



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

**Oscilações coletivas em redes de  
autômatos celulares probabilísticos  
excitáveis**

Fernando Ohlweiler Rozenblit

Dissertação de Mestrado

Recife - PE, Brasil  
Janeiro - 2011



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**OSCILAÇÕES COLETIVAS EM REDES DE AUTÔMATOS  
CELULARES PROBABILÍSTICOS EXCITÁVEIS**

por

**Fernando Ohlweiler Rozenblit**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva (Orientador-UFPE)

Prof. Francisco George Brady Moreira (DF - UFPE)

Profa. Viviane Moraes de Oliveira (DF-UFRPE)

Recife - PE, Brasil  
Janeiro - 2011

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Rozenblit, Fernando Ohlweiler.  
Oscilações coletivas em redes de autômatos  
celulares probabilísticos excitáveis / Fernando  
Ohlweiler Rozenblit. Recife: O Autor, 2011.  
xiv, 58 folhas : fig. tab.

Orientador: Mauro Copelli Lopes da Silva.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2011.

Inclui bibliografia e apêndice.

1.Física estatística. 2.Autômato celular. 3.Fenômenos  
de transição de fase. I. Silva, Mauro Copelli Lopes da  
(orientador). II. Título.

530.13

(22.ed.)

FQ 2011-006



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

**Fernando Ohlweiler Rozenblit**

### OSCILAÇÕES COLETIVAS EM REDES DE AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS EXCITÁVEIS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Mauro Copelli Lopes da Silva (Presidente e Orientador), Francisco George Brady Moreira, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Viviane Moraes de Oliveira, do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em dezoito de janeiro de dois mil e onze.

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva  
Presidente e Orientador

Prof. Francisco George Brady Moreira

Prof. Viviane Moraes de Oliveira

*Aos meus pais, Helio e Gyslaine, e avós, Dora, José e Therezinha, pelas lições mais importantes e duradouras.*

# Agradecimentos

Aos meus pais Helio e Gyslaine, agradeço por toda a dedicação e incentivo para que eu pudesse chegar onde estou hoje. Muito obrigado por me ensinarem como é bom ser curioso. Aos meus avós, Dora, José e Therezinha, serei eternamente grato por todo o carinho e compreensão (principalmente pelas festas de família às quais não consegui ir) nesses últimos anos. À Juliana Karoline Santos Silva (e toda sua família), por esses 5 anos maravilhosos e por perdoar os aniversários de namoro não-comemorados devido às provas e listas. À minha tia Beatriz, pelo incentivo em seguir carreira acadêmica e aos meus irmãos Cláudia e Daniel por estarem sempre próximos.

Aos amigos do tempo de colégio, Antônio, Breno, Danilo, Davi, Joyce, Jéssica, Márcio, Renato, Tamires e Thialy, por me permitirem fugir da física quando necessário. Ao Prof. Gilberto Holanda, do Colégio Atual, por ter naquela época me presenteado com o livro dos problemas selecionados de física elementar.

A Rafael Stern e Andréa Moraes pelos comentários, sugestões e correções para essa dissertação.

Aos amigos da física por todos os momentos felizes que me proporcionaram enquanto os conheço: Alfredo Carneiro, Bruno Medeiros, Carolina Ferreira, Daniel Amâncio, Danilo Pinheiro, Denise Valente (e põe valente nisso), Eduarda Lira Peixoto, Fernanda Selingardi, Josué Sá da Fonseca, Milena Frej, Sérgio Lira, Tiago Aécio (e seus trinta mil nomes), Tiago Nunes, Tiago Ribeiro e Vladimir Assis. Aos que embora não tão próximos, sempre se fizeram presentes: Augusto, Eglânio, Douglas, Fábio, Hugo, Huende, Maelyson, Manuela, Miguel, Plínio, Rafael Alves, Victor Hugo. Agradeço também àqueles cujos nomes eu fatalmente terei esquecido, mas me perdoarão o lapso de memória.

Ao Prof. Mauro Copelli, pela atenção ao longo destes anos, mesmo com os filhos, reforma de apartamento, viagens e toda sorte de emergências que estouravam *apenas* quando estávamos em reunião.

Ao Dr. (e em breve professor!) Vladimir Assis pelas sugestões sempre pertinentes sobre esse trabalho (né?) e as discussões muito esclarecedoras. Obrigado pela pizza!

Ao grupo de neurociência do Departamento de Física: Bruno Medeiros, Fernanda Selingardi, Prof. Mauro Copelli, Prof. Pedro Carelli, Tiago L. Ribeiro, Vladimir R. V. Assis, pelo ambiente acolhedor, propício ao surgimento de idéias e *sempre* divertido.

Aos professores do Departamento de Física, muitos para citar nominalmente, que marcaram minha vida com suas aulas. Aos funcionários, por lutarem dia-após-dia contra a segunda-lei da termodinâmica para manter o departamento em ordem.

Agradeço ao CNPq, CAPES, FACEPE, e programa especial PRONEX (Física Biológica) pelo suporte financeiro para realização deste trabalho.

*Some twenty years ago I saw, or though I saw, a synchronal or simultaneous flashing of fireflies. I could hardly believe my eyes, for such a thing to occur among insects is certainly contrary to all natural laws.*

—PHILIP LAURENT (Science, 1917)

# Resumo

Por muitos anos, o estudo da sincronização se restringiu aos osciladores autônomos, com ênfase (devido aos trabalhos de Winfree e Kuramoto) nos osciladores uniformes acoplados. Recentemente, houve um interesse crescente nas oscilações globais de elementos excitáveis acoplados. Esses trabalhos em geral se dedicam a células cuja dinâmica interna é determinística e apenas o acoplamento entre elementos é ruidoso. Estudamos aqui os efeitos de um período refratário probabilístico no comportamento coletivo de elementos excitáveis de tempo discreto (autômato celular tipo SIRS). Usando análise de campo médio e simulações, mostramos que uma fase sincronizada com oscilações coletivas estáveis existe mesmo com períodos refratários não-determinísticos. Além disso, aumentando a intensidade de acoplamento obtemos uma transição reentrante, onde a fase sincronizada perde estabilidade. Em um regime intermediário, também observamos biestabilidade (e conseqüentemente histerese) entre uma fase sincronizada e uma fase ativa porém incoerente (sem oscilações). O surgimento das oscilações aparece nas equações de campo médio como uma bifurcação de Neimark-Sacker, cuja natureza (isto é, super- ou subcrítica) é determinada pelo primeiro coeficiente de Lyapunov e é relacionada com a continuidade da transição. Com isto, determinamos as fronteiras das regiões oscilante e biestável. A previsão de campo médio reproduz quantitativamente os resultados obtidos nas simulações do grafo completo, e para o grafo aleatório prevê qualitativamente a estrutura geral do diagrama de fases. Este último pode ser encontrado nas simulações através da definição de um parâmetro de ordem  $q$ , apropriado para capturar oscilações coletivas em elementos excitáveis. Revisamos brevemente outros parâmetros de ordem normalmente utilizados e mostramos (através de colapso de dados) que  $q$  satisfaz as relações de escala de tamanho finito esperadas. Por fim, expomos problemas em aberto que podem ser explorados em novos estudos.

**Palavras-chave:** sincronização, elementos excitáveis, autômato celular, parâmetro de ordem

# Abstract

For many years, the works on synchronization have been restricted to autonomous oscillators, emphasizing (due to the works of Winfree and Kuramoto) uniformly coupled oscillators. Recently, there has been an increased interest in global oscillations of coupled excitable elements. Here we study the effects of a probabilistic refractory period in the collective behavior of coupled discrete-time excitable cells (SIRS-like cellular automata). Using mean-field analysis and simulations, we show that a synchronized phase with stable collective oscillations exists even with non-deterministic refractory periods. Moreover, further increasing the coupling strength leads to a reentrant transition, where the synchronized phase loses stability. In an intermediate regime, we also observe bistability (and consequently hysteresis) between a synchronized phase and an active but incoherent phase without oscillations. The onset of the oscillations appears in the mean-field equations as a Neimark-Sacker bifurcation, the nature of which (i.e. super- or subcritical) is determined by the first Lyapunov coefficient and is related to the continuity of the phase transition. This allows us to determine the borders of the oscillating and of the bistable regions. The mean-field prediction thus obtained agrees quantitatively with simulations of complete graphs and, for random graphs, qualitatively predicts the overall structure of the phase diagram. The latter can be obtained from simulations by defining an order parameter  $q$  suited for detecting collective oscillations of excitable elements. We briefly review other commonly used order parameters and show (via data collapse) that  $q$  satisfies the expected finite size scaling relations. Finally, we present some open problems which could be explored in new studies.

**Keywords:** synchronization, excitable units, cellular automata, order parameter

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Sincronização	1
1.1.1	Osciladores acoplados	2
1.1.2	Acoplamento global e o modelo de Kuramoto	5
1.2	Sincronização em elementos excitáveis	7
1.2.1	Modelo SIRS de tempo discreto	9
1.2.2	Modelo Kuperman-Abramson	10
1.2.3	Modelo Girvan et al.	13
1.2.4	Modelo Kinouchi-Copelli	17
1.2.5	Modelos de tempo contínuo	19
1.3	Observações experimentais	20
1.4	Motivação do problema a ser abordado	22
<b>2</b>	<b>Modelo</b>	<b>24</b>
2.1	Autômato celular excitável	24
2.2	Acoplamento	25
2.3	Parâmetro de ordem	27
<b>3</b>	<b>Grafo completo</b>	<b>30</b>
3.1	Simulações	30
3.2	Campo médio	33
3.3	Análise de estabilidade linear	34
3.3.1	Bifurcação de Neimark-Sacker	35
3.4	Diagrama de fases	36
3.5	Períodos refratários maiores	38
<b>4</b>	<b>Grafo aleatório</b>	<b>40</b>
4.1	Simulações e campo médio	40
4.2	Grafos aleatórios <i>annealed</i>	41

4.3	Teoria de escala de tamanho finito	43
<b>5</b>	<b>Conclusões, comentários e perspectivas</b>	<b>47</b>
<b>A</b>	<b>Coeficiente de Lyapunov</b>	<b>50</b>
A.1	Grafo completo	51
A.2	Grafo aleatório	51
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Lista de Figuras

- 1.1 Diferentes tipos de sincronização (para dois osciladores), da esquerda para a direita: em fase (diferença de fase  $\phi = 0$ ), antifase ( $\phi = \pi$ ) e fora de fase ( $\phi \neq \pi, 0$ ). Obtido de [Izhikevich, 2006]. 2
- 1.2 (a) Pêndulo de Huygens forma um ângulo  $\alpha$  com a normal. (b) A evolução temporal faz com que sua trajetória no espaço de fase  $(\alpha, \dot{\alpha})$  seja atraída para o ciclo-limite. (c) Série temporal mostra a evolução para diferentes condições iniciais. Obtido de [Rosenblum & Pikovsky, 2003]. 3
- 1.3 Conjunto de osciladores com frequências distintas começam com fases próximas em (a), mas se separam devido às diferenças de velocidade (b,c). Por fim, um acoplamento que adianta os lentos e retarda os mais rápidos pode aproximá-los (d). Obtido de [Strogatz & Stewart, 1993]. 6
- 1.4 (a) Série temporal típica do modelo de Kuramoto para diferentes valores de  $K$ . (b) Comportamento assintótico de  $r(t)$  em função da intensidade de acoplamento  $K$ . Obtido de [Strogatz, 2000]. 7
- 1.5 Esquematização de um sistema excitável. Impulsos (entradas, coluna da esquerda) provocam no sistema (coluna do meio) diferentes tipos de resposta (saídas, coluna da direita). (a) Estímulo abaixo do limiar (linha tracejada) não provoca resposta, havendo apenas um retorno ao ponto fixo estável (ponto preto). (b) Caso o estímulo ultrapasse o limiar, o sistema consegue passar do ponto fixo instável (ponto cinza, separatriz) e responde com uma excursão no espaço de fase (disparo). (c) Amplitudes maiores não causam mudanças perceptíveis no formato do disparo. (d) Dois impulsos suficientemente afastados provocam respostas separadas no sistema. (e) Quando um segundo estímulo chega após um intervalo curto, é suprimido devido à refratariedade, podendo gerar uma resposta menor. Obtido de [Lindner et al., 2004]. 8
- 1.6 Rede mundo-pequeno (*small-world*) de alcance  $K = 2$ . Ao aumentar a probabilidade de religação  $p$ , aumenta-se a aleatoriedade interpolando entre uma rede regular e uma rede aleatória. Obtido de [Watts & Strogatz, 1998]. 10

- 1.7 (a) Fração de sítios infectados ao longo do tempo para diferentes valores de religação  $p$  ( $N = 10^4$ ). (b) Sincronização do sistema em função da religação  $p$ , medido através do parâmetro de ordem da eq. (1.16). Para as duas figuras,  $K = 3$ ,  $\tau_I = 4$ ,  $\tau_R = 9$ . Obtido de [Kuperman & Abramson, 2001]. No original,  $\tilde{r}$  é representado pela letra  $\sigma$ . 12
- 1.8 Parâmetro de ordem da eq. (1.16) em função de  $p$  para  $N = 10^4$ . (a)  $\tau_R = 144$ ,  $\tau_I = 64$  ( $\tau_0 = 208$ ); (b)  $\tau_R = 72$ ,  $\tau_I = 32$  ( $\tau_0 = 104$ ); (c)  $\tau_R = 36$ ,  $\tau_I = 16$  ( $\tau_0 = 52$ ); (d)  $\tau_R = 18$ ,  $\tau_I = 8$  ( $\tau_0 = 26$ ); (e)  $\tau_R = 9$ ,  $\tau_I = 4$  ( $\tau_0 = 13$ ). Obtido de [Gade & Sinha, 2005]. 12
- 1.9 Fração de sítios infectados ao longo do tempo para  $\tau = 6$  e diferentes valores de  $z$ . (a) Em  $z = 2$  o sistema relaxa para o ponto fixo estável. (b) Para valores maiores de  $z$ , oscilações de baixa amplitude surgem. (c) Em  $z = 11$ , o sistema apresenta comportamento de período 15. (d) Para  $z = 13$ , as oscilações apresentam maior amplitude e são quasiperiódicas. Obtido de [Girvan et al., 2002]. 15
- 1.10 Diferentes fases no modelo de Girvan et al., onde curvas sólidas indicam as fronteiras obtidas da análise de estabilidade linear e símbolos obtidos numericamente. A extinção da epidemia ocorre quando o mínimo da oscilação está abaixo de  $1/N$ . Obtido de [Girvan et al., 2002]. A linha tracejada indica a localização do modelo SIRS determinístico de três estados ( $\tau = 2$ ). 16
- 1.11 Caracterização da rede e dinâmica dos sítios ativos. Simulações com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  e  $n = 10$  estados. (a) Distribuição de probabilidade para a taxa de ramificação local e conectividade (no detalhe). (b) Densidade instantânea de sítios ativos (em três rodadas diferentes) para distintos valores de  $\sigma$ . (c,d) Densidade instantânea para todos os sítios (painel superior) e raster plot para um conjunto de  $10^3$  sítios escolhidos aleatoriamente (painel inferior). Observe o surgimento de oscilações autossustentadas em (d). Obtido de [Kinouchi & Copelli, 2006]. 18

- 1.12 Medidas experimentais da atividade in-vitro. As diferentes drogas inibem (AP5/DNQX) e facilitam (PTX) as sinapses; “no drug” representa a ausência de fármacos. (a) Aparato experimental observado por microscopia óptica. (b) Diferença de potencial no meio extracelular em função do número de spikes registrado. (c) Atividade espontânea da fatia. (d) Atividade estimulada através de pulsos. Observe a presença de uma possível biestabilidade na rede excitada (ver texto). Obtido de [Shew et al., 2009]. Modificado com setas para indicar os estímulos (abaixo) e destaque para a região com oscilações coletivas (círculo verde). 21
- 2.1 Dinâmica de um sítio.  $p_{inf}$  é a probabilidade do sítio ser ativado ( $0 \rightarrow 1$ ) pelos vizinhos,  $p_\gamma$  é a probabilidade de transitar do estado refratário relativo ( $\tau$ ) para o estado de repouso (0). Estado ativo em vermelho. Todos os estados em cinza são refratários. 24
- 2.2 Série temporal para  $p_\gamma = 0.85$  e diferentes valores de  $\sigma$  em um grafo completo com  $N = 5 \times 10^5$  sítios. De cima para baixo: (a) estado absorvente (não-ativo), (b) estado ativo sem oscilações, (c) com oscilações e (d) novamente ativo sem oscilações.  $P_0(0) = 0.95$ ,  $P_0(1) = 0.05$ .  $\tau = 3$ . 26
- 2.3 Ilustração do comportamento do vetor  $Z$  (representado por um número no plano complexo) para osciladores uniformes (círculos pretos) nos regimes (a) incoerente (sem sincronização), (b) e (c) sincronizados. 27
- 2.4 Ilustração do comportamento do vetor  $Z$  (representado por um número no plano complexo) para elementos excitáveis (círculos pretos) em diferentes instantes de tempo (a) e (b). A presença de um estado absorvente e um estado refratário probabilístico faz com que o vetor  $Z$  oscile em torno de um novo centro de massa do sistema. 28
- 3.1 Ciclos de histerese para o grafo completo ( $N = 10^5$ ,  $2.5 \times 10^5$  e  $10^6$ ) para  $p_\gamma = 0.95$ ,  $0.9$ ,  $0.8$  e  $0.75$ .  $t_{max} = 1 \times 10^3$  passos ( $t_{trans} = 500$ ) e  $\delta\sigma = 0.05$ . Média (símbolos) e erro padrão (barras) calculados sobre 10 rodadas para o grafo completo. O resultado para o mapa de campo médio (a ser apresentado na seção 3.2) é representado pelos círculos opacos. No detalhe temos uma ampliação da região interessante  $4 \leq \sigma \leq 10$ . Perceba que as flutuações no detalhe de (d) decrescem com o aumento do tamanho de rede onde a aproximação de campo médio (seção 3.2) prevê  $q = 0$  no limite termodinâmico (ver também seção 4.3). 31

- 3.2 Curva de bifurcação do mapa de campo médio para  $p_\gamma = 0.9$ . A curva vermelha indica os extremos das oscilações de  $P_i(1)$ . Linhas tracejadas indicam os pontos críticos definidos na seção 3.1. 35
- 3.3 Diagrama de fases para o grafo completo (triângulos) com  $N = 10^6$  (média sobre 50 rodadas,  $t_{max} = 10^3$  e  $t_{trans} = 5 \times 10^2$ ). A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise de estabilidade local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante (conforme previsto por campo médio). Note que as linhas preta e azul se aproximam antes de se unirem em  $\sigma_T$ . No detalhe: primeiro coeficiente de Lyapunov  $l_1(\sigma)$  ao longo da curva crítica. 36
- 3.4 Séries temporais do grafo completo para diferentes tamanhos de sistema ( $N = 10^3, 10^4$  e  $10^5$ ) em uma região onde o campo médio não prevê oscilações ( $\sigma = 8, p_\gamma = 0.77$ ). Note que as flutuações (oscilações) são maiores para tamanhos menores do sistema. 38
- 3.5 Ciclos de histerese da solução de campo médio para diferentes períodos  $\tau = 4, 5$  e  $6$  com  $p_\gamma = 0.5$ . Note que a sincronização é facilitada pelo aumento de  $\tau$ . Outros parâmetros:  $t_{max} = 10^4, t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 0.1$ . 39
- 4.1 Diagrama de fases para grafos aleatórios (congelados) com (a)  $K = 300$ , (b)  $K = 150$  e (c)  $K = 30$ . A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação de Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante (conforme previsto por campo médio). Símbolos são obtidos através da simulação (média sobre 5 rodadas) com  $t_{max} = 3 \times 10^3, t_{trans} = 2 \times 10^3$  e  $N = 10^5$ . Erros padrão são menores que o tamanho do símbolo. A linha tracejada roxa é um guia para os olhos e marca o limite de estabilidade das simulações. 41
- 4.2 Diagrama de fases para grafos aleatórios (congelados) com (a)  $K = 30$ , (b)  $K = 20$  e (c)  $K = 10$ . A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação de Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante. Símbolos são obtidos através da simulação (média sobre 5 rodadas) com  $t_{max} = 3 \times 10^3, t_{trans} = 2 \times 10^3$  e  $N = 10^5$ . Erros padrão são menores que o tamanho do símbolo. As áreas pintadas de cinza indicam a região proibida onde  $\sigma > K$ . No detalhe:  $\sigma_T$  para diferentes valores de  $K$ , mostrando a existência de um  $K_c = \sigma_T(K_c) = 7.8074(1)$  abaixo do qual não há mais a região de coexistência. 42

- 4.3 Parâmetro de ordem para diferentes tamanhos de rede  $N$  ( $p_\gamma = 0.9$ ,  $K = 150$ ;  $\sigma_c = 5.16$ ). Média sobre 15 rodadas, com erros padrão menores que o tamanho do símbolo. Outros parâmetros foram  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ . 44
- 4.4 Dependência do parâmetro de ordem  $q$  com o tamanho da rede  $N$ , na região subcrítica ( $\sigma < \sigma_c = 5.16$ ) para  $p_\gamma = 0.9$  e  $K = 150$ . Médias (símbolos) calculadas sobre 15 rodadas com erros padrão (barras). Retas são ajustes lineares aos pontos. Perceba que suficientemente longe do ponto crítico o parâmetro de ordem  $q \propto N^{-1/2}$ . Outros parâmetros são  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ . 45
- 4.5 Colapso dos pontos da simulação em um regime probabilístico ( $p_\gamma = 0.9$ ) com  $K = 150$  e  $\sigma_c = 5.16$ . Foram utilizados  $\beta = 1/2$ ,  $v_\perp = 1/2$ ,  $d_c = 4$ . Média sobre 15 rodadas, com erros padrão menores que o tamanho do símbolo. Outros parâmetros foram  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ . 46

## CAPÍTULO 1

# Introdução

A sincronização foi descoberta por Huygens em 1665 e desde então se mostrou um problema desafiador. Com aplicações na física, química, biologia e neurociência (entre outras), foi objeto de estudo de muitos pesquisadores. Neste capítulo veremos a história da sincronização em osciladores uniformes, com alguns de seus principais modelos. Por fim, falaremos do fenômeno das oscilações coletivas em elementos excitáveis, muito semelhante à sincronização, com ênfase nos trabalhos recentemente desenvolvidos para autômatos celulares.

### 1.1 Sincronização

No século 17, o relógio de pêndulo desenvolvido por Christiaan Huygens<sup>1</sup> aparecia como possível solução para o problema da longitude<sup>2</sup>, pois era muito mais preciso que os outros relógios da época. Um dia, deitado, adoentado, Huygens observava calmamente dois de seus relógios fixados a uma mesma viga de madeira. Notou um fenômeno curioso: ambos tiquetaqueavam simultaneamente. Oscilavam com a mesma frequência, embora em sentidos opostos. Tentou perturbar um deles. Agora oscilavam distintamente, mas Huygens percebia que a cada período eles se aproximavam mais. Após 30 minutos, estavam de volta tiquetaqueando ao mesmo tempo. Era, em 1665, a primeira observação do que mais tarde seria chamado de sincronização (para uma reprodução moderna do experimento, ver [Bennett et al., 2002]).

Muito comum no mundo natural, a sincronização pode ser encontrada em fenômenos tão diversos quanto o piscar dos vaga-lumes [Buck & Buck, 1976; Mirollo & Strogatz, 1990], células marca-passo cardíacas [Jalife, 1984; Mirollo & Strogatz, 1990], no ritmo circadiano (relógio biológico) [Enright, 1980], em osciladores caóticos [Rosenblum & Pikovsky, 2003] e até mesmo no aplauso de plateias [Néda et al., 2000]. É possivelmente um dos fenômenos não-lineares mais antigos já estudados [Rosenblum & Pikovsky, 2003].

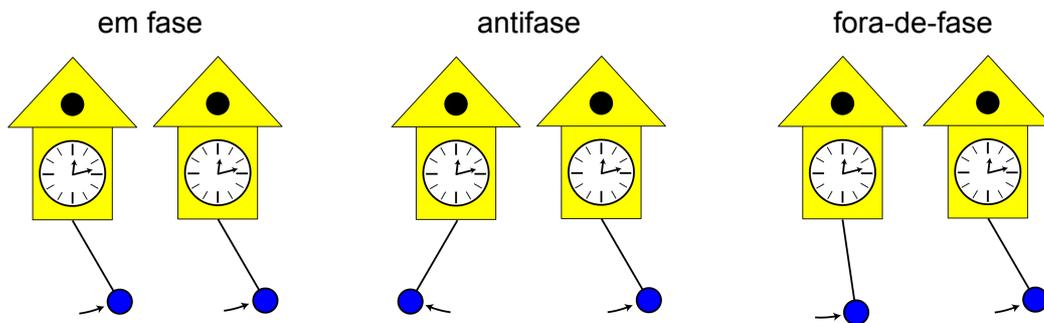
---

<sup>1</sup>Físico holandês, criador do relógio de pêndulo, cujas contribuições à cinemática e dinâmica são descritas em [Yoder, 1988].

<sup>2</sup>Havia a necessidade de se conhecer com precisão as horas de uma cidade de referência, dentro de uma embarcação. Comparando com a hora solar, um navegador poderia obter a longitude do local em que estava [Huygens, 1669].

### 1.1.1 Osciladores acoplados

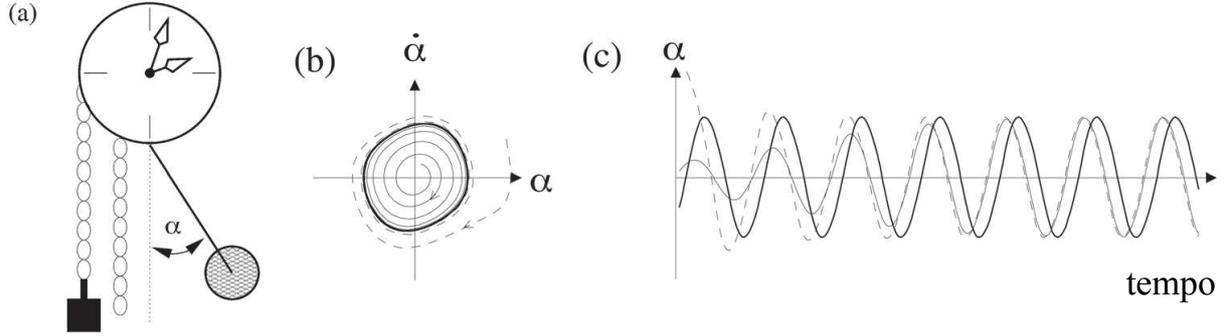
Podemos ver os pêndulos de Huygens como dois osciladores acoplados pelo movimento quase imperceptível [Bennett et al., 2002] da viga de madeira. Quando osciladores são (fracamente) acoplados, pode haver um regime de travamento de fase (“*phase locking*”). Isto faz com que oscilem na mesma frequência, mantendo constante uma separação de fase  $\phi$  entre eles. De acordo com esta diferença de fase, podemos classificar o travamento como: em fase (oscilam no mesmo sentido,  $\phi = 0$ ), antifase (oscilam em sentidos opostos,  $\phi = \pi$ ) e fora de fase (mantêm uma separação arbitrária,  $\phi \neq 0, \pi$ ). Os diferentes tipos de sincronização podem ser observados na figura 1.1. Alguns autores reservam o termo sincronização apenas para as oscilações em fase [Izhikevich, 2006].



**Figura 1.1** Diferentes tipos de sincronização (para dois osciladores), da esquerda para a direita: em fase (diferença de fase  $\phi = 0$ ), antifase ( $\phi = \pi$ ) e fora de fase ( $\phi \neq \pi, 0$ ). Obtido de [Izhikevich, 2006].

Os pêndulos dos relógios são osciladores autônomos: suas oscilações são descritas pela dinâmica interna, não exigindo condução por forças externas [Rosenblum & Pikovsky, 2003]. Podemos descrever a dinâmica destes osciladores através de poucas variáveis. No caso dos pêndulos, por exemplo, temos que o ângulo com a normal e a velocidade angular são as coordenadas necessárias para descrever o estado que o sistema se encontra. Ao espaço de estados formado por estas variáveis, damos o nome de espaço de fase.

A trajetória descrita por um oscilador no espaço de fase, devido à periodicidade, será fechada. Isto pode ser melhor visto na figura 1.2. Também conhecida como ciclo-limite [Strogatz, 1997], esta curva fechada é atratora. Pequenas perturbações externas podem modificar a amplitude do oscilador, mas logo decaem, levando o oscilador de volta ao ciclo-limite. Uma aproximação é parametrizar a posição do oscilador ao longo desta curva com uma nova variável  $\theta$ ,



**Figura 1.2** (a) Pêndulo de Huygens forma um ângulo  $\alpha$  com a normal. (b) A evolução temporal faz com que sua trajetória no espaço de fase  $(\alpha, \dot{\alpha})$  seja atraída para o ciclo-limite. (c) Série temporal mostra a evolução para diferentes condições iniciais. Obtido de [Rosenblum & Pikovsky, 2003].

representando a fase do oscilador, de tal forma que

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \quad (1.1)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural das oscilações [Wilson, 1999; Rosenblum & Pikovsky, 2003].

As perturbações na fase podem ser vistas como translações temporais, não interferindo na dinâmica interna do oscilador. Assim, ao contrário da amplitude, que é estável, perturbações na fase não decaem nem crescem ao longo do tempo. Isto permite que influências externas (acoplamentos fracos com outros osciladores ou conduções por forças externas, por exemplo) modifiquem consideravelmente a fase do oscilador, permitindo sua *sincronização* [Rosenblum & Pikovsky, 2003].

Nesta aproximação, fornecendo um modelo simples, podemos desconsiderar o formato das oscilações (suas amplitudes e formas de onda) e nos ater apenas à fase. Por exemplo, dois osciladores de fases  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , acoplados, podem ser descritos por

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + F_1(\theta_2 - \theta_1), \quad (1.2)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + F_2(\theta_1 - \theta_2), \quad (1.3)$$

onde  $F_1(\phi)$  e  $F_2(-\phi)$ , considerando a diferença de fase  $\phi = \theta_2 - \theta_1$ , definem o tipo de acoplamento e precisam ser periódicas com período  $2\pi$  [Wilson, 1999]. Tipicamente, são escolhidas na forma

$$F_i(\phi) = a_i \sin(\phi + b), \quad (1.4)$$

onde  $a_i$  representa a intensidade do acoplamento e  $b$  um atraso na fase [Cohen et al., 1982;

Wilson, 1999]. Finalmente, a equação que governa o movimento de um dos osciladores é

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + a_1 \text{sen}(\phi + b) . \quad (1.5)$$

Nesta equação percebemos que a velocidade angular será ajustada pelo acoplamento, acelerando ou desacelerando o oscilador de acordo com a diferença de fase e o valor da intensidade de acoplamento  $a_i$  [Wilson, 1999].

Este modelo encontra as mais diversas aplicações. É mostrado por Cohen et al. que o movimento natatório de lampreias pode ser explicado pelo acoplamento entre osciladores nos segmentos de seu corpo. A interação ocorre de forma a gerar uma diferença de fase constante entre os segmentos, produzindo ondas de ativação que causam o movimento rítmico associado à natação [Cohen et al., 1982; Wilson, 1999]. Acredita-se existir em animais estruturas especiais chamadas CPG (“*central pattern generators*”, ou geradores de padrão centrais), responsáveis por gerar movimentos oscilatórios.

Estas estruturas especializadas evitam que o animal dedique atenção a tarefas comuns e rítmicas como caminhar, correr ou até mesmo digerir alimentos. Há um certo consenso de que o acoplamento entre osciladores é um dos ingredientes fundamentais dos CPGs [Wilson, 1999], já que seria a forma mais eficiente de gerar diferentes padrões com poucos elementos. Ao caminharmos, nossas pernas precisam oscilar em antifase (como os pêndulos de Huygens) para que mantenhamos nosso equilíbrio. Um CPG identificado e muito estudado está presente no gânglio estomogástrico de crustáceos, sendo responsável pelo controle da digestão [Bal et al., 1988].

Além deste interesse mecânico, existe na neurociência a ideia de que a sincronização (mais especificamente, as oscilações coletivas de neurônios, como veremos a seguir) pode explicar fenômenos como o “binding problem” (problema da ligação), em que propriedades distintas de um objeto, usualmente identificadas em áreas diferentes do cérebro como forma e cor, podem ser percebidas simultaneamente [Singer, 1999]. Mais recentemente, o foco foi direcionado para processos de atenção e consciência [Uhlhaas et al., 2009].

Podemos agora nos perguntar o que ocorre quando uma população muito grande de osciladores é acoplada. O caso mais simples é considerar que cada oscilador está acoplado a todos os outros, um acoplamento global.

### 1.1.2 Acoplamento global e o modelo de Kuramoto

Um dos primeiros estudos bem-sucedidos de sincronização com muitos osciladores foi realizado por Winfree, em 1967, quando ainda era estudante. Tratava-se de um modelo muito geral, com acoplamento por pulso. Diferentemente do que foi visto na seção anterior (chamado de acoplamento por fase), o acoplamento por pulso ocorre quando os osciladores influenciam os outros apenas após um certo limiar ser ultrapassado [Winfree, 1967; Mirollo & Strogatz, 1990]. Vaga-lumes apenas enxergam (e portanto influenciam) uns aos outros quando piscam, emitindo luz (pulso) [Buck & Buck, 1976].

Os modelos com acoplamento por pulso, em geral, são mais difíceis de se tratar matematicamente pela não-linearidade do pulso [Mirollo & Strogatz, 1990]. Considerando simulações e algumas aproximações (como os osciladores serem atraídos por uma influência média, e estarem fracamente acoplados), Winfree observou [Winfree, 1967] que havia a necessidade da distribuição de frequências próprias dos osciladores ser estreita para que os osciladores sincronizassem. Também identificou a existência de uma intensidade mínima de acoplamento, abaixo da qual a sincronização não ocorreria: uma espécie de transição de fase temporal, ao invés de espacial [Strogatz, 2000]. Embora inspirador, o modelo de Winfree era complexo demais para ser resolvido completamente. Isto incentivou os pesquisadores a buscarem outras formas de atacar o problema da sincronização.

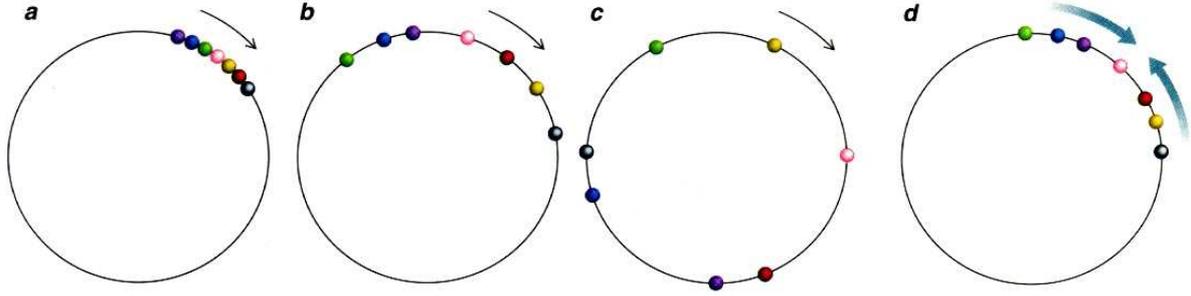
Em 1975, um modelo proposto por Kuramoto considerou um conjunto de osciladores de fase, acoplados pelo seno de suas diferenças de fase [Kuramoto, 1984; Strogatz, 2000] (semelhante à eq. (1.5)):

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

na esperança de obter um modelo mais simples que ainda preservasse os fenômenos observados por Winfree [Acebrón et al., 2005]. Diferentemente da eq. (1.5), agora considera-se todos os osciladores com a mesma intensidade de acoplamento:  $a_i = K, \forall i = 1, \dots, N$ .

Na figura 1.3 podemos observar um conjunto de osciladores com diferentes frequências  $\omega_i$ , representando o comportamento para o caso desacoplado [figura 1.3(a-c)], onde os osciladores se afastam uns dos outros, e o caso acoplado [figura 1.3(d)] onde os diferentes osciladores se aproximam. Podemos supor que os osciladores estão sobre um círculo unitário no plano complexo. Com esta ideia, Kuramoto propôs o parâmetro de ordem complexo [Kuramoto, 1984; Strogatz, 2000]:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (1.7)$$



**Figura 1.3** Conjunto de osciladores com frequências distintas começam com fases próximas em (a), mas se separam devido às diferenças de velocidade (b,c). Por fim, um acoplamento que adiante os lentos e retarde os mais rápidos pode aproximá-los (d). Obtido de [Strogatz & Stewart, 1993].

que pode ser visualizado como um centro de massa das fases dos osciladores, onde  $r(t)$  mede a coerência e  $\psi(t)$  representa a fase média dos osciladores [Strogatz, 2000]. Se todos os osciladores estiverem se movendo de forma incoerente,  $r \approx 0$ . Se todos estiverem com a mesma fase (sincronizados),  $r \approx 1$ . Isto será visto com mais detalhes na seção 2.3.

Kuramoto também percebeu que seu parâmetro de ordem poderia ser utilizado para simplificar a eq. (1.6). Multiplicando por  $e^{-i\theta_i}$  os dois lados da equação (1.7) [Strogatz, 2000], encontramos

$$re^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}. \quad (1.8)$$

Igualando as partes imaginárias, vemos que

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (1.9)$$

que pode ser finalmente substituído na eq. (1.6):

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i). \quad i = 1, \dots, N \quad (1.10)$$

Com este resultado, uma das aproximações de Winfree foi justificada: os osciladores são na realidade acoplados apenas com a fase média  $\psi$ ! Além disso, devido ao crescimento de  $r$ , podemos observar que a intensidade de acoplamento  $Kr$  aumentará quanto mais osciladores estiverem próximos da fase média  $\psi$ .

Kuramoto, considerando uma distribuição de frequências<sup>3</sup>  $g(\omega)$ , mostrou que haverá uma

<sup>3</sup>A distribuição  $g(\omega)$  precisa ser simétrica,  $g(\omega) = g(-\omega)$ . Essa restrição em geral pode ser satisfeita ao se considerar um referencial que gire com a frequência média da distribuição [Strogatz, 2000].

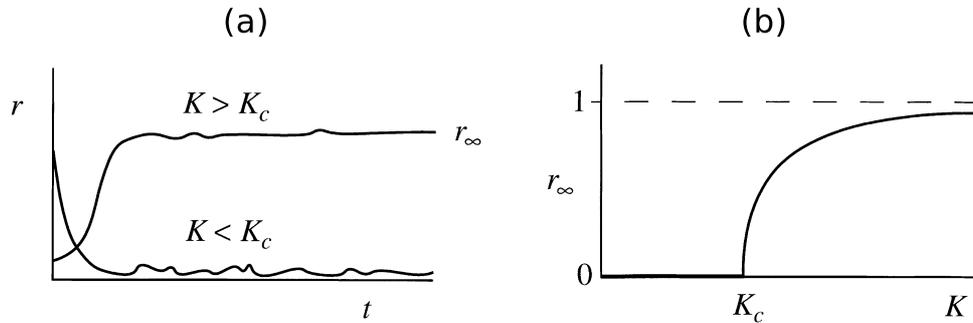
intensidade mínima  $K_c = \frac{2}{\pi g(0)}$  [Kuramoto, 1984; Strogatz, 2000] abaixo da qual os osciladores não sincronizam, como também havia previsto Winfree. Por fim, o comportamento de  $r$  para  $K \geq K_c$  é dado [Kuramoto, 1984] por

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (1.11)$$

Próximo à transição (no limite  $K \rightarrow K_c^+$ ), temos

$$r \propto (K - K_c)^{1/2}. \quad (K \rightarrow K_c^+) \quad (1.12)$$

Séries temporais e o comportamento assintótico de  $r$  em função da intensidade de acoplamento  $K$  encontram-se esquematizadas na figura 1.4.



**Figura 1.4** (a) Série temporal típica do modelo de Kuramoto para diferentes valores de  $K$ . (b) Comportamento assintótico de  $r(t)$  em função da intensidade de acoplamento  $K$ . Obtido de [Strogatz, 2000].

Uma análise mais detalhada do modelo de Kuramoto, com discussão sobre a estabilidade de suas soluções, a determinação de  $K_c$  ou mesmo aplicações do modelo, pode ser encontrada em [Strogatz, 2000; Acebrón et al., 2005].

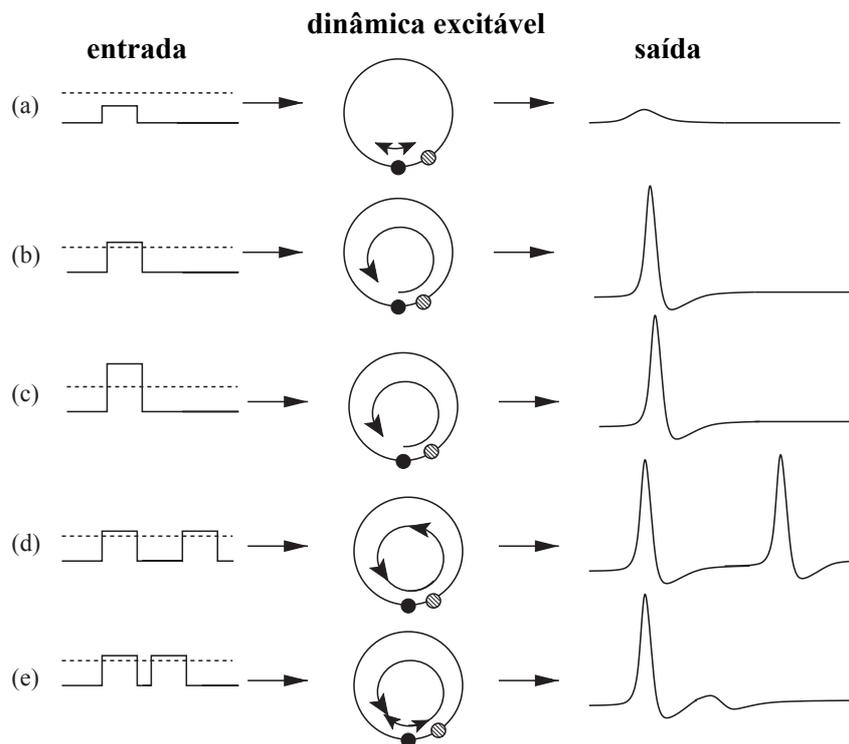
O modelo de Kuramoto solucionou em grande parte o problema dos *osciladores* acoplados, justificando as simplificações do modelo de Winfree, além de explicar as observações de uma intensidade mínima de acoplamento e a dependência com a fase média. Entretanto, podemos encontrar fenômenos semelhantes em elementos que não apresentam oscilações autônomas, como os *elementos excitáveis*.

## 1.2 Sincronização em elementos excitáveis

A excitabilidade é uma propriedade comum na natureza, sendo observada em neurônios [Koch, 1999; Izhikevich, 2000], tecidos cardíacos [Kaplan et al., 1988], reações químicas [Vanag et al.,

2000], entre outros. Em comum entre esses está o fato de possuírem estados de repouso (quiescência), atividade (excitação ou disparo) e refratariedade (recuperação), características principais de elementos excitáveis [Lindner et al., 2004].

Quando um elemento excitável encontra-se em repouso, a chegada de um estímulo externo pode fazê-lo ir para o estado excitado. Após algum tempo excitado, o sistema entra no estado refratário onde não responde mais a estímulos externos (ou o faz de forma reduzida). Passado um certo tempo refratário, há o retorno para o repouso.



**Figura 1.5** Esquemática de um sistema excitável. Impulsos (entradas, coluna da esquerda) provocam no sistema (coluna do meio) diferentes tipos de resposta (saídas, coluna da direita). (a) Estímulo abaixo do limiar (linha tracejada) não provoca resposta, havendo apenas um retorno ao ponto fixo estável (ponto preto). (b) Caso o estímulo ultrapasse o limiar, o sistema consegue passar do ponto fixo instável (ponto cinza, separatriz) e responde com uma excursão no espaço de fase (disparo). (c) Amplitudes maiores não causam mudanças perceptíveis no formato do disparo. (d) Dois impulsos suficientemente afastados provocam respostas separadas no sistema. (e) Quando um segundo estímulo chega após um intervalo curto, é suprimido devido à refratariedade, podendo gerar uma resposta menor. Obtido de [Lindner et al., 2004].

A visão dinâmica de um sistema excitável está representada na figura 1.5. Enquanto o ponto fixo estável (ponto preto) atrai o sistema para o estado de repouso, um ponto fixo instável (ponto cinza) serve de limiar (separatriz) para a ocorrência de um disparo (*spike*). Um impulso pequeno (abaixo do limiar) faz com que o sistema se afaste do ponto fixo estável, mas logo

retorne [figura 1.5(a)]. Quando o estímulo é suficiente para passar o ponto fixo instável, o sistema excursiona o espaço de fase, gerando o disparo [figura 1.5(b)]. A amplitude do estímulo em geral não importa: sendo suficiente para ultrapassar o limiar, a curva do disparo é pouco influenciada [figura 1.5(c)]. Dois estímulos suficientemente afastados geram dois spikes [figura 1.5(d)]. Quando os estímulos são muito próximos, o segundo não provoca uma resposta tão intensa quanto o primeiro devido à refratariedade [figura 1.5(e)] [Lindner et al., 2004].

Podemos ver que o estado de repouso é o único estável na dinâmica do sistema. Isto faz com que o estímulo externo (um outro elemento excitável, ou uma condução externa) precise ser mantido para que haja a continuação do disparo.

Nos últimos anos houve um interesse crescente no estudo das oscilações coletivas de elementos excitáveis, onde vários destes elementos disparam juntos. Revisitaremos agora alguns dos principais modelos e resultados, com algumas observações experimentais ao final.

### 1.2.1 Modelo SIRS de tempo discreto

O modelo SIRS (suscetível-infectado-recuperado-suscetível) é um dos mais simples para elementos excitáveis. Consiste de 3 estados discretos, representando a quiescência (“suscetível”), atividade (“infectado”) e refratariedade (“recuperado”) [Lindner et al., 2004].

Em sua versão *probabilística*, considera-se que cada sítio suscetível (S) possa se tornar infectado (I) com probabilidade  $p_\lambda$  para *cada* vizinho infectado. Um sítio infectado, por sua vez, pode passar ao estado recuperado (refratário) com uma probabilidade constante  $p_\delta$ . Um sítio recuperado estará suscetível (em repouso) no próximo passo de tempo com probabilidade  $p_\gamma$  [Assis & Copelli, 2008]. De forma resumida, as probabilidades de transição de um sítio são portanto

$$P(S \rightarrow I) = 1 - (1 - p_\lambda)^{k_{inf}}, \quad (1.13)$$

$$P(I \rightarrow R) = p_\delta, \quad (1.14)$$

$$P(R \rightarrow S) = p_\gamma, \quad (1.15)$$

onde  $k_{inf}$  é a quantidade de sítios infectados em sua vizinhança<sup>4</sup>.

Podemos ver que quando  $p_\lambda = 0$  (células desacopladas), não haverá novas infecções pois  $P(S \rightarrow I) = 0$ . Todos os sítios após um certo tempo estarão no estado suscetível. Como um elemento excitável não sai espontaneamente do repouso, dizemos que esta é uma fase *absor-*

<sup>4</sup>O modelo SIRS pode ser definido em diferentes topologias, mas as equações para um sítio permanecem as mesmas. Assim, consideraremos (por enquanto) uma vizinhança qualquer.

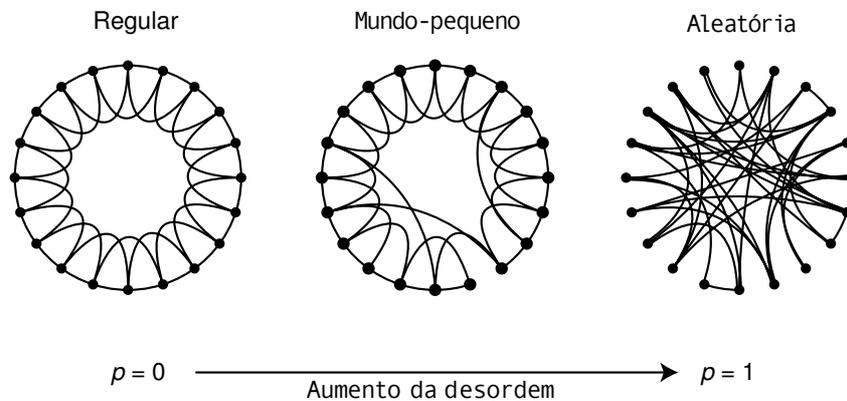
vente do comportamento coletivo do sistema. Pode-se observar que acima de um certo valor de probabilidade de transmissão  $p_\lambda$ , o sistema apresentará uma fase *ativa*, onde uma fração não-nula de sítios infectados permanece ativa indefinidamente [Assis & Copelli, 2008].

Embora a solução coletiva do sistema apresente esta transição entre uma fase absorvente e uma fase ativa, não há evidências de que este modelo apresente um regime oscilatório estável. Como veremos na seção 1.2.3, aparentemente não é possível para um modelo de três estados deste tipo exibir oscilações coletivas estáveis.

Veremos agora alguns trabalhos que consideraram variações do modelo SIRS, onde a célula passa um número fixo de passos de tempo em um estado. Modelos desse tipo são chamados de SIRS *determinísticos*.

### 1.2.2 Modelo Kuperman-Abramson

Kuperman e Abramson estudaram os efeitos da topologia na sincronização de elementos excitáveis, e descrevemos aqui seu modelo [Kuperman & Abramson, 2001]. Consideraram uma rede mundo-pequeno [Watts & Strogatz, 1998], onde as conexões entre os  $N$  elementos formam inicialmente uma cadeia unidimensional de alcance  $K$  e são religadas com probabilidade  $p$ , como na figura 1.6.



**Figura 1.6** Rede mundo-pequeno (*small-world*) de alcance  $K = 2$ . Ao aumentar a probabilidade de religação  $p$ , aumenta-se a aleatoriedade interpolando entre uma rede regular e uma rede aleatória. Obtido de [Watts & Strogatz, 1998].

O modelo utilizado se baseia no modelo SIRS de tempo discreto com tempos fixos (também chamado de Greenberg-Hastings [Greenberg & Hastings, 1978]). Isto é, cada célula pode estar suscetível (S), infectado (I) ou recuperado (R). Um elemento suscetível só se tornará infectado caso algum de seus vizinhos lhe transmita a infecção. Após  $\tau_I$  passos de tempo, os sítios infectados passam para o estado recuperado. Os recuperados retornam ao estado suscetível

após  $\tau_R$  passos de tempo. Kuperman e Abramson consideram que a transmissão de infecção ocorre proporcional à fração de vizinhos infectados  $k_{inf}/k$  (onde  $k_{inf}$  é o número de vizinhos infectados e  $k$  o número de vizinhos da célula).

Com exceção da infecção, a transição nos outros estados ocorre de forma *determinística*. Cada sítio  $j = 1, \dots, N$  possui um estado<sup>5</sup>  $s_j = 0, 1, 2, \dots, \tau_I - 1, \tau_I, \tau_I + 1, \dots, \tau_I + \tau_R \equiv \tau_0$  descrevendo a evolução temporal da doença (suscetível:  $s_j = 0$ ; infectado:  $0 < s_j \leq \tau_I$ ; recuperado:  $\tau_i < s_j \leq \tau_0$ ).

Eles observaram que para valores suficientemente grandes de  $p$  surgem oscilações coletivas. Na figura 1.7(a), podemos observar o comportamento da fração de sítios infectados ao longo do tempo para diferentes valores de  $p$ , mostrando que para  $p = 0.9$  o regime oscilante já é estável. Para caracterizá-las, utilizam um parâmetro de ordem similar ao da eq. (1.7):

$$\tilde{r}(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)} \right|, \quad (1.16)$$

onde é utilizada a fase  $\phi_j(t) = 2\pi(s_j - 1)/\tau_0$ . Além disso, decidem excluir os elementos com  $s_j = 0$  da soma, considerando apenas a parte determinística dos ciclos.

Como no caso de Kuramoto (seção 1.1.2), o parâmetro de ordem  $\tilde{r}$  é pequeno quando o sistema não está sincronizado e cresce à medida que o sistema se torna mais sincronizado. A sincronização perfeita ocorreria em  $\tilde{r} = 1$ , mas logo todos os sítios voltariam ao repouso (estado absorvente) ao mesmo tempo, e a atividade cessaria.

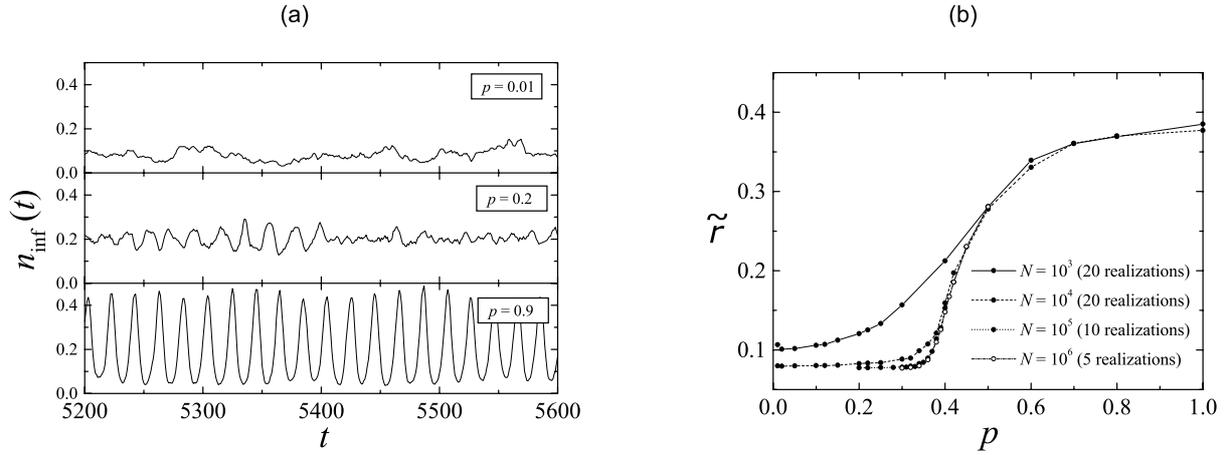
Utilizando o parâmetro de ordem, Kuperman e Abramson argumentam que a transição para o estado oscilatório ocorre em  $p_c = 0.4$  [como pode ser observado na figura 1.7(b)], portanto já distante do regime de mundo-pequeno [Watts & Strogatz, 1998; Newman & Watts, 1999]. Isto indica que a correlação entre os sítios (alta no regime de mundo-pequeno) prejudica a sincronização.

Em um trabalho recente, Gade e Sinha [Gade & Sinha, 2005] utilizaram o mesmo parâmetro de ordem de Kuperman e Abramson e mostraram que ao serem aumentados os tempos  $\tau_I$  e  $\tau_R$ , observa-se um decréscimo no  $p_c$  em que ocorre a transição para um estado coerente, como pode ser visto na figura 1.8.

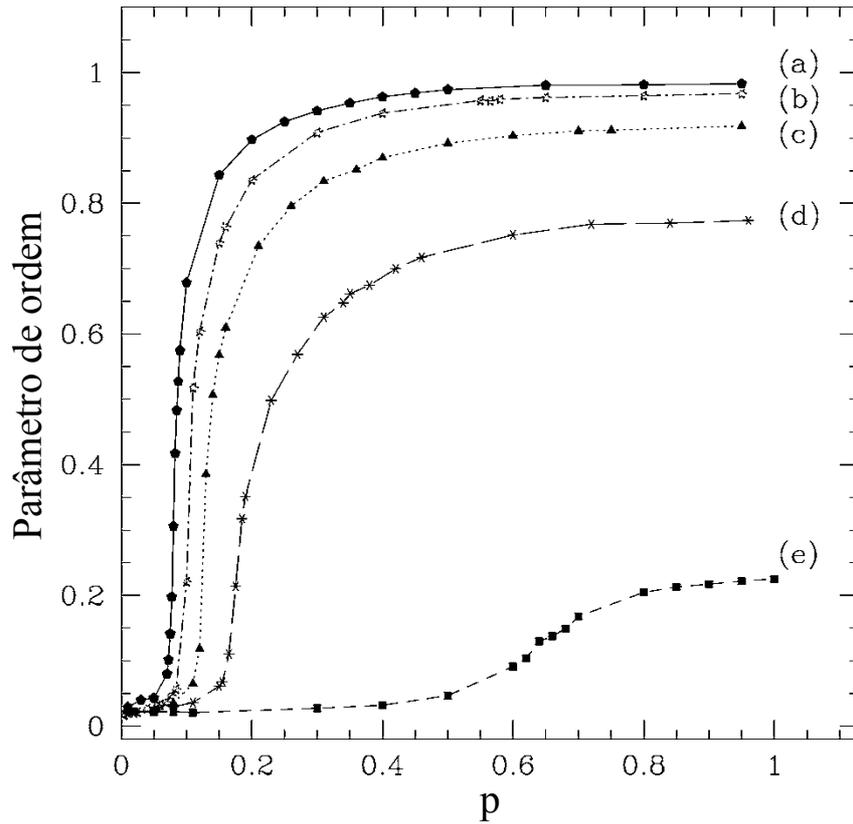
Este efeito em  $p_c$  com o aumento dos tempos demonstra que apenas a topologia não é suficiente para explicar o fenômeno da sincronização, e a escala de tempo (ou seja, o número de estados no modelo) também precisa ser considerada.

---

<sup>5</sup>Para o modelo SIRS padrão, teríamos  $s_j = 0, 1, 2$ . O número de estados de um sítio pode ser diferente do número de estados epidêmicos (S,I,R). Isto é, diferentes estados podem representar o mesmo comportamento epidêmico.



**Figura 1.7** (a) Fração de sítios infectados ao longo do tempo para diferentes valores de religação  $p$  ( $N = 10^4$ ). (b) Sincronização do sistema em função da religação  $p$ , medido através do parâmetro de ordem da eq. (1.16). Para as duas figuras,  $K = 3$ ,  $\tau_I = 4$ ,  $\tau_R = 9$ . Obtido de [Kuperman & Abramson, 2001]. No original,  $\tilde{r}$  é representado pela letra  $\sigma$ .



**Figura 1.8** Parâmetro de ordem da eq. (1.16) em função de  $p$  para  $N = 10^4$ . (a)  $\tau_R = 144$ ,  $\tau_I = 64$  ( $\tau_0 = 208$ ); (b)  $\tau_R = 72$ ,  $\tau_I = 32$  ( $\tau_0 = 104$ ); (c)  $\tau_R = 36$ ,  $\tau_I = 16$  ( $\tau_0 = 52$ ); (d)  $\tau_R = 18$ ,  $\tau_I = 8$  ( $\tau_0 = 26$ ); (e)  $\tau_R = 9$ ,  $\tau_I = 4$  ( $\tau_0 = 13$ ). Obtido de [Gade & Sinha, 2005].

### 1.2.3 Modelo Girvan et al.

Consideraremos agora um modelo similar ao de Kuperman-Abramson, mas que se propõe a estudar apenas a dependência da sincronização com o número de estados (período) do modelo. Desta forma, emprega-se uma topologia mais favorável ao estudo analítico (rede aleatória), conforme será mostrado a seguir. Veremos com algum detalhe a análise, pois será útil para compreensão do que será realizado na seção 3.2.

O número maior de estados, ou seja, o tempo do retorno do estado recuperado (R) para o estado suscetível (S) no modelo SIRS foi justificado por Girvan et al. [Girvan et al., 2002] através de um modelo simples de patógeno, sujeito a mutações ao longo do tempo. Após um acúmulo de mutações, o patógeno seria suficientemente distinto da cepa original para não ser mais reconhecido pelo sistema imune. Isto promoveria um novo estado suscetível nos sítios sujeitos ao novo agente infeccioso.

Para estudar o comportamento deste modelo de patógeno, Girvan et al. utilizam um modelo SIRS de tempo discreto, semelhante ao visto na seção anterior. Quando um dos  $N$  sítios sofre infecção, fica por um passo de tempo no estado infectado e  $\tau - 1$  passos de tempo no estado imune. Estará de volta no repouso após  $\tau$  passos.

Eles definem  $p_{t+1}$  como a probabilidade de um dos sítios estar infectado no instante  $t + 1$ ,

$$p_{t+1} = x_t s_t, \quad (1.17)$$

onde  $x_t$  é a probabilidade do sítio ter sido exposto a uma infecção no instante  $t$  e  $s_t$  a probabilidade do sítio estar suscetível (ou a fração de sítios imunes) naquele mesmo instante. Supondo que a cada passo de tempo um dos  $Np_t$  sítios infectados possa infectar outros  $z$  sítios escolhidos aleatoriamente<sup>6</sup>, temos  $Np_t z$  infecções na rede. Uma vez escolhido o sítio, a infecção ocorre deterministicamente. A chance de que um elemento *não* seja alvo de nenhuma dessas infecções é simplesmente  $(1 - 1/N)^{Np_t z}$ , tornando a chance de exposição

$$x_t = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{Np_t z}. \quad (1.18)$$

Considerando ainda que a dinâmica do modelo é completamente determinística (após a infecção), a fração de sítios imunes no instante  $t$  será formada justamente por aqueles que não

<sup>6</sup>Também conhecido como desordem *annealed* ou recozida, ver seção 4.2.

foram infectados nos últimos  $\tau - 1$  passos de tempo. Isto é,

$$s_t = 1 - \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k}. \quad (1.19)$$

O que finalmente nos permite escrever

$$p_{t+1} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{Np_t z} \right] \left( 1 - \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} \right), \quad (1.20)$$

podendo ser simplificado para

$$p_{t+1} = (1 - e^{-z p_t}) \left( 1 - \sum_{k=0}^{\tau-1} p_{t-k} \right), \quad (1.21)$$

se considerarmos o limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ .

Este conjunto de  $\tau$  equações fornece um mapa [Strogatz, 1997]  $\tau$ -dimensional do modelo. Ao iterar este mapa, obtém-se uma ideia da dinâmica do sistema. Abaixo de um certo valor de  $z$ , o sistema possui um ponto fixo estável [figura 1.9(a)] e não oscila. Para um  $z$  levemente maior, oscilações de baixa amplitude surgem [figura 1.9(b)]. Com  $z$  ainda maiores, a amplitude é alta [figura 1.9(c)-(d)]. Esta amplitude maior se relaciona com o mínimo da curva, pois menos elementos excitáveis estarão disponíveis para disparar no próximo passo de tempo caso muitos tenham disparado. Para  $z$  suficientemente grande, as oscilações sofrem uma “extinção dinâmica”, ou seja, assumem um valor menor que  $1/N$ . Além disso, eles notam que não ocorrem oscilações para  $\tau \leq 2$ .

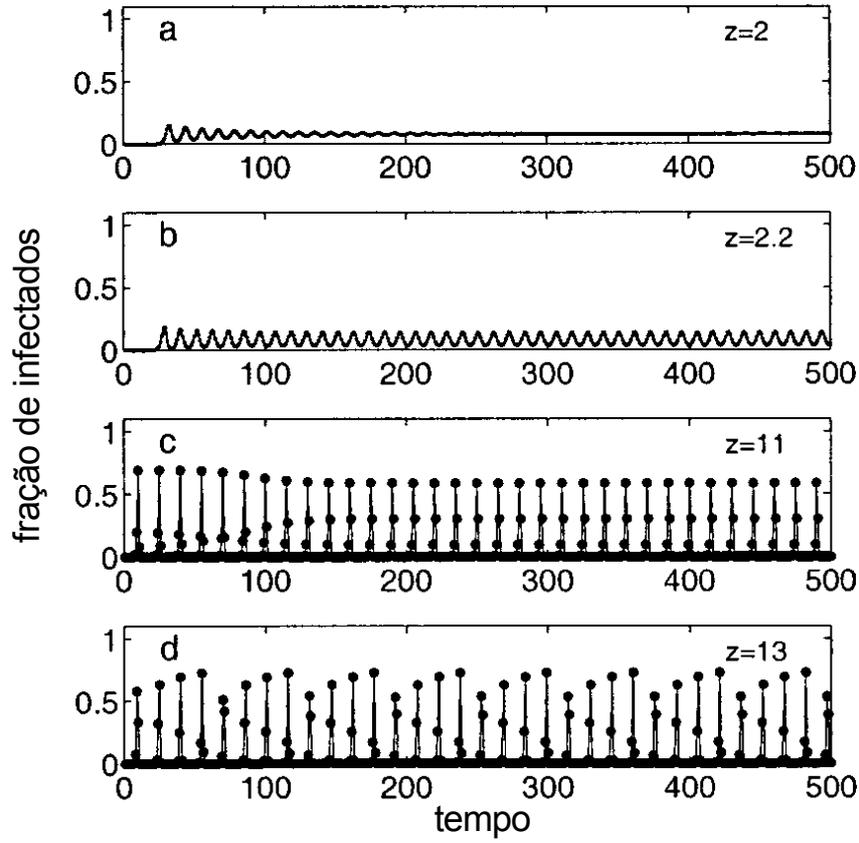
Os pontos fixos  $p^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_t$  [Strogatz, 1997] da eq. (1.21) são dados por

$$p^* = (1 - e^{-z p^*})(1 - \tau p^*). \quad (1.22)$$

Ao substituir  $q_t = p_t - p^*$  na eq. (1.21) e linearizando em torno de  $p^*$ , obtemos [Girvan et al., 2002]

$$q_{t+1} = \left[ z e^{-z p^*} (1 - \tau p^*) + e^{-z p^*} - 1 \right] q_t + (e^{-z p^*} - 1) \sum_{k=1}^{\tau-1} q_{t-k}. \quad (1.23)$$

Considerando uma autossolução do tipo  $q_t = q_0 \lambda^t$ , encontramos um polinômio caracterís-



**Figura 1.9** Fração de sítios infectados ao longo do tempo para  $\tau = 6$  e diferentes valores de  $z$ . (a) Em  $z = 2$  o sistema relaxa para o ponto fixo estável. (b) Para valores maiores de  $z$ , oscilações de baixa amplitude surgem. (c) Em  $z = 11$ , o sistema apresenta comportamento de período 15. (d) Para  $z = 13$ , as oscilações apresentam maior amplitude e são quasiperiódicas. Obtido de [Girvan et al., 2002].

tico cujas raízes são os autovalores do mapa:

$$\lambda^\tau + \alpha\lambda^{\tau-1} + \beta\lambda^{\tau-2} + \dots + \beta\lambda + \beta = 0, \quad (1.24)$$

onde  $\alpha = 1 - e^{-zp^*}(1 + z - z\tau p^*)$  e  $\beta = 1 - e^{-zp^*}$ .

Quando todos os  $\tau$  autovalores estão dentro do círculo unitário no plano complexo ( $|\lambda_i| < 1$ ,  $\forall i$ ), o ponto fixo do sistema é dito estável [Strogatz, 1997].

A solução trivial  $p^* = 0$  faz com que  $\alpha = z$  e  $\beta = 0$ . Assim, a equação dos autovalores se torna simplesmente

$$\lambda^{\tau-1}(\lambda - z) = 0. \quad (1.25)$$

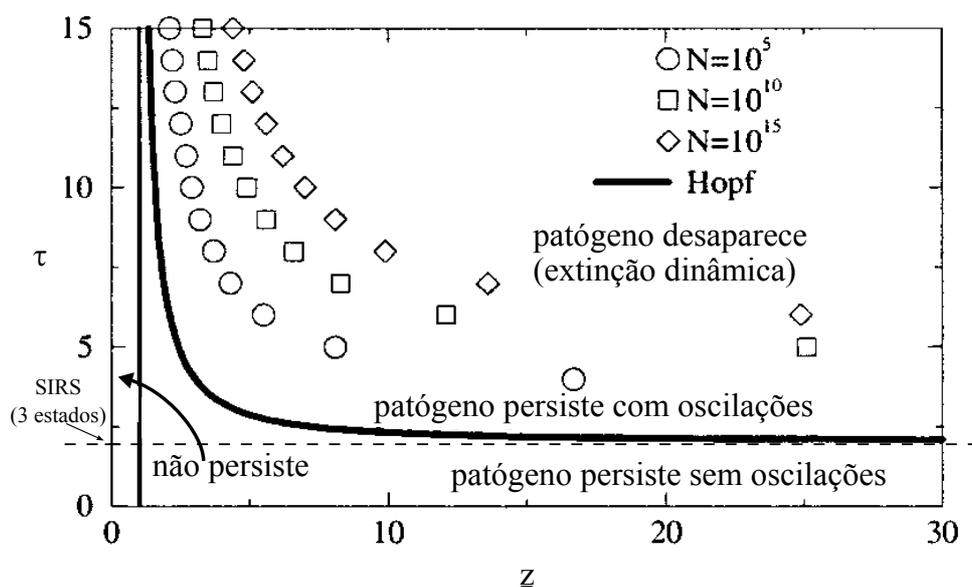
Como os primeiros  $\tau - 1$  autovalores são nulos, a solução de interesse é

$$\lambda = z, \quad (1.26)$$

o que mostra que o ponto fixo trivial ( $p^* = 0$ , representando o estado absorvente) só é estável para  $z < 1$ . Isto é razoável. Para este valor, cada sítio infectado ativará em média menos de um vizinho. A tendência da epidemia seria, portanto, se extinguir.

O ponto fixo  $p^* \neq 0$  precisa ser obtido numericamente, mas pode igualmente ser tratado pela análise de estabilidade linear. Girvan et al. mostram que ele se torna estável para  $z > 1$ , junto com a perda de estabilidade do ponto fixo trivial. Além disso, mostram que para  $\tau \geq 3$  e  $z$  suficientemente grande, este ponto fixo não-nulo perde novamente sua estabilidade. Isto pode ser visto como uma bifurcação de Neimark-Sacker (para mais detalhes, ver seção 3.3). Nesta bifurcação, o ponto fixo não-nulo troca de estabilidade, fazendo com que o sistema seja atraído para um ciclo-limite estável [Strogatz, 1997].

Os resultados são resumidos na figura 1.10, onde as curvas sólidas indicam transições obtidas analiticamente. Para  $z > 1$ , a doença persiste. Quando  $\tau \geq 3$  e  $z$  é suficientemente grande, a curva da bifurcação de Neimark-Sacker indica uma transição para um regime onde a epidemia persiste com oscilações. Para valores muito maiores de  $z$ , há a ocorrência da extinção dinâmica como observado anteriormente para as séries temporais (símbolos).



**Figura 1.10** Diferentes fases no modelo de Girvan et al., onde curvas sólidas indicam as fronteiras obtidas da análise de estabilidade linear e símbolos obtidos numericamente. A extinção da epidemia ocorre quando o mínimo da oscilação está abaixo de  $1/N$ . Obtido de [Girvan et al., 2002]. A linha tracejada indica a localização do modelo SIRS determinístico de três estados ( $\tau = 2$ ).

Assim, Girvan et al. foram capazes de não apenas observar as oscilações de elementos estocásticos do tipo SIRS, como também obtiveram analiticamente as curvas da transição para o regime oscilatório. Demonstraram a necessidade de um  $\tau \geq 3$  para a ocorrência das oscilações

e observaram o fenômeno da extinção dinâmica. Enquanto no caso de Kuperman-Abramson a desordem é congelada (isto é, escolhida uma vez e mantida ao longo da simulação), nesse modelo a desordem é *annealed* ou recozida, com os vizinhos escolhidos a cada passo de tempo.

Perceba que com os resultados apresentados aqui, podemos entender o motivo do modelo SIRS probabilístico não apresentar oscilações coletivas. Mesmo que todas as probabilidades do modelo o tornassem determinístico (i.e.,  $p_\delta = p_\gamma = 1$ ), ele teria apenas 3 estados. No modelo de Girvan et al., isto equivale a considerar  $\tau = 2$ , que não sincroniza [figura 1.10].

### 1.2.4 Modelo Kinouchi-Copelli

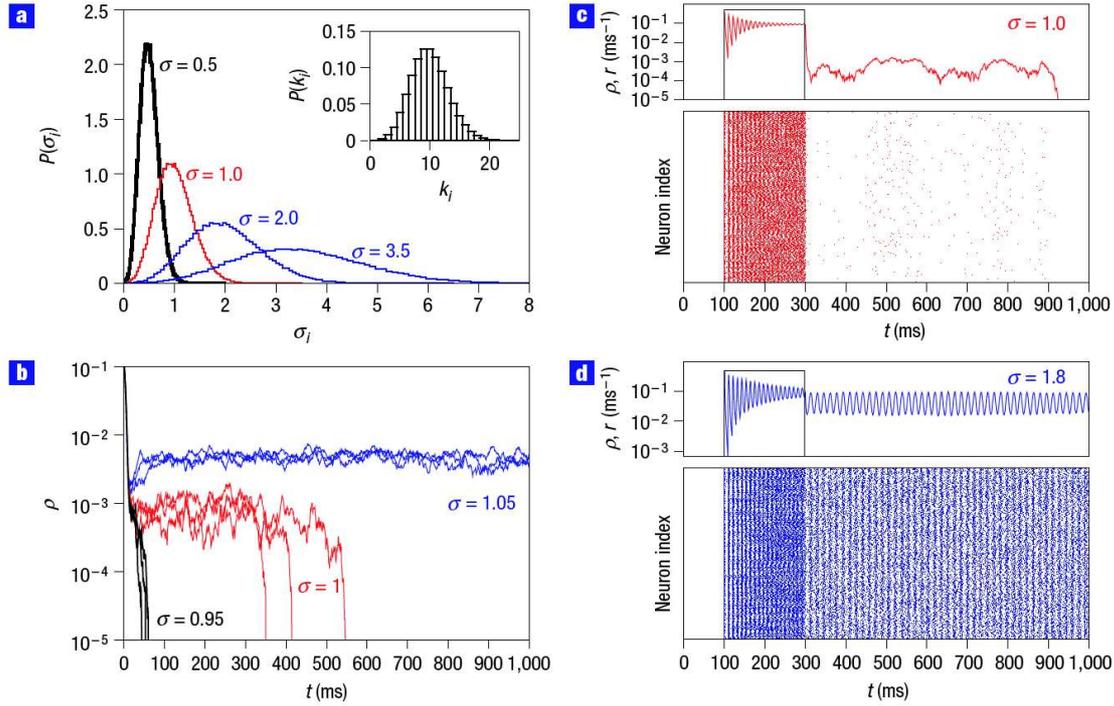
Vimos o modelo de Kuperman-Abramson, onde a rede possui desordem congelada e as infecções são ruidosas (ou seja, possuem uma probabilidade de não acontecerem). Por outro lado, o modelo de Girvan et al. considera uma rede com desordem *annealed*, sorteando a cada passo de tempo os vizinhos, com infecções determinísticas: uma vez que um sítio saudável seja escolhido por um infectado, a transmissão ocorre. Em comum a ambos está a presença de regimes oscilatórios estáveis.

Antes de iniciar a revisão deste modelo, iremos transferir o jargão epidêmico utilizado até agora para o jargão neurocientífico. Enquanto o modelo SIRS epidêmico diz que uma célula (ou sítio) pode estar suscetível-infectado-recuperado-suscetível, dizemos que um neurônio pode estar em repouso-ativo-refratário-repouso. Um neurônio em repouso pode ser *ativado* por um vizinho ativo. Os neurônios ativos se tornam refratários. Os neurônios refratários retornam ao repouso após um *período refratário*.

Cada elemento excitável  $i = 1, \dots, N$  possui um estado  $s_i = 0, \dots, n - 1$ . Um sítio com  $s_i = 0$  está em repouso;  $s_i = 1$  encontra-se ativado;  $2 \leq s_i \leq n - 1$  está em seu período refratário. Podemos notar que  $n - 1 = \tau$  do modelo de Girvan et al.

O modelo de Kinouchi-Copelli [Kinouchi & Copelli, 2006] utiliza grafos aleatórios, distribuindo  $NK/2$  ligações entre pares de sítios escolhidos aleatoriamente (ver seção 4.1). Cada sítio possui em média  $K$  vizinhos. Além disso, a probabilidade de que o estímulo (atividade) seja transmitido do sítio ativo  $j$  para o  $i$  é dado por  $p_{ij}$ , uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e  $p_{max}$  (esta sendo a principal diferença entre este modelo e o anteriormente proposto por [Haldeman & Beggs, 2005]). Sorteando-se uma vez o conjunto de probabilidades  $p_{ij}$  e a realização da rede, ambos são mantidos ao longo de uma rodada da simulação (desordem congelada).

Eles definem a *taxa de ramificação local* como  $\sigma_j = \sum_i^{K_j} p_{ij}$ , uma estimativa do número médio de infecções geradas do sítio  $j$  no próximo passo de tempo [Kinouchi & Copelli, 2006].



**Figura 1.11** Caracterização da rede e dinâmica dos sítios ativos. Simulações com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  e  $n = 10$  estados. (a) Distribuição de probabilidade para a taxa de ramificação local e conectividade (no detalhe). (b) Densidade instantânea de sítios ativos (em três rodadas diferentes) para distintos valores de  $\sigma$ . (c,d) Densidade instantânea para todos os sítios (painel superior) e raster plot para um conjunto de  $10^3$  sítios escolhidos aleatoriamente (painel inferior). Observe o surgimento de oscilações autossustentadas em (d). Obtido de [Kinouchi & Copelli, 2006].

A distribuição das ramificações locais  $P(\sigma_j)$  [mostrada na figura 1.11(a)] é gaussiana com média  $\sigma = \langle \sigma_j \rangle$ . Esta taxa de ramificação média  $\sigma$  é utilizada como parâmetro de controle: nas simulações, escolhe-se  $p_{max} = 2\sigma/K$  com  $\sigma < K/2$ .

Para  $\sigma < 1$ , qualquer atividade é rapidamente dissipada na rede, pois um sítio gerará em média menos de uma excitação. Quando  $\sigma > 1$ , a atividade sobrevive indefinidamente, como pode ser visto pela densidade de sítios ativos  $\rho_t$  na figura 1.11(b). Este comportamento indica que a taxa de ramificação  $\sigma$  é similar ao número médio de vizinhos infectados  $z$  de Girvan et al (seção 1.2.3).

É acrescentada a possibilidade de os sítios em repouso serem ativados por estímulos externos (modelados por um processo de Poisson de taxa<sup>7</sup>  $r$ , ver [Kinouchi & Copelli, 2006]). Assim, considerando um estado inicial em repouso, um pulso de estímulo externo é aplicado ao sistema. Na figura 1.11(c), vemos que este pulso gera uma atividade oscilante transiente, mas uma vez cessado o estímulo, a atividade é dissipada. Para  $\sigma$  um pouco maior [figura 1.11(d)],

<sup>7</sup>Note que esta taxa não deve ser confundida com o parâmetro de ordem de Kuramoto, seção 1.1.2.

o sistema apresenta a mesma atividade oscilatória com o pulso. Desta vez as oscilações são autossustentadas, persistindo ao término do pulso.

Note como o fenômeno das oscilações globais é robusto: mesmo considerando desordem congelada em todos os parâmetros de conexão, este modelo tipo SIRS ainda apresenta oscilações estáveis para algum  $\sigma > \sigma_{osc} > 1!$

### 1.2.5 Modelos de tempo contínuo

O modelo SIRS em tempo contínuo pode ser determinístico (com tempos de transição fixos) ou estocástico (taxas de transição fixas). O primeiro caso possui comportamento semelhante ao observado nos sistemas de tempo discreto mostrados nas seções anteriores.

No segundo caso, um sítio em repouso (S) possui uma taxa de transição para o estado ativo (I) proporcional à fração de vizinhos ativos  $n_I/K$  (onde  $n_I$  é o número de sítios infectados e  $K$  é o número de vizinhos). Um sítio ativo (I) se torna refratário (I→R) com uma taxa  $\delta$ . Por fim, um sítio refratário (R) retorna ao repouso (S) com uma outra taxa  $\gamma$  [Joo & Lebowitz, 2004; Assis & Copelli, 2008]. Podemos ver as taxas de transição intrínsecas como o inverso dos tempos do caso determinístico (cf. seção 1.2.2),  $\delta = 1/\tau_I$  e  $\gamma = 1/\tau_R$  [Gonçalves et al., 2009]. Há fortes indícios de que esse modelo estocástico simples não é capaz de exibir oscilações globais [Rozhnova & Nunes, 2009b; Rozhnova & Nunes, 2009c; Rozhnova & Nunes, 2009a] nem mesmo quando o acoplamento é fortemente não-linear [Assis & Copelli, 2009].

Considerando uma distribuição de tempos de infecção (ou recuperação)  $P_I(\tau)$ , podemos ver o caso dos tempos fixos (isto é, quando o modelo é determinístico) como uma delta de Dirac,  $P_I(\tau) = \delta(\tau - \tau_I)$ , enquanto o modelo com taxas fixas (estocástico) seguiria uma distribuição exponencial de tempos  $P_I(\tau)$  [Gonçalves et al., 2009]. Foi mostrado por Gonçalves et al. que seria possível interpolar entre esses dois regimes (por exemplo, para o tempo do estado infectado) através de uma distribuição gamma

$$P_a^I(\tau) = \frac{a^a \tau^{a-1} e^{-a\tau/\tau_I}}{\tau_I^a (a-1)!}. \quad (1.27)$$

Esta distribuição apresenta valor médio  $\tau_I$  para qualquer valor de  $a$  (uma constante). Pode-se interpolar esta distribuição entre uma exponencial ( $a = 1$ ) e uma delta ( $a \rightarrow \infty$ ). Com isto, mostra-se que para qualquer valor de  $a > 1$  o sistema é capaz de sincronizar [Gonçalves et al., 2009] como no SIRS de tempo discreto, embora as contas e simulações sejam mais complexas. Esta modificação faz com que o sistema, por agora depender explicitamente do tempo, seja não-Markoviano. Esta dependência promove uma *memória*. É curioso notar que a distribuição

exponencial, a única que não sincroniza, é justamente a que não apresenta dependência explícita do tempo<sup>8</sup>.

### 1.3 Observações experimentais

Embora a observação de sincronização seja comum na neurociência [Uhlhaas et al., 2009], nem sempre os elementos considerados são excitáveis. O núcleo supraquiasmático (SCN, *suprachiasmatic nucleus*) funciona como uma central reguladora do ritmo circadiano, regulando inclusive as outras células do corpo [Buhr et al., 2010]. Conhece-se que neurônios deste núcleo oscilam de forma autônoma. Embora os períodos dos neurônios individuais não sejam muito bem definidos, havendo grande variabilidade de suas frequências ao longo do tempo, o acoplamento permite que mantenham bastante precisão em sua frequência média [Enright, 1980].

Sabe-se que uma mutação em camundongos prejudica o ciclo circadiano [Bunger et al., 2000]. Percebeu-se recentemente que esta mutação afeta as oscilações autônomas dos neurônios do SCN [Ko et al., 2010], tornando-os apenas *excitáveis*. Foi identificado por [Ko et al., 2010] que a presença de ruído (devido à transcrição de proteínas ou outros fenômenos celulares) no acoplamento entre esses neurônios (agora) excitáveis produz ritmos quasicircadianos, ou seja, oscilações coletivas.

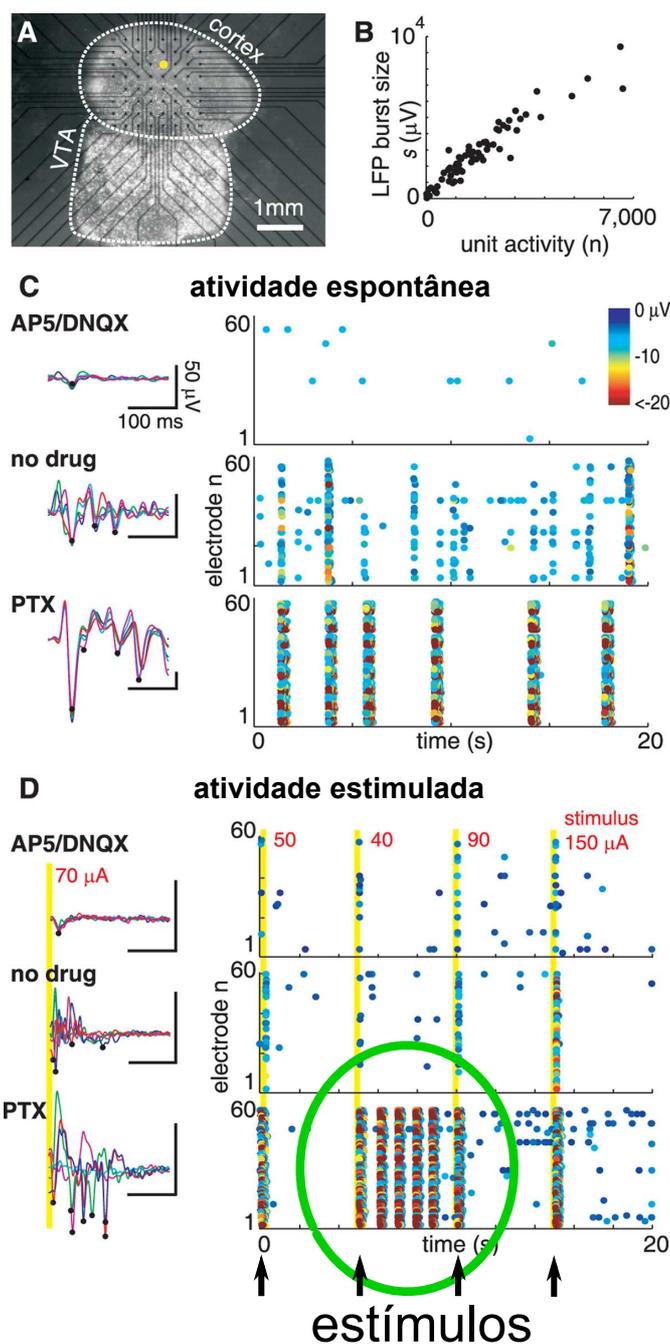
Um pouco antes, foram estudadas tanto a atividade espontânea quanto estimulada em fatias cerebrais submetidas a fármacos que inibem<sup>9</sup> (AP5/DNQX) ou facilitam<sup>10</sup> (PTX) a transmissão do estímulo entre neurônios [Shew et al., 2009]. Em uma comparação com o modelo da seção 1.2.4, pode-se dizer que o efeito das drogas diminui (inibe) ou aumenta (facilita) a probabilidade de transmissão.

Na figura 1.12(a), observamos o aparato experimental utilizado para medir a atividade (e estimular, no ponto amarelo) a fatia. A figura 1.12(d) representa a atividade na rede (*raster plot*). As ordenadas representam o índice do eletrodo e seus disparos ao longo do tempo são indicados por símbolos (círculos). Na cultura com facilitação ( $\sigma$  grande, painel inferior), a ocorrência do primeiro estímulo promove um disparo coletivo, mas a atividade logo cessa. Isto indica se tratar de um sistema excitável. Ao receber o segundo estímulo, o sistema apresenta um disparo rítmico, possivelmente um regime oscilatório. O próximo estímulo promove o

<sup>8</sup>A distribuição exponencial é dita sem-memória e satisfaz a igualdade:  $P(\tau > t + s | \tau > t) = P(\tau > s)$  [Meyer, 1983].

<sup>9</sup>Através do bloqueio do Glutamato, um neurotransmissor excitatório.

<sup>10</sup>Bloqueando a recepção de GABA, um neurotransmissor inibitório.



**Figura 1.12** Medidas experimentais da atividade in-vitro. As diferentes drogas inibem (AP5/DNQX) e facilitam (PTX) as sinapses; “no drug” representa a ausência de fármacos. (a) Aparato experimental observado por microscopia óptica. (b) Diferença de potencial no meio extracelular em função do número de spikes registrado. (c) Atividade espontânea da fatia. (d) Atividade estimulada através de pulsos. Observe a presença de uma possível biestabilidade na rede excitada (ver texto). Obtido de [Shew et al., 2009]. Modificado com setas para indicar os estímulos (abaixo) e destaque para a região com oscilações coletivas (círculo verde).

desaparecimento das oscilações coletivas, não nos permitindo saber se o sistema se encontra em um estado ativo autossustentado ou simplesmente em um transiente para um estado absorvente. Esta alternância de regimes indica uma possível biestabilidade.

## 1.4 Motivação do problema a ser abordado

Os experimentos mostram como os modelos de elementos excitáveis fornecem conceitos úteis para o entendimento de fenômenos, por exemplo, na neurociência. Em particular, os modelos de tempo discreto são interessantes por apresentar uma simulação eficiente e abordagem analítica simples em alguns casos. Diversos trabalhos utilizaram essa simplicidade para obter resultados sobre a faixa dinâmica (capacidade de discernir diferentes intensidades de sinais) de meios excitáveis sujeitos a um estímulo de Poisson [Copelli & Kinouchi, 2005; Furtado & Copelli, 2006; Kinouchi & Copelli, 2006], inclusive em topologias complexas [Wu et al., 2007; Copelli & Campos, 2007].

Neste capítulo vimos que o modelo SIRS probabilístico puro (de 3 estados) em tempo discreto não sincroniza. Entretanto, quando modificado para assumir tempos fixos nos diferentes estados (SIRS determinístico), apresenta oscilações coletivas em diferentes modelos (ver tabela 1.1).

Observamos também que o SIRS de tempo contínuo estocástico (com taxas constantes)

**Tabela 1.1** Resumo dos modelos de elementos excitáveis apresentados.

Modelo	Seção	Dinâmica <sup>a</sup>	Acoplamento	Sincroniza?
Tempo discreto				
SIRS (3 estados)	1.2.1	probabilística	probabilístico	<b>não</b>
Kuperman-Abramson	1.2.2	determinística	probabilístico <sup>b</sup>	sim
Girvan et al.	1.2.3	determinística	probabilístico <sup>c</sup>	sim
Kinouchi-Copelli	1.2.4	determinística	probabilístico <sup>d</sup>	sim
Tempo contínuo				
SIRS (3 estados)	1.2.5	estocástica	estocástico	<b>não</b>
Gonçalves et al.	1.2.5	estocástica <sup>e</sup>	estocástico	<b>sim</b>

<sup>a</sup>Dinâmica interna

<sup>b</sup>Rede mundo-pequeno com desordem congelada.

<sup>c</sup>Grafo aleatório com desordem recozida (*annealed*) com *transmissão determinística*.

<sup>d</sup>Grafo aleatório com desordem congelada, probabilidades de transmissão não são uniformes.

<sup>e</sup>Com memória: dinâmica não-Markoviana.

não apresenta evidências de oscilações globais estáveis. Através do trabalho de Gonçalves et al. [Gonçalves et al., 2009], observamos que a adição de uma dinâmica não-Markoviana (isto é, dependente explicitamente do tempo) acrescenta memória ao sistema, e apenas nestes casos ocorre a sincronização em tempo contínuo.

Voltando ao tempo discreto, podemos considerar que os elementos excitáveis *determinísticos* possuem memória *perfeita* sobre seus últimos  $\tau$  passos de tempo. No SIRS probabilístico, embora o tempo médio em que cada célula passa em um determinado estável seja bem-definido, a dinâmica não depende explicitamente do tempo: não possui *memória*. Curiosamente, em tempo discreto é justamente no modelo SIRS probabilístico que *não há* sincronização.

Até agora, todos os trabalhos onde se obtiveram oscilações coletivas em elementos de tempo discreto apresentavam ruído apenas no acoplamento entre sítios (ver seções 1.2.2 e 1.2.4). O trabalho de Gonçalves et al. mostrou que podemos obter sincronização em elementos de tempo contínuo com dinâmica interna ruidosa ao considerarmos a existência de memória. Seria possível acrescentar ruído à dinâmica interna e ainda obter oscilações coletivas em modelos de tempo discreto? Podemos imaginar que ao acrescentar estados determinísticos, aumentaríamos a quantidade de memória que o sistema possui de seu passado, permitindo a sincronização. Quão robusta a ruídos é a sincronização de elementos excitáveis de tempo discreto? Esperamos responder essas e outras perguntas com esse trabalho.

Esse trabalho encontra-se dividido da seguinte forma: introduziremos no capítulo 2 nosso modelo com dinâmica interna ruidosa; mostraremos resultados deste modelo em diferentes topologias nos capítulos 3 e 4. Por fim, discutiremos no capítulo 5 os resultados e os problemas a serem abordados em trabalhos futuros.

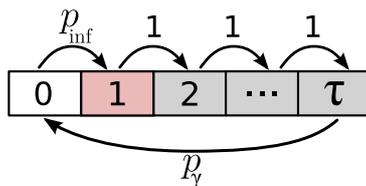
## CAPÍTULO 2

# Modelo

Descreveremos nesse capítulo um modelo tipo SIRS de tempo discreto com dinâmica não-determinística, diferentemente dos vistos na revisão da literatura do capítulo anterior. Após uma breve revisão dos parâmetros de ordem existentes na literatura, definiremos um parâmetro de ordem apropriado para o estudo das oscilações coletivas neste modelo.

### 2.1 Autômato celular excitável

Um modelo mínimo de elemento excitável possui três estados<sup>1</sup>, representando repouso (estado 0), ativação (estado 1) e refratariedade (estado 2) [Lindner et al., 2004]. Como mostrado por [Girvan et al., 2002], este modelo de autômato cíclico determinístico de três estados não é capaz de exibir oscilações coletivas autossustentadas. Para que possamos observar as oscilações, é necessário haver no mínimo 2 estados refratários [Girvan et al., 2002]. Considerando um número arbitrário de estados, temos que cada sítio  $j = 1, \dots, N$  possui um estado  $s_j = 0, 1, \dots, \tau$ . Destes  $\tau + 1$  estados, os últimos  $\tau - 1$  são refratários, como pode ser visto na figura 2.1.



**Figura 2.1** Dinâmica de um sítio.  $p_{inf}$  é a probabilidade do sítio ser ativado ( $0 \rightarrow 1$ ) pelos vizinhos,  $p_\gamma$  é a probabilidade de transitar do estado refratário relativo ( $\tau$ ) para o estado de repouso (0). Estado ativo em vermelho. Todos os estados em cinza são refratários.

O modelo SIRS probabilístico em tempo discreto (por vezes chamado de autômato de Greenberg-Hastings [Greenberg & Hastings, 1978] probabilístico) corresponde neste modelo a fixarmos  $\tau = 2$  e as transições intrínsecas  $1 \rightarrow 2$  e  $2 \rightarrow 0$  ocorrerem com probabilidades constantes. Por sua vez, a transição  $0 \rightarrow 1$  ocorrerá com uma probabilidade que em geral cresce linearmente com o número de vizinhos infectados [Assis & Copelli, 2008] (para um exemplo

<sup>1</sup>Um protótipo é o modelo SIRS.

de acoplamento não-linear, veja [Assis & Copelli, 2009]). No caso estudado por Girvan et al., todas as transições intrínsecas,  $s_j \rightarrow s_j + 1 \bmod (\tau + 1), s_j \neq 0$ , são determinísticas. Todos os sítios são atualizados (conforme suas regras de transição) no mesmo passo de tempo (atualização síncrona).

Conforme mostrado na seção 1.2, o modelo SIRS probabilístico (mesmo em tempo discreto) não apresenta oscilações globais [Assis & Copelli, 2009]. Entretanto, nos sistemas com dinâmica intrínseca determinística e tempo discreto [Kuperman & Abramson, 2001; Girvan et al., 2002; Kinouchi & Copelli, 2006], há um regime oscilante estável. Propomos nesta dissertação um caso intermediário onde todas as transições intrínsecas são determinísticas com exceção da última ( $\tau \rightarrow 0$ ), que ocorre com probabilidade  $p_\gamma$  (conforme figura 2.1). Pretendemos assim estudar um modelo mínimo com dinâmica não-determinística, embora com limite determinístico bem definido. A escolha do último estado como probabilístico é natural e possui inspiração na neurociência: é conhecido que os canais iônicos, responsáveis pela dinâmica dos neurônios, são estocásticos [Koch, 1999; Carelli et al., 2005]. Logo, é plausível que um dado neurônio possa ou não disparar próximo ao *fim* de seu período refratário (em outras palavras, seu período refratário relativo) [Koch, 1999].

## 2.2 Acoplamento

Com as transições intrínsecas definidas na seção anterior, precisamos definir o processo de ativação  $0 \rightarrow 1$ . Assumimos que cada sítio  $j$  está simetricamente conectado a  $k_j$  vizinhos. Cada sítio ativo possui uma probabilidade  $\sigma/K$  de ativar<sup>2</sup> um vizinho em repouso, onde  $\sigma$  é um parâmetro de controle<sup>3</sup> representando a intensidade de acoplamento e  $K = \langle k_j \rangle$  é a conectividade média. A fração de sítios ativos

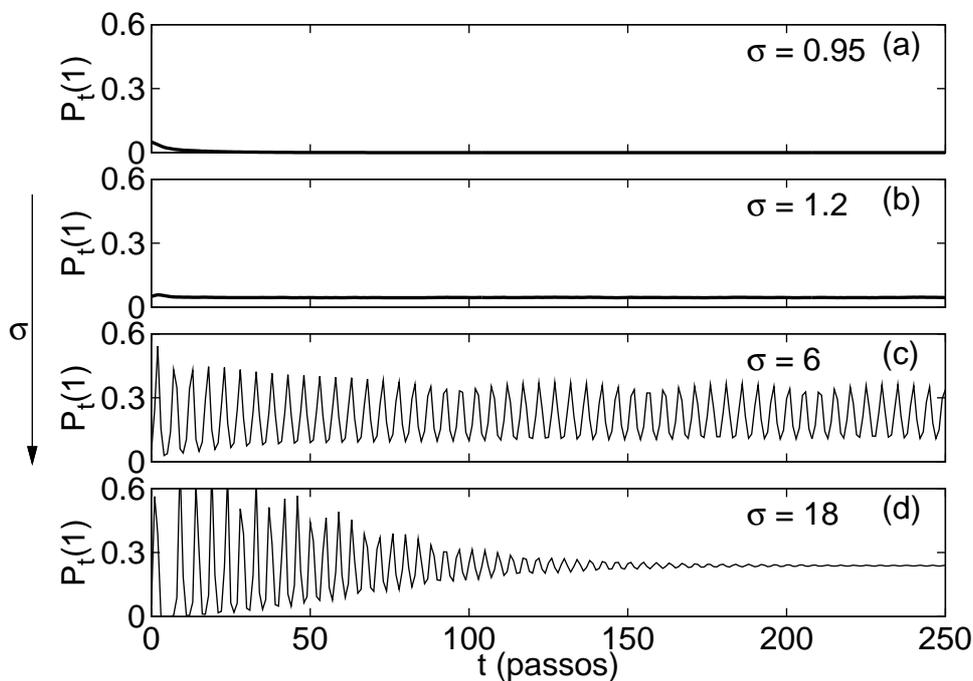
$$P_t(1) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{1,s_j(t)} \quad (2.1)$$

é utilizada para medir a atividade da rede no instante  $t$ . Em  $\sigma = 1$ , o modelo apresenta uma transição de um estado absorvente ( $P_t(1) = 0$ ) para um estado ativo ( $P_t(1) > 0$ ), mas sem oscilações coletivas autossustentadas [Kinouchi & Copelli, 2006]. Com elementos determinísticos, o sistema apresenta uma transição para um estado oscilante em  $\sigma = \sigma_c(p_\gamma = 1) > 1$  que persiste mesmo para valores maiores de  $\sigma$  [Girvan et al., 2002; Kinouchi & Copelli, 2006].

<sup>2</sup>Em outras palavras, a probabilidade de que uma dada ligação entre sítios (sinapse) funcione para transmitir a excitação. [Kinouchi & Copelli, 2006]

<sup>3</sup>Note que  $\sigma$  corresponde à taxa de ramificação (*branching ratio*) do sistema [Harris, 1963; Kinouchi & Copelli, 2006], ou seja,  $\sigma = P(\text{ativar}) \times K$ .

Como motivação para o estudo a ser desenvolvido no capítulo 3, apresentamos na figura 2.2 exemplos de séries temporais com um grafo completo de  $N = 5 \times 10^5$  sítios,  $p_\gamma = 0.85$  e diferentes valores do acoplamento  $\sigma$ . Para elementos probabilísticos, observamos a transição de um estado absorvente para um estado ativo não-oscilante em  $\sigma = 1$  [Figura 2.2(a)-(b)] e a segunda transição para um estado ativo oscilante para valores maiores de  $\sigma$  [Figura 2.2(b)-(c)]. Enquanto no modelo determinístico ( $p_\gamma = 1$ , [Girvan et al., 2002]) o estado oscilante permanece estável indefinidamente ao intensificar o acoplamento, no modelo probabilístico esta segunda transição é *reentrante* com relação à intensidade de acoplamento  $\sigma$ , como pode ser visto na figura 2.2(c)-(d).



**Figura 2.2** Série temporal para  $p_\gamma = 0.85$  e diferentes valores de  $\sigma$  em um grafo completo com  $N = 5 \times 10^5$  sítios. De cima para baixo: (a) estado absorvente (não-ativo), (b) estado ativo sem oscilações, (c) com oscilações e (d) novamente ativo sem oscilações.  $P_0(0) = 0.95$ ,  $P_0(1) = 0.05$ .  $\tau = 3$ .

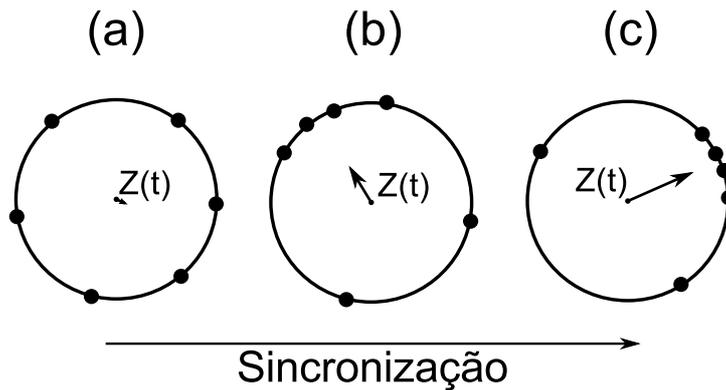
A natureza desta transição reentrante será esclarecida no capítulo 3. Para analisarmos o sistema adequadamente, entretanto, precisaremos definir um parâmetro de ordem apropriado para a detecção de oscilações coletivas em elementos excitáveis.

### 2.3 Parâmetro de ordem

O parâmetro de ordem de Kuramoto é um dos mais utilizados para se estudar sincronização [Kuramoto, 1984; Strogatz, 2000] e corresponde a tomarmos a média ao longo do tempo da norma do vetor complexo

$$Z(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (2.2)$$

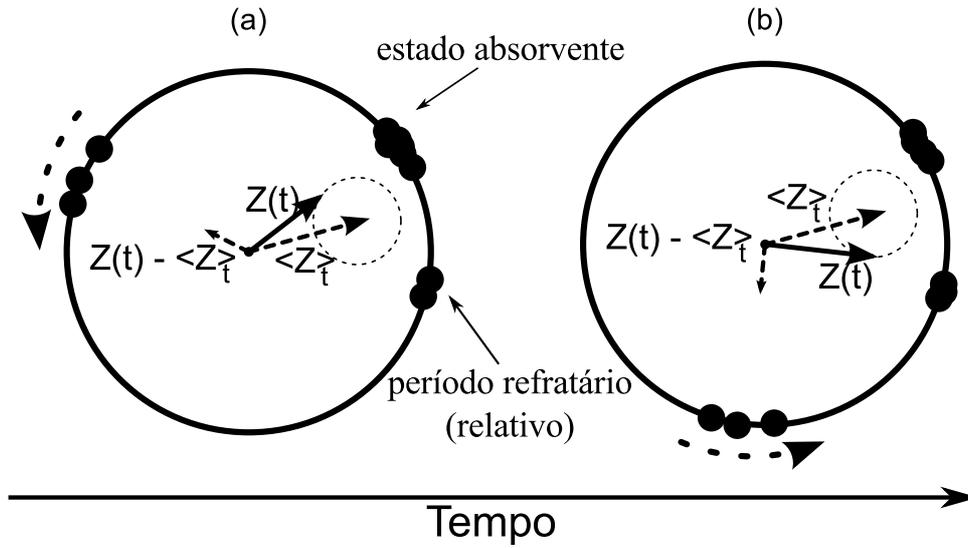
onde  $\theta_j = 2\pi s_j/(\tau + 1)$  é a fase do sítio  $j$ . Perceba que  $Z$  corresponde ao centro de massa das fases dos osciladores. Este parâmetro de ordem funciona muito bem para osciladores *uniformes* acoplados, pois a simetria rotacional garante (na ausência de oscilações coletivas) que o parâmetro de ordem se anule no limite termodinâmico. Na figura 2.3 podemos observar o comportamento de  $Z$  para um sistema de osciladores uniformes, onde seu módulo cresce com o aumento de sincronização.



**Figura 2.3** Ilustração do comportamento do vetor  $Z$  (representado por um número no plano complexo) para osciladores uniformes (círculos pretos) nos regimes (a) incoerente (sem sincronização), (b) e (c) sincronizados.

Considere agora o caso dos elementos excitáveis. No estado absorvente ( $s_j = 0, \forall j$ ), que é sempre solução da dinâmica coletiva, teremos um valor *máximo* para o parâmetro de ordem de Kuramoto. É fácil perceber a razão: todos os elementos estão “perfeitamente sincronizados” quando o sistema está no estado absorvente. Logicamente, não é isso que desejamos detectar. O problema persiste mesmo para a região em que  $\sigma \gtrsim 1$  (ainda abaixo do surgimento das oscilações coletivas), onde uma fração de sítios encontra-se (em média) ativa, enquanto a maior parte do sistema está em repouso. Neste caso, o sistema apresenta um viés com seu centro de massa deslocado em direção ao estado absorvente, com oscilações em torno deste novo centro de massa. Podemos visualizar isso na figura 2.4.

As oscilações coletivas, correspondendo a rotações de  $Z$ , nem sempre são bem detectadas



**Figura 2.4** Ilustração do comportamento do vetor  $Z$  (representado por um número no plano complexo) para elementos excitáveis (círculos pretos) em diferentes instantes de tempo (a) e (b). A presença de um estado absorvente e um estado refratário probabilístico faz com que o vetor  $Z$  oscile em torno de um novo centro de massa do sistema.

devido a esse vetor constante apontando para o estado absorvente. Diversas possibilidades existem para remover esta influência do estado absorvente. Uma estratégia utilizada por [Kuperman & Abramson, 2001; Gade & Sinha, 2005], por exemplo, consiste em considerar apenas os sítios com  $s_j \neq 0$  na soma em (2.2) antes do procedimento de média (ver seção 1.2.2). Outra estratégia é usar o desvio padrão (ao longo do tempo) de  $P_t(1)$  para detectar as oscilações [Garcia-Ojalvo et al., 2004]. Mas nenhuma das duas estratégias é facilmente estendida para sistemas com fases contínuas ou número arbitrário de fases preferidas.

Para se levar em conta sistemas de fase contínua ou mesmo número arbitrário de estados absorventes, poderíamos utilizar o momento angular  $L \equiv X \partial_t Y - Y \partial_t X$ , onde  $Z = X + iY$  [Kuramoto et al., 1992; Ohta & Sasa, 2008]. Em um autômato celular, entretanto, isso exigiria discretizar a derivada temporal, introduzindo erros numéricos desnecessários.

Como o vetor  $Z(t)$  oscila em torno de sua média  $\langle Z \rangle_t$  (causada pela existência de um estado absorvente e um período refratário probabilístico), a componente oscilante dele pode ser obtida por  $Z_{osc} = Z(t) - \langle Z \rangle_t$  [veja a figura 2.4]. Medindo a média do módulo de  $Z_{osc}$  ao longo do tempo,

$$\tilde{q} \equiv \langle |Z - \langle Z \rangle_t| \rangle_t, \quad (2.3)$$

obtemos um parâmetro de ordem que foi proposto por Shinomoto e Kuramoto para o estudo de rotores ativos [Shinomoto & Kuramoto, 1986]. Computacionalmente, este parâmetro é ineficiente pois precisamos guardar a série temporal inteira de  $Z$  antes de iniciarmos as medidas.

Assim, utilizando uma ideia similar (porém mais eficiente computacionalmente), propomos o parâmetro de ordem

$$q = \sqrt{\langle |Z - \langle Z \rangle_t|^2 \rangle_t} = \sqrt{\langle |Z|^2 \rangle_t - |\langle Z \rangle_t|^2}, \quad (2.4)$$

que pode ser visto como um desvio padrão generalizado de  $Z(t)$ . Diferentemente de  $\tilde{q}$ , obter  $q$  é barato computacionalmente pois as médias ao longo do tempo agora estão separadas e podem ser calculadas ao longo da simulação. Na seção 4.3 mostraremos que  $q$  satisfaz as relações de escala esperadas para um parâmetro de ordem próximo a uma transição de fase.

Pode-se obter uma intuição sobre o comportamento de  $q$  observando as diferentes séries temporais da figura 2.2 (página 26). Seja  $P_1^*$  o valor estacionário  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle P_t(1) \rangle_t$ , um parâmetro de ordem apropriado para medir a atividade na rede [Kinouchi & Copelli, 2006], isto é, que mede a densidade média de sítios ativos, independentemente de haver ou não oscilações crescentes. Nas figuras 2.2(a) e (b), embora o sistema vá de um estado absorvente ( $P_1^* = 0$ ) para um ponto fixo ativo estável ( $P_1^* \neq 0$ ), ambas possuem  $q = 0$  pois não há oscilações após o transiente. Na figura 2.2(c), temos  $P_1^* \neq 0$  e  $q > 0$  pois o regime oscilatório do sistema se torna estável após aumentar  $\sigma$ . Finalmente, na figura 2.2(d), as oscilações são instáveis,  $P_1^* \neq 0$  e  $q = 0$ .

O parâmetro de ordem  $q$  realizará um importante papel nas análises a seguir.

## Grafo completo

Acredita-se que o grafo completo, onde cada sítio está conectado a todos os outros, é a topologia mais favorável ao surgimento de oscilações coletivas autossustentadas<sup>1</sup>. Nesta topologia não existe correlação espacial entre seus elementos e a análise de campo médio é exata (permitindo a comparação entre simulações e resultados analíticos). É razoável, portanto, ser nosso ponto de partida. Além disso, como estamos interessados apenas na influência da dinâmica probabilística ( $p_\gamma$ ), fixaremos  $\tau = 3$  a partir de agora, exceto onde se indicar o contrário.

### 3.1 Simulações

Implementamos grafos completos ( $k_j = K = N - 1$ ) com tamanhos variando de  $N = 10^5$  até  $N = 10^6$  sítios. No grafo completo, como todas as células estão acopladas, o sistema só depende do número total de sítios em um estado. Devido à regra de acoplamento da seção 2.2, a transição  $0 \rightarrow 1$  é governada apenas pelo número total  $N_1(t)$  de sítios ativos ( $s_i = 1$ ). Considerando que uma célula em repouso pode ser ativada por cada um desses com probabilidade  $\sigma/N$ , temos que a chance de não receber a excitação por *nenhum* deles é  $(1 - \sigma/N)^{N_1(t)}$ , e portando a de receber *ao menos uma* é

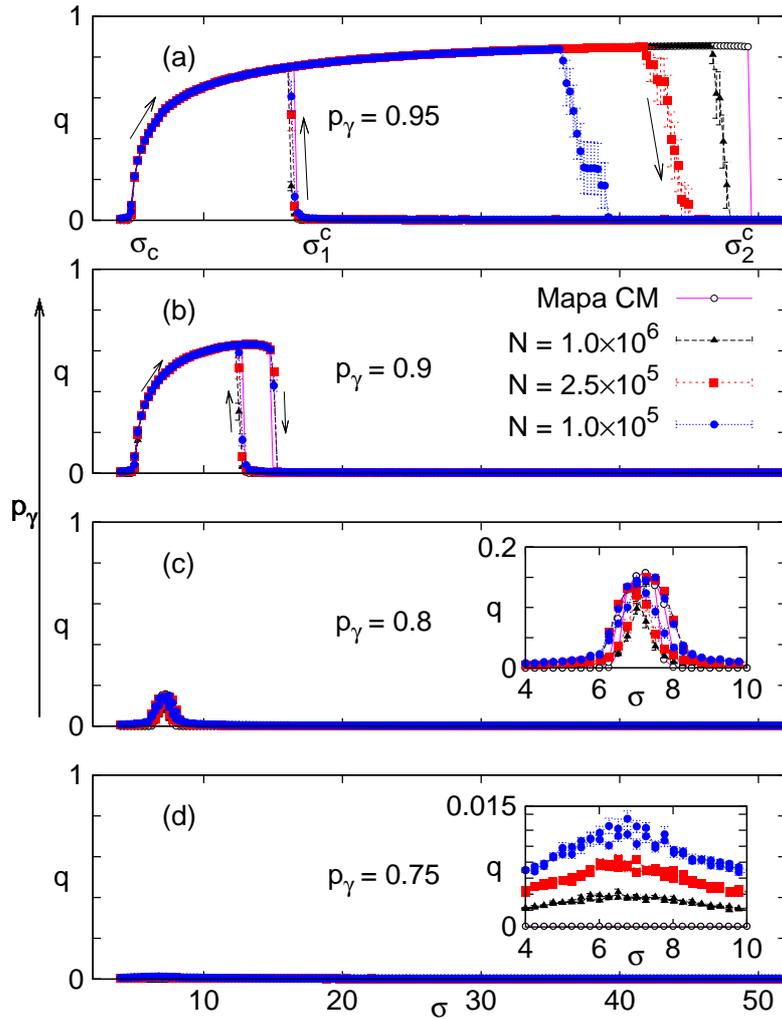
$$p(0 \rightarrow 1) = P_{inf}(t) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma}{N}\right)^{N_1(t)}, \quad (3.1)$$

o que torna a simulação simples mesmo para os grandes tamanhos de rede considerados aqui. As condições iniciais devem ser escolhidas para evitar as grandes amplitudes observadas no transiente, o que poderia levar o sistema ao seu estado absorvente [Girvan et al., 2002]. Fora isso, os efeitos observados são robustos quanto à escolha de condições iniciais e fixamos arbitrariamente  $P_0(0) = 0.8$ ,  $P_0(1) = 0.2$  e  $P_0(s) = 0.0$  ( $1 < s \leq \tau$ ).

Para ilustrar a transição reentrante observada na figura 2.2 (onde o estado oscilante desaparece para valores maiores de acoplamento) mostramos na figura 3.1(a) o parâmetro de ordem  $q$  em função do acoplamento  $\sigma$ . Começando com uma intensidade de acoplamento  $\sigma_{min}$ , para

<sup>1</sup>Em parte devido ao seu acoplamento global (“campo médio”) do sistema, similar ao observado na seção 1.1.2.

cada valor de  $\sigma$  deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{trans}$  após o qual iniciaremos a medição do parâmetro de ordem  $q$  até o instante  $t = t_{max}$ . Terminada a medida, *incrementamos* o valor de  $\sigma$  em um valor constante  $\delta\sigma$  e repetimos a simulação, com a condição inicial do sistema sendo o estado final do valor de acoplamento anterior. As constantes são escolhidas tais que  $\delta\sigma/t_{max} \ll 1$ . Após atingir um máximo  $\sigma_{max}$ , o procedimento é invertido e *decrementamos*  $\sigma$  pelo mesmo valor  $\delta\sigma$  até que se atinja uma intensidade  $\sigma_{min}$ .



**Figura 3.1** Ciclos de histerese para o grafo completo ( $N = 10^5$ ,  $2.5 \times 10^5$  e  $10^6$ ) para  $p_\gamma = 0.95$ ,  $0.9$ ,  $0.8$  e  $0.75$ .  $t_{max} = 1 \times 10^3$  passos ( $t_{trans} = 500$ ) e  $\delta\sigma = 0.05$ . Média (símbolos) e erro padrão (barras) calculados sobre 10 rodadas para o grafo completo. O resultado para o mapa de campo médio (a ser apresentado na seção 3.2) é representado pelos círculos opacos. No detalhe temos uma ampliação da região interessante  $4 \leq \sigma \leq 10$ . Perceba que as flutuações no detalhe de (d) decrescem com o aumento do tamanho de rede onde a aproximação de campo médio (seção 3.2) prevê  $q = 0$  no limite termodinâmico (ver também seção 4.3).

Como mostrado na figura 3.1, a reentrância da transição para oscilações coletivas é retratada pelo comportamento não-monotônico de  $q(\sigma)$ . A partir de um determinado  $\sigma = \sigma_c(p_\gamma)$  o parâmetro de ordem  $q$  se afasta do zero, retornando apenas em um valor  $\sigma_2^c(p_\gamma)$  onde a solução oscilante não é mais estável. Enquanto a primeira transição de fase (para um regime oscilante) é sempre contínua, a segunda transição pode ser descontínua. A assinatura desta descontinuidade é a histerese observada no parâmetro de ordem: acima de  $\sigma_2^c(p_\gamma)$ , o único atrator estável do sistema é um ponto fixo, possuindo  $P_i(1) \neq 0$ , portanto sem oscilações ( $q = 0$ ).

Ao diminuirmos  $\sigma$ , observamos que as oscilações em geral não retornam em  $\sigma_2^c(p_\gamma)$ , mas sim em um valor *menor*  $\sigma_1^c(p_\gamma)$ . Desta forma, existe uma região de biestabilidade  $\sigma \in [\sigma_1^c, \sigma_2^c]$  no espaço de parâmetros onde o regime de oscilações coletivas ( $q > 0$ ) e o regime ativo incoerente ( $q = 0$ ) coexistem. Como pode ser visto na figura 3.1(a), para  $p_\gamma = 0.95$ , existe uma dependência da largura da região de biestabilidade com o tamanho da rede. Sistemas menores tendem a ser perturbados para longe da solução oscilante por flutuações maiores, fazendo com que a largura do ciclo de histerese diminua.

Ao se reduzir  $p_\gamma$ , a média e variância dos períodos refratários das células aumentam, tornando o sistema mais ruidoso e fazendo com que se torne cada vez mais difícil de se obter oscilações autossustentadas. Isto pode explicar o resultado visto na figura 3.1(b), onde há uma diminuição da região com oscilações ( $q > 0$ ). A largura do ciclo de histerese também se reduz, com  $\sigma_1^c$  e  $\sigma_2^c$  diminuindo. Além disso,  $\sigma_2^c$  (junto com a largura de histerese) se torna menos sensível ao tamanho do sistema, o que talvez possa ser explicado com a variância do período refratário se sobrepondo aos efeitos das flutuações nos sistemas de menor tamanho. Embora o efeito seja sutil,  $\sigma_c$  também aumenta lentamente ao decrescer  $p_\gamma$ , como será visto na figura 3.3.

Para valores ainda menores de  $p_\gamma$  [veja figura 3.1(c)], a região de biestabilidade desaparece, embora ainda haja a transição de fase reentrante para um regime de oscilações coletivas. Finalmente, para  $p_\gamma$  suficientemente pequeno, não há mais a transição para um estado sincronizado [figura 3.1(d)].

Na seção a seguir, mostraremos que estas transições podem ser previstas quantitativamente por uma análise de campo médio de baixa dimensionalidade. Para compararmos com as simulações,  $\sigma_c$  e  $\sigma_c^1$  foram definidos heurísticamente como os valores de  $\sigma$  (com média em  $n$  rodadas) em que  $q$  está acima do limiar  $q_{min} \propto 1/\sqrt{N}$  pela primeira vez para  $\sigma$  crescente e decrescente, respectivamente. Por outro lado,  $\sigma_2^c$  foi definido como o primeiro valor de  $\sigma$  crescente para o qual  $q$  desce abaixo de  $q_{min}$ .

### 3.2 Campo médio

Aplicamos a aproximação de campo médio (CM) usual [Marro & Dickman, 1999] nas equações que governam o sistema. Seguimos os passos das referências [Girvan et al., 2002; Furtado & Copelli, 2006; Kinouchi & Copelli, 2006] onde cada sítio possui  $K$  vizinhos e uma fração  $P_t(1)$  deles encontra-se ativa no instante  $t$ . Se uma célula está em repouso (com probabilidade  $P_t(0)$ ), nós temos que a probabilidade de ela ser excitada por ao menos um de seus vizinhos ativos é

$$P_{inf}(t) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma P_t(1)}{K}\right)^K. \quad (3.2)$$

A dinâmica do sistema pode ser descrita pelo conjunto fechado de equações:

$$P_{t+1}(0) = p_\gamma P_t(\tau) + (1 - P_{inf}(t)) P_t(0) \quad (3.3)$$

$$P_{t+1}(1) = P_{inf}(t) P_t(0) \quad (3.4)$$

$$P_{t+1}(s) = P_t(s-1) \quad (2 \leq s \leq \tau-1) \quad (3.5)$$

$$P_{t+1}(\tau) = P_t(\tau-1) + (1 - p_\gamma) P_t(\tau), \quad (3.6)$$

onde  $P_t(k)$  é a densidade de sítios no estado  $k$  (similar à eq. (2.1)) e a condição de normalização

$$P_t(0) = 1 - \sum_{s=1}^{\tau} P_t(s) \quad (3.7)$$

torna (3.3) redundante e reduz o sistema a um mapa  $\tau$ -dimensional [Furtado & Copelli, 2006]. Assim, aumentar a duração do período refratário significa um aumento na complexidade da análise de campo médio. Note que o último estado probabilístico não permite a obtenção direta do polinômio característico como feito em [Girvan et al., 2002] (ver seção 1.2.3), exigindo o cálculo explícito de um determinante após linearizar o sistema (veja abaixo).

Para o grafo completo, temos que  $K = N - 1$  e o campo médio é exato. No limite termodinâmico, (3.2) é dada por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{inf} = 1 - e^{-\sigma P_t(1)}, \quad (3.8)$$

que ao ser substituída junto com a eq. (3.7) na eq. (3.4) nos dá

$$P_{t+1}(1) = (1 - e^{-\sigma P_t(1)}) \left[1 - \sum_{s=1}^{\tau} P_t(s)\right]. \quad (3.9)$$

Em outras palavras, na análise de campo médio o sistema é completamente descrito por

$\vec{P}_t \equiv (P_t(1), P_t(2), \dots, P_t(\tau))^T$ , com sua evolução temporal descrita por  $\vec{P}_{t+1} = \vec{F}(\vec{P}_t)$ . Note que  $F_1$  é a única componente não-linear de  $\vec{F}$  [conforme (3.9)].

Da (3.5) temos que o ponto fixo para qualquer  $2 \leq s \leq \tau - 1$  é simplesmente  $P_s^* \equiv P_\infty(s) = P_\infty(s-1) = \dots = P_1^*$ , cuja substituição em (3.6) nos fornece  $P_\tau^* = P_1^*/p_\gamma$ . Finalmente, em seu estado estacionário ( $t \rightarrow \infty$ ), a eq. (3.9) se torna

$$P_1^* = (1 - e^{-\sigma P_1^*}) \left[ 1 - \left( \tau - 1 + \frac{1}{p_\gamma} \right) P_1^* \right], \quad (3.10)$$

que pode ser resolvida numericamente. Expandindo em torno de  $P_1^* = 0$  (note que  $P_1^* = 0$  é sempre solução), facilmente se obtém a transição de um estado absorvente para um ativo (não-oscilante) em  $\sigma = 1$  [Kinouchi & Copelli, 2006]. As oscilações coletivas aparecem quando o estado ativo se torna instável para um valor de  $\sigma = \sigma_c > 1$ .

### 3.3 Análise de estabilidade linear

Considerando uma pequena perturbação  $\eta_t(s)$  tal que  $P_t(s) = P_s^* + \eta_t(s)$ , podemos escrever a dinâmica linearizada como  $\vec{\eta}_{t+1} = A\vec{\eta}_t$  onde  $A_{ij} = \partial F_i / \partial P_t(j)|_{\vec{P}^*}$  é a matriz jacobiana calculada no ponto fixo:

$$A = \begin{pmatrix} g(\sigma, P_1^*) & (e^{-\sigma P_1^*} - 1) & \dots & (e^{-\sigma P_1^*} - 1) & (e^{-\sigma P_1^*} - 1) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (1 - p_\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

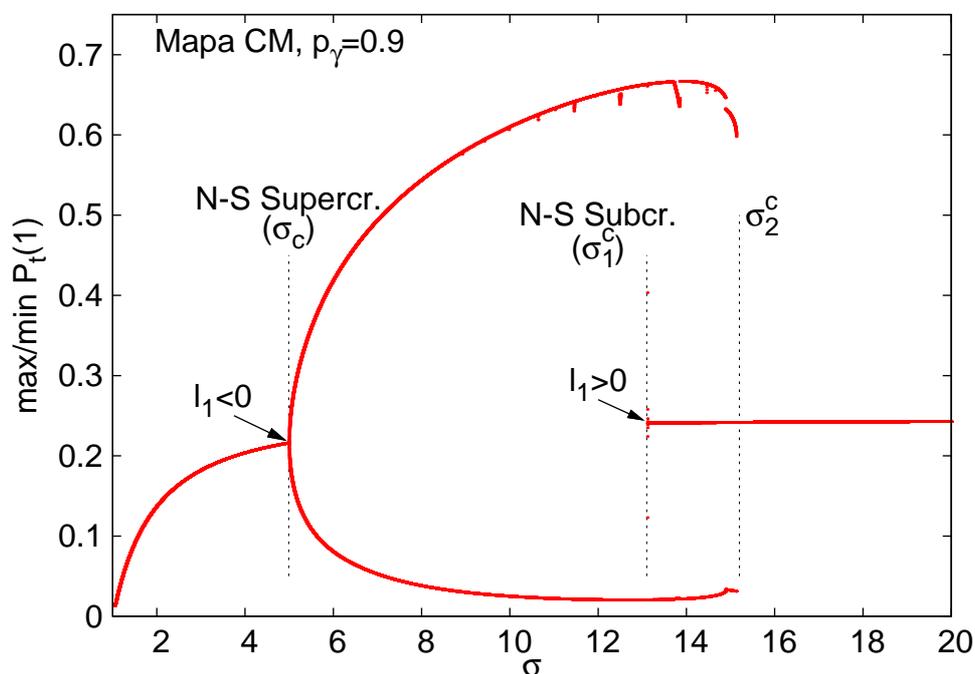
com

$$g(\sigma, P_1^*) = e^{-\sigma P_1^*} - 1 + \sigma e^{-\sigma P_1^*} [1 - (\tau - 1 + 1/p_\gamma) P_1^*]. \quad (3.12)$$

Os autovalores  $\{\mu_j\}_{j=1}^\tau$  de  $A$  determinam quando  $\vec{P}^*$  é estável ( $\max_j |\mu_j| < 1$ ) ou instável ( $\max_j |\mu_j| > 1$ ) (para reduzir a notação da análise a seguir, utilizaremos  $\mu \equiv \mu_k$ , onde  $k = \text{argmax}_j |\mu_j|$ ). Esperamos identificar a transição de fase como uma bifurcação de Neimark-Sacker nas equações de campo médio.

### 3.3.1 Bifurcação de Neimark-Sacker

A bifurcação de Neimark-Sacker (NS) é o análogo em tempo discreto à bifurcação de Andronov-Hopf (AH) para o tempo contínuo [Kuznetsov, 1998]. Desta forma, para um dado  $p_\gamma$ , teremos  $|\mu| = 1$  com  $\text{Im}(\mu) \neq 0$  em  $\sigma = \sigma^{NS}$  (ou seja,  $\mu = e^{i\phi}$ ). A relação entre  $\sigma^{NS}$  e os valores críticos da simulação ( $\sigma_c$ ,  $\sigma_1^c$  e  $\sigma_2^c$ ) será esclarecida mais adiante. Assim como a bifurcação AH, a bifurcação NS possui duas variantes. No caso supercrítico, uma curva invariante fechada (CIF – o análogo em tempo discreto de um ciclo-limite) surge em  $\sigma^{NS}$  e cresce continuamente a partir da amplitude zero. No caso subcrítico, uma CIF instável surge antes de  $\sigma^{NS}$  e engloba o ponto fixo  $\bar{P}^*$  em  $\sigma^{NS}$ , normalmente fazendo com que o sistema seja atraído por uma CIF estável preexistente. Como o parâmetro de ordem  $q$  cresce proporcionalmente à amplitude das oscilações (que grosseiramente falando, é da ordem de  $\|\vec{\eta}\|$ ), uma bifurcação NS supercrítica (subcrítica) nas equações de campo médio sugere uma transição de fase contínua (descontínua) no sistema (um exemplo pode ser visto em [Assis & Copelli, 2009]). Através dos extremos (máximo e mínimo) da série temporal de  $P_t(1)$ , podemos representar as trajetórias estáveis (ponto fixo e CIF) para cada  $\sigma$ . A curva de bifurcação resultante encontra-se esquematizada na figura 3.2.

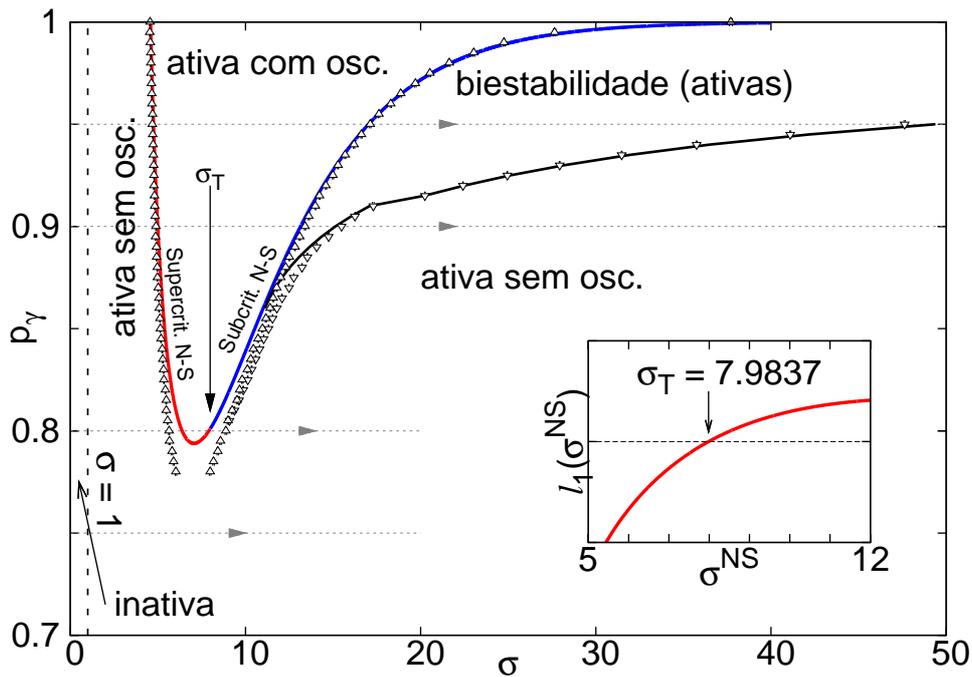


**Figura 3.2** Curva de bifurcação do mapa de campo médio para  $p_\gamma = 0.9$ . A curva vermelha indica os extremos das oscilações de  $P_t(1)$ . Linhas tracejadas indicam os pontos críticos definidos na seção 3.1.

O primeiro coeficiente de Lyapunov  $l_1$  [Kuznetsov, 1998] indica se a bifurcação NS é supercrítica ( $l_1 < 0$ ) ou subcrítica ( $l_1 > 0$ ). Seu cálculo é direto, embora trabalhoso, e encontra-se resumido no apêndice A, com resultados para grafos completos e aleatórios. Finalmente temos as ferramentas necessárias para desvendarmos o diagrama de fases.

### 3.4 Diagrama de fases

Simulamos grafos completos com  $N = 10^6$  elementos excitáveis e empregamos o protocolo descrito na seção 3.1 com  $t_{max} = 10^3$  passos para detectarmos os limites de estabilidade das fases ativas não-oscilante e oscilante, através do ciclo de histerese. Testando valores maiores de  $t_{max}$ , não observamos mudanças significativas nos resultados. Este diagrama de fases é representado pelos símbolos na figura 3.3 (as linhas cinza horizontais mostram os valores de  $p_\gamma$  utilizados na figura 3.1). Obtivemos a curva da Neimark-Sacker para as equações de campo



**Figura 3.3** Diagrama de fases para o grafo completo (triângulos) com  $N = 10^6$  (média sobre 50 rodadas,  $t_{max} = 10^3$  e  $t_{trans} = 5 \times 10^2$ ). A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise de estabilidade local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante (conforme previsto por campo médio). Note que as linhas preta e azul se aproximam antes de se unirem em  $\sigma_T$ . No detalhe: primeiro coeficiente de Lyapunov  $l_1(\sigma)$  ao longo da curva crítica.

médio através da função de teste<sup>2</sup>  $\Phi_{NS}(\sigma; p_\gamma) = \prod_{m < n}^\tau (1 - \mu_n \mu_m)$ , que troca de sinal na bifurcação. [Kuznetsov, 1998]. Como o coeficiente de Lyapunov  $l_1$  determina se a bifurcação é super- ou subcrítica, seu valor ao longo da curva de bifurcação pode ser visto no detalhe da figura 3.3 (trocando de sinal em  $\sigma_T$ ). As linhas sólidas na figura 3.3 mostram as curvas das bifurcações supercrítica (vermelho) e subcrítica (azul) onde  $\Phi_{NS}(\sigma^{NS}) = 0$ .

Comparando os símbolos com as linhas sólidas da figura 3.3, observamos que a análise de estabilidade linear foi capaz de prever a transição *para* a fase ativa oscilante. Ou seja, obtivemos corretamente as curvas  $\sigma_c(p_\gamma)$  e  $\sigma_1^c(p_\gamma)$  onde o estado ativo não-oscilante perde estabilidade.

Entretanto, a transição em  $\sigma_2^c(p_\gamma)$  não pode ser prevista pela análise local. Neste caso, é a própria CIF estável que perde sua estabilidade (enquanto a do ponto fixo  $\vec{P}^*$  permanece intacta). Isto sugere a existência de uma bifurcação global, a qual pode ser detectada numericamente nas equações de campo médio pela iteração do mapa definido nas eqs. (3.5), (3.6) e (3.9). Para permitir a comparação do mapa  $\tau$ -dimensional com o sistema simulado, reescrevemos o vetor complexo  $Z$ , utilizando as eqs. (2.2) e (3.7), como

$$Z(t) = 1 + \sum_{s=1}^{\tau} P_t(s)(e^{i\phi_s} - 1), \quad (3.13)$$

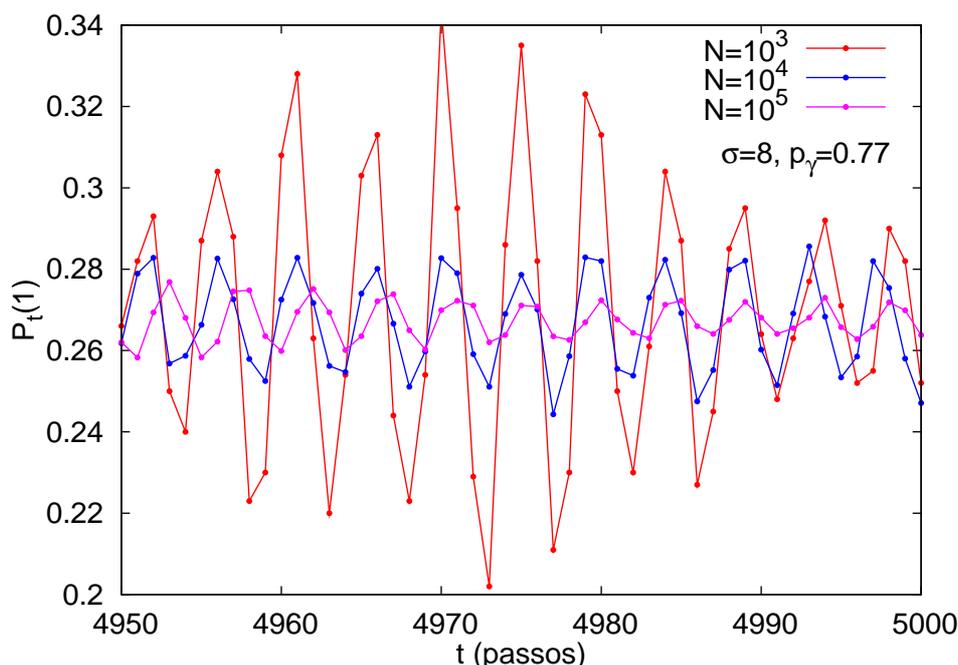
onde  $\phi_s = 2\pi s/(\tau + 1)$ . Desta forma, podemos calcular  $q$  para o mapa de campo médio e sujeitá-lo ao mesmo procedimento de análise utilizado para delimitar a região de coexistência nas simulações. A linha preta da figura 3.3 mostra a curva  $\sigma_2^c(p_\gamma)$  obtida através da iteração do mapa, mostrando boa concordância com as simulações (símbolos).

Observe que na parte inferior da região oscilante ( $p_\gamma \lesssim 0.8$ ) o parâmetro de ordem detecta oscilações presentes na simulação que não são previstas pela análise de campo médio. Este fenômeno pode ser explicado pela ocorrência de *oscilações estocásticas*, como recentemente explicado por Risau-Gusman e Abramson [Risau-Gusman & Abramson, 2007]: o ponto fixo na região discrepante é de fato *estável*, mas seus autovalores possuem uma parte imaginária não-nula. Quando flutuações inevitáveis jogam o sistema para longe do ponto fixo, este retorna em trajetórias semelhantes a espirais, tornando o valor de  $q$  não-nulo mesmo para sistemas muito grandes [Risau-Gusman & Abramson, 2007; Assis & Copelli, 2009]. Podemos ver na figura 3.4 séries temporais para diferentes tamanhos de sistema  $N$ , na região onde o campo médio não prevê oscilações. Observe que as oscilações estocásticas possuem *maior* amplitude quanto *menor* o tamanho do sistema.

Para  $p_\gamma = 1$ , recuperamos uma variante com desordem congelada do modelo de Girvan

---

<sup>2</sup>Funções especiais que trocam de sinal na ocorrência da bifurcação, permitindo a aplicação de métodos numéricos para se obter o ponto crítico. [Kuznetsov, 1998]



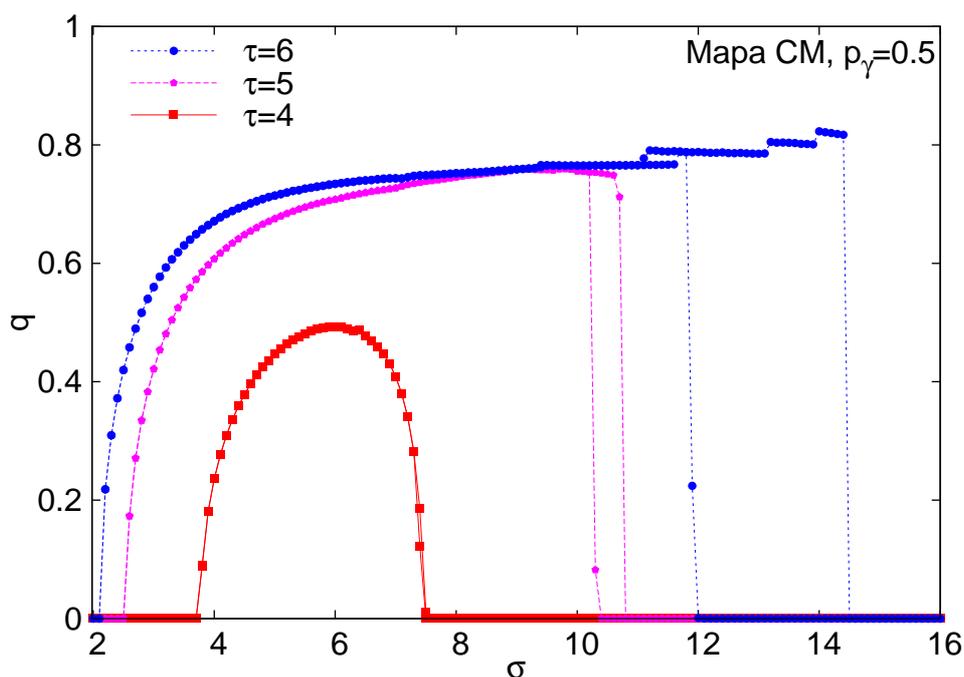
**Figura 3.4** Séries temporais do grafo completo para diferentes tamanhos de sistema ( $N = 10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$ ) em uma região onde o campo médio não prevê oscilações ( $\sigma = 8$ ,  $p_\gamma = 0.77$ ). Note que as flutuações (oscilações) são maiores para tamanhos menores do sistema.

et al. [Girvan et al., 2002]. Neste regime onde as transições intrínsecas são determinísticas, aumentar o acoplamento apenas reforça as oscilações coletivas e o ponto fixo  $P_1^*$  nunca recupera sua estabilidade (isto é,  $\sigma_1^c \rightarrow \infty$ ). Isto sugere que mesmo pequenos ruídos na dinâmica interna de elementos excitáveis provocam comportamentos qualitativamente diferentes no regime de acoplamento forte.

### 3.5 Períodos refratários maiores

Como estamos considerando apenas  $\tau = 3$ , um breve comentário sobre o efeito do aumento de período refratário se faz necessário. Como pode ser visto com os ciclos de histerese obtidos pela solução de campo médio na figura 3.5, o incremento de  $\tau$  facilita a ocorrência da sincronização, causando a diminuição de  $\sigma_c$ . Este resultado é semelhante ao obtido por Girvan et al. [Girvan et al., 2002], onde o aumento no número de estados permite o surgimento de um regime oscilatório para valores menores da intensidade de acoplamento (ver figura 1.10).

Perceba que há sincronização mesmo em regiões onde  $\tau = 3$  não apresenta oscilações glo-



**Figura 3.5** Ciclos de histerese da solução de campo médio para diferentes períodos  $\tau = 4, 5$  e  $6$  com  $p_\gamma = 0.5$ . Note que a sincronização é facilitada pelo aumento de  $\tau$ . Outros parâmetros:  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 0.1$ .

bais (ver figura 3.3), pois neste caso  $p_\gamma = 0.5$  [figura 3.5]. Uma explicação para este efeito pode estar na memória: um maior número de estados determinísticos faz com que o sistema seja robusto a um ruído maior ( $p_\gamma$  menor). Em outras palavras, uma menor variância no período total (pelo maior número de estados determinísticos), corresponde a uma menor variabilidade nos períodos dos elementos excitáveis, facilitando a ocorrência da sincronização [Winfree, 1967]. Para um  $p_\gamma$  fixo, aumentar  $\tau$  também promove um crescimento da região de biestabilidade.

Para valores maiores de  $\tau$  (com  $p_\gamma \approx 1$ ), o procedimento de histerese é prejudicado pela facilidade com que o sistema é levado ao estado absorvente. Isso ocorre devido ao aumento das amplitudes de oscilação [Girvan et al., 2002], fazendo com que as flutuações joguem mais facilmente o sistema em seu estado de repouso ( $s_i = 0, \forall i$ ). Isto é semelhante ao observado para a região com extinção dinâmica no modelo de Girvan et al., como pode ser visto no quadrante superior direito da figura 1.10. Estudos mais detalhados podem ajudar a compreender esse comportamento com o incremento de  $\tau$ .

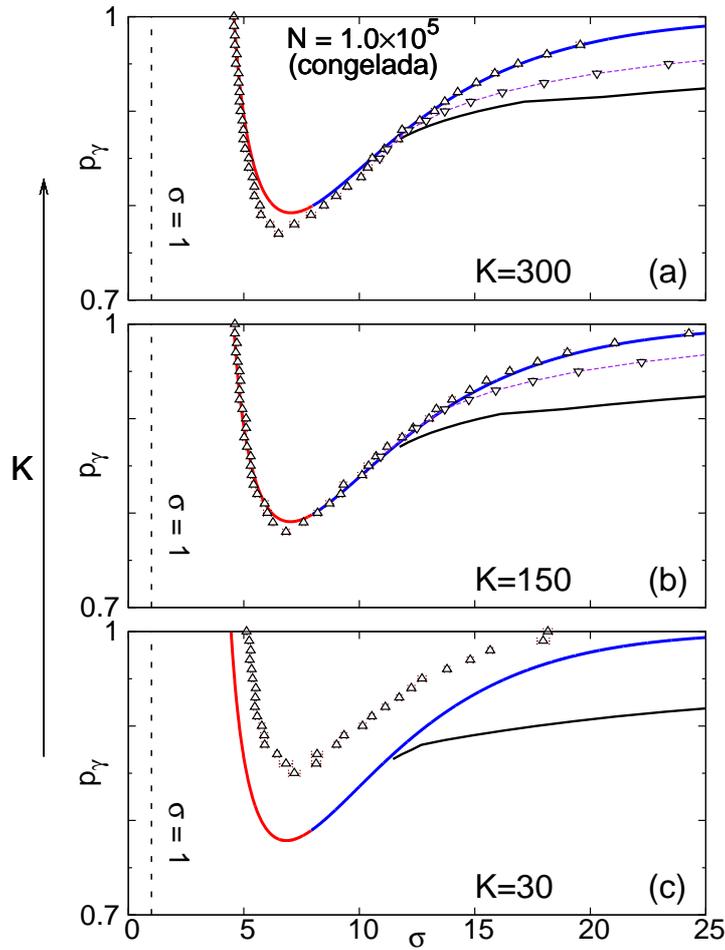
## Grafo aleatório

Para entender os efeitos da topologia na sincronização, começaremos com o modelo mais simples (mas não trivial): o grafo aleatório. Através da descrição de campo médio e simulações, estudaremos os casos com desordem congelada (*quenched*) e recozida (*annealed*). Por fim, mostraremos através de colapso de dados que o parâmetro de ordem  $q$  satisfaz relações de escala usualmente associadas a parâmetros de ordem próximos a transições de fase.

### 4.1 Simulações e campo médio

Utilizamos um grafo aleatório similar a uma rede aleatória de Erdős-Rényi [Erdős & Rényi, 1960] onde  $NK/2$  ligações conectam pares de sítios escolhidos aleatoriamente [Kinouchi & Copelli, 2006] e permanecem fixas (“congeladas”) por toda a rodada de simulação (e para cada rodada, uma nova realização da rede é criada). A maior diferença para o grafo completo (GC) é que o grafo aleatório (GA) apresenta uma limitação superior para a intensidade de acoplamento:  $\sigma \leq K$  [veja (3.2)]. No entanto, o cálculo da aproximação de campo médio pode ser feito de forma semelhante ao do grafo completo, considerando a probabilidade de transmissão da eq. (3.2) ao invés de (3.8). Assim, aplicamos ao grafo aleatório os mesmos procedimentos para analisar a estabilidade das soluções, a natureza da bifurcação NS e as fronteiras das fases oscilante e não-oscilante (como descrito no capítulo 3).

Como o grafo aleatório conecta pares de forma descorrelacionada e possui distância média entre sítios pequena, se esperaria uma boa aproximação com os resultados de campo médio. De fato, na transição da fase absorvente para a ativa em  $\sigma = 1$ , há uma concordância excepcional entre as simulações e a análise numérica [Kinouchi & Copelli, 2006]. Na figura 4.1(a)-(b) vemos que a aproximação de campo médio funciona para estimar a transição *para* uma fase sincronizada quando os valores de  $K$  são grandes. Entretanto, note que as simulações discordam da previsão de campo médio no canto direito da região de biestabilidade (onde a CIF deixa de ser estável), se afastando ainda mais quando  $K$  é diminuído. Como mostrado na figura 4.1(c), para valores ainda menores de  $K$  a biestabilidade nas simulações não é nem mesmo detectada, além de apresentar uma região oscilante no espaço de parâmetros reduzida (em comparação



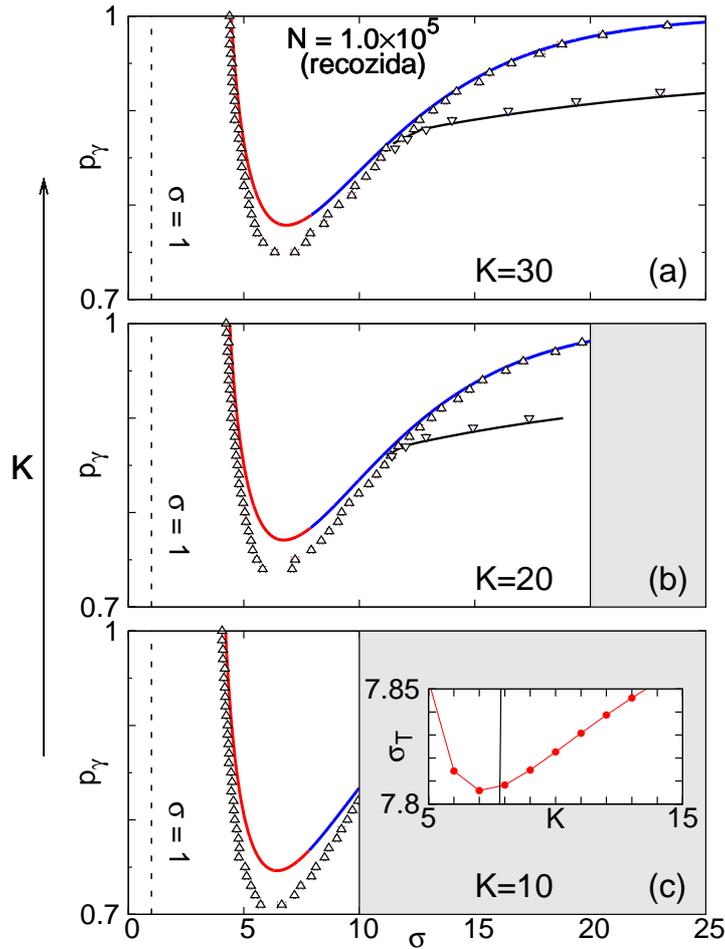
**Figura 4.1** Diagrama de fases para grafos aleatórios (congelados) com (a)  $K = 300$ , (b)  $K = 150$  e (c)  $K = 30$ . A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação de Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante (conforme previsto por campo médio). Símbolos são obtidos através da simulação (média sobre 5 rodadas) com  $t_{max} = 3 \times 10^3$ ,  $t_{trans} = 2 \times 10^3$  e  $N = 10^5$ . Erros padrão são menores que o tamanho do símbolo. A linha tracejada roxa é um guia para os olhos e marca o limite de estabilidade das simulações.

com a previsão de campo médio).

## 4.2 Grafos aleatórios *annealed*

Poderiam as correlações (assumidas como inexistentes na aproximação de campo médio) serem as responsáveis pelos efeitos observados na figura 4.1? Para entender o papel das correlações

associadas à existência de uma rede congelada, estudamos uma variante “recozida” (ou, no jargão em inglês, *annealed*) onde os  $K$  vizinhos de cada sítio são escolhidos aleatoriamente a cada passo de tempo [Girvan et al., 2002; Sinha et al., 2007]. Os resultados são mostrados na figura 4.2, onde exibimos apenas valores menores de  $K$ , visto que o caso recozido apresenta resultados indistinguíveis do congelado para valores maiores de  $K$ .



**Figura 4.2** Diagrama de fases para grafos aleatórios (congelados) com (a)  $K = 30$ , (b)  $K = 20$  e (c)  $K = 10$ . A linha sólida vermelha (azul) é a bifurcação de Neimark-Sacker supercrítica (subcrítica) prevista pela análise local. A linha preta marca o limite de estabilidade (transição descontínua) da fase oscilante. Símbolos são obtidos através da simulação (média sobre 5 rodadas) com  $t_{max} = 3 \times 10^3$ ,  $t_{trans} = 2 \times 10^3$  e  $N = 10^5$ . Erros padrão são menores que o tamanho do símbolo. As áreas pintadas de cinza indicam a região proibida onde  $\sigma > K$ . No detalhe:  $\sigma_T$  para diferentes valores de  $K$ , mostrando a existência de um  $K_c = \sigma_T(K_c) = 7.8074(1)$  abaixo do qual não há mais a região de coexistência.

Para redes com valores de  $K$  pequenos, três coisas se tornam notáveis. Primeiro, a concordância com os resultados de campo médio é recuperada (com exceção da região onde ocorrem

as oscilações estocásticas, como nos casos anteriores). Isso confirma a ideia de que as correlações associadas à rede congelada prejudicam o aparecimento das oscilações coletivas, o que não é surpreendente, considerando a dificuldade em se estabelecer oscilações coletivas de elementos excitáveis em redes hipercúbicas [Kuperman & Abramson, 2001; Assis & Copelli, 2009].

Segundo, a restrição  $\sigma < K$  empobrece consideravelmente o repertório de fenômenos observáveis para valores menores de  $K$  [note as regiões cinza na figura 4.2(b) e (c)]. Perceba que a região de coexistência encolhe ao diminuirmos  $K$ . De fato, como  $\sigma_T$  varia muito lentamente com  $K$  [veja o detalhe da figura 4.2(c)], há um valor mínimo de  $K$  [satisfazendo  $K_c = \sigma_T(K_c)$ ] abaixo do qual o sistema não apresenta mais biestabilidade (ou seja, não há mudança no sinal de  $l_1$ ). Estimamos numericamente  $K_c = 7.8074(1)$ .

Por último, note que a fase oscilante se estende para valores menores de  $p_\gamma$  ao *diminuirmos*  $K$ . Este resultado é contra-intuitivo: em geral, quanto maior  $K$ , mais fácil ocorreria a sincronização, pois no limite  $K \rightarrow N$  estaríamos mais próximos de um grafo completo. O resultado obtido pelo campo médio significa que, para um  $\sigma$  e  $p_\gamma$  fixos, poderíamos obter uma transição para uma fase ativa oscilante apenas *diminuindo*  $K$ . Entretanto, isto parece ser uma particularidade do grafo aleatório recozido (capturado também pelo campo médio). Observamos que na figura 4.1 o comportamento oposto (e esperado) ocorre para os grafos aleatórios congelados. Resta estudar se o refinamento da aproximação (por exemplo, com correlação entre primeiros-vizinhos [Furtado & Copelli, 2006; Rozhnova & Nunes, 2009a]) seria capaz de reproduzir os resultados da simulação do grafo aleatório congelado.

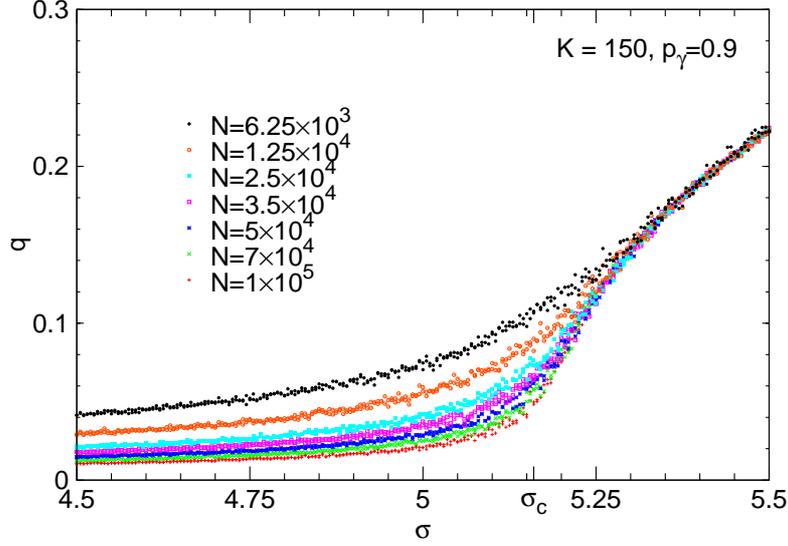
### 4.3 Teoria de escala de tamanho finito

Os diagramas de fases exibidos anteriormente utilizam bastante o parâmetro de ordem  $q$ . Na figura 4.3, vemos que o seu comportamento próximo a  $\sigma_c$  é cada vez mais abrupto com o aumento do tamanho  $N$  do sistema. Para confirmar que  $q$  possui as propriedades básicas de um parâmetro de ordem “bem comportado”, mostramos que na bifurcação NS supercrítica (uma transição de fase de segunda ordem, contínua) ele satisfaz as relações de escala que seriam esperadas da teoria de escala de tamanho finito (TETF).

Definindo  $\Delta \equiv \sigma - \sigma_c$ , a TETF prediz

$$q \propto L^{-\beta/\nu_\perp} f\left(\Delta L^{1/\nu_\perp}\right) \quad (4.1)$$

para uma rede regular com tamanho linear  $L$  [Marro & Dickman, 1999] e dimensão  $d$ , onde os



**Figura 4.3** Parâmetro de ordem para diferentes tamanhos de rede  $N$  ( $p_\gamma = 0.9$ ,  $K = 150$ ;  $\sigma_c = 5.16$ ). Média sobre 15 rodadas, com erros padrão menores que o tamanho do símbolo. Outros parâmetros foram  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ .

expoentes críticos são definidos como

$$q \propto |\Delta|^\beta, \quad (4.2)$$

$$\xi \propto |\Delta|^{-\nu_\perp}, \quad (4.3)$$

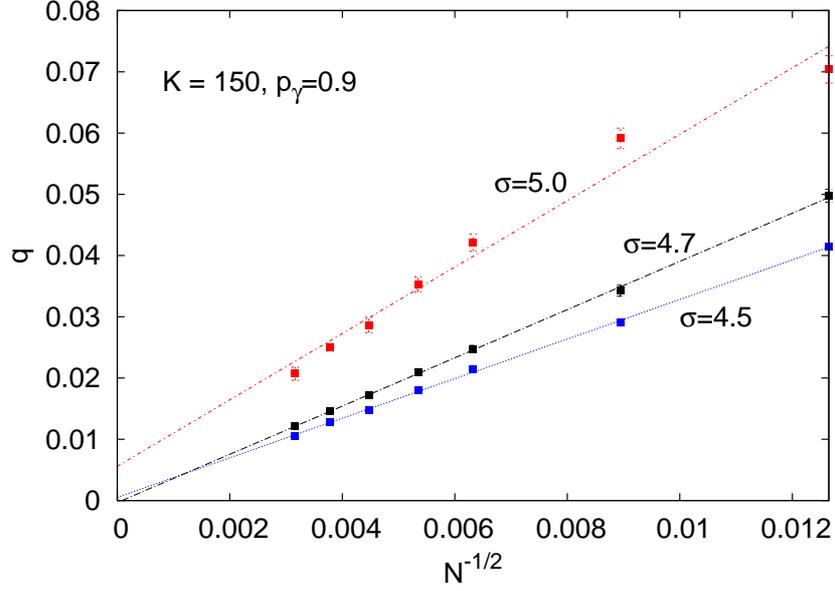
no limite  $|\Delta| \ll 1$  e  $N \equiv L^d \rightarrow \infty$  (onde  $\xi$  é o comprimento de correlação).

Um problema para a aplicação desta teoria em redes complexas é a ausência de um tamanho linear característico  $L$ . Embora possamos generalizar a definição utilizando  $L = N^{1/d}$ , não sabemos qual a dimensão  $d$  correta (ou até mesmo se ela é finita) para redes complexas como o grafo aleatório ou completo. A dificuldade de aplicar a eq. (4.1) persiste mesmo em algumas redes regulares com dimensão conhecida. Para dimensões  $d$  acima da dimensão crítica superior  $d_c$ , esperamos que o sistema apresente expoentes de campo médio [Marro & Dickman, 1999]. Neste caso ( $d > d_c$ ), a eq. (4.1) não é mais verdadeira, do contrário seria impossível satisfazer a relação de hiperescala [Marro & Dickman, 1999]

$$\gamma = d\nu_\perp - 2\beta, \quad (4.4)$$

onde  $\gamma$  é outro expoente crítico<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Definido pela divergência da variância escalada  $\chi \equiv N(\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2) \propto |\Delta|^{-\gamma}$  [Marro & Dickman, 1999].



**Figura 4.4** Dependência do parâmetro de ordem  $q$  com o tamanho da rede  $N$ , na região subcrítica ( $\sigma < \sigma_c = 5.16$ ) para  $p_\gamma = 0.9$  e  $K = 150$ . Médias (símbolos) calculadas sobre 15 rodadas com erros padrão (barras). Retas são ajustes lineares aos pontos. Perceba que suficientemente longe do ponto crítico o parâmetro de ordem  $q \propto N^{-1/2}$ . Outros parâmetros são  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ .

A solução para este impasse foi dada por [Brézin, 1982], ao mostrar que para  $d \geq d_c$  devemos considerar na eq. (4.1) a substituição  $L \rightarrow N^{1/d_c}$ , obtendo

$$q \propto N^{-\beta/d_c v_\perp} f\left(\Delta N^{1/d_c v_\perp}\right). \quad (4.5)$$

Esta relação de escala modificada foi confirmada em diferentes topologias, como redes infinitamente coordenadas [Botet et al., 1982] (grafo completo), redes regulares (hipercúbicas) com  $d > d_c$  [Jones & Young, 2005] e outras redes complexas [Hong et al., 2007].

Para argumentos grandes ( $\Delta > 0$ ), a função de escala na eq. (4.5) obedece

$$f(x) \propto x^\beta, \quad x \gg 1 \quad (4.6)$$

para satisfazer a relação (4.2) [Marro & Dickman, 1999].

Sabemos [Strogatz, 2000] (ver figuras 3.1(d) e 4.4) que as flutuações fazem com que o parâmetro de ordem não se anule nas regiões não-oscilantes,

$$q \sim \mathcal{O}(N^{-1/2}). \quad (4.7)$$

Da eq.(4.5) temos portanto que no regime subcrítico ( $\Delta < 0$ ) a função de escala segue

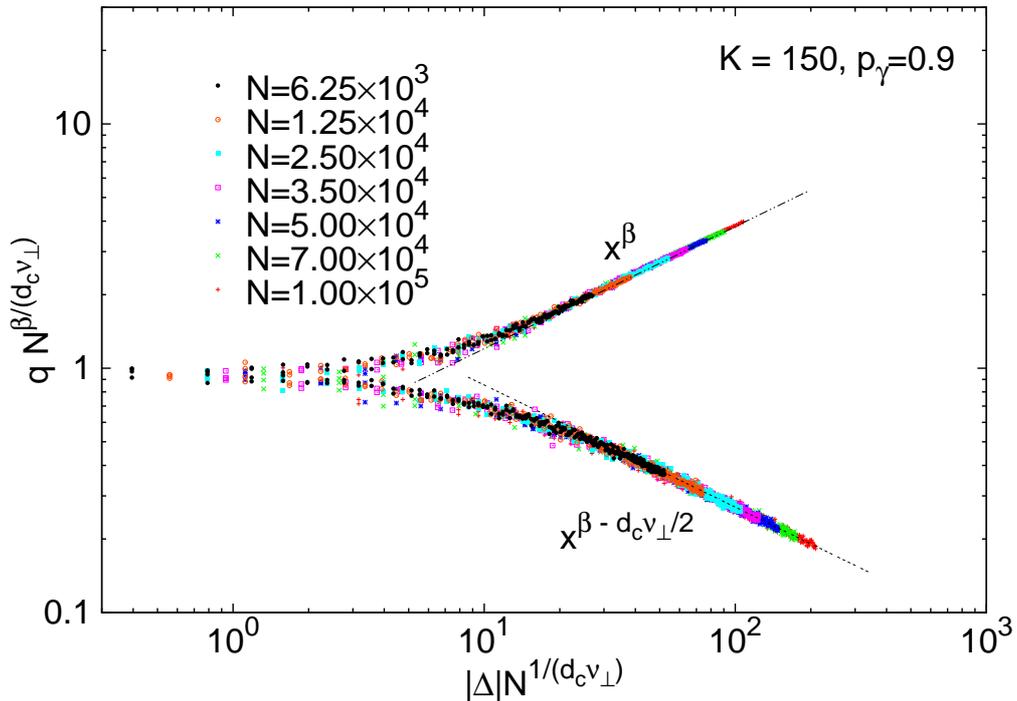
$$f(\Delta N^{1/d_c v_\perp}) \propto N^{-1/2} N^{\beta/d_c v_\perp}. \quad (4.8)$$

Para que isso seja verdadeiro, obrigatoriamente teremos

$$f(x) \propto x^{\beta - \frac{d_c v_\perp}{2}}, \quad (4.9)$$

quando  $x < 0$  e  $|x| \gg 1$ .

A figura 4.5 mostra um colapso excelente dos dados para grafos aleatórios (congelados) para diferentes tamanhos de sistema. Leis de potência robustas, dadas pelas relações (4.6) e (4.9), são obtidas com os expoentes de campo médio (como esperado para grafos aleatórios):  $\beta = 1/2$  [Strogatz, 2000] (ver eq. (1.12)),  $v_\perp = 1/2$  e  $d_c = 4$  [Marro & Dickman, 1999].



**Figura 4.5** Colapso dos pontos da simulação em um regime probabilístico ( $p_\gamma = 0.9$ ) com  $K = 150$  e  $\sigma_c = 5.16$ . Foram utilizados  $\beta = 1/2$ ,  $v_\perp = 1/2$ ,  $d_c = 4$ . Média sobre 15 rodadas, com erros padrão menores que o tamanho do símbolo. Outros parâmetros foram  $t_{max} = 10^4$ ,  $t_{trans} = 7 \times 10^3$  e  $\delta\sigma = 5 \times 10^{-3}$ .

## Conclusões, comentários e perspectivas

Estudamos os efeitos de um período refratário probabilístico no comportamento coletivo de autômatos celulares excitáveis acoplados. Obtivemos a solução de campo médio do modelo e a comparamos com as simulações tanto para os grafos completos quanto para os aleatórios. Observamos uma transição contínua para um estado sincronizado, representada nas equações de campo médio por uma bifurcação Neimark-Sacker supercrítica.

Este cenário é similar ao que fora obtido anteriormente por [Girvan et al., 2002] em um modelo de autômato celular excitável determinístico ( $p_\gamma = 1$  em nosso modelo, ver seção 1.2.3). Os efeitos de assumir  $p_\gamma < 1$ , entretanto, são notáveis: para um acoplamento  $\sigma$  suficientemente forte, observamos que as oscilações desaparecem. Isso é distinto de [Girvan et al., 2002], onde o sistema vai ao estado *absorvente* para acoplamentos intensos. Enquanto no modelo deles as amplitudes muito grandes levam o sistema ao repouso ( $P_t(1) = 0$ ), em nosso modelo o sistema é jogado para um estado *ativo* e desordenado, sem oscilações ( $P_t(1) \neq 0, q = 0$ ).

Além disso, apenas quando os elementos excitáveis eram não-determinísticos ( $p_\gamma < 1$ ) foi possível observar biestabilidade, com uma fase oscilante e uma fase ativa (mas não oscilante) coexistindo. Analisamos os ciclos de histerese, cuja largura mostrou-se poder depender do tamanho do sistema (principalmente para o caso do grafo completo, quando  $p_\gamma \approx 1$ ). Para grafos aleatórios, a largura do ciclo de histerese se reduz com a diminuição da conectividade média  $K$ , eventualmente desaparecendo.

Embora tenhamos nos restringido a  $\tau = 3$ , mostramos (ver figura 3.5 da seção 3.5) que os comportamentos são semelhantes para valores maiores de  $\tau$ , sendo mantidos qualitativamente, especialmente para a primeira transição em  $\sigma_c$ . A observação de biestabilidade e histerese para  $\tau > 3$  é prejudicada devido a efeitos de tamanho-finito ainda maiores. Estes resultados são similares aos apresentados por Girvan et al.: para um  $N$  finito e acoplamento suficientemente intenso, a amplitude da CIF cresce e se aproxima do estado absorvente, para onde o sistema é jogado por flutuações [Girvan et al., 2002]. Distinguir entre essa transição e a biestabilidade apontada aqui não é óbvio, merecendo um estudo mais aprofundado.

É interessante notar como um modelo simples permite a aplicação direta de diversos métodos de dinâmica não-linear ao estudo das transições de fase, que poderiam ser difíceis de se

atacar de outra forma. Em particular, é notável que no limite  $p_\gamma = 1$  o autômato possui memória perfeita sobre seus último  $\tau$  passos de tempo ao fim do período refratário. Em um sistema de tempo contínuo, incorporar esta memória significa assumir uma dinâmica não-Markoviana, como no caso do modelo SIRS de tempo contínuo com tempos fixos de infecção.

Recentemente foi proposto por Gonçalves et al. [Gonçalves et al., 2009] (ver seção 1.2.5) um modelo cuja interpolação entre a memória perfeita (tempos fixos, não-Markoviano) e ausência de memória (taxas de transição, Markoviano) ocorre naturalmente. De forma curiosa, o modelo deles também apresenta uma fase oscilante com reentrância, cujo tamanho se reduz à medida que o tempo de memória diminui. Em nosso modelo, incorporar a “perda de memória” equivale a reduzirmos  $p_\gamma$ , com um resultado semelhante no comportamento coletivo. Ainda precisa ser investigado se a biestabilidade também ocorre em modelos não-Markovianos de tempo contínuo.

Observe que a simplicidade de nosso modelo permitiu uma análise detalhada de campo médio, identificando as diferentes fases (ativa oscilante e não-oscilante) e suas regiões de estabilidade no espaço de parâmetros. Mostrando que as transições de fase ocorriam através de uma bifurcação Neimark-Sacker, conseguimos classificá-las em supercrítica (contínua) ou subcrítica (descontínua) utilizando o primeiro coeficiente de Lyapunov. Embora seja uma boa aproximação para o grafo completo, o campo médio não foi capaz de prever todos os comportamentos dos grafos aleatórios congelados (*quenched*). Isso indica que a correlação entre vizinhos, desconsiderada pela aproximação de campo médio, possui influência na sincronização. Novos estudos poderiam utilizar a aproximação de pares, onde a correlação entre primeiros-vizinhos é considerada [Furtado & Copelli, 2006; Rozhnova & Nunes, 2009a].

Mostramos que o parâmetro de ordem  $q$  satisfaz as relações de escala usuais da teoria de escala de tamanho finito [Marro & Dickman, 1999], permitindo a obtenção de um colapso com os expoentes críticos de campo médio (seção 4.3). Além disso, considerando que as flutuações no regime não-oscilante (subcrítico) promovem  $q \propto N^{-1/2}$  [Strogatz, 2000], fomos capazes de estimar (e confirmar) a lei de potência esperada para o ramo subcrítico (seção inferior) do colapso.

Entretanto, precisamos ser cuidadosos com os resultados de escala da figura 4.5. Embora tenhamos empregado uma dimensão crítica superior  $d_c = 4$ , isto não implica que uma dimensão crítica inferior<sup>1</sup> exista. Em especial, não conhecemos modelos de elementos excitáveis em redes hipercúbicas que apresentam oscilações coletivas (embora elas possam aparecer quando o sistema é forçado com um estímulo de Poisson [Lewis & Rinzel, 2000]). Resta investigar

---

<sup>1</sup>Dimensão mínima para que o sistema apresente a transição de fase em uma rede regular [Marro & Dickman, 1999].

se os resultados deste modelo se mantêm para redes mundo-pequeno [Watts & Strogatz, 1998; Newman & Watts, 1999; Kuperman & Abramson, 2001; Gade & Sinha, 2005] ou outras topologias complexas, que são extremamente interessantes para aplicações na neurociência.

Resumidamente, mostramos que as oscilações coletivas de elementos excitáveis são robustas a certos níveis de estocasticidade em sua dinâmica interna. Fixando a intensidade de acoplamento, há um  $p_\gamma$  crítico abaixo do qual as oscilações não são mais estáveis. Como a diminuição de  $p_\gamma$  implica no aumento da variância dos períodos das células, este resultado pode ser similar ao observado por Winfree para a dispersão da frequências de osciladores (ver seção 1.1.2). Por outro lado, fixando  $p_\gamma$  e aumentando  $\sigma$  observamos fenômenos novos e curiosos como biestabilidade e transições descontínuas. Nossos resultados sugerem que dinâmicas internas (mesmo fracamente ruidosas) podem mudar qualitativamente o comportamento oscilatório coletivo. Estudos futuros podem tratar de períodos refratários ( $\tau$ ) maiores, diferentes topologias ou mesmo modelos mais detalhados (modelados por equações diferenciais estocásticas, por exemplo). Os resultados principais dessa dissertação encontram-se publicados no *Journal of Statistical Mechanics* sob o título “*Collective oscillations of excitable elements: order parameters, bistability and the role of stochasticity*” [Rozenblit & Copelli, 2011].

APÊNDICE A

## Coeficiente de Lyapunov

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  respectivamente os autovetores à direita e esquerda (adjunto) da matriz Jacobiana  $A = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{P}}$ :

$$A\vec{u} = e^{i\theta_0}\vec{u}, \quad (\text{A.1})$$

$$A^T\vec{v} = e^{-i\theta_0}\vec{v}, \quad (\text{A.2})$$

com ambos normalizados:  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 1 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$  (onde  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  denota o produto interno complexo usual). Sejam também  $\vec{B}(\vec{x}, \vec{y})$  e  $\vec{C}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  funções multilineares proporcionais aos primeiros termos da expansão de Taylor de  $\vec{F}$  em  $\sigma = \sigma^{NS}$ , isto é,

$$B_j(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k,l=1}^{\tau} \frac{\partial^2 F_j(\vec{\xi}; \sigma^{NS})}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Bigg|_{\vec{\xi}=\vec{P}^*} x_k y_l, \quad (\text{A.3})$$

$$C_j(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{k,l,m=1}^{\tau} \frac{\partial^3 F_j(\vec{\xi}; \sigma^{NS})}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Bigg|_{\vec{\xi}=\vec{P}^*} x_k y_l z_m. \quad (\text{A.4})$$

Se agora definirmos

$$\vec{r} = (I - A)^{-1} \vec{B}(\vec{u}, \vec{u}), \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{s} = (e^{2i\theta} I - A)^{-1} \vec{B}(\vec{u}, \vec{u}), \quad (\text{A.6})$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $\tau \times \tau$  e  $\vec{u}$  é o conjugado de  $\vec{u}$ , o coeficiente  $l_1$  é finalmente dado por [Kuznetsov, 1998]

$$l_1 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ e^{-i\theta_0} \left[ \langle \vec{v}, \vec{C}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{u}) \rangle + 2 \langle \vec{v}, \vec{B}(\vec{u}, \vec{r}) \rangle + \langle \vec{v}, \vec{B}(\vec{u}, \vec{s}) \rangle \right] \right\}. \quad (\text{A.7})$$

## A.1 Grafo completo

No caso do grafo completo, consideramos a função de atualização

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{F}(\vec{\xi}; \sigma) = \begin{pmatrix} P_{inf}(\xi_1) [1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3] \\ \xi_1 \\ \xi_2 + (1 - p_\gamma) \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

onde  $P_{inf}(P_1; \sigma) = 1 - e^{-\sigma P_1}$ , similar à equação (3.8).

Como apenas o elemento  $F_1$  possui termos não-lineares, da definição nas eqs. (A.3) e (A.4) observamos que as funções multilineares  $\vec{B}(\vec{x}, \vec{y})$  e  $\vec{C}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  serão dadas por

$$\vec{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} B_1(\vec{x}, \vec{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{C}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{pmatrix} C_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (\text{A.10})$$

onde todos os elementos são nulos com exceção de

$$B_1(\vec{x}, \vec{y}) = -\sigma e^{-\sigma P_1^*} \left\{ \sigma \left[ 1 - \left( 2 + \frac{1}{p_\gamma} \right) P_1^* \right] x_1 y_1 + x_1 (y_1 + y_2 + y_3) + y_1 (x_1 + x_2 + x_3) \right\}, \quad (\text{A.11})$$

e

$$C_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sigma^2 e^{-\sigma P_1^*} \left\{ \sigma \left[ 1 - \left( 2 + \frac{1}{p_\gamma} \right) P_1^* \right] x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 (z_1 + z_2 + z_3) + z_1 x_1 (y_1 + y_2 + y_3) + y_1 z_1 (x_1 + x_2 + x_3) \right\}. \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Grafo aleatório

Para o grafo aleatório, o procedimento é similar ao realizado para o grafo completo (seção A.1), com a diferença de que agora da eq. (3.2) temos

$$P_{inf}(P_1; \sigma) = 1 - \left( 1 - \frac{\sigma P_1}{K} \right)^K. \quad (\text{A.13})$$

Utilizando novamente as definições das eqs. (A.3) e (A.4), obtemos as funções multilineares

$$\vec{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \left( B_1(\vec{x}, \vec{y}) \quad 0 \quad 0 \right)^T, \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{C}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \left( C_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad 0 \quad 0 \right)^T. \quad (\text{A.15})$$

onde mais uma vez todos os elementos são nulos com exceção de

$$B_1(\vec{x}, \vec{y}) = -\sigma \left( 1 - \frac{\sigma P_1^*}{K} \right)^{K-2} \left\{ \frac{\sigma(K-1)}{K} \left[ 1 - \left( 2 + \frac{1}{p_\gamma} \right) P_1^* \right] x_1 y_1 \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{\sigma P_1^*}{K} \right) [x_1(y_1 + y_2 + y_3) + y_1(x_1 + x_2 + x_3)] \right\}, \quad (\text{A.16})$$

e

$$C_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{\sigma^2(K-1)}{K} \left( 1 - \frac{\sigma P_1^*}{K} \right)^{K-3} \left\{ \frac{\sigma(K-2)}{K} \left[ 1 - \left( 2 + \frac{1}{p_\gamma} \right) P_1^* \right] x_1 y_1 z_1 \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{\sigma P_1^*}{K} \right) [x_1 y_1 (z_1 + z_2 + z_3) \right. \\ \left. + x_1 z_1 (y_1 + y_2 + y_3) + y_1 z_1 (x_1 + x_2 + x_3)] \right\}. \quad (\text{A.17})$$

## Referências Bibliográficas

- Acebrón, J., Bonilla, L., Pérez Vicente, C., Ritort, F., & Spigler, R. (2005). The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77(1), 137–185.
- Assis, V. R. V. & Copelli, M. (2008). Dynamic range of hypercubic stochastic excitable media. *Phys. Rev. E*, 77, 011923.
- Assis, V. R. V. & Copelli, M. (2009). Discontinuous nonequilibrium phase transitions in a nonlinearly pulse-coupled excitable lattice model. *Phys. Rev. E*, 80, 061105.
- Bal, T., Nagy, F., & Moulins, M. (1988). The pyloric central pattern generator in Crustacea: a set of conditional neuronal oscillators. *J. Comp. Physiol. A*, 163, 715–727. 10.1007/BF00604049.
- Bennett, M., Schatz, M. F., Rockwood, H., & Wiesenfeld, K. (2002). Huygens's clocks. *Proc. R. Soc. Lond. A Mat.*, 458, 563–579.
- Botet, R., Jullien, R., & Pfeuty, P. (1982). Size scaling for infinitely coordinated systems. *Phys. Rev. Lett.*, 49(7), 478–481.
- Brézin, E. (1982). An investigation of finite size scaling. *J. Phys.(Paris)*, 43(1), 15–22.
- Buck, J. & Buck, E. (1976). Synchronous fireflies. *Scientific American*, 234, 74–85.
- Buhr, E. D., Yoo, S.-H., & Takahashi, J. S. (2010). Temperature as a Universal Resetting Cue for Mammalian Circadian Oscillators. *Science*, 330(6002), 379–385.
- Bunger, M. K., Wilsbacher, L. D., Moran, S. M., Clendenin, C., Radcliffe, L., Hogenesch, J., Simon, M., Takahashi, J., & Bradfield, C. (2000). Mop3 is an essential component of the master circadian pacemaker in mammals. *Cell*, 103(7), 1009–17.
- Carelli, P. V., Reyes, M. B., Sartorelli, J. C., & Pinto, R. D. (2005). Whole cell stochastic model reproduces the irregularities found in the membrane potential of bursting neurons. *J. Neurophysiol.*, 94, 1169–1179.

- Cohen, A. H., Holmes, P. J., & Rand, R. H. (1982). The Nature of the Coupling Between Segmental Oscillators of the Lamprey Spinal Generator for Locomotion: A Mathematical Model. *J. Math. Biol.*, 13, 345–369.
- Copelli, M. & Campos, P. R. A. (2007). Excitable scale-free networks. *Eur. Phys. J. B*, 56, 273–278.
- Copelli, M. & Kinouchi, O. (2005). Intensity coding in two-dimensional excitable neural networks. *Physica A*, 349(3-4), 431–442.
- Enright, J. (1980). Temporal precision in circadian systems: a reliable neuronal clock from unreliable components? *Science*, 209, 1542–1545.
- Erdős, P. & Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5, 17–61.
- Furtado, L. S. & Copelli, M. (2006). Response of electrically coupled spiking neurons: a cellular automaton approach. *Phys. Rev. E*, 73, 011907.
- Gade, P. & Sinha, S. (2005). Dynamic transitions in small world networks: Approach to equilibrium limit. *Phys. Rev. E*, 72(5), 1–4.
- Garcia-Ojalvo, J., Elowitz, M. B., & Strogatz, S. H. (2004). Modeling a synthetic multicellular clock: repressilators coupled by quorum sensing. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 101(30), 10955–60.
- Girvan, M., Callaway, D. S., Newman, M. E. J., & Strogatz, S. H. (2002). Simple model of epidemics with pathogen mutation. *Phys. Rev. E*, 65, 031915.
- Gonçalves, S., Abramson, G., & Gomes, M. F. C. (2009). Oscillations in SIRS model with distributed delays. *arXiv:0912.1250v3 [q-bio.PE]*.
- Greenberg, J. M. & Hastings, S. P. (1978). Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media. *SIAM J. Appl. Math.*, 34, 515–523.
- Haldeman, C. & Beggs, J. M. (2005). Critical branching captures activity in living neural networks and maximizes the number of metastable states. *Phys. Rev. Lett.*, 94, 058101.
- Harris, T. E. (1963). *The Theory of Branching Processes*. Springer.
- Hong, H., Ha, M., & Park, H. (2007). Finite-Size Scaling in Complex Networks. *Phys. Rev. Lett.*, 98(25), 258701.

- Huygens, C. (1669). Instructions Concerning the Use of Pendulum-Watches, for Finding the Longitude at Sea. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 4(45-56), 937–976.
- Izhikevich, E. M. (2000). Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 10(6), 1171–1266.
- Izhikevich, E. M. (2006). *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge: MIT Press.
- Jalife, J. (1984). Mutual entrainment and electrical coupling as mechanisms for synchronous firing of rabbit sino-atrial pace-maker cells. *J. Physiol.*, (pp. 221–243).
- Jones, J. L. & Young, A. P. (2005). Finite-size scaling of the correlation length above the upper critical dimension in the five-dimensional ising model. *Phys. Rev. B*, 71(17), 174438.
- Joo, J. & Lebowitz, J. L. (2004). Pair approximation of the stochastic susceptible-infected-recovered-susceptible epidemic model on the hypercubic lattice. *Phys. Rev. E*, 70, 036114.
- Kaplan, D. T., Smith, J. M., Saxberg, B. E. H., & Cohen, R. J. (1988). Nonlinear dynamics in cardiac conduction. *Math. Biosci.*, 90, 19–48.
- Kinouchi, O. & Copelli, M. (2006). Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nat. Phys.*, 2, 348–351.
- Ko, C. H., Yamada, Y. R., Welsh, D. K., Buhr, E. D., Liu, A. C., Zhang, E. E., Ralph, M. R., Kay, S. A., Forger, D. B., & Takahashi, J. S. (2010). Emergence of Noise-Induced Oscillations in the Central Circadian Pacemaker. *PLoS Biology*, 8(10), e1000513.
- Koch, C. (1999). *Biophysics of Computation*. New York: Oxford University Press.
- Kuperman, M. & Abramson, G. (2001). Small world effect in an epidemiological model. *Phys. Rev. Lett.*, 86(13), 2909–2912.
- Kuramoto, Y., Ed. (1984). *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Dover.
- Kuramoto, Y., Aoyagi, T., Nishikawa, I., Chawanya, T., & Okuda, K. (1992). Neural Network Model Carrying Phase Information with Application to Collective Dynamics. *Prog. Theor. Phys.*, 87, 1119–1126.
- Kuznetsov, Y. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory (Applied Mathematical Sciences)*. Springer, 2nd edition.

- Lewis, T. J. & Rinzel, J. (2000). Self-organized synchronous oscillations in a network of excitable cells coupled by gap junctions. *Network: Comput. Neural Syst.*, 11, 299–320.
- Lindner, B., García-Ojalvo, J., Neiman, A., & Schimansky-Geier, L. (2004). Effects of noise in excitable systems. *Phys. Rep.*, 392, 321–424.
- Marro, J. & Dickman, R. (1999). *Nonequilibrium Phase Transition in Lattice Models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Meyer, P. (1983). *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. LTC, 2nd edition.
- Mirollo, R. & Strogatz, S. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(6), 1645–1662.
- Néda, Z., Ravasz, E., Brechet, Y., Vicsek, T., & Barabási, A.-L. (2000). The sound of many hands clapping. *Nature*, 403(6772), 849–50.
- Newman, M. & Watts, D. (1999). Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, 60(6), 7332–7342.
- Ohta, H. & Sasa, S. (2008). Critical phenomena in globally coupled excitable elements. *Phys. Rev. E*, 78(6), 065101.
- Risau-Gusman, S. & Abramson, G. (2007). Bounding the quality of stochastic oscillations in populations models. *Eur. Phys. J. B*, 60, 515–520.
- Rosenblum, M. & Pikovsky, A. (2003). Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemp. Phys.*, 44(5), 401–416.
- Rozenblit, F. & Copelli, M. (2011). Collective oscillations of excitable elements: order parameters, bistability and the role of stochasticity. *J. Stat. Mech.*, 2011(01), P01012.
- Rozhnova, G. & Nunes, A. (2009a). Cluster approximations for infection dynamics on random networks. *Phys. Rev. E*, 80, 051915.
- Rozhnova, G. & Nunes, A. (2009b). Fluctuations and oscillations in a simple epidemic model. *Phys. Rev. E*, 79, 041922.
- Rozhnova, G. & Nunes, A. (2009c). SIRS dynamics on random networks: Simulations and analytical models. In J. Zhou (Ed.), *Complex Sciences*, volume 4 (pp. 792–797).: Springer Berlin Heidelberg. arXiv:0812.1812v1 [q-bio.PE].

- Shew, W., Yang, H., Petermann, T., Roy, R., & Plenz, D. (2009). Neuronal avalanches imply maximum dynamic range in cortical networks at criticality. *J. Neurosci.*, 29(49), 15595–15600.
- Shinomoto, S. & Kuramoto, Y. (1986). Phase transitions in active rotator systems. *Progr. Theoret. Phys.*, 75(5), 1105–1110.
- Singer, W. (1999). Neuronal synchrony: a versatile code for the definition of relations? *Neuron*, 24(1), 49–65.
- Sinha, S., Saramäki, J., & Kaski, K. (2007). Emergence of self-sustained patterns in small-world excitable media. *Phys. Rev. E*, 76(1), 015101.
- Strogatz, S. & Stewart, I. (1993). Coupled oscillators and biological synchronization. *Sci. Am.*, 269(6), 102–109.
- Strogatz, S. H. (1997). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143, 1–20.
- Uhlhaas, P. J., Pipa, G., Lima, B., Melloni, L., Neunschwander, S., Nikolić, D., & Singer, W. (2009). Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status. *Front. Integr. Neurosci.*, 3, 17.
- Vanag, V., Yang, L., Dolnik, M., Zhabotinsky, A., & Epstein, I. (2000). Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback. *Nature*, 406(6794), 389–91.
- Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393, 440–442.
- Wilson, H. R. (1999). *Spikes, Decisions and Actions: Dynamical Foundations of Neuroscience*. Oxford: Oxford University Press.
- Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16(1), 15–42.
- Wu, A.-C., Xu, X.-J., & Wang, Y.-H. (2007). Excitable Greenberg-Hastings cellular automaton model on scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 75, 032901.

Yoder, J. G. (1988). *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*. Cambridge University Press.

