

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física



Tese de Mestrado

**ESPALHAMENTO DE LUZ E HOLONOMIAS NO
CAMPO GRAVITACIONAL DE CORDAS CÓSMICAS
COM ESTRUTURA INTERNA**

Caio Veloso Sátiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Tese de Mestrado

**ESPALHAMENTO DE LUZ E HOLONOMIAS NO
CAMPO GRAVITACIONAL DE CORDAS CÓSMICAS
COM ESTRUTURA INTERNA**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Pernambuco sob orientação do professor Fernando Jorge Sampaio Moraes como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em ciências.

Recife, Março/2003

A minha família e a Aracy.

Resumo

Nesta tese estudamos o efeito que a geometria de modelos de cordas cósmicas causa na estrutura do espaço plano. Como geometria de base, utilizamos inicialmente dois modelos de corda conhecidos por Flower-Pot e Ballpoint Pen, onde usamos o formalismo das formas diferenciais para calcular propriedades geométricas específicas, como holonomia para curvas fechadas, déficit angular, loops de Wilson e transporte paralelo spinorial com o objetivo de verificar os efeitos da estrutura interna destes modelos.

Continuando nosso trabalho no contexto destes modelos, utilizamos a teoria de Hamilton-Jacobi para verificar quais as influências dos mesmos no espalhamento da luz.

Estudamos também a propagação da luz nas proximidades da corda negra, que constitui um modelo para um buraco negro cilíndrico numa geometria de base hiperbólica.

Abstract

In this thesis we study the effect that the geometry of models of cosmic strings causes in the structure of flat space. As background, we use two string models known as Flower-Pot and Ballpoint. For that, we use the formalism of differential form to calculate specific geometrical properties, such that, holonomy for closed curves, deficit angles, Wilson's loops and spinorial parallel transport with the objective of obtain information about the effects of inside structure these models.

For these string models, we use as the main tool the Hamilton-Jacobi theory to calculate scattering of light.

In addition to this strings, we study lighth beam propagation near a black string, which is a model for a black hole in a cylindrical geometry with hiperbolic background.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Fundamentos Matemáticos e Ferramentas da física	7
2.1	Formas Diferenciais	7
2.2	Conexões	14
2.3	Holonomias	17
2.4	Teoria de Hamilton-Jacobi	20
3	Holonomias em Cordas Cósmicas	24
3.1	O Flower-Pot	24
3.1.1	Ângulos de Déficit no Flower-Pot	29
3.2	O Ballpoint Pen	30
3.2.1	Ângulos de Déficit no Ballpoint Pen	33
3.3	Loops de Wilson	33
3.4	Transporte Paralelo Espinorial	35
4	Espalhamento em Cordas Cósmicas	39
4.1	Método Tensorial	39
4.1.1	Flower-Pot	39

4.1.2	Ballpoint Pen	43
4.2	Hamilton-Jacobi	44
4.2.1	Geodésicas para o Flower-Pot	47
4.2.2	Gráfico de Geodésica no Flower-Pot	49
4.2.3	Pontos de Retorno	49
4.2.4	Geodésicas para o Ballpoint Pen	50
4.2.5	Gráficos das Geodésicas do Ballpoint Pen	53
5	Espalhamento em Corda Negra	57
6	Conclusões e Perspectivas	62
	Apêndice A	64
	Apêndice B	66
	Agradecimentos	69
	Referências	71

Lista de Figuras

1.1	Modelo de Corda Cósmica singular	4
1.2	Ilustração do efeito Aharonov-Bohm gravitacional por analogia com o mesmo efeito quântico conhecido.	6
2.1	Representação do espaço dos vetores tangentes $T_p M$ a um ponto p da variedade representada pela esfera S^2	10
2.2	À esquerda temos a noção de transporte paralelo em uma curva aberta no espaço plano. À direita temos o transporte numa curva fechada que pertence a esfera (S^2) com curvatura. Na esfera vemos claramente a alteração da direção do vetor transportado ao mesmo ponto, e que está com outra orientação devido a curvatura do caminho percorrido.	16
2.3	construção do conceito de holonomia	18
2.4	Matriz transformação M	19
3.1	Geometria associada ao modelo correspondente ao Flower-Pot	25
3.2	Geometria associada ao Ballpoint Pen	30
3.3	Limite para $r_0 \longrightarrow \infty$ no modelo do Ballpoint Pen	32
4.1	Geodésica para o Flower-Pot com $\alpha = \pi/2$	49
4.2	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/10$	53

4.3	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/6$.	53
4.4	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/3$.	54
4.5	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/2$.	54
4.6	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi$.	55
4.7	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 4\pi/3$.	55
4.8	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 5\pi/3$.	56
4.9	Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 1,998\pi$.	56

Capítulo 1

Introdução

Com o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita no início do século XX, nossa visão sobre os conceitos físicos até então vigentes foi bastante modificada. Esta teoria, proporcionou a generalização das leis da mecânica newtoniana conhecida como mecânica clássica, com resultados que deram origem a cosmologia moderna e auxiliaram no desenvolvimento da teoria de partículas elementares, da física de altas energias, além de outros campos da física moderna. Como ponto importante desta teoria temos a luz, que exibe um comportamento especial na natureza, não obedecendo a mecânica newtoniana quando tratamos as velocidades obedecendo regras vetoriais como soma e subtração aplicadas a corpos em movimento. Sua velocidade é constante, sendo tomada como limite superior para velocidade no universo conhecido. Estas curiosas informações constituem o princípio da relatividade especial, que não leva em consideração a influência do campo gravitacional no movimento da luz.

Com o tempo, Einstein desenvolveu a relatividade geral, onde esta agora é tratada como teoria mais geral por ter considerações sobre o campo gravitacional.

Este novo cenário, nos fornece informações sobre a influência da gravidade no movimento dos corpos ou da luz, onde o campo gravitacional surge como fator de alteração da geometria do espaço (curvatura). Com a estrutura do espaço sendo modificada, temos a introdução do conceito de espaço-tempo, onde agora ambos estão intimamente ligados e para analisar fenômenos em determinadas regiões, necessitamos de um objeto chamado de métrica, que descreve a estrutura do espaço em questão, levando em consideração a curvatura existente.

Diversas métricas são soluções das equações de Einstein, nos mostrando que nossa visão da física do cotidiano descrita por leis clássicas, pode ser bastante diferente em outros espaços onde temos curiosos fenômenos. Um exemplo é o buraco negro, que obedece a estrutura da métrica de Schwarzschild dotada de singularidade. A relatividade geral tornou-se uma das mais importantes teorias da física, junto com a mecânica quântica, mecânica newtoniana, eletromagnetismo e termodinâmica estatística, além do que, é forte concorrente das teorias que tentam explicar a evolução do universo.

Em cosmologia temos diferentes métricas propostas, que juntamente com a teoria de defeitos topológicos, encontram várias aplicações na física. O nome defeito, no contexto relevante a este trabalho, surge do fato de que considerando uma geometria conhecida, podemos alterar matematicamente a sua estrutura, provocando uma falha proposital que fisicamente irá alterar alguns fatores, como a trajetória da luz nestas regiões.

As cordas cósmicas, provenientes da teoria de defeitos aplicada à gravitação, surgiram no início do universo com o mesmo em estado de resfriamento e ainda com simetria muito alta, mas demonstrando sinais de quebra desta simetria através da matéria, que aos poucos ia se redistribuindo em diferentes estados e regiões es-

pecíficas. As configurações de matéria estabelecidas entre as regiões ainda uniformes e modificadas são as que definem fisicamente as cordas, onde estas por sua vez, seriam bastante longas com espessura muito fina resultando numa alta densidade.

Um modelo simples de corda cósmica utilizando teoria de defeitos, pode ser construído, imaginando que uma folha de papel circular, representa o espaço plano e em seguida, retirando-se um setor deste espaço com ângulo qualquer, temos a alteração que define a introdução do defeito, nos permitindo construir uma corda cósmica com curvatura infinita.

Um exemplo de métrica para este tipo de corda pode ser encontrado em [1] que nos dá

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (1.1)$$

Podemos notar que o defeito foi introduzido no espaço através do ângulo central α , retirado da estrutura original do espaço plano que em coordenadas cilíndricas seria

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (1.2)$$

Uma forma de ilustrar a construção da corda mencionada, pode ser vista na figura (1.1).

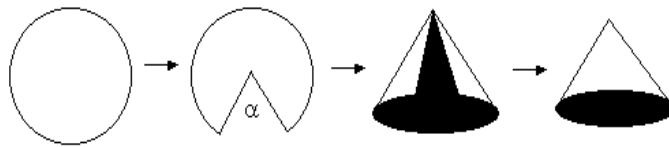


Figura 1.1: Modelo de Corda Cósmica singular

Outros modelos de corda podem ser propostos com a finalidade de evoluir cada vez mais, para um que seja mais completo e que leve em consideração propriedades físicas como, tensão, frequência de oscilação e densidade das cordas cósmicas.

Nos capítulos seguintes, modelos mais complexos que levam em conta a estrutura geométrica interna de cordas serão analisados. Estes modelos [2] são conhecidos por Flower-Pot (vaso de flores) e Ballpoint Pen (caneta esferográfica), que diferem no que diz respeito a curvatura definida em suas métricas.

A partir destes modelos de corda com estrutura interna, calculamos uma quantidade chamada **holonomia** que nos fornece informações sobre o campo gravitacional das cordas e que está associada ao transporte paralelo. No cálculo das holonomias utilizamos o formalismo das **formas diferenciais** que introduzimos no capítulo 2 referente aos fundamentos matemáticos.

Algumas analogias com conhecidos efeitos da física podem ser feitas, e um exemplo pode ser visto no caso do efeito Aharonov-Bohm magnético da mecânica quântica, onde o fluxo do campo magnético controla o grau de interferência das partículas que passam em torno do cilindro, e que tem seu análogo gravitacional dado pelo efeito Aharonov-Bohm gravitacional [3], que no lugar do campo magnético, possui um campo gravitacional controlando a interferência de partículas que estão passando em torno da corda através do espaço plano (fig.1.2). Vale ressaltar que neste caso, o ângulo α que introduz o defeito, é o nosso parâmetro de controle do grau de interferência das partículas.

Ainda na parte de holonomias, estudamos o transporte paralelo espinorial, onde levamos em conta a natureza quântica do spin utilizando as matrizes que constituem a base em questão dadas pelas matrizes de Pauli. Uma referência para esta parte pode ser encontrada em [4] onde Tony Rothman, George F. R. Ellis e Jeff Murgan estudam as propriedades de determinado espaço-tempo utilizando o cálculo de holonomias para transporte paralelo quântico (spínorial) e transporte paralelo vetorial em várias órbitas e curvas abertas.

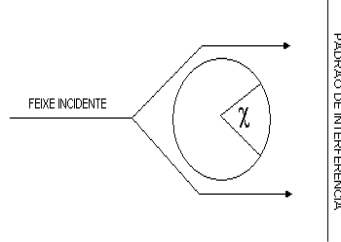


Figura 1.2: Ilustração do efeito Aharonov-Bohm gravitacional por analogia com o mesmo efeito quântico conhecido.

Após analisar a estrutura geométrica destes modelos de corda, verificamos qual seria a trajetória da luz e o movimento de partículas próximas as cordas ou até mesmo em seu interior. Algo neste sentido foi estudado por Subenoy Chakraborty e Md. Farook Rahaman [5], que calcularam propriedades do movimento de partículas próximas a uma corda cósmica. Nesta tese, obtemos as geodésicas para a luz nos capítulos de espalhamento, onde para isso utilizamos inicialmente o formalismo tensorial para ilustrar um dos caminhos possíveis na obtenção de geodésicas e que consiste no final, na resolução de uma equação diferencial proveniente da equação das geodésicas. Refizemos o cálculo, com o uso do formalismo de Hamilton-Jacobi que toma a equação de Hamilton-Jacobi e uma proposta de solução com variáveis de separação nos dando uma integral como barreira final para obtenção da geodésica procurada.

Por fim, estudamos o espalhamento de luz em um modelo bastante curioso de corda, e que é chamado de corda negra, já que se trata de um modelo tridimensional para os buracos negros e que será visto no capítulo de espalhamento em corda negra.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos e Ferramentas da física

O objetivo deste capítulo, é oferecer informações básicas da matemática utilizada, para dar melhor suporte aos interessados que venham a consultar este trabalho. Inicialmente, discutiremos a teoria das formas diferenciais utilizada no capítulo de holonomias e posteriormente falaremos sobre o formalismo tensorial e o de Hamilton-Jacobi, que serão utilizados nos capítulos de espalhamento.

2.1 Formas Diferenciais

Antes de introduzir o conceito de forma diferencial, discutiremos outros conceitos ainda mais fundamentais como variedades e campos vetoriais.

Em linhas gerais, podemos dizer que variedades são espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$, mas que localmente parecem com ele. Tais espaços são chamados de variedades n -dimensionais e um bom e simples exemplo é a variedade descrita pela esfera bidi-

mensional (S^2) que localmente parece com $\mathbb{R}^2$, mas que globalmente sabemos que é diferente. Formalizando mais este conceito podemos dizer que uma variedade n -dimensional é um espaço topológico M dotado de cartas φ_α que são funções que levam qualquer conjunto aberto U_α que cobre M em $\mathbb{R}^n$ ($\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$) onde esta definição nos dá que cada ponto de M pertence a algum aberto U_α que equivale a $\mathbb{R}^n$ localmente.

Falando em variedades diferenciais, precisamos falar também em campos vetoriais. Aqui nossa noção geométrica de vetores dará lugar a uma definição mais sofisticada que irá defini-los algebricamente nos dando maior generalidade para poder definir vetores em uma variedade qualquer M . Se tomarmos uma função f e um campo de vetores $\vec{v}$ sobre $\mathbb{R}^n$, podemos derivar f na direção de $\vec{v}$ obtendo com isso a derivada direcional de f , dada por $\vec{v}f$. Se $x^1, \dots, x^n$ forem as coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e $(v^1, \dots, v^n)$ forem as componentes do vetor $\vec{v}$, podemos escrever a derivada direcional como

$$\vec{v}f = v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = v^\mu \partial_\mu f, \quad (2.1)$$

onde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Como a equação acima é válida para toda função f , temos que $\vec{v} = v^\mu \partial_\mu$, o que significa que $\vec{v}$ é uma combinação linear de tais derivadas parciais. Podemos fazer uma analogia deste processo com o mecanismo de um operador que será muito útil para definir vetores sobre variedades. Um campo vetorial $\vec{v}$ sobre M é uma função que satisfaz as seguintes propriedades

$$\vec{v}(f + g) = \vec{v}(f) + \vec{v}(g), \quad (2.2)$$

$$\vec{v}(\alpha f) = \alpha \vec{v}(f), \quad (2.3)$$

$$\vec{v}(fg) = \vec{v}(f)g + f\vec{v}(g), \quad (2.4)$$

para toda $f, g \in C^\infty(M)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Aqui $C^\infty(M)$ denota o conjunto de todas as funções suaves reais sobre a variedade M infinitamente diferenciáveis.

Então seja $vec(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais sobre M . É importante dizer que podemos então, adicionar campos vetoriais e multiplicá-los por funções sobre M . Matematicamente isso significa que

$$(\vec{v} + \vec{w})(f) = \vec{v}(f) + \vec{w}(f), \quad (2.5)$$

$$(g\vec{v})(f) = g\vec{v}(f), \quad (2.6)$$

dado que $\vec{v}, \vec{w} \in vec(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Mas do que foi dito acima, todo campo vetorial $\vec{v} \in vect(\mathbb{R}^n)$ pode ser representado como uma combinação linear dos $\{\partial_\mu\}$. Os campos vetoriais $\{\partial_\mu\}$ são linearmente independentes, isso implica que eles formam uma base de $vect(\mathbb{R}^n)$. Então, as funções v^μ são chamadas de **componentes** do campo vetorial $\vec{v}$.

Temos um pequeno problema com relação ao que foi dito. Se tivermos por exemplo uma esfera em S^2 imersa em $\mathbb{R}^3$ e se a cada ponto da esfera associarmos um vetor, ele terá que ser infinitesimal para pertencer a S^2 , pois se a seta que representa a grandeza vetorial tiver tamanho finito, estará sem dúvida fora da esfera já que o vetor como uma flecha não acompanha a curvatura em S^2 . Se estamos interessados em vetores de tamanho finito, temos então, que contornar este problema adotando vetores que estejam contidos num plano tangente a um ponto que pertença a S^2 e agora de forma mais geral começaremos a utilizar estes **vetores tangentes** a uma variedade M para tomar nossas derivadas direcionais no ponto p da variedade. Se tomarmos um campo vetorial $\vec{v}$ sobre M podemos tomar a derivada direcional de uma função qualquer $f \in C^\infty(M)$ e o resultado, que representamos por $\vec{v}(f)(p)$, pode ser interpretado como a derivada de f na direção de v_p (vetor tangente a M) no ponto p . O conjunto de todos os vetores tangentes $p \in M$, é chamado de **espaço tangente** em p que é representado por $T_p M$. Isso nos mostra que um campo vetorial determina um vetor tangente para cada ponto da variedade (fig.2.1).

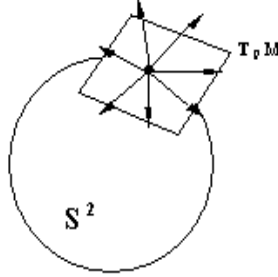


Figura 2.1: Representação do espaço dos vetores tangentes $T_p M$ a um ponto p da variedade representada pela esfera S^2 .

Para terminar nosso resumo sobre vetores tangentes temos que $T_p M$ é um espaço vetorial sobre os números reais e notemos que, em geral, para qualquer variedade só faz sentido dizer que dois vetores tangentes são iguais se ambos forem tangentes ao mesmo ponto p além do que, não faz sentido adicionar vetores que não estão sobre o mesmo ponto como em $\mathbb{R}^n$.

Agora passaremos a tratar de outros objetos chamados **1-formas** que são funções lineares que por aplicação w levam vetores pertencentes ao espaço tangente $T_p M$ em números reais, mapeando a variedade em $\mathbb{R}^n$. Assim as 1-formas w tomam campos vetoriais $\vec{v}$ e nos dão funções que satisfazem

$$w(\vec{v} + \vec{u}) = w(\vec{v}) + w(\vec{u}), \quad (2.7)$$

$$w(g\vec{v}) = gw(\vec{v}), \quad (2.8)$$

ou seja, são lineares.

Podemos generalizar o conceito de 1-formas para 2-formas e consequentemente para k -formas, onde uma 2-forma agora toma dois vetores de $T_p M$ e leva em um número real, sendo que esta 2-forma deve ser uma aplicação w anti-simétrica e o

conjunto das mesmas é definido como $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^n)$. Como é de se esperar, uma k-forma é uma aplicação w que toma agora k vetores pertencentes a T_pM e os levam em um número real sendo também anti-simétrica. O conjunto a que pertencem as k-formas, nós denotaremos por $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$.

Podemos definir uma operação que será utilizada nos próximos capítulos chamada de **produto exterior** representado por $(\wedge)$ e que funciona tomando formas lineares quaisquer $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ nos dando um elemento $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$ pertencente a $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$. Como por exemplo, se tomarmos duas formas lineares dadas por φ_1 e φ_2 , o produto exterior delas será $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ que estará em $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^n)^*$ e é uma 2-forma. A operação $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é definida de forma geral por

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \det(\varphi_i(\vec{v}_j)), \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\vec{v}_1) & \dots & \varphi_1(\vec{v}_k) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_k(\vec{v}_1) & \dots & \varphi_k(\vec{v}_k) \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Citando mais uma vez nosso exemplo mais simples, para duas formas lineares temos

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\vec{v}_1) & \varphi_1(\vec{v}_2) \\ \varphi_2(\vec{v}_1) & \varphi_2(\vec{v}_2) \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \varphi_1(\vec{v}_1)\varphi_2(\vec{v}_2) - \varphi_1(\vec{v}_2)\varphi_2(\vec{v}_1), \quad (2.12)$$

assim,

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1. \quad (2.13)$$

A expressão acima nos dá que o produto exterior de um vetor $\vec{v}$ qualquer com ele mesmo deve ser nulo ($\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$) e concorda também com a anti-simetria do produto vetorial convencional ($\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$).

Temos também que o conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j); i < j\}$ forma uma base de $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^n)^*$, onde agora estamos mudando de notação para $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (dx_i \wedge dx_j)_p$ no nosso produto exterior. Podemos agora falar das **formas diferenciais** que são as mesmas aplicações w ou k-formas tais que

$$w(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad (2.14)$$

onde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a_{i_1 \dots i_k}$ são diferenciáveis. Como exemplo disto temos para uma 2-forma diferencial ou também chamada simplesmente de 2-forma lembrando que $i_1 < \dots < i_k$.

Se w é uma k-forma e φ é uma s-forma, podemos definir o produto exterior como:

$$w \wedge \varphi = \sum_{I, J} a_I b_J (dx_I \wedge dx_J), \quad (2.15)$$

com $w = \sum_I a_I dx_I$ para $I = (i_1 < \dots < i_k)$ e $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ para $J = (j_1 < \dots < i_s)$. Aqui estão alguns exemplos de formas diferenciais em $\mathbb{R}^3$

- a) 0-formas: Funções diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$;
- b) 1-formas: $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$;
- c) 2-formas: $a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3$;
- d) 3-formas: $a_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Para terminar a discussão sobre formas diferenciais aqui vão algumas propriedades aplicáveis a três formas diferenciais sendo elas w uma k-forma, φ uma s-forma e θ uma r-forma:

- a) $(w \wedge \varphi) \wedge \theta = w \wedge (\varphi \wedge \theta)$;
- b) $w \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge w$;

$$c) w \wedge (\varphi + \theta) = w \wedge \varphi + w \wedge \theta.$$

A seguir vamos definir uma operação que permite elevar o grau de uma k-forma. Isto pode ser feito através da aplicação do operador **diferencial exterior** ou **derivada exterior** dado por d , que atuando sobre uma k-forma $w = \sum_I a_I dx_I$ nos dá uma (k+1)-forma dada por

$$dw = \sum_I da_I \wedge dx_I. \quad (2.16)$$

Algumas propriedades de d são

$$a) d(w_1 + w_2) = d(w_1) + d(w_2), \text{ se } w_1 \text{ e } w_2 \text{ são k-formas};$$

$$b) d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2;$$

que podemos identificar como uma regra de Leibniz generalizada.

$$c) d(dw) = d^2w = 0.$$

Este novo operador nos apresenta uma curiosidade quando aplicado em 0-, 1-, 2-formas em $\mathbb{R}^3$. Para as 0-formas, seja $f = f(x, y, z)$ uma função, ao aplicarmos o operador d temos como resposta o nosso conhecido gradiente dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.17)$$

Se aplicarmos d a uma 1-forma dada por $w = w_x dx + w_y dy + w_z dz$ teremos o rotacional dado por

$$dw = \left(-\frac{\partial w_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \quad (2.18)$$

Note que $ddf = 0$ o que corresponde ao rotacional do gradiente.

Se agora aplicarmos em uma 2-forma dada por $u = u_{xy} dx \wedge dy + u_{yz} dy \wedge dz + u_{zx} dz \wedge dx$ teremos o divergente

$$du = \left(\frac{\partial u_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \quad (2.19)$$

Onde novamente temos consistência com $ddw = 0$, já que o divergente do rotacional é zero. E assim vemos que o resultado da aplicação do operador d depende do grau da forma.

Na próxima seção, iremos falar sobre conexões. Estas conexões são necessárias para o cálculo das holonomias no capítulo 3, onde iremos utilizar o formalismo das formas diferenciais para calculá-las, embora este não seja o único caminho para obtê-las. Uma ótima referência para estudo de aplicações das formas diferenciais pode ser vista em [6], onde temos aplicações ao eletromagnetismo.

2.2 Conexões

As conexões são estruturas geométricas que caracterizam a curvatura local de um espaço definido por uma métrica.

A partir da métrica, temos uma fórmula muito conhecida e muito importante para estudos em relatividade geral, e que pode ser utilizada para o cálculo das conexões. Esta equação é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\rho}\right), \quad (2.20)$$

onde g é o tensor métrico em sua forma covariante se $g_{\mu\nu}$ com índices baixos, e em sua forma contravariante se $g^{\mu\nu}$ está com índices altos, com a relação entre ambos dada por $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$.

Estes termos $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ são as conexões, conhecidas também como **conexões de Christoffel**, **símbolos de Christoffel**, **conexões de Levi-Civita** ou **conexões Riemannianas** e que podem também aparecer com a seguinte representação

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \mu\nu \end{array} \right\}.$$

Um exemplo da importância do uso destas conexões, está no cálculo das geodésicas da luz no espaço definido por uma métrica. Estas geodésicas podem ser obtidas pela equação das geodésicas

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2.21)$$

Podemos tomar como exemplo o cálculo das conexões no $(\mathbb{R}^2)$ em coordenadas polares. A métrica para este espaço é dada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (2.22)$$

o tensor métrico será

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

então, o $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

Assim, as conexões são

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{r\rho} \left(\frac{\partial g_{r\rho}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\rho r}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial \rho} \right) = 0, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{r\rho} \left(\frac{\partial g_{\theta\rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\rho\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} \right) = -r, \quad (2.26)$$

continuando com os cálculos temos as outras conexões dadas por

$$\Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{r\theta}^r = 0, \quad (2.27)$$

$$\Gamma_{rr}^\theta = 0, \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0, \quad (2.30)$$

Calculando as conexões, podemos obter as geodésicas para este espaço através da equação (2.21). Após rever o conceito de conexão, podemos falar sobre uma técnica muito útil para analisar curvaturas e que é conhecida como **transporte paralelo**. Intuitivamente, o transporte paralelo consiste em mover um vetor através de uma região e verificar a mudança de orientação do mesmo, com o objetivo de saber se temos curvatura ou não de acordo com tal mudança. Esta verificação pode ser feita em curvas abertas ou fechadas (fig.2.2).

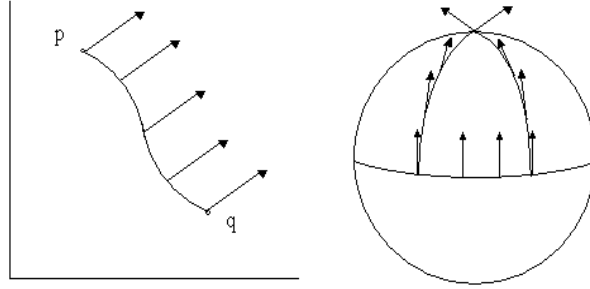


Figura 2.2: À esquerda temos a noção de transporte paralelo em uma curva aberta no espaço plano. À direita temos o transporte numa curva fechada que pertence a esfera (S^2) com curvatura. Na esfera vemos claramente a alteração da direção do vetor transportado ao mesmo ponto, e que está com outra orientação devido a curvatura do caminho percorrido.

De posse das conexões que nos dizem como é a estrutura do espaço, saberemos como caminhar no mesmo, podemos então unir tal informação com a noção de

transporte paralelo vista anteriormente para analisar a curvatura e obter outras informações pertencentes a estrutura geométrica em estudo. As conexões podem ser utilizadas para calcular as componentes do **tensor de Riemann** também conhecido como **tensor de curvatura** que é uma entidade importantíssima para relatividade geral, já que com este tensor podemos calcular a curvatura de forma quantitativa utilizando também suas contrações conhecidas como **tensor de Ricci** e o **escalar de curvatura**.

Com isso encerramos nossa discussão sobre conexões falando das equações de estrutura de **Maurer-Cartan** originadas dos tensores de torção e curvatura, onde utilizando a teoria de formas diferenciais temos

$$T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b, \quad (2.31)$$

e

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c. \quad (2.32)$$

Estas equações nos fornecem outro caminho para calcular as conexões, como veremos no capítulo de holonomias onde obtemos a matriz conexão e a holonomia.

2.3 Holonomias

Holonomias, são objetos matemáticos, que em gravitação nos fornecem informação global sobre o campo gravitacional de uma região de interesse. Estes objetos estão associados ao transporte paralelo vetorial, que utiliza as conexões mencionadas neste capítulo. Podemos obter uma expressão para a holonomia, utilizando argumentos intuitivos. Assim, suponha que temos um vetor v^α num ponto p de uma curva fechada C do espaço-tempo fig.(2.3).

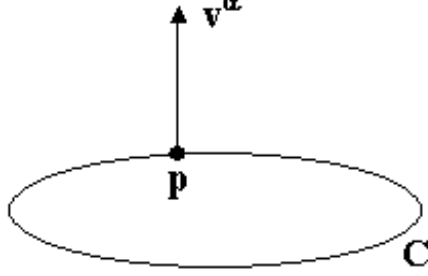


Figura 2.3: construção do conceito de holonomia

Ao transportarmos este vetor através de C retornando a p , teremos em geral, um vetor $\bar{v}^\alpha$ diferente de v^α devido a curvatura. O novo vetor $\bar{v}^\alpha$, pode ser obtido por uma transformação U_β^α , que funciona como um mapa linear associado a curva C e ao ponto p contendo toda informação topológica necessária para transportar o vetor através de C .

$$\bar{v}^\alpha = U_\beta^\alpha v^\beta, \quad (2.33)$$

A esta transformação, damos o nome de holonomia.

Mas, como obter uma expressão para U_β^α ?

Podemos imaginar um sistema que contenha a curva $C(\lambda)$, tal que, $\lambda \in [0, 1]$ e $C(0) = C(1) = p$. Agora se transportarmos o vetor v^α de $C(\lambda)$ a $C(\lambda + d\lambda)$ teremos um novo vetor, dado pela matriz transformação M_β^α deste pequeno deslocamento. Para o deslocamento completo de $C(\lambda = 0)$ a $C(\lambda = 1)$, teremos a matriz U_β^α dada pelo produto ordenado dos N mapas lineares M_β^α de todo trajeto.

Logo, para $N \rightarrow \infty$

$$U_\beta^\alpha = \prod_{i=1}^N \left[\delta_\beta^\alpha + \frac{1}{N} M_\beta^\alpha(X(\lambda))_{\lambda=\frac{i}{N}} \right], \quad (2.34)$$

onde δ_β^α é um termo introduzido para que $U_\beta^\alpha = 1$, como resultado para a holonomia calculada no espaço plano. A expressão acima, é um produto ordenado de infinitas exponenciais, que pode ser escrito como

$$U(C) = Pe^{(M_1+M_2+\dots+M_N)}, \quad (2.35)$$

ou seja

$$U(C) = Pe^{\int_c M}, \quad (2.36)$$

onde P é o indicador de que temos um produto ordenado ao longo de C .

Precisamos saber, quem são os M_β^α que definem nosso mapa linear para pequenos deslocamentos. Podemos associá-los com as conexões do espaço, visto que ambos definem nossa base localmente (fig.2.4).

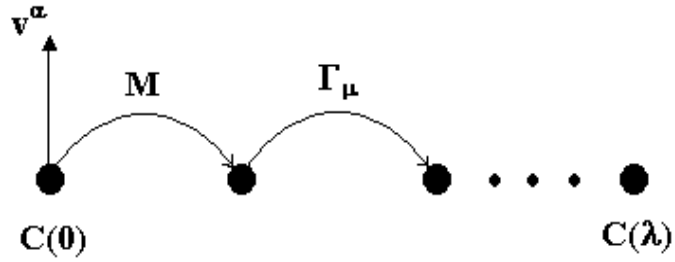


Figura 2.4: Matriz transformação M.

A expressão para calcular a holonomia é então dada por

$$U(\gamma) = Pe^{-\int_\gamma \Gamma_\mu dx^\mu}, \quad (2.37)$$

onde, γ é a curva na qual fazemos o transporte paralelo e P indica que estamos fazendo um produto ordenado.

As holonomias, podem ser vistas como uma forma quantitativa de tratarmos o transporte paralelo. Elas também abrem espaço para uma outra quantidade chamada de Loop de Wilson que faz parte das chamadas variáveis de loop, que possuem invariância sob transformações de calibre. Os loops de Wilson são dados pelo traço da matriz da holonomia

$$W(\gamma) = Tr[U(\gamma)], \quad (2.38)$$

que neste trabalho, serve apenas para escrever nossos resultados de forma simplificada, não trazendo nenhuma informação adicional.

2.4 Teoria de Hamilton-Jacobi

A teoria de Hamilton-Jacobi oferece uma forma de cálculo das equações de movimento para um sistema físico. Nos capítulos de espalhamento utilizamos esta técnica e por isso discutiremos agora como funciona este importante instrumento teórico.

Nos sistemas hamiltonianos podemos encontrar muitas vezes dificuldade no cálculo das equações de movimento. Para um dado hamiltoniano, os cálculos serão mais fáceis ou difíceis de acordo com o número de coordenadas cíclicas que aparecem nele e que são especiais porque possuem momento constante associados a elas, o que implica em leis de conservação. Estes momentos constantes são chamados de momentos conjugados e pelo fato de serem constantes, facilitam a resolução de sistemas hamiltonianos. Sendo assim, desejaríamos que os problemas desta natureza tivessem o máximo de coordenadas cíclicas possíveis. Tentamos fazer isso

utilizando as **transformações canônicas** que têm este nome devido ao fato de que elas são transformações das coordenadas e momentos que deixam um hamiltoniano H complicado em uma forma mais fácil ou canônica fazendo com que as antigas coordenadas não cíclicas sejam agora cíclicas, com a transformação.

Existem vários tipos de transformações possíveis, e iremos agora identificar a que utilizaremos ao longo deste trabalho que é a transformação conhecida por F_2 onde, $F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$ que é uma transformação canônica que depende das velhas coordenadas e de novos momentos dados pela seguinte transformação

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i. \quad (2.39)$$

Com a transformação acima temos uma modificação no hamiltoniano que nos leva a um novo hamiltoniano que chamaremos de K , onde o mesmo agora é dado por:

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (2.40)$$

onde H é o hamiltoniano antigo e F_2 é a transformação canônica.

Desejamos conhecer explicitamente F_2 para obter as equações de movimento associadas ao sistema descrito pelo hamiltoniano acima como veremos mais adiante no exemplo. Para isso faremos $K = 0$ e obteremos uma equação que nos fornecerá F_2 , onde esta equação é conhecida como **equação de Hamilton-Jacobi** e é definida por

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \quad (2.41)$$

Se os novos momentos são dados por $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i$ como vimos, ficamos com

$$H(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \quad (2.42)$$

que é uma equação diferencial parcial em $(n+1)$ variáveis $q_1, \dots, q_n$ e t .

Partindo da equação acima iremos propor uma solução para F_2 utilizando

o método de separação de variáveis. Tal solução chamaremos de $F_2 = S$ que é conhecida como **função principal**.

Para ilustrar o método e simplificar o entendimento do mesmo, iremos obter as equações de movimento para o oscilador harmônico simples em uma dimensão.

O hamiltoniano para este sistema é dado por

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2), \quad (2.43)$$

com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Utilizando a transformação do momento dada por $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ e o hamiltoniano dado, temos a equação de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.44)$$

E agora utilizando separação de variáveis temos uma proposta de solução para esta equação dada por

$$S = W(q) - \alpha t, \quad (2.45)$$

onde α é uma constante de separação para t . Substituindo a solução S na equação de Hamilton-Jacobi temos

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2q^2 \right] = \alpha, \quad (2.46)$$

que por integração nos dá

$$W = \sqrt{2m\alpha} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}} dq. \quad (2.47)$$

Assim substituindo este resultado na solução para S temos

$$S = \sqrt{2m\alpha} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}} dq - \alpha t, \quad (2.48)$$

que é a solução da equação de Hamilton-Jacobi.

Calculando a derivada parcial em relação a α temos a equação de movimento para $q(t)$. Logo $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ nos dá

$$\frac{m}{\sqrt{2m\alpha}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}} dq = t + \beta, \quad (2.49)$$

onde integrando por substituição temos a equação de movimento para o oscilador dada por

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen}[\omega(t + \beta)], \quad (2.50)$$

sendo α e β constantes de integração determinadas pelas condições iniciais do movimento. Esta equação representa a equação de movimento ou geodésica para o oscilador, e é este tipo de equação que iremos procurar nos capítulos seguintes.

A diferença entre este procedimento e o que iremos adotar, é que a equação de Hamilton-Jacobi apresentada está definida para sistema hamiltonianos clássicos. No nosso caso, iremos precisar da versão relativística desta equação, que possui o termo temporal elevado ao quadrado. Esta diferença, surge quando definimos a ação no sistema em questão. No caso clássico, o tempo é apenas um parâmetro o que resulta num termo em primeira ordem. No caso relativístico, o tempo está incluso nas coordenadas e isso implica em um termo de segunda ordem.

Capítulo 3

Holonomias em Cordas Cósmicas

Neste capítulo, apresentaremos nossos resultados para o cálculo de holonomias em cordas com estrutura interna. Estamos interessados em modelos de cordas cósmicas que possuem espessura, diferentemente das cordas infinitesimais mostradas em (1.1). Esta espessura, ainda que seja da ordem de $10^{-32}m$, é a responsável pela existência de uma estrutura interna. Exemplos destas cordas, são o Flower-Pot e o Ballpoint Pen vistos em [1] que têm características próprias.

Partiremos agora para obtenção das holonomias, que serão calculadas para os modelos de corda citados acima.

3.1 O Flower-Pot

Este é um modelo de corda, onde a curvatura do espaço-tempo está concentrada no anel de raio $r_0 \approx 10^{-30}$ cm mostrado na figura 4.51.

A métrica para este modelo é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + P(r)^2 dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3.1)$$

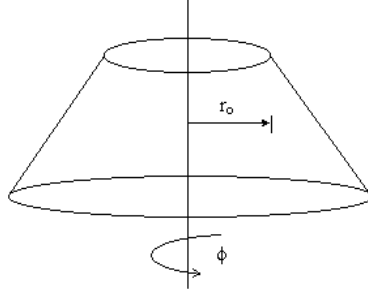


Figura 3.1: Geometria associada ao modelo correspondente ao Flower-Pot

onde temos que

$$P(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} & , r < r_0 - \epsilon \\ 1 & , r > r_0 + \epsilon \end{cases}, \quad (3.2)$$

com $\phi \in [0, \alpha]$.

1) Para $ds^2 = -dt^2 + (\frac{\alpha}{2\pi})^2 dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$, ou seja, considerando a região interior a r_0 , podemos escolher a seguinte base

$$e^\nu = e^\nu_\mu dx^\mu \quad (3.3)$$

onde utilizando o formalismo de formas diferenciais temos

$$\begin{cases} e^0 = dt & \implies de^0 = 0 \\ e^1 = \frac{\alpha}{2\pi} dr & \implies de^1 = 0 \\ e^2 = r d\phi & \implies de^2 = dr \wedge d\phi \\ e^3 = dz & \implies de^3 = 0 \end{cases}$$

Com estes resultados, podemos calcular as conexões ou tetradas, dadas por ω_j^i através da equação de estrutura de **Cartan**[7] para um espaço cuja geometria está livre de torção.

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0, \quad (3.4)$$

Para $(a = 0, 1, 2, 3)$, os únicos termos não nulos são

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)d\phi = -\omega_2^1, \quad (3.5)$$

onde $\omega_j^i = -\omega_i^j$ se as tetradas envolvidas não estiverem associadas ao tempo. Outra propriedade útil nos dá que $\omega_j^i = 0$ se $i = j$.

Assim, nossa matriz conexão é dada por

$$\Gamma_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{2\pi}{\alpha}) & 0 \\ 0 & (\frac{2\pi}{\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

e com isso podemos obter a matriz de holonomia dada por

$$U(\gamma) = P e^{-\int_\gamma \Gamma_\mu dx^\mu}, \quad (3.7)$$

onde γ é a curva na qual iremos fazer o transporte paralelo de nossa base de vetores. Note que γ pode ser qualquer curva, mas só estamos interessados nas curvas fechadas que nos dão informação **global** sobre a curvatura do espaço interno a mesma. Escolhendo a curva $\gamma = \phi$ (curva fechada) temos

$$U(\gamma) = P e^{-\int_\gamma \Gamma_\mu dx^\mu} = e^{-\oint \Gamma_\phi d\phi}, \quad (3.8)$$

logo

$$U(\gamma) = e^{-\alpha \Gamma_\phi}, \quad (3.9)$$

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!} \Gamma_\phi^2 - \frac{\alpha^3}{3!} \Gamma_\phi^3 + \dots, \quad (3.10)$$

e utilizando o fato de que

$$\Gamma_\phi^3 = -\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \Gamma_\phi \quad e \quad \Gamma_\phi^4 = -\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \Gamma_\phi^2, \quad (3.11)$$

ficamos com a seguinte expressão para nossa expansão

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \Gamma_\phi \left[1 - \frac{(2\pi)^2}{3!} + \dots \right] - \alpha^2 \Gamma_\phi^2 \left[-\frac{1}{2!} + \frac{(2\pi)^2}{4!} - \dots \right], \quad (3.12)$$

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \frac{\Gamma_\phi}{2\pi} \text{sen}(2\pi) - \alpha^2 \frac{\Gamma_\phi^2}{(2\pi)^2} [\cos(2\pi) - 1], \quad (3.13)$$

$$U(\gamma) = \mathbf{1}, \quad (3.14)$$

que na forma matricial é dada por

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

A matriz identidade acima representa a holonomia para a métrica correspondente a região definida por $P(r) = \frac{\alpha}{2\pi}$ dada anteriormente. Este resultado, nos diz que nesta região ($r < r_0 + \epsilon$), a estrutura interna da corda é dada pelo espaço plano.

2) Se $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$, temos agora a métrica para a região externa do flower-pot dada por $r > r_0$, onde utilizando o mesmo procedimento, podemos calcular novamente a holonomia. Tomando a base anterior (3.3) para esta métrica, temos

$$\begin{cases} e^0 = dt & \implies de^0 = 0 \\ e^1 = dr & \implies de^1 = 0 \\ e^2 = r d\phi & \implies de^2 = dr \wedge d\phi \\ e^3 = dz & \implies de^3 = 0 \end{cases}$$

As únicas tetradas não nulas derivadas de (3.4) são

$$\omega_1^2 = d\phi \quad e \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2, \quad (3.16)$$

e com isso, nossa matriz conexão para a $\gamma = \phi$ é dada por

$$\Gamma_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Utilizando a eq.(3.7) e expandindo da mesma forma, obtemos que

$$U(\gamma) = 1 - \alpha\Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!}\Gamma_\phi^2 + \frac{\alpha^3}{3!}\Gamma_\phi^3 - \dots, \quad (3.18)$$

onde

$$\Gamma_\phi^3 = -\Gamma_\phi, \quad (3.19)$$

$$U(\gamma) = 1 - \Gamma_\phi \text{sen}(\alpha) - \Gamma_\phi^2 [\cos(\alpha) - 1], \quad (3.20)$$

então

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

As curvas abertas r e z não são de nosso interesse, visto que não trazem informações relevantes para o problema em questão, já que estamos analisando a estrutura do espaço interior ao transporte paralelo. O tempo, apesar de ser uma curva tipo fechada se tomamos um período determinado também não nos interessa pois a métrica é estática. Esta matriz pode ser interpretada como um gerador de rotações em torno do eixo z , onde $U(\gamma) = \exp(-i\alpha J_{12})$. Após calcular a holonomia, podemos obter o déficit angular que um vetor sofre ao ser transportado ao longo de ϕ .

3.1.1 Ângulos de Déficit no Flower-Pot

Podemos calcular os ângulos de déficit (χ) utilizando

$$\cos\chi_A = U_A^A, \quad (3.22)$$

onde A é um índice tetradico.

Para a métrica com $P_{(r)} = \frac{\alpha}{2\pi}$, os únicos termos U_A^A relevantes são os definidos por $A = 1$ e $A = 2$. Em $A = 0$ temos U_0^0 associado ao tempo, que não influencia no transporte de vetores. Em $A = 3$ temos U_3^3 que é um termo associado à variável z , que por sua vez é uma curva aberta que não é afetada por α .

Assim

$$\cos\chi_{(1,2)} = U_{(1,2)}^{(1,2)} = 1, \quad (3.23)$$

$$\chi_{(1,2)} = 0, \quad (3.24)$$

o que faz sentido se em $r < r_0$ o espaço é plano.

b) Para a métrica com $P(r) = 1$, da mesma forma, só temos $A = 1$ e $A = 2$.

$$\cos\chi_{(1,2)} = U_{(1,2)}^{(1,2)} = \cos(\alpha), \quad (3.25)$$

$$\chi_{(1,2)} = \alpha, \quad (3.26)$$

ou seja

$$|\chi_{(1,2)}| = |\alpha + 2\pi n|, \quad (3.27)$$

se $\phi \in [0, \alpha]$ vemos que $2\pi - \alpha$ ou $|\alpha - 2\pi|$ é o ângulo de déficit e isso implica em $n = -1$

$$\chi_{(1,2)} = |\alpha - 2\pi|. \quad (3.28)$$

3.2 O Ballpoint Pen

Neste modelo, o espaço é plano para $r > r_0$ e a curvatura é constante no interior da região $r < r_0$, onde temos uma calota esférica colada em cima do tronco de cone que tínhamos para o flower-pot.

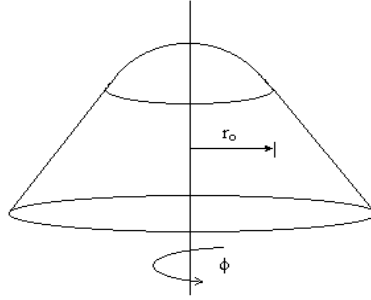


Figura 3.2: Geometria associada ao Ballpoint Pen

A nossa métrica [1] agora é dada por

$$P(r) = \begin{cases} \left[\frac{r^2}{r_0^2}(1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, & r < r_0 \\ 1 & , r \geq r_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

onde

$$\kappa = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (3.30)$$

Para a métrica dada por $P(r) = \left[\frac{r^2}{r_0^2}(1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ do ballpoint pen, iremos calcular a holonomia utilizando o mesmo método aplicado ao flower-pot. Assim

$$\begin{cases} e^0 = dt & \implies de^0 = 0 \\ e^1 = dr & \implies de^1 = 0 \\ e^2 = r d\phi & \implies de^2 = dr \wedge d\phi \\ e^3 = dz & \implies de^3 = 0 \end{cases}$$

Novamente utilizando a equação de Cartan (3.4), temos as tetradas não nulas

$$\omega_1^2 = \Delta^{\frac{1}{2}} d\phi \quad e \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2, \quad (3.31)$$

onde

$$\Delta = \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right]. \quad (3.32)$$

Com isso, nossa matriz conexão será

$$\Gamma_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Delta^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

e a holonomia em $\gamma = \phi$ fica com o seguinte formato

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!} \Gamma_\phi^2 + \frac{\alpha^3}{3!} \Delta \Gamma_\phi - \frac{\alpha^4}{4!} \Delta \Gamma_\phi^2 - \dots, \quad (3.34)$$

$$U(\gamma) = \mathbf{1} - \Delta^{-\frac{1}{2}} \Gamma_\phi \text{sen}(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) - \Delta^{-1} \Gamma_\phi^2 [\cos(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) - 1], \quad (3.35)$$

ou seja,

$$U(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) & \text{sen}(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) & \cos(\alpha \Delta^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Podemos também, determinar a curvatura escalar R com o resultado anterior, onde a mesma foi calculada em [8] e é dada por

$$R = \frac{2}{r} \frac{\partial P(r)/\partial r}{P(r)^3}. \quad (3.37)$$

Assim para $r < r_0$

$$R = \frac{2}{r_0^2} (\kappa^2 - 1), \quad (3.38)$$

e para $r > r_0$

$$R = 0. \quad (3.39)$$

Note que em $r < r_0$ a curvatura escalar depende de r_0 e se fizermos o limite em que $r_0 \longrightarrow \infty \Rightarrow R \longrightarrow 0$, teremos uma região plana que corresponde a estrutura do flower-pot

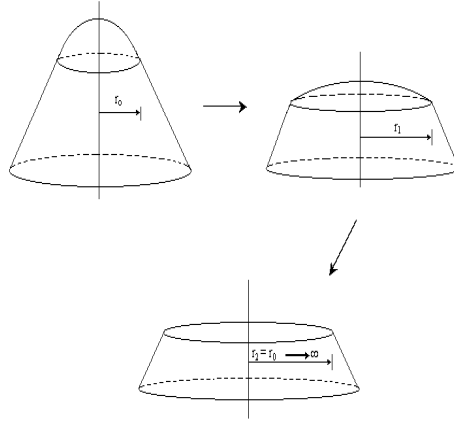


Figura 3.3: Limite para $r_0 \longrightarrow \infty$ no modelo do Ballpoint Pen

e se $r_0 \longrightarrow 0 \Rightarrow R \longrightarrow \infty$ a curvatura é infinita e teremos uma geometria associada a métrica da corda sem estrutura vista em [1].

Da mesma forma que no flower-pot, queremos agora obter o déficit angular sofrido pelo vetor transportado nesta região.

3.2.1 Ângulos de Déficit no Ballpoint Pen

Novamente, iremos utilizar a equação (3.22) para calcular o ângulo de déficit só com os termos $A = 1$ e $A = 2$, Assim

$$\cos\chi_{(1,2)} = \cos(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}), \quad (3.40)$$

$$\chi = \alpha\Delta^{\frac{1}{2}}, \quad (3.41)$$

$$|\chi| = |\alpha\Delta^{\frac{1}{2}} + 2\pi n|, \quad (3.42)$$

e com $\alpha = \frac{2\pi}{\kappa}$

$$|\chi| = \left| \frac{2\pi}{\kappa} \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2\pi n \right|. \quad (3.43)$$

Mas, $\chi \rightarrow 0$ quando $\sqrt{\Delta} \rightarrow \kappa$ logo, o valor de n para que a condição acima seja verificada será $n = -1$, e a equação (3.42) que nos dá o déficit angular fica

$$|\chi| = |2\pi(\frac{\sqrt{\Delta}}{\kappa} - 1)|. \quad (3.44)$$

A métrica da região exterior do Ballpoint Pen dada por $P_{(r)} = 1$, é idêntica a métrica da região exterior do Flower-Pot, o que nos dá os mesmos resultados para o déficit angular.

3.3 Loops de Wilson

Como vimos, o cálculo das holonomias nos dá informação sobre a estrutura global da curvatura em regiões contidas em curvas fechadas.

Esta quantidade, pode ser definida também em termos dos Loops de Wilson [9] que são dados pelo traço da holonomia. Assim, para uma curva γ temos que,

$$W(\gamma) = Tr[U(\gamma)]. \quad (3.45)$$

Para o **Flower-Pot**

Se $\gamma = \phi$ e $P_{(r)} = \frac{\alpha}{2\pi}$

$$W(\gamma) = 4. \quad (3.46)$$

O resultado acima concorda com o resultado conhecido para o espaço plano, que as vezes é dado por $W(\gamma) = -4 + Tr[U(\gamma)]$, onde escrevemos nesta forma apenas para ajustar o valor para $W(\gamma) = 0$.

Se $\gamma = \phi$ e $P_{(r)} = 1$

$$W(\gamma) = Tr \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$W(\gamma) = 2(1 + \cos(\alpha)) \quad (3.48)$$

onde se fizermos $\alpha = 2\pi$, teremos o resultado para o espaço plano $W(\gamma) = 0$ como seria de se esperar.

Para o **Ballpoint Pen**

Se $\gamma = \phi$ e $P_{(r)} = \left[\frac{r^2}{r_0^2}(1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$

$$W(\gamma) = Tr \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}) & \sin(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}) & \cos(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$W(\gamma) = 2(1 + \cos(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}})). \quad (3.50)$$

Se $\gamma = \phi$ e $P_{(r)} = 1$

Nesta região temos o mesmo comportamento que o da região externa do Flower-Pot,

visto que ambas são equivalentes.

Tabela de Resultados

Modelo	Flower-Pot		Ballpoint Pen	
Métrica	$P(r) = \frac{\alpha}{2\pi}$	$P(r) = 1$	$P(r) = \Delta^{-\frac{1}{2}}$	$P(r) = 1$
$Tr[U]$	4	$2(1 + \cos(\alpha))$	$2(1 + \cos(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}))$	$2(1 + \cos(\alpha))$
Déficit χ	0	$ \alpha - 2\pi $	$ 2\pi(\frac{\sqrt{\Delta}}{\kappa} - 1) $	$ \alpha - 2\pi $

3.4 Transporte Paralelo Espinorial

Para calcular holonomias com spins, temos que generalizar o nosso formalismo definindo a nova matriz conexão que agora será a matriz conexão spinorial. Esta matriz [4] é definida por

$$\Gamma_{\mu B}^C = \frac{\sigma_d^{C\dot{Y}}}{2}(\sigma_{B\dot{Y}}^b \Gamma_{\mu b}^d + \partial_\mu \sigma_{B\dot{Y}}^b), \quad (3.51)$$

onde a matriz $\Gamma_{\mu b}^d$ é a matriz conexão anterior. Antes de calcular as holonomias temos que escolher nossa base, que neste caso será a base formada pelas matrizes de Pauli mais a identidade, dadas a seguir

$$\sigma_0^{B\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\sigma_1^{B\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\sigma_2^{B\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\sigma_3^{B\dot{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Como estas matrizes independem de ϕ , o termo com as derivadas $\partial_\mu \sigma_{BY}^b = 0$ e a equação (3.51) se reduz a

$$\Gamma_{\mu B}^C = \frac{1}{2} (\sigma_d^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^b \Gamma_{\phi b}^d). \quad (3.56)$$

Para o flower-Pot.

Se a métrica for dada por $P(r) = \frac{\alpha}{2\pi}$, os únicos termos não nulos são

$$\Gamma_{\phi 2}^1 = -\frac{2\pi}{\alpha}, \quad (3.57)$$

e

$$\Gamma_{\phi 1}^2 = -\Gamma_{\phi 2}^1 = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (3.58)$$

Logo

$$\Gamma_{\phi B}^C = \frac{1}{2} \left(\sigma_1^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^2 \Gamma_{\phi 2}^1 + \sigma_2^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^1 \Gamma_{\phi 1}^2 \right), \quad (3.59)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = -\frac{\pi}{\alpha} \left(\sigma_1^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^2 - \sigma_2^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^1 \right), \quad (3.60)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = -\frac{\pi}{\alpha} i \sigma_3. \quad (3.61)$$

Com esta nova matriz conexão podemos calcular a holonomia,

$$U(\gamma) = e^{-\alpha \Gamma_\phi}, \quad (3.62)$$

que por expansão

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!} \Gamma_\phi^2 + \frac{\alpha^3}{3!} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \Gamma_\phi + \dots, \quad (3.63)$$

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\alpha \Gamma_\phi}{\pi} \text{sen}(\pi) - \frac{(\alpha \Gamma_\phi)^2}{\pi^2} [\cos(\pi) - 1], \quad (3.64)$$

$$U(\gamma) = \mathbf{1} + 2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \Gamma_\phi^2. \quad (3.65)$$

Se a métrica for dada por $P(r)=1$

$$\Gamma_{\phi B}^C = \frac{1}{2}(\sigma_1^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^2 \Gamma_{\phi 2}^1 + \sigma_2^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^1 \Gamma_{\phi 1}^2). \quad (3.66)$$

Como

$$\Gamma_{\phi 2}^1 = -1 = -\Gamma_{\phi 1}^2, \quad (3.67)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = \frac{1}{2}(-\sigma_1^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^2 + \sigma_2^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^1), \quad (3.68)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = -\frac{1}{2}i\sigma_3. \quad (3.69)$$

A holonomia será

$$U(\gamma) = e^{-\alpha \Gamma_\phi}, \quad (3.70)$$

$$U(\gamma) = 1 - \alpha \Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!} \Gamma_\phi^2 + \frac{\alpha^3}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Gamma_\phi + \dots, \quad (3.71)$$

então

$$U(\gamma) = 1 - 2\Gamma_\phi \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4\Gamma_\phi^2 [\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1], \quad (3.72)$$

ou

$$U(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha/2)} & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha/2)} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Para o ballpoint pen, se a métrica for dada por $P(r) = \Delta^{-\frac{1}{2}}$. Os únicos termos não nulos são

$$\Gamma_{\phi 2}^1 = -\Delta^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \Gamma_{\phi 1}^2 = \Delta^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

assim

$$\Gamma_{\phi B}^C = \frac{\Gamma_{\phi 2}^1}{2}(\sigma_1^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^2 - \sigma_2^{C\dot{Y}} \sigma_{B\dot{Y}}^1), \quad (3.75)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = -\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{4} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

$$\Gamma_{\phi B}^C = -\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{2} i\sigma_3. \quad (3.77)$$

Novamente, temos a holonomia por expansão

$$U(\gamma) = 1 - \alpha\Gamma_\phi + \frac{\alpha^2}{2!}\Gamma_\phi^2 + \frac{\alpha^3}{3!}\left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\Gamma_\phi + \dots, \quad (3.78)$$

com

$$\Gamma_\phi^3 = -\left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\Gamma_\phi. \quad (3.79)$$

Ent o

$$U(\gamma) = 1 - \frac{2\Gamma_\phi}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \text{sen}\left(\frac{\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}}{2}\right) - \frac{4(\Gamma_\phi)^2}{\Delta} [\cos\left(\frac{\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}}{2}\right) - 1], \quad (3.80)$$

ou

$$U(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}/2)} & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}/2)} \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Capítulo 4

Espalhamento em Cordas Cósmicas

Neste capítulo, continuaremos a discutir nossos resultados, considerando a influência dos modelos de corda definidos pelos Flower-Pot e Ballpoint Pen, na trajetória de raios de luz que se propagam nestes espaços. Para isso, precisaremos calcular as geodésicas de cada modelo, e inicialmente iremos utilizar o formalismo tensorial.

4.1 Método Tensorial

4.1.1 Flower-Pot

Seja $ds^2 = -dt^2 + P^2(r)dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2$ a métrica dos modelos definidos pelo flower-pot e ballpoint pen [1]. Queremos agora, obter as equações das geodésicas nestes espaços, com o objetivo de estudar o efeito que o campo gravitacional dos modelos causa na propagação da luz.

Para o flower-pot, na região definida por $r < r_0$, temos $P(r) = \frac{\alpha}{2\pi}$. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\alpha}{2\pi})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde sua versão contravariante é será

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2\pi}{\alpha})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Assim, podemos calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ não nulos

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -(\frac{2\pi}{\alpha})^2 \cdot r, \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.5)$$

e utilizando a equação das geodésicas (2.21), obtemos as soluções para r , ϕ e z .

Para r , temos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{\phi\phi}^r \frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (4.6)$$

$$\ddot{r} - \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.7)$$

Para ϕ , temos

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2\Gamma_{r\phi}^\phi \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (4.8)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0. \quad (4.9)$$

Para z , temos

$$\ddot{z} = 0, \quad (4.10)$$

que é consequência da simetria de translação ao longo de $\hat{z}$. Iremos resolver as equações encontradas para este caso por analogia com um resultado obtido em [10], onde temos os seguintes resultados para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\theta r}^z = \Gamma_{r\theta}^z = -\frac{\beta}{r}, \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\rho^2 r, \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}. \quad (4.13)$$

Podemos observar então, que se aplicarmos a transformação abaixo em (4.11), (4.12) e (4.13)

$$\theta = \phi, \quad \beta = 0 \quad e \quad \rho = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (4.14)$$

teremos o resultado para nossa métrica.

Assim, tomando as soluções dadas para as geodésicas em [10] que são

$$r(t) = \sqrt{\frac{C^2}{E\rho^2} + 2E(t + D)^2}, \quad (4.15)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\rho} \text{Arctang} \left(\frac{2E\rho(t + D)}{C} \right) + \frac{F}{\rho}, \quad (4.16)$$

$$z(t) = At - \frac{\beta}{\rho} \text{Arctang} \left(\frac{2E\rho(t + D)}{C} \right) - \frac{\beta F}{\rho} + B, \quad (4.17)$$

onde A, B, C, D, E, F são constantes de integração e fazendo uso de (4.14), teremos as nossas geodésicas

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{E_0} \left(\frac{C_0\alpha}{2\pi} \right)^2 + 2E_0(t + D_0)^2}, \quad (4.18)$$

$$\phi(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \text{Arctang} \left(\frac{4\pi E_0(t + D_0)}{\alpha C_0} \right) + \frac{\alpha F_0}{2\pi}, \quad (4.19)$$

$$z(t) = A_0 t + B_0, \quad (4.20)$$

onde $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$ são as constantes de integração.

Se $P(r) = 1$ para $r > r_0 + \epsilon$, o tensor métrico será

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Da mesma forma, temos os símbolos de Christoffel não nulos dados por

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \quad (4.22)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.23)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.24)$$

onde, utilizando a equação das geodésicas (2.21) temos novamente as equações para r, ϕ e z .

Para r , temos

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.25)$$

Para ϕ , temos

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0, \quad (4.26)$$

Para z , temos

$$\ddot{z} = 0. \quad (4.27)$$

Para obter nossas soluções por analogia, utilizaremos agora a transformação abaixo

$$\beta = 0, \quad \rho = 1 \quad e \quad \theta = \phi, \quad (4.28)$$

que nos dará para as geodésicas, as seguintes soluções

$$r(t) = \sqrt{\frac{C_1^2}{E_1} + 2E_1(t + D_1)^2}, \quad (4.29)$$

$$\phi(t) = \text{Arctang} \left(\frac{2E_1(t + D_1)}{C_1} \right) + F_1, \quad (4.30)$$

$$z(t) = A_1 t + B_1, \quad (4.31)$$

onde $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ são também constantes de integração.

4.1.2 Ballpoint Pen

Para este modelo, teremos o tensor métrico dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

onde $\left[\frac{r^2}{r_0^2} (1 - \kappa^2) + \kappa^2 \right] = \Delta$.

Os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{r(k^2 - 1)}{r^2 - r^2 k^2 + r_0^2 k^2}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r(r^2 - r^2 k^2 + r_0^2 k^2)}{r_0^2}, \quad (4.34)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}. \quad (4.36)$$

Podemos calcular as equações das geodésicas com (2.21). Que para o Ballpoint Pen

nos dá

Para r ,

$$\ddot{r} + \frac{r(k^2 - 1)}{r^2 - r^2 k^2 + r_0^2 k^2} \dot{r}^2 - \frac{r(r^2 - r^2 k^2 + r_0^2 k^2)}{r_0^2} \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.37)$$

Para ϕ ,

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0, \quad (4.38)$$

Para z ,

$$\ddot{z} = 0. \quad (4.39)$$

Aqui, podemos notar que este sistema de equações é bem complicado. O método tensorial utilizado, é apenas um, dos caminhos possíveis para obtenção de geodésicas. Outra forma de obter as geodésicas, é utilizar a teoria de Hamilton-Jacobi, que será o método utilizado por nós a partir de agora para obter as geodésicas no flower-pot e ballpoint pen.

4.2 Hamilton-Jacobi

Agora iremos obter as geodésicas para os feixes de luz espalhados de forma mais elegante, utilizando a teoria de Hamilton-Jacobi (HJ). Inicialmente faremos isto para as métricas do Flower-Pot e do Ballpoint Pen e em seguida para o modelo da corda cósmica sem estrutura, para efeito de comparação. Precisaremos do hamiltoniano do sistema, e o mesmo pode ser obtido através da métrica do espaço em questão. Se estamos livres de potencial

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (4.40)$$

Assim o hamiltoniano

$$H = L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (4.41)$$

na representação [11] dos momentos é dado por

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j. \quad (4.42)$$

Com o hamiltoniano em mãos, podemos escrever a equação de HJ como em [5]

$$H(q, \partial S / \partial q, t) + (\partial S / \partial t)^2 = 0, \quad (4.43)$$

onde $\mathbf{q}$ representa as coordenadas generalizadas do espaço e $\frac{\partial S}{\partial q} = p$ são os momentos generalizados em função de S, que é a chamada **função principal** e que pode ser vista em [12] como solução da equação de HJ. Assim para esta métrica teremos

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + P(r)^{-2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (4.44)$$

Note que consideramos a parte temporal da equação de HJ elevada ao quadrado. Isto ocorre, porque no caso do espaço quadridimensional, temos o tempo como uma das coordenadas e não como um parâmetro quando estávamos no caso clássico em 3 dimensões. Neste caso temos uma ação diferente, resultando nesta diferença. Temos uma proposta de solução utilizando variáveis de separação dada por

$$S(r, \phi, z, t) = S_1(r) + J\phi + pz - Et, \quad (4.45)$$

onde p e J são os momentos linear e angular associados às variáveis z e ϕ respectivamente. Combinando as equações (4.44) e (4.45) temos

$$S_1(r) = \int \sqrt{-(p^2 + r^{-2}J^2 - E^2)P^2} dr, \quad (4.46)$$

com isso a solução S fica

$$S(r, \phi, z, t) = \int \sqrt{-(p^2 + r^{-2}J^2 - E^2)P^2} dr + J\phi + pz - Et. \quad (4.47)$$

As equações de movimento são dadas por

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = \text{constante}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = \text{constante}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial J}\right) = \text{constante}, \quad (4.48)$$

e fazendo as constantes arbitrárias iguais a zero, temos inicialmente para a primeira equação

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = 0, \quad (4.49)$$

$$\int \frac{EP}{\sqrt{E^2 - p^2 - \frac{J^2}{r^2}}} dr = t, \quad (4.50)$$

definida para $E^2 < p^2 + r^{-2}J^2$.

As geodésicas para r são obtidas por integração da equação (4.50), que nos dá

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{(E^2 - p^2)} \left\{ \left[\frac{(t - \Omega_0)(E^2 - p^2)}{EP(r)} \right]^2 + J^2 \right\}}, \quad (4.51)$$

com $\Omega_0 =$ constante de integração.

Para $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = 0$

$$\int \frac{pP}{\sqrt{E^2 - p^2 - \frac{J^2}{r^2}}} dr = z, \quad (4.52)$$

com a mesma condição anterior ($E^2 < p^2 + r^{-2}J^2$).

Integrando da mesma forma que antes, obtemos

$$z(r) = \frac{pP(r)}{E^2 - p^2} \sqrt{r^2(E^2 - p^2) - J^2} + \Omega_1, \quad (4.53)$$

onde substituindo esta equação na eq.(4.51) temos z(t)

$$z(t) = \frac{p}{E}(t - \Omega_0) + \Omega_1. \quad (4.54)$$

para $\left(\frac{\partial S}{\partial J}\right) = 0$

$$\int \frac{P}{r\sqrt{(\frac{E^2 - p^2}{J^2})r^2 - 1}} dr = \phi, \quad (4.55)$$

definida para $(E^2 - p^2)r^2 > J^2$.

Fazendo a seguinte substituição, $r = \sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \text{Cossec}\theta$ teremos

$$\phi(r) = -P(r) \arcsen \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \right) + \Omega_2, \quad (4.56)$$

onde substituindo a eq.(4.51)

$$\phi(t) = -P(r) \arcsen \left(\sqrt{\frac{(JEP(r))^2}{(t - \Omega_0)^2(E^2 - p^2)^2 + (JEP(r))^2}} \right) + \Omega_2. \quad (4.57)$$

Note que, com $r(t)$, $z(t)$ e $\phi(t)$ temos todas as geodésicas. E ainda Ω_1 e Ω_2 são constantes de integração.

4.2.1 Geodésicas para o Flower-Pot

Com os resultados anteriores podemos listar as geodésicas obtidas para o Flower-Pot em ambas as regiões:

Se $r < r_0 - \epsilon$ temos $P(r) = (\alpha/2\pi)$ e assim

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{(E^2 - p^2)} \left\{ \left[\frac{(t - \Omega_0)(E^2 - p^2)2\pi}{E\alpha} \right]^2 + J^2 \right\}}, \quad (4.58)$$

$$\phi(t) = -(\alpha/2\pi) \arcsen \left(\sqrt{\frac{1}{\xi + 1}} \right) + \Omega_2, \quad (4.59)$$

com

$$\xi = \left(\frac{(t - \Omega_0)(E^2 - p^2)2\pi}{JE\alpha} \right)^2, \quad (4.60)$$

$$z(t) = \frac{p}{E}(t - \Omega_0) + \Omega_1, \quad (4.61)$$

$$r(\phi) = \text{Cossec} \left(\frac{-2\pi(\phi - \Omega_2)}{\alpha} \right) \left(\sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \right), \quad (4.62)$$

$$\phi(r) = -(\alpha/2\pi) \operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \right) + \Omega_2, \quad (4.63)$$

$$z(r) = \frac{\alpha}{2\pi(E^2 - p^2)} \sqrt{r^2(E^2 - p^2) - J^2} + \Omega_1. \quad (4.64)$$

Se $r > r_0 + \epsilon$ (região externa) temos $P(r) = 1$ e assim as geodésicas são:

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{(E^2 - p^2)} \left\{ \left[\frac{(t - \Omega_0)(E^2 - p^2)}{E} \right]^2 + J^2 \right\}}, \quad (4.65)$$

$$\phi(t) = -\operatorname{arcsen} \left(\sqrt{\frac{(JE)^2}{(t - \Omega_0)^2(E^2 - p^2)^2 + (JE)^2}} \right) + \Omega_2, \quad (4.66)$$

$$z(t) = \frac{p}{E}(t - \Omega_0) + \Omega_1, \quad (4.67)$$

$$r(\phi) = \operatorname{Cossec}(-(\phi - \Omega_2)) \left(\sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \right), \quad (4.68)$$

$$\phi(r) = -\operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{J^2}{E^2 - p^2}} \right) + \Omega_2, \quad (4.69)$$

$$z(r) = \frac{p}{E^2 - p^2} \sqrt{r^2(E^2 - p^2) - J^2} + \Omega_1. \quad (4.70)$$

4.2.2 Gráfico de Geodésica no Flower-Pot

Para $r < r_0$:

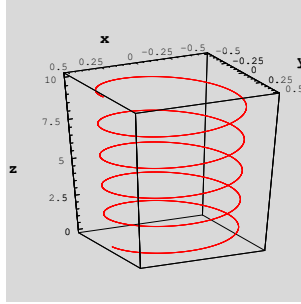


Figura 4.1: Geodésica para o Flower-Pot com $\alpha = \pi/2$

Temos neste gráfico (4.1), um exemplo de geodésica em coordenadas cilíndricas no espaço tridimensional.

4.2.3 Pontos de Retorno

Aqui iremos obter os pontos de retorno das trajetórias para r , visto que para ϕ e z isso não tem importância devido a simetria associada a essas trajetórias. Os pontos de retorno para r são dados por

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad (4.71)$$

logo, se a equação (49) nos dá que

$$\int \frac{EP}{\sqrt{E^2 - p^2 - \frac{J^2}{r^2}}} dr = t, \quad (4.72)$$

derivamos ambos os lados da equação acima em relação a r e obtemos

$$\frac{EP}{\sqrt{E^2 - p^2 - \frac{J^2}{r^2}}} = \frac{dt}{dr}. \quad (4.73)$$

utilizando agora a equação que nos dá os pontos de retorno temos

$$(E^2 - p^2)r^2 - J^2 = 0, \quad (4.74)$$

e finalmente os pontos de retorno são dados por

$$r = \pm \frac{J}{E^2 - p^2}. \quad (4.75)$$

4.2.4 Geodésicas para o Ballpoint Pen

Temos agora uma métrica um pouco mais complicada do ponto de vista operacional. A equação de Hamilton-Jacobi será

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \Delta \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad (4.76)$$

E da mesma forma que antes, iremos propor uma solução do tipo

$$S(r, \phi, z, t) = S_1(r) + J\phi + pz - Et, \quad (4.77)$$

que por substituição, nos dá para $S_1(r)$

$$S_1(r) = \int \sqrt{\frac{(E^2 - p^2)r^2 - J^2}{\Delta r^2}} dr, \quad (4.78)$$

assim

$$S(r, \phi, z, t) = \int \sqrt{\frac{(E^2 - p^2)r^2 - J^2}{\Delta r^2}} dr + J\phi + pz - Et. \quad (4.79)$$

As geodésicas para o Ballpoint Pen são obtidas utilizando-se o mesmo método usado para calcular as geodésicas do Flower-Pot. Para

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = 0, \quad (4.80)$$

teremos

$$E \int \sqrt{\frac{r^2}{r^4 \left[\frac{(1-k^2)(E^2-p^2)}{r_0^2} \right] + r^2 \left[(E^2-p^2)K^2 - \frac{(1-K^2)J^2}{r_0^2} \right] - J^2 K^2}} dr = t, \quad (4.81)$$

onde se

$$\left[\frac{(1-k^2)(E^2-p^2)}{r_0^2} \right] = a, \quad (4.82)$$

$$\left[(E^2-p^2)K^2 - \frac{(1-K^2)J^2}{r_0^2} \right] = b, \quad (4.83)$$

$$J^2 K^2 = c, \quad (4.84)$$

ficamos com

$$E \int \sqrt{\frac{r^2}{ar^4 + br^2 - c}} dr = t, \quad (4.85)$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{E}(t - \lambda_0) = \ln \left(\frac{b + 2ar^2 + 2\sqrt{ar^4 + br^2 - c}\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right). \quad (4.86)$$

com λ_0 =constante de integração.

Manipulando a equação (4.86) temos

$$r(t) = \sqrt{\frac{J^2 K^2 + \rho^2}{2\rho\sqrt{a} + b}}. \quad (4.87)$$

onde ρ está definido como

$$\left(e^{\frac{a\sqrt{a}}{E}(t-\lambda_0)} - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) = \rho. \quad (4.88)$$

Vimos que ao verificarmos os limites de r_0 , temos as equações do Ballpoint Pen recaindo nas do Flower-Pot e nas da corda sem estrutura. Vimos isso através dos valores dos limites da curvatura escalar R . Com isso, as equações obtidas por HJ para o ballpoint, devem recair nas do flower-pot. Isso pode ser visto, aplicando-se por exemplo o limite $r_0 \rightarrow \infty$ na equação (4.85), pois quando isso acontece, $a \rightarrow 0$,

$$b \rightarrow (E^2 - p^2)k^2.$$

Agora,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = 0, \quad (4.89)$$

com esta equação, iremos obter $z(r)$ e consequentemente $z(t)$ por substituição de $r(t)$. Assim

$$\int \sqrt{\frac{r^2}{[(E^2 - p^2)r^2 - J^2] \Delta}} dr = z/p, \quad (4.90)$$

onde, a integral acima nos dá

$$z(r) = \frac{p}{2\sqrt{a}} \ln \left(\frac{b + 2ar^2 + 2\sqrt{ar^4 + br^2 - c\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}} \right) + \lambda_1, \quad (4.91)$$

para a e b definidos antes.

Finalmente

$$\left(\frac{\partial S}{\partial J}\right) = 0, \quad (4.92)$$

e com esta última equação temos

$$J \int \frac{dr}{\sqrt{\Delta[(E^2 - p^2)r^4 - J^2r^2]}} = \phi. \quad (4.93)$$

Definindo

$$\left[\frac{(1 - K^2)(E^2 - p^2)}{r_0^2} \right] = l, \quad (4.94)$$

$$\left[K^2(E^2 - p^2) - \frac{(1 - K^2)J^2}{r_0^2} \right] = m, \quad (4.95)$$

$$[J^2 K^2] = n, \quad (4.96)$$

ficamos com

$$J \int \frac{dr}{\sqrt{lr^6 + mr^4 - nr^2}} = \phi. \quad (4.97)$$

Que nos possibilitará calcular as outras geodésicas para este modelo.

4.2.5 Gráficos das Geodésicas do Ballpoint Pen

Temos agora os gráficos para o ballpoint pen, obtidos com a solução numérica das equações diferenciais vistas em 4.37, 4.38, 4.39.

Para a região interior deste modelo, variando o α , obtemos os seguintes gráficos:

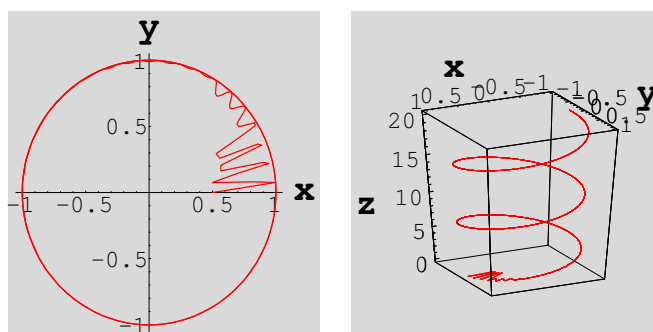


Figura 4.2: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/10$.

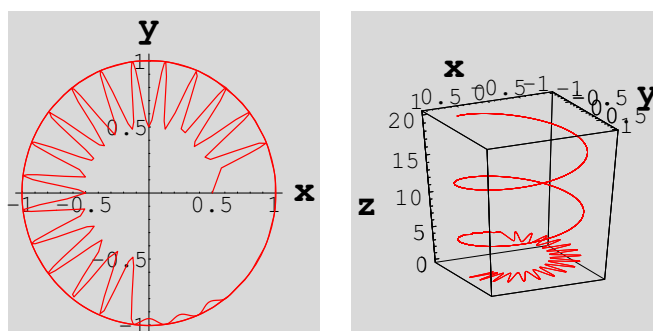


Figura 4.3: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/6$.

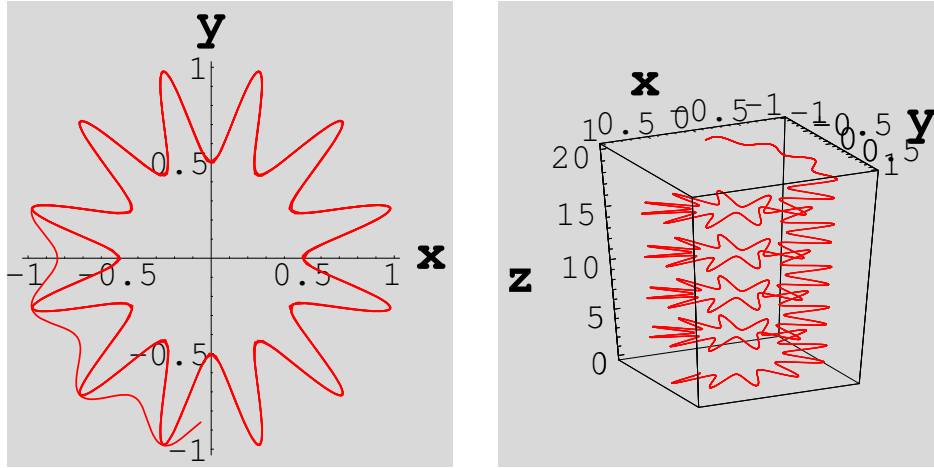


Figura 4.4: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/3$.

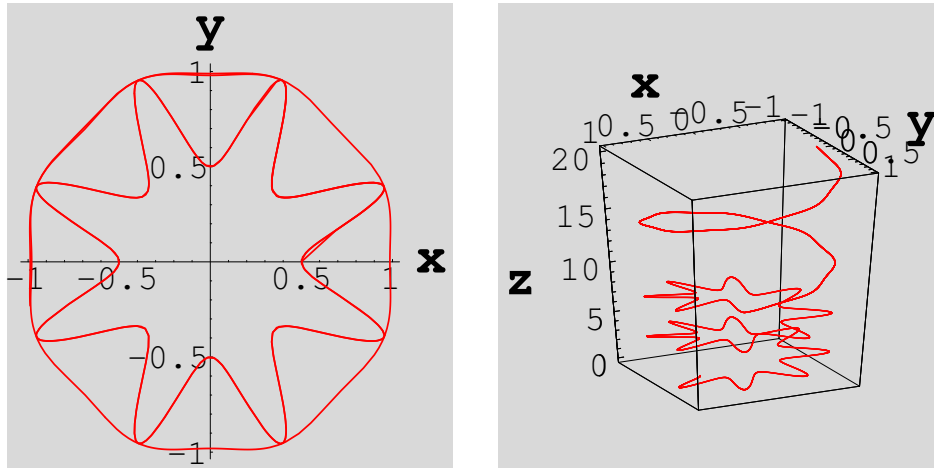


Figura 4.5: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi/2$.

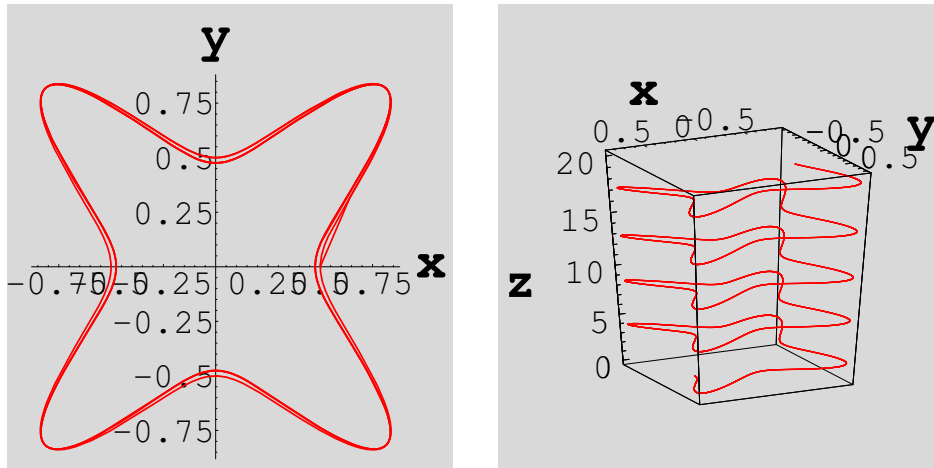


Figura 4.6: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = \pi$

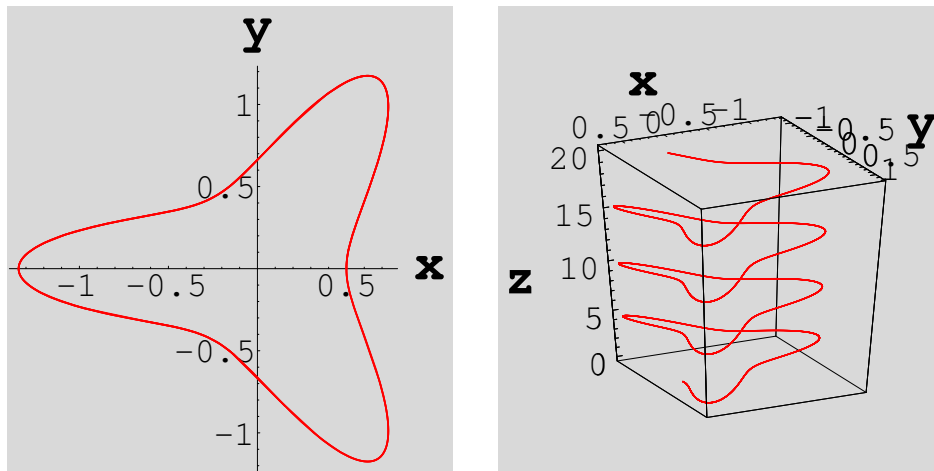


Figura 4.7: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 4\pi/3$.

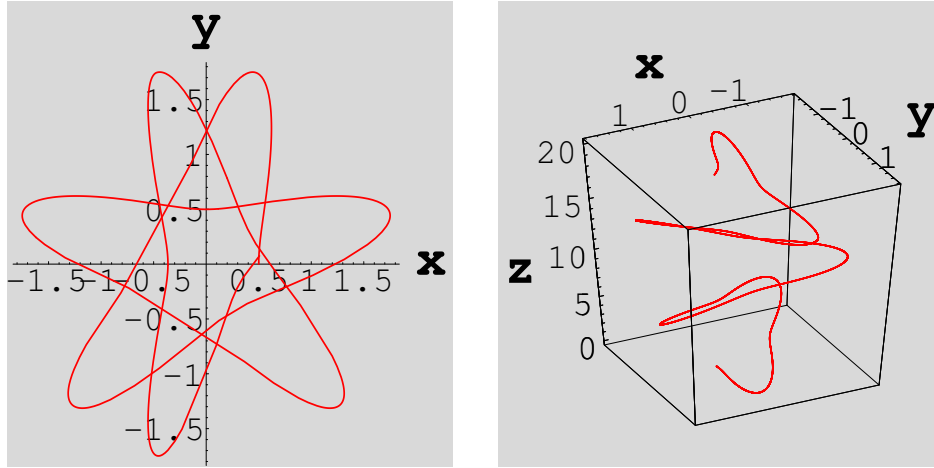


Figura 4.8: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 5\pi/3$.

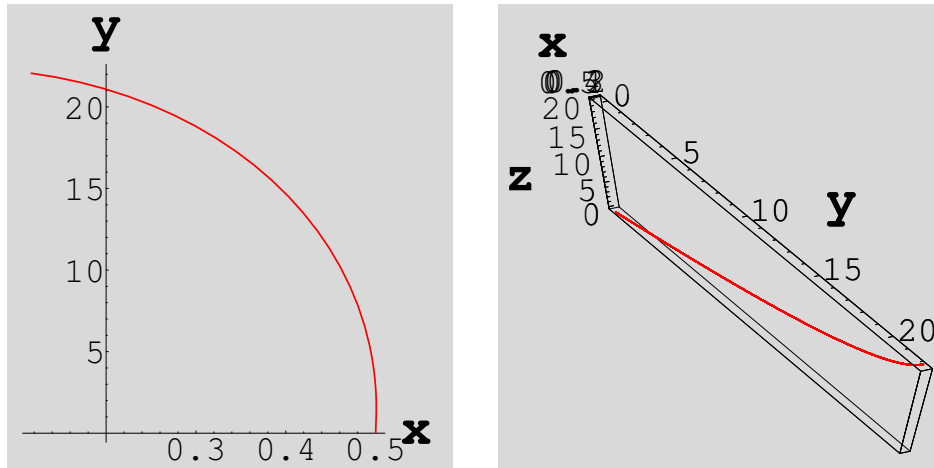


Figura 4.9: Geodésica para o Ballpoint Pen com $\alpha = 1,998\pi$.

Capítulo 5

Espalhamento em Corda Negra

Neste capítulo, iremos calcular o espalhamento da luz que se propaga em uma geometria diferente da que tratamos nos capítulos 3 e 4.

Tomaremos como base a geometria da corda negra, que é uma generalização do modelo bidimensional para buracos negros na terceira dimensão (3+1). O modelo de construção desta corda baseia-se na superposição de buracos negros, nos dando uma geometria cilíndrica. Tais camadas superpostas são dadas por espaços hiperbólicos contendo buracos negros bidimensionais. Neste caso, a métrica é dada por

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 + dz^2, \quad (5.1)$$

onde, N e N^ϕ são funções de r dadas por

$$N^2(r) = -8M + \psi^2 r^2 + \frac{16J^2}{r^2}, \quad (5.2)$$

e

$$N^\phi(r) = \frac{-4J}{r^2}, \quad (5.3)$$

sendo M o termo associado a massa, J ao momento angular e ψ associada a constante cosmológica Λ ($\Lambda = -\psi^2$). Assim como em [13] só estamos interessados em cordas

estáticas onde $J = 0$.

Tentaremos obter as geodésicas neste espaço, utilizando o mesmo método aplicado ao flower-pot e ballpoint pen que foi o de Hamiltó-Jacobi.

A nova métrica com $J = 0$ é

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (5.4)$$

e a equação de Hamilton-Jacobi

$$-\frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + N^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (5.5)$$

com a mesma proposta de solução utilizando variáveis de separação, temos

$$S(r, \phi, z, t) = S_1(r) + J\phi + pz - Et, \quad (5.6)$$

onde p e J são novamente os momentos linear e angular associados as variáveis z e ϕ respectivamente.

Assim a função $S_1(r)$ após a substituição será

$$S_1(r) = \int \frac{1}{N^2 r} \sqrt{r^2(E^2 - N^2 p^2) - N^2 J^2} dr, \quad (5.7)$$

e a solução completa

$$S(r, \phi, z, t) = \int \frac{1}{N^2 r} \sqrt{r^2(E^2 - N^2 p^2) - N^2 J^2} dr + J\phi + pz - Et. \quad (5.8)$$

Novamente, iremos utilizar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right) = 0, \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right) = 0, \left(\frac{\partial S}{\partial J} \right) = 0, \quad (5.9)$$

para calcular as trajetórias (geodésicas).

Inicialmente, para obtermos $r(t)$, iremos utilizar $\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right) = 0$.

$$E \int \frac{1}{N^2} \frac{r dr}{\sqrt{r^2(E^2 - N^2 p^2) - N^2 J^2}} = t, \quad (5.10)$$

com $N^2 = \psi^2 r^2 - 8M$.

Ficamos então com uma integral que após resolvida nos fornece a seguinte equação

$$-\frac{E}{2\sqrt{a}e\psi} \ln \left[\frac{\psi (a e^2 + a^2 p^2 + a j^2 \psi^2 + e^2 r^2 \psi^2 - a p^2 r^2 \psi^2 - j^2 r^2 \psi^4)}{\sqrt{a}e (-a + r^2 \psi^2)} \right] + \frac{2\psi^2 \sqrt{-(j^2 (-a + r^2 \psi^2)) + r^2 (e^2 - p^2 (-a + r^2 \psi^2))}}{-a + r^2 \psi^2} = t - \zeta_0,$$

onde $a = 8m$ e $\zeta_0 =$ constante de integração.

Simplificando esta equação obtemos uma equação biquadrada em r

$$r^4 K(t) + r^2 U(t) + Z(t) = 0, \quad (5.11)$$

com as funções K, U e Z definidas por

$$K(t) = F^2 p^2 \psi^2 - (G e^{-C(t-\zeta_0)} - B)^2, \quad (5.12)$$

$$U(t) = F^2 Q - 2 (G e^{-Ct} - B) (H e^{-C(t-\zeta_0)} + A), \quad (5.13)$$

$$Z(t) = F^2 J^2 a + (H e^{-C(t-\zeta_0)} + A)^2, \quad (5.14)$$

e para A, B, C, F, G, H e Q constantes.

Resolvendo então a equação biquadrada, obtemos as quatro soluções possíveis para a geodésica em $r(t)$. Estas soluções são

$$r_1(t) = -\sqrt{\frac{-u}{2k} - \frac{\sqrt{u^2 - 4kz}}{2k}}, \quad (5.15)$$

$$r_2(t) = \sqrt{\frac{-u}{2k} - \frac{\sqrt{u^2 - 4kz}}{2k}}, \quad (5.16)$$

$$r_3(t) = -\sqrt{\frac{-u}{2k} + \frac{\sqrt{u^2 - 4kz}}{2k}}, \quad (5.17)$$

$$r_4(t) = \sqrt{\frac{-u}{2k} + \frac{\sqrt{u^2 - 4kz}}{2k}}. \quad (5.18)$$

Neste caso, existe um problema na visualização das geodésicas para a corda negra. É que agora, a geometria que temos mesmo sem a presença da corda, é dada pela superposição de espaços hiperbólicos que diferem da geometria que estávamos tratando, no caso do Flower-Pot e Ballpoint Pen.

Utilizando agora

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = 0 \quad (5.19)$$

iremos obter a próxima solução. Neste caso, teremos uma equação semelhante a que foi obtida anteriormente e que é dada por

$$p \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2(E^2 - N^2 p^2) - N^2 J^2}} = z, \quad (5.20)$$

onde resolvendo a integral, temos a seguinte equação biquadrada

$$r^4 \rho + r^2 \tilde{T}(z) + \tilde{W}(z) = 0, \quad (5.21)$$

para ρ =constante real e $\tilde{T}(z)$ e $\tilde{W}(z)$ são funções complexas dadas por

$$\rho = B_1^2 - C_1^2 p^2 \psi^2, \quad (5.22)$$

$$\tilde{T}(z) = C_1^2 A_1 - 2B_1 A_1 - 2iB_1 p \psi e^{-2\psi i(z-\zeta_1)}, \quad (5.23)$$

$$\tilde{W}(z) = C_1^2 a J^2 + 2iA_1 p \psi e^{-2\psi i(z-\zeta_1)} - p^2 \psi^2 e^{-4\psi i(z-\zeta_1)} + A_1^2, \quad (5.24)$$

onde, A_1, B_1, C_1 são constantes.

Com isso as soluções possíveis para $r(z)$ são

$$r_1(z) = -\sqrt{\frac{-T}{2\rho} - \frac{\sqrt{T^2 - 4W\rho}}{2\rho}} \quad (5.25)$$

$$r_2(z) = \sqrt{\frac{-T}{2\rho} - \frac{\sqrt{T^2 - 4W\rho}}{2\rho}} \quad (5.26)$$

$$r_3(z) = -\sqrt{\frac{-T}{2\rho} + \frac{\sqrt{T^2 - 4W\rho}}{2\rho}} \quad (5.27)$$

$$r_4(z) = \sqrt{\frac{-T}{2\rho} + \frac{\sqrt{T^2 - 4W\rho}}{2\rho}} \quad (5.28)$$

Podemos obter as soluções para $z(t)$ utilizando as soluções para $r(t)$ encontradas antes em 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18.

Finalmente, podemos usar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial J}\right) = 0 \quad (5.29)$$

para obter as soluções em ϕ e assim ficamos em condições de obter todas as geodésicas do sistema. Para ϕ teremos

$$J \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2(E^2 - N^2 p^2) - N^2 J^2}} = \phi, \quad (5.30)$$

Logo, resolvendo a integral

$$\frac{-J \ln\left(\frac{2aj^2 + e^2 r^2 + ap^2 r^2 - j^2 r^2 \psi^2}{\sqrt{a} j r^2} + \frac{2\sqrt{aj^2 - p^2 r^4 \psi^2 + r^2(e^2 + ap^2 - j^2 \psi^2)}}{r^2}\right)}{2\sqrt{a} j} = \phi - \zeta_2. \quad (5.31)$$

Note que a equação acima nos dá $\phi(r)$ e com este resultado podemos obter $\phi(t)$ por substituição de $r(t)$ encontrando quatro soluções.

As constantes ζ_1 e ζ_2 são constantes de integração.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, pudemos verificar as propriedades geométricas de alguns modelos de cordas cósmicas e obter as geodésicas para feixes de luz que movimentam-se dentro ou próximos aos mesmos.

Ao longo deste trabalho, utilizamos diversos fundamentos matemáticos e físicos que foram introduzidos de forma simplificada nos capítulos iniciais.

Para obter nossos resultados, utilizamos o cálculo das holonomias vetorial e spinorial para compreender a estrutura interna das cordas. No caso do Flower-Pot, verificamos que sua estrutura interna é descrita pelo espaço plano. Já na região externa, calculamos a holonomia em ϕ e obtemos a matriz que expressa a informação contida no campo gravitacional em função do defeito α .

Para o Ballpoint Pen, na região interna, o cálculo da holonomia nos revelou uma estrutura interna mais complexa. Neste caso, temos a matriz de holonomia em função da posição r e do raio da corda. Calculamos também os ângulos de déficit para ambos os modelos, e pudemos verificar a consistência dos resultados ao fazermos os limites necessários.

Já no capítulo de espalhamento, calculamos várias geodésicas possíveis em todas as regiões dos modelos, com a finalidade de compreender qual a influência da curvatura na trajetória de partículas ou feixes de luz.

Aproveitando o método utilizado no cálculo do espalhamento para as cordas com estrutura interna, obtemos algumas geodésicas para o modelo da Corda Negra.

Em trabalhos futuros, iremos analisar os resultados obtidos para as geodésicas do Flower-Pot e Ballpoint Pen. Pretendemos também, traçar as trajetórias dos feixes de luz na presença da Corda Negra para efeito de comparação e estudar o espalhamento quântico nos modelos. Na parte de holonomias, pretendemos estudar o transporte paralelo na região de interface definida na fronteira entre $r < r_0$ e $r > r_0$, tomando curvas fechadas nestas regiões.

Apêndice A

Espalhamento de Partículas

Neste apêndice, iremos considerar o espalhamento de partículas dotadas de massa m_0 . Utilizaremos apenas a métrica para o Flower-Pot, já que o mecanismo de cálculo é repetitivo se calcularmos o espalhamento para os outros modelos. Nos agora consideraremos um termo de massa na equação de Hamilton-Jacobi para o Flower-Pot

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + m_0^2 = 0, \quad (1)$$

assim como no espalhamento, iremos propor uma

$$S(t, r, \phi, z) = S_1(r) + J\phi + pz - Et, \quad (2)$$

com p e J momentos linear e angular de m_0 associados as coordenadas z e ϕ . Após substituição

$$S_1(r) = \int \frac{\alpha}{2\pi r} \sqrt{r^2[E^2 - (p^2 + m_0^2)] - J^2} dr, \quad (3)$$

e

$$S(t, r, \phi, z) = \int \frac{\alpha}{2\pi r} \sqrt{r^2[E^2 - (p^2 + m_0^2)] - J^2} dr + pz + J\phi - Et. \quad (4)$$

As geodésicas obtidas por

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = \text{constante}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) = \text{constante} \text{ e } \left(\frac{\partial S}{\partial J}\right) = \text{constante}, \quad (5)$$

são

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{[E^2 - (p^2 + m_0^2)]} \left\{ \left[\frac{2\pi[E^2 - (p^2 + m_0^2)]t}{E\alpha} \right]^2 + J^2 \right\}}, \quad (6)$$

$$z(t) = \frac{p}{E}t, \quad (7)$$

e

$$\phi(t) = -\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \text{Arcsen} \left(\sqrt{\frac{J^2}{\left[\frac{2\pi[E^2 - (p^2 + m_0^2)]t}{E\alpha} \right]^2 + J^2}} \right) - \left(\frac{\alpha K}{2\pi}\right) \quad (8)$$

onde K é uma constante de integração. Note que, o termo de massa implica apenas em uma constante a mais nas equações anteriores.

Apêndice B

Espalhamento em Cordas sem Estrutura

Com o estudo das propriedades dos modelos de corda com estrutura, temos verificar quais são as soluções para o modelo mais simples de corda, que é o da corda sem estrutura dada pela seguinte métrica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \beta^2 r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (9)$$

calcularemos inicialmente as geodésicas através da equação de Hamilton-Jacobi (HJ) como fizemos anteriormente nos modelos do Flower-Pot e do Ballpoint Pen. A equação de HJ para os feixes espalhados pela corda dada pela métrica acima será

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \beta^{-2} r^{-2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad (10)$$

cuja proposta de solução é dada por

$$S(r, \phi, z, t) = -S_1(r) - J\phi - pz + Et. \quad (11)$$

Repetindo os cálculos realizados para obtenção das geodésicas nos outros modelos onde J, p e E continuam associados a momento angular, momento linear e energia, temos os seguintes resultados

$$E^2 - \left(\frac{\partial S_1(r)}{\partial r}\right)^2 - \frac{J^2}{\beta^2 r^2} - p^2 = 0, \quad (12)$$

novamente isolamos $S_1(r)$ e substituímos na solução proposta acima, o que nos dá

$$S(r, \phi, z, t) = - \int \frac{1}{r} \sqrt{r^2(E^2 - p^2) - \frac{J^2}{\beta^2}} dr - J\phi - pz + Et, \quad (13)$$

com

$$\frac{\partial S}{\partial E} = 0, \quad (14)$$

$$E \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2(E^2 - p^2) - \frac{J^2}{\beta^2}}} = t, \quad (15)$$

e integrando por substituição temos a solução para $r(t)$

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{E^2 - p^2} \left[\frac{(E^2 - p^2)^2 t^2}{E^2} + \frac{J^2}{\beta^2} \right]}. \quad (16)$$

Espera-se que fazendo a transformação $\beta = \frac{\alpha}{2\pi}$ vista antes, para o resultado do ângulo de deficit da corda sem estrutura na solução do Flower-Pot, que a solução obtida aqui para $r(t)$ recaia na do Flower-Pot. Como na região externa do Flower-Pot, $P(r) = \frac{\alpha}{2\pi} = 1$, oque nos diz que $\alpha = 2\pi \Rightarrow \beta = 1$ temos a solução para $r(t)$ da corda sem estrutura nos dando

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{E^2 - p^2} \left[\frac{(E^2 - p^2)^2 t^2}{E^2} + J^2 \right]}. \quad (17)$$

Obtemos então o resultado esperado, confirmando que a expressão da corda sem estrutura recai na solução do Flower-Pot se $\beta = 1$.

Logo tomando as soluções do Flower-Pot para a região externa e fazendo $J \Rightarrow J/\beta$ teremos as soluções para a corda sem estrutura dadas por

$$\phi(t) = \arcsen \left(\sqrt{\frac{(JE)^2}{[t(E^2 - p^2)\beta]^2 + (JE)^2}} \right), \quad (18)$$

$$z(t) = \frac{p}{E} t, \quad (19)$$

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{J^2}{\beta^2(E^2 - p^2)}} \text{Cosssec}(-\phi), \quad (20)$$

$$\phi(r) = \arcsen \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{J^2}{\beta^2(E^2 - p^2)}} \right), \quad (21)$$

$$z(r) = \frac{p}{E^2 - p^2} \sqrt{r^2(E^2 - p^2) - J^2/\beta^2}. \quad (22)$$

Podemos ter algumas diferenças nos sinais destas soluções se tentarmos voltar para as do Flower-Pot. Estas diferenças ocorrem devido a diferença das partes positiva e negativa das métricas escolhidas que estão diferentes.

AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho, por dois anos convivi com Várias pessoas que de alguma forma foram importantes para concretização do mesmo.

Inicialmente agradeço ao apoio da CAPES que foi fundamental durante este período e ao Departamento de física pela oportunidade que me foi dada. Gostaria de agradecer a minha família e em especial aos meus pais José e Eva, que sempre me apoiaram desde a escolha desta carreira até a concretização deste sonho. A Aracy, que foi em grande parte a responsável pelas minhas vitórias e alegrias desde os tempos de graduação.

Agradeço ao meu amigo e orientador, professor Fernando Moraes, a quem devo muito pela orientação deste trabalho e que é um exemplo a ser seguido no sentido profissional e humano.

Agradeço a banca examinadora composta pelos professores: Fernando Moraes (UFPE), Valdir Bezerra (UFPB) e José Américo (UFPE) pela disponibilidade.

Agradeço também aos meus amigos da UFPE e do DF com quem convivi durante todos estes anos e que foram importantes para colheita destes frutos. Aos meus amigos da engenharia: Heronilton, Marcondes e André Olson. Aos amigos de sempre e mais antigos, André Tiba, Marconi Jackson, Ailton Fernandes, Pedro Hugo e Antônio Almeida.

Sem esquecer também de Carlos André, Márcio Heráclito, Luiz Henrique, Jonas, Wilton, Ferraz.

Aos amigos do LFTC: Washington, Francisco, Alexandre Carvalho, Laércio, Pedro Ernesto.

Aos professores: Antônio Azevedo, Chico, Borko, Cid Bartolomeu, Sérgio

Rezende e Antônio Murilo que contribuíram para minha formação sob vários aspectos.

Aos funcionários: Ana, Linet, Paula, seu Humberto e Joaquim. E por fim, agradeço imensamente a Deus pelas oportunidades que tive em toda vida.

Bibliografia

- [1] A. Vilenkin. *Physical Review D*, **23**(852), 1981.
- [2] J. R. Gott. *Astrophysics Journal*, **288**(422), 1985.
- [3] Valdir B. Bezerra. Gravitational analogue of the aharonov-bohn effect in four and three dimensions. *Physical Review D*, **vol.35**(6), 1987.
- [4] Tony Rothman, George F R Ellis, and Jeff Murugan. Holonomy in the schwarzschild-droste geometry. *Classical And Quantum Gravity*, **vol.18**:1217–1233, 2001.
- [5] Subenoy Chakraborty and Md. Farook Rahaman. Motion of test particles around gauge monopoles or near cosmic strings considering semiclassical gravitational effects. *International Journal Of Modern Physics D*, **vol.9**:155–159, 2000.
- [6] Richard H. Selfridge, David V. Arnold, and Karl F. Warnick. Brigham Young University, Department of Electrical and Computer Engineering, Lecture Notes, 2001.
- [7] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. *Institute For Theoretical Physics*, **University Of California**, 1997.

- [8] Bruce Allen and Adrian C. Ottewill. Effects of curvature for quantum fields on cosmic-string space-times. *Physical Review D*, **vol.42**(8), 1990.
- [9] Giovanni Modanese. Wilson loops in four-dimensional quantum gravity. *Physical Review D*, **vol.49**:6534–6542, 1994.
- [10] A. de Padua, Fernando Parisio-Filho, and Fernando Moraes. Geodesics around line defects in elastic solids. *Physics Letters A*, **vol.238**:153–158, 1998.
- [11] J L Martin. *General Relativity*. Prentice Hall, first edition, 1995.
- [12] Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, third edition, 2002.
- [13] Claudio Furtado A. M. de Carvalho and Fernando Moraes. Holonomy in the geometry of a non-rotating black string. *Classical And Quantum Gravity*.
- [14] Laércio Dias. Campos eletromagnéticos na presença da corda quiral. *Universidade Federal de Pernambuco - CCEN - Depto.Física*, Tese de Mestrado, Ago 2001.
- [15] Walter F. Wreszinski. *Mecânica clássica moderna*. 1997.
- [16] Bernard Schutz. *geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, first edition.
- [17] M. O. Katanaev and I. V. Volovich. Scattering on dislocations and cosmic strings in the geometric theory of defects.
- [18] Kip S. Thorne Charles C. Misner and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. 1973.

- [19] Fernando Moraes. Condensed matter physics as a laboratory for gravitation and cosmology. *Brazilian Journal of Physics*, **30**, 2000.
- [20] W. A. Hiscock. *Physical Review D*, **31**(3288), 1985.
- [21] V. I. Borodulin, R. N. Rogalyov, and S. R. Slabospitsky. *Compendium of Relations*, 1995.
- [22] V. B. Bezerra. Some remarks on loop variables, holonomy transformation, and gravitational aharonov-bohm effect. *Annals of Physics*, **203**:392–409, 1990.