervillier, *Phys. Rev. B* **14**, 4964 (1976).
- [4] W. Selke, Spatially modulated structures in systems with competing interactions, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, volume 15, Academic Press, 1992.
- [5] R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1678 (1975).
- [6] S. M. Hayden et al., *Phys. Rev. Lett.* **66**, 821 (1991).
- [7] B. Keimer et al., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1930 (1991).
- [8] S. Sachdev and J. Ye, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2411 (1992).
- [9] S. B. Rananaavare, V. G. K. M. Pisipati, and E. W. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3558 (1994).
- [10] B. Zalar et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4458 (1998).
- [11] M. Škarabot, R. Blinc, I. Musčević, A. Rastegar, and T. Rasing, *Phys. Rev. E* **61**, 3961 (2000).
- [12] G. H. Fredrickson and S. T. Milner, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 835 (1991).
- [13] F. S. Bates et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4429 (1995).
- [14] R. R. Netz and M. Schick, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 302 (1996).
- [15] F. S. Bates et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 849 (1997).
- [16] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **24**, 5430 (1981).
- [17] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **29**, 6341 (1984).
- [18] C. C. Becerra, Y. Shapira, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1692 (1980).

- [19] Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. B* **24**, 2780 (1981).
- [20] P. Horáva, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
- [21] P. Horáva, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 161301 (2009).
- [22] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **67**, 104415 (2003).
- [23] W. Selke, *Z. Phys. B* **27**, 81 (1977).
- [24] W. Selke, *J. Magn. Magn. Mater.* **9**, 7 (1978).
- [25] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **72**, 224432 (2005).
- [26] W. Selke, *Phys. Lett. A* **61**, 443 (1977).
- [27] J. F. Nicoll, T. S. Chang, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. A* **13**, 1251 (1976).
- [28] J. F. Nicoll, G. F. Tuthill, T. S. Chang, and H. E. Stanley, *Phys. Lett. A* **58**, 1 (1976).
- [29] D. J. Amit and V. Martin-Mayor, *Field Theory; The Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific Publishing Company, 2005.
- [30] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford University Press, 1996.
- [31] L. H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [32] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical properties of ϕ^4 -theories*, World Scientific Publishing Company, 2001.
- [33] K. G. Wilson, *Phys. Rev. B* **4**, 3174 (1971).
- [34] K. G. Wilson, *Phys. Rev. B* **4**, 3184 (1971).
- [35] K. G. Wilson and M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972).
- [36] K. G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972).
- [37] L. P. Kadanoff, *Physics* **2**, 263 (1966).
- [38] E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, Field theoretical approach to critical phenomena, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green, volume 6, Academic Press, 1976.
- [39] V. Bindilatti, C. C. Becerra, and N. F. Oliveira, *Phys. Rev. B* **40**, 9412 (1989).
- [40] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **68**, 052408 (2003).

- [41] J. Rossat-Mignod, J. M. Effantin, C. Verttier, and O. Vogt, *Physica B+C* **130**, 555 (1985).
- [42] A. G. Slivca, E. I. Gerzanich, P. P. Guranich, and V. S. Shusta, *Ferroelectrics* **103**, 71 (1990).
- [43] A. Aharony and D. Mukamel, *J. Phys. C* **13**, L255 (1980).
- [44] W. Selke, *J. Phys. C* **13**, L261 (1980).
- [45] J. Y. Buzaré, J. C. Fayet, W. Berlinger, and K. A. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 465 (1979).
- [46] K. A. Müller, W. Berlinger, J. Y. Buzaré, and J. C. Fayet, *Phys. Rev. B* **21**, 1763 (1980).
- [47] V. Privman, P. C. Hohenberg, and A. Aharony, Universal critical-point amplitude relations, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, volume 14, Academic Press, 1991.
- [48] M. C. Barbosa, *Physica B* **215**, 286 (1995).
- [49] Y. A. Izyumov, *Usp. Fiz. Nauk* **144**, 439 (1984).
- [50] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press, 1995.
- [51] C. F. F. Farias, *Amplitudes de Susceptibilidade para o Ponto de Lifshitz m - Axial*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- [52] P. D. Olmsted and I. W. Hamley, *Europhys. Lett.* **45**, 83 (1999).
- [53] P. J. Davis, Gamma function and related functions, in *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, volume 55, Department of Commerce of United States of America, 1970.