



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DINÂMICA DE GRÃOS EM UMA SUPERFÍCIE RUGOSA: MODELOS TEÓRICOS E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

por

Francisco Vieira da Cunha Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador-UFPE)
Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (UFPE)
Prof. Jafferson Kamphorst Leal da Silva (UFMG)

Recife - PE, Brasil
Maio - 2004



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física - CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 3271-8449/3271-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Francisco Vieira da Cunha Junior

DINÂMICA DE GRÃOS EM UMA SUPERFÍCIE RUGOSA: MODELOS TEÓRICOS E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

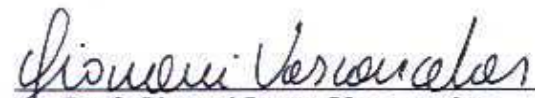
A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovani Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Jafferson Kamphorst Leal da Silva da Universidade Federal de Minas Gerais consideram o candidato:

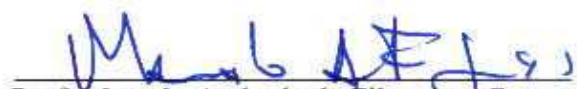
☒ Aprovado com Distinção

☐ Aprovado

☐ Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos vinte e sete dias do mês de maio de 2004.


Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Presidente e Orientador


Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes


Prof. Jafferson Kamphorst Leal da Silva

Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou e esteve junto a mim em todos os momentos, em especial às minhas irmãs Maria e Vanderlúcia e à minha mãe Terezinha pela extrema dedicação que ela tem por mim durante todo tempo.

Ao Professor Giovani L. Vasconcelos um agradecimento muito especial pela dedicação e orientação que dispensou a esse trabalho, dando-me um exemplo de profissionalismo.

É difícil lembrar todas as pessoas que estiveram presentes durante esses anos da graduação e do mestrado, mas no momento gostaria de agradecer aos colegas de curso Marconi e Washington, pelo companherismo e os estudos que tivemos juntos em diversas disciplinas da graduação e do mestrado e a Gustavo pela ajuda na computação no início do curso. À Eric pelo incentivo e as discussões sobre os tópicos da pesquisa, tanto quanto pela descontração que ele proporcionava aos colegas do lftc.

Ao Professor Fernando Moraes, com quem paguei diversas disciplinas e quase foi meu orientador.

Quero também agradecer à secretária da Pós-Graduação Ana Maria pela paciência com todos nós alunos.

Por fim, desejo agradecer à capes pelo apóio financeiro no mestrado e por acreditar em Ciência no Brasil.

Resumo

Nesta dissertação nós estudamos uma classe de modelos para a dinâmica de grãos movendo-se em uma superfície rugosa sob ação da gravidade. Uma abordagem simplificada é dada ao problema, em que os grãos são tratados como partículas puntiformes (não interagentes) e a superfície rugosa possui um perfil periódico simples do tipo escada. Uma partícula é lançada do topo da escada, com uma dada energia inicial, movendo-se subsequenteiramente através de uma sucessão de saltos balísticos e colisões com a superfície. Nas colisões entre a partícula e a superfície, adota-se uma “regra de colisão” caracterizada por dois coeficientes de restituição, e_n e e_t , correspondendo ao fator de amortecimento das componentes normal e tangencial da velocidade ao plano da colisão, respectivamente. O objetivo do trabalho é estudar os possíveis regimes dinâmicos do sistema, em função dos parâmetros do modelo. Dois tipos de modelos são estudados. No primeiro modelo, o movimento da partícula cessa após a partícula eventualmente parar, enquanto no segundo modelo o movimento da partícula é reiniciado de acordo com uma regra específica. No primeiro modelo, a dinâmica é descrita em termos de um mapa tridimensional, que dá a velocidade e a posição da partícula após cada colisão. Nesse caso, o modelo é suficientemente simples para permitir uma análise teórica, através da qual se pode provar a existência de três regiões distintas no espaço de parâmetros: (i) uma região em que a velocidade da partícula permanece limitada (e nossas simulações mostram que a partícula sempre pára); (ii) uma região intermediária, onde pode coexistir órbitas que páram, órbitas periódicas e movimento acelerado e (iii) uma região na qual nenhuma órbita que pára existe (e nossas simulações mostram que a partícula sempre acelera). A segunda versão do modelo explora a região de movimento limitado, onde a partícula eventualmente pára, mas agora nós permitimos que o movimento da partícula seja reiniciado. Neste caso, nós precisamos especificar como o movimento da partícula é reiniciado após a parada. Nós escolhemos por simplicidade que, após parar, a partícula desliza sem atrito até a borda do degrau em que parou, de onde parte para um novo salto, e assim por diante. Neste modelo, a dinâmica é reduzida a um mapa unidimensional contínuo por partes, para o qual é possível encontrar analiticamente pontos fixos e órbitas periódicas. Nós estudamos as condições de existência e estabilidade desses pontos fixos e órbitas periódicas. Os principais resultados para este modelo estão sumarizados num diagrama de fase que ilustra os possíveis regimes dinâmicos no espaço de parâmetros.

Abstract

In this dissertation we study a class of models for the gravity-driven motion of a particle on an inclined rough surface. A simplified approach is given to problem, in which the grains are treated as (non-interacting) point particles and the rough surface has a periodic, staircase-like profile. A particle is launched on the top of the rough surface, with a given initial velocity, and then moves subsequently through a sequence of ballistic flights and inelastic collisions with the surface. In the collisions between the particle and the surface we assume a “collision rule” characterized by two coefficients of restitution e_n and e_t , corresponding to the damping factor of the velocity components tangential and normal to the collision plane, respectively. The main goal of the present work is to study the possible dynamical regimes of the system as a function of the parameters of the model. Two types of models are studied. In the first model, the motion ends after the particle eventually comes to a stop, whereas in the second model the particle is allowed to resume its motion according to a specified rule. In the first model, the dynamics is described in terms of a three-dimensional map, which gives the velocity and position of the particle after each collision. In this case, the model is sufficiently simple to allow a rather complete theoretical analysis and it can be proven that there exists three different regions on parameter space: (i) a region where the particle velocity remains bounded (and simulations show that the particle in fact always comes to a halt); (ii) an intermediate region in which there exists coexistence of halting orbits, periodic orbits and unbounded (accelerated) orbits; and (iii) a region in which there is no halting orbit (and simulations show that the particle always accelerates). The second version of model explores the region of bounded motion, where the particle will eventually come to a stop but now we allow the particle motion to resume. In this case, we need to specify how the movement of the particle is re-started after it has come to a halt. We choose for simplicity that, after stopping, the particle slides without friction until the edge of the current step, from where it takes off again, and so on. In this model, the dynamics is reduced to a piecewise-continuous one-dimensional map, for which it is possible to find analytically fixed points and periodic orbits. We study the conditions of existence and stability of these fixed points and periodic orbits. The main results for this model are summarized in a phase diagram which illustrates the possible dynamical regimes in parameter space.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Sistemas Granulares: Breve Revisão Histórica	1
1.2	Resultados Experimentais do Movimento de uma Partícula sobre uma Superfície Rugosa Inclinada	3
1.3	O Modelo de Microfacetas	4
1.4	O Modelo Escada	7
2	O MODELO ESCADA GENERALIZADO	10
2.1	Descrição do Modelo e Equações do Movimento	10
2.2	Pontos fixos	13
2.3	Órbitas aceleradas vs. desaceleradas	19
2.3.1	Órbitas não aceleradas	19
2.3.2	Órbitas desaceleradas	20
2.4	Órbitas Periódicas	24
2.4.1	Órbitas do tipo 0^k1	24
2.4.2	Órbitas do tipo $m(m+1)$	26
2.5	Diagramas de Fase	28
3	O MODELO HÍBRIDO	30
3.1	Mapa Unidimensional	30
3.2	A função $f_N(\mathcal{E})$	32
3.2.1	Pontos Fixos $f_N(\mathcal{E}_N^*)$	34
3.3	A função $f_{2k}(\mathcal{E})$	36
3.3.1	Pontos Fixos $f_{2k}(\mathcal{E}_{2k}^*) = \mathcal{E}_{2k}^*$	38
3.4	Diagramas de Fase	41
3.5	Diagramas de Bifurcação	43
3.6	Velocidade Média	47
3.7	A Escada com Ruído	49
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	52

Lista de Figuras

1.1	Aparato experimental. São usadas aproximadamente 400 esferas de aço.	3
1.2	O movimento de uma esfera sobre a superfície inclinada. Nesse caso a distância entre duas esferas é escolhida de maneira aleatória entre $2r$ (esferas tangentes) e $2r(1 + \mathcal{E})$	4
1.3	Comparação do diagrama de fase para o experimento (linhas finas) e a simulação numérica (linhas grossas). Fase <i>A</i> : regime desacelerado; fase <i>B</i> : regime estacionário; fase <i>C</i> : regime acelerado.	5
1.4	Modelo para uma partícula movendo-se sob a ação de gravidade sobre uma superfície inclinada consistindo de microfacetas.	6
1.5	Diagrama de fase para o modelo da Fig. (1.4), mostrando os diferentes regimes dinâmicos no espaço de parâmetros (β, e_t) . Para o caso $\alpha = 0.4 \simeq 23^0$ e $e_n = 0$	6
1.6	Modelo para uma partícula movendo-se sob a ação da gravidade sobre uma superfície rugosa inclinada com perfil do tipo escada, com $e_n = 0$	7
1.7	Diagrama de fase para o modelo escada com $e_n = 0$. Na região de movimento não acelerado diversos regimes são observados.	8
2.1	Modelo para um grão movendo-se numa superfície inclinada rugosa sob ação da gravidade com a condição $e_t, e_n > 0$	11
2.2	O número de salto n , as velocidades u, v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa < \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.35$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$	16
2.3	O número de salto n , as velocidades u, v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa = \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.52$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$	17
2.4	O número de salto n , as velocidades u, v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa > \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.53$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$	18
2.5	Uma órbita desacelerada. Após percorrer a distância de parada d , a partícula se encontrará em repouso a uma distância $(z - d)$ da borda do degrau.	20
2.6	As superfícies κ_∞ e κ_s no plano $e_t = 0.125$	23

2.7	Dinâmica das órbitas periódicas $m(m+1)$. A figura ilustra o caso $m=1$	26
2.8	Diagramas de fase para o Mapa (2.16)-(2.18): (a) no plano $e_t = 0.2$ e (b) no plano $e_n = 0.2$. As curvas sólidas inferior e superior representam κ_∞ e κ_s , respectivamente; as três linhas tracejadas são κ_{01} , κ_{001} e κ_{0001} (de baixo para cima); a linha ponto-tracejada corresponde a κ_{12}	29
3.1	Dinâmica entre duas paradas consecutivas para o caso $N=1$	31
3.2	O mapa energia unidimensional para $e_t = 0.45$, $e_n = 0.2$ e $\kappa = 0.1$	32
3.3	Intervalo de energia para $f_N(\mathcal{E})$. A figura ilustra o caso $N=2$	33
3.4	Domínios de existência dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$. A linha contínua superior corresponde a κ_s , as linhas contínuas correspondem a κ_N para $N=2,3,4$, da direita para a esquerda, a linha tracejada corresponde a κ_∞ e a linha inferior corresponde a κ_{inst}	35
3.5	Dinâmica entre duas paradas consecutivas para o caso $N=2$	36
3.6	Dinâmica do ponto fixo $\mathcal{E}_{2k}^*$. A figura ilustra o caso $k=3$	39
3.7	Diagrama de fase para os pontos fixos. O domínio de existência dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$	42
3.8	Diagrama de fase dos pontos fixos. O domínio de existência dos pontos fixos no plano $e_n = 0.2$	42
3.9	Diagrama de fase dos pontos fixos mostrando as regiões de estabilidade dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$	43
3.10	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.3$ e $e_t = 0.125$	44
3.11	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.4$ e $e_t = 0.125$	44
3.12	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.5$ e $e_t = 0.125$	45
3.13	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.6$ e $e_t = 0.125$	45
3.14	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.7$ e $e_t = 0.125$	46
3.15	Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.8$ e $e_t = 0.125$	46
3.16	Comparação da velocidade média no experimento [43], símbolos ($\triangle$) e ($\diamond$), e no modelo, Eq. (3.56), linhas sólidas. Comparamos a curva teórica Eq. (3.56) com os dados experimentais que representam a velocidade média no ponto fixo $N=1$. Os valores dos parâmetros foram ($\tau = 11.43$, $e_n = 0.1$, $e_t = 0.7$), ($\tau = 6.94$, $e_n = 0.2$, $e_t = 0.2$).	49

3.17	Velocidade média $\bar{V}$ versus a amplitude do ruído δ para $\kappa = 0.1$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$	51
4.1	Um bilhar espacialmente estendido. O sistema consiste de uma partícula puntiforme movendo-se sob ação da gravidade e colidindo elástica- mente sobre uma superfície rugosa formada por arcos de círculos. . .	53
4.2	Dependência do coeficiente de difusão D com a energia E	54

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Sistemas Granulares: Breve Revisão Histórica

Materiais granulares vêm despertando um crescente interesse há alguns anos devido tanto a sua larga utilização em processos industriais quanto pelo fato de que alguns fenômenos observados na natureza, de interesse para a Geofísica, serem determinados pelo comportamento coletivo das partículas envolvidas. Entretanto, o interesse pelas propriedades de materiais granulares data de alguns séculos atrás [1]. Nos Sécs. XVIII e XIX alguns sistemas envolvendo materiais granulares foram investigados [2, 3] e alguns estudos teóricos sobre fricção foram realizados [4, 5]. Mas apenas mais recentemente, após R. Bagnold ter lançado um livro com suas observações sobre formação de dunas no deserto do Saara [6], que o assunto tornou-se um campo de estudo dentro da Física. A partir de então, as propriedades estáticas e dinâmicas de pilhas granulares têm sido exaustivamente investigadas [7, 8]. Porém, o estudo de um sistema como material granular não é simples, porque ele não se comporta como sólido usual quando em repouso e submetido à aplicação de força, nem como um líquido ou gás usuais quando em movimento [10, 11, 12]. Desse comportamento atípico surge uma rica dinâmica que torna o material granular interessante para estudo do ponto de vista científico. Sem dúvida, esse comportamento exige novas perspectivas de abordagem para o estudo desses sistemas no intuito de compreender o comportamento dos mesmos.

Vários são os exemplos de comportamento complexo apresentado por sistemas granulares, por exemplo, a distribuição de forças em um meio granular. A aleatoriedade de contatos e de forças de fricção entre os componentes do material produz uma distribuição de forças que não está de acordo com o que esperaríamos observar em outros materiais, tal como um sólido ou líquido usuais [1, 10, 11]. Esse comportamento reflete-se no problema do silo, comumente utilizado na indústria agropecuária para armazenamento de grãos, ou em uma pilha de grãos depositada sobre um piso. Em [3] observou-se que a pressão na base do container não aumenta

indefinidamente com a altura da coluna de material granular, mas que alcança um valor máximo independente da altura. Com base nessa observação experimental é de se esperar que as paredes do container suporte um peso extra [13, 14]. Enquanto que, para uma pilha de grãos, por exemplo areia, depositada sobre um piso, a distribuição de pressão normal sobre o piso não é fácil de se prever. Em alguns casos, a pressão não é máxima no centro da pilha. Não surpreende, portanto, que vários estudos experimentais e teóricos tenham sido feitos a fim de melhor compreender essas propriedades e explorar outras possibilidades, tais como transmissão de som em meio granular e empacotamento [8, 10, 11].

As propriedades dinâmicas de uma pilha granular também revelam interessantes e complexos fenômenos. A formação de dunas é um exemplo. Desde o trabalho de Bagnold [6], no qual ele apresenta o modelo simplificado de um único grão saltante, diversos outros modelos mais complexos [1, 8, 15] e estudos experimentais [16, 17] foram realizados. Outro fenômeno interessante é o da convecção, que se dá quando se colocam alguns grãos de densidade ou tamanho diferentes em uma pilha de material granular contida em um recipiente e este é vibrado verticalmente com uma frequência determinada [10, 11]. Por fim, vale a pena mencionar o comportamento de uma pilha granular quando sujeita à ação da gravidade em um canal rugoso. Observações experimentais da fragmentação de uma pilha granular caindo sob a ação da gravidade em um canal rugoso bidimensional [16] mostraram que a pilha quebra em uma série de blocos separados por arcos. Esses arcos formariam estruturas, ou cadeias de contatos, instáveis que suportariam o peso da massa granular acima deles [17]. Essas mesmas estruturas são observadas em experimentos com canal rugoso tridimensional. Discutimos acima apenas alguns dos exemplos dos vários sistemas granulares que foram extensivamente estudados. Uma revisão mais completa, incluindo outros sistemas, pode ser visto na referência [1].

Nesta dissertação nós estamos interessados em outra característica dos materiais granulares, o escoamento de partículas, tal como avalanches. Para este caso também diversos regimes dinâmicos surgem, tal como fluxo intermitente (ou avalanches), fluxo estacionário (velocidade média constante) e fluxo acelerado, devido à relação entre a força da gravidade sobre os grãos e a dissipação na colisão inelástica entre eles [18, 19]. Avalanches em uma pilha de grãos também tem sido explorada para ilustrar o conceito de criticalidade auto-organizada (SOC) [20, 21] e que, devido a sua relevância para outros fenômenos naturais, vem sendo largamente estudado [22, 23, 24, 25]. Mesmo assim, uma compreensão mais completa dessa dinâmica de grãos permanece um desafio [26]. Desse modo diversos estudos teóricos e experimentais foram realizados para melhor compreender a dinâmica de grãos quando em estado de escoamento [1, 18, 19, 23, 27, 29].

Aqui estudaremos dois modelos simplificados para o movimento de um único grão movendo-se sob a ação da gravidade sobre uma superfície rugosa. Modelos simples para a dinâmica de grãos são bastante estudados ambos experimentalmente

[28, 30, 31] e teoricamente [30, 32, 33, 34, 35, 36, 37] porque podem nos fornecer alguma 'visão' da dinâmica real de escoamentos granulares [38, 39, 40]. Em nossos modelos, a serem discutidos adiante, os grãos são tratados como partículas puntiformes (não interagentes) e a superfície rugosa possui um perfil periódico simples. No Capítulo 2 e 3 estudaremos o movimento de um grão sobre uma superfície rugosa inclinada com perfil do tipo escada. Como veremos, em ambos os casos, a dinâmica será descrita por mapas. No primeiro modelo, estudado no capítulo 2, o mapa é tridimensional. Enquanto que, no segundo modelo estudado no capítulo 3, o qual servirá para investigar um regime dinâmico particular, apresentado pelo primeiro modelo, a dinâmica é descrita em termos de um mapa unidimensional. Como veremos, em ambos os casos, um estudo analítico e numérico completo é possível, fornecendo uma grande quantidade de resultados exatos.

Antes, porém, de passar a discutir os problemas centrais desta dissertação é conveniente fazer uma breve revisão de alguns resultados experimentais e trabalhos teóricos anteriores pertinentes.

1.2 Resultados Experimentais do Movimento de uma Partícula sobre uma Superfície Rugosa Inclinada

Vários experimentos [41, 42, 43, 44] foram realizados para uma partícula caindo sob a ação da gravidade sobre uma superfície inclinada de rugosidade controlada. Particularmente em [43], foi investigado o movimento de uma única esfera de aço de raio R sobre uma superfície rugosa construída colando-se esferas de raio r sobre uma calha em forma de V , conforme ilustrado na Fig. (1.1). A rugosidade da superfície é portanto controlada pela razão R/r .

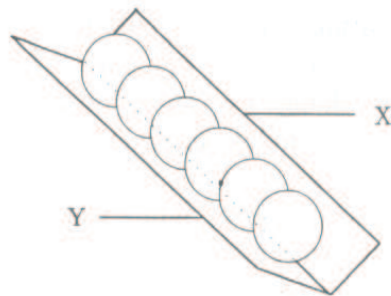


Figura 1.1: Aparato experimental. São usadas aproximadamente 400 esferas de aço.

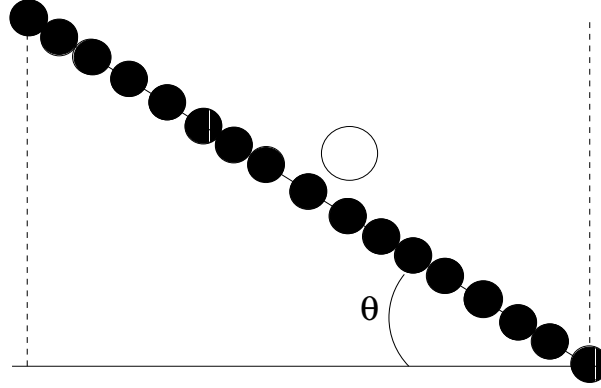


Figura 1.2: O movimento de uma esfera sobre a superfície inclinada. Nesse caso a distância entre duas esferas é escolhida de maneira aleatória entre $2r$ (esferas tangentes) e $2r(1 + \mathcal{E})$.

Uma esfera de raio R é lançada sobre a superfície com uma certa velocidade inicial e o movimento no trecho final da calha é analisado. Quando o ângulo de inclinação θ da calha, veja Fig. (1.2), varia o experimento produz o diagrama de fase mostrado na Fig. (1.3) abaixo.

Esse diagrama de fase indica três regimes de movimento da esfera, identificados na figura por A , B , e C . No regime A a esfera experimenta um movimento desacelerado chegando mesmo a parar. Quando θ aumenta a esfera alcança um regime estacionário (regime B) em que a esfera rola (sem saltar) e atinge uma velocidade média constante e independente da velocidade inicial (desde que esta seja suficientemente grande para iniciar o movimento e não ficar presa em um dos vales formado por duas esferas consecutivas). Aumentando ainda mais θ , a partícula alcança um regime de salto (regime C). Nesse caso, para valores de θ não muito grandes é possível determinar uma velocidade média, mas para θ maiores a velocidade média cresce.

Dada a complexidade da dinâmica, modelos teóricos são de grande importância para que se possa investigar a transição entre esses regimes e, também, os próprios regimes separadamente. Nas duas próximas seções desta introdução nós discutiremos brevemente dois modelos simplificados que fornecem resultados qualitativos em boa concordância com o experimento acima. Versões mais completas desses modelos formam o tema central desta dissertação e serão discutidos no próximo capítulo.

1.3 O Modelo de Microfacetas

Um modelo teórico simples para compreender o regime de salto foi proposto

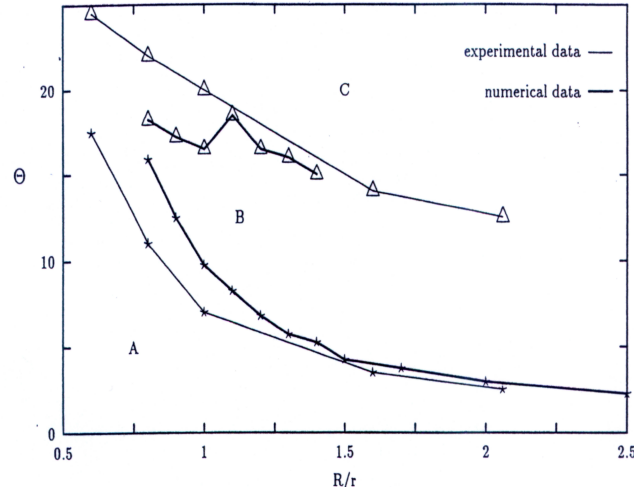


Figura 1.3: Comparação do diagrama de fase para o experimento (linhas finas) e a simulação numérica (linhas grossas). Fase A: regime desacelerado; fase B: regime estacionário; fase C: regime acelerado.

por Valance and Bideau [37]. O modelo consiste no movimento de uma partícula puntiforme colidindo sobre uma linha rugosa inclinada de um ângulo α em relação à horizontal. A rugosidade da superfície (linha) é representada por microfacetas de comprimento desprezível, inclinadas de um ângulo β_i em relação à horizontal, conforme mostrado na Fig. (1.4). A regra de colisão entre a partícula e a superfície é definida da seguinte forma: Supondo $V = (u, v)$ a velocidade da partícula imediatamente antes da colisão, onde u é a componente paralela e v a componente perpendicular à superfície da microfaceta, a velocidade $V' = (u', v')$ imediatamente após a colisão é dada pela regra de colisão:

$$u' = e_t u, \quad (1.1)$$

$$v' = -e_n v, \quad (1.2)$$

onde e_t e e_n , com $0 < e_t, e_n < 1$, são os coeficientes de restituição tangencial e normal à superfície da microfaceta, respectivamente, correspondendo ao fator de amortecimento das velocidades tangencial e normal à superfície da microfaceta.

Na Ref. [37] é mostrado que, quando as inclinações das microfacetas são uniformes ao longo da linha, o espaço de parâmetros do modelo, (e_t, β) para $e_n = 0$, apresenta dois regimes distintos: Um regime de movimento desacelerado, separado, por uma curva $e_t = [\sin(2\beta) \tan \alpha + \cos(2\beta)]^{-1}$, de um regime de movimento acelerado, veja Fig. (1.5).

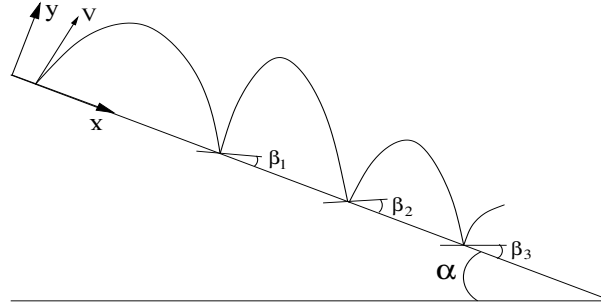


Figura 1.4: Modelo para uma partícula movendo-se sob a ação de gravidade sobre uma superfície inclinada consistindo de microfacetas.

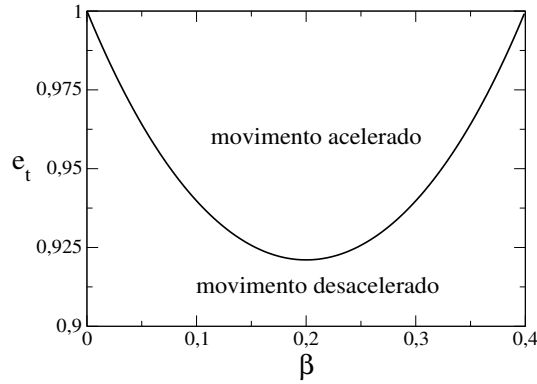


Figura 1.5: Diagrama de fase para o modelo da Fig. (1.4), mostrando os diferentes regimes dinâmicos no espaço de parâmetros (β, e_t) . Para o caso $\alpha = 0.4 \simeq 23^\circ$ e $e_n = 0$.

Os autores de [37] também analisaram o caso de uma distribuição periódica das inclinações das microfacetas e do efeito de ruído nas inclinações. Quando as inclinações das microfacetas são distribuídas periodicamente observa-se que na região de movimento desacelerado um regime caótico surge através de dobramento de período. O efeito de ruído sobre os regimes periódicos e caóticos também foi analisado. Observou-se, no caso periódico, que, quando a intensidade do ruído é fraca, as principais características do movimento permanecem qualitativamente e quantitativamente inalteradas. Naturalmente, quando se aumenta a intensidade do ruído nenhum movimento periódico é observado. Quanto ao efeito do ruído sobre o regime caótico, observou-se que, se a intensidade do ruído é fraca, as propriedades peculiares do regime caótico, tal como auto-similaridade, são preservadas e a dimensão fractal do atrator estranho é igual ao caso sem ruído. Quando a intensidade aumenta, o

atrator ainda possui propriedades de auto-similaridade, mas sua dimensão fractal aumenta.

1.4 O Modelo Escada

Em [39] um modelo foi apresentado para o movimento de uma partícula sobre uma superfície rugosa inclinada com um perfil do tipo escada, cujos degraus tem altura a e comprimento b , Fig. (1.6). Como no modelo anterior, a partícula foi considerada puntiforme. Por conveniência, escolheu-se um sistema de coordenadas onde o eixo x está alinhado com os degraus e o vetor aceleração da gravidade $\mathbf{g}$ faz um ângulo ϕ com o eixo y , de modo que, quando $\phi = 0$ os degraus são horizontais. A rugosidade é controlada pelo parâmetro $\tau = \tan \alpha = b/a$. A partícula é lançada do topo da escada com velocidade inicial u_0 paralela à superfície do degrau, desliza sem atrito até o fim do degrau e cai sujeita às leis do movimento balístico até colidir com um degrau localizado n passos abaixo. O número inteiro n é chamado *número de salto* e corresponde, portanto, ao número de degraus que a partícula salta entre duas colisões consecutivas. A regra de colisão é a mesma do modelo anterior [37], exceto que no modelo da Ref. [39] tomou-se $e_n = 0$, de modo que a partícula não repica após a colisão. Imediatamente após a colisão, a velocidade é $e_t u$, vide (1.2), após o que a partícula desliza (sem atrito) até atingir o final do degrau e parte para novo salto com velocidade V' .

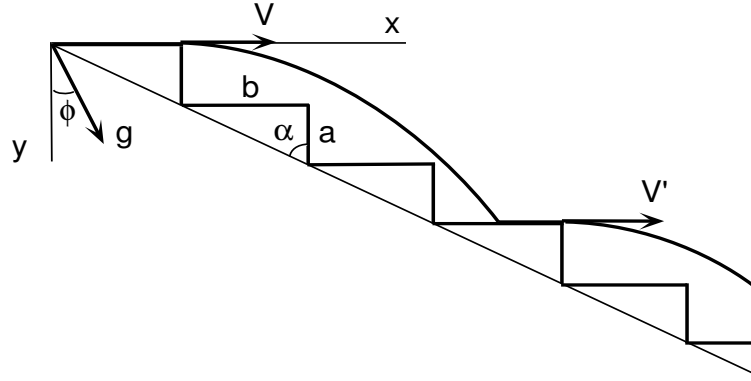


Figura 1.6: Modelo para uma partícula movendo-se sob a ação da gravidade sobre uma superfície rugosa inclinada com perfil do tipo escada, com $e_n = 0$.

A escolha $e_n = 0$ simplifica, pois, sobremaneira o modelo, fazendo com que sua dinâmica seja descrita por um mapa unidimensional do tipo $V' = f(V)$, onde V é a velocidade no início de cada salto. A simplicidade do mapa permite um estudo

analítico completo do mesmo. Na figura (1.7) é mostrado o diagrama de fase do modelo, onde o parâmetro κ é definido como t/τ , sendo $\tau = \tan \alpha$ e $t = \tan \phi$.

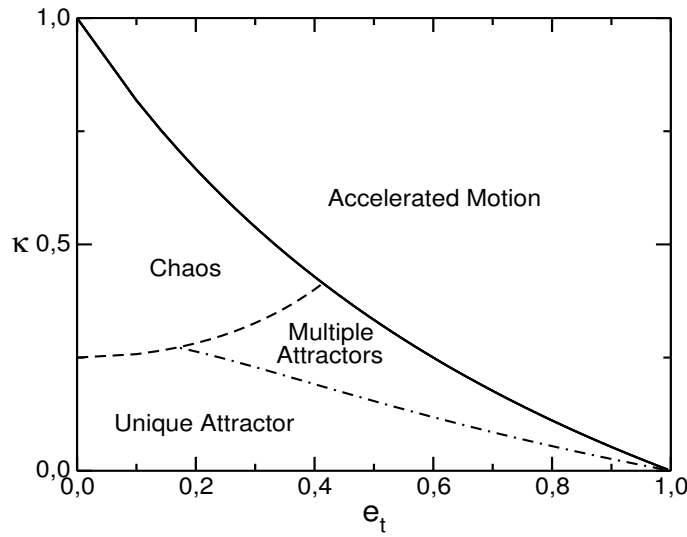


Figura 1.7: Diagrama de fase para o modelo escada com $e_n = 0$. Na região de movimento não acelerado diversos regimes são observados.

Neste diagrama observa-se quatro regimes dinâmicos para a partícula: (i) para pequenas inclinações, uma região de um único atrator, correspondendo a pontos fixos de número de salto $n = 1$; (ii) uma região de múltiplos atratores, correspondendo a pontos fixos de números de salto $n \geq 1$; (iii) uma região de comportamento caótico para inclinações intermediárias; e, finalmente, (iv) uma região de movimento acelerado separado por uma curva $\kappa = (1 - e_t)/(1 + e_t)$. No próximo capítulo estudaremos uma extensão do modelo acima [39]. No modelo a ser considerado a seguir, tomaremos $e_n \neq 0$, ou seja, após a colisão com a superfície do degrau a partícula possui componente de velocidade perpendicular ao degrau. Como veremos, a dinâmica será agora descrita em termos de um mapa tridimensional do tipo $F : (u, v, z) \rightarrow (u', v', z')$, onde u' e v' são as velocidades imediatamente após a colisão e z' é a coordenada que dá a posição da partícula sobre o degrau. Apesar dessa complicação, muitos resultados analíticos podem ainda ser obtidos nesse caso,

permitindo uma classificação quase que completa dos possíveis regimes dinâmicos do sistema, como discutido no próximo capítulo.

Capítulo 2

O MODELO ESCADA GENERALIZADO

2.1 Descrição do Modelo e Equações do Movimento

O nosso modelo está representado na Fig. 2.1. Nós consideramos a superfície rugosa em forma de escada, cujos degraus tem altura a e comprimento b . Como no modelo da Sec. 1.4 o eixo x está alinhado com o plano do degrau e o vetor aceleração da gravidade $\mathbf{g}$ faz um ângulo ϕ com o eixo y . A partícula, sendo lançada do topo da “escada”, é submetida a um voo balístico, até colidir com a escada em algum degrau abaixo.

Suponha que $V = (u, v)$ sejam as componentes paralela e perpendicular da velocidade da partícula no início do voo e que o ponto de lançamento é a origem, veja Fig. (2.1). Usando as equações do movimento balístico nós podemos facilmente encontrar a velocidade (u_a, v_a) imediatamente antes da colisão e as coordenadas do ponto de colisão (x_c, y_c) , que são dadas por:

$$u_a = gsT + u, \quad (2.1)$$

$$v_a = -gcT + v, \quad (2.2)$$

$$x_c = \frac{1}{2}gsT^2 + uT, \quad (2.3)$$

$$y_c = -\frac{1}{2}gcT^2 + vT = -na, \quad (2.4)$$

onde T é o tempo de voo, $c \equiv \cos \phi$, $s \equiv \sin \phi$ e n é o número de degraus saltados durante o voo. Aqui, como no modelo descrito na Sec. 1.4 [39], nós nos referimos a n como o *número de salto*. Na colisão entre a partícula e a superfície do degrau

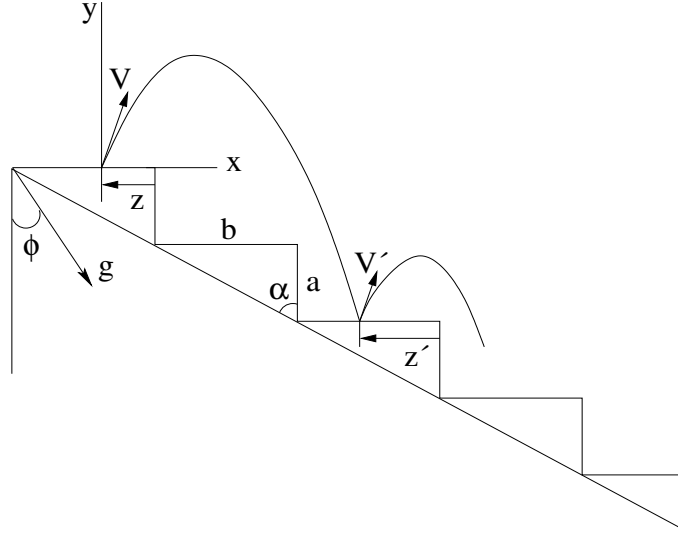


Figura 2.1: Modelo para um grão movendo-se numa superfície inclinada rugosa sob ação da gravidade com a condição $e_t, e_n > 0$

nós adotamos a mesma regra de colisão adotada no modelo escada anterior [39], caracterizada por dois coeficientes de restituição normal e tangencial à superfície do degrau, definidas em (1.1)-(1.2). Portanto, a velocidade imediatamente após a colisão será

$$u' = e_t u_a, \quad (2.5)$$

$$v' = -e_n v_a. \quad (2.6)$$

onde $0 \leq e_t, e_n < 1$. Ao contrário do modelo estudado em [39], em que $e_n = 0$, no presente caso temos $e_n \neq 0$. Para simplificar o modelo nós introduziremos uma nova variável, definida como a distância do ponto de colisão ao fim do degrau. Se a partícula iniciou um vôo a uma distância z do fim do degrau, então a nova distância z' , medida do ponto onde se dá a colisão até o fim do respectivo degrau, n degraus abaixo, é dada por

$$z' = z + nb - x_c. \quad (2.7)$$

Todas as equações acima podem ser escritas de forma reescaladas introduzindo-se variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad Z = \frac{z}{b}, \quad U = \frac{c}{s} \frac{u}{\sqrt{2gca}}, \quad V = \frac{v}{\sqrt{2gca}}, \quad T = \sqrt{\frac{gc}{2a}} t. \quad (2.8)$$

Nessas novas variáveis, as equações dadas em (2.1)-(2.4) tornam-se

$$u_a = u + t, \quad (2.9)$$

$$v_a = v - t, \quad (2.10)$$

$$x_c = 2\kappa ut + \kappa t^2, \quad (2.11)$$

$$y_c = 2vt - t^2 = -n, \quad (2.12)$$

onde κ é um parâmetro que está relacionado à inclinação da escada e ao parâmetro de rugosidade da seguinte forma

$$\kappa = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} = \frac{s a}{c b}. \quad (2.13)$$

A equação para z' torna-se

$$z' = z + n - x_c, \quad (2.14)$$

com x_c dado por (2.11). O tempo total de vôo é encontrado resolvendo a Eq. (2.12) para t :

$$t = v + \sqrt{v^2 + n}. \quad (2.15)$$

Agora, inserindo a equação acima nas eqs. (2.9)-(2.11), e usando a regra de colisão e a equação (2.14), obtemos que a velocidade imediatamente após a colisão e a correspondente coordenada z' do ponto de colisão serão dadas por

$$u' = e_t(u + v + \sqrt{v^2 + n}), \quad (2.16)$$

$$v' = e_n \sqrt{v^2 + n}, \quad (2.17)$$

$$z' = z + n(1 - \kappa) - 2\kappa(u + v)(v + \sqrt{v^2 + n}). \quad (2.18)$$

A última equação para a variável z' pode ainda ser escrita convenientemente como

$$z' = z + n - \kappa \left(\frac{u'^2}{e_t^2} - u^2 \right). \quad (2.19)$$

As três equações (2.16)-(2.18) definem um mapa tridimensional que descreverá a dinâmica do modelo. Observe que o mapa fornece as velocidades e a coordenada do ponto de colisão, imediatamente após a colisão, como função das velocidades e coordenada do ponto de colisão anteriores. Para que as variáveis u' , v' e z' sejam completamente determinadas é preciso determinar o número de salto n . Se a partícula colide com um degrau localizado n passos abaixo do qual saltou então, necessariamente, $z' \geq 0$ e essa condição determinará o número de salto n . Portanto, o número de salto n aparecendo em (2.18) é determinado resolvendo-se a equação

$z' \geq 0$. Primeiro consideremos o caso particular em que a partícula aterrissa sobre o mesmo degrau em que iniciou o vôo. Neste caso $n = 0$. Resolvendo $z'(n = 0) \geq 0$ dá a condição:

$$z \geq 4\kappa v(u + v). \quad (2.20)$$

Para $n > 0$ notamos que a equação para z' pode ser escrita como uma expressão quadrática em $\sqrt{v^2 + n}$

$$z' = (1 - \kappa)(v^2 + n) - 2\kappa(u + v)\sqrt{v^2 + n} + z - v^2(1 + \kappa) - 2\kappa uv, \quad (2.21)$$

de modo que a solução da equação $z(n) \geq 0$ para n positivo é dada por

$$\sqrt{v^2 + n} \geq \frac{\kappa(u + v) + \sqrt{(\kappa u + v)^2 - (1 - \kappa)z}}{1 - \kappa}. \quad (2.22)$$

Notamos também que o segundo termo de (2.22) é maior que $\sqrt{v^2 + n - 1}$. Note que se a partícula colidiu com um degrau localizado n passos abaixo, então ela, obviamente, não colidiu com o degrau $n - 1$, isto é, temos que $z(n - 1) < 0$, que em vista de (2.22) torna-se

$$\sqrt{v^2 + n - 1} < \frac{\kappa(u + v) + \sqrt{(\kappa u + v)^2 - (1 - \kappa)z}}{1 - \kappa}. \quad (2.23)$$

Combinando (2.22) com (2.23) temos então que n é determinado pela condição

$$\sqrt{v^2 + n} \geq \frac{\kappa(u + v) + \sqrt{(\kappa u + v)^2 - (1 - \kappa)z}}{1 - \kappa} > \sqrt{v^2 + n - 1}. \quad (2.24)$$

Resolvendo esta equação (2.22) para n , temos

$$n = \left\lceil \frac{2\kappa(u + v)}{(1 - \kappa)^2} \left[\kappa u + v + \sqrt{(\kappa u + v)^2 - (1 - \kappa)z} \right] - \frac{z}{1 - \kappa} \right\rceil, \quad (2.25)$$

onde $\lceil x \rceil$ denota a função ceiling, definida como o menor inteiro maior que x .

2.2 Pontos fixos

Considere o mapa N dimensional

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{F}(\vec{x}_i), \quad (2.26)$$

$\vec{x}^*$ é ponto fixo [46, 45] de (2.26) se

$$\vec{x}^* = \vec{F}(\vec{x}^*). \quad (2.27)$$

Vamos admitir que exista um ponto fixo em que a partícula salta m degraus a cada colisão. Desse modo, fazendo $n = m$, $u' = u = u_m^*$ e $v' = v = v_m^*$ em (2.16) e (2.17), respectivamente, e resolvendo para o ponto fixo das componentes de velocidades u_m^* e v_m^* , nós chegamos ao resultado

$$u_m^* = \frac{e_t}{1 - e_t} \sqrt{\frac{m(1 - e_n)}{1 - e_n}}, \quad (2.28)$$

$$v_m^* = e_n \sqrt{\frac{m}{1 - e_n^2}}. \quad (2.29)$$

Agora consideremos a equação para z' em (2.18). Fazendo $n = m$ e $u' = u = u_m^*$ em (2.18) e após algumas simplificações obtemos

$$z' = z + m \left(1 - \kappa \frac{(1 + e_n)(1 + e_t)}{(1 - e_t)(1 - e_n)} \right). \quad (2.30)$$

Desta equação vemos que os pontos fixos $z' = z$ podem existir somente se os parâmetros κ , e_t e e_n satisfizerem a relação

$$\kappa \equiv \kappa_\infty = \frac{(1 - e_t)(1 - e_n)}{(1 + e_t)(1 + e_n)}. \quad (2.31)$$

Por outro lado temos que $0 \leq z < b$, ou, de maneira adimensional, $z \in [0, 1)$. Portanto os pontos fixos existirão, se, e somente se, $z \in [0, 1)$, de modo que a condição (2.24) é satisfeita para $\kappa = \kappa_\infty$, $u = u_m^*$, $v = v_m^*$ e $n = m$. Se substituirmos esses valores na condição (2.24), após algumas simplificações obtemos

$$\sqrt{\frac{m}{1 - e_n^2}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m(1 - e_n)}{1 + e_n}} + \frac{1}{2} \sqrt{m \frac{1 + e_n}{1 - e_n} - 2 \frac{(1 + e_t)(1 + e_n)}{e_t + e_n} z} > \sqrt{\frac{m - 1 + e_n^2}{1 - e_n^2}},$$

que com mais uma simplificação fica

$$2\sqrt{m} \geq (1 - e_n)\sqrt{m} + (1 + e_n) \sqrt{m - 2 \frac{(1 + e_t)(1 - e_n)}{e_t + e_n} z} > 2\sqrt{m - 1 + e_n^2}. \quad (2.32)$$

Assim nós podemos determinar intervalos de existência para cada ponto fixo de número de salto m . Da primeira desigualdade nós temos

$$0 \geq -2 \frac{(1+e_t)(1-e_n)}{e_t+e_n} z,$$

o que implica $z \geq 0$, desde que $0 \leq e_t, e_n < 1$. Enquanto a segunda desigualdade dá

$$z < z_m = \frac{2(e_t+e_n)}{(1+e_t)(1+e_n)^2} \left[1 + e_n - m + \sqrt{m(m-1+e_n^2)} \right]. \quad (2.33)$$

Note que $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = (1/2)(1 - \kappa_\infty)$. Assim, para cada $m > 0$ existe um intervalo $I_m \equiv [0, z_m)$, em que a condição (2.24) é satisfeita, e portanto os pontos fixos existem de fato.

A relação (2.31) define uma superfície no espaço de parâmetros (κ, e_t, e_n) do modelo. Os pontos fixos do mapa tridimensional só podem existir, portanto, exatamente sobre essa superfície. Vamos agora investigar a estabilidade desses pontos fixos. A estabilidade é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana do mapa no ponto fixo [45, 46]. Essa matriz é definida como

$$\frac{\partial(u', v', z')}{\partial(u, v, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} & \frac{\partial u'}{\partial z} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} & \frac{\partial v'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial v} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Calculando as derivadas acima, temos

$$\frac{\partial(u', v', z')}{\partial(u, v, z)} = \begin{pmatrix} e_t & \frac{e_n(u'-e_t u)}{v'} & 0 \\ 0 & \frac{e_n^2 v}{v'} & 0 \\ -2\kappa \left(\frac{u'}{e_t} - u \right) & -\frac{2\kappa u'(u'-e_t u)}{e_t^2 v'} & 1 \end{pmatrix},$$

substituindo as expressões dos pontos fixos (2.28)-(2.29), e fazendo $\kappa = \kappa_\infty$ e $n = m$, obtemos

$$\left. \frac{\partial(u', v', z')}{\partial(u, v, z)} \right|_{\text{pontofixo}} = \begin{pmatrix} e_t & e_t(1+e_n) & 0 \\ 0 & e_n^2 & 0 \\ -2\frac{1-e_t}{1+e_t} \sqrt{\frac{(1-e_t)m}{1+e_t}} & -2\frac{\sqrt{(1-e_n^2)m}}{1+e_t} & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil mostrar que os autovalores dessa matriz são

$$\lambda_1 = e_t, \quad \lambda_2 = e_n^2, \quad \lambda_3 = 1. \quad (2.34)$$

Nós vemos que os dois primeiros autovalores associados com as equações para u' e v' , respectivamente, são positivos e menores que 1. Enquanto o terceiro autovalor associado com a equação para z' , é igual a 1, e está associado à invariância por translação (na variável z) do ponto fixo. Desse modo os pontos fixos são marginalmente estáveis.

Nas figuras (2.2)-(2.4) nós mostramos três simulações do modelo para três valores diferentes de κ . A primeira simulação do mapa para $\kappa < \kappa_\infty$ mostra que a partícula pára após uma sequência de saltos. Nesta simulação nós observamos que, enquanto as variáveis u' e v' estão convergindo para valores fixos u_m^* e v_m^* , em que a partícula salta m degraus a cada vôo, a variável z' muda de valor de modo que há uma mudança no número de salto n , impedindo a convergência a um ponto fixo [47].

Na segunda simulação, para $\kappa = \kappa_\infty$, a dinâmica é atraída para um ponto fixo. Como discutido antes esses pontos fixos são marginalmente estáveis, mas se tomarmos velocidades iniciais u e v suficientemente próximas ao ponto fixo e um valor de z suficientemente distante do fim do degrau a dinâmica pode ser atraída para o ponto fixo. Na última simulação, para $\kappa > \kappa_\infty$, a partícula alcança um regime de salto em que os valores de u , v e n crescem indefinidamente.

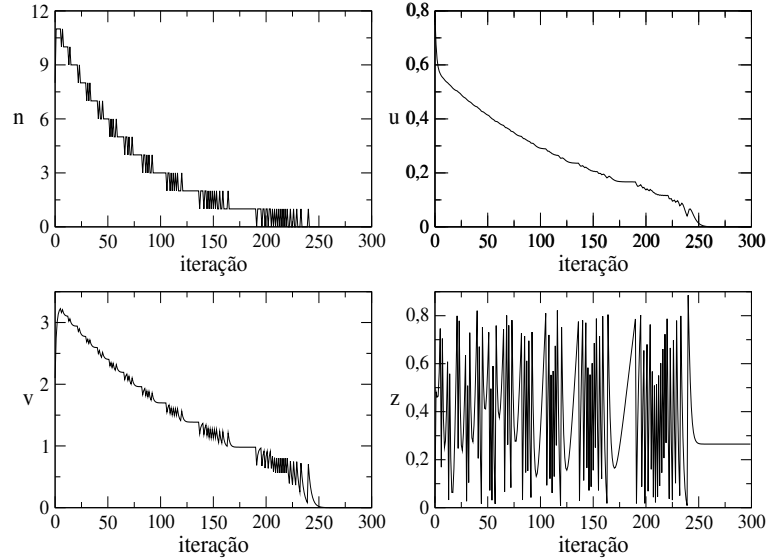


Figura 2.2: O número de salto n , as velocidades u , v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa < \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.35$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$.

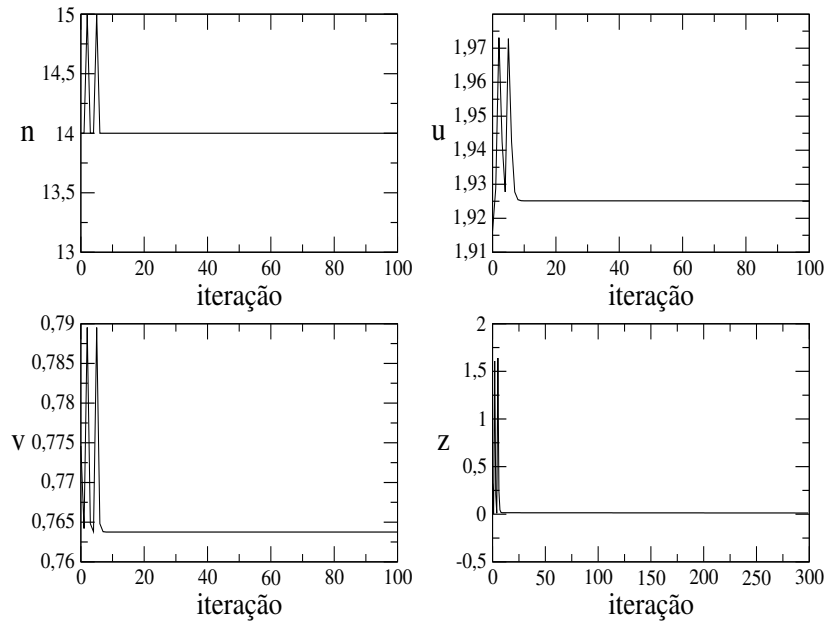


Figura 2.3: O número de salto n , as velocidades u , v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa = \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.52$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$.

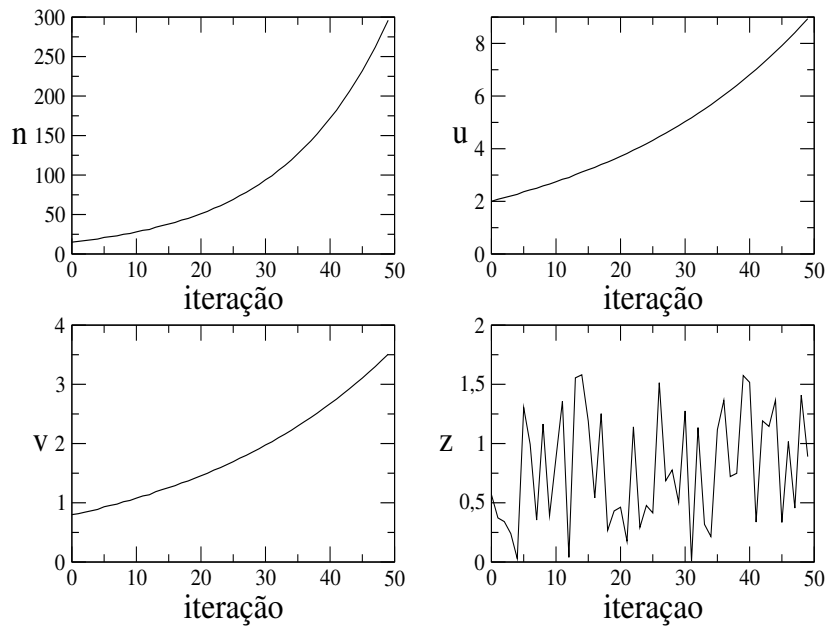


Figura 2.4: O número de salto n , as velocidades u , v e a coordenada z versus o número de colisão, para $\kappa > \kappa_\infty$. Para $\kappa = 0.53$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$.

2.3 Órbitas aceleradas vs. desaceleradas

2.3.1 Órbitas não aceleradas

Em nossas simulações nós observamos que abaixo de κ_∞ a partícula sempre pára, embora não tenhamos provado analiticamente, ao passo que para $\kappa > \kappa_\infty$ a partícula acelera. É natural, portanto indagar se esse comportamento é robusto, i.e., independente das condições iniciais. De fato é possível mostrar que apenas para $\kappa > \kappa_\infty$ o mapa admite órbitas aceleradas. A prova apenas desse fato está feita em detalhes em [47], sendo que aqui nós apenas apresentamos os principais passos dessa prova. Inicialmente definimos a quantidade

$$\gamma = \sqrt{v^2 + n} - \frac{2\kappa u + (1 + \kappa)v}{1 - \kappa}, \quad (2.35)$$

que possibilita escrever as equações do mapa (2.16) e (2.17) como

$$u' = \frac{e_t}{1 - \kappa} [(1 + \kappa)u + 2v] + e_t \gamma, \quad (2.36)$$

$$v' = \frac{e_n}{1 - \kappa} [2\kappa u + (1 + \kappa)v] + e_n \gamma. \quad (2.37)$$

Agora, quando u e v são suficientemente grandes é mostrado que γ torna-se muito pequeno, de modo que podemos considerar as duas equações acima como um mapa linearizado para u' e v' . Assim, u' e v' crescerá se, e somente se, o modelo linearizado prever crescimento para essas variáveis. Um mapa linear cresce se sua matriz Jacobiana tem no mínimo um autovalor, ou multiplicador de Floquet, maior que 1. A matriz Jacobiana para o mapa linearizado é definida como

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_t(1+\kappa)}{1-\kappa} & \frac{2e_t}{1-\kappa} \\ \frac{2e_n\kappa}{1-\kappa} & \frac{e_n(1+\kappa)}{1-\kappa} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico dessa matriz é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (e_n + e_t) \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \lambda + e_t e_n. \quad (2.38)$$

Podemos facilmente verificar que esse polinômio possui uma raiz maior que 1 se e somente se $\kappa > \kappa_\infty$. Logo, o mapa linearizado (2.36)-(2.37) admite órbitas aceleradas se, e somente se, $\kappa > \kappa_\infty$.

Como um detalhe adicional, vale a pena observar que o modelo estudado por Valance e Bideau [37], descrito no Cap. 1, é um caso particular do mapa linear acima com $\lambda = 0$ e $e_t = e_n = e$. Vide [39] para detalhes.

2.3.2 Órbitas desaceleradas

Nós agora vamos investigar em que situações podem ocorrer órbitas desaceleradas. Nesse regime a partícula, após ser lançada com uma dada velocidade inicial, pára sobre um determinado degrau após uma sequência de saltos. Para que isso aconteça é preciso que a partícula tenha seu movimento limitado a um degrau, ou seja, que venha a parar sobre este degrau, conforme indicado na Fig. (2.5).

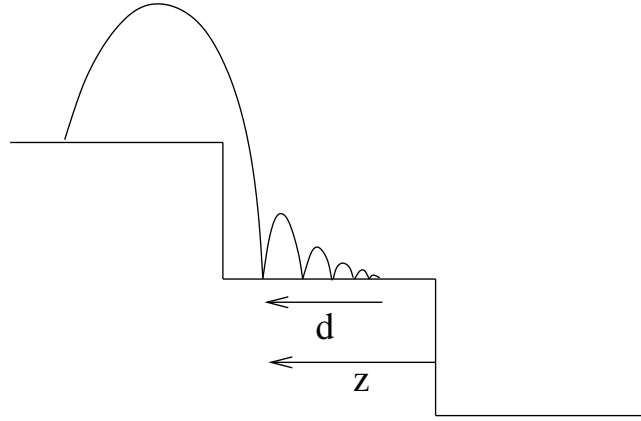


Figura 2.5: Uma órbita desacelerada. Após percorrer a distância de parada d , a partícula se encontrará em repouso a uma distância $(z - d)$ da borda do degrau.

Para que a partícula pare sobre um determinado degrau é necessário um número infinito de colisões sobre este mesmo degrau. Porém, como a distância percorrida pela partícula em cada salto é bem definida e diminui a cada salto, podemos calcular o limite da soma dessas distâncias até a partícula parar. A essa distância d nós nos referimos como a *distância de parada*. Suponha que a partícula inicia o primeiro salto sobre o mesmo degrau da posição z e com velocidades u e v . Como $n = 0$, as equações de movimento (2.16)-(2.18) sobre o mesmo degrau tornam-se

$$u' = e_t(u + 2v), \quad (2.39)$$

$$v' = e_n v, \quad (2.40)$$

$$z' = z - 4\kappa v(u + v). \quad (2.41)$$

Como nós temos um mapa linear para a velocidade nós podemos usar uma notação matricial, ou seja, definindo

$$V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

temos que $V' = AV$, onde A é

$$A = \begin{pmatrix} e_t & 2e_t \\ 0 & e_n \end{pmatrix}.$$

Assim, após k iterações, a velocidade será $V_k = A_k V$, com

$$A_k = \begin{pmatrix} e_t^k & 2 \sum_{i=1}^k e_t^i e_n^{k-i} \\ 0 & e_n^k \end{pmatrix}$$

O primeiro avanço da partícula medido ao longo do degrau pode ser escrito na notação de produto vetorial

$$z - z' = (V, BV), \quad (2.42)$$

onde

$$B = 2\kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, a distância de parada d , será dada por

$$d = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k V, B A^k V) = \left(V, \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^t B A^k V \right), \quad (2.43)$$

onde $(A^k)^t$ significa transposta de (A^k) . Portanto, usando (A^k) e B temos [47]

$$d = 4\kappa \left[uv \sum_{k=0}^{\infty} (e_t e_n)^k + v^2 \sum_{k=0}^{\infty} e_n^{2k} + 2v^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k e_t^i e_n^{2k-i} \right]. \quad (2.44)$$

As duas primeiras somas são séries geométricas e são facilmente calculadas

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e_t e_n)^k = \frac{1}{1 - e_t e_n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} e_n^{2k} = \frac{1}{1 - e_n^2}, \quad (2.45)$$

enquanto a terceira dá

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k e_t^i e_n^{2k-i} = \frac{e_t e_n}{(1 - e_n^2)(1 - e_t e_n)}. \quad (2.46)$$

Substituindo essas expressões em (2.44) e, depois de fazermos as simplificações, a distância de parada será dada por

$$d = 4\kappa \frac{(1 + e_t e_n)v^2 + (1 - e_n^2)uv}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)} \quad (2.47)$$

Portanto, após percorrer essa distância a partícula se encontrará em repouso a uma distância $(z - d)$ do fim do degrau. Naturalmente, após percorrer a distância de parada, a partícula terá gasto um certo tempo finito, que chamamos de *tempo de parada*. Supondo que a partícula, antes de atingir o degrau sobre o qual vai parar, partiu para o salto com a velocidade v_0 na direção perpendicular ao plano do degrau e saltou n_0 degraus, então o primeiro tempo de vôo sobre o mesmo degrau é

$$T_1 = 2e_n \sqrt{v_0^2 + n_0},$$

enquanto a partícula se encontra sobre o mesmo degrau, $n = 0$ e pela Eq. (2.17) temos que,

$$v' = e_n v, \quad (2.48)$$

assim o segundo tempo de vôo é

$$\begin{aligned} T_2 &= 2v' = 2e_n \left(e_n \sqrt{v_0^2 + n_0} \right), \\ T_2 &= 2e_n^2 \sqrt{v_0^2 + n_0}. \end{aligned}$$

Fica claro pela fórmula adimensional do tempo de vôo, $T = 2v$, sobre um mesmo degrau, que o tempo vai diminuindo na razão de e_n , assim podemos escrever para o *i-ésimo* tempo de vôo nessas circunstâncias a seguinte fórmula,

$$T_i = 2\sqrt{v_0^2 + n_0} e_n^i. \quad (2.49)$$

Esta série converge sem dúvida e o tempo total gasto pela partícula é dado pelo limite abaixo

$$T_p = 2\sqrt{v_0^2 + n_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e_n^i \right), \quad (2.50)$$

desse modo, o tempo total é

$$T_p = 2\sqrt{v_0^2 + n_0} \frac{e_n}{1 - e_n}. \quad (2.51)$$

Se $v_0 = 0$ e $n_0 = 1$, $T_p = 2e_n/(1 - e_n)$. Observe que se $e_n = 0 \Rightarrow T_p = 0$ e se $e_n \rightarrow 1 \Rightarrow T_p \rightarrow \infty$.

Nós podemos mostrar que acima de um certo valor de κ , denominado κ_s , a partícula sempre acelera [47]. Esse resultado é enunciado como: O mapa (2.16)-(2.18) possui órbitas que param, se, e somente se, $\kappa < \kappa_s$, onde

$$\kappa_s \equiv \frac{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}{1 + 3e_n(e_t + e_n) + e_t e_n^3}. \quad (2.52)$$

Esse resultado é obtido fazendo a partícula saltar do fim de um degrau com velocidade inicial zero. Então, nós queremos encontrar o valor de κ para o qual a partícula alcance o fim do degrau abaixo do qual ela saltou com velocidade final zero. A partícula sendo solta do final de um degrau com velocidade inicial zero atingirá o degrau abaixo na posição $z' = 1 - \kappa$, onde nós usamos a Eq. (2.18) com $u = v = 0$, $z = 0$ e $n = 1$. Após colidir com o degrau a partícula tem velocidade $V' = (e_t, e_n)$, vide Eqs. (2.16) e (2.17). A distância de parada d_0 calculada a partir de (2.47), para este caso é

$$d_0 = \frac{4\kappa(e_n + e_t)e_n}{(1 - e_te_n)(1 - e_n^2)}. \quad (2.53)$$

Para que a partícula alcance a borda do degrau com velocidade nula devemos ter $d_0 = z'$. Igualando essas duas equações e resolvendo para κ , encontraremos que κ_s é exatamente dado por (2.52).

Também podemos mostrar que sempre temos $\kappa_\infty < \kappa_s < 1$. Na figura (2.6) nós mostramos as superfícies κ_∞ e κ_s no plano $e_t = 0.125$. Resumindo o que foi estudado até aqui, nós conjecturamos que para $\kappa > \kappa_s$, nenhuma órbita que pára existe, logo, todas as órbitas são aceleradas. Para $\kappa < \kappa_\infty$ nenhuma órbita acelerada existe, todas as órbitas são desaceleradas, enquanto na região entre κ_∞ e κ_s ambas as órbitas coexistem, órbitas aceleradas e órbitas desaceleradas. Lembramos que essas conjecturas estão de acordo com nossas simulações numéricas. Uma análise mais detalhada da região entre κ_∞ e κ_s é necessária e revela que nesta região, além das órbitas já mencionadas, encontram-se também órbitas periódicas.

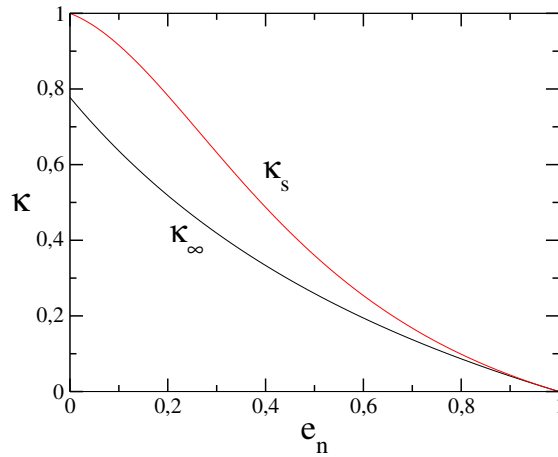


Figura 2.6: As superfícies κ_∞ e κ_s no plano $e_t = 0.125$.

2.4 Órbitas Periódicas

Considere o mapa (2.26). Dizemos que $\vec{x}_i$, $i = 1, \dots, q$, é um ponto de uma órbita de período q se

$$\vec{x}_i = \vec{F}^q(\vec{x}_i), \quad (2.54)$$

onde $\vec{F}^q$ significa q iterações do mapa, ou seja [45, 46]

$$\vec{x}_i = F(F^{q-1}(\vec{x}_i)) = \underbrace{F(F(F(\dots(F(\vec{x}_i)\dots)))}_{q \text{ vezes}}.$$

Nós vamos analisar dois tipos de órbitas periódicas na região $k_\infty < \kappa < \kappa_s$. A primeira é uma órbita de período $k+1$ na qual a partícula salta k vezes com $n=0$ e então uma vez com $n=1$. As essas órbitas nós nos referimos como sendo do tipo 0^k1 , onde $k = 1, 2, \dots$. O outro tipo de órbita que nós consideraremos é uma órbita de período 2 na qual a partícula salta m degraus uma vez e depois $m+1$ degraus no segundo salto. A essas órbitas nós nos referimos como sendo do tipo $m(m+1)$. Um cálculo extenso é necessário para obtermos uma solução explícita para essas órbitas, aqui nós seguiremos os principais passos do cálculo feito em [47].

2.4.1 Órbitas do tipo 0^k1

Se $V = (u, v)$ denota o vetor velocidade inicial no primeiro salto sobre o mesmo degrau ($n=0$), então, usando as equações (2.16), (2.17) do mapa com $n=0$, a velocidade após k saltos será

$$u_k = e_t^k u + \frac{2e_t(e_n^k - e_t^k)}{e_n - e_t} v, \quad (2.55)$$

$$v_k = e_n^k v. \quad (2.56)$$

A distância d_k percorrida após k saltos é obtida da mesma maneira que levou à fórmula (2.47)

$$d_k = 4\kappa \left[uv \sum_{j=0}^{k-1} (e_t e_n)^j + v^2 \sum_{j=0}^{k-1} e_n^{2j} + 2v^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^j e_t^i e_n^{2j-i} \right]. \quad (2.57)$$

Após fazermos as somas acima nós temos que

$$d_k = 4\kappa(\alpha_k uv + \beta_k v^2), \quad (2.58)$$

onde

$$\alpha_k = \frac{1 - (e_t e_n)^k}{1 - e_n e_t}, \quad \beta_k = \frac{(e_n + e_t)(1 - e_n^{2k})}{(e_n - e_t)(1 - e_n^2)} - \frac{2e_t(1 - e_n^k e_t^k)}{(e_n - e_t)(1 - e_n e_t)}. \quad (2.59)$$

A posição da partícula após k saltos é dada por

$$z_k = z - d_k, \quad (2.60)$$

sendo z a posição da partícula no início do primeiro salto. Agora a partícula salta de z_k com velocidade u_k e v_k . Fazendo $n = 1$ em (2.16) e (2.17), a velocidade (u_{k+1}, v_{k+1}) no início do próximo salto é dada por

$$u_{k+1} = e_t \left(u_k + v_k + \sqrt{v_k^2 + 1} \right), \quad (2.61)$$

$$v_{k+1} = e_n \sqrt{v_k^2 + 1}. \quad (2.62)$$

Como a partícula se encontra numa órbita periódica de período $k + 1$, devemos ter $u_{k+1} = u$ e $v_{k+1} = v$. Então devemos resolver a equação de ponto fixo $u_{k+1} = u$ e $v_{k+1} = v$. Pode-se mostrar facilmente que essas velocidades são dadas por

$$u = \frac{e_n - e_t + (e_n + e_t)e_n^{k+1} - 2e_n e_t^{k+1}}{(e_n - e_t)(1 - e_t^{k+1})} \frac{e_t}{\sqrt{1 - e_n^{2(k+1)}}}, \quad (2.63)$$

$$v = \frac{e_n}{\sqrt{1 - e_n^{2(k+1)}}}. \quad (2.64)$$

Agora considere a equação para a posição da partícula z_{k+1} . Vamos escrevê-la na forma (2.19)

$$z_{k+1} = z_k + 1 - \kappa \left(\frac{u_{k+1}^2}{e_t^2} - u_k^2 \right). \quad (2.65)$$

Fazendo $u_{k+1} = u$ nesta equação e usando (2.55), (2.58) e (2.60), nós temos, após alguma álgebra, que z_{k+1} é dado por

$$z_{k+1} = z + 1 - \frac{\kappa}{\kappa_{0^k 1}}, \quad (2.66)$$

onde

$$\kappa_{0^k 1} = \frac{1}{4} [a_k u_0^2 + b_k u_0 v_0 + c_k v_0^2]^{-1}. \quad (2.67)$$

As velocidades u , v são aquelas dadas por (2.63), (2.64) e as constantes a_k , b_k e c_k são dadas por

$$a_k = \frac{1 - e_t^{2(k+1)}}{4e_t^2}, \quad b_k = \alpha_k - \frac{e_t^{k+1}(e_n^k - e_t^k)}{e_n - e_t}, \quad c_k = \beta_k - \left[\frac{e_t(e_n^k - e_t^k)}{e_n - e_t} \right]^2. \quad (2.68)$$

Como na órbita periódica devemos ter $z_{k+1} = z$, segue de (2.66) que as órbitas periódicas do tipo $0^k 1$ existem somente para os valores de κ para o qual $\kappa = \kappa_{0^k 1}$.

Para mostrar que essas órbitas periódicas de fato existem é necessário verificar que existem valores de z que satisfazem a condição (2.20) em $\kappa = \kappa_{0^{k_1}}$ para $u = u_0$ e $v = v_0$. Em [47] é mostrado que esses valores estão dentro do intervalo $[z_{min}^k, z_{max}^k]$, onde $z_{min}^k \equiv 4\kappa_{0^{k_1}}v_0(u_0 + v_0)$ e $z_{max}^k \equiv d_k + 4\kappa_{0^{k_1}}v_k(u_k + v_k)$. Podemos verificar que $0 < z_{min}^k < z_{max}^k < 1$. É interessante notar ainda que $\kappa_{0^{k_1}} < \kappa_{0^{l_1}}$ para $k < l$ e que $\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_{0^{k_1}} = \kappa_s$.

2.4.2 Órbitas do tipo $m(m+1)$

Consideraremos apenas o caso $m > 0$, já que $m = 0$ corresponde à órbita 01 com $k = 1$, que pertence à classe de órbitas discutidas anteriormente. Na Fig. (2.7) nós ilustramos o caso particular $m = 1$ e indicamos os pontos periódicos da órbita.

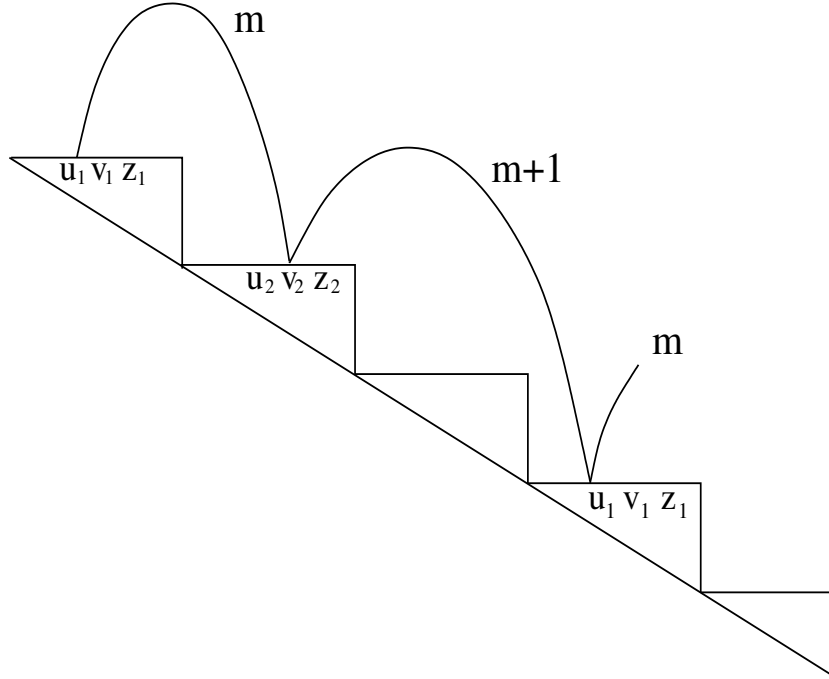


Figura 2.7: Dinâmica das órbitas periódicas $m(m+1)$. A figura ilustra o caso $m = 1$.

Como discutido em [47], para obter essa órbita devemos usar as equações do mapa (2.16)-(2.18) duas vezes, primeiro com $n = m$ e depois com $n = m + 1$. Então, iterando o mapa duas vezes nós encontramos para u e v , respectivamente,

$$u'' = e_t \left[e_t(u + v) + (e_t + e_n)\sqrt{v^2 + m} + \sqrt{e_n^2 v^2 + m(1 + e_n^2) + 1} \right], \quad (2.69)$$

$$v'' = e_n \sqrt{e_n^2 v^2 + m(1 + e_n^2) + 1}. \quad (2.70)$$

Desde que a partícula se encontra em uma órbita periódica de período 2, devemos ter $u'' = u = u_1$ e $v'' = v = v_1$, então devemos resolver as equações (2.69) e (2.70) para os pontos fixos. Primeiro consideramos a equação para v . É fácil ver que a equação para v terá como solução

$$v_1 = e_n \sqrt{\frac{1 + m(1 + e_n^2)}{1 - e_n^4}}, \quad (2.71)$$

e substituindo essa equação acima em (2.70) dá

$$v_2 = e_n \sqrt{\frac{e_n^2 + m(1 + e_n^2)}{1 - e_n^4}}. \quad (2.72)$$

Para a equação (2.69) nós fazemos um cálculo semelhante para o ponto fixo e encontramos que u_1 e u_2 serão dados por

$$u_1 = \frac{e_t}{e_n(1 - e_t^2)} [(1 + e_t e_n) v_1 + (e_t + e_n) v_2], \quad (2.73)$$

$$u_2 = \frac{e_t}{e_n(1 - e_t^2)} [(1 + e_t e_n) v_2 + (e_t + e_n) v_1], \quad (2.74)$$

onde v_1 e v_2 são dados em (2.71) e (2.72).

Agora vamos considerar a segunda iterada para a variável z . Usando a Eq. (2.18) do mapa para z nós podemos mostrar que z'' é dado por

$$z'' = z + 2m + 1 - \kappa e_t^{-2} [u''^2 + (1 - e_t^2) u'^2 - e_t^2 u^2]. \quad (2.75)$$

Mas nós temos que $u'' = u = u_1$ e para a primeira iterada de u , $u' = u_2$, então z'' torna-se

$$z'' = z + 2m + 1 - \kappa(e_t^{-2} - 1)(u_1^2 + u_2^2). \quad (2.76)$$

Inserindo as Eqs. (2.73) e (2.74) em (2.76) nós encontramos, depois de algumas simplificações

$$z'' = z + (m + 1) \left[1 - \frac{\kappa}{\kappa_{m(m+1)}} \right], \quad (2.77)$$

onde

$$\kappa_{m(m+1)} = \left[\frac{4e_t e_n + (1 + e_t^2)(1 + e_n^2)}{(1 - e_t^2)(1 - e_n^2)} + \frac{4(e_t + e_n)(1 + e_t e_n)}{(1 - e_t^2)(1 - e_n^4)} \right]^{-1} \frac{\sqrt{e_n^2 + (1 + e_n^2)^2 m(m+1)}}{2m+1}. \quad (2.78)$$

Para a órbita de período 2 devemos ter $z = z''$, o que implica que essas órbitas podem existir somente se $\kappa = \kappa_{m(m+1)}$. É fácil ver que $\kappa_{m(m+1)} > \kappa_{m'(m'+1)}$ para

$m < m'$ e que $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa_{m(m+1)} = \kappa_\infty$. Se nós tomarmos $m = 0$ na expressão (2.78) acima veremos que o resultado κ_{01} produz o mesmo valor se fizermos $k = 1$ na expressão (2.67).

Da mesma forma como para as órbitas periódicas estudadas anteriormente, as órbitas periódicas $m(m+1)$ necessitam satisfazer a condição (2.24) em $\kappa_{m(m+1)}$ para $n = m$, $u = u_1$, $v = v_1$ e $0 \leq z < 1$. Nós não apresentaremos o cálculo aqui porque ele é idêntico àquele feito para os pontos fixos. Mas nós asseguramos que existe um intervalo $J_m \subset [0, 1)$ de modo que para $z \in J_m$ a condição (2.24) é satisfeita [47], logo as órbitas de período 2 do tipo $m(m+1)$ existem.

2.5 Diagramas de Fase

Nós resumimos a análise acima no diagrama de fase da Fig. (2.8). Nesta figura as curvas contínuas correspondem às superfícies $\kappa_\infty(e_n, e_t)$ (inferior) e $\kappa_s(e_n, e_t)$ (superior) no plano $e_t = 0.2$ (Fig. 2.8a) e $e_n = 0.2$ (Fig. 2.8b). Como discutido antes, nós conjecturamos e temos verificado numericamente, que na região $\kappa < \kappa_\infty$ nenhuma órbita acelerada existe, todas as órbitas são desaceleradas, enquanto na região $\kappa > \kappa_s(e_n, e_t)$ nenhuma órbita desacelerada existe, todas as órbitas são aceleradas. Naquela região intermediária $\kappa_\infty(e_n, e_t) < \kappa < \kappa_s(e_n, e_t)$ nós verificamos que além das órbitas desaceleradas e aceleradas coexistirem temos também a existência de órbitas periódicas. Na Fig. (2.8) as curvas tracejadas, de baixo para cima, correspondem às superfícies κ_{01} , κ_{001} e κ_{0001} onde as órbitas do tipo 01, 001 e 0001 existem. Na curva ponto-tracejada está a superfície κ_{12} onde a órbita do tipo 12 existe. Nesta região intermediária diversas outras órbitas $0^k 1$ e $m(m+1)$, para valores maiores de k e m , existem. Comparando esses resultados com aqueles dos modelos escada e microfacetas (1.7) e (1.5), nós vemos que os espaços de parâmetros desses modelos não apresentam a região de coexistência dos diversos regimes. Da Fig. (1.7) nós vemos que o espaço de parâmetros do modelo escada [39] é dividido, por uma curva $\kappa_\infty(e_t)$, em duas regiões, uma de movimento limitado para $\kappa < \kappa_\infty(e_t)$ e outra de movimento acelerado para $\kappa > \kappa_\infty(e_t)$. No modelo microfacetas [37], quando as orientações das microfacetas são constantes ao longo da linha, nós vemos da Fig. (1.5) que o espaço de parâmetros do modelo também é dividido por uma curva $e_t(\beta)$ em duas regiões distintas, abaixo da qual só movimento desacelerado é observado e acima apenas movimento acelerado é possível. Dessa forma, a transição entre esses dois regimes é de forma brusca nesses modelos. Comparando o diagrama de fase do modelo (2.8) com aquele do experimento (1.3), observamos que em ambos a região de movimento desacelerado é separada da região de movimento acelerado por uma região intermediária na qual a partícula pode alcançar um regime de velocidade média constante. Nós vemos, assim, que o modelo estudado aqui está, pelos menos qualitativamente, em boa concordância com os experimentos.

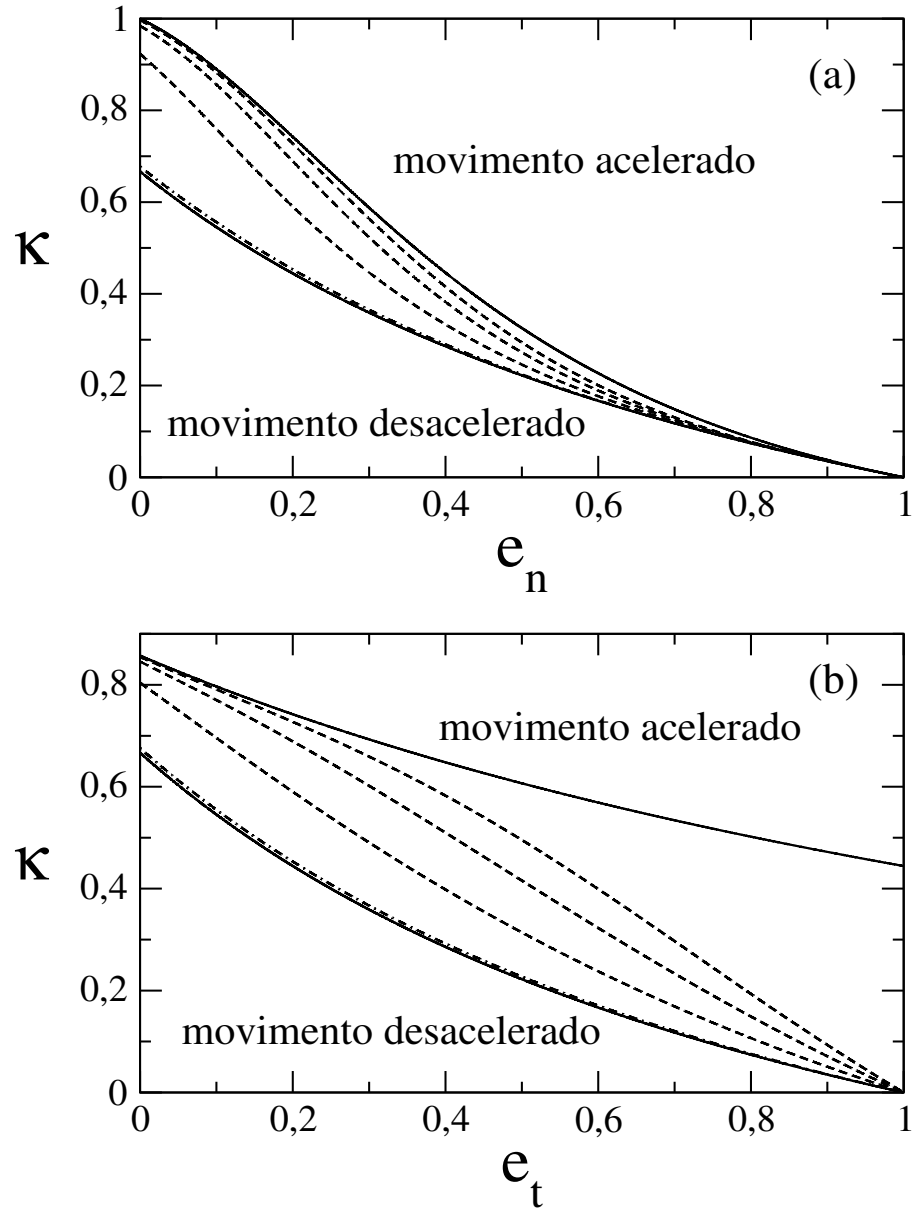


Figura 2.8: Diagramas de fase para o Mapa (2.16)-(2.18): (a) no plano $e_t = 0.2$ e (b) no plano $e_n = 0.2$. As curvas sólidas inferior e superior representam κ_∞ e κ_s , respectivamente; as três linhas tracejadas são κ_{001} , κ_{0001} e κ_{12} (de baixo para cima); a linha ponto-tracejada corresponde a κ_{12} .

Capítulo 3

O MODELO HÍBRIDO

3.1 Mapa Unidimensional

Agora estudaremos em maiores detalhes a região abaixo de κ_∞ , a qual, como vimos anteriormente, possui órbitas que páram. Na Ref. [48] foi introduzido um modelo híbrido em que a partícula, após parar, desliza até o final do degrau, reiniciando assim sua trajetória de saltos. Resultados preliminares para esse caso foram apresentados em [48]. No presente capítulo faremos uma discussão mais completa do modelo híbrido.

Nesse tipo de modelo, após a partícula parar precisamos especificar como a partícula terá seu movimento reiniciado. Nós consideramos, por simplicidade, que após parar, a partícula desliza sem atrito até o fim do degrau de onde parte para um salto com uma certa velocidade $V = (u, 0)$. A partir daqui usaremos a distância de parada para derivar o mapa unidimensional. Faremos isso monitorando as variáveis z e d na colisão com o degrau. Sempre que $d < z$ significa que a partícula pára nesse degrau. Após parar consideraremos que a partícula desliza sem atrito até o fim do degrau, onde saltará para um vôo com velocidade u . Porém, como $\kappa < \kappa_\infty$, a partícula pára em algum degrau abaixo. Então, novamente desliza até o fim do degrau e salta para um novo vôo com velocidade u' . Essa dinâmica, como veremos, será descrita por um mapa unidimensional. A figura (3.1) mostra um exemplo desse processo.

Desprezando atrito de deslizamento, temos então que a partícula será acelerada, do repouso, por uma distância $(z - d)$ com uma aceleração $g \sin \phi$ até $z = 0$. Aplicando a fórmula de Torricelli para a velocidade u , temos

$$\begin{aligned} u^2 &= u_0^2 + 2gs(z - d), \\ u^2 &= 2gs(z - d), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$u = \sqrt{2gs(z - d)}, \tag{3.2}$$

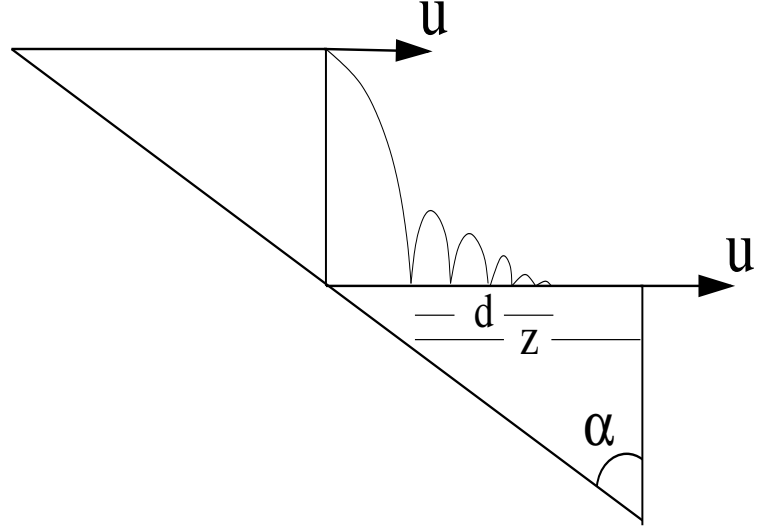


Figura 3.1: Dinâmica entre duas paradas consecutivas para o caso $N = 1$.

usando a transformação $U = u/(t\sqrt{2gca})$, obtemos

$$U = \sqrt{(z - d)/\kappa}. \quad (3.3)$$

Adotando uma variável energia adimensional $\mathcal{E} = U^2$, o mapa unidimensional, ou mapa energia será

$$\mathcal{E}' = f(\mathcal{E}) = (z - d)/\kappa. \quad (3.4)$$

Continuamos usando as Eqs. (2.16), (2.17) e (2.18) para saltos intermediários entre duas paradas consecutivas. Só que desta vez, vamos calcular a energia com que a partícula sai para um salto em função da energia com que ela iniciou o movimento depois de parar anteriormente. Para uma dada energia inicial $\mathcal{E}$, a partícula poderá saltar vários degraus antes de parar. Por isso vamos definir o número inteiro N como sendo o número total de degraus saltados entre duas paradas consecutivas, ou seja,

$$N = \sum_i n_i, \quad (3.5)$$

onde n_i são os números de saltos para as iterações intermediárias do mapa (2.16)-(2.18). A Fig. (3.2) mostra um gráfico da Eq. (3.4) obtido numericamente. Nós vemos que o mapa (3.4) é contínuo por partes, Fig. (3.2). Cada ramo desse gráfico de $f(\mathcal{E})$ pode ser caracterizado por um conjunto de números com relação aos degraus saltados e as colisões nos degraus intermediários antes de parar. Por exemplo,

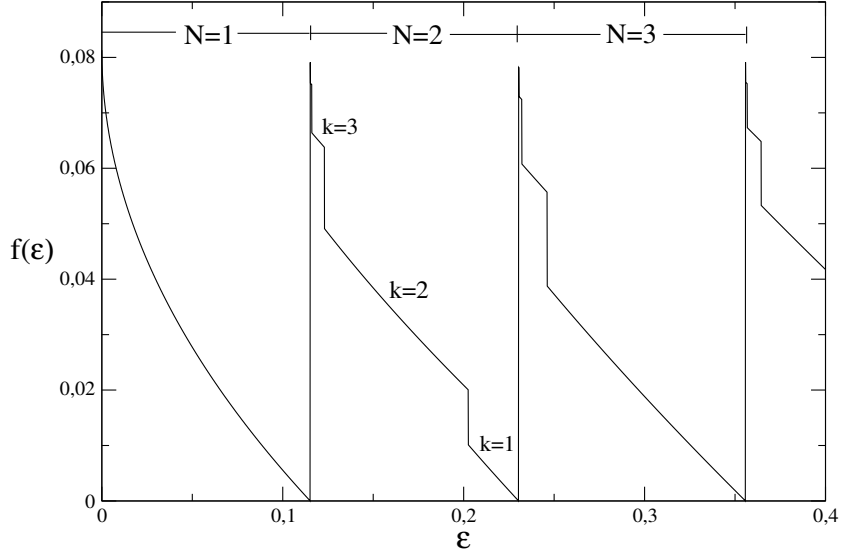


Figura 3.2: O mapa energia unidimensional para $e_t = 0.45$, $e_n = 0.2$ e $\kappa = 0.1$

a função $f_N(\mathcal{E})$ denotará aqueles ramos no qual a partícula salta N degraus diretamente e pára no degrau em que colide. Ramos com número de salto total $N = 2$, aqueles no qual a partícula pára no segundo degrau abaixo do qual ela saltou, será denotado por $f_{2k}(\mathcal{E})$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$, que indica o número de colisões no primeiro degrau. Observe que esses ramos aparecem em ordem decrescente de k , à medida que a energia aumenta. O último ramo desta sequência corresponde a $k = 0$. Da mesma forma outras sequências de ramos de energia do mapa (3.4) com número de salto total N maiores surgem. Em geral, um ramo com número de salto total N será denotado por conjunto de N índices: $f_{N\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}}(\mathcal{E})$, onde α_i indica o número de vezes que a partícula saltou no degrau $i = 1, \dots, N - 1$.

3.2 A função $f_N(\mathcal{E})$

Aqui estudaremos o caso no qual a partícula salta N degraus diretamente e pára no degrau em que colide pela primeira vez. Este caso inclui o primeiro ramo de (3.4), que nós vemos na Fig. (3.2) e no qual $N = 1$, ou seja, a partícula pára imediatamente abaixo do qual ela saltou. A partícula, neste caso, salta com velocidade $u = \sqrt{\mathcal{E}}$, $v = 0$ e de $z = 0$. Usando esses valores no mapa (2.16), (2.17) e (2.18) com $n = N$ temos, para as velocidades imediatamente após a colisão e para o ponto de colisão z'

$$v' = e_n \sqrt{N}, \quad (3.6)$$

$$u' = e_t \sqrt{N} (1 + \sqrt{\mathcal{E}/N}), \quad (3.7)$$

$$z' = N[1 - \kappa(1 + 2\sqrt{\mathcal{E}/N})]. \quad (3.8)$$

A distância de parada d é encontrada usando as duas primeiras equações acima na Eq. (2.47). Após os cálculos obtemos

$$d = 4\kappa N \frac{(1 + e_t e_n) e_n^2 + (1 - e_n^2) e_t e_n (1 + \sqrt{\mathcal{E}/N})}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}. \quad (3.9)$$

Usando agora as Eqs. (3.8) e (3.9) em (3.4) e fazendo simplificações, temos que a energia do próximo vôo será dada pelo mapa

$$\mathcal{E}' = f_N(\mathcal{E}) = N \left[\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_s} - 2 \left(\frac{1 + e_t e_n}{1 - e_t e_n} \right) \sqrt{\mathcal{E}/N} \right]. \quad (3.10)$$

Como vemos do gráfico na Fig. (3.2), cada ramo da função $f_N(\mathcal{E})$, com determinado N , está definido em intervalos de energia. Na Fig. (3.3) nós ilustramos como determinamos intervalos de existência para o mapa $f_N(\mathcal{E})$.

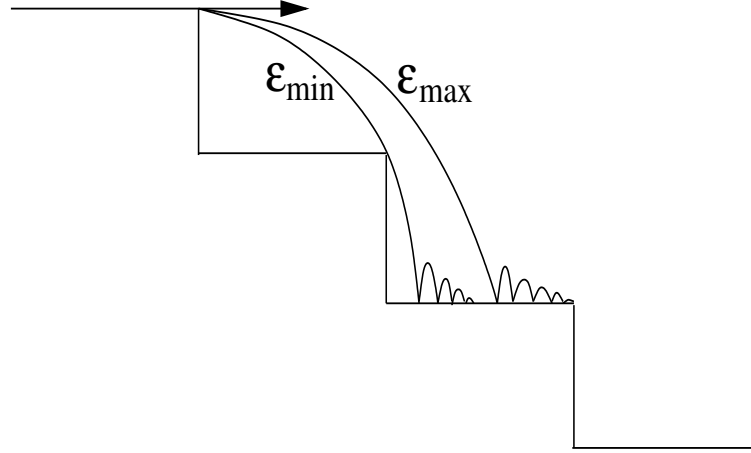


Figura 3.3: Intervalo de energia para $f_N(\mathcal{E})$. A figura ilustra o caso $N = 2$

Para encontrar a energia mínima, $\mathcal{E}_{min}$, para um determinado ponto fixo, nós usamos a Eq. (3.8) com $n = N - 1$ e $z' = 0$. Resolvendo para $\mathcal{E}$ temos

$$\mathcal{E}_{min}^N = \frac{1}{4}(N - 1) \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)^2, \quad (3.11)$$

portanto, essa é a energia mínima para a partícula colidir com o N -ésimo degrau. Da Fig. (3.3) nós vemos que a energia máxima, $\mathcal{E}_{max}$, é o valor para o qual $f_N(\mathcal{E}) = 0$. Fazendo isso no mapa (3.10), nós vemos que $\mathcal{E}_{max}$ é dado por

$$\mathcal{E}_{max}^N = \frac{1}{4}N \left(\frac{1 - e_t e_n}{1 + e_t e_n} \right)^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_s} \right)^2, \quad (3.12)$$

esta é a energia máxima para a partícula se encontrar em repouso em $z' = 0$ no N -ésimo degrau.

3.2.1 Pontos Fixos $f_N(\mathcal{E}_N^*)$

O mapa (3.10) apresenta o ponto fixo $\mathcal{E}_N^*$ que é a solução da equação $f_N(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Resolvendo essa equação para $\mathcal{E}$, vemos que os pontos fixos $\mathcal{E}_N^*$ são dados por

$$\mathcal{E}_N^* = N \left[-\frac{1 + e_t e_n}{1 - e_t e_n} + \sqrt{\frac{1}{\kappa} - \frac{4e_n^2(1 - e_t^2)}{(1 - e_t e_n)^2(1 - e_n^2)}} \right]^2. \quad (3.13)$$

A energia desses pontos fixos deve satisfazer $\mathcal{E}_{min} \leq \mathcal{E}_N^* \leq \mathcal{E}_{max}$. Essa condição implicará domínios de existência para os pontos fixos no espaço de parâmetros (κ, e_t, e_n) . Para determinar esses domínios, primeiro vamos considerar o caso $N = 1$ separadamente. Esse ponto fixo surge sempre que $0 < \kappa < \kappa_s$. Para $N > 1$, o ponto fixo surge quando a partícula possui energia suficiente para colidir no degrau situado N passos abaixo do qual ela saltou. Essa energia, como vimos, é $\mathcal{E}_{min}$. E ele deixa de existir quando $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}$. Igualando as Eqs. (3.13) e (3.11), e resolvendo para κ encontramos, após algumas simplificações, que os pontos fixos (3.13) começam a existir a partir da região delimitada pelas superfícies definidas pela relação

$$\kappa_N^\pm = \frac{N - 1}{3N - 1 - 2A\sqrt{N(N - 1)} \pm 2N[2N - 1 - B(N - 1)] - 2A\sqrt{N(N - 1)}^{1/2}}, \quad (3.14)$$

onde, por conveniência, nós temos usado a notação

$$A = \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_t e_n}, \quad B = \frac{4e_n^2(1 - e_t^2)}{(1 - e_n^2)(1 - e_n e_t)}. \quad (3.15)$$

Na Fig. (3.4) o domínio de existência do ponto fixo (3.13), é a região delimitada pela superfície definida por (3.14) e o plano $e_n = 0$. Vamos agora investigar a estabilidade desses pontos fixos. A estabilidade de um ponto fixo de um mapa unidimensional é determinada pela derivada do mapa no ponto fixo $\mathcal{E}_N^*$ [45, 46]. Denotando por λ essa derivada, nós temos que se $|\lambda| < 1$ o ponto fixo é estável, se $|\lambda| > 1$ o ponto

fixo é instável. Derivando o mapa (3.4), depois substituindo a expressão do ponto fixo (3.13) e fazendo algumas simplificações, nós temos

$$\lambda(\kappa) = f'_N(\mathcal{E}_N^*) = \left[1 - \sqrt{\frac{(1 - e_t e_n)^2}{\kappa(1 + e_t e_n)^2} - \frac{4e_n^2(1 - e_t^2)}{(1 + e_t e_n)^2(1 - e_n^2)}} \right]^{-1}, \quad (3.16)$$

Nós podemos verificar que se $\kappa = \kappa_s$, a raiz quadrada é exatamente igual a 1. Isto quer dizer que se $\kappa < \kappa_s$ a raiz quadrada será maior que 1 e λ é sempre menor que zero. Portanto, a instabilidade só pode ocorrer para $\lambda = -1$. Então, fazendo $\lambda(\kappa) = -1$, nós encontramos que o valor de κ em que ocorre instabilidade do ponto fixo é

$$\kappa_{inst} = \frac{1}{4} \frac{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}{1 - e_t^2 e_n^4 + 2e_t e_n(1 - e_n^2)}. \quad (3.17)$$

Assim, nós vemos da Eq. (3.17) acima que a estabilidade não depende de N , de modo que todos os pontos fixos dados pela expressão (3.13) possuem a mesma propriedade de estabilidade. Propriedade análoga foi observada no modelo simplificado da Ref. [39] e está relacionado ao fato de que a dependência em N do mapa (3.10) pode ser removida com uma mudança de variáveis: $h = \mathcal{E}/N$, então $h' = f(h)$. Vamos concluir a análise desses pontos fixos com o diagrama de fase que é mostrado na Fig. (3.4). Da Fig. (3.4), nós vemos que os domínios de existência são regiões

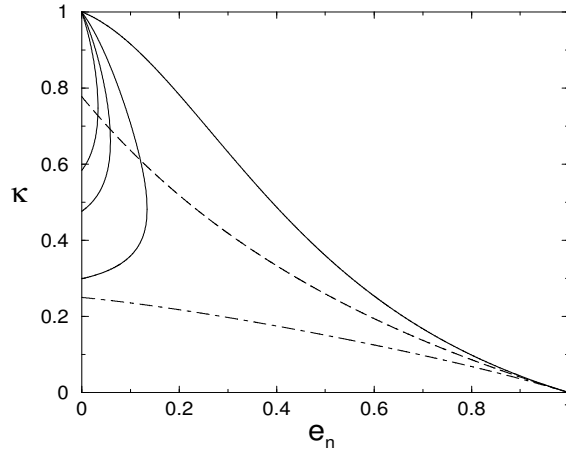


Figura 3.4: Domínios de existência dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$. A linha contínua superior corresponde a κ_s , as linhas contínuas correspondem a κ_N para $N = 2, 3, 4$, da direita para a esquerda, a linha tracejada corresponde a κ_∞ e a linha inferior corresponde a κ_{inst} .

fechadas no espaço de parâmetros (κ, e_n, e_t) , delimitadas pelas superfícies definidas pela Eq. (3.14) para os pontos fixos $N > 1$. Para os pontos fixos $N = 1$, a região é delimitada pela superfície definida por κ_s . Quanto à estabilidade, nós vemos que os pontos fixos $N > 1$ são sempre instáveis, já que $\kappa_N > \kappa_{inst}$. Entretanto, o ponto fixo $N = 1$, que surge em $\kappa = 0$, é estável para $\kappa < \kappa_{inst}$ e instável para $\kappa > \kappa_{inst}$ até deixar de existir quando $\kappa > \kappa_s$.

3.3 A função $f_{2k}(\mathcal{E})$

Agora nós estudaremos o caso ilustrado na Fig. (3.5). Como mostrado nessa figura, após deslizar até o fim do degrau a partícula salta com energia $\mathcal{E}$ e colide no degrau imediatamente abaixo, realizando um salto com $n = 1$. Então, colide k vezes neste degrau ($n_i = 0, i = 2, 3, \dots, k + 1$), depois salta para o próximo degrau, neste caso $n_{k+2} = 1$, e finalmente pára neste segundo degrau. Após essa parada a partícula desliza novamente até o fim do degrau e parte para um novo salto com energia $\mathcal{E}'$.

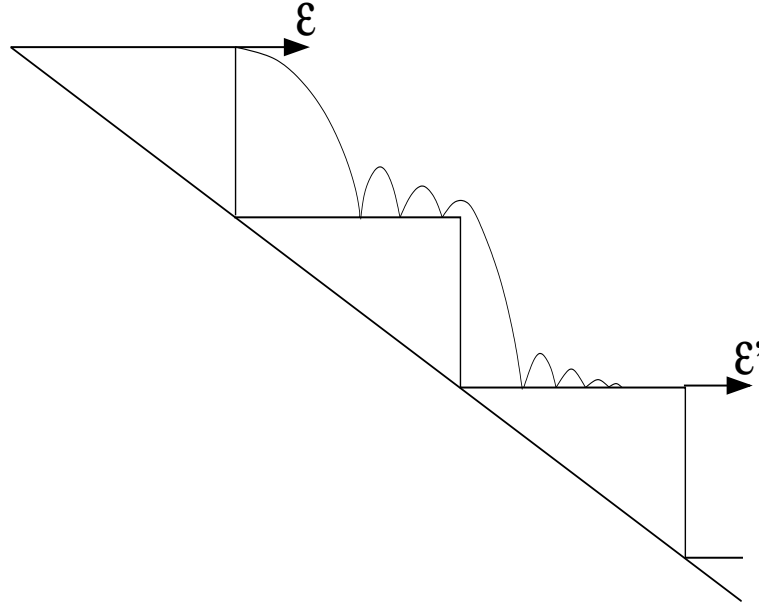


Figura 3.5: Dinâmica entre duas paradas consecutivas para o caso $N = 2$.

Após fazermos $u = \sqrt{\mathcal{E}}$, $v = 0$, $z = 0$ e $n = 1$ nas Eqs. (2.16), (2.17) e (2.18) temos que, imediatamente após a colisão no primeiro degrau as velocidades, u_1 , v_1 e a posição z_1 da partícula serão,

$$u_1 = e_n, \quad (3.18)$$

$$v_1 = e_t(\sqrt{\mathcal{E}} + 1), \quad (3.19)$$

$$z_1 = 1 - \kappa(1 + 2\sqrt{\mathcal{E}}), \quad (3.20)$$

Da posição z_1 , com velocidades iniciais u_1, v_1 , a partícula fará então k saltos no mesmo degrau, i.e., $n_i = 0, i = 2, 3, \dots, k+1$. Fazendo $u = u_1, v = v_1, z = z_1$ e $n_i = 0$ nas Eqs. (2.16)-(2.18), nós podemos mostrar indutivamente que as velocidades e a posição z_k da partícula após k saltos são dadas por

$$v_k = e_n^k, \quad (3.21)$$

$$u_k = 2 \sum_{i=1}^{k-1} e_t^i e_n^{k-i} + e_t^k(1 + \sqrt{\mathcal{E}}), \quad (3.22)$$

$$z_k = 1 - \kappa \left[1 + 2\sqrt{\mathcal{E}} + 4(1 + \sqrt{\mathcal{E}}) \sum_{i=1}^{k-1} (e_t e_n)^i + 8 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_t^j e_n^{2i-j} + 4 \sum_{i=1}^{k-1} e_n^{2i} \right]. \quad (3.23)$$

Como todas as somas são séries geométricas elas são facilmente calculadas, portanto

$$S_1 \equiv \sum_{i=1}^{k-1} e_t^i e_n^{k-i} = e_t e_n \frac{(e_n^{k-1} - e_t^{k-1})}{e_n - e_t}, \quad (3.24)$$

$$S_2 \equiv \sum_{i=1}^{k-1} (e_t e_n)^i = e_t e_n \frac{[1 - (e_t e_n)^{k-1}]}{1 - e_t e_n}, \quad (3.25)$$

$$S_3 \equiv \sum_{i=1}^{k-1} e_n^{2i} = e_n^2 \frac{[1 - e_n^{2(k-1)}]}{1 - e_n^2}, \quad (3.26)$$

$$S_4 \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_t^j e_n^{2i-j} = \frac{e_t S_3 - e_n S_2}{e_n - e_t}. \quad (3.27)$$

Usando as Eqs. (3.24)-(3.27), nós podemos mostrar, após um pouco de álgebra, que as Eqs. (3.21)-(3.23) tornam-se

$$v_k = e_n^k, \quad (3.28)$$

$$u_k = \frac{2e_t e_n (e_n^{k-1} - e_t^{k-1})}{e_n - e_t} + e_t^k(1 + \sqrt{\mathcal{E}}), \quad (3.29)$$

$$z_k = 1 - \kappa \left\{ \frac{1 + 3(e_n^2 + e_t e_n) + e_n^3 e_t}{(1 - e_n^2)(1 - e_t e_n)} + 4 \left[\frac{e_n + e_t}{e_n - e_t} \right] \left[\frac{(e_t e_n)^k}{1 - e_t e_n} - \frac{e_n^{2k}}{1 - e_n^2} \right] + 2 \left[\frac{1 + e_t e_n + 2(e_t e_n)^k}{1 - e_t e_n} \right] \sqrt{\mathcal{E}} \right\}. \quad (3.30)$$

Para a velocidade e a posição z da partícula no segundo degrau após o salto $n_{k+1} = 1$, substituímos as Eqs. (3.28), (3.29) e (3.30) no mapa (2.16)-(2.18) com $n = 1$, e depois de fazermos as simplificações, chegamos às equações abaixo

$$v_{k+1} = e_n \sqrt{1 + e_n^{2k}}, \quad (3.31)$$

$$u_{k+1} = e_t \left[A_k + \sqrt{1 + e_n^{2k}} + e_t^k \sqrt{\mathcal{E}} \right], \quad (3.32)$$

$$z_{k+1} = z_k + 1 - \kappa \left[1 + 2(A_k + e_t^k \sqrt{\mathcal{E}})(e_n^k + \sqrt{1 + e_n^{2k}}) \right], \quad (3.33)$$

onde

$$A_k = \frac{(e_n + e_t)(e_n^{k+1} - e_n^{k+1})}{e_n - e_t}. \quad (3.34)$$

Agora levamos as Eqs. (3.31) e (3.32) na Eq. (2.47) para encontrarmos a distância de parada. Simplificando o resultado, obtemos

$$d = 4\kappa e_n \left[\frac{e_n + e_t}{1 - e_n e_t} \right] \left[\frac{1 + e_n^{2k}}{1 - e_n^2} e_t \left(\frac{e_n^k - e_t^k}{e_n - e_t} + \frac{e_t^k}{e_n + e_t} \sqrt{\mathcal{E}} \right) \sqrt{1 + e_n^k} \right]. \quad (3.35)$$

Por fim, levamos as Eqs. (3.33) e (3.35) na Eq. (3.4) e depois de simplificarmos obtemos a função $f_{2k}(\mathcal{E})$

$$f_{2k}(\mathcal{E}) = 2 \left(\frac{1}{\kappa} - \alpha_k - \beta_k \sqrt{\mathcal{E}} \right), \quad (3.36)$$

onde

$$\alpha_k = \frac{1 + 3e_n(e_n + e_t) + e_n^3 e_t}{(1 - e_n^2)(1 - e_n e_t)} + \frac{(e_n + e_t)(1 + e_t e_n)(e_n^{k+1} - e_t^{k+1})(\sqrt{1 + e_n^{2(k+1)}} - e_n^{k+1})}{(e_n - e_t)(1 - e_n e_t)}, \quad (3.37)$$

$$\beta_k = \left[\frac{1 + e_n e_t}{1 - e_n e_t} \right] \left[1 + e_n^{k+1}(\sqrt{1 + e_n^{2(k+1)}} - e_n^{k+1}) \right]. \quad (3.38)$$

Vamos agora investigar os pontos fixos da função (3.36).

3.3.1 Pontos Fixos $f_{2k}(\mathcal{E}_{2k}^*) = \mathcal{E}_{2k}^*$

Denotando por $\mathcal{E}_{2k}^*$ os pontos fixos e resolvendo a equação $f_{2k}^*(\mathcal{E}_{2k}^*) = \mathcal{E}_{2k}^*$, para $\mathcal{E}_{2k}^*$, podemos facilmente mostrar que os pontos fixos são dados pela seguinte expressão

$$\mathcal{E}_{2k}^* = \left[\sqrt{\beta_k^2 + 2(\kappa^{-1} - \alpha_k)} - \beta_k \right]^2. \quad (3.39)$$

Da mesma forma que para o caso anterior, esses pontos fixos apresentam regiões de domínios no espaço tridimensional de parâmetros. Aqui, porém, devemos ter mais cuidado ao analisar esses domínios. Na Fig. (3.6) nós ilustramos o caso para $k = 3$ e agora descreveremos o procedimento para determinar as regiões de domínios.

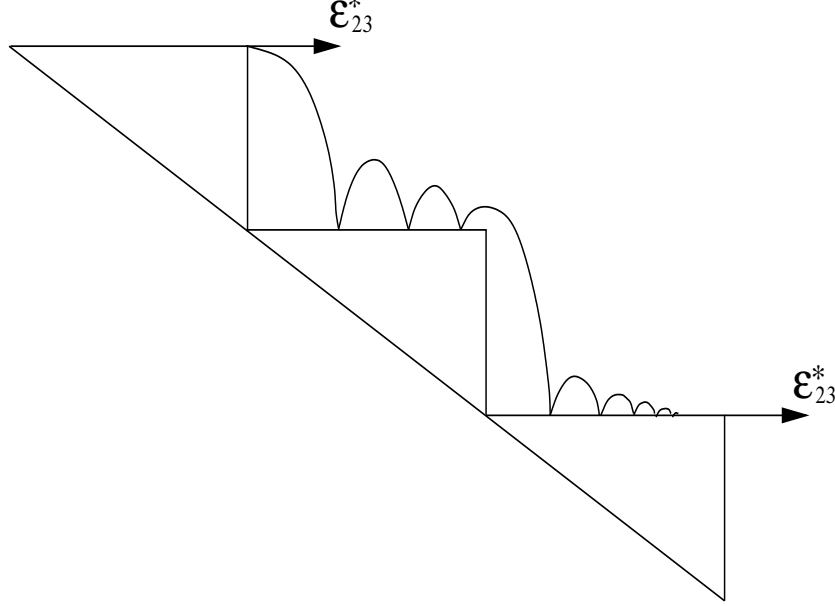


Figura 3.6: Dinâmica do ponto fixo $\mathcal{E}_{2k}^*$. A figura ilustra o caso $k = 3$

Um determinado ponto fixo caracterizado por k saltos no primeiro degrau existirá enquanto $z_k > 0$. À medida que κ aumenta, chegaremos à situação em que $z_k = 0$, quando surge o ponto fixo com $k - 1$ saltos no primeiro degrau. Daí, o ponto fixo com k saltos no primeiro degrau surge quando $z_{k+1} = 0$. Para encontrar as superfícies $\kappa_1 = \kappa_1^k(e_n, e_t)$ e $\kappa_2 = \kappa_2^k(e_n, e_t)$ que delimitam o domínio de existência do ponto fixo, substituímos o ponto fixo $\mathcal{E}_{2k}^*$, Eq. (3.39), na Eq. (3.30) para $k + 1$ saltos sobre o primeiro degrau e igualamos o resultado a zero. Resolvendo para κ encontramos a superfície $\kappa_1 = \kappa_1^k(e_n, e_t)$, a partir da qual o ponto fixo com k saltos no primeiro degrau existe. Se procedermos da mesma forma para κ_2 , só que desta vez para k saltos no primeiro degrau, encontramos a superfície $\kappa_2 = \kappa_2^k(e_n, e_t)$ em que esse ponto fixo deixa de existir. Essas superfícies formarão, portanto, regiões fechadas, onde apenas dentro delas os pontos fixos (3.39) existem. Para melhor facilitar a álgebra desse cálculo vamos reescrever a Eq. (3.30) como

$$z_k(\mathcal{E}) = 1 - \kappa \left[\delta_k - \gamma_k \sqrt{\mathcal{E}} \right], \quad (3.40)$$

onde

$$\delta_k = \frac{1 + 3(e_n^2 + e_t e_n) + e_n^3 e_t}{(1 - e_n^2)(1 - e_t e_n)} + 4 \left[\frac{e_n + e_t}{e_n - e_t} \right] \left[\frac{(e_t e_n)^k}{1 - e_t e_n} - \frac{e_n^{2k}}{1 - e_n^2} \right], \quad (3.41)$$

$$\gamma_k = 2 \left[\frac{1 + e_t e_n + 2(e_t e_n)^k}{1 - e_t e_n} \right]. \quad (3.42)$$

Então, a primeira superfície $\kappa_1^k(e_n, e_t)$ em que o ponto fixo começa a existir é encontrada fazendo $k \rightarrow k + 1$ na Eq. (3.40) e resolvendo $z_{k+1}(\mathcal{E}_{2k}^*) = 0$, ou seja,

$$z_{k+1}(\mathcal{E}_{2k}^*) = 1 - \kappa \left[\delta_{k+1} - \beta_k \gamma_{k+1} + \gamma_{k+1} \sqrt{\beta_k^2 + 2(\kappa^{-1} - \alpha_k)} \right] = 0. \quad (3.43)$$

É fácil mostrar, a partir desta equação, que a superfície $\kappa_1 = \kappa_1^k(e_n, e_t)$ correspondente será dada por

$$\kappa_1^k(e_n, e_t) = \left[\delta_{k+1}(\delta_{k+1} - \beta_k) + \gamma_{k+1} \pm \delta_{k+1} \sqrt{(\delta_{k+1} - \beta_k)^2 + 2(\gamma_{k+1} - \delta_k)} \right]^{-1}. \quad (3.44)$$

Como discutido antes, o ponto fixo $\mathcal{E}_{2k}^*$, deixa de existir quando no k -ésimo salto κ for tal que $z_k(\mathcal{E}_{2k}^*) = 0$, ou seja,

$$z_k(\mathcal{E}_{2k}^*) = 1 - \kappa \left[\delta_k - \beta_k \gamma_k + \gamma_k \sqrt{\beta_k^2 + 2(\kappa^{-1} - \alpha_k)} \right] = 0, \quad (3.45)$$

logo, a superfície $\kappa_2^k(e_n, e_t)$ será dada por

$$\kappa_2^k(e_n, e_t) = \left[\delta_k(\delta_k - \beta_k) + \gamma_k \pm \delta_k \sqrt{(\delta_k - \beta_k)^2 + 2(\gamma_k - \delta_k)} \right]^{-1}. \quad (3.46)$$

Portanto os pontos fixos $\mathcal{E}_{2k}^*$ existem dentro da região compreendida entre as superfícies $\kappa_1^k(e_n, e_t)$ e $\kappa_2^k(e_n, e_t)$. Depois de determinar os domínios de validade para os pontos fixos $\mathcal{E}_{2k}^*$, vamos investigar a sua estabilidade. A estabilidade é definida da mesma forma que para os pontos fixos $\mathcal{E}_N^*$, discutido na seção anterior. Do mapa (3.36) nós obtemos que os multiplicadores de Floquet $\lambda_{2k} = f'_{2k}(\mathcal{E}_{2k}^*)$, onde a linha denota derivada, são dados por

$$\lambda_{2k} = \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 2\beta_k^{-1}(\kappa^{-1} - \alpha_k)}}. \quad (3.47)$$

Nós observamos do gráfico para (3.4), Fig. (3.2), que cada ramo dessa função está definido em intervalos de energia e devem satisfazer $f_{2k}(\mathcal{E}) \geq 0$. De (3.36) nós vemos que isto acontece se $\kappa^{-1} \geq \alpha_k, \beta_k \sqrt{\mathcal{E}}$, desde que α_k e $\beta_k > 0$. Isto quer dizer que λ_{2k} é sempre negativo. Assim, a instabilidade só pode ocorrer para $\lambda_{2k} = -1$. Denotando

por κ_{2k}^{inst} , o valor de κ para o qual o ponto fixo torna-se instável e resolvendo a equação $\lambda_{2k}(\kappa_{2k}^{inst}) = -1$ nós encontramos que a superfície de instabilidade no espaço de parâmetros é dada pela relação abaixo.

$$\kappa_{2k}^{inst} = \frac{2}{2\alpha_k + 3\beta_k}. \quad (3.48)$$

Deste modo os pontos fixos (3.39) são estáveis para $\kappa_1^k \leq \kappa_{2k}^{inst}$ e instáveis para $\kappa_2^k \geq \kappa_{2k}^{inst}$.

3.4 Diagramas de Fase

Nas Figs. (3.7) e (3.8) temos dois diagramas de fase que apresentam os diferentes regimes dinâmicos. Na Fig. (3.7) temos os domínios de existência dos pontos fixos no plano (e_n, κ) para $e_t = 0.125$, enquanto na Fig. (3.8) temos os domínios no plano (e_t, κ) para $e_n = 0.2$. Nestes diagramas a curva de linha sólida superior corresponde a κ_∞ e a descontínua a κ_{inst} . Para que os pontos fixos (3.13) com $N = 1$ sejam estáveis o valor de κ deve estar compreendido entre $0 < \kappa < \kappa_{inst}$. As linhas tracejadas dentro dos domínios de existência dos pontos fixos (3.39) correspondem a κ_{2k}^{inst} . Portanto, a região de estabilidade desses pontos fixos é a região limitada pelas superfícies κ_{2k}^{inst} , κ_1^k e κ_2^k . Por conveniência, plotamos as curvas das regiões de existência dos pontos fixos abaixo da curva dada por κ_∞ . Quando κ é tal que $\kappa_{inst} < \kappa < \kappa_\infty$ e fora das regiões de estabilidade dos pontos fixos (3.39), tem-se movimento caótico, como indica o diagrama da Fig. (3.9), onde apenas as regiões de estabilidade dos pontos fixos são mostradas. Observamos que pouco abaixo da linha κ_{inst} mais de um ponto fixo estável existe, portanto a dinâmica da partícula será atraída para um desses pontos fixos dependendo das condições iniciais. Lembramos que a sequência de pontos fixos com $N = 2$ é infinita, ou seja, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Em geral haverá pontos fixos com $N > 2$. Pode-se mostrar, contudo, que esses pontos fixos com $N > 2$ existem em pequenas regiões do diagrama de fase, de forma que o diagrama abaixo dá uma boa descrição do comportamento genérico do sistema. Em princípio, seria possível calcular esses pontos fixos com $N > 2$, mas o cálculo é deveras longo e não será apresentado aqui.

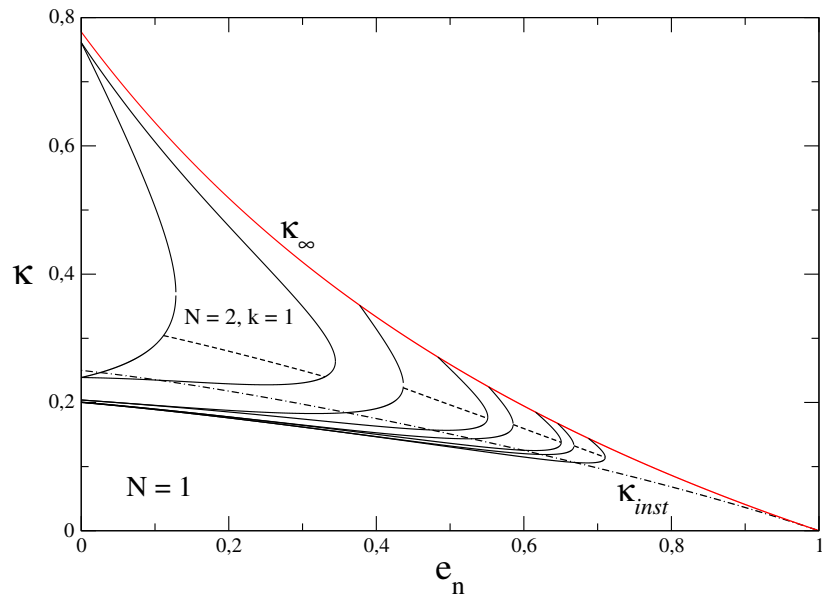


Figura 3.7: Diagrama de fase para os pontos fixos. O domínio de existência dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$.

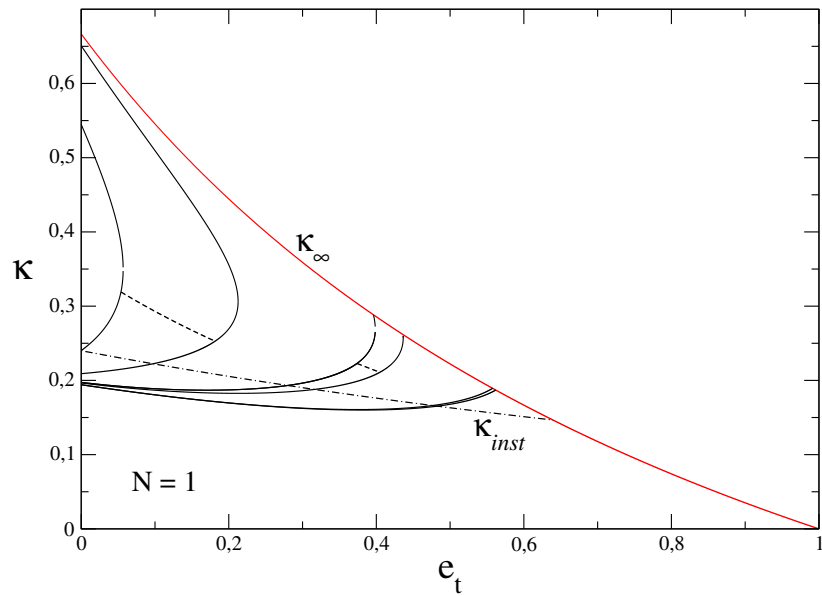


Figura 3.8: Diagrama de fase dos pontos fixos. O domínio de existência dos pontos fixos no plano $e_n = 0.2$.

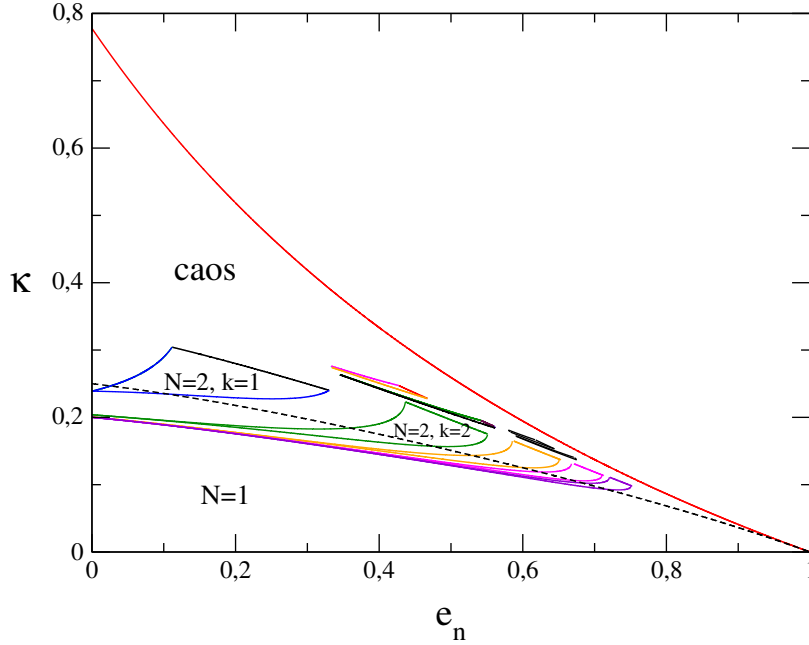


Figura 3.9: Diagrama de fase dos pontos fixos mostrando as regiões de estabilidade dos pontos fixos no plano $e_t = 0.125$.

3.5 Diagramas de Bifurcação

Apresentamos também nas Figs. (3.10)-(3.15) diagramas de bifurcação mostrando os domínios de pontos fixos e caos. Nestes diagramas temos a velocidade da partícula na saída de um salto após uma parada como função de κ . No primeiro diagrama, Fig. (3.10), para $e_n = 0.3$ e $e_t = 0.125$, o primeiro ramo corresponde aos pontos fixos com $N = 1$, enquanto o segundo ramo corresponde a um ponto fixo com $N = 2$. No quarto diagrama, para $e_n = 0.6$ e $e_t = 0.125$, Fig. (3.13), nós observamos que os dois ramos também correspondem a esses mesmos pontos fixos, porém, entre eles aparece órbitas periódicas de período muito grande. Em todos os diagramas nós notamos esses mesmos ramos entre outros e janelas dentro da região caótica correspondendo a pontos fixos de número de salto total $N > 2$.

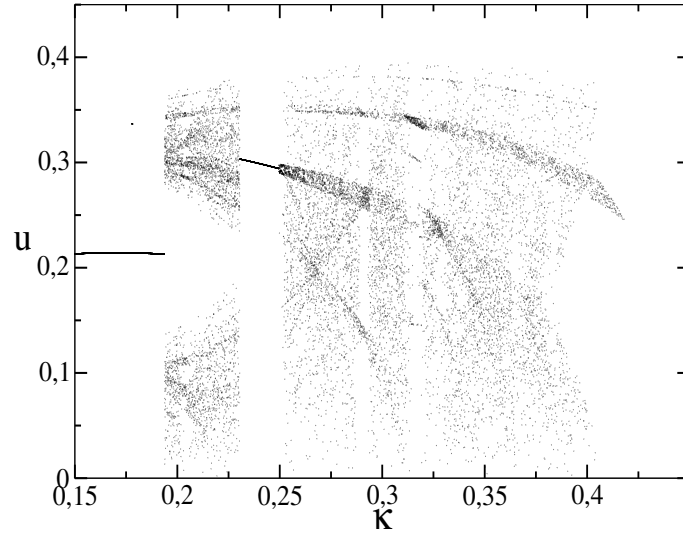


Figura 3.10: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.3$ e $e_t = 0.125$.

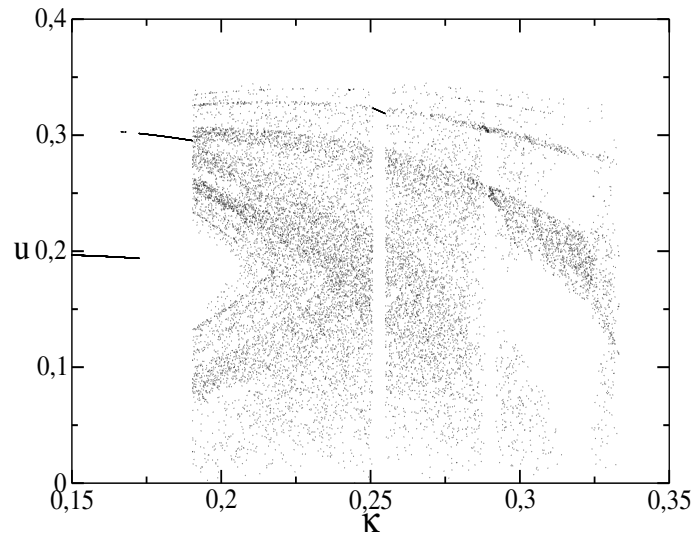


Figura 3.11: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.4$ e $e_t = 0.125$.

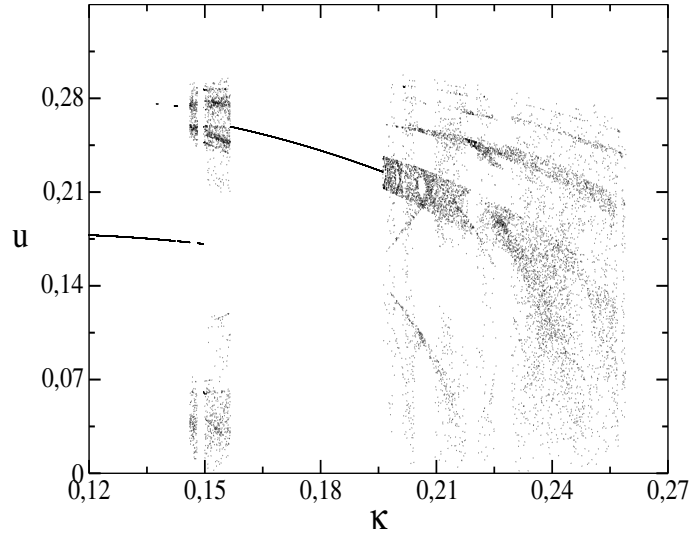


Figura 3.12: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.5$ e $e_t = 0.125$.

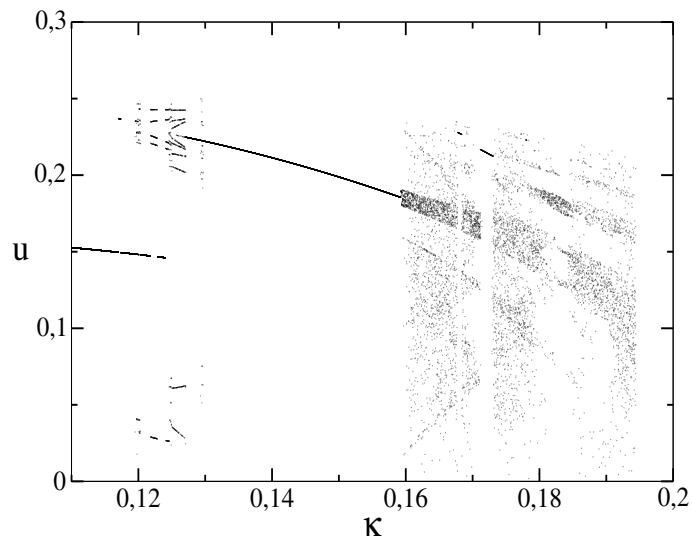


Figura 3.13: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.6$ e $e_t = 0.125$.

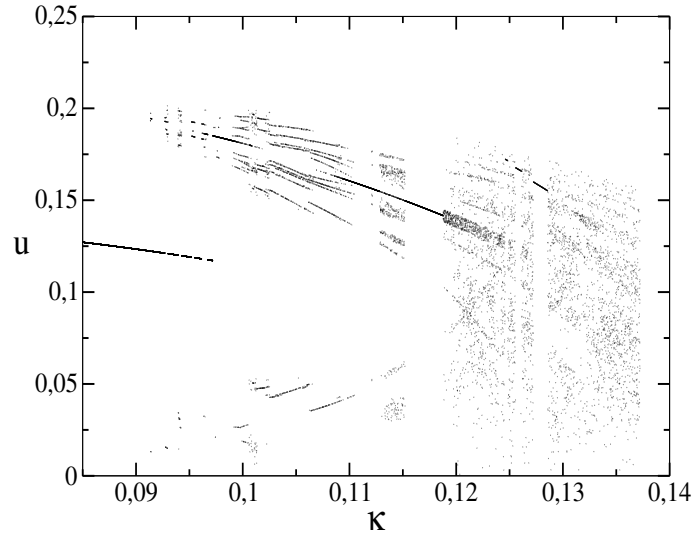


Figura 3.14: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.7$ e $e_t = 0.125$.

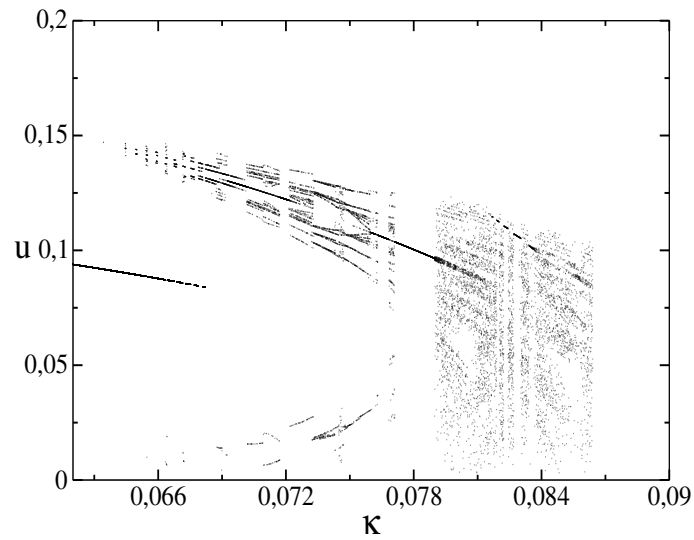


Figura 3.15: Diagrama de bifurcação para o mapa unidimensional com $e_n = 0.8$ e $e_t = 0.125$.

3.6 Velocidade Média

A fim de comparar o modelo com os resultados experimentais [43], estudaremos a velocidade média da partícula para os pontos fixos de $N = 1$. A comparação com os experimentos nos mostrará o quanto o modelo, no regime de pontos fixos com $N = 1$, está próximo do experimento. Uma vez que a partícula tenha alcançado o regime de salto único, a dinâmica terá sido atraída para um ponto fixo dado por (3.13). Assim a partícula move-se com uma velocidade média constante $\bar{V}_1$, onde o índice 1 refere-se a $N = 1$. Entre dois vãos consecutivos a velocidade média $\bar{V}_N$ em geral, é dada por

$$\bar{V}_N = \frac{NL}{\frac{v + \sqrt{v^2 + 2gcaN}}{gc} + 2\frac{\sqrt{v^2 + 2gcaN}}{gc} \frac{e_n}{1 - e_n} + t_d}, \quad (3.49)$$

onde $L = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $c \equiv \cos \phi$. O primeiro termo do denominador acima é o *tempo de vôo*, o segundo o *tempo de parada* e o terceiro o *tempo de deslizamento* que a partícula leva para deslizar do ponto de parada até o final do degrau, $z = 0$. Esse tempo é encontrado a partir da equação $u = u_0 + gst$, onde u é a velocidade da partícula no fim do degrau e u_0 é a velocidade inicial, $s \equiv \sin \phi$. Como a partícula desliza do repouso temos $u_0 = 0$, então $t_d = u/gs$. Usando as variáveis adimensionais para u e v da Eq. (2.8) e lembrando que $u = \sqrt{\mathcal{E}}$, nós temos que a velocidade média será

$$\bar{V}_N = \frac{N\sqrt{gca}(1 + \tau^2)^{1/2}}{\sqrt{2}(v + \sqrt{v^2 + N} + 2\sqrt{v^2 + N} \frac{e_n}{1 - e_n} + \sqrt{\mathcal{E}})}, \quad (3.50)$$

onde usamos o fato de que L pode ser reescrito como $L = a(1 + b^2/a^2)^{1/2}$ e $\tau \equiv \tan \alpha = b/a$. Introduzindo a velocidade média adimensional

$$\bar{\mathcal{V}} = \frac{\bar{V}}{\sqrt{gca}}, \quad (3.51)$$

ficamos com

$$\bar{\mathcal{V}}_N = \frac{N(1 + \tau^2)^{1/2}}{\sqrt{2}(v + \sqrt{v^2 + N} + 2\sqrt{v^2 + N} \frac{e_n}{1 - e_n} + \sqrt{\mathcal{E}})}. \quad (3.52)$$

Para termos a velocidade média no ponto fixo inserimos a Eq. (3.13) nessa expressão e observando que nesse regime $N = 1$ e $v = 0$, a velocidade média adimensional torna-se

$$\bar{\mathcal{V}}_1 = \frac{(1 + \tau^2)^{1/2}}{\sqrt{2} \left(\frac{1 + e_n}{1 - e_n} + \sqrt{\mathcal{E}_1^*} \right)}. \quad (3.53)$$

Para comparação com experimentos precisamos dimensionalizar essa expressão e escrevê-la em função do ângulo θ , onde $\theta = \phi + \pi/2 - \alpha$, que é o ângulo entre a

base da escada e a direção horizontal, veja Fig. (2.1). Para dimensionalizar basta retornar com a transformação (3.51) e fazermos $\phi = \theta - \pi/2 + \alpha$. Lembrando que

$$\kappa = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} = \frac{a}{b} \tan \phi,$$

escrevemos $\tan \phi$ em função de θ

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin(\theta - \pi/2 + \alpha)}{\cos(\theta - \pi/2 + \alpha)} = \frac{\sin \theta \sin \alpha - \cos \theta \cos \alpha}{\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha},$$

mas como

$$\cos \alpha = a/L, \quad \sin \alpha = b/L,$$

temos que

$$\tan \phi = \frac{\tau \sin \theta - \cos \theta}{\tau \cos \theta + \sin \theta}. \quad (3.54)$$

Agora inserindo a Eq. (3.13) na Eq. (3.53) temos

$$\bar{V}_1 = \frac{[(1 + \tau^2)/2]^{1/2}}{\frac{1+e_n}{1-e_n} - \frac{1+e_t e_n}{1-e_t e_n} + \sqrt{\frac{1}{\kappa} - \frac{4e_n^2(1-e_t^2)}{(1-e_t e_n)^2(1-e_n^2)}}},$$

$$\bar{V}_1 = \frac{[(1 + \tau^2)/2]^{1/2}}{\frac{2e_n(1-e_t)}{(1-e_n)(1-e_t e_n)} + \sqrt{\frac{\tau}{\tan \phi} - \frac{4e_n^2(1-e_t^2)}{(1-e_t e_n)^2(1-e_n^2)}}},$$

que com a transformação (3.51) e substituindo a Eq. (3.54), torna-se

$$\bar{V}_1 = \sqrt{ag \cos \phi} \frac{[(a^2 + b^2)/(2a^2)]^{1/2}}{\frac{2e_n(1-e_t)}{(1-e_n)(1-e_t e_n)} + \sqrt{\frac{\tau(\tau \cos \theta + \sin \theta)}{\tau \cos \theta - \sin \theta} - \frac{4e_n^2(1-e_t^2)}{(1-e_t e_n)^2(1-e_n^2)}}}. \quad (3.55)$$

A expressão para $\cos \phi$ em função de θ é $\cos \phi = (\tau \cos \theta + \sin \theta)a/L$. Substituindo essa expressão na equação acima temos, finalmente

$$\bar{V}_1 = \frac{[Lg(\tau \cos \theta + \sin \theta)/2]^{1/2}}{\frac{2e_n(1-e_t)}{(1-e_n)(1-e_t e_n)} + \sqrt{\frac{\tau(\tau \cos \theta + \sin \theta)}{\tau \cos \theta - \sin \theta} - \frac{4e_n^2(1-e_t^2)}{(1-e_t e_n)^2(1-e_n^2)}}}. \quad (3.56)$$

No experimento feito por Ristow *et al.* [43], eles mediram a velocidade média da esfera de raio R em função de $\sin \theta$, veja Fig. (1.2). A velocidade média foi investigada no regime B do diagrama de fase (1.3). Esse regime corresponde aos pontos fixos com $N = 1$ em nosso modelo, uma vez que no experimento a esfera descia um “degrau” de cada vez rolando sem saltar. Na Fig. (3.16) nós plotamos a expressão (3.56) com linhas sólidas, e os dados experimentais com os símbolos (Δ) , $(\diamond)$. Nós tomamos $L = 2r = 1$ cm, $g = 980 \text{ cm/s}^2$. Como podemos observar

da Fig. (3.16), o modelo fornece uma dependência de $\bar{V}_1$ com $\sin\theta$ que pode ser considerada em bom acordo com os dados experimentais. Observa-se nos dados experimentais da Fig. (3.16) uma mudança acentuada na velocidade média quando a inclinação θ aumenta. Essa mudança é atribuída à transição do regime B , de velocidade média constante, para o regime C , de saltos caóticos. Observando o diagrama de fase do nosso modelo (3.7) nós vemos que, quando a inclinação κ aumenta, para um dado e_t e e_n , nós passamos do regime de pontos fixos estáveis para o regime de pontos fixos instáveis, ou regime de salto caótico.

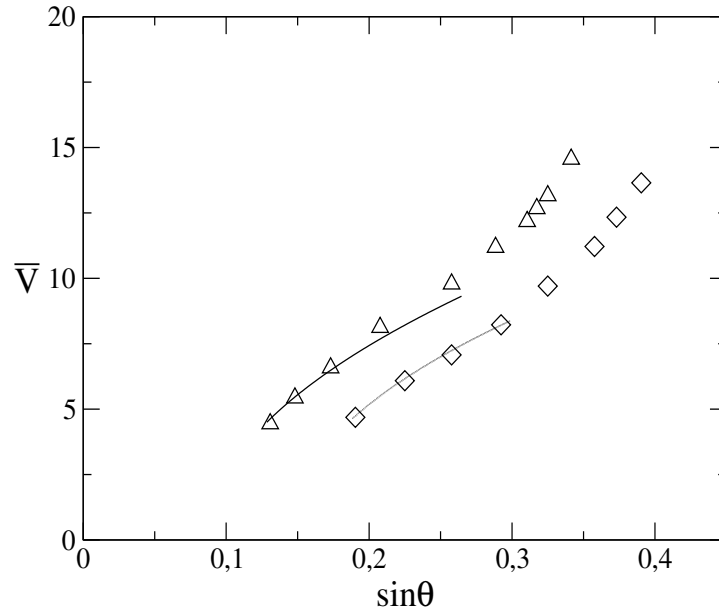


Figura 3.16: Comparação da velocidade média no experimento [43], símbolos ($\triangle$) e ($\diamond$), e no modelo, Eq. (3.56), linhas sólidas. Comparamos a curva teórica Eq. (3.56) com os dados experimentais que representam a velocidade média no ponto fixo $N = 1$. Os valores dos parâmetros foram $(\tau = 11.43, e_n = 0.1, e_t = 0.7)$, $(\tau = 6.94, e_n = 0.2, e_t = 0.2)$.

3.7 A Escada com Ruído

Até o presente, consideramos apenas o caso em que os degraus da superfície rugosa são regularmente distribuídos, i.e., todos têm mesmo comprimento. Deseja-

mos agora investigar o efeito de inhomogeneidade (ruído) nos degraus da escada. Nós introduziremos um ruído no comprimento e altura do degrau através de um número aleatório ϵ , uniformemente distribuído no intervalo $[-1,1]$. Desse modo nós consideramos o caso em que as dimensões do degrau variam uniformemente em torno dos valores médios $\bar{b}$ e $\bar{a}$. Assim, a cada colisão o degrau possui as dimensões dadas pelas seguintes fórmulas

$$b = \bar{b} + \delta\epsilon, \quad (3.57)$$

$$a = \bar{a} + \delta\frac{\epsilon}{\tau}, \quad (3.58)$$

onde $\delta \geq 0$ é um número dado e corresponde à “amplitude do ruído” e ϵ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[-1,1]$. Por conveniência vamos adimensionalizar as grandezas de comprimento usando o tamanho médio $\bar{b}$ do degrau como referência; ou seja na transformação (2.8) usamos $\bar{b}$ no lugar de b .

Em forma adimensional as Eqs. (3.57) tornam-se

$$b = 1 + \delta\epsilon, \quad (3.59)$$

$$a = \frac{1}{\tau}(1 + \delta\epsilon), \quad (3.60)$$

onde usamos o fato de que $\tau = \bar{b}/\bar{a}$. Como agora o comprimento e a altura do degrau variam de maneira aleatória, a análise desse caso deve ser toda numérica. Isto porque a presença de ruído elimina todos os estados estacionários, como pontos fixos e órbitas periódicas apresentados anteriormente. Como o comprimento dos degraus variam, o *número de salto* N , não pode ser calculado de forma explícita, como no caso sem ruído, mas deve ser calculado numericamente a cada salto. Uma vez determinado N , a distância vertical percorrida pela partícula será dada por

$$\sum_i^N a_i = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^N (1 + \delta\epsilon_i), \quad (3.61)$$

onde a_i é o comprimento de cada um dos degraus saltados e ϵ_i é o i -ésimo valor sorteado da variável aleatória ϵ . Assim, o tempo de voo (2.15) entre duas colisões é dado por

$$t = v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta\epsilon_i)}. \quad (3.62)$$

Assim, podemos mostrar que as equações para o mapa da escada com ruído serão dadas por

$$u' = e_t \left(u + v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta\epsilon_i)} \right), \quad (3.63)$$

$$v' = e_n \sqrt{v^2 + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta \epsilon_i)}, \quad (3.64)$$

$$z' = z + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta \epsilon_i) - 2\kappa u \left(v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta \epsilon_i)} \right) - \kappa \left(v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{\tau} \sum_i (1 + \delta \epsilon_i)} \right)^2. \quad (3.65)$$

Onde a última equação, para a variável z' , é obtida substituindo (3.62) na equação (2.11) para x_c e depois substituindo a expressão resultante na equação para z' , (2.14). Se fizermos $\delta = 0$ essas equações se reduzem às equações (2.16)-(2.18) do mapa para a escada sem ruído. Nós queremos encontrar como a velocidade média nesse caso varia com a amplitude do ruído δ . Abaixo mostramos um gráfico para a velocidade média em função de δ na região de ponto fixo $N = 1$ do espaço de fase de parâmetros da escada sem ruído (κ, e_n) para $e_t = 0.125$. Para esse gráfico nós tomamos $\kappa = 0.1$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$, que corresponde à região de pontos fixos $N = 1$ no diagrama de fase (3.7). Neste gráfico nós plotamos $\bar{V}/\bar{V}^*$, onde $\bar{V}^*$ é a velocidade média do ponto fixo. Nós observamos que a velocidade média decresce quadraticamente com o ruído, ou seja, mostra uma dependência do tipo $\bar{V}/\bar{V}^* - 1 \propto -\delta^2$.

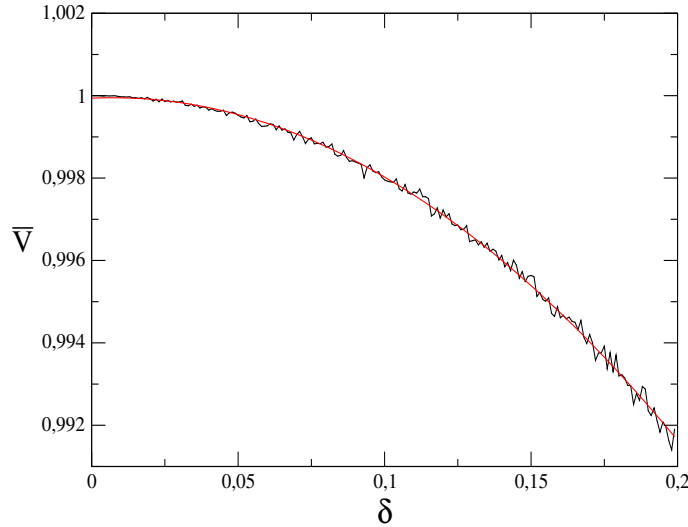


Figura 3.17: Velocidade média $\bar{V}$ versus a amplitude do ruído δ para $\kappa = 0.1$, $e_n = 0.2$ e $e_t = 0.125$.

Capítulo 4

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação estudamos uma classe de modelos para a dinâmica de grãos sobre superfícies. Em nossos modelos a partícula, ou grão, foi considerada puntiforme e não interagente e as superfícies possuíam um perfil periódico simples. Para a colisão entre a partícula e a superfície foi adotada uma regra de colisão simples caracterizada por dois coeficientes de restituição normal e tangencial à superfície. No primeiro modelo estudamos o movimento de uma partícula granular puntiforme caindo sob a ação da gravidade sobre uma superfície rugosa inclinada com perfil do tipo escada. A dinâmica do modelo foi descrita por um mapa tridimensional, cujo estudo analítico completo foi possível. Neste caso, a dinâmica do modelo revelou um comportamento complexo, apresentando várias “fases dinâmicas” no espaço de parâmetros (κ, e_t, e_n) do modelo, a saber:

1. Para pequenas inclinações, ou seja, abaixo da superfície definida por κ_∞ , um regime onde a partícula sempre pára.
2. Para inclinações intermediárias, entre as superfícies definidas por κ_∞ e κ_s , tem-se uma região em que coexistem regime estacionário (órbitas periódicas) e um regime em que a partícula acelera.
3. E, por fim, para ângulos maiores, ou seja, acima da superfície κ_s , um regime de salto em que a partícula acelera para qualquer condição inicial.

Apesar de sua simplicidade o modelo fornece resultados que concordam qualitativamente com o comportamento genérico observado em experimentos de uma bola movendo-se sobre uma superfície rugosa.

O segundo modelo corresponde a uma extensão do modelo anterior para o caso em que a partícula pára. Nessa versão, o movimento é reiniciado fazendo-se com que o grão deslize sem atrito até o final do degrau, quando se inicia um

novo salto e assim sucessivamente. Com esse modelo, pudemos explorar a região abaixo de κ_∞ , onde as órbitas seriam sempre desaceleradas no modelo original. Nessa região a dinâmica foi descrita em termos de um mapa unidimensional, ou mapa energia, que se caracteriza por ser um mapa contínuo por partes com muitos (infinitos) ramos. Este mapa também permitiu um estudo analítico e alguns de seus ramos foram obtidos exatamente. Esses ramos do mapa revelaram diversos pontos fixos que foram estudados possibilitando, assim, construirmos os diagramas de fase do modelo, Figs. (3.7) e (3.8). Nesse caso a dinâmica também apresenta vários regimes. Uma diferença importante, entretanto, é que esse modelo híbrido apresenta regiões caóticas, que não eram acessíveis no modelo original. (Lembre-se de que na versão original, uma vez que a partícula parava, a iteração do mapa era interrompida.)

Deste modo, concluímos que o estudo de modelos teóricos simples pode ser de grande valia, como uma primeira aproximação, para a compreensão de alguns aspectos relevantes da dinâmica de fluxos granulares. Por exemplo, o modelo forneceu alguns regimes dinâmicos observados em experimentos com uma esfera. Outro aspecto também previsto pelo modelo é a transição dos regimes observados nos experimentos. Também a dependência funcional da velocidade média com o ângulo de inclinação θ (no regime de pontos fixos $N = 1$), está em bom acordo com os dados experimentais. Evidentemente, mais estudos experimentais e teóricos são necessários. Como uma perspectiva de trabalhos futuros, estudaremos em seguida um modelo que consiste de uma partícula puntiforme colidindo elasticamente sobre uma superfície rugosa horizontal (piso), formado pela justaposição de arcos de círculos, Fig. (4.1).

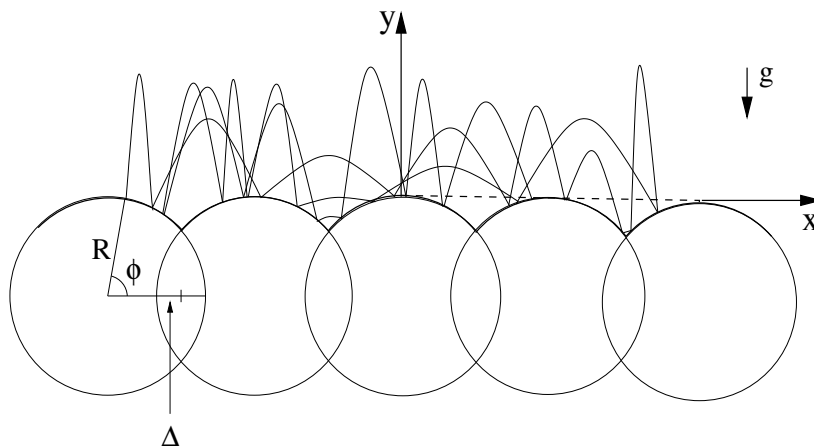


Figura 4.1: Um bilhar espacialmente estendido. O sistema consiste de uma partícula puntiforme movendo-se sob ação da gravidade e colidindo elasticamente sobre uma superfície rugosa formada por arcos de círculos.

Porém, um resultado preliminar que nós adiantamos agora é o da dependência do coeficiente de difusão D com a energia E da partícula. Na Fig. (4.2), nós vemos um comportamento oscilatório sobreposto a um crescimento linear do coeficiente de difusão com o aumento da energia. Resultado análogo foi visto em um modelo cuja superfície era formada por arcos de parábolas [49]. Um estudo mais detalhado desse fenômeno será realizado posteriormente.

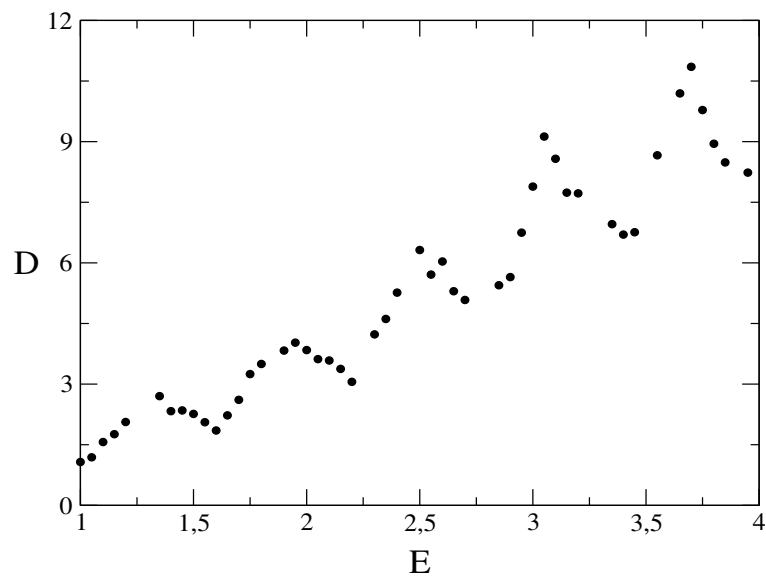


Figura 4.2: Dependência do coeficiente de difusão D com a energia E .

Bibliografia

- [1] Jacques Duran, *Sands, Powers, and Grains* An Introduction to the Physics of Granular Materials (Springer-Verlag New York, 2000).
- [2] M. Faraday, *Philos. Trnas. Roy. Soc. London* **52** (1831), 299.
- [3] I. Roberts *Proc. Roy. Soc.* **36**(1884), 226.
- [4] C. A. Coulomb. *Acad. Roy. Sci. Mem. Phys. Divers Savants* **7** (1773), 343.
- [5] W. J. W. Rankine, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **147** (1857), 9.
- [6] R. A. Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*(London: Methuen, 1941).
- [7] Jean Rajchenbach. Granular flows. *Advances in Physics*, 2000, Vol. 49, No. 2, 229-256.
- [8] P. G. de Gennes. Reflections on the mechanics of granular matter. *Physica A* **267-293**, 261 (1998).
- [9] P. Dantu, in *Proc. of the Fourth International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Eng.*, vol. 1 (London: Butterworths Scientific, 1957), p. 144.
- [10] Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel and Robert P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 68, No. 4. October 1996.
- [11] Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel and Robert P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Physics Today*, April 1996.
- [12] Leo P. Kadanoff. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 1. January 1999.
- [13] H. A. Janssen. *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39** (35)(1895), 1045.
- [14] Lord Rayleigh. *Phil. Mag. Ser 6* **11** (61) (1906), 129.

- [15] Klaus Kroy, Gerd Sauermann, and Hans J. Hermann. Minimal Model for Sands. *Phys. rev. Lett.* **88**, 5 (2002).
- [16] J. Duran, T. Mazozi, S Luding, E. Clément, and J. Rajchenbach, *Phys Rev. E* **53** (1996), 1923.
- [17] S. F. Edwards and C. C. Mounfield, *Phys. A* **210** (1994), 290.
- [18] J. Rajchenbach, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 2221.
- [19] P.-A. Lemieux, D. J. Durian, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4273.
- [20] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381-384 (1987).
- [21] C. Tang and P. Bak. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2347 (1988).
- [22] Sidney R. Nagel. Instabilities in a sandpile. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 64, No. 1, January 1992.
- [23] E. Altshuler, O. Ramos, C. Martínez, L. E. Flores, and C. Noda. Avalanches in One-Dimensional Piles with Different Types of Bases. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 5490 (2001).
- [24] David Hughes and Maya Paczuski. Large Scale Structures, Symetry, and Universality in Sandpiles. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 54302 (2002).
- [25] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. *J. Phys. A: Math Gen.* **33** (2000) L33-L39.
- [26] D. J. Durian, *J. Phys.: Condes. Matter* **12** (2000) A507.
- [27] M. A. Aguirre, N Nerone, and A. Calvo. Influence of the number of layers on teh equilibrium of a granular packing. *Phys. rev. E* **62** 738 (2000).
- [28] M. A. Aguirre, I. Ippolito A. Calvo, C. Henrique D. Bideau. *Powder Technology* **92** (1997) 75-80.
- [29] D. V. Khakhar, Ashish V. Orpe, Peter Andresén and J. M. Ottino. *J. Fluid Mech.* (2001), vol 441, pp. 255-264.
- [30] L. Quartier, B. Andeotti, S. Douady, and A. Daerr. Dynamics of a grain on a sandpile model. *Phys, Rev E* **62**, 8299 (2000).
- [31] L. Samson, I. Ippolito, D. Bideau, G. G. Batrouni, *Chaos* **9** (2000) 639.
- [32] C. Ancey, P. Evesque, P. Coussot, *J. Phys. I* **4** (1994) 1161.

- [33] G. G. batrouni, S. Dippel, L. Samson, Phys. Rev. E 53 (1996) 6496.
- [34] S. Dippel, G. G. Batrouni, D. E. Wolf, Phys. Rev. E 54 (1996) 6845.
- [35] S. Dippel, G. G. Batrouni, D. E. Wolf, Phys. Rev. E 56 (1997) 3645.
- [36] U. M. B. Marconi, M. Conti, A Vulpiani, Europhys. Lett. 51 (2000) 685.
- [37] Alexandre Valance and Daniel Bideau. Dynamics of a ball bouncing on a rough inclined line. *Phys. Rev. E* **57**, 1886 (1998).
- [38] R. L. Costa, J. J. P. Veerman and G. L. Vasconcelos. Europhys. Lett. **60** (2), pp. 220-226 (2002).
- [39] Giovanni L. Vasconcelos and J. J. P. Veerman. Geometrical model for a particle on a rough inclined surface. *Phys. Rev. E* **59**, 5641 (1999).
- [40] Giovanni L. vasconcelos, J. J. P. Veerman. Geometrical models for grain dynamics. *Physica A* **251-259**, 271 (1999).
- [41] F. -X. Rigidel, R. Julien, G. H. Ristow, A. Hansen, and D. Bideau, J. Phys. I **4**, 261 (1994).
- [42] F. -X. Rigidel, A. Hansen, and D. Bideau, Europhys. Lett. **28**, 13 (1994).
- [43] Gerald H. Ristow, François-Xavier Rigidel and Daniel Bideau. Different characteristics of the motion of a single particle on a bumpy inclined line. *J. Phys. I France*, **4**:1161, 1994.
- [44] C. D. Jan, H. W. Shen, C. H. Ling, and C. I. Chen, in *Proceedings of the 9th Conference of Engineerings Mechanics, College Station, Texas*, edited by L. D. Lutes and J. M. Niedzwecki (American Society of Civil Engineers, New York, 1992), pp. 768.
- [45] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [46] N. Fiedler-Ferrara, C. P. Cintra do Prado, *Caos uma Introdução* (Editora Edgar Blucher, São Paulo, 1994).
- [47] J. J. P. Veerman, F. V. Cunha, Jr., G. L. Vasconcelos. Dynamics of a granular particle on a rough surface with a staircase profile. *Physica D* **168-169**, 220 (2002).
- [48] G. L. Vasconcelos, F. V. Cunha-Jr., J. J. P. Veerman. Chaotic behavior in a model for grain dynamics. *Physica A* **261-267**, 295 (2001).

-
- [49] Takahisa Harayama, Pierre Gaspard. Diffusion of particles bouncing on a one-dimensional periodically corrugated floor. *Phys. Rev. E* **64**, (2001)