



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

### **ANÁLISE DIAGRAMÁTICA PARA CAVIDADES CAÓTICAS DE BARREIRA DUPLA: EQUIVALÊNCIA COM TEORIA QUÂNTICA DE CIRCUITOS**

por

**Anderson Luiz da Rocha e Barbosa**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Antonio Murilo Santos Macedo (Orientador-UFPE)

Prof. Antônio Azevedo da Costa (DF – UFPE)

Prof. Francisco Anacleto Barros Fidelis Moura (DF - UFAL)

Recife - PE, Brasil  
Abril - 2005



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone ( ++ 55 81 ) 2126-8449/2126-8450 - Fax ( ++ 55 81 ) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

Anderson Luiz da Rocha e Barbosa

### ANÁLISE DIAGRAMÁTICA PARA CAVIDADES CAÓTICAS DE BARREIRA DUPLA: EQUIVALÊNCIA COM TEORIA QUÂNTICA DE CIRCUITOS

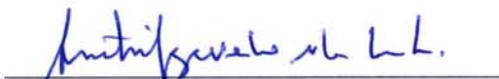
A Banca Examinadora composta pelos Professores Antonio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), Antônio Azevedo da Costa, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato:

( ) Aprovado com Distinção      (X) Aprovado      ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos sete dias do mês de abril de 2005.

  
Prof. Antonio Murilo Santos Macêdo  
Presidente e Orientador

  
Prof. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

  
Prof. Antônio Azevedo da Costa

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente aos meus pais José D. Barbosa e Maria José R. Barbosa, que sempre me apoiaram. A minha irmã, Bianca, e a Tânia pela confiança em mim depositada.

Gostaria de agradecer particularmente ao professor Antônio Murilo pela orientação séria e dedicada que me foi dada.

Por fim, quero demonstrar minha gratidão à CNPq pelo apoio financeiro aos meus estudos.

## Resumo

Neste trabalho apresentamos um conjunto de equações algébricas não-lineares acopladas baseadas na distribuição do núcleo de Poisson que descreve as propriedades estatísticas de uma cavidade caótica conectada a dois guias com barreiras de transparências arbitrárias (ou ponto quântico balístico). As equações são calculadas a partir da técnica diagramática [P. W. Brouwer e C. W. Beenakker, *J. Math. Phys.* **37**, 4904 (1996)] realizando uma média sobre o grupo unitário no limite semiclássico. A teoria de circuitos de Nazarov não permite uma comparação direta com a análise diagramática no caso de barreiras com transparência arbitrária, devido a dificuldade de se determinar a relação característica pseudo-corrente-voltagem de um conector arbitrário do circuito. Este problema foi recentemente resolvido por um novo tratamento da teoria de circuito [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)] que combina esta teoria com o modelo- $\sigma$  não-linear supersimétrico. O novo tratamento gera uma equação polinomial quártica que coincide com os resultados do método diagramático para os quatro primeiros cumulantes da estatística de contagem como também para a densidade média de autovalores de transmissão nos casos de barreiras simétricas e junção de tunelamento. Isto fornece fortes evidências para a equivalência matemática entre o sistema de equações algébricas da técnica diagramática com a equação polinomial da teoria de circuitos. A completa equivalência desses métodos seria um resultado não trivial, devido ao fato do princípio de concatenação semiclássico, que é usado para calcular a equação polinomial na teoria de circuitos, não ter representação direta na formulação diagramática. Esperamos que nosso resultado ajude a estabelecer uma maior conexão entre os recentes desenvolvimentos independentes de ambos os métodos em áreas como spintrônica e dispositivos supercondutores híbridos.

## Abstract

In this work we derive a set of coupled non-linear algebraic equations for the asymptotics of the Poisson kernel distribution, describing the statistical properties of a two-terminal double-barrier chaotic billiard (or ballistic quantum dot). The equations are calculated from a diagrammatic technique [P. W. Brouwer e C. W. Beenakker, *J. Math. Phys.* **37**, 4904 (1996)] for performing averages over the unitary group. Nazarov's circuit theory does not allow for a direct comparison with the diagrammatic approach for arbitrary values of the barriers's transparencies, because of the intrinsic difficulty to determine the average pseudo-current-voltage characteristics of an arbitrary circuit element. This difficulty was recently removed by a novel systematic treatment presented in [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)], in which circuit theory is combined with the supersymmetric non-linear  $\sigma$ -model. The problem was reduced to a comparison between a pair of coupled non-linear algebraic equations (diagrammatic technique) and a polynomial equation of fourth order (circuit theory). Exact agreement was found for a variety of quantities, such as the first four cumulants of the full counting statistics and the average transmission eigenvalue density for symmetric barriers and tunnel junctions. The complete equivalence of these approaches is a non-trivial result, because the semiclassical concatenation principle, used to derive circuit theory equations, has no obvious counterpart in the diagrammatic method. We expect our result to help establishing a direct connection between several recent independent developments of both approaches, such as those in magnetoelectronics and normal-superconducting hybrid systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Teoria de Espalhamento . . . . .	5
1.1.1	Matriz de Espalhamento . . . . .	7
1.1.2	Conservação do Fluxo de Corrente . . . . .	8
1.1.3	Matriz de Transferência . . . . .	9
1.2	Fórmula de Landauer . . . . .	10
1.2.1	Dedução da Fórmula de Landauer . . . . .	10
1.2.2	Estatística Linear . . . . .	13
1.2.3	Ruído de Disparo . . . . .	14
1.3	Teoria Estatística de Níveis de Energia e Autovalores de Transmissão	15
1.3.1	Ensemble de Wigner-Dyson . . . . .	15
1.3.2	Ensemble Circular . . . . .	17
1.4	Núcleo de Poisson . . . . .	18
1.5	Estatística de Contagem . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Técnica Diagramática</b>	<b>22</b>
2.1	Média sobre um Polinômio da Matriz Unitária . . . . .	23
2.2	Média sobre um Polinômio da Matriz Simétrica Unitária . . . . .	25
2.3	Técnica Diagramática . . . . .	26
2.4	Sumário das Regras Diagramáticas . . . . .	29
2.5	Limite Semiclássico ( $N \gg 1$ ) . . . . .	30
2.6	Aplicação em Cavidades Caóticas . . . . .	32
2.6.1	Média da Condutância para Contatos Ideais . . . . .	32
2.6.2	Média da Condutância para Contatos não Ideais . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Densidade dos Autovalores de Transmissão</b>	<b>37</b>
3.1	Cavidade Caótica com Guias Ideais . . . . .	38
3.2	Cavidade Caótica com Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias .	42

3.2.1	Cavidade Caótica com Barreiras Simétricas . . . . .	45
3.2.2	Cavidade Caótica com Duas Junções de Tunelamento . . . . .	46
3.2.3	Interpretação Semiclássica: Cavidade Caótica com Duas Junções de Tunelamento . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Teoria de Circuitos</b>	<b>57</b>
4.1	Conceitos Básicos da Teoria de Circuitos . . . . .	58
4.1.1	Cavidade Caótica com Contatos Ideais . . . . .	63
4.2	Cavidade Caótica com Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias .	64
4.2.1	Cavidade Caótica com Barreiras Simétricas . . . . .	66
4.2.2	Cavidade Caótica com Duas Junções de Tunelamento . . . . .	67
4.2.3	Cavidade Caótica com um Contato Ideal e uma Barreira de Transparência Arbitrária . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Técnica Diagramática e Teoria de Circuitos</b>	<b>71</b>
5.1	Cavidade Caótica com Contatos Ideais . . . . .	71
5.2	Cavidade Caótica com Contatos não Ideais . . . . .	73
5.2.1	Cavidade Caótica com Duas Barreiras Simétricas . . . . .	74
5.2.2	Cavidade Caótica com Duas Junções de Tunelamento . . . . .	75
5.2.3	Cavidade Caótica com um Contato Ideal e uma Barreira de Transparência Arbitrária . . . . .	75
5.2.4	Cavidade Caótica com Duas Barreiras de Transparências Ar- bitrárias . . . . .	76
5.2.5	Interpretação Semiclássica de uma Cavidade Caótica com Dois Contatos de Transparências Arbitrárias . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Resultado dos Coeficientes <math>V_{c_1, \dots, c_k}</math> e <math>W_{c_1, \dots, c_k}</math> para <math>n \leq 3</math> dos EUC e EOC</b>	<b>88</b>
<b>B</b>	<b>Valor do Quarto Cumulante</b>	<b>90</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

# Lista de Figuras

1.1	Escala de comprimentos característicos para transporte coerente em baixas temperaturas. O regime localizado está entre $L_\phi$ e $\xi$ ( $\xi$ é o comprimento de localização), o difusivo entre $\xi$ e $l_e$ e o balístico entre $l_e$ e $\lambda_F$ . . . . .	2
1.2	Esquema ilustrativo de um condutor difusivo (esquerda) e balístico (direita). . . . .	3
1.3	Flutuação da condutância em função do campo magnético perpendicular. A amostra é um fio de Au com 310nm de comprimento de 25nm de largura. A flutuação é $0.3e^2/h$ , bem próximo do valor teórico que é de $\sqrt{\frac{1}{15}}e^2/h$ . A figura foi tirada da ref. [1]. . . . .	4
1.4	Cavidade 2D com dois guias. As setas dentro dos guias representam ondas entrando e saindo da cavidade. . . . .	5
1.5	Duas amostras mesoscópicas em série. Elas são conectadas por guias ideais e cada uma tem sua matriz de espalhamento bem definida $S_1$ (esquerda) e $S_2$ (direita). . . . .	9
1.6	Condutância quantizada em unidades de $e^2/h$ (curva 1) e a potência do ruído de disparo a frequência nula em unidades de $e^3/4h$ (curva 2) versus $\xi = 2\pi(\varepsilon_F - V_0)/hw_x$ onde $\varepsilon_F$ é a energia de Fermi de um ponto quântico bidimensional com $w_y = 4w_x$ . O gráfico foi tirada da ref. [2]. . . . .	11
1.7	Amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios com potenciais eletroquímicos $\mu_1$ e $\mu_2$ . . . . .	12
1.8	Bilhar mesoscópico na forma de um estádio retirado da ref. [1]. Os elétrons se movem na região escura. . . . .	15
2.1	Cavidade caótica conectadas a dois guias contendo barreiras de tunelamento. . . . .	23

2.2	$U_{ab}$ e $U_{\alpha\beta}^*$ são representados por blocos onde os pontos pretos caracterizam os índices $a$ e $\alpha$ e os pontos brancos os índices $b$ e $\beta$ . A matriz de projeção $A_{ij}$ indica o somatório sobre os índices ao conectar um ponto a outro sempre no sentido antihorário até fechar o circuito, veja fig 2.3. . . . . .	27
2.3	Funções $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$ e $g(U) = \text{Tr}(AUBUCU^\dagger DU^\dagger)$ representadas. . . . .	28
2.4	Média das funções $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$ e $g(U) = \text{Tr}(AUBUCU^\dagger DU^\dagger)$ representadas na fig. 2.3. . . . .	29
2.5	Análise diagramática para $\langle f(U) \rangle$ com $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$ , onde a matriz $U$ é unitária simétrica. . . . .	29
2.6	Representação diagramática da função $f_n(U)$ (acima). Diagrama escada com o maior número de ciclos- $U$ e $T$ possíveis para a $\langle f_n(U) \rangle$ (abaixo). . . . .	34
2.7	Acima, diagrama maximamente cruzado que contribui para a localização fraca da condutância média, à direita e à esquerda temos uma estrutura escada. Abaixo, estrutura maximamente cruzada em forma de diagrama escada. . . . .	35
2.8	Acima, diagrama maximamente cruzado que contribui para a localização fraca da condutância média, à direita e à esquerda temos uma estrutura escada. Abaixo, estrutura maximamente cruzada em forma de diagrama escada. . . . .	36
3.1	Representação diagramática da funções de Green, eq. (3.4) e (3.5). . . . .	39
3.2	Representação diagramática da equação de Dyson para $F_2$ , eq. (3.11). . . . .	40
3.3	Distribuição de probabilidade de transmissão através de junções de tunelamento com $\Gamma_1 = 0,02$ e $\Gamma_2 = 0,03$ . A figura foi tirada da ref. [3]. . . . .	47
3.4	Elétron sendo transmitido através de uma barreira com $\Gamma \ll 1$ . . . . .	50
3.5	(a) Corresponde à ausência de partícula entre as barreiras; (b) Corresponde à presença de uma partícula entre as barreiras. . . . .	51
3.6	(a) Partícula sendo transmitida pelas duas barreiras; (b) A partícula em $t = 0$ já havia sido transmitida através da primeira barreira. . . . .	52

---

4.1	Circuito geral como $i$ conectores (nós e terminais). $R_i$ representa o valor da resistência ôhmica do $i$ -ésimo elemento difusivo e $\theta_i$ representa o valor do potencial complexo no $i$ -ésimo conector. Cada ponto ao longo do circuito representa um nó e o valor de $\theta_i$ deve ser calculado pela teoria de circuitos, usando os principio de conservação de corrente. A função $\Phi_i$ para $i = 1, 2$ representa os potenciais nos terminais do circuito. . . . .	58
4.2	Circuito com um elemento difusivo $R$ e dois nós $\theta_1$ e $\theta_2$ . . . . .	59
4.3	Circuito equivalente ao da fig 4.2 com a resistência localizada na extremidade. . . . .	60
4.4	Circuito auxiliar geral no limite $R \rightarrow 0$ , ou seja, eliminação completa da parte difusiva. . . . .	61
4.5	Circuito auxiliar com um nó, $\theta$ , e contatos ideais. . . . .	62
4.6	Circuito auxiliar com um nó, $\theta$ , e contatos com barreiras arbitrárias, $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ . . . . .	64
5.1	A figura ilustra uma cavidade caótica acoplada via barreiras de transparências $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ aos reservatórios de elétrons. . . . .	78

# Lista de Tabelas

1.1	Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana $\mathcal{H}$ e a matriz unitária de autovetores $U$ são classificadas pelo índice $\beta$ dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal ( $SRT$ ) e simetria de rotação de spin ( $SRS$ ). . . . .	17
A.1	Denominadores $A_n$ dos coeficientes $V_{c_1, \dots, c_k}$ para $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ .	88
A.2	Denominadores $B_n$ dos coeficientes $W_{c_1, \dots, c_k}$ para $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ .	89
A.3	Numeradores $A_n V_{c_1, \dots, c_k}$ dos coeficientes $V_{c_1, \dots, c_k}$ para $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ . Os denominadores $A_n$ são dados na tabela A.1. . . . .	89
A.4	Numeradores $B_n W_{c_1, \dots, c_k}$ dos coeficientes $W_{c_1, \dots, c_k}$ para $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ . Os denominadores $B_n$ são dados na tabela A.2. . . . .	89

# Capítulo 1

## Introdução

Nas duas últimas décadas a área de sistemas eletrônicos *mesoscópicos* tem sido alvo de intenso estudo. Sistemas mesoscópicos abrangem um domínio que se estende desde sistemas macroscópicos até microscópicos. Seu tamanho é suficientemente pequeno para que a coerência de fase seja mantida pelos elétrons, sendo necessário um tratamento quântico completo para descrever suas propriedades de transporte. Porém, é grande o bastante para não podermos descrevê-lo de forma prática através de uma abordagem microscópica, visto que uma pequena mudança nos detalhes microscópicos (localização da impureza e contorno da amostra) mudaria completamente os resultados. O que fazemos então é uma análise estatística: consideramos a média sobre um ensemble de amostras macroscopicamente equivalentes mas com estruturas microscópicas diferentes.

A faixa de escalas que caracteriza a física mesoscópica vai do comprimento de coerência de fase  $L_\phi$  (este é o comprimento característico para a interferência de funções de ondas eletrônicas e é a maior escala de comprimento), até o comprimento de onda de Fermi  $\lambda_F$ . Outra escala importante na física mesoscópica é o caminho livre médio  $l_e$ . Ele é o comprimento médio entre dois espalhamentos elásticos consecutivos e está relacionado ao tempo de espalhamento elástico  $\tau_e$  por  $l_e = v_F \tau_e$  ( $v_F$  é a velocidade de Fermi). Temos que  $L_\phi \geq l_e \geq \lambda_F$ , veja fig. 1.1. Entre essas escalas podemos distinguir três regimes: balístico, difusivo e localizado.

Espalhamentos elásticos conservam não só o momento e a energia mas também inserem uma fase fixa na função de onda da partícula, mantendo a coerência de fase. Quando o sistema se encontra no regime balístico o comprimento da amostra mesoscópica ( $L$ ) é menor que o caminho livre médio ( $l_e \geq L$ ), então os elétrons praticamente não sofrem nenhum tipo de colisão. Já no regime difusivo o comprimento do condutor mesoscópico é bem maior que o caminho livre médio ( $L > l_e$ ),

produzindo diversas colisões elásticas antes de perder a coerência de fase, tornando o sistema difusivo. O comprimento de relaxação de fase para amostras difusivas é dado por  $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$ , onde  $D$  é a constante de difusão e  $\tau_\phi$  é o tempo de relaxação de fase. Veja fig. 1.2.

As propriedades de transporte que surgem na física mesoscópica diferem bastante da descrição clássica. Exemplos bem conhecidos são a universalidade da flutuação da condutância, a localização fraca e o ruído de disparo. Esses fenômenos são independentes do tamanho e do grau de desordem da amostra mas dependem inteiramente de simetrias intrínsecas do sistema (simetria de reversão temporal, simetria de rotação de spin).

Flutuações na condutância podem ser observadas em uma única amostra como função do campo magnético, veja fig. 1.3. As flutuações são padrões estocásticos independentes do tempo que desaparecem lentamente com o aumento da temperatura. Os padrões dependem, no entanto, da distribuição de impurezas e variam de amostra para amostra. A localização fraca é uma ligeira diminuição da condutância para partículas sem spin na ausência de campo magnético. Esse efeito ocorre devido a maior probabilidade de reflexão das partículas devido a interferências construtivas entre trajetórias revertidas no tempo. O ruído de disparo surge da natureza discreta da carga dos elétrons que causa uma flutuação dependente do tempo na corrente que persiste a baixas temperaturas. Essas flutuações são chamadas de “ruído de disparo” para diferenciá-las das flutuações térmicas que ocorrem para temperaturas não nulas. Outra diferença entre os dois tipos de flutuações é que o ruído de disparo é proporcional à voltagem, enquanto o ruído térmico ocorre a  $V = 0$ . O ruído de disparo pode ser usado em sistemas quânticos como ferramenta para revelar

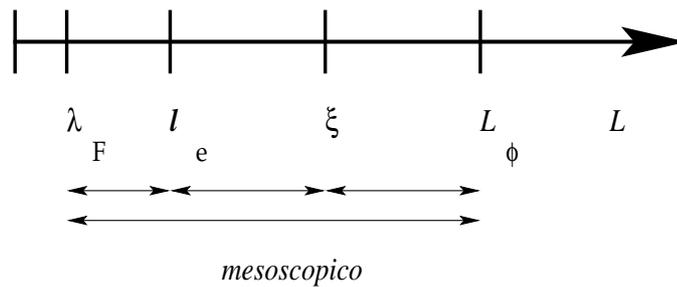


Figura 1.1: Escala de comprimentos característicos para transporte coerente em baixas temperaturas. O regime localizado está entre  $L_\phi$  e  $\xi$  ( $\xi$  é o comprimento de localização), o difusivo entre  $\xi$  e  $l_e$  e o balístico entre  $l_e$  e  $\lambda_F$ .

informações sobre a correlação entre as cargas [2].

Wigner e Dyson [4, 5] introduziram originalmente a *teoria de matrizes aleatórias* (TMA) para descrever as propriedades estatísticas do espectro resonante de núcleos complexos. Hoje ela tem sido uma ferramenta muito usada em física mesoscópica devido a dois fatores: (1) Validade do ensemble de Wigner-Dyson na descrição de sistemas quânticos caóticos; (2) Possibilidade de relacionar as propriedades universais de matrizes aleatórias diagonais por blocos e a universalidade da flutuação da condutância em condutores desordenados. Estes fatos levaram ao desenvolvimento da TMA para transporte quântico em cavidades fechadas e abertas descritas pelo hamiltoniano e pela matriz de espalhamento respectivamente, assim como para fios quânticos [1, 6].

Altshuler [7], Lee e Stone [8] apresentaram a primeira explicação teórica da universalidade na flutuação da condutância. Há dois aspectos relevantes nesta universalidade: (1) a variância da condutância,  $\text{Var}G$ , é da ordem  $(e^2/h)^2$ , independente do tamanho da amostra ou da desordem; (2)  $\text{Var}G$  decresce por um fator de dois se a simetria a reversão temporal é quebrada por um campo magnético. A teoria de Altshuler-Lee-Stone é baseada na técnica diagramática perturbativa para metais desordenados. Na presença de simetria de reversão temporal, duas classes de diagramas contribuem igualmente para a variância: *diffusons* e *cooperons*. Na presença de campo magnético os diagramas *cooperons* são suprimidos.

A universalidade observada nas propriedades estatísticas da matriz de espalhamento sugere a possibilidade de uma abordagem alternativa, na qual a função distribuição dos elementos da matriz espalhamento é derivada de um princípio genérico, sem qualquer referência a um hamiltoniano específico. Esse programa foi implementado por Mello e colaboradores [9], que demonstraram que, usando a hipótese de

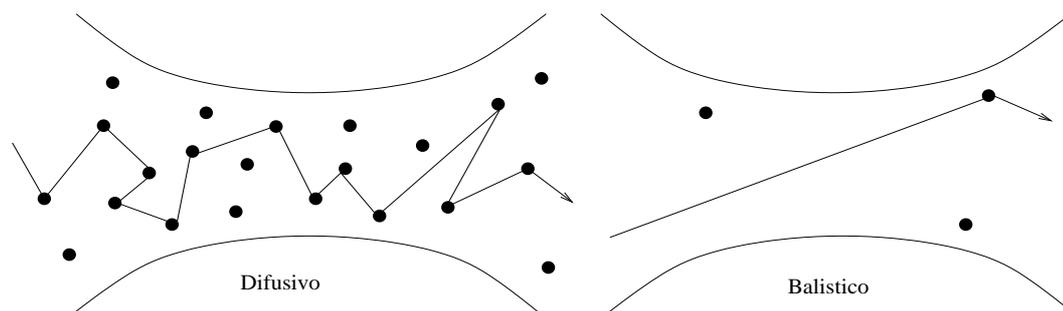


Figura 1.2: Esquema ilustrativo de um condutor difusivo (esquerda) e balístico (direita).

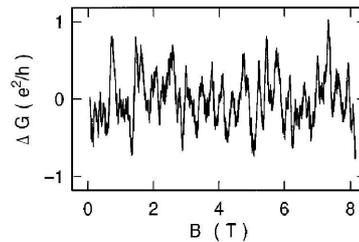


Figura 1.3: Flutuação da condutância em função do campo magnético perpendicular. A amostra é um fio de Au com 310nm de comprimento e 25nm de largura. A flutuação é  $0.3e^2/h$ , bem próximo do valor teórico que é de  $\sqrt{\frac{1}{15}}e^2/h$ . A figura foi tirada da ref. [1].

mínima informação, causalidade, analiticidade e certas simetrias, a função distribuição da matriz espalhamento fica proporcional ao *núcleo de Poisson* [10].

Neste contexto, Brouwer e Beenakker [11] desenvolveram uma ferramenta para se calcular cumulantes, denominada de *técnica diagramática* para ensembles de matrizes unitárias. O objetivo deste método é integrar uma função racional arbitrária de uma matriz unitária aleatória. A matriz unitária em questão é em física mesoscópica a matriz de espalhamento.

Levitov e Lesovik [12] deram uma importante contribuição à física mesoscópica ao formularem o problema da *estatística de contagem* (full counting statistics (FCS)) em um sistema com dois ou mais terminais. Essa teoria representa uma importante unificação conceitual e produz um método prático para se calcular observáveis de transporte na forma de cumulantes. Inspirado neste formalismo Nazarov [13] propôs uma *teoria de circuitos* para determinar a estatística de contagem em sistemas mesoscópicos de topologia arbitrária.

O sistema mesoscópico enfatizado nesta tese se refere a uma cavidade caótica conectada a dois guias com ou sem barreiras, fig. 2.1. Tratamos em física mesoscópica como cavidade caótica toda amostra cujo seu análogo clássico tem com-

portamento caótico. Caos é essencialmente um fenômeno clássico e é consequência da alta sensibilidade das trajetórias do sistema a pequenas variações nas condições iniciais. Exemplos interessantes são os bilhares que podem ser considerados caóticos ou não dependendo da sua forma.

Neste capítulo faremos uma revisão sobre teoria de espalhamento numa cavidade balística e introduziremos o conceito de matriz espalhamento, seção 1.1. Na seção 1.2 apresentaremos a formula de Landauer, seguida de uma revisão sobre TMA (seção 1.3). Por último, na seção 1.5, apresentamos uma discussão sobre estatística de contagem.

## 1.1 Teoria de Espalhamento

Nesta seção faremos uma breve apresentação da teoria de espalhamento em condutores eletrônicos. A partir deste análise chegaremos a definição de matriz de espalhamento, sua definição será constantemente usada nesta tese.

Landauer [14, 15], Imry [16] e Büttiker [17] foram os precursores da teoria de espalhamento. Esta teoria adquiriu importância no cenário científico devido à capacidade de descrever completamente sistemas de transporte quântico a baixas frequências, temperatura e voltagem, desde que a interação elétron-elétron possa ser desprezada.

Estamos interessados em um sistema mesoscópico bidimensional composta de uma cavidade caótica conectada a dois guias no regime balístico de largura  $W$ , fig. 1.4. Para podermos chegar a definição da matriz de espalhamento devemos primeiro introduzir a equação de Schrödinger

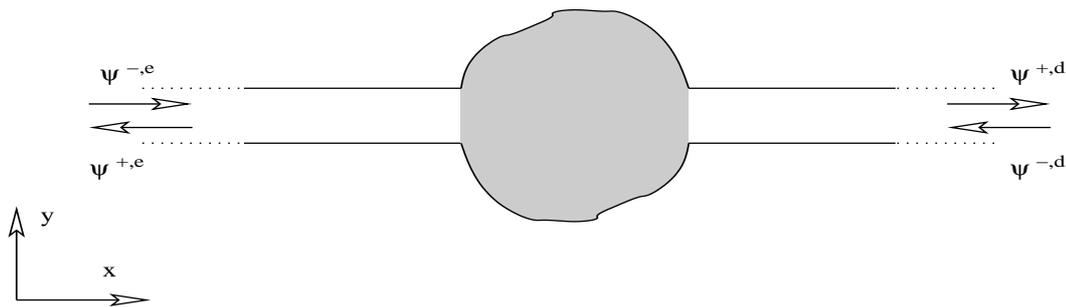


Figura 1.4: Cavidade 2D com dois guias. As setas dentro dos guias representam ondas entrando e saindo da cavidade.

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (1.1)$$

onde  $V(\vec{r})$  é o potencial devido às impurezas,  $\vec{A}(\vec{r})$  é o potencial vetor de um campo magnético externo e  $\vec{r}$  é o vetor posição no plano  $xy$  ( $x$  e  $y$  se referem às direções longitudinais e transversais respectivamente), veja fig. 1.4. Impomos neste problema condições de contorno nas quais as funções de onda se anulam nas paredes dos guias, ou seja, o potencial  $V(\vec{r})$  dentro dos guias é nulo assim como o campo magnético. Nestas condições a solução da eq. (1.1) é dada por

$$\psi(\vec{r}) \propto \varphi_n(y) e^{\pm ik_x x} \quad \text{onde} \quad \varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin(k_{y,n} y). \quad (1.2)$$

Analisando a eq. (1.2) verificamos que existem dois tipos de funções de onda, o sinal positivo no termo exponencial representa ondas planas se propagando para a região externa da cavidade caótica enquanto que o sinal negativo representa ondas planas se propagando para a região interna.

Aplicando as condições de contorno  $\psi(x, y = 0) = 0$  e  $\psi(x, y = W) = 0$  na eq. (1.2), obtemos

$$k_{y,n} = \frac{n\pi}{W}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Concluimos então que o momento transversal  $k_y$  é quantizado, ou seja, cada valor de  $n$  representa nos guias um modo ou canal. Podemos relacionar as autoenergias associados aos momentos transversais e longitudinais pela seguinte expressão

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{y,n} = \varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}, \quad (1.4)$$

onde  $\varepsilon_F$  é a energia de Fermi do sistema e  $\varepsilon_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$  e  $\varepsilon_{y,n} = \frac{\hbar^2 k_{y,n}^2}{2m}$ .

É importante fazermos uma análise das autoenergias  $\varepsilon_{x,n}$  e  $\varepsilon_{y,n}$  na eq. (1.4). Começamos primeiro verificando a condição de que  $\varepsilon_{y,n} < \varepsilon_F$ , isso implica que o valor de  $\varepsilon_x > 0$ , ou seja,  $k_x$  é real e o termo exponencial na eq. (1.2) deve ser interpretado como ondas propagantes nos guias, essas ondas também são conhecidas na literatura como modos propagantes ou canais abertos. Outra hipótese é fazer  $\varepsilon_{y,n} > \varepsilon_F$ , obrigatoriamente  $\varepsilon_x < 0$ , ou seja,  $k_x$  é imaginário levando a conclusão de que o termo exponencial representa ondas que decaem exponencialmente nos guias, também chamados de modos evanescentes ou canais fechados.

A solução completa da equação de Schrödinger nos guias pode ser decomposta em ondas propagantes e evanescentes que representam os canais abertos e fechados

nos guias respectivamente. Quando aplicamos o limite  $x \rightarrow \infty$  somente os canais abertos continuam contribuindo para a solução do problema, pois as funções de onda evanescentes que representam os canais fechados desaparecem devido ao termo exponencial. A forma assintótica da função de onda em qualquer um dos guias é então dada por

$$\psi_l(x, y) = \sum_{n=1}^{N_l} [p_n^l \psi_n^{-,l} + q_n^l \psi_n^{+,l}] \quad \text{onde} \quad \psi_n^{\pm, l} = \sqrt{\frac{m}{k_{x,n} \hbar}} \varphi_n(y) e^{\pm i k_{x,n} x}, \quad (1.5)$$

o índice  $l$  representa o guia à esquerda (e) ou à direita (d), veja fig. 1.4.

### 1.1.1 Matriz de Espalhamento

As funções de onda que incidem (i) e saem (s) da cavidade caótica podem ser representadas pelas seguintes matrizes de coeficientes

$$P_i^l = (p_1^l, p_2^l, \dots, p_{N_l}^l)^T \quad \text{e} \quad Q_s^l = (q_1^l, q_2^l, \dots, q_{N_l}^l)^T. \quad (1.6)$$

Podemos definir duas matrizes que representam as funções de onda que entram e que saem da cavidade por ambos os guias

$$P_i = (P_i^e \quad P_i^d)^T \quad \text{e} \quad Q_s = (Q_s^e \quad Q_s^d)^T. \quad (1.7)$$

Então a matriz de espalhamento, definida como  $S$ , conecta essas duas amplitudes da seguinte forma

$$Q_s = S P_i, \quad (1.8)$$

ou melhor

$$\begin{pmatrix} Q_s^e \\ Q_s^d \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} P_i^e \\ P_i^d \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

onde a matriz  $S$  tem dimensão  $(N_e + N_d) \times (N_e + N_d)$ . Essa matriz pode ser escrita numa estrutura de blocos

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

onde  $r$  e  $r'$  são as matrizes de reflexão  $N_l \times N_l$ , enquanto  $t$  e  $t'$  são as matrizes de transmissão  $N_e \times N_d$ .

Uma interpretação para os blocos da matriz  $S$  poder ser obtida considerando a matriz de reflexão  $r$  como um bloco matricial que descreve as ondas refletidas

através do guia à esquerda e a matriz de transmissão  $t$  como o bloco que descreve as ondas transmitidas para o guia à direita, isto quando as ondas incidentes na cavidade vieram do guia à esquerda. A mesma interpretação pode ser dada para as matrizes reflexão  $r'$  e transmissão  $t'$  quando as ondas incidem na amostra mesoscópica pelo guia à direita.

### 1.1.2 Conservação do Fluxo de Corrente

Um fator importante que devemos levar em conta neste problema é a conservação do fluxo de corrente através do sistema mesoscópico em questão. Segundo as refs. [18, 19] a densidade de corrente pode ser escrita em função dos coeficientes como

$$j_l = \sum_{n=1}^{N_l} (|q_n^l|^2 - |p_n^l|^2) \quad (1.11)$$

e a conservação do fluxo de corrente implica que

$$j_e + j_d = 0. \quad (1.12)$$

Usando a definição dos vetores  $P_i$  e  $Q_s$  podemos escrever (1.12) numa forma matricial

$$Q_s^\dagger Q_s = P_i^\dagger P_i. \quad (1.13)$$

Devido a definição da matriz de espalhamento, eq. (1.9), chegamos a seguinte conclusão

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1, \quad (1.14)$$

ou seja, a matriz  $S$  é unitária devido a conservação do fluxo de corrente.

Substituindo a estrutura de blocos da matriz de espalhamento na eq. (1.14) verificamos que a unitariedade define quatro matrizes hermitianas  $tt^\dagger$ ,  $t't'^\dagger$ ,  $1 - rr^\dagger$  e  $1 - r'r'^\dagger$  que têm o mesmo conjunto de autovalores transmissão pela cavidade caótica, representados por  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ .

Quando o potencial devido as impurezas é real e o potencial vetor é nulo a função de onda revertida no tempo,  $\psi^*(x, y, t \rightarrow -t)$ , também passa a ser solução da equação de Schrödinger. As ondas agora se propagam no sentido contrario devido a reversão temporal. Usando este resultado, a estrutura da eq. (1.9) modifica-se para

$$\begin{pmatrix} P_i^e \\ P_i^d \end{pmatrix}^* = S \begin{pmatrix} Q_s^e \\ Q_s^d \end{pmatrix}^*. \quad (1.15)$$

A eq. (1.15) mostra que a matriz de espalhamento  $S$ , com simetria de reversão temporal, obedece à relação  $SS^* = 1$ . Usando em seguida a lei de conservação do fluxo de corrente, eq. (1.12), temos

$$S = S^T, \quad (1.16)$$

ou seja, a matriz de espalhamento é simétrica.

### 1.1.3 Matriz de Transferência

Um sistema bastante interessante é quando temos varias cavidades caóticas conectadas em serie por guias ideais.

Como exemplo apresentamos o caso de duas amostras mesoscópicas, fig. 1.5. Desde que as matrizes de espalhamento  $S_1$  e  $S_2$  de cada cavidade caótica sejam conhecidas, podemos encontrar os blocos da nova matriz espalhamento  $S$ , que descreve todo o sistema, em função dos blocos das matrizes  $S_1$  e  $S_2$ . As matrizes de reflexão e transmissão da estrutura em blocos da nova matriz  $S$  são dadas por

$$\begin{aligned} r &= r_1 + t'_1(1 - r'_1 r_2)^{-1} r_2 t_1, \\ t &= t_2(1 - r'_1 r_2)^{-1} t_1, \\ t' &= t'_1(1 - r_2 r'_1)^{-1} t_2, \\ r' &= r'_2 + t_2(1 - r_2 r'_1)^{-1} r'_1 t'_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Podemos evitar as inversões matriciais da eq. 1.17 na regra de composição através do conceito da matriz de transferência  $\hat{M}$ , que relaciona os coeficientes que

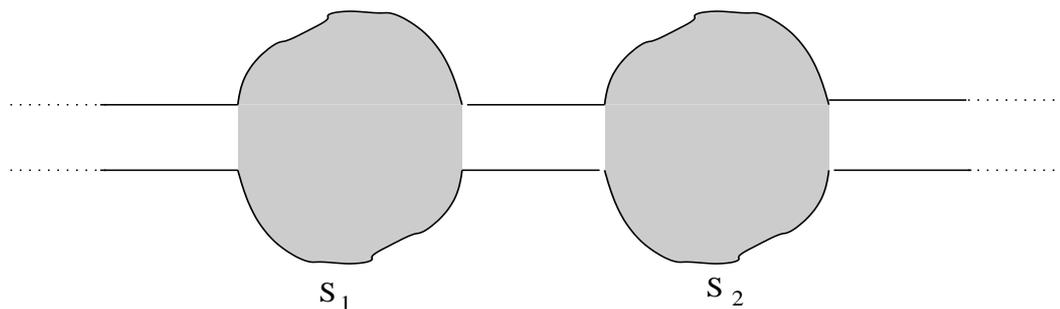


Figura 1.5: Duas amostras mesoscópicas em série. Elas são conectadas por guias ideais e cada uma tem sua matriz de espalhamento bem definida  $S_1$  (esquerda) e  $S_2$  (direita).

representam as ondas entrando e saindo da cavidade pelo guia a esquerda,  $Q_s^e$  e  $P_i^e$ , com os coeficientes que representam as ondas entrando e saindo pelo guia a direita,  $Q_s^d$  e  $P_i^d$ . Então

$$\begin{pmatrix} Q_s^e \\ P_i^e \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} Q_s^d \\ P_i^d \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

e a regra de composição fica simplesmente o produto matricial das componentes

$$\hat{M} = \hat{M}_2 \hat{M}_1. \quad (1.19)$$

A simplicidade da regra de composição torna a matriz de transferência particularmente conveniente para o estudo de transporte em fios quânticos.

Nesta seção discutimos a teoria de espalhamento de uma amostra mesoscópica conectada a dois guias ideais, para um tratamento mais completo, ou seja, amostra conectada a múltiplos guias sugerimos as refs. [18, 19, 20, 21].

## 1.2 Fórmula de Landauer

Landauer [14, 15] revolucionou a teoria de transportes eletrônicos ao inverter o antigo ponto de vista que tratava o campo de transporte como causa e o fluxo de corrente como uma consequência da aplicação do campo. No formalismo de Landauer campos de transporte não homogêneos aparecem como resultado da injeção de portadores na amostra. Um dos resultados mais conhecidos de seu formalismo é a fórmula de Landauer para a condutância de uma amostra quântica. A simplicidade da teoria de Landauer é consequência direta dela se basear inteiramente na física de uma partícula [22, 23].

### 1.2.1 Dedução da Fórmula de Landauer

Condutores macroscópicos são caracterizados pela lei de Ohm, a qual estabelece que a condutância  $G$  de uma dada amostra é diretamente proporcional a sua área transversal  $\Lambda$  e inversamente proporcional a seu comprimento  $L$ , isto é

$$G = \frac{\sigma \Lambda}{L}, \quad (1.20)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade da amostra.

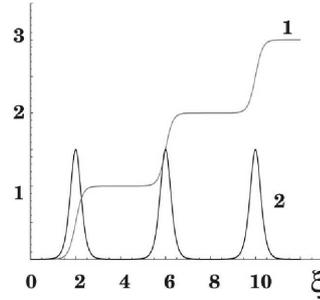


Figura 1.6: Condutância quantizada em unidades de  $e^2/h$  (curva 1) e a potência do ruído de disparo a frequência nula em unidades de  $e^3/4h$  (curva 2) versus  $\xi = 2\pi(\varepsilon_F - V_0)/hw_x$  onde  $\varepsilon_F$  é a energia de Fermi de um ponto quântico bidimensional com  $w_y = 4w_x$ . O gráfico foi tirada da ref. [2].

Mas se consideramos uma amostra mesoscópica teremos de fazer duas correções nesta lei: (1) existe uma condutância de contato (que corresponde à condutância de um guia balístico de  $N$  modos propagantes) independente de  $L$ , dada por  $G_c = (2e^2/h)N$ , veja fig. 1.6; (2) a dependência com  $\Lambda$  não é linear e contínua, mas discreta [24].

Vamos considerar uma amostra mesoscópica em equilíbrio térmico, conectada a dois reservatórios por dois guias, veja fig. 1.7. Os reservatórios são caracterizados pelos potenciais eletroquímicos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  que implica numa diferença de potencial  $V = -e(\mu_1 - \mu_2)$  através da amostra. Os guias são por hipótese condutores balísticos, cada um com  $N$  modos transversais.  $T$  é a probabilidade média de transmissão que um elétron injetado no guia 1 tem de ser transmitido para o guia 2 [25], ou melhor:

$$T \equiv \frac{1}{N} \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (1.21)$$

onde  $tt^\dagger$  é uma matriz hermitiana com autovalores de transmissão  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , veja seção 1.1.

Um condutor mesoscópico é formado por uma região desordenada com coerência de fase conectada a dois reservatórios de elétrons por dois guias ideais, ou seja, sem barreiras de potencial, fig. 1.7. Os espalhamentos na região de coerência de fase são admitidos serem elásticos. Espalhamentos inelásticos ocorrem somente nos reser-

vatórios. Os reservatórios, além de funcionarem como fonte dos portadores, também atuam como sumidouros perfeitos, ou seja, os elétrons passam dos guias para os reservatórios com probabilidade de reflexão nula [18].

Os estados de momentos transversais,  $k_{y,n}$ , no guia 1 são ocupados somente por elétrons vindos do reservatório à esquerda e têm energia  $E \leq \mu_1$ . Similarmente para o guia 2, onde os estados ocupados têm energia  $E \leq \mu_2$ .

Admitindo que estamos à temperatura zero, a corrente que é injetada de um reservatório nos guias é  $2e/h$ , por modo propagante e por unidade de energia. O fluxo de elétrons injetados no guia 1 é dado por

$$I_1^+ = -\frac{2e}{h}N(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.22)$$

Já o fluxo que sai no guia 2 é simplesmente o fluxo de entrada do guia 1 vezes a probabilidade média de transmissão  $T$ :

$$I_2^+ = -\frac{2e}{h}NT(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.23)$$

O resto do fluxo é refletido pelo condutor para o reservatório 1:

$$I_1^- = -\frac{2e}{h}N(1 - T)(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.24)$$

Então a corrente  $I$  no sistema é dada por:

$$I = I_1^+ - I_1^- = I_2^+ = -\frac{2e}{h}NT(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.25)$$

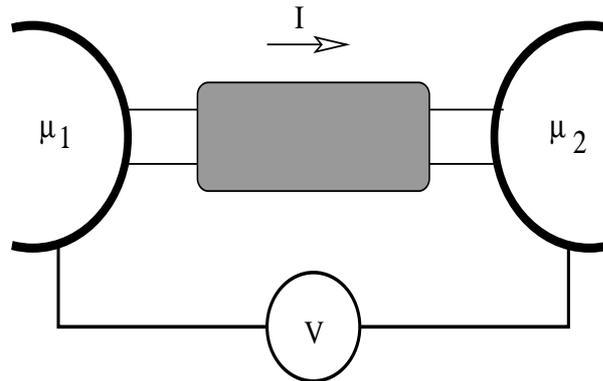


Figura 1.7: Amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios com potenciais eletroquímicos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

Como  $\mu_1 - \mu_2 = -eV$  e a condutância é  $G = \lim_{V \rightarrow 0} I/V$ , no limite de resposta linear, temos:

$$G = G_0 \text{Tr}(tt^\dagger) \quad \text{com} \quad G_0 = \frac{2e^2}{h}. \quad (1.26)$$

No caso de partículas sem spin  $G_0 = \frac{e^2}{h}$ . A eq. (1.26) é a famosa fórmula de Landauer, que foi escrita nesta forma pela primeira vez por Fisher e Lee [26]. Para (1.26) ser válida é importante ter os reservatórios em equilíbrio e com os potenciais eletroquímicos bem definidos. Os reservatórios somente entram na discussão como um conjunto de condições de contorno, absorvendo boa parte da complexidade do problema [22].

A eq. (1.26) pode ser escrita em termos dos autovalores de transmissão como

$$G = G_0 \sum_{j=1}^N \tau_j. \quad (1.27)$$

Fisicamente a condutância, eq. (1.27), mede o número médio de elétrons transmitidos por unidade de tempo.

### 1.2.2 Estatística Linear

Expressões como (1.27) são denominadas de estatística linear [24] e podem ser genericamente representadas por

$$A = \sum_j a(\tau_j). \quad (1.28)$$

A palavra linear indica que  $A$  não contém produtos de diferentes autovalores, porém a função  $a(\tau)$  pode depender não linearmente dos autovalores de transmissão  $\tau$ . A média sobre um ensemble de realizações das variáveis aleatórias  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  para estatísticas lineares pode ser descrita pela função densidade

$$\rho(\tau) = \langle \text{Tr} \delta(\tau - tt^\dagger) \rangle, \quad (1.29)$$

de modo que

$$\langle A \rangle = \int_0^1 d\tau a(\tau) \rho(\tau). \quad (1.30)$$

A obtenção desta função  $\rho(\tau)$  será objeto central dos métodos apresentados nesta tese. A condutância, eq. (1.26), é especial porque sua estatística linear depende linearmente de  $\tau$ .

### 1.2.3 Ruído de Disparo

Outra grandeza que se expressa como estatística linear é o ruído de disparo. A baixas temperaturas, estas flutuações de corrente são devidas à natureza discreta da carga do elétron. Sua potência a frequência nula é dada por

$$P = P_0 \text{Tr}(tt^\dagger(1 - tt^\dagger)) = P_0 \sum_j \tau_j(1 - \tau_j), \quad (1.31)$$

onde  $P_0 = 2e^3|V|/h$ , veja fig. 1.6. A eq. (1.31), devido a Büttiker [27], é uma generalização da formula de um único canal de Lesovik [28]. Ruído de disparo é um fenômeno intrinsecamente de não-equilíbrio e fornece informações sobre a correlação entre as cargas devido ao princípio de Pauli. Este ruído de não-equilíbrio não é determinado pela condutância. Em vez disso ele é determinado pela soma dos produtos da probabilidade de transmissão e reflexão dos autocanais. Apenas no limite de baixa transmissão,  $\tau_j \ll 1$ , em todos os autocanais, a potência do ruído de disparo é dado por

$$P_{Poisson} \approx P_0 \sum_j \tau_j = 2eI, \quad (1.32)$$

que é a fórmula da potência do ruído de um processo Poisson onde os elétrons são estatisticamente independentes e  $I$  é a corrente média. Uma medida conveniente de ruído sub-poissônico é devido ao fator Fano, que é a razão entre a potência do ruído de disparo e o do ruído poissônico. Para transmissões independentes da energia e no regime linear o fator Fano é dado por [2]

$$F = \frac{\sum_j \tau_j(1 - \tau_j)}{\sum_j \tau_j}, \quad (1.33)$$

assumindo valores entre zero (todos os canais transparentes) e um (caso poissônico). Em particular, para um canal temos  $F = 1 - \tau$ . Fisicamente, a eq. (1.33) dá a razão entre variância e o número médio de elétrons transmitidos.

A potência do ruído de disparo a frequência nula,  $P$ , pode ter o seu valor clássico, onde o transporte de elétrons é não coerente, reduzido. Esta redução é devido a transmissão de elétrons correlacionados imposta pelo princípio de Pauli. Com isso, foi demonstrado que em uma junção de barreiras duplas a potência do ruído é  $P \leq \frac{1}{2}P_{Poisson}$ , dependendo dos autovalores das barreiras. Para um condutor difusivo, tem-se que  $P = \frac{1}{3}P_{Poisson}$ . A redução de um terço na potência do ruído de disparo foi considerado primeiramente ter origem quanto-mecânica [29], mas algum

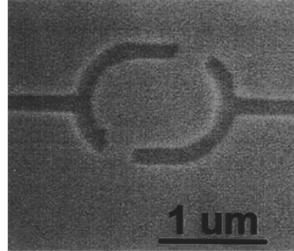


Figura 1.8: Bilhar mesoscópico na forma de um estádio retirado da ref. [1]. Os elétrons se movem na região escura.

tempo depois também foi obtida através de uma análise semiclássica [3]. Em uma cavidade caótica o valor da potência do ruído de disparo é  $P = \frac{1}{4}P_{Poisson}$  [30].

## 1.3 Teoria Estatística de Níveis de Energia e Autovalores de Transmissão

Nesta seção faremos uma breve discussão sobre o ensemble de Wigner-Dyson onde um ponto quântico fechado é caracterizado pelos níveis de energia e autofunções do hamiltoniano. Em seguida introduziremos os conceitos estatísticos do ensemble circular onde um ponto quântico aberto conectado a guias é descrito pela matriz de espalhamento  $S$ .

### 1.3.1 Ensemble de Wigner-Dyson

O ensemble de Wigner-Dyson estabelece a estatística de níveis de energia de um ponto quântico fechado através da matriz hermitiana  $\mathcal{H}$  que contém toda a informação relevante sobre o hamiltoniano microscópico  $H$  do sistema. A distribuição de probabilidade deste ensemble é escolhida da seguinte forma

$$P(\mathcal{H}) \propto \exp(-\beta \text{Tr}V(\mathcal{H})), \quad (1.34)$$

onde  $V$  é uma função arbitrária da matriz hermitiana  $\mathcal{H}$ . Escolher uma distribuição gaussiana  $\text{Tr}V(\mathcal{H}) \equiv \text{Tr}\mathcal{H}^2 = \sum_{i,j} |\mathcal{H}_{ij}|^2$  tem como vantagem que os elementos independentes do hamiltoniano são variáveis aleatórias independentes. Aplicando o limite  $N \rightarrow \infty$  as correlações espectrais tornam-se, sob certas condições, independentes de  $V$ . Este fato é conhecido como universalidade das correlações espectrais.

O índice  $\beta$  na eq. (1.34) caracteriza a simetria do sistema e contém o número de graus de liberdade dos elementos da matriz hermitiana  $\mathcal{H}$ . Na literatura são conhecidas três classes de simetrias para os ensembles de matrizes aleatórias convencionais <sup>1</sup> onde  $\beta$  pode assumir os valores 1, 2 e 4 se os elementos são reais, complexos ou quatérnion respectivamente<sup>2</sup>, veja a tabela 1.3.1. Transformações do tipo  $\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1}$ , onde a matriz  $U$  pode ser ortogonal ( $\beta = 1$ ), unitária ( $\beta = 2$ ) ou simplética ( $\beta = 4$ ), deixam a distribuição de probabilidade  $P(\mathcal{H})$  invariante. Podemos diagonalizar  $\mathcal{H}$  através de uma matriz unitária  $U$ , onde  $U$  é composta pelos autovetores de  $\mathcal{H}$ . É possível encontrar uma relação entre o elemento de volume infinitesimal  $d\mathcal{H}$  e a medida invariante de Haar  $dU$  para o grupo ortogonal, unitário ou simplético. Ela é dada por

$$d\mathcal{H} = J(\{\varepsilon\}) \prod_{j=1}^N d\varepsilon_j dU \quad \text{onde} \quad J(\{\varepsilon\}) = \prod_{i<j}^N |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^\beta, \quad (1.35)$$

os elementos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  são os autovalores da matriz hermitiana  $\mathcal{H}$  ( $N \times N$ ).

A partir da eq. (1.35) podemos calcular a distribuição de autovalores, obtendo

$$P(\{\varepsilon\}) = \exp \left[ \beta \sum_{i,j} \ln |\varepsilon_i - \varepsilon_j| - \beta \sum_j^M V(\varepsilon_j) \right]. \quad (1.36)$$

A eq. (1.36) tem a forma de uma distribuição de Gibbs da mecânica estatística clássica, onde  $\beta$  faz o papel do inverso da temperatura e o termo logarítmico é análogo ao potencial repulsivo entre cargas num problema eletrostático bidimensional [32]. Podemos mapear então o problema num gás de Coulomb, onde as energias  $\varepsilon_j$  fazem o papel das posições das cargas mantidas por um potencial de confinamento  $V$ .

<sup>1</sup>No total existem 10 classes: 3 convencionais (tabela 1.3.1), 3 quirais [18] e 4 Bogoluibov-de Gennes [31].

<sup>2</sup>Sistemas na presença de simetria de reversão temporal são descritos por matrizes reais. Sistemas que apresentam reversão temporal quebrada por um campo magnético são descritos por matrizes complexas. Quando há partículas com spin 1/2 onde a simetria de rotação do spin é quebrada pela interação spin-órbita as matrizes de quatérnions que são usadas [5].

$\beta$	SRT	SRS	$\mathcal{H}_{nm}$	$U$
1	sim	sim	real	ortogonal
2	não	irrelevante	complexo	unitária
4	sim	não	quatérnion real	simplética

Tabela 1.1: Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana  $\mathcal{H}$  e a matriz unitária de autovetores  $U$  são classificadas pelo índice  $\beta$  dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (*SRT*) e simetria de rotação de spin (*SRS*).

### 1.3.2 Ensemble Circular

O ensemble circular descreve a estatística de um ponto quântico aberto conectado a guias a partir da matriz de espalhamento  $S$ . Este ensemble tem como ponto de partida a hipótese de que a matriz de espalhamento,  $S$ , deve ser distribuída uniformemente sobre o grupo unitário  $\mathcal{U}$ , ou seja, qualquer matriz  $S$  deve ter igual probabilidade. A distribuição de probabilidade deste ensemble é dada pela expressão

$$P(S) = \text{constante}, \quad (1.37)$$

sendo a matriz  $S$  restringida apenas pelas simetrias discutidas na seção anterior. A hipótese sobre a qual é construído este ensemble implica que a média da matriz  $S$  seja anulo, ou seja,  $\langle S \rangle = \bar{S} = 0$ .

Foi verificado pelas refs. [33, 34] que a matriz de espalhamento pode ser parametrizada como

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Upsilon} & i\sqrt{\Upsilon} \\ i\sqrt{\Upsilon} & \sqrt{1-\Upsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & u_4 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

onde  $u_i$ , com  $i = 1, \dots, 4$ , são matrizes unitárias  $N \times N$  e  $\Upsilon$  é uma matriz diagonal. Quando o índice de simetria é  $\beta = 2$ ,  $u_i$  são matrizes unitárias arbitrárias. Na presença de simetria de reversão temporal,  $\beta = 1$ , temos que  $u_3 = u_1^T$  e  $u_4 = u_2^T$ . Os elementos diagonais  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) de  $\Upsilon$  são autovalores de  $tt^\dagger$ , ou seja, os autovalores de transmissão, veja eq. (1.26).

Quando queremos obter a distribuição de autovalores de transmissão de um pontos quânticos abertos, a representação polar (1.38) se mostra mais eficiente comparada com a estrutura em blocos eq. (1.10). Assim a medida de Haar nestas

coordenadas é dada por

$$dS = J(\{\tau\}) \prod_{j=1}^N \tau_j^{\beta/2-1} d\tau_j \prod_{i=1}^4 du_i \quad \text{onde} \quad J(\{\tau\}) = \prod_{i<j}^N |\tau_i - \tau_j|^\beta. \quad (1.39)$$

Devido a similaridade entre as eqs. (1.35) e (1.39) encontra-se uma distribuição de autovalores de transmissão  $P(\{\tau\})$  que é equivalente a distribuição dos autovalores de energia  $P(\{\varepsilon\})$ , eq.(1.36), da matriz aleatória hermitiana. Dada a equivalência entre a estatística de níveis de energia e autovalores de transmissão, estamos habilitados a usufruir dos recursos desenvolvidos na elaboração do ensemble de Wigner-Dyson em problemas que envolvam autovalores de transmissão.

A diferença marcante entre os ensembles de Wigner-Dyson e circular é que o primeiro está fundamentado no limite de grandes matrizes aleatória hermitianas  $\mathcal{H}$  ( $N \rightarrow \infty$ ) enquanto o segundo pode ser aplicado em qualquer dimensão  $N$  da matriz de espalhamento. A possibilidade de se trabalhar em dimensões finitas faz com que a o ensemble circular seja mais adequado para o desenvolvimento desta tese.

## 1.4 Núcleo de Poisson

Mello, Pereyra e Seligman [9] generalizaram o ensemble circular, usando o principio de máxima entropia, permitindo que  $\bar{S}$  seja não nulo, ou seja, a matriz  $S$  não é mais distribuída uniformemente sobre o grupo unitário. Este ensemble é conhecido como núcleo de Poisson

$$P(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-(\beta M + 2 - \beta)}, \quad (1.40)$$

onde  $\beta \in \{1, 2, 4\}$  se refere ao índice de simetria da matriz de espalhamento. A matriz  $\bar{S}$  é chamada subunitária, ou seja, os autovalores de  $\bar{S}\bar{S}^\dagger$  são  $\leq 1$ . Vemos que se  $\bar{S} = 0$  então  $P(S) = \text{constante}$ , ou seja, o ensemble circular, eq. (1.37), é um caso particular da eq. (1.40).

O ensemble circular é apropriado para descrever um ponto quântico caótico conectado a guias por contatos ideais. Um caso mais geral que podemos estudar é o de contatos não ideais, contendo barreiras de tunelamento (veja fig. 2.1). Para isso assumimos dois fatos: (1) o segmento do guia entre as barreiras de tunelamento e a cavidade é longo; (2) as matrizes de espalhamento  $S_1$  e  $S_2$  que descrevem as barreiras 1 e 2 mais a matriz  $S_0$  da cavidade são bem definidas. Podemos então obter a matriz  $S$  que descreve todo sistema multiplicando as três matrizes de transferência,  $\hat{M}_0$ ,  $\hat{M}_1$  e  $\hat{M}_2$ , correspondentes a  $S_0$ ,  $S_1$  e  $S_2$ , veja seção 1.1. Brouwer [21] mostrou que se  $S_0$

é distribuída de acordo com o ensemble circular então  $S$  é distribuída pelo núcleo de Poisson. A média da matriz espalhamento [1, 11] é então dada por:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & r^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

onde  $r^{(1)}$  e  $r^{(2)}$  são as matrizes de reflexão das barreiras 1 e 2. Os autovalores de  $1 - \bar{S}\bar{S}^\dagger$  são as probabilidades de tunelamento  $\Gamma_n$  através das barreiras.

## 1.5 Estatística de Contagem

A área de ruídos quânticos [22] em sistemas mesoscópicos tem se mostrado muito ativa nos últimos anos. Medidas de ruídos em junções de tamanho atômico [35], ponto quântico caótico [30] e supercondutores [36] são exemplos importantes. Uma grande contribuição para este campo veio da ótica quântica através da estatística de contagem, que fornece uma maneira eficiente de investigar as correlações de corrente em sistemas mesoscópicos. Dado que ela foi baseada na teoria de espalhamento para transportes quânticos, abriu-se as portas para o estudo desta estatística em problemas de transporte através de condutores metálicos desordenados e em cavidades caóticas com dois ou mais guias.

A estatística de contagem proposta na ref. [12] para sistemas com dois terminais é baseada na matriz de espalhamento. O método correspondente, denotado FCS (*full counting statistic*), concentra-se na obtenção da função distribuição de probabilidade  $P_n$  de  $n$  elétrons serem transferidos através da amostra durante um intervalo de tempo  $t_0$ .  $P_n$  pode ser expresso a partir de uma função geratriz  $\chi(\lambda)$  associada a um processo de medição estendida no tempo. Essa função contém toda a informação sobre os cumulantes irreduzíveis da transferência de carga através do sistema [37], bem como sobre a flutuação da corrente. A relação entre  $P_n$  e  $\chi(\lambda)$  é

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\lambda} P_n \quad \text{e} \quad P_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda) e^{-in\lambda}. \quad (1.42)$$

A análise quanto-mecânica de Levitov e Lesovik demonstra que as tentativas de transmissão dos elétrons são periódicas no tempo, dando uma distribuição binomial dos elétrons transmitidos. Eles calcularam então  $P_n$  para um condutor com um canal a baixas temperatura e voltagem  $V$  e depois generalizaram o resultado para

um condutor com múltiplos canais [12, 38]. A função geratriz é dada pela formula

$$\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^N (1 + \tau_j (e^{i\lambda} - 1))^{M_0}. \quad (1.43)$$

onde  $M_0 = eVt_0/h \gg 1$  é o número de tentativas para transmitir elétrons durante um tempo  $t_0$  e  $V$  é a voltagem. A eq. (1.43) representa  $N$  processos binomiais independentes. É conveniente definir a função característica dos cumulantes [10]

$$\Phi(\lambda) = -\ln(\chi(\lambda)) = -M_0 \sum_{j=1}^N \ln(1 + \tau_j (e^{i\lambda} - 1)). \quad (1.44)$$

Observáveis físicos podem ser obtidos através da expansão em série

$$\Phi(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} q_k, \quad (1.45)$$

onde

$$q_k = -\left. \frac{d^k}{d(i\lambda)^k} \Phi(\lambda) \right|_{\lambda=0}, \quad (1.46)$$

são os cumulantes irreduzíveis da FCS. Os dois primeiros cumulantes são bem conhecidos, condutância e potência do ruído de disparo adimensionais, dados respectivamente por

$$g = \frac{q_1}{M_0} = \text{Tr} tt^\dagger, \quad (1.47)$$

que é igual a (1.26) onde  $g = G/G_0$  e

$$p = \frac{q_2}{M_0} = \text{Tr}(tt^\dagger(1 - tt^\dagger)), \quad (1.48)$$

onde  $p = P/P_0$ . O fator Fano, eq. (1.33), pode então ser escrito como

$$F = \frac{p}{g}. \quad (1.49)$$

O terceiro cumulante tem recebido alguma atenção devido a recentes observações experimentais em pontos quântico [39]. Ele é dado por

$$\kappa = \frac{q_3}{M_0} = \text{Tr}(tt^\dagger(1 - tt^\dagger)(1 - 2tt^\dagger)). \quad (1.50)$$

A literatura, ref. [40], também apresenta resultados para o quarto cumulante, dado por

$$\iota = \frac{q_4}{M_0} = \text{Tr}(tt^\dagger(1 - tt^\dagger)(1 - 6tt^\dagger + 6(tt^\dagger)^2)). \quad (1.51)$$

As expressões dos cumulantes calculadas a partir da FCS são específicas para uma dada amostra. Isto significa que para descrever as flutuações de corrente através de uma cavidade caótica a média sobre a distribuição do núcleo Poisson, eq. (1.40) é necessária para fazermos uma comparação com os dados experimentais.

Dois métodos bem conhecidos para calcular esta média no regime semiclássicos são a análise diagramática [11] que faz referência direta ao núcleo de Poisson e a teoria de circuito [13], baseada na formulação cinética de Keldysh no limite semiclássico. Em sua construção original a teoria de circuitos não permite uma comparação direta com a técnica diagramática. Esta dificuldade foi recentemente resolvida pela extensão da teoria de circuitos apresentada por Macêdo[41].

Nessa dissertação apresentamos uma comparação entre a técnica diagramática e a teoria de circuitos estendida para o caso de barreiras com transparências arbitrárias. Para isso tivemos de encontrar uma nova solução para a equação de Dyson da teoria diagramática de Brouwer e Beenakker. Nossos resultados complementam a análise apresentada na ref. [11] para o caso de barreiras simétricas.

## Capítulo 2

# Técnica Diagramática

Para obtermos os observáveis físicos em pontos quânticos devemos calcular a média de uma função polinomial composta pelos elementos de uma matriz unitária sobre sua distribuição de probabilidade. No caso de pontos quânticos caóticos conectados a dois guias (veja fig. 2.1), a matriz unitária é definida pela matriz de espalhamento  $S$ , distribuída de acordo com o núcleo de Poisson (contato com barreira) ou ensemble circular (contato ideal). Creutz [42] apresentou um algoritmo diagramático para integrar matrizes simétricas unitárias  $SU(N)$ , mas este não se aplica ao grupo unitário  $U(N)$ . Brouwer e Beenakker [11] produziram uma nova técnica diagramática que resolveu esse problema e ainda inclui contribuições não gaussianas de todas as ordens.

A técnica diagramática é dispensável se a dimensão da matriz unitária é pequena, pois a média pode ser feita exatamente como veremos na seção 2.1. Mas quando trabalhamos no regime de dimensões muito altas, a manipulação dos coeficientes e a ordenação de matrizes pré-definidas se torna cada vez mais complicada e sua solução exata passa a ser irrelevante. Podemos então considerar os elementos da matriz unitária como variáveis gaussianas independentes e usar a teoria de perturbação diagramática do ensemble gaussiano.

A teoria diagramática perturbativa representa um elegante método analítico para calcular médias no ensemble de matrizes unitárias. Na ref. [11] os autores desfrutaram desta formulação para gerar um algoritmo bastante eficiente. A técnica conserva em princípio todos os aspectos quânticos do problema até ser aplicado o limite semiclássico,  $N \gg 1$ , onde sobrevivem como vestígio dos efeitos quânticos somente os fenômenos de tunelamento nas vizinhanças das barreiras quando existirem.

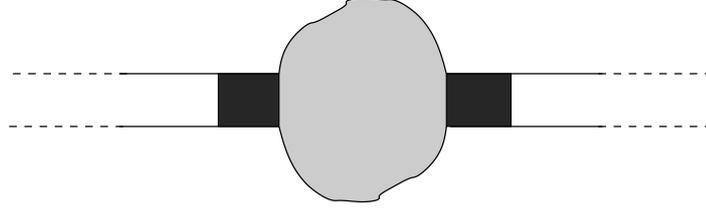


Figura 2.1: Cavidade caótica conectadas a dois guias contendo barreiras de tunelamento.

Neste capítulo vamos apresentar as ideias básicas da técnica diagramática desenvolvida na refs. [11, 21]. A nossa contribuição relevante para esta técnica vai ser apresentada apenas no próximo capítulo. Para uma melhor compreensão dos fundamentos desta técnica recomendamos a leitura do artigo original.

## 2.1 Média sobre um Polinômio da Matriz Unitária

Esta seção tem como intuito introduzir as ideias básicas apresentadas pelas refs. [42, 43, 44] que geram um algoritmo capaz de realizar a média sobre a função polinomial  $U_{a_1 b_1} \cdots U_{a_n b_n} U_{\alpha_1 \beta_1}^* \cdots U_{\alpha_m \beta_m}^*$  composta pelos elementos da matriz  $U$  ( $N \times N$ ) pertencente ao grupo unitário  $\mathcal{U}(N)$ . Os índices  $\alpha_1 \dots \alpha_m$  são definidos como uma permutação  $P$  dos índices  $a_1 \dots a_n$  e  $\beta_1 \dots \beta_m$  como uma permutação  $P'$  dos  $b_1 \dots b_n$ .

O ensemble que corresponde à média sobre a função polinomial da matriz unitária é chamado de ensemble unitário circular (EUC), ou seja,  $\beta = 2$  [5]. A média é dada pela seguinte equação

$$\langle U_{a_1 b_1} \cdots U_{a_n b_n} U_{\alpha_1 \beta_1}^* \cdots U_{\alpha_m \beta_m}^* \rangle = \delta_{nm} \sum_{P, P'} V_{P, P'} \prod_{j=1}^n \delta_{a_j \alpha_{P(j)}} \delta_{b_j \beta_{P'(j)}}, \quad (2.1)$$

que só não é nula se  $n = m$ . O somatório é sobre todas as permutações  $P$  e  $P'$  possíveis em um conjunto de números inteiros dado por  $1, \dots, n$ .

Samuel [43] mostrou que os coeficientes  $V_{P, P'}$  da eq. (2.1) dependem exclusivamente da estrutura cíclica contida na permutação  $P^{-1}P'$ , ou seja, os coeficientes dependem unicamente dos comprimentos  $c_1, \dots, c_k$  dos ciclos da fatoração único de  $P^{-1}P'$ , sendo o valor de  $n = \sum_{j=1}^k c_k$  com  $k = 1, \dots, n$ . Desta maneira os coeficientes  $V_{P, P'}$  podem ser rotulados de forma única usando os comprimentos dos ciclos,

ou seja,  $V_{P,P'} \longrightarrow V_{c_1, \dots, c_k}$ . Além disso a ref. [43] apresenta uma relação recursiva que facilita o cálculo dos coeficientes  $V_{c_1, \dots, c_k}$  dada por <sup>1</sup>

$$NV_{c_1, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} V_{p,q,c_2, \dots, c_k} + \sum_{j=2}^k c_j V_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} = \delta_{c_1 1} V_{c_2, \dots, c_k}, \quad (2.2)$$

onde  $V_0 \equiv 1$ . Mello [44] mostra que a solução da eq. (2.2),  $V_{c_1, \dots, c_k}$ , não depende da ordem dos índices  $c_1, \dots, c_k$ , ou seja, por exemplo  $V_{1,1,2} = V_{1,2,1} = V_{2,1,1}$ .

Para exemplos práticos da funcionalidade da eq. (2.1), vamos considerar os casos  $n = m = 1$  e  $n = m = 2$ . Para o primeiro caso, o somatório sobre  $P$  e  $P'$  compreende apenas a permutação identidade  $id = [(1) \rightarrow (1)]$ . Então de (2.1)

$$\langle U_{a_1 b_1} U_{\alpha_1 \beta_1}^* \rangle = V_{id} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1}. \quad (2.3)$$

Queremos determinar  $P^{-1}P'$ . Neste caso  $P = P' = id$ , então a permutação é igual a identidade:  $P^{-1}P' = id = [(1) \rightarrow (1)]$ . Sua única permutação cíclica é  $id = (1 \rightarrow 1)$ , ou seja  $V_{id} = V_1$ . A eq. (2.3) fica

$$\langle U_{a_1 b_1} U_{\alpha_1 \beta_1}^* \rangle = V_1 \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1}. \quad (2.4)$$

Já no segundo caso o somatório sobre  $P$  e  $P'$  se estende sobre as permutações identidade  $id = [(1, 2) \rightarrow (1, 2)]$  e troca  $tr = [(1, 2) \rightarrow (2, 1)]$ . De (2.1) temos

$$\begin{aligned} \langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \rangle &= V_{id, id} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_2} + V_{tr, id} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_2} \\ &+ V_{id, tr} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_1} + V_{tr, tr} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em (2.5) encontramos quatro casos para a permutação  $P^{-1}P'$ :

- $P = P' = id$ , correspondente ao primeiro termo da direita em (2.5), neste caso a permutação é igual a identidade  $P^{-1}P' = id = [(1, 2) \rightarrow (1, 2)]$ , que se fatora em duas permutações cíclicas  $id = (1 \rightarrow 1)(2 \rightarrow 2)$ , tal que as duas permutações são de comprimento 1 de modo que  $P^{-1}P'$  é equivalente a  $(1, 1)$ , ou seja  $V_{id, id} = V_{1,1}$ ;
- $P^{-1} = tr$  e  $P' = id$ , corresponde ao segundo termo. Temos que  $P^{-1}P' = tr = [(1, 2) \rightarrow (2, 1)]$ , fatorando em um único ciclo de comprimento 2,  $tr = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ , então a estrutura cíclica de  $P^{-1}P'$  é  $(2)$  ou melhor  $V_{tr, id} = V_2$ ;

<sup>1</sup>Os momentos  $V_{c_1, \dots, c_k}$  são listados no apêndice A para  $n \leq 3$ .

- $P^{-1} = id$  e  $P' = tr$ , corresponde ao terceiro termo,  $P^{-1}P' = tr = [(2, 1) \rightarrow (1, 2)]$ , fatorando em um único ciclo de comprimento 2,  $tr = (2 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$ , temos que a estrutura cíclica de  $P^{-1}P'$  é (2) e  $V_{tr,id} = V_2$ ;
- $P^{-1} = P' = tr$ , corresponde ao quarto termo,  $P^{-1}P' = id = [(2, 1) \rightarrow (2, 1)]$ , fatorando em duas permutações cíclicas  $id = (2 \rightarrow 2)(1 \rightarrow 1)$ , então a estrutura cíclica de  $P^{-1}P'$  é (1, 1) e  $V_{tr,tr} = V_{1,1}$ .

Após analisarmos os quatro casos acima podemos escrever a eq. (2.5) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \rangle &= V_{1,1} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_2} + V_2 \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_2} \\ &+ V_2 \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_1} + V_{1,1} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Quando os coeficientes contêm apenas rótulos que correspondem a ciclos de comprimentos iguais a 1,  $V_{1,\dots,1}$ , eles estão ligados a permutações do tipo  $P = P'$  que correspondem diretamente a contrações gaussianas das matrizes  $U$  e  $U^*$ . Já quando os coeficientes  $V_{c_1,\dots,c_k}$  apresentam algum caso em que  $c_i \neq 1$  suas contribuições são não gaussianas. A presença de elementos não gaussianos é uma diferença marcante desta técnica.

## 2.2 Média sobre um Polinômio da Matriz Simétrica Unitária

Como vimos na seção 1.1 quando há simetria de reversão temporal a matriz de espalhamento  $S$  é unitária e ao mesmo tempo simétrica e é descrita pelo ensemble ortogonal circular (EOC), ou seja,  $\beta = 1$  [5]. Neste caso as regras apresentadas até agora devem ser adaptadas para as novas características do problema. Devido à simetria da matriz  $U$  seus elementos respeitam a relação  $U_{ab} = U_{ba}$ , fato que não ocorre no EUC. Então, a média da função polinômio dos elementos da matriz simétrica  $U$  deve ser calculada através de uma nova relação dada por

$$\langle U_{a_1 a_2} \cdots U_{a_{2n-1} a_{2n}} U_{\alpha_1 \alpha_2}^* \cdots U_{\alpha_{2m-1} \alpha_{2m}}^* \rangle = \delta_{nm} \sum_P V_P \prod_{j=1}^{2n} \delta_{a_j \alpha_{P(j)}}, \quad (2.7)$$

o somatório é sobre todas as possíveis  $P$  permutações de um conjunto de números inteiros dados por  $1, \dots, 2n$  e os coeficientes  $V_P$  podem ser representados, segundo

a ref. [45], por  $V_P \longrightarrow V_{c_1, \dots, c_k}$ . Como no EUC, os coeficientes  $V$  são calculados através da nova relação recursiva <sup>1</sup>

$$(N + c_1)V_{c_1, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} V_{p, q, c_2, \dots, c_k} + 2 \sum_{j=2}^k c_j V_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} = \delta_{c_1 1} V_{c_2, \dots, c_k}, \quad (2.8)$$

com  $V_0 \equiv 1$ .

As relações recursivas (2.2) e (2.8) permitem obtermos o resultado exato para a média de qualquer função polinomial da matriz  $U$  unitária  $\beta = 2$  ou simétrica  $\beta = 1$ . Mas a medida que a dimensão das matrizes  $U$  e  $U^*$  aumenta, manter o controle sobre a ordem dos índices e das deltas de Kronecker torna-se muito complicado. Então, introduzir uma técnica capaz de controlar a manipulação dos argumentos de uma modo controlado é altamente necessário. Na próxima seção apresentaremos os conceitos básicos para o entendimento da técnica diagramática proposta nas refs. [11, 21] para solucionar este problema.

## 2.3 Técnica Diagramática

A técnica diagramática proposta por Brouwer e Beenakker consiste basicamente em montar os blocos apresentados na fig. 2.2, que representam os elementos matriciais  $U_{ab}$  e  $U_{\alpha\beta}^*$ . Dois exemplos simples de como fazer a montagem dessa estrutura é apresentada na fig. 2.3, ela apresenta diagramaticamente as funções polinomiais  $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$  e  $g(U) = \text{Tr}(AUBUCU^\dagger DU^\dagger)$  sendo a matriz  $U$  unitária  $\beta = 2$ .

De acordo com a eq. (2.1), calcular a média das funções polinomiais é somar sobre todas as permutações  $P$  e  $P'$  possíveis. Estas permutações são realizadas diagramaticamente ligando através de linhas os pontos pretos de  $U_{ab}$  aos pontos pretos de  $U_{\alpha\beta}^*$  e o mesmo para os pontos brancos. Em relação a eq. (2.1) essas linhas representam as deltas de Kronecker, veja fig. 2.2. É importante notar que devido à unitariedade da matriz  $U$  somente devemos ligar pontos brancos de  $U_{ab}$  a pontos brancos de  $U_{\alpha\beta}^*$ , o mesmo vale para pontos pretos. Na fig. 2.4 apresentamos diagramaticamente a média das funções  $\langle f(U) \rangle$  e  $\langle g(U) \rangle$ .

É interessante analisar a fig. 2.4 e notar que toda a informação contida na eq. (2.6) também está contida nos diagramas. A pergunta é, como retirar toda essa informação somente através dos diagramas? Para isso devemos determinar

---

<sup>1</sup>Os momentos  $V_{c_1, \dots, c_k}$  são listados no apêndice A para  $n \leq 3$ .



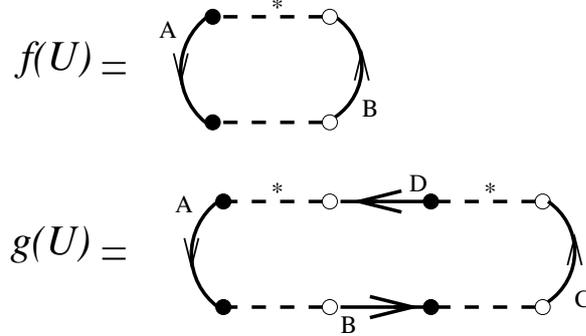


Figura 2.3: Funções  $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$  e  $g(U) = \text{Tr}(AUBUCU^\dagger DU^\dagger)$  representadas.

- Primeiro diagrama contém dois ciclos- $U$  de comprimento 1 e três ciclos- $T$ , obtém-se então,  $V_{1,1}\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C)$ ;
- Segundo diagrama contém dois ciclos- $U$  de comprimento 1 e um ciclo- $T$  dando  $V_{1,1}\text{Tr}(ADCB)$ ;
- Terceiro diagrama contém um ciclo- $U$  de comprimento 2 e dois ciclos- $T$ , que resultam em  $V_2\text{Tr}(A)\text{Tr}(BDC)$ ;
- Quarto diagrama contém um ciclo- $U$  de comprimento 2 e dois ciclos- $T$ , que resultam em  $V_2\text{Tr}(ADB)\text{Tr}(C)$ .

A expressão final para a média de  $\langle g(U) \rangle$  fica <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \langle g(U) \rangle = & V_{1,1}(\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) + \text{Tr}(ADCB)) \\ & + V_2(\text{Tr}(A)\text{Tr}(BDC) + \text{Tr}(ADB)\text{Tr}(C)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

É importante também apresentarmos o caso diagramático em que a matriz  $U$  é simétrica  $\beta = 1$ , seção 2.2. Nesta situação a simetria da matriz leva à seguinte relação entre os seus elementos:  $U_{ab} = U_{ba}$ . Este fato acarreta que os pontos brancos e pretos dos blocos que constituem os diagramas podem ser conectados entre si. Então a média da função polinomial  $f(U)$ , fig. 2.3, quando há simetria de reversão temporal deve ser representada diagramaticamente como na fig. 2.5. Usando as regras (i) e (ii) para analisar os diagramas, podemos escrever a seguinte expressão

<sup>1</sup>Os valores de  $V_{1,1}$  e  $V_2$  estão tabelados no apêndice A.

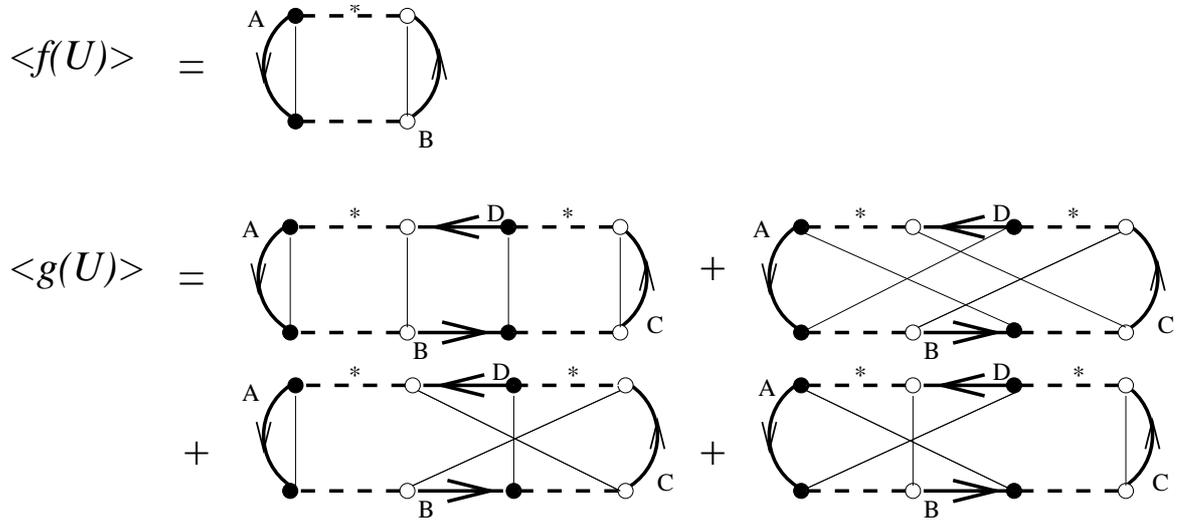


Figura 2.4: Média das funções  $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$  e  $g(U) = \text{Tr}(AUBUCU^\dagger DU^\dagger)$  representadas na fig. 2.3.

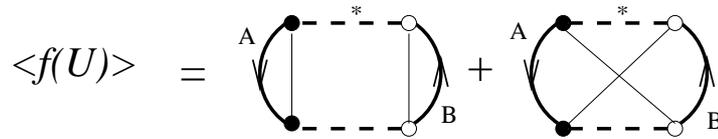


Figura 2.5: Análise diagramática para  $\langle f(U) \rangle$  com  $f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger)$ , onde a matriz  $U$  é unitária simétrica.

para  $\langle f(U) \rangle^2$

$$\langle f(U) \rangle = V_1 (\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) + \text{Tr}(AB^T)).$$

Nesta seção introduzimos os conceitos básicos da técnica diagramática e apresentamos exemplos de como abstrair as informações dos diagramas para os dois tipos de ensembles EUC e EOC.

## 2.4 Sumário das Regras Diagramáticas

<sup>2</sup>O valor de  $V_1$  esta tabelado no apêndice A.

Na seção 2.3 apresentamos as ideias básicas da técnica diagramática. Agora vamos apresentar as quatro regras elaboradas por Brouwer e Beenakker [11] para a correta aplicação do algoritmo. Para matrizes unitárias, seção 2.1, as regras ficam:

1. Desenhar os diagramas montando os blocos da fig. (2.2) corretamente;
2. Traçar as linhas referentes aos deltas de Kronecker realizando assim as permutações ao conectar os pontos brancos associados a  $U$  aos pontos brancos referentes a  $U^*$ . O mesmo procedimento para os pontos pretos.
3. Um circuito que represente um ciclo- $T$  é representado pelo traço das matrizes de projeção  $A$  na expressão algébrica. Quando a linha que representa as matrizes de projeção são atravessadas no sentido horário a matriz deve ser representada pela sua transposta  $A^T$ .
4. Um Circuito qualquer, que represente um ciclo- $U$ , corresponde a um comprimento  $c_k$  igual a metade das linhas pontilhadas que o gera. Todos os ciclos- $U$  em um diagrama devem definir o coeficiente  $V_{c_1, \dots, c_k}$ .

Quando a matriz  $U$  é simétrica, seção 2.2, vimos que os pontos brancos e pretos devem ser conectados. Este fato implica que somente a regra 2, dos quatro itens acima, deve ser alterada. A nova segunda regra para EOC é:

- *Emparelhar os pontos associados a  $U$  e  $U^*$  conectando-os através de linhas referentes aos deltas de Kronecker realizando assim as permutações.*

Todas essas regras diagramáticas são exatas, na próxima seção introduziremos a idéia de limite semiclássico que será necessário quando formos aplicar a teoria em problemas físicos como pontos quânticos e fios desordenados onde a matrizes de espalhamento do sistemas têm grandes dimensões.

## 2.5 Limite Semiclássico ( $N \gg 1$ )

Brouwer notou que os coeficientes  $V$  poderiam ser expandidos em série polinomial de  $N$  ao se aplicar o limite semiclássico obtendo como resultado

$$V_{c_1, \dots, c_k} = \prod_{j=1}^k V_{c_j} + \mathcal{O}(N^{k-2n-2}). \quad (2.10)$$

Quando estamos trabalhando com o EUC, seção 2.1, temos que

$$V_c = \frac{1}{c} N^{1-2c} (-1)^{c-1} \binom{2c-2}{c-1} + \mathcal{O}(N^{-1-2c}). \quad (2.11)$$

Já para o EOC, seção 2.2, a expansão muda para

$$V_c = \frac{1}{c} N^{1-2c} (-1)^{c-1} \binom{2c-2}{c-1} - N^{-2c} (-4)^{c-1} + \mathcal{O}(N^{-1-2c}). \quad (2.12)$$

Comparando as eqs. (2.11) e (2.12) percebemos um termo extra de ordem  $N^{-2c}$  no EOC que não existe no EUC. Este termo aparece devido à simetria adicional presente na matriz  $U$  do EOC.

Foi percebido também que os cálculos diagramáticos perturbativos ganhavam em eficiência se atribuirmos um “peso” a cada ciclo- $U$  individualmente quando aplicado o limite semiclássico, ou seja, representar os coeficientes  $V_{c_1, \dots, c_k}$  que determinam os *momentos* de  $U$  através dos *cumulantes* representados por  $W_{c_1, \dots, c_k}$ <sup>1</sup>. Como acontece com os momentos  $V_{c_1, \dots, c_k}$ , os cumulantes  $W_{c_1, \dots, c_k}$  também são determinados por uma relação recursiva e podem ser expandidos em serie quando aplicamos o limite semiclássico

$$W_{c_1, \dots, c_k} = 2^k N^{-2n-k+2} (-1)^{n+k} \frac{(2n+k-3)!}{(2n)!} \prod_{j=1}^k \frac{(2c_j-1)!}{(c_j-1)!^2} + \mathcal{O}(N^{-2n-k}). \quad (2.13)$$

A eq. (2.13) só é válida para o EUC. Para o EOC a expansão dos cumulantes  $W_{c_1, \dots, c_k}$  é

$$W_{c_1, \dots, c_k} = 2^{2k-1} N^{-2n-k+2} (-1)^{n+k} \frac{(2n+k-3)!}{(2n)!} \prod_{j=1}^k \frac{(2c_j-1)!}{(c_j-1)!^2} + \mathcal{O}(N^{-2n-k+1}). \quad (2.14)$$

É interessante notar que os valores de  $W_{c_1, \dots, c_k}$ , eqs. (2.13) e (2.14), decrescem com o aumento do número de ciclos  $k$ , enquanto que  $V_{c_1, \dots, c_k}$ , eqs. (2.11) e (2.12), crescem. Este fato implica que no limite semiclássico os coeficientes  $V$  podem ser representados por

$$V_{c_1, \dots, c_k} \equiv \prod_{p=1}^k W_{c_p} \quad (2.15)$$

onde os coeficientes  $W_{c_p}$  são os termos que têm um “peso” maior na expansão de  $V$  nos cumulantes  $W$ . A expressão 2.15 contém toda a informação pertinente para o cálculo das médias no limite semiclássico.

<sup>1</sup>A relação é  $V_{c_1} = W_{c_1}$ ,  $V_{c_1, c_2} = W_{c_1} W_{c_2} + W_{c_1, c_2}$  e etc [37].

## 2.6 Aplicação em Cavidades Caóticas

Nesta seção iremos aplicar a técnica diagramática perturbativa para encontrar a média da condutância do sistema apresentado na fig. 2.1 que consiste de uma cavidade caótica conectada a dois guias com ou sem barreiras de tunelamento nos contatos. A matriz unitária ou simétrica que iremos usar é a matriz de espalhamento  $S$ , que como vimos no capítulo 1, descreve por completo o sistema mesoscópico que estamos trabalhando.

### 2.6.1 Média da Condutância para Contatos Ideais

Como vimos na seção 1.3 a matriz de espalhamento que descreve uma cavidade conectada a dois guias por contatos ideais é descrita pelo ensemble circular e pode ser escrita no formato de blocos, eq. (1.10). A condutância adimensional  $g = G/G_0$  é dada pela formula de Landauer (1.26) e pode ser escrita na seguinte forma

$$g = \text{Tr}t't'^{\dagger} = \text{Tr}C_2SC_1S^{\dagger}. \quad (2.16)$$

As duas matrizes de projeção  $C_1$  e  $C_2$  são definidas por

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{1}}_{N_1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{1}}_{N_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

onde  $\hat{\mathbf{1}}_{N_i}$  é a matriz identidade ( $N_i \times N_i$ ). Usando as regras apresentadas na seção 2.4 para os ensembles EUC e EOC na eq. (2.16) podemos encontrar a média da condutância em função do índice de simetria  $\beta = 1, 2$  e chegar no seguinte resultado

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2 + 2 - \beta}. \quad (2.18)$$

Expandindo a eq. (2.18) no limite de  $N_1, N_2 \gg 1$  temos

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{1}{N_1 + N_2} + \dots \right]. \quad (2.19)$$

Quando  $\beta = 2$  a média da condutância na eq. (2.19) é dada pela condutância clássica. Para  $\beta = 1$  o segundo termo sobrevive e é conhecido como localização fraca. Este fator reduz a condutância do sistema com simetria de reversão temporal em relação ao valor da condutância clássica. Os termos de menor ordem na expansão

são negligenciados. Este problema é um exemplo relativamente simples em que podemos aplicar a técnica diagramática. Em seguida apresentaremos um exemplo mais interessante, onde os contatos são não ideais.

### 2.6.2 Média da Condutância para Contatos não Ideais

Como descrito na seção 1.4, quando existem barreiras de tunelamento nos contatos entre os guias e a cavidade, a matriz de espalhamento  $S$  é distribuída de acordo com o núcleo de Poisson (1.40). Neste caso a matriz  $S$  pode ser decomposta numa parte flutuante mais a média da matriz de espalhamento, ou seja,  $S = \delta S + \bar{S}$ . Substituindo essa decomposição na eq. (2.16) e levando em conta que  $\bar{S}$ ,  $C_1$  e  $C_2$  comutam e  $C_1 C_2 = 0$ , encontramos a seguinte relação

$$\langle g \rangle = \langle \text{Tr} (C_2 \delta S C_1 \delta S^\dagger) \rangle. \quad (2.20)$$

O problema a se resolver agora é como introduzir as barreiras de tunelamento exatamente nos contatos entre a cavidade e os guias. Brouwer, resolveu esse problema propondo que a parte flutuante  $\delta S$  da matriz de espalhamento pode ser decomposta na seguinte forma

$$\delta S = L (1 - UR)^{-1} UT \quad \text{onde} \quad \hat{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{S} & L \\ T & R \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A interpretação física da eq. (2.21) é que a matriz  $U$  é descrita pelo ensemble circular correspondendo à matriz de espalhamento da cavidade sem as barreiras e com os guias, já a matriz  $\hat{\Xi}$  corresponde à matriz de espalhamento das barreiras de tunelamento sem a cavidade. A idéia então foi sobrepor dois problemas distintos com o intuito de resolver o problema que estamos apresentando.

A eq. (2.21) é um dos pontos principais do trabalho de Brouwer, pois a partir desta decomposição é possível introduzir as barreiras de tunelamento na fronteira da amostra, exatamente na junção entre a cavidade e os guias, veja fig. 2.1. Além disso ela facilita os cálculos para integrar  $U$  sobre o grupo unitário, diminuindo os problemas de se calcular a média de  $S$  com o núcleo de Poisson.

Continuaremos nosso problema substituindo a flutuação da matriz de espalhamento, eq. (2.21), na média da condutância, eq. (2.20). A estrutura polinomial que se encontra pode ser expandida em série  $\langle g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n(U) \rangle$ , onde  $f_n(U)$  é uma função polinomial dependente do índice exponencial  $n$ . Queremos trabalhar no limite semiclássico, que discutimos na seção 2.5, pois devemos selecionar os diagramas de maior “peso”. Neste limite a função polinomial  $f_n(U)$  é representada pelo

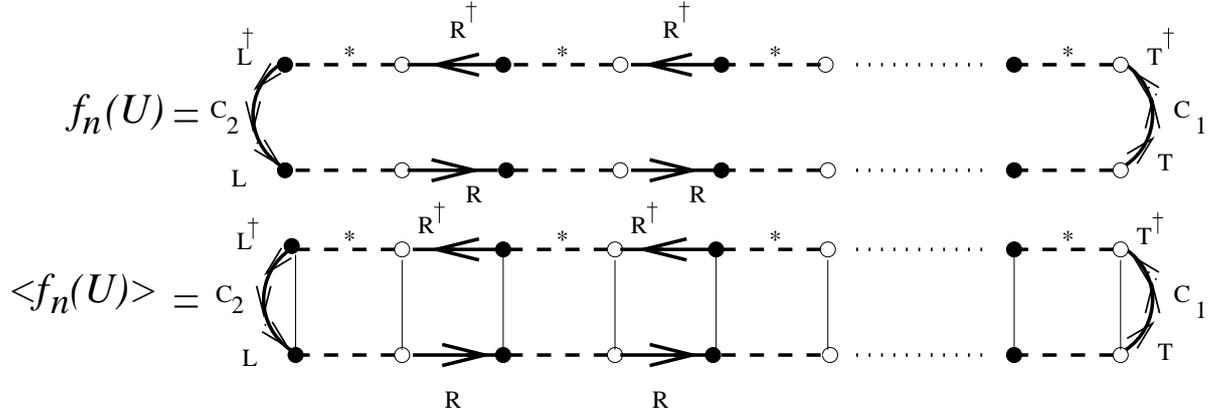


Figura 2.6: Representação diagramática da função  $f_n(U)$  (acima). Diagrama escada com o maior número de ciclos- $U$  e  $T$  possíveis para a  $\langle f_n(U) \rangle$  (abaixo).

diagrama da fig. 2.6. Ao realizarmos a média sobre a função  $\langle f_n(U) \rangle$  encontramos os diagramas conhecidos na literatura como diagramas escada que contêm o maior número de ciclos- $U$  e ciclos- $T$  possíveis, veja fig. 2.6.

Quando trabalhamos com a matriz  $S$  unitária ou EUC ( $\beta = 2$ ), somente os diagramas das médias das funções polinomiais  $\langle f_n(U) \rangle$  colaboram com a média da condutância. Isso implica que os diagramas de ordem  $\mathcal{O}(1)$  têm uma contribuição irrelevante no limite semiclássico. Usando corretamente a regras apresentadas na seção 2.4 sobre os diagramas da média da função polinomial na fig. 2.6 encontramos a média da condutância para matrizes unitárias, dada por

$$\langle g \rangle = \frac{k_1 \gamma_1}{k_1 + \gamma_1} + \mathcal{O}(1), \quad (2.22)$$

onde  $k_1 = \sum_{n=1}^{N_2} \Gamma_n$  e  $\gamma_1 = \sum_{n=1+N_2}^M \Gamma_n$  com  $M = N_1 + N_2$ ,  $N_{1,2}$  é número de canais no guia 1 ou 2 e  $\Gamma_n$  são os autovalores de transmissão pelas barreiras. Quando fazemos  $\Gamma_n = 1$  na eq. (2.22) obtemos exatamente a eq. (2.19) quando  $\beta = 2$ .

Mas como vimos na seção 2.2 a matriz de espalhamento  $S$  pode ser unitária e simétrica ( $\beta = 1$ ), neste caso as características do problema mudam. Os diagramas escada, fig. 2.6, contribuem igualmente para a média da condutância no EOC a diferença é que agora aparecem duas novas contribuições, que não estão presentes no EUC, conhecidas na literatura com localização fraca. A contribuição da localização fraca para a média da condutância resulta de uma correção em primeira ordem  $\mathcal{O}(1)$  [46]. Esta correção, na técnica diagramática, tem duas origens:

- Termos de  $\mathcal{O}(M^{-2})$  no “peso”  $W_1 = M^{-1} + \mathcal{O}(M^{-2})$ ;

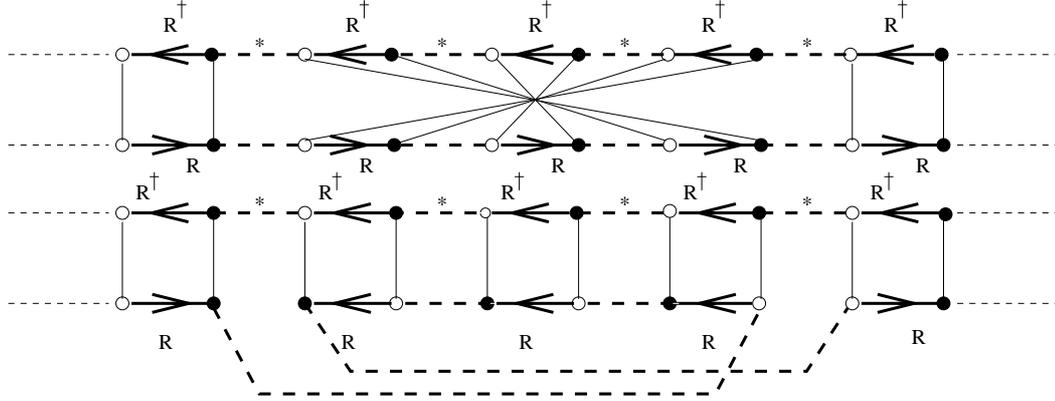


Figura 2.7: Acima, diagrama maximamente cruzado que contribui para a localização fraca da condutância média, à direita e à esquerda temos uma estrutura escada. Abaixo, estrutura maximamente cruzada em forma de diagrama escada.

- Diagramas de ordem  $\mathcal{O}(1)$ .

Quando a simetria de reversão temporal não está presente ( $\beta = 2$ ) ambas contribuições para a localização fraca não aparecem, ou seja, em  $W_1 = M^{-1}$  não há termo de ordem  $\mathcal{O}(M^{-2})$ , veja eq. (2.13) e não há diagramas de ordem  $\mathcal{O}(1)$ . Neste sistema,  $\beta = 2$ , não existe localização fraca, ela é suprimida devido a quebra da simetria de reversão temporal. Mas se há simetria de reversão temporal ( $\beta = 1$ ) o “peso”  $W_1 = M^{-1} - M^{-2} + \dots$  contém o termo  $\mathcal{O}(M^{-2})$  e os diagramas de ordem  $\mathcal{O}(1)$  aparecem.

A primeira correção para a obtenção da localização fraca em um sistema com simetria de reversão temporal é dada pelo termo  $\mathcal{O}(M^{-2})$  que aparece na eq. (2.12). Já a segunda correção é devida aos diagramas que têm a parte central *maximamente cruzada* e o final tanto do lado esquerdo quanto direito ligados a diagramas escada. Os diagramas maximamente cruzados podem ser representados com diagramas escada revertendo a ordem da contração em uma parte dos diagramas, veja figs. 2.7 e 2.8. Na ausência de simetria de reversão temporal esse diagramas não existem, pois pontos brancos não podem se conectar a pontos pretos.

Após a obtenção da correção em primeira ordem, a localização fraca, e usando corretamente as regras da seção 2.4 para EOC encontramos que a média da condutância para este problema é dada por

$$\langle g \rangle = \frac{k_1 \gamma_1}{k_1 + \gamma_1} - \frac{k_1^2 \gamma_2 + \gamma_1^2 k_2}{(k_1 + \gamma_1)^3} + \mathcal{O}(M^{-1}), \quad (2.23)$$

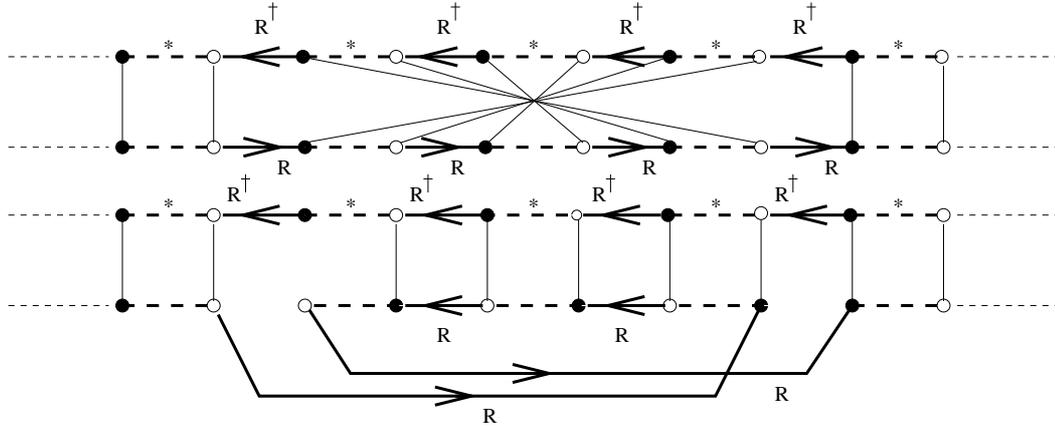


Figura 2.8: Acima, diagrama maximamente cruzado que contribui para a localização fraca da condutância média, à direita e à esquerda temos uma estrutura escada. Abaixo, estrutura maximamente cruzada em forma de diagrama escada.

onde  $k_2 = \sum_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^2$  e  $\gamma_2 = \sum_{n=1+N_2}^M \Gamma_n^2$ . A localização fraca diminui o valor da condutância em relação ao valor obtido para EUC, eq. (2.22), isto ocorre pois existe uma maior probabilidade de reflexão das partículas na cavidade caótica devido a interferências construtivas entre trajetórias revertidas no tempo. A eq. (2.22) se transforma na eq. (2.19) quando fazemos  $\Gamma_n = 1$  e  $\beta = 1$ .

A técnica diagramática proposta por Brouwer e Beenakker ainda é capaz de calcular a média da condutância para matrizes unitárias de quatérnios, ou seja, para o ensemble simplético circular (ESC) ( $\beta = 4$ ). Também podemos a partir da técnica diagramática calcular a variância da condutância para contatos ideais ou não. Eles ainda aplicaram a técnica diagramática para obter a média e a variância da condutância em uma junção supercondutor-metal-normal que coincidem com os resultados apresentados pela ref. [47].

Neste capítulo apresentamos a técnica diagramática de uma forma mais sucinta. Para um tratamento mais detalhado recomendamos as refs. [11, 21]. Nos próximos capítulos iremos apresentar a nossa contribuição para o desenvolvimento da teoria e compará-la com a teoria de circuitos estendida.

## Capítulo 3

# Densidade dos Autovalores de Transmissão

No último capítulo calculamos diagramaticamente o valor médio da condutância. Observamos que para sistemas sem simetria de reversão temporal a maior contribuição veio dos diagramas escada.

A condutância adimensional é dada pela fórmula de Landauer

$$g = \sum_j \tau_j. \quad (3.1)$$

Genericamente, podemos estudar observáveis de transporte na forma de uma estatística linear

$$A = \sum_j a(\tau_j), \quad (3.2)$$

onde  $a(\tau_j)$  é uma função arbitrária, mas bem comportada, de  $\tau$ .

Para calcular o valor médio,  $\langle A \rangle = \int_0^1 d\tau a(\tau) \rho(\tau)$ , temos de conhecer a densidade dos autovalores de transmissão  $\rho(\tau)$  (veja seção 1.2.3). A descrição das propriedades de transporte de sistemas mesoscópicos no regime semiclássico está inteiramente contida em  $\rho(\tau)$  que por sua vez exerce um papel fundamental na obtenção dos cumulantes da estatística de contagem. Muitos esforços vêm sendo empregados para o cálculo de  $\rho(\tau)$  através de uma variedade de métodos como, por exemplo a teoria de circuitos [48], o modelo- $\sigma$  não-linear supersimétrico [41] e métodos diagramáticos [47]. Seu cálculo geralmente traz complicações algébricas que nem sempre são superados analiticamente.

Brouwer e Beenakker, motivados pelo sucesso obtido por Nazarov [13], via teoria de circuitos, em obter a densidade de autovalores de transmissão para uma caverna caótica com duas junções de tunelamento desenvolveram uma técnica diagramática para o cálculo desta grandeza. Eles obtiveram sucesso somente para o caso de uma caverna caótica conectada a duas barreiras simétricas com canais inequivalentes. Este resultado foi suficiente para chamar a atenção da comunidade científica sobre esta técnica baseada em teoria de espalhamento e o núcleo de Poisson.

A motivação desta tese partiu do recente trabalho apresentado por Macêdo e Souza [10] baseado na teoria de circuitos estendida [41]. Eles obtiveram uma equação polinomial de ordem 4 e os dois primeiros cumulantes da estatística de contagem referente a uma caverna caótica conectada a duas barreiras de tunelamento arbitrárias, esse resultado será apresentado no capítulo 4.

O objetivo desse capítulo é resolver o problema referente a uma caverna caótica conectada a duas barreiras arbitrárias (fig. 2.1) através da técnica diagramática. Na seção 3.2, similar a teoria de circuitos estendida, obtemos um conjunto de equações algébricas não-lineares acopladas para este sistema mesoscópico. Estas equações algébricas sugerem uma possível equivalência entre a análise diagramática e a teoria de circuitos estendida. Analisaremos essa hipótese no capítulo 5.

Nesse capítulo também mostraremos que a densidade média de autovalores de transmissão é dada por uma grande classe de diagramas chamados de diagramas *planares*. Os diagramas escada são apenas um subconjunto dos planares. Os efeitos de localização fraca serão desprezados.

### 3.1 Caverna Caótica com Guias Ideais

Os autovalores de transmissão,  $\tau_n \in [0, 1]$ , são os  $N_2$  autovalores do produto matricial  $s_{12}s_{12}^\dagger$ . Sem perda de generalidade admitimos que  $N_2 \leq N_1$ . O produto matricial  $s_{21}s_{21}^\dagger$  então tem os mesmos  $N_2$  autovalores que  $s_{12}s_{12}^\dagger$ , mais  $N_1 - N_2$  autovalores iguais a zero. Os  $N_2$  autovalores aparecem como elementos diagonais da matriz  $\Upsilon$  na decomposição polar de  $S$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Upsilon} & 0 & i\sqrt{\Upsilon} \\ 0 & \hat{1} & 0 \\ i\sqrt{\Upsilon} & 0 & \sqrt{1-\Upsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' & 0 \\ 0 & w' \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$



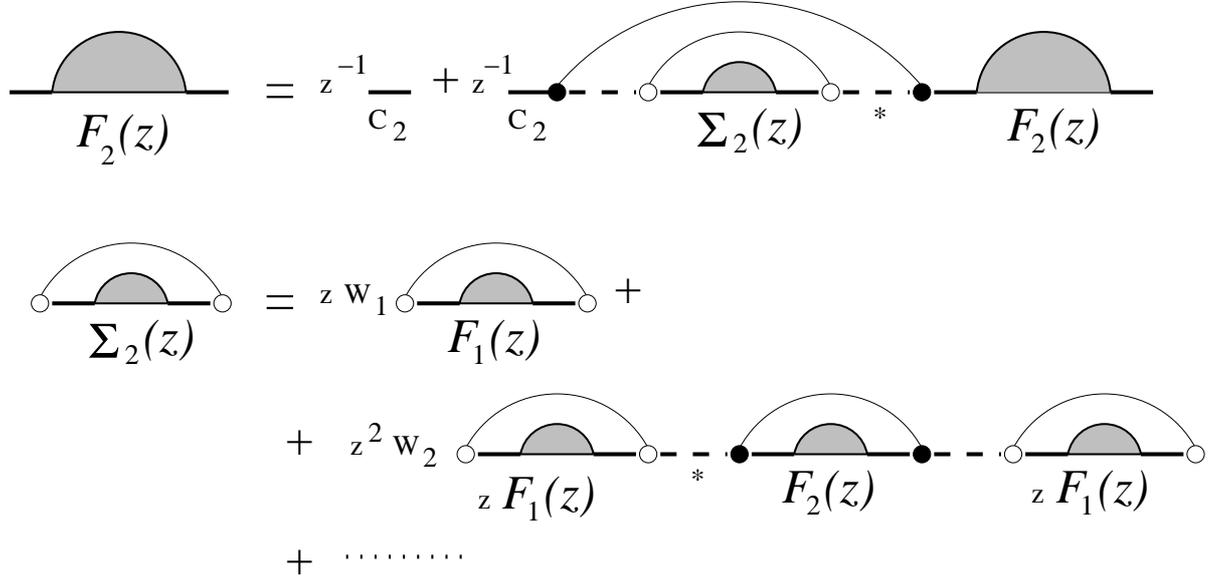


Figura 3.2: Representação diagramática da equação de Dyson para  $F_2$ , eq. (3.11).

Introduzindo (1.41) e (2.17) nestas equações obtemos,

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (t^\dagger t)^n \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

e

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \begin{pmatrix} (tt^\dagger)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

As duas funções de Green  $F_1(z)$  e  $F_2(z)$  são representadas através diagramas na fig. 3.1. As contribuições diagramáticas relevantes são as que têm o número máximo de ciclos- $U$  e  $T$ . Este é o caso do diagrama *planar*, ou seja, as linhas finas não se cruzam. Somar sobre todos estes diagramas resulta numa equação de Dyson para  $F_i(z)$ , o qual resolve nosso problema. Para integrar sobre a matriz unitária  $U$ , todos os ciclos- $U$  de comprimento arbitrário têm que ser levados em conta, veja fig. 3.2. A equação de Dyson correspondente é [21]

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= z^{-1}C_1 + z^{-1}C_1\Sigma_1(z)F_1(z), & \Sigma_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(zf_2)^n(f_1)^{n-1}, \\
F_2(z) &= z^{-1}C_2 + z^{-1}C_2\Sigma_2(z)F_2(z), & \Sigma_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(zf_1)^n(f_2)^{n-1}.
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Considere a função geratriz,  $\zeta(z)$ , definida pela série planar

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{n!(n-1)!M^{2n-1}} z^{n-1} \\
&= \frac{1}{2z} \left( \sqrt{4z + M^2} - M \right),
\end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $W_n$  é dado pela eq. (2.13). Aplicando o traço e usando a função geratriz na eq. (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
zf_1(z) - \Sigma_1(z)f_1(z) &= N_1, & \Sigma_1(z) &= \zeta(zf_1f_2)zf_2 \\
zf_2(z) - \Sigma_2(z)f_2(z) &= N_2, & \Sigma_2(z) &= \zeta(zf_2f_1)zf_1.
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Para obter (3.13) usa-se as igualdade  $\text{Tr}(C_i F_i(z)) = \text{Tr}(F_i(z)) = f_i(z)$  onde  $i = 1, 2$  e pode ser escrita como

$$\begin{cases} z^2 f_1^2 + z f_1(N_2 - N_1 - f_2) - N_1 N_2 = 0 \\ z^2 f_2^2 + z f_2(N_1 - N_2 - f_1) - N_1 N_2 = 0. \end{cases}$$

A solução do sistema é

$$\begin{cases} f_1(z) = \frac{N_1 - N_2}{2z} + \frac{\sqrt{M^2 z - (N_1 - N_2)^2}}{2z\sqrt{z-1}} \\ f_2(z) = \frac{N_2 - N_1}{2z} + \frac{\sqrt{M^2 z - (N_2 - N_1)^2}}{2z\sqrt{z-1}}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Substituindo este resultado na densidade de autovalores, eq. (3.6), obtemos

$$\rho(\tau) = \frac{M}{2\pi} \frac{\sqrt{\tau - \tau_{min}}}{\tau\sqrt{1-\tau}}, \quad \tau_{min} = \frac{(N_1 - N_2)^2}{M^2}, \quad (3.15)$$

onde  $\tau_{min} \leq \tau \leq 1$ . Esse resultado foi obtido anteriormente por [33, 34, 50].

As médias da condutância e da potência do ruído de disparo adimensionais são dadas respectivamente por

$$\langle g \rangle = \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \tau, \quad \text{e} \quad \langle p \rangle = \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \tau (1 - \tau). \quad (3.16)$$

onde  $\rho(\tau)$  é dado pela eq. (3.15). Obtemos então

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}. \quad (3.17)$$

que é igual a eq. (2.18) quando  $\beta = 2$  e o fator Fano é

$$\frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} = \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2}. \quad (3.18)$$

Para dois pontos de contatos idênticos,  $N_1 = N_2$ , o fator Fano é igual a um quarto que corresponde a supressão do ruído de disparo em relação ao ruído de Poisson, ou seja,  $P = \frac{1}{4} P_{Poisson}$  [3, 30].

## 3.2 Cavidade Caótica com Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias

Vamos considerar a situação mais geral na qual existem barreiras de transparência arbitrária nas interfaces da cavidade caótica com os guias. Admitiremos por simplicidade o caso de canais equivalentes, ou seja,  $N_1 = N_2 = N$  e  $M = 2N$ . Considere as matrizes ( $2M \times 2M$ )

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^\dagger \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\hat{F}(z) = \begin{pmatrix} 0 & F_1(z) \\ F_2(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^\dagger \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Análogo a (2.21), decompos  $\hat{S} = \delta \hat{S} + \hat{\hat{S}}$ , onde  $\hat{\hat{S}} = \langle \hat{S} \rangle$  e

$$\delta \hat{S} = \hat{L} \left( 1 - \hat{U} \hat{R} \right)^{-1} \hat{U} \hat{T}, \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

é representado em termos de uma matriz  $U$  que é distribuída de acordo com o ensemble circular. Lembrando que  $\bar{S}$ ,  $C_1$  e  $C_2$  comutam e  $C_1 C_2 = 0$ , podemos substituir  $S$  por  $\delta S$  em (3.4) e (3.5). A função de Green matricial  $\hat{F}(z)$  fica

$$\hat{F}(z) = \left\langle \hat{C}(z - \delta \hat{S} \hat{C} \delta \hat{S} \hat{C})^{-1} \right\rangle. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) em (3.23), podemos expandir em série de potências. Organizando os termos encontramos que

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{2z} \left( \hat{F}_+(z) + \hat{F}_-(z) \right), \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{F}_\sigma(z) &= \left\langle \hat{C} + \sigma \hat{C} \hat{L} \left( 1 - \hat{U} \left( \hat{R} + \sigma \hat{T} \hat{C} \hat{L} \alpha \right) \right)^{-1} \hat{U} \hat{T} \hat{C} \alpha \right\rangle \\ &= \hat{C} + \sigma \hat{C} \hat{L} \left( \hat{G}_\sigma - \hat{G}_\sigma^0 \right) \hat{T} \hat{C} \alpha, \end{aligned} \quad (3.25)$$

ou seja

$$\hat{F}_\sigma(z) = \hat{C} + \sigma \hat{C} \hat{L} \left( 1 - \hat{\Sigma}_\sigma \hat{G}_\sigma^0 \right)^{-1} \hat{\Sigma}_\sigma \hat{T} \hat{C} \alpha, \quad (3.26)$$

onde  $\hat{G}_\sigma = \left\langle \hat{G}_\sigma^0 \left( 1 - \hat{U} \hat{G}_\sigma^0 \right)^{-1} \right\rangle$ ,  $\hat{G}_\sigma^0 = \hat{R} + \sigma \hat{T} \hat{C} \hat{L} \alpha$  e  $\alpha \equiv z^{-1/2}$ . A função de Green  $\hat{G}_\sigma$  pode ser calculada pela expansão em diagramas planares. A equação de Dyson resultante é similar a eq. (3.11),

$$\hat{G}_\sigma = \hat{G}_\sigma^0 + \hat{G}_\sigma^0 \hat{\Sigma}_\sigma \hat{G}_\sigma = \hat{G}_\sigma^0 + \hat{G}_\sigma \hat{\Sigma}_\sigma \hat{G}_\sigma^0,$$

onde

$$\hat{\Sigma}_\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \left( \hat{P}_\sigma \right)^{2n-1} = \hat{P}_\sigma \zeta(\hat{P}_\sigma^2), \quad (3.27)$$

é a matriz energia livre. O operador de projeção  $\hat{P}_\sigma$  é definido por

$$\hat{P}_\sigma = \left( \begin{array}{cc} 0 & \text{Tr} G_\sigma^{12} \\ \text{Tr} G_\sigma^{21} & 0 \end{array} \right) \otimes \mathbf{1}_M, \quad (3.28)$$

onde  $G_\sigma^{12}$  e  $G_\sigma^{21}$  são os blocos não diagonais da função de Green matricial

$$\hat{G}_\sigma = \left( \begin{array}{cc} G_\sigma^{11} & G_\sigma^{12} \\ G_\sigma^{21} & G_\sigma^{22} \end{array} \right). \quad (3.29)$$

Usando (3.12) podemos escrever (3.27) na forma

$$\hat{\Sigma}_\sigma \hat{P}_\sigma \hat{\Sigma}_\sigma + M \hat{\Sigma}_\sigma = \hat{P}_\sigma. \quad (3.30)$$

Para facilitar a resolução do problema, introduzimos as variáveis

$$\begin{aligned} \theta_{1\sigma} &= \frac{1}{N} \text{Tr}(G_\sigma^{12}) = \sigma \theta_1, \\ \theta_{2\sigma} &= \frac{1}{N} \text{Tr}(G_\sigma^{21}) = \sigma \theta_2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

implicando na seguinte fórmula para matriz  $\hat{P}_\sigma$

$$\hat{P}_\sigma = N\sigma \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_M. \quad (3.32)$$

Usando o ansatz

$$\hat{\Sigma}_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_M, \quad (3.33)$$

em (3.30), obtemos o seguinte sistema acoplado

$$\beta_1^2 \theta_2 + 2\beta_1 = \theta_1 \quad (3.34)$$

$$\beta_2^2 \theta_1 + 2\beta_2 = \theta_2. \quad (3.35)$$

Neste estágio necessitamos especificar melhor a natureza dos contatos entre a cavidade e os guias. Assumimos, como já mencionado, a presença de barreiras assimétricas com  $N$  canais de transmissão equivalentes. A escolha adequada para as matrizes  $T$ ,  $L$  e  $R$  deve satisfazer a unitariedade da matrix  $\Xi$ , eq. (2.21). Usamos os seguintes valores

$$T = L = \begin{pmatrix} i\sqrt{\Gamma_1} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\Gamma_2} \end{pmatrix} \otimes \hat{\mathbf{1}}_M \quad (3.36)$$

e

$$R = \bar{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\Gamma_2} \end{pmatrix} \otimes \hat{\mathbf{1}}_M, \quad (3.37)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representam os coeficientes de transmissão dos canais na barreira 1 e 2 respectivamente. Combinando essas expressões juntamente com o ansatz (3.33) e a eq. (3.30) obtemos,

$$\theta_1 = \frac{\alpha\Gamma_2 + (1-\Gamma_2)\beta_1}{1 - \alpha\beta_2\Gamma_2 - \beta_1\beta_2(1-\Gamma_2)} + \frac{(1-\Gamma_1)\beta_1}{1 - \alpha\beta_1\Gamma_1 - \beta_1\beta_2(1-\Gamma_1)}, \quad (3.38)$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha\Gamma_1 + (1 - \Gamma_1)\beta_2}{1 - \alpha\beta_1\Gamma_1 - \beta_1\beta_2(1 - \Gamma_1)} + \frac{(1 - \Gamma_2)\beta_2}{1 - \alpha\beta_2\Gamma_2 - \beta_1\beta_2(1 - \Gamma_2)}. \quad (3.39)$$

Combinando (3.38), (3.39) e (3.35) geramos o seguinte sistema algébrico não-linear

$$(1 - \Gamma_1)\Gamma_2\beta_1\beta_2^3\alpha + [(\alpha^2\Gamma_1\Gamma_2 + (2\Gamma_1 - 1)\Gamma_2 - \Gamma_1)\beta_1 - (1 + \Gamma_1)\Gamma_2\alpha]\beta_2^2 + [(\Gamma_1 - 2\Gamma_1\Gamma_2)\alpha\beta_1 + \alpha^2\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2]\beta_2 - \alpha\Gamma_1 = 0, \quad (3.40)$$

e

$$(1 - \Gamma_2)\Gamma_1\beta_2\beta_1^3\alpha + [(\alpha^2\Gamma_1\Gamma_2 + (2\Gamma_2 - 1)\Gamma_1 - \Gamma_2)\beta_2 - (1 + \Gamma_2)\Gamma_1\alpha]\beta_1^2 + [(\Gamma_2 - 2\Gamma_1\Gamma_2)\alpha\beta_2 + \alpha^2\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2]\beta_1 - \alpha\Gamma_2 = 0. \quad (3.41)$$

Finalmente, inserindo o ansatz (3.33) na eq. (3.24) encontramos

$$f_1(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha\Gamma_2\beta_2}{1 - (1 - \Gamma_2)\beta_1\beta_2} \right]^{-1} \quad (3.42)$$

e

$$f_2(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha\Gamma_1\beta_1}{1 - (1 - \Gamma_1)\beta_1\beta_2} \right]^{-1}. \quad (3.43)$$

As eqs. (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43) são o resultado central desta seção. Juntamente com a eq. (3.6) representam a solução completa das propriedades estatísticas do sistema com barreiras de transparências arbitrárias. A solução deste problema só foi possível devido a obtenção da eq. (3.30) que tem como solução o ansatz da eq. (3.33). Este resultado é a extensão dos cálculos de Brouwer e Beenaeker para o caso de barreiras assimétricas. Antes de apresentarmos uma análise completa da situação geral, discutiremos alguns importantes casos particulares.

### 3.2.1 Cavidade Caótica com Barreiras Simétricas

O caso de barreiras simétricas é descrito por  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  nas eqs. (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43), então:

$$(\alpha\beta^2 - 2\beta + \alpha)((1 - \Gamma)\beta^2 + \alpha\Gamma\beta - 1) = 0 \quad (3.44)$$

e

$$f_1(z) = f_2(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha\Gamma\beta}{1 - (1 - \Gamma)\beta^2} \right]^{-1}. \quad (3.45)$$

A raiz física de (3.44) é dada por  $\beta = (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})/\alpha = \sqrt{z} - \sqrt{z - 1}$ , sendo  $f_1(z) = f(z) = f_2(z)$ , onde

$$f(z) = N \frac{2(\sqrt{z} - \sqrt{z - 1})(1 - \Gamma) + \Gamma/\sqrt{z - 1}}{2z(\sqrt{z} - \sqrt{z - 1})(1 - \Gamma) + \Gamma\sqrt{z}}. \quad (3.46)$$

Podemos escrever essa equação de uma forma mais adequada

$$f(z) = N \frac{4z\sqrt{1 - z}(1 - \Gamma) + i\Gamma\sqrt{z}(2 - \Gamma)}{z\sqrt{1 - z}(\Gamma^2 - 4 + 4z)}. \quad (3.47)$$

Inserindo  $f(z)$  em (3.6) encontramos a densidade média

$$\rho(\tau) = \frac{N}{\pi} \frac{\Gamma(2 - \Gamma)}{(\Gamma^2 - 4\Gamma\tau + 4\tau)\sqrt{\tau(1 - \tau)}}, \quad (3.48)$$

que está de acordo com a ref. [41]. Se  $\Gamma \rightarrow 1$  em (3.48), temos

$$\rho(\tau) \rightarrow \frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau(1 - \tau)}}, \quad (3.49)$$

reproduzindo perfeitamente (3.15) quando  $N_1 = N_2 = N = M/2$ .

A solução obtida por Brouwer e Beenakker [11] é uma generalização da eq. (3.48) para canais inequivalentes. Isto é

$$\rho(\tau) = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(2 - \Gamma_n)}{\pi(\Gamma_n^2 - 4\Gamma_n\tau + 4\tau)\sqrt{\tau(1 - \tau)}}, \quad (3.50)$$

a qual, é claro, reproduz (3.48) quando  $\Gamma_n = \Gamma$ .

### 3.2.2 Cavidade Caótica com Duas Junções de Tunelamento

Esta situação é descrita aplicando a condição  $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$  nas eqs. (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43). Obtemos

$$\begin{aligned} \beta_2^2 \alpha \Gamma_2 - \beta_2(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \alpha \Gamma_1 &= 0 \\ \beta_1^2 \alpha \Gamma_1 - \beta_1(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \alpha \Gamma_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

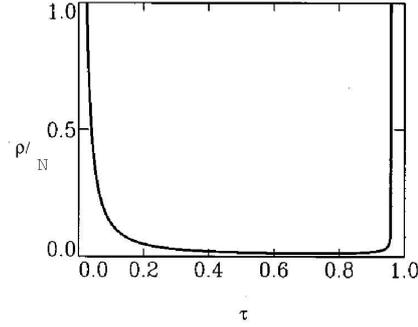


Figura 3.3: Distribuição de probabilidade de transmissão através de junções de tunelamento com  $\Gamma_1 = 0,02$  e  $\Gamma_2 = 0,03$ . A figura foi tirada da ref. [3].

juntamente com

$$f_1(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha \Gamma_2 \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right]^{-1} \quad (3.52)$$

e

$$f_2(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha \Gamma_1 \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2} \right]^{-1}. \quad (3.53)$$

As raízes da eq. (3.51) são

$$\beta_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\alpha\Gamma_1} \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2\tau_0} \right) \quad (3.54)$$

e

$$\beta_2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\alpha\Gamma_2} \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2\tau_0} \right), \quad (3.55)$$

onde  $\tau_0 = 4\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2$ . Com essas raízes concluímos que  $f_1(z) = f(z) = f_2(z)$ , onde

$$f(z) = \frac{N}{z} \left[ \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)\sqrt{z(z - \tau_0)}}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)\sqrt{z(z - \tau_0)} - \Gamma_1\Gamma_2} \right], \quad (3.56)$$

ou seja

$$f(z) = \frac{N}{z} \left[ 1 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2) \sqrt{z(z - \tau_0)}} \right], \quad (3.57)$$

Substituindo esta equação em (3.6), obtemos

$$\rho(\tau) = \frac{N \Gamma_1 \Gamma_2}{\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \frac{1}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau_0 - \tau}}, \quad 0 < \tau < \tau_0. \quad (3.58)$$

que está de acordo com as refs. [10, 13, 3]. A eq. (3.58) é uma distribuição binomial, no sentido que a probabilidade de transmissão é mínima,  $\tau \approx 0$ , ou máxima,  $\tau \approx \tau_0$ , veja fig. 3.4.

Usando (3.16) e (3.58) podemos calcular o valor médio da condutância e da potência do ruído de disparo (veja seção (1.5)). Então encontramos <sup>1</sup>

$$\langle g \rangle_{TJ} = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (3.59)$$

para a condutância média. Fisicamente, esta média corresponde a uma aplicação da lei de Ohm para adição de resistências de contato  $R_1 = \frac{1}{N\Gamma_1}$  e  $R_2 = \frac{1}{N\Gamma_2}$  [24]. De modo que

$$R_{TJ} = \frac{1}{\langle g \rangle_{TJ}} = R_1 + R_2. \quad (3.60)$$

Obtemos também

$$\left( \frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} \right)_{TJ} = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \quad (3.61)$$

para o fator Fano. Ele dá a magnitude relativa da flutuação de corrente. Para o caso de barreiras simétricas,  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ , o fator Fano é igual a meio, ou seja, a potência do ruído de disparo é reduzida à metade da potência do ruído de Poisson,  $P = \frac{1}{2} P_{Poisson}$ . A supressão é uma consequência da distribuição assintótica bimodal dos autovalores de transmissão, fig. 3.4. A média do terceiro cumulante é definida por

$$\langle \kappa \rangle = \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \tau(1 - \tau)(1 - 2\tau), \quad (3.62)$$

onde  $\rho(\tau)$  é dado pela eq. (3.58), dela obtém-se que

$$\left( \frac{\langle \kappa \rangle}{\langle p \rangle} \right)_{TJ} = \frac{\Gamma_1^4 - 2\Gamma_1^3\Gamma_2 + 6\Gamma_1^2\Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2^3 + \Gamma_2^4}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)}, \quad (3.63)$$

<sup>1</sup>O subscrito  $TJ$  vem de Junção de Tunelamento.

para a razão entre o terceiro cumulante e o ruído de disparo. As eqs. (3.59), (3.61) e (3.63) são bem conhecidas na literatura [51]. Temos que ressaltar que estas equações e a própria densidade de autovalores de transmissão, eq. (3.58), não tinham sido obtidas pela análise diagramática até então.

### 3.2.3 Interpretação Semiclássica: Caverna Caótica com Duas Junções de Tunelamento

Jong [51] usou um método semiclássico para calcular a função característica dos cumulantes da estatística de contagem de uma caverna caótica com duas junções de tunelamento. Para compreender a interpretação clássica deste problema vamos dividi-lo em dois tópicos: (i) junção com uma barreira; (ii) junção com duas barreiras.

#### (i) *Junção com uma Barreira*

Para entender este problema é interessante primeiro analisar a junção com uma barreira,  $\Gamma \ll 1$ , e um canal de transmissão. A corrente média através da barreira é  $I = e^2 V \Gamma / h \equiv e \gamma$ , com  $\gamma = e V \Gamma / h$ . A probabilidade  $P_n(t)$  de  $n$  elétrons, não correlacionados, serem transmitidos num tempo  $t$  obedece a seguinte equação mestre

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\gamma P_0(t) \quad (3.64)$$

e

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\gamma(P_n(t) - P_{n-1}(t)), \quad \text{se } n \geq 1, \quad (3.65)$$

onde  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$  e a condição inicial é  $P_0(0) = \delta_{n,0}$ , veja fig. 3.4. A solução da eq. (3.64) é  $P_0(t) = \exp(-\gamma t)$ . Definindo

$$\psi(t) = -\frac{dP_0(t)}{dt} = \gamma e^{-\gamma t} \quad (3.66)$$

como sendo a densidade de probabilidade de um elétron ser transmitido imediatamente após um tempo de espera  $t$ , veja fig. 3.4. Sendo  $G_n(t)$  a probabilidade de  $n$  ou mais elétrons serem transmitidos durante um tempo  $t$ , pode-se obtê-la pela seguinte convolução

$$G_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \psi(t_1) \psi(t_2 - t_1) \cdots \psi(t_n - t_{n-1}), \quad (3.67)$$

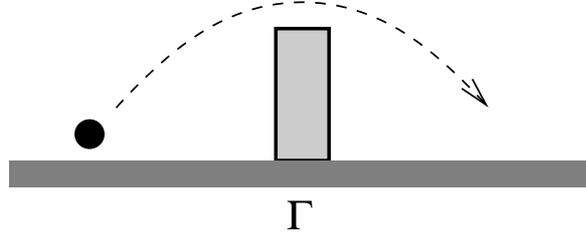


Figura 3.4: Elétron sendo transmitido através de uma barreira com  $\Gamma \ll 1$ .

visto que os eventos de tunelamento são não correlacionados. A transformada de Laplace de (3.67) é dada por

$$\tilde{G}_n(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} G_n(t) = \frac{1}{s} (\tilde{\psi}(s))^n. \quad (3.68)$$

$\tilde{\psi}(s)$  corresponde a uma partícula sendo transmitida na barreira, então  $\tilde{G}_n(s)$  corresponde a  $n$  eventos de tunelamento, veja fig. 3.4. A transformada de Laplace da eq. (3.66) é

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{\gamma}{s + \gamma}. \quad (3.69)$$

Substituindo (3.69) em (3.68) obtemos

$$\tilde{G}_n(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{\gamma}{s + \gamma} \right)^n. \quad (3.70)$$

Podemos escrever  $P_n(t)$  em função das probabilidades  $G_n(t)$  e  $G_{n+1}(t)$

$$P_n(t) = G_n(t) - G_{n+1}(t), \quad (3.71)$$

e portanto

$$\tilde{P}_n(s) = \tilde{G}_n(s) - \tilde{G}_{n+1}(s). \quad (3.72)$$

Então de (3.70) e (3.72) obtemos

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{\gamma^n}{(s + \gamma)^{n+1}}, \quad (3.73)$$

cujas transformada de Laplace inversa é

$$P_n(t) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t}. \quad (3.74)$$

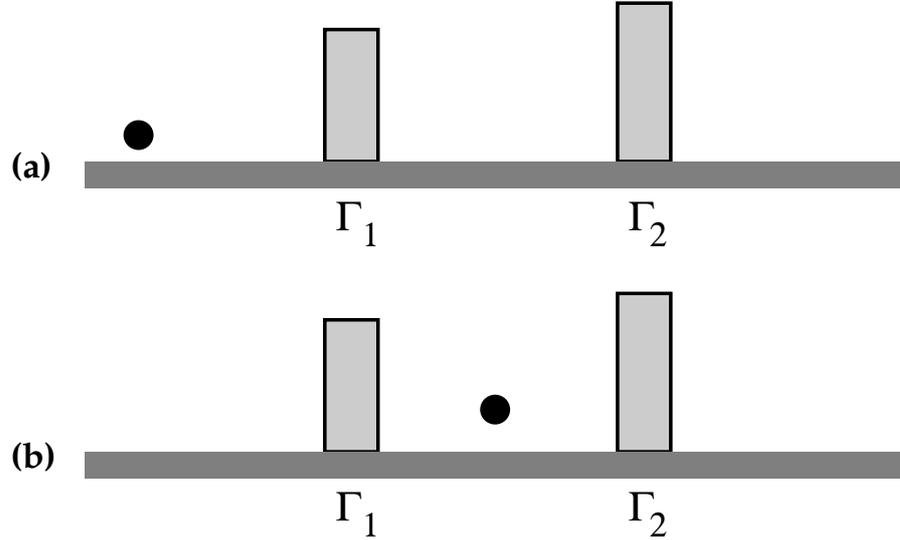


Figura 3.5: (a) Corresponde à ausência de partícula entre as barreiras; (b) Corresponde à presença de uma partícula entre as barreiras.

Concluimos que para o caso de junção com uma barreira,  $\Gamma \ll 1$ ,  $P_n(t)$  é dado pela distribuição de Poisson, eq. (3.74). A função geratriz encontrada, após a hipótese de que a transmissão dos canais é independente, é a mesma quando fazemos  $\Gamma = \tau \ll 1$  e  $t_0 = t$  na eq. (1.43), ou seja

$$\chi(\lambda) = (1 + \Gamma(e^{i\lambda} - 1))^{eVtN/\hbar} \simeq \exp[\gamma t N(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (3.75)$$

### (ii) *Junção com duas Barreiras*

No caso de junções com duas barreiras,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$ , o princípio de Pauli restringe o número de elétrons entre as barreiras a serem 0 ou 1. Lembramos que a hipótese de independência dos canais é levada em conta, implicando que o princípio de exclusão é aplicado a cada canal separadamente. Fisicamente, esta situação corresponde à ausência de espalhamento entre canais.

Devemos considerar duas condições distintas para o problema, a primeira corresponde à ausência de partícula entre as barreiras, fig. 3.5-a, e a segunda corresponde à presença de uma partícula entre as barreiras, fig. 3.5-b. A função distribuição de probabilidade,  $P_n(t)$ , para uma junção com duas barreiras pode ser obtida através de uma mistura de dois processos de Poisson independentes correspondendo a cada uma das duas condições iniciais.

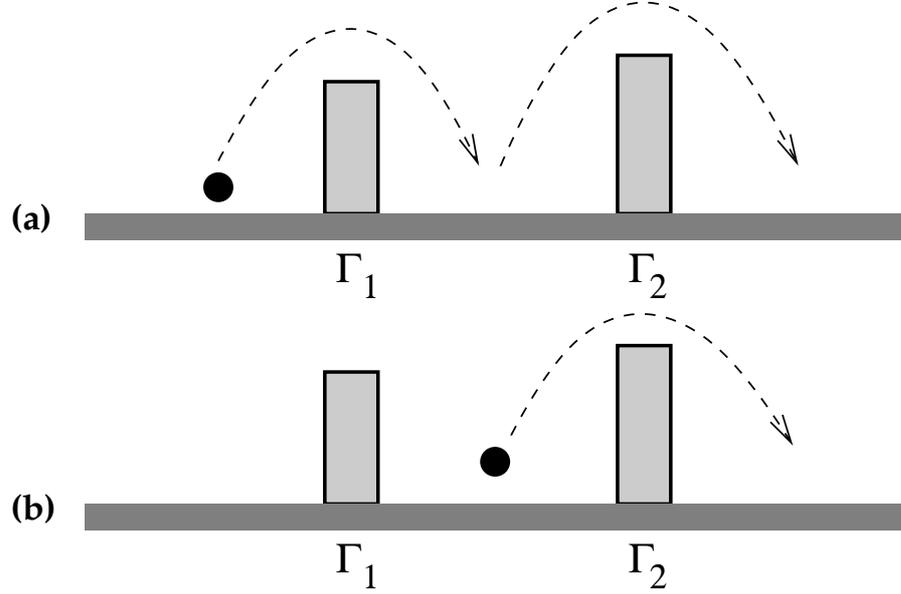


Figura 3.6: (a) Partícula sendo transmitida pelas duas barreiras; (b) A partícula em  $t = 0$  já havia sido transmitida através da primeira barreira.

$$P_n(t) = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} P_n^1(t) + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} P_n^0(t), \quad (3.76)$$

onde  $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$  e  $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$  são as probabilidades de termos 0 e 1 elétrons entre as barreiras respectivamente.  $P_n^j(t)$  inicia com  $j = 0, 1$  elétrons dentro da junção em  $t = 0$ . Seguindo a mesma estrutura do problema de uma barreira, pode-se escrever

$$\tilde{P}_n^j(s) = \tilde{G}_n^j(s) - \tilde{G}_{n+1}^j(s) \quad (3.77)$$

e definimos

$$\tilde{\psi}_i(s) = \frac{\gamma_i}{s + \gamma_i}, \quad \text{com } i = 1, 2. \quad (3.78)$$

$\tilde{\psi}_i(s)$  descreve um evento de tunelamento através da barreira  $i$ . Para  $\tilde{G}_n^0(s)$  não existe partículas entre as barreiras em  $t = 0$ , com  $n = 0$  não há eventos de tunelamento e quando  $n = 1$  a partícula tem que realizar dois tunelamentos independentes para ser transmitida através das duas barreiras. Concluimos que  $\tilde{G}_n^0(s)$  corresponde à transmissão de  $n$  partículas não correlacionadas cada uma realizando dois eventos independentes, veja fig. 3.6-a. Então tem-se que

$$\tilde{G}_n^0(s) = \frac{1}{s}(\tilde{\psi}_1(s)\tilde{\psi}_2(s))^n = \frac{1}{s} \frac{(\gamma_1\gamma_2)^n}{(s + \gamma_1)^n(s + \gamma_2)^n}. \quad (3.79)$$

Substituindo (3.79) em (3.77) obtém-se

$$\tilde{P}_n^0(s) = \frac{(\gamma_1\gamma_2)^n(s + \gamma_1 + \gamma_2)}{(s + \gamma_1)^{n+1}(s + \gamma_2)^{n+1}}, \quad \text{para } n \geq 0. \quad (3.80)$$

Fazendo  $n = 0$  em (3.80) obtém-se

$$\tilde{P}_0^0(s) = \frac{(s + \gamma_1 + \gamma_2)}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}. \quad (3.81)$$

Tomado a transformada de Laplace inversa em (3.81) tem-se

$$P_0^0(t) = \frac{\gamma_1 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_2 e^{\gamma_1 t}}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad \text{para } \gamma_1 \neq \gamma_2. \quad (3.82)$$

Para barreiras simétricas, fazemos  $\gamma_1 = \gamma = \gamma_2$  em (3.81), obtém-se

$$P_0^0(t) = (1 + \gamma t)e^{-\gamma t}. \quad (3.83)$$

Se  $j = 1$  em (3.72), então existe uma partícula entre as barreiras em  $t = 0$ , ou seja, houve um tunelamento pela primeira barreira antes do começo da observação dos eventos, veja fig. 3.6-b. As outras  $n - 1$  partículas ainda terão de realizar os dois tunelamentos independentes. Então,  $\tilde{G}_n^1(s)$  pode ser escrito como

$$\tilde{G}_n^1(s) = \frac{1}{s}\tilde{\psi}_2(s)(\tilde{\psi}_1(s)\tilde{\psi}_2(s))^{n-1} = \frac{1}{s} \frac{\gamma_1^{n-1}\gamma_2^n}{(s + \gamma_1)^{n-1}(s + \gamma_2)^n} \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.77) chega-se a

$$\tilde{P}_n^1(s) = \frac{\gamma_1^{n-1}\gamma_2^n(s + \gamma_1 + \gamma_2)}{(s + \gamma_1)^n(s + \gamma_2)^{n+1}}, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.85)$$

É interessante notar que para  $n = 0$ , devemos ter  $\tilde{P}_0^1(s) = 1/(s + \gamma_2)$ , que corresponde ao problema de uma barreira, analisado anteriormente, fazendo-se  $\gamma = \gamma_2$ . Veja fig. 3.6-b. Portanto

$$\frac{dP_0^1(t)}{dt} = -\gamma_2 P_0^1(t) \quad (3.86)$$

cujá solução é

$$P_0^1(t) = \exp(-\gamma_2 t). \quad (3.87)$$

Substituindo (3.82) e (3.87) em (3.76) para  $n = 0$  obtém-se

$$P_0(t) = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} e^{-\gamma_2 t} - \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} e^{-\gamma_1 t} \quad \text{para } \gamma_1 \neq \gamma_2. \quad (3.88)$$

Para barreiras simétricas,  $\gamma_1 = \gamma = \gamma_2$ , substituímos (3.83) e (3.87) em (3.76) dando

$$P_0(t) = \left(1 + \frac{\gamma t}{2}\right) \exp(-\gamma t), \quad (3.89)$$

que contém um termo de correção,  $\frac{\gamma t}{2}$ , em relação ao obtida no caso de uma barreira.

Pode-se tomar a transformada de Laplace da eq. (3.76):

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \tilde{P}_n^1(s) + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \tilde{P}_n^0(s), \quad (3.90)$$

Introduzindo (3.80) e (3.85) em (3.90) encontra-se

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^n (s + \gamma_1 + \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(s + \gamma_1)^{n+1}(s + \gamma_2)^{n+1}}, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.91)$$

Para o caso  $n = 0$ , substituímos (3.81) e (3.87) em (3.90), obtendo

$$\tilde{P}_0(s) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)s + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}. \quad (3.92)$$

A transformada de Laplace da função geratriz para a estatística de contagem, eq. (1.42), é

$$\tilde{\chi}(\lambda, s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\lambda} \tilde{P}_n(s) \quad (3.93)$$

Introduzindo (3.91) e (3.92) em (3.93) obtém-se

$$\tilde{\chi}(\lambda, s) = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[ \frac{(s + \gamma_1 + \gamma_2)^2}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2) - e^{i\lambda} \gamma_1 \gamma_2} - 1 \right], \quad (3.94)$$

cujá transformada de Laplace inversa é

$$\chi(\lambda) = \exp\left(-\frac{N}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t\right) \times \left[ \cosh\left(\frac{\beta(\lambda)t}{2}\right) + \left(\frac{\beta(\lambda)t}{\gamma_1 + \gamma_2} - \frac{2\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}{\beta(\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2)}\right) \sinh\left(\frac{\beta(\lambda)t}{2}\right) \right], \quad (3.95)$$

onde  $\beta(\lambda) = \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}$ . O valor  $N$ , que corresponde ao número de canais abertos, pode ser introduzido na expressão devido a hipótese de que a transmissão dos canais é independente. Estamos interessados somente em tempos muito longos,  $t \gg 1$ , onde o número médio de partículas transmitidas é muito grande, então (3.95) simplifica para

$$\chi(\lambda) \simeq \exp\left(\frac{N}{2}(\beta(\lambda) - \gamma_1 - \gamma_2)t\right) \left[1 + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 e^{i\lambda}}{\beta(\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2)}\right].$$

A função característica dos cumulantes, veja seção 1.5, é dada por

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = \frac{N}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \beta(\lambda))t - \ln \left[1 + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 e^{i\lambda}}{\beta(\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2)}\right]. \quad (3.96)$$

Como  $t \gg 1$  podemos desprezar o segundo termo e obter

$$\Phi(\lambda) \simeq \frac{Nt}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}). \quad (3.97)$$

Substituindo  $\Phi(\lambda)$  na eq. (1.46) encontramos os três primeiros cumulantes. O primeiro cumulante é dado por

$$q_1 = N \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} t, \quad (3.98)$$

onde  $\gamma_i = eV\Gamma_i/h$ . Para o fator Fano encontramos

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}. \quad (3.99)$$

E na razão entre o terceiro e segundo cumulantes obtém-se

$$\frac{q_3}{q_2} = \frac{\Gamma_1^4 - 2\Gamma_1^3\Gamma_2 + 6\Gamma_1^2\Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2^3 + \Gamma_2^4}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)}. \quad (3.100)$$

Eles estão em perfeito acordo com os resultados encontrados pela análise diagramática para junções com duas barreiras.

O cálculo semiclássico assume eventos de tunelamento independentes e por esse motivo só vale para pequenas probabilidades de tunelamento,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$ .

Análises semiclássicas têm como interesse central a busca de uma formulação consistente e completa que permita o cálculo de cumulantes de todas as ordens, sem qualquer necessidade de conceitos quanto-mecânicos. O único efeito quântico não

desprezado é o princípio de exclusão de Pauli. A hipótese de existência de uma formulação totalmente semiclássica no lugar de teorias fundamentadas na mecânica quântica, está relacionada com a busca da simplicidade e intuição encontradas em sistemas clássicos.

A análise diagramática, que é baseada numa descrição quanto-mecânica, gera esforços matemáticos consideráveis, mas a solidez dos conceitos físicos envolvidos e a aplicabilidade são indiscutíveis. Esta técnica já foi aplicada diversas vezes com grande sucesso e novamente, neste capítulo, mostra sua eficiência em resolver problemas não triviais em física mesoscópica.

# Capítulo 4

## Teoria de Circuitos

Transporte de elétrons, numa visão moderna, é tratado como um problema de espalhamento quântico elástico, como foi sugerido por Landauer [15]. Isto é possível para condutores coerentes, onde a região resistiva é pequena o suficiente para que não ocorra espalhamento inelástico.

Nazarov [13] criou a teoria de circuitos baseada no formalismo quântico-mecânico. Dela calculam-se os cumulantes da estatística de contagem no regime semiclássico, isto é, sistemas com seções transversais muito maiores que o comprimento de onda de Fermi. A média de observáveis de transporte no ensemble é calculada admitindo-se um número de canais abertos muito grandes, ou seja, a correção de localização fraca é negligenciada. Nesta teoria pode-se construir um circuito de dois terminais combinando em série elementos coerentes denominados conectores (nós e terminais) e elementos difusivos, veja fig. 4.1. A descrição das propriedades de transporte está toda contida na densidade de autovalores de transmissão que por isto exerce um papel fundamental na teoria. Nesta formulação são considerados conectores com transparências arbitrárias, o ponto de contato ideal e a junção de tunelamento.

Mais recentemente foi demonstrado que a estatística de contagem (FCS) de elétrons não interagentes, no caso de sistemas mesoscópicos com multi-terminais, é uma teoria de circuitos matricial  $2 \times 2$  associada com a função de Green Keldysh [52]. Este trabalho foi motivado pela dificuldade prática de se descrever redes de fios difusivos que têm um grande número de nós e terminais através da fórmula usual da FCS.

Macêdo [41] apresentou uma versão estendida da teoria de circuitos de Nazarov para o caso de dois terminais e condições de contorno mais gerais. Ela traz necessariamente em sua essência a estrutura de ponto de sela do modelo- $\sigma$  não-linear

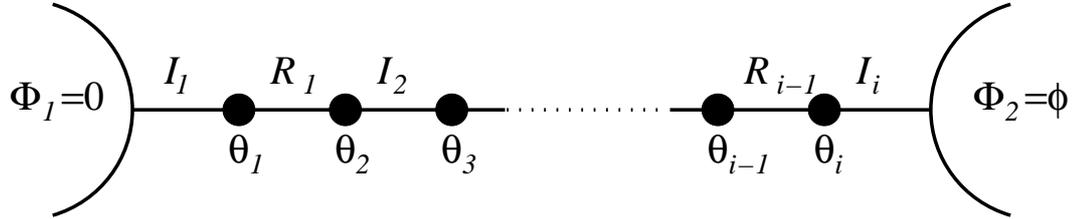


Figura 4.1: Circuito geral como  $i$  conectores (nós e terminais).  $R_i$  representa o valor da resistência ôhmica do  $i$ -ésimo elemento difusivo e  $\theta_i$  representa o valor do potencial complexo no  $i$ -ésimo conector. Cada ponto ao longo do circuito representa um nó e o valor de  $\theta_i$  deve ser calculado pela teoria de circuitos, usando os princípios de conservação de corrente. A função  $\Phi_i$  para  $i = 1, 2$  representa os potenciais nos terminais do circuito.

supersimétrico e núcleo de Poisson. Este novo método introduz as barreiras de tunelamento no contorno da amostra, diferentemente do proposto por Nazarov em que as barreiras estão dentro da amostra. Com a nova análise pode-se desconsiderar a contribuição do condutor difusivo, como veremos neste capítulo.

Nas próximas seções detalharemos a teoria de circuito estendida [41], para uma cavidade caótica com barreiras de transparências arbitrárias, veja fig. 2.1.

## 4.1 Conceitos Básicos da Teoria de Circuitos

A teoria de circuito é uma ferramenta prática para se calcular médias num ensemble de sistemas quânticos no regime semiclássico. A idéia básica consiste em particionar o sistema em elementos finitos denominados conectores (nós e terminais), que correspondem ao caminho da corrente através da rede na qual as leis de conservação podem ser implementadas de forma simples. Graficamente a rede é composta por linhas representando os conectores  $(i, j)$  que conectam os nós aos terminais, fig. 4.1.

Devido à coerência da função de onda eletrônica a teoria de circuito não poderia ser formulada em termos do potencial eletrostático real responsável pela diferença de voltagem no sistema uma vez que este potencial não pode ser definido localmente ao longo do circuito. Por isso ela é formulada em termos de um potencial complexo  $\Phi$  (pseudo-potencial) cujo valor é fixo em ambos os terminais,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , e desconhecido nos nós, veja fig 4.1. Este fato ocasiona uma corrente fictícia denominada corrente espectral (pseudo-corrente) que percorre a rede. Os princípios

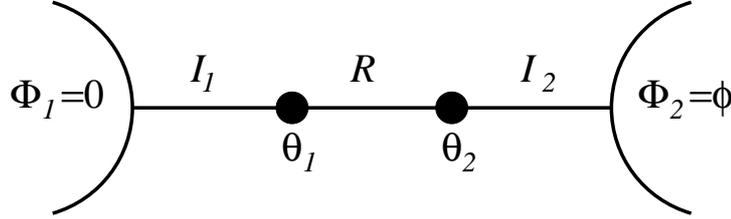


Figura 4.2: Circuito com um elemento difusivo  $R$  e dois nós  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

básicos da teoria de circuitos são:

1. Uma lei geral para a função característica pseudo-corrente-voltagem ( $I - V$ ) do conector  $(i, j)$  submetido ao pseudo-potencial  $\Delta\Phi_{ij}$

$$I_{ij}(\Delta\Phi_{ij}) = \int_0^1 d\tau \frac{\text{sen}(\Delta\Phi_{ij})\tau\rho_{ij}(\tau)}{1 - \tau\text{sen}^2(\Delta\Phi_{ij}/2)}, \quad (4.1)$$

onde  $I_{(ij)}(\Delta\Phi_{ij})$  é a pseudo-corrente e  $\rho_{ij}(\tau) = \langle \text{Tr}(\delta(\tau - t_{ij}t_{ij}^\dagger)) \rangle$  é a densidade de autovalores de transmissão do conector.

2. Uma lei de Kirchhoff generalizada para a conservação da pseudo-corrente em cada nó: Se  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$  são os pseudo-potenciais em cada nó da rede então  $I_{(ij)}(\Delta\Phi_{ij})$  descreve uma pseudo ( $I - V$ ) relacionada aos conectores  $(i, j)$ , veja fig. 4.1. Então a conservação da corrente espectral é

$$I(\phi) = I_1(\phi - \theta_1) = I_{R_1}(\theta_1 - \theta_2) = \dots = I_i(\theta_i). \quad (4.2)$$

Na presença de elementos difusivos no circuito podemos usar o seguinte teorema:

1. *Teorema:* Seja  $I_0(\phi)$  a corrente espectral através de um circuito auxiliar obtido negligenciando a queda de potencial ao longo dos elementos difusivos; então a corrente espectral do circuito original (fig. 4.2) satisfaz

$$I(\phi, R) = I_0(\phi - RI(\phi, R)), \quad (4.3)$$

onde  $R$  é a resistência ôhmica adimensional dos diversos elementos difusivos do circuito.

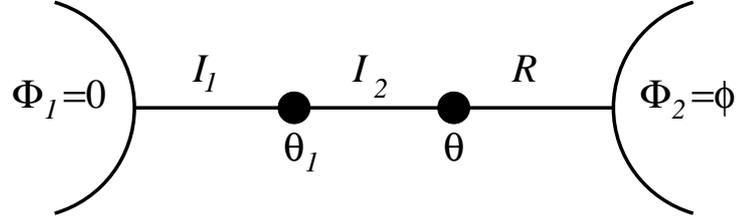


Figura 4.3: Circuito equivalente ao da fig 4.2 com a resistência localizada na extremidade.

2. *Prova:* Vamos considerar o circuito com um conector difusivo como mostrado na fig. 4.2. A equação de conservação de corrente para este circuito é dado pela eq. (4.2)

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R} = I_2(\phi - \theta_2), \quad (4.4)$$

Isolando o valor de  $\theta_2$  temos

$$\theta_2 = \theta_1 + RI_1(\theta_1). \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.10) obtemos

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\phi - \theta_1 - RI_1(\theta_1)). \quad (4.6)$$

Introduzindo a variável auxiliar  $\theta$  dada por

$$\theta = \phi - RI_1(\theta_1), \quad (4.7)$$

e substituindo-a na eq. (4.6) obtemos

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = \frac{\phi - \theta}{R}. \quad (4.8)$$

Podemos observar que esta equação de conservação de corrente é própria do circuito mostrado na fig. 4.3. Por definição a corrente espectral no circuito auxiliar é dada por

$$I_0 = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1). \quad (4.9)$$

Finalmente substituindo (4.9) em (4.8) encontramos

$$I(\phi) = I_0(\theta) = \frac{\phi - \theta}{R}, \quad (4.10)$$

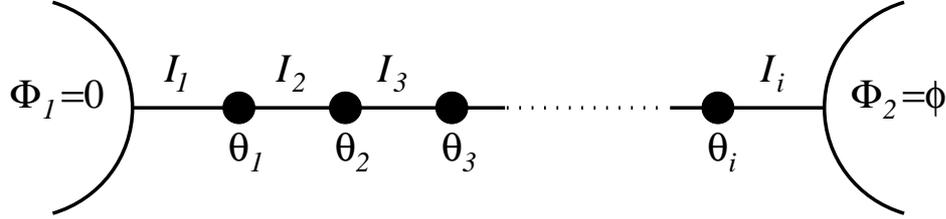


Figura 4.4: Circuito auxiliar geral no limite  $R \rightarrow 0$ , ou seja, eliminação completa da parte difusiva.

como  $\theta = \phi - RI(\phi)$  chegamos a

$$I(\phi, R) = I_0(\phi - RI(\phi, R)), \quad (4.11)$$

provando o teorema<sup>1</sup>.

Usando este teorema vemos que o limite  $R \rightarrow 0$  na eq. (4.3), que corresponde à eliminação completa da parte difusiva, existe e pode ser usado para obter as equações de conservação de corrente em uma cavidade caótica com barreiras. O circuito auxiliar é mostrado na fig. 4.4 e satisfaz à seguinte lei de conservação de corrente [41]

$$I_0(\theta) = I_1(\theta - \theta_1) = I_2(\theta_1 - \theta_2) = \dots = I_i(\theta_i). \quad (4.12)$$

É importante ressaltar que na teoria de circuito de Nazarov o limite  $R \rightarrow 0$  não pode ser justificado. No modelo- $\sigma$  não-linear este limite é bem definido e corresponde ao núcleo de Poisson.

A potencialidade deste método depende crucialmente da escolha apropriada dos conectores, a qual depende exclusivamente da nossa habilidade de calcular a correspondente característica  $I - V$ . Isso quer dizer que temos de ser capazes de “calcular” a densidade de autovalores de transmissão para podermos usar a eq. (4.1). Este é um dos pontos onde essa análise se diferencia da formulação original de Nazarov.

Em analogia com a seção 3.2 estudaremos uma cavidade caótica com guias de transparências arbitrárias. A informação sobre as barreiras na interface entre a cavidade e os guias entra na densidade total,  $\rho(\tau)$ , somente através do conjunto de coeficientes de transmissão  $\Gamma_n$ , onde  $n = 1, \dots, N_j$  e  $N_j$  é o número de canais abertos num dado guia,  $j = 1, 2$ .

<sup>1</sup>Para uma demonstração completa veja ref. [19].

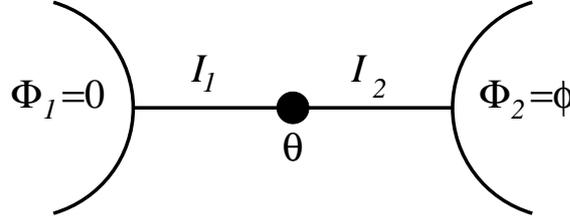


Figura 4.5: Circuito auxiliar com um nó,  $\theta$ , e contatos ideais.

A expressão exata para a distribuição  $\rho_j(\tau)$  de cada barreira foi calculada por Macêdo [1] diretamente do modelo- $\sigma$  não-linear supersimétrico. A vantagem deste processo é a possibilidade de incluir automaticamente efeitos quânticos na descrição das barreiras entre a cavidade e os guias, sem a necessidade de introduzir hipóteses adicionais para realizar a média sobre o ensemble. A partir deste resultado, (4.1) pode ser escrita como

$$I_j(\phi) = \sum_{n=1}^{N_j} \frac{\text{sen}(\phi)\Gamma_n}{1 - \Gamma_n \text{sen}^2(\phi/2)}, \quad (4.13)$$

ou seja, esta é a característica  $I - V$  da barreira  $j$ , interpretada como um conector. O diagrama para esse problema é composto por um nó e dois conectores, veja fig. 4.5. Segundo (4.12) a lei de conservação de corrente é dada por

$$I(\phi) = I_1(\phi - \theta) = I_2(\theta), \quad (4.14)$$

onde  $\theta$  é o valor do pseudo-potencial no nó.

Podemos encontrar uma expressão para a densidade de autovalores de transmissão, definindo a seguinte função  $h(1/z)$

$$h(1/z) = \left\langle \text{Tr} \left( \frac{ztt^\dagger}{z - tt^\dagger} \right) \right\rangle = \int_0^1 d\tau \frac{z\tau\rho(\tau)}{z - \tau}. \quad (4.15)$$

Podemos relacionar (4.1) e (4.15) por

$$I(\phi) = h(\text{sen}^2(\phi/2))\text{sen}(\phi). \quad (4.16)$$

Substituindo  $z = \tau \pm i\eta$  onde  $\eta \rightarrow 0^+$  na função  $h(1/z)$  encontramos:

$$h\left(\frac{1}{\tau \pm i\eta}\right) = \int_0^1 d\tau' \frac{\tau'\tau\rho(\tau')}{\tau - \tau' \pm i\eta}. \quad (4.17)$$

Subtraindo essas duas expressões e aplicando a identidade

$$\frac{1}{\tau - \tau' \pm i\eta} = P \frac{1}{\tau - \tau'} \mp i\pi\delta(\tau - \tau'), \quad (4.18)$$

encontramos

$$h\left(\frac{1}{\tau - i\eta}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i\eta}\right) = \int_0^1 d\tau' \tau' \tau \rho(\tau') [2i\pi\delta(\tau - \tau')]. \quad (4.19)$$

Resolvendo a integral encontramos a seguinte fórmula para a densidade de autovalores de transmissão

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi i \tau^2} \left[ h\left(\frac{1}{\tau - i\eta}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i\eta}\right) \right], \quad (4.20)$$

ou de forma mais compacta

$$\rho(\tau) = -\frac{1}{\pi \tau^2} \text{Im} (h(1/z)) \Big|_{z=\tau+i0^+}. \quad (4.21)$$

Após apresentarmos os conceitos básicos, concluímos que as eqs. (4.13) e (4.14) definem a teoria de circuitos para uma cavidade caótica acoplada a dois guias com barreiras arbitrárias. Este é o resultado central desta seção.

### 4.1.1 Cavidade Caótica com Contatos Ideais

Nesta seção vamos estudar um sistema com contatos ideais, veja fig. 4.5. Este caso é obtido quando  $\Gamma_j = 1$  em (4.13) ficando

$$I_j(\phi) = \frac{N_j \text{sen}(\phi)}{1 - \text{sen}^2(\phi/2)}. \quad (4.22)$$

Pela lei de conservação de corrente, eq. (4.14), encontramos que

$$I_1(\phi - \theta) = 2N_1 \tan\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) = 2N_2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = I_2(\theta). \quad (4.23)$$

Definindo  $\xi = \tan(\theta/2)$  e  $\nu = N_2/N_1$  obtemos a seguinte equação de segundo grau

$$\nu \tan(\theta/2) \xi^2 + (1 + \tan(\theta/2)) \xi - \nu = 0, \quad (4.24)$$

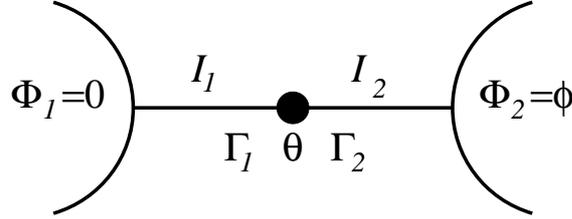


Figura 4.6: Circuito auxiliar com um nó,  $\theta$ , e contatos com barreiras arbitrárias,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$

cujas soluções são elementares. Sabemos de (4.14) que a corrente espectral é  $I(\phi) = I_2(\theta) = 2\xi N_2$ , então

$$I(\phi) = M \cot(\phi/2) \left( \sqrt{1 + \frac{4N_1N_2}{M^2 \cot^2(\phi/2)}} - 1 \right), \quad \text{onde } M = N_1 + N_2. \quad (4.25)$$

Usando (4.16) encontramos que

$$h(1/z) = \frac{Mz}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4N_1N_2}{M^2} \frac{1}{z-1}} - 1 \right). \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.21) encontramos

$$\rho(\tau) = \frac{M}{2\pi} \frac{\sqrt{\tau - \tau_{min}}}{\tau \sqrt{1 - \tau}}, \quad \tau_{min} = \frac{(N_1 - N_2)^2}{M^2}, \quad (4.27)$$

onde  $\tau_{min} \leq \tau \leq 1$ . Esta expressão coincide com a eq. (3.15) obtida na seção 3.1 usando análise diagramática.

## 4.2 Caverna Caótica com Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias

Agora abordaremos o caso de barreiras com transparências arbitrárias, veja fig. 4.6. Para facilitar a manipulação matemática, introduziremos uma nova pseudo-corrente [10, 53] definida por

$$K(x) = \sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) + \cosh(2x_j)} \right\rangle = \frac{i}{2} I(-2ix), \quad (4.28)$$

na qual as novas variáveis aleatórias,  $x_j$ , são relacionadas aos autovalores de transmissão por  $\tau_j = 1/\cosh^2(x_j)$ . Introduzido a densidade média  $\nu(x) = \left\langle \sum_j^N \text{Tr} [\delta(x - x_j)] \right\rangle$  podemos escrever (4.28) como

$$K(x) = \int_0^\infty dy \frac{\nu(y)\sinh(2x)}{\cosh(2x) + \cosh(2y)}. \quad (4.29)$$

Donde concluimos que

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} (K(x + i\pi/2 - i0^+)). \quad (4.30)$$

A densidade de autovalores de transmissão (4.21) pode ser escrita em função de  $\nu(x)$  através da relação

$$\rho(\tau) = \frac{\nu(\cosh^{-1}(1/\sqrt{\tau}))}{2\tau\sqrt{1-\tau}}. \quad (4.31)$$

Das relações (4.13) e (4.29) obtemos a seguinte relação para a pseudo-corrente através de uma barreira com coeficientes de transmissão  $\Gamma_{pn} = \text{sech}^2(\alpha_{pn}/2)$

$$K_p(x) = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) - \cosh(\alpha_{pn})}, \quad (4.32)$$

De (4.14) e (4.28) podemos escrever a lei de conservação de corrente para a nova pseudo-corrente

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y), \quad (4.33)$$

onde  $y$  é a nova variável do pseudo-potencial para o nó do circuito.

Aqui estamos interessados no caso de canais equivalentes, ou seja,  $\Gamma_{pn} = \text{sech}^2(\alpha_{pn}/2)$  e  $N_1 = N_2 = N$ . Usando (4.32) obtemos

$$K_p(x) = \frac{N}{2} \left[ \tanh \left( x + \frac{1}{2}\alpha_p \right) + \tanh \left( x - \frac{1}{2}\alpha_p \right) \right]. \quad (4.34)$$

Substituindo  $K_p(x)$  na lei de conservação de corrente (4.33) e usando a identidade trigonométrica

$$\tanh(x - y) = \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x)\tanh(y)}, \quad (4.35)$$

encontramos que

$$\begin{aligned} \tanh \left( x - y + \frac{1}{2}\alpha_1 \right) + \tanh \left( x - y - \frac{1}{2}\alpha_1 \right) = \\ \tanh \left( y + \frac{1}{2}\alpha_2 \right) + \tanh \left( y - \frac{1}{2}\alpha_2 \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

que pode ser escrita como a seguinte equação polinomial para a variável  $\xi = \tanh(y)$

$$\begin{aligned} & [\Gamma_1 (1 - \Gamma_2) \tanh(x)] \xi^4 - [3\Gamma_1 \Gamma_2 \tanh(x)] \xi^2 + \\ & [(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 - \Gamma_1) \tanh^2(x) + 2\Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2] \xi^3 + \\ & [(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 - \Gamma_2) \tanh^2(x) + \Gamma_1 + \Gamma_2] \xi - \Gamma_1 \tanh(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Esta equação deve ser complementada com a seguinte relação

$$K(x) = \frac{N\Gamma_2 \xi}{1 - (1 - \Gamma_2) \xi^2}. \quad (4.38)$$

As eqs. (4.37) e (4.38) foram primeiro apresentadas por Macêdo e Souza [10] e descrevem uma caverna caótica com duas barreiras arbitrárias na teoria de circuito.

Numa rápida comparação, a técnica diagramática leva a equações algébricas não-lineares acopladas (3.40) e (3.41) (veja seção (3.2)) enquanto a teoria de circuito gera uma equação polinomial de quarta ordem (4.37) para o mesmo problema. Esse fato ocasiona a seguinte questão: *Os dois métodos contêm a mesma informação em todo domínio dos parâmetros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ?*

Motivados por essa pergunta vamos estudar alguns sistemas particulares como fizemos no capítulo anterior.

### 4.2.1 Caverna Caótica com Barreiras Simétricas

Este sistema pode ser descrito escrevendo  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  nas relações (4.37) e (4.38). Obtemos então

$$(\tanh(x)\xi^2 - 2\xi + \tanh(x))((1 - \Gamma)\xi^2 + \Gamma \tanh(x)\xi - 1) = 0 \quad (4.39)$$

e

$$K(x) = \frac{N\Gamma \xi}{1 - (1 - \Gamma)\xi^2}. \quad (4.40)$$

A raiz física da eq. (4.39) é dada por

$$\xi_- = \frac{1}{\tanh(x)} \left( 1 - \sqrt{1 - \tanh^2(x)} \right), \quad (4.41)$$

e a pseudo corrente fica

$$K(x) = \frac{N\Gamma \sinh(x)}{2 - \Gamma + \Gamma \cosh(x)}. \quad (4.42)$$

Substituindo esse resultado em (4.30) encontramos

$$\nu(x) = \frac{2N}{\pi} \frac{\Gamma(2 - \Gamma) \cosh(x)}{4(1 - \Gamma) + \Gamma^2 \cosh^2(x)}. \quad (4.43)$$

Introduzindo  $\nu(x)$  na expressão (4.31) temos finalmente

$$\rho(\tau) = \frac{N}{\pi} \frac{\Gamma(2 - \Gamma)}{(\Gamma^2 - 4\Gamma\tau + 4\tau)\sqrt{\tau(1 - \tau)}}, \quad (4.44)$$

que está em completo acordo com (3.48). Aqui mostramos a perfeita equivalência entre as duas técnicas para este caso.

## 4.2.2 Cavity Caótica com Duas Junções de Tunelamento

Este caso é descrito usando a condição  $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$  em (4.37) e (4.38), resultando em

$$\begin{aligned} & [\Gamma_1 \tanh(x)] \xi^4 + [(\Gamma_2 - \Gamma_1) \tanh^2(x) - \Gamma_1 - \Gamma_2] \xi^3 + \\ & [(\Gamma_1 - \Gamma_2) \tanh^2(x) + \Gamma_1 + \Gamma_2] \xi - \Gamma_1 \tanh(x) = 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

que pode ser fatorada da forma

$$(\xi^2 - 1) (\tanh(x)\Gamma_1\xi^2 + ((\Gamma_2 - \Gamma_1) \tanh^2(x) - \Gamma_1 - \Gamma_2) \xi + \tanh(x)\Gamma_1) = 0. \quad (4.46)$$

Além disso

$$K(x) = \frac{N\Gamma_2\xi}{1 - \xi^2}. \quad (4.47)$$

A raiz física da eq. (4.46) é dada por

$$\xi = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\Gamma_1\eta} \left[ (1 + \eta_0\eta^2) + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2\eta^2)} \right], \quad (4.48)$$

onde  $\eta = \tanh(x)$  e  $\eta_0 = \tanh(x_0) = |\Gamma_1 - \Gamma_2|/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ . Substituindo (4.48) em (4.47) encontramos a seguinte expressão para a pseudo-corrente

$$K(x) = \frac{N\Gamma_1\Gamma_2\sinh(2x)}{2\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cosh(2x)}}. \quad (4.49)$$

Inserindo a pseudo-corrente  $K(x)$  na eq. (4.30) encontramos

$$\nu(x) = \frac{2N\Gamma_1\Gamma_2}{\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\tanh^2(x) - \tanh^2(x_0)}}, \quad x_0 < x. \quad (4.50)$$

Finalmente substituímos (4.50) em (4.31) obtemos

$$\rho(\tau) = \frac{N\Gamma_1\Gamma_2}{\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau_0 - \tau}}, \quad (4.51)$$

onde  $\tau_0 = 1 - \tanh^2(x_0) = 4\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2$ . Este resultado está em perfeito acordo com a eq. (3.58). Uma importante diferença entre as eqs. (4.44) e (4.51) é a ausência da singularidade na raiz quadrada quando  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ .

### 4.2.3 Caverna Caótica com um Contato Ideal e uma Barreira de Transparência Arbitrária

Para finalizar nossa análise preliminar da eq. (4.37) vamos admitir que:  $\Gamma_1 = 1$  e  $\Gamma_2 = \Gamma$ . Obtemos então

$$(1 - \Gamma)\xi^3 + ((2\Gamma - 1)\tanh(x))\xi^2 - (1 + \Gamma)\xi + \tanh(x) = 0 \quad (4.52)$$

e

$$K(x) = \frac{N\Gamma\xi}{1 - (1 - \Gamma)\xi^2}. \quad (4.53)$$

Devida à complexidade de extrair as raízes da eq. (4.52), vamos resolver o problema expandindo a raiz e os coeficientes em série de potências de  $x$ . Usando as seguintes expansões

$$\xi = ax + bx^2 + cx^3 + \dots \quad (4.54)$$

e

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (4.55)$$

em (4.52) e usando (4.53) obtemos a seguinte expansão para a pseudo-corrente

$$K(x) = N \left( \frac{\Gamma x}{1 + \Gamma} - \frac{x^3}{3} \frac{\Gamma(\Gamma^3 + 3\Gamma - 2)}{(1 + \Gamma)^4} + \dots \right). \quad (4.56)$$

A partir desta expansão podemos obter a média de alguns observáveis de transporte calculando os cumulantes de FCS. Para isso definimos a seguinte fórmula [10]

$$h_{k+1} \equiv \sum_j \langle \text{Tr}[(tt^\dagger)^{k+1}] \rangle = \frac{(-1)^k 2^k}{k!} \left. \frac{d^k H(x)}{d(\cosh(2x))^k} \right|_{x=0}, \quad (4.57)$$

onde  $H(x) \equiv 2K(x)/\sinh(2x)$ . De (4.57) podemos escrever os três primeiros observáveis físicos com (veja seção (1.5))

$$\langle g \rangle = h_1 \quad \langle p \rangle = h_1 - h_2, \quad \langle \kappa \rangle = h_1 - 3h_2 + 2h_3. \quad (4.58)$$

Usando as eq. (4.56), (4.57) e (4.58) obtemos

$$\langle g \rangle = \frac{N\Gamma}{1 + \Gamma} \quad (4.59)$$

para a condutância,

$$\frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} = \frac{1 + \Gamma^2}{(1 + \Gamma)^3} \quad (4.60)$$

para o fator Fano, e

$$\frac{\langle \kappa \rangle}{\langle p \rangle} = \frac{(1 - \Gamma)(1 - 2\Gamma + 6\Gamma^2 - 2\Gamma^3 + \Gamma^4)}{(1 + \Gamma)^3(1 + \Gamma^2)} \quad (4.61)$$

para a razão entre a média do terceiro cumulante,  $\langle \kappa \rangle$ , e a média do ruído de disparo,  $\langle p \rangle$ .

Na ref. [10] este problema foi resolvido exatamente. Encontrou-se uma transição de fase quântica de segunda ordem ao analisar-se a densidade média  $\nu(x)$  quando  $x = 0$ . Foi mostrado que

$$\nu(0) = \begin{cases} (2N/\pi)\sqrt{2\Gamma - 1} & \frac{1}{2} < \Gamma < 1 \\ 0 & 0 < \Gamma \leq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.62)$$

A transição quântica em  $\Gamma = \frac{1}{2}$  está associada com a singularidade de raiz quadrada inversa, i.e. um expoente  $-1/2$ , presente em  $\rho(\tau)$  quando  $\tau = 1$ . Esta singularidade<sup>1</sup> é mais clara quando analisamos as eqs. (4.43) e (4.50), tal que  $\nu(x)$  é finita para

---

<sup>1</sup>É importante resaltar que os casos de barreira simétrica e junções de tunelamento não apresentam transições de fase, ele são citados apenas como exemplos de singularidade de raiz quadrada inversa.

$x = 0$  se  $\rho(\tau)$  tem uma singularidade na raiz quadrada inversa quando  $\tau = 1$ , onde  $\tau = \operatorname{sech}^2(x)$ . No caso de barreiras simétricas, tem-se que

$$\nu(0) = \frac{2N\Gamma}{\pi(2 - \Gamma)}, \quad (4.63)$$

para todo valor  $\Gamma$ . Para junções de tunelamento

$$\nu(0) = \begin{cases} N\Gamma/\pi & \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \\ 0 & \Gamma_1 \neq \Gamma_2 \end{cases}. \quad (4.64)$$

Isto corresponde à formação de modos de Fabry-Perot (FP) entre as duas barreiras, implicando que  $\nu(0)$  pode ser interpretado como uma densidade de ressonâncias de FP. Para mais detalhes veja as refs. [10, 19].

## Capítulo 5

# Técnica Diagramática e Teoria de Circuitos

Neste capítulo comparamos as predições da análise diagramática com as da teoria de circuitos estendida. Como já vimos nos capítulos 3 e 4 uma exata concordância foi encontrada na obtenção da densidade de autovalores de transmissão nos casos de barreiras simétricas (veja seções (3.2.1) e (4.2.1)) e junção de tunelamento (veja seções (3.2.2) e (4.2.2)). Isto fornece fortes evidências para a equivalência matemática completa entre o sistema de equações algébricas ((3.40) e (3.41)) da técnica diagramática e a equação polinomial (4.37) da teoria de circuitos.

A completa equivalência desses métodos seria um resultado extremamente não trivial, devido ao fato do princípio de concatenação semiclássico, que é usado para calcular a equação polinomial na teoria de circuitos, não ter representação direta na formulação diagramática. Além disso o esforço matemático exigido para realizar o cálculo diagramático é muito maior que o similar na teoria de circuitos.

Nossa abordagem é baseada numa comparação detalhada entre as duas técnicas semiclássicas, onde encontramos uma relação básica entre as funções  $f_i(z) = \text{Tr}(F_i(z))$ , eq. (3.6), da técnica diagramática e  $h(1/z)$ , eq. (4.15), da teoria de circuitos. Este resultado é de grande aplicação prática, como veremos, devido a flexibilidade de prever e confirmar resultados de uma teoria por meio da outra.

### 5.1 Cavidade Caótica com Contatos Ideais

Para começar nossa análise vamos trabalhar com o sistema mais simples: cavidade com contatos ideais. Iniciamos aplicando o traço nas eqs. (3.9) e (3.10),

depois comparando com (4.15), podemos escrever as seguintes relações

$$z[zf_1(z) - N_1] = \left\langle \text{Tr} \left( \frac{zt^\dagger t}{z - t^\dagger t} \right) \right\rangle = h(1/z)$$

e

$$z[zf_2(z) - N_2] = \left\langle \text{Tr} \left( \frac{ztt^\dagger}{z - tt^\dagger} \right) \right\rangle = h(1/z), \quad (5.1)$$

ou melhor

$$f_1(z) = \frac{N_2}{z} + \frac{1}{z^2}h(1/z)$$

e

$$f_2(z) = \frac{N_2}{z} + \frac{1}{z^2}h(1/z). \quad (5.2)$$

Substituindo essas equações em (3.13) obtemos

$$f_1(z)\Sigma_1(z) = \frac{h(1/z)}{z}$$

e

$$f_2(z)\Sigma_2(z) = \frac{h(1/z)}{z}. \quad (5.3)$$

Pelas definições de  $\Sigma_1(z)$  e  $\Sigma_2(z)$  (veja (3.13)) podemos escrever estas expressões como

$$zf_1(z)f_2(z)\zeta(zf_1(z)f_2(z)) = \frac{h(1/z)}{z}, \quad (5.4)$$

onde  $\zeta(z) = (1/2z)(\sqrt{4z + M^2} - M)$  e  $M = N_1 + N_2$ . Introduzindo o valor de  $\zeta(z)$  na eq. (5.4) temos

$$h^2(1/z) + zMh(1/z) = z^2f_1(z)f_2(z). \quad (5.5)$$

Multiplicando ambas equações de (5.3) encontramos

$$z^2f_1(z)f_2(z) = \left( \frac{h(1/z)}{z} + N_1 \right) \left( \frac{h(1/z)}{z} + N_2 \right), \quad (5.6)$$

substituindo em (5.5) obtemos

$$h^2(1/z) + zMh(1/z) - \frac{N_1N_2z^2}{z-1} = 0. \quad (5.7)$$

Mas como sabemos do capítulo 4,  $I(\phi) = h(\sin^2(\phi/2))\sin(\phi)$ , então fazendo  $z = 1/\sin^2(\phi/2)$  em (5.7) obtemos

$$I^2(\phi) + 2M \cot(\phi/2)I(\phi) - 4N_1N_2 = 0, \quad (5.8)$$

cuja solução física é

$$I(\phi) = M \cot(\phi/2) \left( \sqrt{1 + \frac{4N_1N_2}{M^2 \cot^2(\phi/2)}} - 1 \right), \quad (5.9)$$

que está em perfeito acordo com (4.25). Este é um exemplo simples de como transitar de uma teoria para a outra e extrair informação útil. Vamos, a seguir, estudar casos mais complicados.

## 5.2 Cavidade Caótica com Contatos não Ideais

Na teoria de circuitos (capítulo 4) ao estudarmos sistemas com contatos não ideais introduzimos a pseudo-corrente  $K(x)$ , eq. (4.28), como uma forma de contornar dificuldades matemáticas. Seria então de grande utilidade encontrarmos uma relação entre  $f_i(z) = \text{Tr}(F_i(z))$ , eq. (3.6) e  $K(x)$ . A partir de agora vamos trabalhar com guias simétricos ou seja  $N_1 = N_2 = N$ , isso ocasiona em (5.2) a relação  $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$ , então

$$f(z) = \frac{N}{z} + \frac{h(1/z)}{z^2}. \quad (5.10)$$

Podemos escrever (4.16) da seguinte forma

$$h(1/z) = \frac{z}{2\sqrt{z-1}} I(\phi) \Big|_{\sin(\phi/2)=1/\sqrt{z}}. \quad (5.11)$$

Substituindo em (5.10) temos

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( N + \frac{I(\phi)}{2\sqrt{z-1}} \right) \Big|_{\sin(\phi/2)=1/\sqrt{z}}. \quad (5.12)$$

Mas como sabemos  $K(x) = (i/2)I(-2ix)$  (4.28), ou melhor  $I(\phi) = -2iK(i\phi/2)$ , onde  $x = i\phi/2$ . Podemos escrever a seguinte expressão usando (5.11)

$$h(1/z) = -\frac{z}{\sqrt{1-z}}K(x) \Big|_{\sinh(x)=1/\sqrt{-z}}. \quad (5.13)$$

Substituindo esta equação em (5.10) chegamos a relação que queríamos

$$f(z) = [\sinh^2(x) (\tanh(x)K(x) - N)] \Big|_{\sinh(x)=1/\sqrt{-z}}. \quad (5.14)$$

De posse da eq. (5.14) podemos agora prever resultados na técnica diagramática a partir da teoria de circuitos. Como exemplos claros vamos resolver dois casos: barreiras simétricas e junção tunelamento.

### 5.2.1 Cavidade Caótica com Duas Barreiras Simétricas

Da teoria de circuitos, eq. (4.42), sabemos que

$$K(x) = \frac{N\Gamma\sinh(x)}{2 - \Gamma + \Gamma \cosh(x)}, \quad (5.15)$$

substituindo em (5.14) temos

$$f(z) = N\sinh^2(x) \left( \frac{\Gamma\sinh^2(x)}{(2 - \Gamma + \Gamma \cosh(x)) \cosh(x)} - 1 \right) \Big|_{\sinh(x)=1/\sqrt{-z}} \quad (5.16)$$

$$= -N\sinh^2(x) \left( \frac{(2 - \Gamma) \cosh(x) + \Gamma}{(2 - \Gamma + \Gamma \cosh(x)) \cosh(x)} \right) \Big|_{\sinh(x)=1/\sqrt{-z}}, \quad (5.17)$$

ou melhor

$$f(z) = \frac{N}{z} \left( \frac{(2 - \Gamma)\sqrt{(z-1)/z} + \Gamma}{\sqrt{(z-1)/z}(2 - \Gamma + \Gamma\sqrt{(z-1)/z})} \right), \quad (5.18)$$

$$= \frac{N}{\sqrt{z}} \left( \frac{(2 - \Gamma)\sqrt{z-1} + \Gamma}{\sqrt{z-1}(2 - \Gamma + \Gamma\sqrt{z-1})} \right). \quad (5.19)$$

Este resultado ainda pode ser escrito como

$$f(z) = N \frac{2(\sqrt{z} - \sqrt{z-1})(1 - \Gamma) + \Gamma/\sqrt{z-1}}{2z(\sqrt{z} - \sqrt{z-1})(1 - \Gamma) + \Gamma\sqrt{z}}, \quad (5.20)$$

que está em perfeito acordo com (3.46) encontrada através da técnica diagramática.

### 5.2.2 Caverna Caótica com Duas Junções de Tunelamento

Utilizando (4.49) obtida na teoria de circuitos

$$K(x) = \frac{N\Gamma_1\Gamma_2\sinh(2x)}{2\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} + 2\Gamma_1\Gamma_2\cosh(2x)} \quad (5.21)$$

e substituindo-a na expressão (5.14) obtemos

$$f(z) = N\sinh^2(x) \left( \frac{\Gamma_1\Gamma_2 \tanh(x)\sinh(2x)}{2\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} + 2\Gamma_1\Gamma_2\cosh(2x)} - 1 \right) \Big|_{\sinh(x)=1/\sqrt{-z}}, \quad (5.22)$$

que resulta em

$$f(z) = \frac{N}{z} \left( \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{z\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - 4\Gamma_1\Gamma_2/z}} - 1 \right). \quad (5.23)$$

Numa forma mais simplificado temos

$$f(z) = \frac{N}{z} \left[ 1 + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)\sqrt{z(z - \tau_0)}} \right], \quad \tau_0 = 4\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2. \quad (5.24)$$

Como vemos esta expressão está também em perfeito acordo com a técnica diagramática, eq. (3.57).

Nos próximos dois tópicos que apresentares vamos fazer o inverso, obteremos resultados da teoria de circuitos a partir da técnica diagramática.

### 5.2.3 Caverna Caótica com um Contato Ideal e uma Barreira de Transparência Arbitrária

Iniciamos o problema invertendo (5.14) para podermos obter  $K(x)$  em função de  $f(z)$ ,

$$K(x) = \coth(x) \left( N - zf(z) \right) \Big|_{z=-\sinh^{-2}(x)}. \quad (5.25)$$

Para descrever esse sistema via técnica diagramática vamos supor que  $\Gamma_1 = \Gamma$  e  $\Gamma_2 = 1$  em (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43):

$$\begin{aligned} (1 - \Gamma)\beta_1\beta_2^2 + (\beta_1\alpha\Gamma - 1 - \Gamma)\beta_2 + \alpha\Gamma &= 0 \quad (5.26) \\ [(\Gamma - 1 + \alpha\Gamma)\beta_2 - 2\alpha\Gamma]\beta_1^2 + [(1 - 2\Gamma)\alpha\beta_2 + 1 + \Gamma + \alpha^2\Gamma]\beta_1 - \alpha &= 0, \end{aligned}$$

$$f_1(z) = \alpha^2 N \left[ 1 - \frac{\alpha \Gamma \beta_2}{1 - (1 - \Gamma) \beta_1 \beta_2} \right]^{-1} \quad (5.27)$$

e

$$f_2(z) = \alpha^2 N \left[ \frac{1}{1 - \alpha \beta_1} \right]. \quad (5.28)$$

A solução analítica dessas equações algébricas não-lineares acopladas é muito complicada. Então faremos como na seção (4.2.3), expandiremos (5.27) em série de potências de  $\alpha$ . Usamos a seguinte expansão

$$\beta_{1,2} = a\alpha_{1,2} + b\alpha_{1,2}^2 + c_{1,2}\alpha^3 + \dots \quad (5.29)$$

Obtemos então a seguinte série de potências para  $f_1(z)$

$$f_1(z) = N \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} + \frac{1}{z^3} \frac{\Gamma(3 + \Gamma^2 + 2\Gamma)}{(1 + \Gamma)^4} + \dots \right). \quad (5.30)$$

Para fazer conexão com teoria de circuitos, substituímos (5.30) em (5.25) e expandimos em potências  $x$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad \cosh(x) = x + \frac{1}{3}x^2 + \dots, \quad (5.31)$$

de modo que

$$K(x) = N \left( \frac{\Gamma x}{1 + \Gamma} - \frac{x^3}{3} \frac{\Gamma(\Gamma^3 + 3\Gamma - 2)}{(1 + \Gamma)^4} + \dots \right). \quad (5.32)$$

Vemos que (5.32) é idêntica a (4.56), obtida pela teoria de circuitos.

## 5.2.4 Caverna Caótica com Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias

Este é o caso mais geral para guias simétricos, as eqs. (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43) que foram calculadas na seção (4.2) descrevem totalmente esse sistema, onde  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ . Essa foi nossa principal contribuição para a técnica diagramática.

Com o intuito de obter os cumulantes da estatística de contagem, eq. (4.57) reescrevemos (5.25) como:

$$H(x) = z \left( z f(z) - N \right) \Big|_{z = -\sinh^{-2}(x)}, \quad (5.33)$$

sendo  $H(x) \equiv 2K(x)/\sinh(2x)$  (veja seção (4.2.3)). Usando as mesmas expansões usadas na seção (5.2.5) obtemos

$$f(z) = N \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} + \frac{1}{z^3} \frac{\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 [2(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2]}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^4} + \dots \right). \quad (5.34)$$

Substituindo em (5.25) encontramos

$$K(x) = N \left( \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 x}{\Gamma_1 + \Gamma_2} - \frac{x^3 \Gamma_1 \Gamma_2 (3\Gamma_1^3 \Gamma_2 + 3\Gamma_1 \Gamma_2^3 - 2\Gamma_1^3 - 2\Gamma_2^3)}{3(\Gamma_1 + \Gamma_2)^4} + \dots \right). \quad (5.35)$$

Fazendo  $\Gamma_1 = \Gamma$  e  $\Gamma_2 = 1$  reobtemos a eq. (5.32). Utilizando (5.34), (5.33), (4.57) e (4.58), encontramos os três primeiros cumulantes:

$$\langle g \rangle = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \langle g \rangle_{TJ} \quad (5.36)$$

para a condutância,

$$F = \frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left( \frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} \right)_{TJ} \quad (5.37)$$

para o fator Fano, e

$$\frac{\langle \kappa \rangle}{\langle p \rangle} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left( \frac{\langle \kappa \rangle}{\langle p \rangle} \right)_{TJ} \quad (5.38)$$

para a razão entre a média do terceiro cumulante,  $\langle \kappa \rangle$ , e a média do ruído de disparo,  $\langle p \rangle$ . Os dois cálculos também coincidem na obtenção do quarto cumulante, definida na eq. (B.1), veja apêndice (B).

Note que para junções de tunelamento,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$ , as eqs. (5.36), (5.37) e (5.38) se reduzem a (3.59), (3.61) e (3.63). O mesmo acontece se fizermos  $\Gamma_1 = 1$  e  $\Gamma_2 = \Gamma$ , retornando nas eqs. (4.59), (4.60) e (4.61).

Neste capítulo demonstramos que a técnica diagramática e a teoria de circuitos estendida contêm a mesma informação em todo domínio dos parâmetros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respondendo assim a questão levantada no capítulo 4. Isto fornece fortes evidências para a equivalência matemática total entre o sistema de equações algébricas da técnica diagramática e a equação polinomial da teoria de circuitos, na descrição semiclássica do núcleo de Poisson.

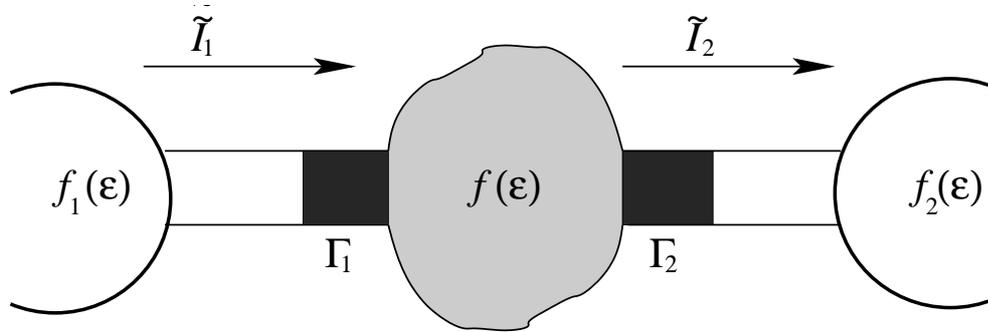


Figura 5.1: A figura ilustra uma caverna caótica acoplada via barreiras de transparências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  aos reservatórios de elétrons.

### 5.2.5 Interpretação Semiclássica de uma Caverna Caótica com Dois Contatos de Transparências Arbitrárias

Uma proposta de uma teoria semiclássica para calcular cumulantes de qualquer ordem para cavernas caóticas foi apresentada por Blanter, Schomerus e Benakker [54]. Eles usaram o princípio de correlação mínima (*minimal correlation principle*) [55]. Este princípio estabelece que as flutuações da função de distribuição semiclássica,  $f(\epsilon)$ , dos elétrons na caverna e as flutuações de corrente estão relacionadas somente através da conservação do número de elétrons, sendo equivalente a um mecanismo de quebra de coerência de fase na mecânica quântica [24]. Surpreendentemente, o uso da abordagem de correlação mínima no cálculo do quarto cumulante levou a uma discrepância com o resultado quanto-mecânico [55].

O problema foi resolvido por Nagaev, Samuelsson e Pilgram [40] usando um novo princípio que postula a existência de correções em cascata (*cascade approach*). A razão da discrepância é que a caverna não é exatamente um reservatório com função distribuição de não equilíbrio. A função distribuição  $f(\epsilon)$  também exibe flutuações numa escala de tempo da ordem do tempo de permanência do elétron na caverna. Estas por serem muito lentas na escala de tempo de correlação das flutuações de corrente, não afetam diretamente seus cumulantes. No entanto existe um efeito residual, devido a uma memória finita, que induz correlações adicionais: cumulantes de menor ordem afetam os de maior ordem através das flutuações da função distribuição levando a correções em cascata.

## O Modelo

O sistema consiste de uma cavidade com dois contatos de transparências arbitrárias  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$  e  $N_j$  canais em cada contato, veja fig. 5.1. Devido ao grande número de espalhamentos elásticos na cavidade, os elétrons que entram têm suas fases aleatorizadas, mas conservam suas energias. Portanto, apesar da natureza quântica dos contatos, a cavidade é um objeto semiclássico, ou seja, os elétrons podem ser descritos por uma função distribuição semiclássica,  $f(\epsilon)$ , que depende somente da energia dos elétrons.

Os contatos são geradores independentes das flutuações de corrente descritas pela função característica quanto-mecânica de Levitov e Lesovik

$$\chi_j(\lambda, t) = \exp \left\{ \frac{tN_j}{h} \int d\epsilon \ln \left[ 1 + (e^{i\lambda} - 1)\Gamma_j f(\epsilon)(1 - f_j(\epsilon)) \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{-i\lambda} - 1)\Gamma_j f_j(\epsilon)(1 - f(\epsilon)) \right] \right\}, \quad (5.39)$$

onde  $f_j(\epsilon)$ , para  $j = 1, 2$ , é uma função distribuição de equilíbrio de Fermi-Dirac e  $f(\epsilon)$  é uma distribuição de não-equilíbrio, isotrópica e homogênea. A temperatura zero as distribuições de Fermi-Dirac satisfazem [56]

$$f_j(\epsilon) = \theta(\mu_j - \epsilon), \quad f_j^2(\epsilon) = f_j(\epsilon), \quad (5.40)$$

onde  $\mu_j$  é a energia de Fermi do reservatório  $j$ . O valor médio da função distribuição  $f(\epsilon)$  é dado pela mistura estatística [57]

$$f(\epsilon) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} f_1(\epsilon) + \frac{G_2}{G_1 + G_2} f_2(\epsilon), \quad (5.41)$$

onde  $G_j = N_j \Gamma_j$ . Os cumulantes da estatística de contagem (seção 1.5) dos elétrons transmitidos através do contato  $j$  são obtidos pela expressão

$$q_{k,j}(t) = - \frac{d^k}{d(i\lambda)^k} \Phi_j(\lambda, t) \Big|_{\lambda=0}, \quad \text{onde } \Phi_j(\lambda, t) = - \ln \chi_j(\lambda, t), \quad (5.42)$$

substituindo (5.39) em (5.42) encontramos para  $k = 1$

$$q_{1,j}(t) = \frac{tN_j \Gamma_j}{h} \int d\epsilon (f(\epsilon) - f_j(\epsilon)). \quad (5.43)$$

Definindo a média do ruído de corrente como

$$\langle \tilde{I}_j \rangle \equiv \frac{hq_{1,j}(t)}{t} = G_j \int d\epsilon (f(\epsilon) - f_j(\epsilon)), \quad (5.44)$$

observamos que

$$\langle \tilde{I}_j \rangle = \int d\epsilon \langle \tilde{I}_j \rangle_\epsilon, \quad \text{onde} \quad \langle \tilde{I}_j \rangle_\epsilon = G_j (f(\epsilon) - f_j(\epsilon)), \quad (5.45)$$

é a densidade de corrente por unidade de energia. De (5.40) e (5.41) encontra-se que

$$\begin{cases} f(\epsilon) - f_1(\epsilon) = \frac{G_2}{G_1+G_2} (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon)) \\ f(\epsilon) - f_2(\epsilon) = \frac{G_1}{G_1+G_2} (f_1(\epsilon) - f_2(\epsilon)). \end{cases} \quad (5.46)$$

Substituindo (5.46) em (5.44) encontramos expressões similares à formula de Landauer

$$\langle \tilde{I}_1 \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\epsilon (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon)) = - \langle \tilde{I}_2 \rangle.$$

Consideramos agora as flutuações. Fazendo  $k = 2$  em (5.42) obtemos

$$q_{2,j}(t) = \frac{t}{h} \langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle = \frac{t}{h} \left( \langle \tilde{I}_j^2 \rangle - \langle \tilde{I}_j \rangle^2 \right), \quad (5.47)$$

onde

$$\langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle_\epsilon = G_j [f_j(\epsilon)(1 - f(\epsilon)) + f(\epsilon)(1 - f_j(\epsilon)) - \Gamma_j (f_j(\epsilon) - f(\epsilon))^2]. \quad (5.48)$$

De modo que a transformada de Fourier da funções de correlação da corrente a frequência nula pode ser escrita como

$$\langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle = \int d\epsilon \langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle_\epsilon. \quad (5.49)$$

Estamos interessados somente em baixas frequências, ou tempos longos, onde o número médio de partículas transmitidas é muito grande, conseqüentemente não ocorre acúmulo de elétrons na cavidade. As correntes  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$  são, por hipótese do modelo, totalmente independentes, o que ocasionaria uma violação da lei de conservação se somente elas contribuíssem para as flutuações da corrente física.

Para assegurar que haverá conservação de corrente a baixas frequência, flutuações na função distribuição,  $\delta f(\epsilon)$ , da cavidade têm que ser levadas em conta [57], então temos

$$\delta I_j = \tilde{I}_j + G_j \Delta f, \quad \text{onde} \quad \Delta f = \int d\epsilon \delta f(\epsilon). \quad (5.50)$$

A lei de conservação de corrente implica que

$$\delta I_1 + \delta I_2 = 0. \quad (5.51)$$

Das eqs. (5.50) e (5.51) encontramos a relação

$$\Delta f = -\frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{G_1 + G_2}. \quad (5.52)$$

Substituindo esta expressão em (5.50) obtemos

$$\delta I_1 = \frac{G_2 \tilde{I}_1 - G_1 \tilde{I}_2}{G_1 + G_2} \quad \text{e} \quad \delta I_2 = \frac{G_1 \tilde{I}_2 - G_2 \tilde{I}_1}{G_1 + G_2}, \quad (5.53)$$

cujas médias podem ser escritas como

$$\begin{cases} \langle \delta I_1 \rangle = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_1 \rangle - \frac{G_1}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_2 \rangle \\ \langle \delta I_2 \rangle = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_2 \rangle - \frac{G_2}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_1 \rangle. \end{cases} \quad (5.54)$$

Devido a (5.44), podemos escrever (5.54) como uma fórmula de Landauer [24]

$$\langle \delta I_1 \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\epsilon (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon)) = g \int d\epsilon (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon))$$

e

$$\langle \delta I_2 \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\epsilon (f_1(\epsilon) - f_2(\epsilon)) = -\langle \delta I_1 \rangle. \quad (5.55)$$

Então a condutância adimensional,  $g$ , é dada por

$$g = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad (5.56)$$

Para guias idênticos temos que  $N_1 = N = N_2$ , portanto  $G_1 = N\Gamma_1$  e  $G_2 = N\Gamma_2$ . Temos portanto

$$g = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (5.57)$$

que é equivalente a eq. (5.36) obtida via técnica diagramática. Comparando (5.47) e (5.55) concluímos que  $\langle \tilde{I}_j \rangle = \langle \delta I_j \rangle$ , como se esperava.

Queremos agora calcular o segundo cumulante que é definido como

$$\langle\langle \delta I_j^2 \rangle\rangle = \langle \delta I_j^2 \rangle - \langle \delta I_j \rangle^2. \quad (5.58)$$

De (5.54) pode-se obter  $\langle \delta I_j^2 \rangle$

$$\langle \delta I_1^2 \rangle = \frac{1}{(G_1 + G_2)^2} \left[ G_1^2 \langle \tilde{I}_2^2 \rangle + G_2^2 \langle \tilde{I}_1^2 \rangle - 2G_1G_2 \langle \tilde{I}_1 \rangle \langle \tilde{I}_2 \rangle \right] = \langle \delta I_2^2 \rangle, \quad (5.59)$$

no qual usamos a independência de  $\tilde{I}_j$  como fonte de ruído, isto é,  $\langle \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \rangle = \langle \tilde{I}_1 \rangle \langle \tilde{I}_2 \rangle$ . Substituindo (5.54) e (5.59) em (5.58), para  $j = 1$ , obtém-se

$$\langle\langle \delta I_1^2 \rangle\rangle = \frac{G_2^2 \langle\langle \tilde{I}_1^2 \rangle\rangle + G_1^2 \langle\langle \tilde{I}_2^2 \rangle\rangle}{(G_1 + G_2)^2}. \quad (5.60)$$

Para calcular o segundo cumulante, eq. (5.58), a temperatura nula devemos usar as eqs. (5.48) e (5.40). Primeiro usamos (5.40) e encontramos que

$$\begin{aligned} 1 - f_j(\epsilon) &= \theta(\epsilon - \mu_j), \\ (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon))^2 &= f_2(\epsilon)(1 - f_1(\epsilon)) + f_1(\epsilon)(1 - f_2(\epsilon)) \end{aligned}$$

e

$$1 - f(\epsilon) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \theta(\epsilon - \mu_1) + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \theta(\epsilon - \mu_2),$$

destas três igualdades encontramos as seguintes relações relevantes

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon)(1 - f(\epsilon)) &= \frac{G_2}{G_1 + G_2} \theta(\mu_1 - \epsilon) \theta(\epsilon - \mu_2), \\ f_2(\epsilon)(1 - f(\epsilon)) &= \frac{G_1}{G_1 + G_2} \theta(\mu_2 - \epsilon) \theta(\epsilon - \mu_1), \\ f(\epsilon)(1 - f_1(\epsilon)) &= \frac{G_2}{G_1 + G_2} \theta(\mu_2 - \epsilon) \theta(\epsilon - \mu_1), \\ f(\epsilon)(1 - f_2(\epsilon)) &= \frac{G_1}{G_1 + G_2} \theta(\mu_1 - \epsilon) \theta(\epsilon - \mu_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (f(\epsilon) - f_1(\epsilon))^2 &= \frac{G_2^2}{(G_1 + G_2)^2} (f_2(\epsilon) - f_1(\epsilon))^2 \\ &= \frac{G_2^2}{(G_1 + G_2)^2} [\theta(\mu_2 - \epsilon)\theta(\epsilon - \mu_1) + \theta(\mu_1 - \epsilon)\theta(\epsilon - \mu_2)]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Definindo

$$\Delta(\epsilon) = \theta(\mu_2 - \epsilon)\theta(\epsilon - \mu_1) + \theta(\mu_1 - \epsilon)\theta(\epsilon - \mu_2), \quad (5.62)$$

vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\epsilon) d\epsilon = \int_{\mu_<}^{\mu_>} d\epsilon = \mu_> - \mu_<, \quad \text{para } \mu_> \equiv \max\{\mu_1, \mu_2\}, \quad \mu_< \equiv \min\{\mu_1, \mu_2\}. \quad (5.63)$$

Introduzindo (5.61) em (5.48) geramos as seguintes expressões

$$\langle\langle \tilde{I}_1^2 \rangle\rangle_{\epsilon} = \frac{G_1 G_2 (G_1 + G_2 - G_2 \Gamma_1)}{(G_1 + G_2)^2} \Delta(\epsilon)$$

e

$$\langle\langle \tilde{I}_2^2 \rangle\rangle_{\epsilon} = \frac{G_1 G_2 (G_1 + G_2 - G_1 \Gamma_2)}{(G_1 + G_2)^2} \Delta(\epsilon). \quad (5.64)$$

Substituindo (5.64) em (5.60) obtém-se

$$\langle\langle \delta I_1^2 \rangle\rangle = \frac{G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - \Gamma_2) + G_2^3 (1 - \Gamma_1)}{(G_1 + G_2)^3} |\langle \delta I_1 \rangle|, \quad (5.65)$$

onde

$$|\langle \delta I_1 \rangle| = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} (\mu_> - \mu_<). \quad (5.66)$$

Então fator Fano é dado por

$$F = \frac{\langle\langle \delta I_1^2 \rangle\rangle}{|\langle \delta I_1 \rangle|} = \frac{G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - \Gamma_2) + G_2^3 (1 - \Gamma_1)}{(G_1 + G_2)^3}. \quad (5.67)$$

Para  $N_1 = N = N_2$ , ou seja,  $G_1 = N\Gamma_1$  e  $G_2 = N\Gamma_2$  o fator Fano fica

$$F = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^3} (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_1 \Gamma_2) \quad (5.68)$$

que está em completo acordo com a eq. (5.37) obtida via técnica diagramática.

Para calcular o terceiro cumulante fazemos  $k = 3$  na eq. (5.42), então

$$q_{3,j}(t) = \frac{t}{\hbar} \langle \langle \tilde{I}_j^3 \rangle \rangle = \frac{t}{\hbar} \left( \langle \tilde{I}_j^3 \rangle - 3 \langle \tilde{I}_j \rangle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle + 2 \langle \tilde{I}_j \rangle^3 \right). \quad (5.69)$$

A transformada de Fourier a frequência nula do terceiro cumulante é dada por

$$\langle \langle \tilde{I}_j^3 \rangle \rangle = \int d\epsilon \langle \langle \tilde{I}_j^3 \rangle \rangle_\epsilon \quad (5.70)$$

onde

$$\langle \langle \tilde{I}_j^3 \rangle \rangle_\epsilon = G_j(f(\epsilon) - f_j(\epsilon)) \{ 1 - 3\Gamma_j [f(\epsilon)(1 - f_j(\epsilon)) + f_j(\epsilon)(1 - f(\epsilon))] + 2\Gamma_j^2 (f(\epsilon) - f_j(\epsilon))^2 \}. \quad (5.71)$$

O valor da correlação mínima ( $cm$ ), devido a conservação de corrente, é dado por

$$\langle \langle \delta I_1^3 \rangle \rangle_{cm} = \frac{G_2^3 \langle \langle \tilde{I}_1^3 \rangle \rangle - G_1^3 \langle \langle \tilde{I}_2^3 \rangle \rangle}{(G_1 + G_2)^3}, \quad (5.72)$$

mas este resultado não contém todas as correções quânticas pertinentes. Existe uma correção em cascata ( $cc$ ) devido às flutuações lentas na função distribuição da caverna acopladas a cumulantes de menor ordem e que não pode ser desprezadas do terceiro cumulante em diante. Essa correção é dada pela dependência funcional de  $\langle \langle \delta I_1^2 \rangle \rangle$  ( $\delta f$ ) e resulta na expressão

$$\langle \langle \delta I_1^3 \rangle \rangle_{cc} = 3 \int d\epsilon \frac{\delta \langle \langle \delta I_1^2 \rangle \rangle}{\delta f(\epsilon)} \langle \delta f(\epsilon) \delta I_1 \rangle. \quad (5.73)$$

Conseqüentemente o terceiro cumulante é dado pela soma da correção em cascata e da correlação mínima, ou seja

$$\langle \langle \tilde{I}_j^3 \rangle \rangle = \langle \langle \delta I_1^3 \rangle \rangle_{cm} + \langle \langle \delta I_1^3 \rangle \rangle_{cc}. \quad (5.74)$$

Detalhes sobre os cálculos do terceiro e quarto cumulantes são encontrados na ref. [40].

O método semiclassico em cascata encontra os mesmos resultados para o terceiro e quarto cumulantes que os obtidos pelas análises quanto-mecânicas usadas nesta tese (técnica diagramática e teoria de circuito estendida), referentes a uma caverna caótica com contatos de transparências arbitrárias. Esta análise pode ser aplicada em uma ampla classe de sistemas que inclua elementos semiclassicos e quanto-mecânicos. A principal vantagem deste método é sua interpretação física relativamente simples quando comparada com a análise quanto-mecânica.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Espalhamentos quânticos em cavidades caóticas é um rico e fascinante tema com múltiplas facetas. Suas características universais chamam atenção, fazendo com que esta área seja atualmente alvo de intensa pesquisa. O objetivo da física teórica, neste contexto, é o desenvolvimento de modelos e métodos de cálculo que reproduzam ou predigam corretamente dados experimentais. Então, é de extrema importância que ao chegarmos a novos resultados teóricos, eles sejam confirmados por outras análises independentes, algébricas ou numéricas, gerando assim uma maior credibilidade perante a comunidade científica.

A teoria de circuitos estendida, que têm em sua essência a estrutura do ponto de sela do modelo- $\sigma$  não-linear supersimétrico e correlações quânticas do núcleo de Poisson, permite eliminar completamente das equações de transporte a parte difusiva do problema. O sistema resultante (um bilhar caótico) é então descrito por um circuito auxiliar que vê a cavidade balística com um ponto quântico. Esse método absorve as características quanto-mecânicas residuais no limite semiclássico, ou seja, a presença de barreiras de tunelamento na interface entre a cavidade e os guias, através de um conjunto fixo de parâmetros, denominados coeficientes de transmissão  $\Gamma_n$ . Por essa razão a teoria de circuitos estendida gera um algoritmo simples e eficiente para se calcular cumulantes da estatística de contagem referentes a uma cavidade caótica com dois contatos de transparências arbitrárias. Demonstramos que a descrição completa do sistema em questão se reduz a uma equação polinomial quártica, eq. (4.37), mais a eq. (4.38).

A técnica diagramática contém toda a informação quanto-mecânica do problema, até aplicarmos o limite semiclássico, onde sobrevivem como vestígio dos efeitos quânticos somente os fenômenos de tunelamento nas vizinhanças das bar-

---

reiras. Mas para podermos fazer uma comparação direta com a teoria de circuitos estendida generalizamos os cálculos de Brouwer e Beenakker para o caso de barreiras de transparências arbitrárias. Chegamos à conclusão de que duas equações algébricas não-lineares acopladas, eqs. (3.40) e (3.41), mais as eqs (3.42) e (3.43), baseadas na distribuição do núcleo de Poisson, descrevem as propriedades estatísticas do problema. Simplificações destas equações levaram a resultados já bem conhecidos, como a densidade de autovalores para os casos de junção de tunelamento e barreiras simétricas e ainda obtivemos os três primeiros cumulantes da estatística de contagem da junção de tunelamento. A maioria destes resultados ainda não tinham sido demonstrados pela técnica diagramática.

Nesta tese mostramos que as equações algébricas não-lineares acopladas do método diagramático e a equação polinomial de quarta ordem da teoria de circuitos são equivalentes na obtenção dos quatro primeiros cumulantes da estatística de contagem e na obtenção da densidade de autovalores de transmissão para barreiras simétrica e junção de tunelamento. Ou melhor, demonstramos que a técnica diagramática e a teoria de circuitos estendida contêm a mesma informação em todo domínio dos parâmetros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Além disso, encontramos uma relação entre as funções geratrizes de cada teoria, eq. (5.25). Isto implica que podemos migrar de uma técnica para a outra sem nenhuma perda de informação, a equivalência aqui não é meramente uma comparação entre os cumulantes.

A equivalência completa desses métodos seria um resultado não trivial, devido ao fato do princípio de concatenação semiclássico, que é usado para calcular a equação polinomial na teoria de circuitos, não ter representação direta na formulação diagramática e pelo fato de levar a uma simplificação algébrica substancial do problema. A demonstração rigorosa desta equivalência implicaria na dedução de uma relação direta entre as variáveis das equações algébricas não-lineares acopladas ( $\beta_1$  e  $\beta_2$ ) e a da equação polinomial da teoria de circuitos ( $\xi$ ).

É importante observar que teoria de circuito tem em sua estrutura uma descrição irreduzível que intuitivamente satisfaz o princípio da “navalha de Occam” da simplicidade descritiva [58]. Isto quer dizer que, entre as diversas formulações usadas para descrever um certo problema obtendo os mesmos resultados, aquela que tiver a estrutura com menor complexidade, ou seja, uma descrição simples, deverá ser a escolhida. A equivalência entre as duas teorias levou a uma substancial simplificação algébrica do problema, favorecendo a teoria de circuitos estendida como a estrutura analítica mais simples. Esta simplicidade descritiva também tem sido procurada por outros meios. Alguns exemplos são apresentados nessa tese. As interpretações semiclássicas feitas por Jong (seção 3.2.3) e Nagaev (seção 5.2.5) buscam teorias livres de elementos quanto-mecânicos, mas estas podem estar sujeitas a equívocos, como

demonstraram Blanter, Schomerus e Beenakker [54] no caso da teoria de correlação mínima. Efeitos quânticos relevantes podem aparecer na forma de correlações sutis, que levam a efeitos de memória como aparecem na teoria de correções em cascata. A teoria de circuitos tem a vantagem de ser simples e, apesar de ser semiclássica, mantém todos os efeitos quânticos relevantes na escala de tempo considerada.

Perspectivas importantes do nosso trabalho seriam a extensão da técnica diagramática para o caso de contatos com o número de canais não equivalentes e para um número arbitrário de terminais. No caso da teoria de circuitos estendida, importantes desenvolvimentos seriam a introdução de correções quânticas, ou seja, localização fraca, e a extensão para transporte dependente do tempo e da temperatura. É importante ressaltar que a técnica diagramática já calcula a localização fraca e mais recentemente foi estendida para transporte com dependência temporal [59].

Esperamos que nosso resultado ajude a estabelecer uma maior conexão entre os recentes desenvolvimentos independentes de ambos os métodos em áreas como magnetoeletrônica ou spintrônica [60] e dispositivos supercondutores híbridos [61]. Os resultados mais relevantes desta tese foram recentemente aceitos para publicação, veja ref. [62].

# Apêndice A

## Resultado dos Coeficientes $V_{c_1, \dots, c_k}$ e $W_{c_1, \dots, c_k}$ para $n \leq 3$ dos EUC e EOC

Nas tabelas A.1-A.4 listamos os coeficientes  $V_{c_1, \dots, c_k}$  e  $W_{c_1, \dots, c_k}$  para  $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$  dos EUC e EOC. Os coeficientes são funções racionais de dimensão  $N$  da matriz unitária. O denominador  $A_n$  e  $B_n$  de  $V_{c_1, \dots, c_k}$  e  $W_{c_1, \dots, c_k}$ , respectivamente, dependem somente de  $n$ . Eles são apresentados na tabela A.1 e A.2, enquanto os numeradores  $A_n V_{c_1, \dots, c_k}$  e  $B_n W_{c_1, \dots, c_k}$  são exibidos nas tabelas A.3 e A.4.

$n$	$A_n(\text{EUC})$	$A_n(\text{EOC})$
1	$N$	$N + 1$
2	$N(N^2 - 1)$	$N(N + 1)(N + 3)$
3	$N(N^2 - 1)(N^2 - 4)$	$(N - 1)N(N + 1)(N + 3)(N + 5)$

Tabela A.1: Denominadores  $A_n$  dos coeficientes  $V_{c_1, \dots, c_k}$  para  $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ .

$n$	$B_n(\text{EUC})$	$B_n(\text{EOC})$
1	$N$	$N + 1$
2	$N^2(N^2 - 1)$	$N(N + 1)^2(N + 3)$
3	$N^3(N^2 - 1)(N^2 - 4)$	$(N - 1)N(N + 1)^3(N + 3)(N + 5)$

Tabela A.2: Denominadores  $B_n$  dos coeficientes  $W_{c_1, \dots, c_k}$  para  $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ .

$c_1 + \dots + c_k \leq 3$	$A_n V_{c_1, \dots, c_k}(\text{EUC})$	$A_n V_{c_1, \dots, c_k}(\text{EOC})$
1	1	1
1,1	$N$	$N + 2$
2	-1	-1
1,1,1	$N^2 - 2$	$N^2 + 5N + 2$
2,1	$-N$	$-N - 3$
3	2	2

Tabela A.3: Numeradores  $A_n V_{c_1, \dots, c_k}$  dos coeficientes  $V_{c_1, \dots, c_k}$  para  $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ . Os denominadores  $A_n$  são dados na tabela A.1.

$c_1 + \dots + c_k \leq 3$	$A_n W_{c_1, \dots, c_k}(\text{EUC})$	$A_n W_{c_1, \dots, c_k}(\text{EOC})$
1	1	1
1,1	1	2
2	$-N$	$-N - 1$
1,1,1	8	32
2,1	$-4N$	$-8N - 8$
3	$2N^2$	$2N^2 + 4N + 2$

Tabela A.4: Numeradores  $B_n W_{c_1, \dots, c_k}$  dos coeficientes  $W_{c_1, \dots, c_k}$  para  $n = c_1 + \dots + c_k \leq 3$ . Os denominadores  $B_n$  são dados na tabela A.2.

## Apêndice B

### Valor do Quarto Cumulante

No caso de contatos com transmissão arbitrária o quarto cumulante é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \frac{\langle l \rangle}{\langle g \rangle} = & -(\Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2)(6\Gamma_2^2 \Gamma_1^8 - 6\Gamma_2 \Gamma_1^8 + \Gamma_1^8 - 36\Gamma_2^3 \Gamma_1^7 + 30\Gamma_2^2 \Gamma_1^7 \\ & - 6\Gamma_2 \Gamma_1^7 + 150\Gamma_1^6 \Gamma_2^4 - 114\Gamma_1^6 \Gamma_2^3 + 16\Gamma_1^6 \Gamma_2^2 - 192\Gamma_1^5 \Gamma_2^5 + 42\Gamma_1^5 \Gamma_2^4 \\ & + 14\Gamma_1^5 \Gamma_2^3 + 150\Gamma_1^4 \Gamma_2^6 + 42\Gamma_1^4 \Gamma_2^5 - 18\Gamma_1^4 \Gamma_2^4 - 36\Gamma_1^3 \Gamma_2^7 - 114\Gamma_1^3 \Gamma_2^6 \\ & + 14\Gamma_1^3 \Gamma_2^5 + 6\Gamma_1^2 \Gamma_2^8 + 30\Gamma_1^2 \Gamma_2^7 + 16\Gamma_1^2 \Gamma_2^6 - 6\Gamma_1 \Gamma_2^8 - 6\Gamma_1 \Gamma_2^7 + \Gamma_2^8) / \\ & (\Gamma_2 + \Gamma_1)^9. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

A eq. (B.1) está em perfeito acordo com a teoria de correções em cascata [40].

# Referências Bibliográficas

- [1] Para uma revisão veja, C. W. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics*, **69**(3):527, 1997.
- [2] Para uma revisão veja, Ya. M. Blanter and M. Büttiker. Shot Noise in Mesoscopic Conductors. *Physics Reports*, **336**(1-2):2–166, 2000.
- [3] M. J. M. de Jong e C. W. J. Beenakker. Shot noise in mesoscopic systems. *Physica A*, **230**:219, 1996.
- [4] Freeman J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I. *Journal of Mathematical Physics*, **47**(1):140, 1962.
- [5] Madan Lau Metha. *Random Matrices*. Academic Press, Inc., 1992.
- [6] Para uma revisão veja, T. Guhr, A. M.-Groeling e Hans A. Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, **189**:189, 1998.
- [7] B. L. Altshuler. *JETP Letters*, **41**:648, 1985.
- [8] P. A. Lee e A. D. Stone. Universal conductance fluctuations in metals. *Physical Review Letters*, **55**:1622, 1985.
- [9] P. A. Mello, P. Pereira e K. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Annals of Physics*, **181**:290, 1988.
- [10] A. M. S. Macêdo e A. M. C. Souza. Quantum transitions in double barrier chaotic billiards. *Physical Review E*, (a ser publicado), 2005.
- [11] P. W. Brouwer e C. W. J. Beenakker. Diagrammatic technique for integration over the unitary group. *Journal of Mathematical Physics*, **37**:4904, 1996.

- 
- [12] L. S. Levitov e G. B. Lesovik. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz*, **58**:225, 1993. [JETP Lett. 58,230(1993)], para uma revisão mais recente veja L. S. Levitov em *Quantum Noise in Mesoscopic Systems*, ed. Y. V. Nazarov (Kluwer,2003).
- [13] Yu. V. Nazarov. Limits of universality in disordered conductors. *Physical Review Letters*, **73**(1):134, 1994.
- [14] R. Landauer. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction. *IBM J. Res. Develop*, **1**:223, 1957.
- [15] R. Landauer. Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices. *Phil. Mag.*, **21**:863, 1970.
- [16] Yoseph Imry. *Introduction to Mesoscopic Physics*. Oxford University Press, 1997.
- [17] M. Büttiker. Four-Terminal Phase Coherent Conductance. *Physical Review Letters*, **57**(14):1761, 1986.
- [18] Ailton Fernandes de Macedo Junior. Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral, 2002. Dissertação de mestrado orientada pelo prof. Antônio Murilo Santos Macêdo.
- [19] Sérgio W. S. Apolinário. Teoria quântica de circuitos para a transição balístico-difusivo, 2004. Dissertação de mestrado orientada pelo prof. Antônio Murilo Santos Macêdo.
- [20] Y. V. Fyodorov e Hans-Jürgen Sommers. Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering: Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, **38**(4):1918, 1997.
- [21] P. W. Brouwer. On the random-matrix theory of quantum transport, 1997. PhD thesis.
- [22] J. M. Chamberlain e outros. *Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional Semiconductors Structures*. Plenum Press, 1990.
- [23] F. Green e M. P. Das. Mesoscopic transport as many-body physics. codmat/0211007.

- 
- [24] Supriyo Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [25] A. M. S. Macêdo. Notas de aula: Física mesoscópica.
- [26] D. S. Fisher e P. A. Lee. Relation between conductivity e transmission matrix. *Physical Review B*, **23**:6851, 1981.
- [27] M. Büttiker. Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors. *Physical Review Letters*, **65**:2901, 1990.
- [28] G. B. Lesovik. *Journal of Mathematical Physics*, **49**:592, 1989.
- [29] C. W. Beenakker e M Büttiker. Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors. *Physical Review B*, **46**, 1992.
- [30] S. Oberholzer, E. V. Sukhorukov, C. Strunk e C. Schönenberger. Shot noise by quantum scattering in chaotic cavities. *Physical Review Letters*, **86**:2114, 2001.
- [31] Mathias J. Rufino. Pontos quânticos de classe d com estrutura híbrida metal normal-supercondutor, 2004. Dissertação de mestrado orientada pelo prof. Antônio Murilo Santos Macêdo.
- [32] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, third edition, 1999.
- [33] Harold U. Baranger and Pier. A. Mello. Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach. *Physical Review Letters*, **76**(1):142, 1994.
- [34] R. A. Jalabert, J. L. Pichard e C. W. J. Beenakker. *Europhysics Letters*, **27**:255, 1994.
- [35] R. Cron, M. F. Goffman, D. Esteve e C. Urbina. Multiple-charge-quanta shot noise in superconducting atomic contacts. *Physical Review Letters*, **86**:4104, 2001.
- [36] A. A. Kozhevnikov, R. J. Schoelkopf e D. E. Prober. Observation of photon-assisted noise in a diffusive normal metal-superconductor junction. *Physical Review Letters*, **84**:3398, 2000.
- [37] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley-Interscience, second edition, 1990.

- 
- [38] L. S. Levitov, H. W. Lee e G. B. Lesovik. Electron counting statistics and coherent states of electric current. *Journal of Mathematical Physics*, **37**:4845, 1996.
- [39] B. Reulet, J. Senzier e D. E. Prober. Environmental effects in the third moment of voltage fluctuations in a tunnel junction. *Physical Review Letters*, **91**:196601, 2003.
- [40] K. E. Nagaev, P. Samuelsson e S. Pilgram. Cascade approach to current fluctuations in a chaotic cavity. *Physical Review B*, **66**:195318, 2002.
- [41] A. M. S. Macêdo. Scaling theory of phase-coherent metallic conductors. *Physical Review B*, **66**:033306, 2002.
- [42] Michael Creutz. On invariant integration over  $SU(N)$ . *Journal of Mathematical Physics*, **19**(10):2043, 1978.
- [43] Stuart Samuel.  $U(N)$  integrals,  $1/N$ , and the de Wit-'t Hooft anomalies. *Journal of Mathematical Physics*, **21**(12):2695, 1980.
- [44] Pier. A. Mello. Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **23**:4061, 1990.
- [45] P. A. Mello e T. H. Seligman. On the entropy approach to statistic nuclear reactions. *Nuclear Physics A*, **344**:489, 1980.
- [46] S. Pilgram, A. N. Jordan, E. V. Sukhorukov e M. Büttiker. Stochastic path integral formulation of full counting statistics. *Physical Review Letters*, **90**:206801, 2003.
- [47] N. Argaman e A. Zee. A diagrammatic theory of random scattering matrices for normal-superconducting mesoscopic junctions. *Physical Review B*, **54**:7406, 1996.
- [48] Yu. V. Nazarov. Novel circuit of Andreev reflection. cond-mat/9811155.
- [49] Para uma revisão veja, Alexander L. Fetter e J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Dover, 2003.
- [50] Y. V. Nazarov. *Quantum Dynamics of Submicron Structures*, volume I. H. A. Cerdeira, B. Kramer e G. Schön, NATO ASI E291, Kluwer, Dordrecht, 1995.

- 
- [51] M. J. M. de Jong. Distribution of transmitted charge through a double-barrier junction. *Physical Review B*, **54**(11):8144, 1996.
- [52] D. A. Bagrets e Yu. V. Nazarov. Multiterminal counting statistics. cond-mat/0301505. veja também D. A. Bagrets e Yu. V. Nazarov em Quantum Noise in Mesoscopic Systems, ed. Y. V. Nazarov (Kluwer,2003).
- [53] A. M. S. Macêdo e J. T. Chalker. Exact results for the level density and two-point correlation function of the transmission-matrix eigenvalues in quasi-one-dimensional conductors. *Physical Review B*, **49**:4695, 1994.
- [54] Ya. M. Blanter, H. Schomerus e C. W. J. Beenakker. Effect of dephasing on charge-counting statistics in chaotic cavities. *Physica E*, **11**:1, 2001.
- [55] Ya. M. Blanter e H. Schomerus. Semiclassical theory of conductance and noise in open chaotic cavities. *Physical Review Letters*, **84**:1280, 2000.
- [56] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical Physics II*. Springer, 1991.
- [57] S. A. van Langen e M. Büttiker. Quantum-statistical current correlations in multilead chaotic cavities. *Physical Review B*, **56**:R1680, 1997.
- [58] A. N. Soklakov. Occam's Razor as a formal basis for a physical theory. *math-ph/0009007*.
- [59] M. L. Polianski e P. W. Brouwer. Scattering matrix ensemble for time-dependent transport through a chaotic quantum dot. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **36**:3215, 2003.
- [60] Igor Zutic, Jaroslav Fabian e S. Das Sarma. Spintronics: Fundamentals and applications. *Reviews of Modern Physics*, **76**:323, 2004.
- [61] B. Pannetier<sup>1</sup> and H. Courtois<sup>1</sup>. Andreev reflection and proximity effect. *Journal of Low Temperature Physics*, **118**:599, 2000.
- [62] A. L. R. Barbosa e A. M. S. Macêdo. Diagrammatic analysis of the unitary group for double barrier ballistic cavities: equivalence with circuit theory. *Physical Review B*, (a ser publicado),2005, cond-mat/0504086.