



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

### **DIAGRAMA DE FASES E EXPOENTES CRÍTICOS DO MODELO DO VOTO DA MAIORIA EM GRAFOS ALEATÓRIOS**

por

**Luiz Felipe Cavalcanti Pereira**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Francisco Goerge Brady Moreira (Orientador-UFPE)

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF – UFPE)

Prof. Douglas Soares Galvão (IFGW / DFA - UNICAMP)

Recife - PE, Brasil  
Março - 2005



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Departamento de Física - CCEN**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone ( ++ 55 81 ) 2126-8449/2126-8450 - Fax ( ++ 55 81 ) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado**

---

**Luiz Felipe Cavalcanti Pereira**

### **DIAGRAMA DE FASES E EXPOENTES CRÍTICOS DO MODELO DO VOTO DA MAIORIA EM GRAFOS ALEATÓRIOS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Francisco George Brady Moreira (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Douglas Soares Galvão do Instituto de Física Gleb Wataghin, Departamento de Física Aplicada da Universidade de Campinas, consideram o candidato:

Aprovado com Distinção      ( ) Aprovado      ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos dezoito dias do mês de março de 2005.

Prof. Francisco George Brady Moreira  
Presidente e Orientador

Prof. Douglas Soares Galvão

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras  
Gomes

## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para minha formação e para a realização deste trabalho, algumas de forma direta e fundamental, outras de forma indireta e até muito sutil.

Agradeço a meu pai, Paulo Fernando, e minha mãe, Fátima, por toda a atenção e carinho dedicado à nossa família. Por terem me ensinado que o valor de um homem é medido pelo seu caráter e não pela quantidade de bens materiais que ele é capaz de acumular. Agradeço pelo apoio durante minha jornada nesse estranho mundo da física. Agradeço também a minha irmã Carol, meu irmão Paulo e sua esposa Andrea, pela amizade e carinho em nossa convivência.

Durante todos estes anos de convivência o Prof. Francisco George Brady Moreira foi muito mais do que um orientador: o Prof. Brady é um bom amigo. Além de me orientar no trabalho de pesquisa o Prof. Brady contribuiu de maneira fundamental para minha formação, com ele aprendi muitas lições de física e de vida. Agradeço por sua dedicação e paciência ao longo dos anos de orientação. Serei eternamente grato por sua total ausência de mesquinhês e até entusiasmo ao me ajudar a escolher meus caminhos futuros.

Ao Prof. Adauto José Ferreira de Souza devo boa parte do meu conhecimento em programação e simulação computacional, passado ao longo de horas de conversa, sempre com extrema paciência. Sou também muito grato pela amizade e pelas cervejas compartilhadas.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Física que contribuíram para minha formação acadêmica, em especial, ao Prof. Ernesto, ao Prof. Sérgio Rezende, ao Prof. Jairo Rolim, ao Prof. Tabosa, ao Prof. Marcelo Gomes e ao Prof. Erivaldo Montarroyos.

Ao Prof. Nazareno Medeiros e à Prof<sup>a</sup>. Ana Tereza, agradeço pelas agradáveis e

esclarecedoras conversas durante as visitas ao nosso laboratório.

Ao Prof. Paulo Roberto e à Viviane, agradeço pelos muitos cafés que tomamos e pela contribuição para expandir meus horizontes no mundo da física. Paulo, quando eu crescer quero ser eficiente que nem você.

Agradeço a meu irmão Carlos Eduardo e todos os nossos amigos: Bruno Garret, Diego Araújo, Eduardo Lúcio, Guilherme Amâncio, Igor Araújo, Rodrigo Juca, Luis Carlos Junior e Nelson Benevides, pelo apoio e confiança, principalmente nos momentos críticos, ao longo de tantos anos de amizade e copos de cerveja. Valeu pessoal.

Aos amigos Andrés Kikuchi e Tiago Uchôa, agradeço pelo companheirismo, pela assessoria financeira e jurídica, respectivamente, e pelas estimulantes partidas de tennis.

Ao meu amigo Leonardo Cavalcanti de Mélo (com acento mesmo) serei eternamente grato pela infindáveis conversas sobre física e coisas menos (ou mais) importantes. Com você, meu amigo, aprendi a ver o mundo a minha volta de formas diferentes.

Aos eternos amigos e colegas Helena Gonçalves, José Augusto, Ana Carolina, Getúlio, Pedro Hugo, José Ferraz, Alexandre Carvalho, Cássia, Laércio Dias, Gerson, Mathias, Patrícia Nóbrega (Zinha), Patrícia Façanha, Maíra, Cibele, Marcelo (Filósofo), Márcio, Felipe Fernando, Felipe Oliveira (Pepe), Daniel Bandeira (Flag), Krishnamurti, Anderson, Luis Leão, Eric Ferreira, Alexandre Barbosa e André Vilela, agradeço pelos momentos compartilhados.

Agradeço às maravilhosas garotas que me presentearam com suas adoráveis companhias, tornando meus dias mais agradáveis. Em especial, às que estiveram ao meu lado por períodos maiores, que vivenciaram comigo momentos maravilhosos e outros nem tanto, que fazem parte do que sou hoje e que sempre terão um lugar especial em minhas memórias. Algumas talvez nem saibam de sua importância, mas o importante mesmo é que eu sei, e não as esquecerei jamais.

Agradeço a todos que se dedicaram e dedicam a manter o Departamento de Física funcionando em perfeitas condições, para que possamos assistir nossas aulas e fazer nossas pesquisas.

Finalmente, agradeço ao CNPq, à CAPES e à UFPE pelo suporte financeiro.

*Love, love, love, love, love, love, love, love, love.*

*There's nothing you can do that can't be done.*

*Nothing you can sing that can't be sung.*

*Nothing you can say but you can learn how to play the game*

*It's easy.*

*There's nothing you can make that can't be made.*

*No one you can save that can't be saved.*

*Nothing you can do but you can learn how to be in time*

*It's easy.*

*All you need is love, all you need is love,*

*All you need is love, love, love is all you need.*

...

—THE BEATLES (All You Need is Love)

## RESUMO

Estudamos o comportamento do modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios de Erdős e Rényi através de simulações Monte Carlo. Um grafo aleatório consiste em um conjunto de  $N$  vértices (sítios) ligados dois a dois com uma probabilidade  $p$ . No limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ) a distribuição de probabilidade de ligações obedece a distribuição de Poisson  $P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ , onde  $\langle k \rangle = p(N - 1) \approx pN$  é a conectividade média do grafo aleatório. No modelo do voto da maioria com ruído, um dado sítio toma o estado oposto à maioria de seus vizinhos com probabilidade  $q$  e o estado da maioria de seus vizinhos com probabilidade  $(1 - q)$ , onde  $q$  é o parâmetro de ruído. Realizamos simulações para diversos valores da conectividade média  $\langle k \rangle$  e diferentes tamanhos do grafo  $N$ . Calculamos a magnetização, a susceptibilidade e o cumulante de quarta ordem de Binder como funções de  $q$ . Observamos que o sistema apresenta uma transição de fase do tipo ordem-desordem em um valor crítico do parâmetro de ruído  $q_c$ , o qual é uma função crescente da conectividade média do grafo aleatório. Os valores do ruído crítico obtidos nas simulações apresentam boa concordância com os valores que obtivemos através da aproximação de campo médio, para valores de  $\langle k \rangle \geq 8$ . Através de uma análise de escala com o tamanho do sistema estimamos os expoentes críticos  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$  e  $1/\nu$  para diversos valores de  $\langle k \rangle$ . Da relação de hiper-escala, obtivemos que a dimensionalidade efetiva do sistema é igual a um para todos os valores de  $\langle k \rangle$ . Analisando a evolução temporal da magnetização no ponto crítico estimamos o valor do expoente crítico dinâmico  $z$ . Por fim, concluímos que o modelo do voto da maioria em grafos aleatórios pertence a uma nova classe de universalidade, diferente das classes de universalidade do modelo em redes regulares e em redes de mundo pequeno.

## ABSTRACT

The majority-vote model with noise on Erdős-Rényi's random graphs has been studied through Monte Carlo simulations. A random graph is a set of  $N$  vertices, where the probability that two of them are connected is equal to  $p$ . In the thermodynamic limit ( $N \rightarrow \infty$ ) the degree distribution is given by the Poisson distribution  $P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ , where  $\langle k \rangle = p(N - 1) \approx pN$  is the average connectivity of the random graph. In the majority-vote model with noise a given site assumes the opposite state of the majority of its neighbors with probability  $q$  and the state of the majority of its neighbors with probability  $(1 - q)$ , where  $q$  is the noise parameter. We performed simulations for several values of the mean connectivity  $\langle k \rangle$  and system sizes  $N$ . We calculated the magnetization, the susceptibility and the Binder's fourth-order cumulant as functions of  $q$ . We observed that the system presents an order-disorder phase transition at a critical value of the noise  $q_c$ , which is an increasing function of the average connectivity. The critical values for the noise obtained from numerical simulations agree with the ones estimated from mean field approximation, for  $\langle k \rangle \geq 8$ . Using finite-size scaling techniques we estimated the critical exponents  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$  e  $1/\nu$  for several values of  $\langle k \rangle$ . From the hyper-scaling relation we obtained that the effective dimensionality of the system equals one for all values of  $\langle k \rangle$ . The dynamical critical exponent  $z$  was calculated from the relaxation of the magnetization at the critical point. From the results we conclude that the majority-vote model with noise on random graphs, on small world networks and on regular lattices, belong to different universality classes.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Redes Complexas</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Grafos Aleatórios . . . . .	5
1.2.1 O Modelo de Erdős e Rényi . . . . .	5
1.2.2 Diâmetro e Distância entre Vértices . . . . .	6
1.2.3 Coeficiente de Agrupamento . . . . .	7
1.2.4 Distribuição de Ligações . . . . .	7
1.2.5 O Componente Gigante . . . . .	9
1.3 Redes de Mundo Pequeno . . . . .	10
1.4 Redes Livres de Escala . . . . .	13
<b>Capítulo 2—Processos Estocásticos e a Equação Mestra</b>	<b>16</b>
2.1 Variáveis Aleatórias . . . . .	16
2.2 Processos Estocásticos . . . . .	17
2.3 Matriz Estocástica . . . . .	19
2.4 A Equação Mestra . . . . .	20
2.5 Valores Médios . . . . .	23
<b>Capítulo 3—O Modelo do Voto da Maioria</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução . . . . .	25
3.2 O Modelo . . . . .	26
3.3 Expoentes Críticos e Efeito de Tamanho Finito . . . . .	28

---

3.4	Aproximação de Campo Médio . . . . .	32
3.5	Resultados Anteriores no Modelo do Voto da Maioria . . . . .	36
<b>Capítulo 4—Resultados</b>		<b>39</b>
4.1	A Simulação . . . . .	39
4.2	Geração de Grafos Aleatórios . . . . .	40
4.3	Comportamento das Grandezas Calculadas . . . . .	42
4.3.1	O Parâmetro de Ordem . . . . .	42
4.3.2	A Susceptibilidade . . . . .	44
4.3.3	O Cumulante de Quarta Ordem de Binder . . . . .	45
4.4	Diagrama de Fases . . . . .	47
4.5	Expoentes Críticos . . . . .	49
4.6	Uma Abordagem Alternativa . . . . .	54
<b>Capítulo 5—Conclusões</b>		<b>58</b>
<b>Apêndice A—Artigo Publicado: Majority-Vote model on random graphs. <i>Physical Review E</i>, 71, 016123, 2005</b>		<b>60</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>65</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Rede de relacionamentos afetivos em uma escola secundária norte americana. Vértices azuis representam garotos e vermelhos representam garotas. A figura é de autoria de Mark E. J. Newman, utilizando dados obtidos por Peter S. Bearman, James Moody e Katherine Stovel . . . . .	2
1.2	Comparação entre a solução exata para a distribuição de ligações de um grafo aleatório, dada pela distribuição binomial, e a solução aproximada, dada pela distribuição de Poisson. Grafos gerados com $N = 170$ vértices e conectividade média $\langle k \rangle = 10$ . . . . .	8
1.3	Subgrafos de ordem $k = 4$ . . . . .	9
1.4	Processo de religação proposto por Watts e Strogatz. A rede passa de uma estrutura regular para uma estrutura aleatória com o aumento da probabilidade de religação $p$ . Entre os extremos temos as redes de mundo pequeno. A figura é do artigo de Watts e Strogatz de 1998. . . . .	11
1.5	Comportamento da distância média entre vértices $l(p)$ e do coeficiente de agrupamento $C(p)$ no modelo de Watts e Strogatz. Observe a escala logarítmica para a variável $p$ . A figura é do artigo de Watts e Strogatz de 1998. . . . .	13
1.6	Comparação entre a distribuição de ligações de redes small-world, geradas de redes quadradas, e a distribuição de Poisson para $\lambda = \langle k \rangle = 4$ . . . . .	14

- 
- 4.1 Distribuição de ligações para os grafos gerados nas simulações. Os símbolos indicam resultados numéricos e as linhas apresentam os valores analíticos, dados pela distribuição de Poisson para o correspondente valor de  $\langle k \rangle$ . As barras de erros são menores que os símbolos. . . . . 41
- 4.2 Fração de sítios na ilha gigante em função da conectividade média. A linha representa a função apresentada no Capítulo 1, enquanto os pontos foram calculados como uma média entre vários grafos gerados em nossas simulações. As barras de erros dos pontos são menores que os símbolos. . 42
- 4.3 Magnetização em função do ruído para  $\langle k \rangle = 6$ . As curvas indicam que o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem. No detalhe a dependência com o tamanho do sistema na região crítica. . . . . 43
- 4.4 Magnetização em função do ruído para  $N = 10000$ . Da esquerda para a direita temos  $\langle k \rangle = 2, 4, 6, 8, 10, 20$  e  $50$ . As curvas indicam que o valor crítico do parâmetro de ruído aumenta com a conectividade média  $\langle k \rangle$ . . 43
- 4.5 Susceptibilidade em função do ruído para  $\langle k \rangle = 6$  e diferentes valores de  $N$ . As curvas são características de um sistema que apresenta uma transição de fase de segunda ordem. O valor de  $q$  onde  $\chi_N$  é máximo é uma função de  $N$ , assim como o valor máximo da susceptibilidade  $\chi_{N_{MAX}}$ . . . . . 44
- 4.6 Susceptibilidade em função do ruído para  $N = 10000$ . Da esquerda para a direita temos  $\langle k \rangle = 2, 4, 6, 8, 10, 20$  e  $50$ . As curvas indicam que o valor crítico do parâmetro de ruído aumenta com a conectividade média do grafo. 45
- 4.7 Cumulante de quarta ordem de Binder em função do ruído para grafos com  $\langle k \rangle = 8$ . No detalhe apresentamos apenas a região próxima ao ponto crítico, e indicamos o valor do ruído onde ocorre a intersecção das curvas. 46
- 4.8 Ajuste linear para o cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica para grafos com  $\langle k \rangle = 8$ . Os pontos foram obtidos nas simulações Monte Carlo. O valor crítico do ruído, onde as linhas se encontram, é  $q_c = 0.2753 \pm 0.0003$ . . . . . 46
-

4.9	Diagrama de Fase do modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios. No limite de validade da aproximação de campo médio os valores de $q_c$ coincidem com os valores obtidos através de simulações Monte Carlo. . . . .	48
4.10	Ajustes lineares para $\ln[M_N(q_c)]$ versus $\ln[N]$ para diferentes valores de $\langle k \rangle$ . O expoente $\beta/\nu$ , obtido do coeficiente angular das retas, apresenta uma leve tendência de crescimento com $\langle k \rangle$ . . . . .	50
4.11	Dependência de $\ln[\chi_N(q_c)]$ com $\ln[N]$ para diversos valores de $\langle k \rangle$ , e respectivos ajustes lineares. Diferentemente de $\beta/\nu$ , o expoente $\gamma/\nu$ tem uma pequena tendência de decrescimento com $\langle k \rangle$ . . . . .	51
4.12	Ajustes lineares para $\ln[\chi_N(q_c)]$ e $\ln[\chi_{N_{MAX}}]$ versus $\ln[N]$ . Os símbolos vazios são para $\langle k \rangle = 3$ e os cheios para $\langle k \rangle = 20$ . As retas possuem o mesmo coeficiente angular para cada valor de $\langle k \rangle$ . . . . .	51
4.13	Dependência de $\ln[ U'_N(q_c) ]$ com $\ln[N]$ para $\langle k \rangle = 3$ e $\langle k \rangle = 7$ . Os coeficientes angulares dos ajustes lineares são os expoentes $1/\nu$ . Diferentemente de $\beta/\nu$ e $\gamma/\nu$ , o expoente $1/\nu$ não apresenta uma tendência de crescimento ou decrescimento com $\langle k \rangle$ . . . . .	52
4.14	Relaxação da magnetização no ponto crítico para $N = 10000$ . Do coeficiente angular dos ajustes obtemos o expoente $\zeta$ . Cada ponto é a média em 1000 grafos distintos. . . . .	54
4.15	Ajustes lineares para $q_c(N)$ em função de $N^{-1/\nu}$ . O coeficiente linear das retas ajustadas fornece uma nova estimativa para $q_c$ , igual à obtida da análise do cumulante de Binder levando em consideração as incertezas associadas. . . . .	55
4.16	Função universal $\widetilde{M}(N^{1/\nu} \varepsilon ) = M_N(q)N^{\beta/\nu}$ para $\langle k \rangle = 14$ . O colapso das curvas corrobora os valores calculados para $q_c$ , $\beta/\nu$ e $1/\nu$ . . . . .	57
4.17	Colapso das curvas $\chi_N(q)N^{-\gamma/\nu} = \widetilde{\chi}(N^{1/\nu}\varepsilon)$ para $\langle k \rangle = 14$ . Indicando a consistência dos valores estimados para $q_c$ , $\gamma/\nu$ e $1/\nu$ . . . . .	57

## LISTA DE TABELAS

3.1	Expoentes críticos estáticos do modelo do voto da maioria com ruído, do modelo de Ising e previstos pela teoria de campo médio. . . . .	37
4.1	Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através da aproximação de campo médio (CM) e de simulações Monte Carlo (MC), para diferentes valores da conectividade média do grafo aleatório. . . . .	47
4.2	Expoentes críticos e dimensão efetiva para o modelo do voto da maioria em grafos aleatórios. Os expoentes $\gamma/\nu$ na terceira e quarta coluna foram obtidos usando $\chi_N(q_c)$ e $\chi_{N_{MAX}}$ , respectivamente. $D$ foi calculado usando os valores de $\gamma/\nu$ da terceira coluna. . . . .	53

# CAPÍTULO 1

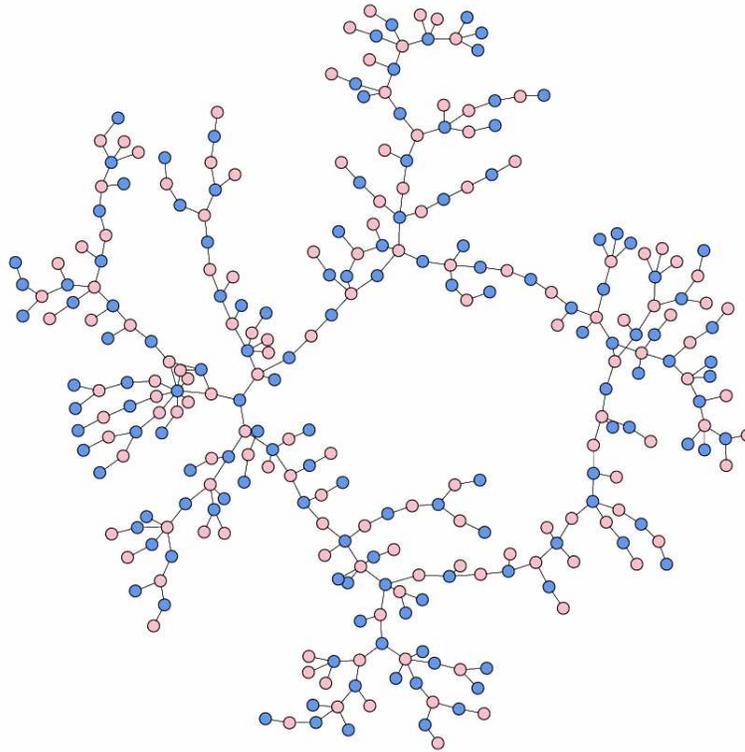
## REDES COMPLEXAS

### 1.1 INTRODUÇÃO

Redes complexas descrevem uma grande variedade de sistemas de bastante interesse científico, tecnológico e intelectual no mundo atual. Por exemplo, a internet é uma rede complexa formada por computadores conectados entre si [1]; redes de interação social são formadas por indivíduos ligados uns aos outros através de relações de trabalho ou lazer, entre outras [2, 3]; a *World Wide Web* é uma rede virtual de páginas conectadas por hyperlinks [4, 5]; moléculas de água formam uma rede, onde estão ligadas por pontes de hidrogênio [6]. Esses são apenas alguns dos muitos exemplos existentes na natureza e no mundo atual que chamaram a atenção da comunidade científica para o estudo dos mecanismos que determinam a topologia e a dinâmica de crescimento das redes complexas.

A Figura 1.1 representa uma rede formada por estudantes de uma escola secundária nos Estados Unidos (um *high school*), os vértices de cor azul representam estudantes do sexo masculino e os de cor vermelha representam estudantes do sexo feminino. Dois estudantes estão conectados se mantiveram algum tipo de relacionamento afetivo (namoro) durante o período de tempo em que estudavam na escola. Na figura podemos observar uma característica marcante das redes complexas: cada vértice possui um número próprio de ligações. Essa é talvez a maior diferença entre redes complexas e redes regulares, uma vez que nas redes regulares todos os vértices possuem exatamente o mesmo número de ligações. A figura representando a rede foi feita por Mark E. J. Newman [7], utilizando os dados obtidos no estudo elaborado por Peter S. Bearman, James Moody e Katherine Stovel [8].

O estudo de redes complexas teve início com métodos da Teoria dos Grafos. Ini-



**Figura 1.1.** Rede de relacionamentos afetivos em uma escola secundária norte americana. Vértices azuis representam garotos e vermelhos representam garotas. A figura é de autoria de Mark E. J. Newman, utilizando dados obtidos por Peter S. Bearman, James Moody e Katherine Stovel

cialmente, a teoria dos grafos era largamente utilizada no estudo de grafos regulares. Após 1950, redes grandes e aparentemente sem um princípio organizacional bem definido passaram a ser tratadas como grafos aleatórios, que são os exemplos mais simples de redes complexas. O estudo dos grafos aleatórios teve início com o trabalho pioneiro dos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi [9, 10], depois que Erdős mostrou que métodos probabilísticos podiam ser utilizados para resolver problemas de teoria de grafos. Durante décadas, desde que foi proposto por Erdős e Rényi, o modelo de grafo aleatório foi o modelo padrão para descrever redes complexas. O crescente interesse por sistemas complexos levou os cientistas a questionar se este modelo era, de fato, o mais apropriado para descrever as redes reais que caracterizam os sistemas complexos presentes na natureza e no mundo atual. Todo sistema complexo apresenta algum tipo de princípio organizacional que, em geral, influencia sua topologia. Estudos recentes indicaram que

a topologia das redes reais difere daquela de um grafo aleatório, levando à comunidade científica a propor novos modelos para descrever, ao menos qualitativamente, a topologia das redes reais.

Recentes desenvolvimentos tecnológicos causaram grande avanço no estudo de redes complexas. A informatização dos processos de aquisição de dados permitiu a construção de grandes bancos de dados com informações sobre a topologia de várias redes reais. O aumento da capacidade de cálculo dos computadores viabilizou o estudo de redes formadas por milhões de sítios, que alguns anos atrás seriam praticamente intratáveis devido ao enorme tempo de cálculo exigido. Outro aspecto relevante nesse processo foi a crescente interação entre pesquisadores de diferentes áreas, permitindo que os mesmos tivessem acesso a dados sobre redes de diversas naturezas.

Impulsionado por esses fatores, vários conceitos e métodos de medição foram propostos e investigados nos últimos anos. Em particular, três conceitos destacam-se no tratamento e estudo de redes complexas.

O conceito de *mundo pequeno* (*small-world*) refere-se ao fato de que a *distância média* entre os sítios da rede é pequena, ou seja, dois sítios quaisquer estão separados por distâncias relativamente pequenas, apesar do grande tamanho das redes. A distância entre dois sítios de uma rede, ou, mais especificamente, a menor distância (*shortest distance*) é definida como o *menor* número de sítios entre eles. O caso mais notório do conceito de mundo pequeno é o trabalho do psicólogo social Stanley Milgram [11]. Milgram entregou uma mensagem a várias pessoas escolhidas aleatoriamente nos Estados Unidos e determinou que cada mensagem chegasse ao destinatário, o alvo, também escolhido aleatoriamente. As pessoas deviam entregar a mensagem a um conhecido que tivesse mais chances de fazê-la chegar ao alvo. Neste trabalho Milgram concluiu que a distância média entre duas pessoas nos Estados Unidos era de seis pessoas, ou seja, em média a mensagem passava por seis pessoas entre a pessoa inicial e o alvo.

Um outro conceito importante é o de *agrupamento* (*clustering*). O agrupamento é uma propriedade comum em redes sociais, representado por círculos de amigos ou conhecidos onde cada um dos membros de um círculo conhece todos os outros membros. Essa

tendência natural de agrupamento pode ser quantificada pelo cálculo do coeficiente de agrupamento [2]. Digamos que um dado sítio da rede, o sítio  $i$ , tenha  $k_i$  ligações com outros sítios da rede. Se todos os  $k_i$  vizinhos do sítio  $i$ , além do próprio sítio, formassem um círculo fechado existiriam  $[k_i(k_i - 1)/2]$  ligações entre eles. O coeficiente de agrupamento do sítio  $i$  é definido como a razão entre o número de ligações que de fato existem entre seus vizinhos,  $E_i$ , e o número de ligações existentes se eles formassem um círculo fechado,  $[k_i(k_i - 1)/2]$ . O coeficiente de agrupamento da rede é definido como a média dos coeficientes de todos os sítios da rede, ou seja

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (1.1)$$

Em geral, cada sítio da rede possui um número próprio de ligações, i.e., de vizinhos. O número de vizinhos de um dado sítio é definido como sendo a conectividade do sítio  $k_i$ . A conectividade dos sítios da rede satisfaz uma distribuição, usualmente denominada a *distribuição de ligações*,  $P(k)$ . Dessa forma, a probabilidade de que um sítio qualquer da rede possua  $k$  ligações é dada por  $P(k)$ .

O estudo de redes reais, tal como a *World Wide Web*, a internet, a rede de colaboração entre atores de cinema, a rede de contatos sexuais entre seres humanos e muitas outras, levou ao surgimento de novos modelos para descrever redes complexas. Atualmente, três modelos são os mais utilizados no estudo de redes complexas. Os grafos aleatórios, derivados do modelo de Erdős e Rényi, ainda são muito utilizados em diversas áreas. O modelo *small-world* representa uma classe de redes caracterizadas pelo alto valor do coeficiente de agrupamento e pela pequena distância entre sítios. Esse modelo simula uma situação intermediária entre as redes regulares, altamente agrupadas, e os grafos aleatórios, que apresentam uma pequena distância entre sítios. Finalmente, devido a descoberta de que muitas redes complexas possuem uma distribuição de ligações do tipo lei de potência, foram propostos vários modelos *livres de escala* (*scale-free*). Estes modelos são particularmente utilizados no estudo da dinâmica de redes, com o objetivo de oferecer uma teoria universal para a evolução de redes.

Nas seções subseqüentes apresentamos os três modelos principais e suas características.

## 1.2 GRAFOS ALEATÓRIOS

Em termos matemáticos uma rede é representada por um grafo, que é um conjunto de  $N$  vértices (sítios ou nodos) e  $n$  ligações (linhas) conectando dois vértices. Uma representação usual para um grafo é um conjunto de pontos, representando os vértices, e linhas representando as ligações entre dois vértices.

A Teoria dos Grafos tem suas origens no século XVIII com o trabalho de Leonhard Euler no estudo de grafos pequenos (pequeno número de vértices) e com alto grau de regularidade. Euler utilizou, em 1736, a teoria dos grafos para resolver o *problema das sete pontes de Königsberg*. No século XX, o estudo da teoria dos grafos passou a fazer uso de métodos estatísticos. Um grafo aleatório é um grafo onde as ligações entre pares de vértices estão distribuídas aleatoriamente. Redes de topologia complexa e com um princípio organizacional desconhecido freqüentemente parecem aleatórias, assim, a teoria dos grafos aleatórios é usada regularmente no estudo de redes complexas.

A teoria dos grafos aleatórios foi desenvolvida inicialmente por Paul Erdős e Alfréd Rényi, depois que Erdős mostrou que métodos probabilísticos podiam ser bastante úteis no tratamento de problemas de teoria de grafos.

### 1.2.1 O Modelo de Erdős e Rényi

No artigo original de 1959 [9], Erdős e Rényi definem um grafo aleatório como um conjunto de  $N$  nodos numerados, conectados por  $n$  ligações escolhidas aleatoriamente entre as  $[N(N-1)/2]$  possíveis ligações entre pares de nodos. No total, existem  $C_{[N(N-1)/2]}^n$  grafos com  $N$  vértices e  $n$  ligações, formando um espaço de probabilidades no qual todos os grafos são equiprováveis.

Uma definição equivalente para um grafo aleatório vem do modelo binomial. Começando com  $N$  vértices, ligamos cada par de vértices com probabilidade  $p$ . Desta forma o número total de ligações é uma variável aleatória com valor esperado igual a  $p[N(N-1)/2]$ . Em

particular, a forma que utilizamos para gerar grafos aleatórios neste trabalho é uma pequena variação desta definição. Começamos com  $N$  vértices e, em cada etapa do processo, sorteamos um par de sítios. Se o par de sítios não está ligado passa a estar, se já está sorteamos outro par que não esteja ligado. O processo continua até que o grafo tenha  $p[N(N-1)/2]$  ligações. Utilizamos esse método em nossas simulações porque ele exige menos tempo computacional uma vez que não precisamos verificar todas as  $[N(N-1)/2]$  possíveis ligações do grafo.

Num grafo aleatório cada vértice  $i$  possui um determinado número de ligações  $k_i$ . O número médio de ligações por sítio, ou a conectividade média  $\langle k \rangle$  do grafo, é dado por

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{1}{N} 2 \frac{p[N(N-1)]}{2} = p(N-1) \approx pN, \quad (1.2)$$

onde a aproximação final é válida para  $N$  muito grande, ou seja,  $N \rightarrow \infty$ . De fato, tomaremos como verdadeira, no restante deste trabalho, a igualdade  $p(N-1) = pN$ .

### 1.2.2 Diâmetro e Distância entre Vértices

O diâmetro de um grafo é a distância máxima entre um par de vértices do grafo. Muitos estudos já foram feitos sobre o diâmetro dos grafos aleatórios (veja, por exemplo, a Referência [12]). A conclusão geral desses estudos é que, para quase todos os valores da probabilidade  $p$ , todos os grafos aleatórios com os mesmos valores de  $N$  e de  $p$  possuem o mesmo diâmetro, dado por

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(pN)} = \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (1.3)$$

A distância média entre dois vértices quaisquer de um grafo aleatório também é uma função do número de vértices  $N$  e da conectividade média  $\langle k \rangle$  do grafo aleatório. De fato, a distância média entre vértices escala com essas quantidades da mesma forma que o diâmetro do grafo

$$l \sim \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Coeficiente de Agrupamento

O número de ligações que de fato existem entre os  $k_i$  vizinhos de um vértice  $i$  é dado pelo produto  $p[k_i(k_i - 1)]/2$ . Assim, de acordo com a definição do coeficiente de agrupamento (1.1), temos que o coeficiente de agrupamento de um grafo aleatório é

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p[k_i(k_i - 1)]/2}{[k_i(k_i - 1)]/2} \quad (1.5)$$

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (1.6)$$

De fato, a probabilidade de que dois vizinhos de um vértice estejam ligados entre si é igual à probabilidade de que dois vértices quaisquer do grafo estejam ligados entre si.

### 1.2.4 Distribuição de Ligações

O estudo da conectividade máxima e mínima de um grafo aleatório foi feito por Erdős e Rényi em 1959 [9], e a distribuição de probabilidade de ligações foi obtida por completo alguns anos mais tarde por Bollobás [13].

A probabilidade de que um vértice qualquer de um grafo aleatório tenha  $k$  ligações (e também vizinhos) é dada pela distribuição binomial

$$P(k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (1.7)$$

Esta probabilidade representa o número de arranjos em que  $k$  ligações podem ser feitas a partir de um dado vértice: a probabilidade de que ele tenha  $k$  ligações é  $p^k$ , a probabilidade de que não existam outras ligações é  $(1-p)^{N-1-k}$  e existem  $C_{N-1}^k$  possíveis formas de fazer as  $k$  ligações.

Para pequenos valores de  $p$  ( $p \ll 1$ ) e grandes valores de  $N$  ( $N \gg k$ ), a distribuição binomial pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson. Utilizando a fórmula de Stirling ( $\ln N! \approx N \ln N - N$ ) podemos mostrar que  $C_{N-1}^k \approx N^k/k!$ , e mais, utilizando a aproximação  $\ln(1-p) \approx -p$ , obtemos  $(1-p)^{N-1-k} \approx e^{-pN}$ . Substituindo estas

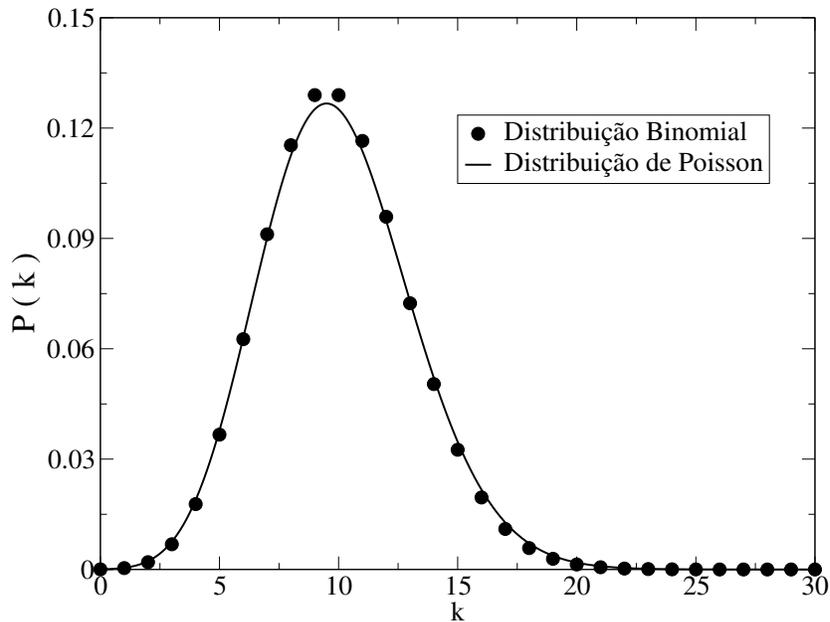
aproximações em (1.7) temos

$$P(k) \approx \frac{N^k}{k!} p^k e^{-pN}, \quad (1.8)$$

$$P(k) \approx \frac{(pN)^k}{k!} e^{-pN}, \quad (1.9)$$

$$P(k) \approx \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}, \quad (1.10)$$

o que mostra que  $P(k)$  é aproximadamente uma distribuição de Poisson com média  $\lambda = pN = \langle k \rangle$ .



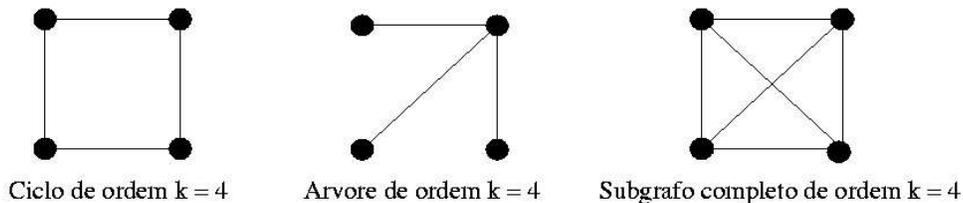
**Figura 1.2.** Comparação entre a solução exata para a distribuição de ligações de um grafo aleatório, dada pela distribuição binomial, e a solução aproximada, dada pela distribuição de Poisson. Grafos gerados com  $N = 170$  vértices e conectividade média  $\langle k \rangle = 10$ .

Na Figura 1.2, apresentamos uma comparação entre a solução exata para a distribuição de ligações de um grafo aleatório, dada pela distribuição binomial, e a solução aproximada, obtida da distribuição de Poisson. A pequena diferença entre as duas soluções, observada na figura, é uma consequência do pequeno número de vértices nos grafos ( $N = 170$ ), uma vez que  $P(k)$  pode ser aproximada pela distribuição de Poisson apenas para grandes valores de  $N$  e pequenos valores de  $p$ . Os grafos gerados nas simulações realizadas durante o desenvolvimento deste trabalho possuíam no mínimo 1000

vértices, logo, dentro do limite de validade da aproximação para a distribuição de ligações.

### 1.2.5 O Componente Gigante

Tomando  $N$  vértices e conectando dois a dois com probabilidade  $p$  começamos a gerar ilhas (subgrafos, *clusters*) desconexos entre si. Os exemplos mais simples de subgrafos são *ciclos*, *árvores* e *subgrafos completos*. Um ciclo de ordem  $k$  ocorre quando  $k$  vértices estão ligados entre si de forma que dois vértices consecutivos estão ligados apenas entre si, i.e., não possuem outras ligações. Por exemplo, os vértices de um triângulo formam um ciclo de ordem três e os de um quadrado de ordem quatro. Uma árvore de ordem  $k$  é um conjunto de  $k$  vértices, conectados entre si por  $(k - 1)$  ligações, de forma que nenhum de seus subgrafos é um ciclo. Um subgrafo completo de ordem  $k$  contém  $k$  vértices e todas as possíveis  $[k(k - 1)/2]$  ligações, ou seja, é um conjunto de vértices completamente conectado. Na Figura 1.3 estão ilustrados três tipos de subgrafos de ordem  $k = 4$ .



**Figura 1.3.** Subgrafos de ordem  $k = 4$ .

Em um grafo aleatório com  $0 < \langle k \rangle < 1$ , todas as ilhas são árvores ou contêm exatamente um ciclo. A maior ilha contida no grafo é uma árvore de tamanho proporcional a  $\ln N$ .

Existe um valor crítico para a conectividade média do grafo,  $\langle k \rangle = \langle k \rangle_c = 1$ , onde a estrutura do grafo se altera abruptamente. Neste valor de  $\langle k \rangle$  a maior ilha do grafo (a ilha ou componente gigante) deixa de ser uma árvore e passa a ser uma grande estrutura complexa. Para  $\langle k \rangle > 1$  a ilha gigante contém a maioria dos vértices do grafo, e os que não pertencem a esta estrutura formam pequenas árvores desconexas entre si. A

medida que  $\langle k \rangle$  aumenta ainda mais, afastando-se do valor crítico, as pequenas árvores são absorvidas pela ilha gigante, de forma que todos os vértices do grafo passam a fazer parte do componente gigante.

O tamanho da maior ilha pode ser calculado analiticamente como uma função da conectividade média do grafo no limite  $N \rightarrow \infty$  [10, 14, 15]. A fração de vértices na maior ilha é dada por,

$$G(\langle k \rangle) = 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (\langle k \rangle e^{-\langle k \rangle})^n. \quad (1.11)$$

A equação (1.11) pode ser invertida [14], ficando na forma

$$\langle k(G) \rangle = -\frac{1}{G} \ln(1 - G), \quad (1.12)$$

da qual podemos calcular o valor de  $\langle k \rangle$  que resultará em um grafo cuja ilha gigante contenha  $GN$  vértices do grafo. Em particular o limite  $G \rightarrow 0$  na equação (1.12) resulta em  $\langle k \rangle = \langle k_c \rangle = 1$ .

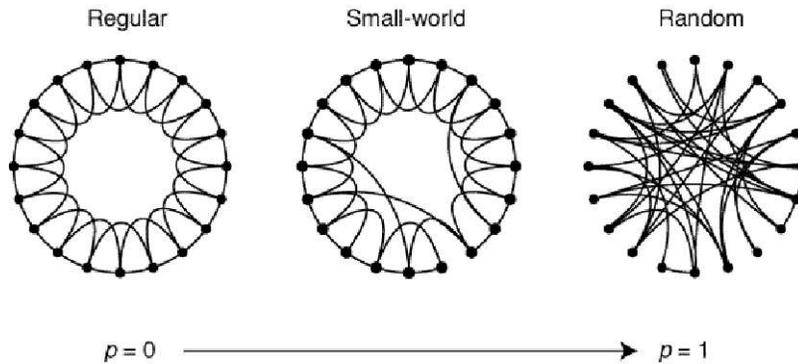
### 1.3 REDES DE MUNDO PEQUENO

A análise de dados obtidos do estudo de redes reais demonstrou que muitas dessas redes possuem uma topologia intermediária entre configurações totalmente regulares e totalmente aleatórias. Para modelar tais redes D. J. Watts e S. H. Strogatz propuseram um modelo de redes de mundo pequeno (*small-world networks*) [2, 16].

O processo de criação de uma rede small-world (*rewiring ou religação*) proposto por Watts e Strogatz (modelo WS) é o seguinte:

- Tome uma rede regular com  $N$  vértices e  $k$  ligações por vértice,
- Escolha aleatoriamente um dos vértices e uma de suas ligações,
- Com probabilidade  $p$  a ligação sorteada é transferida para um outro vértice escolhido aleatoriamente.

O parâmetro  $p$  é a *probabilidade de religação*.



**Figura 1.4.** Processo de religação proposto por Watts e Strogatz. A rede passa de uma estrutura regular para uma estrutura aleatória com o aumento da probabilidade de religação  $p$ . Entre os extremos temos as redes de mundo pequeno. A figura é do artigo de Watts e Strogatz de 1998.

No artigo original [2], Watts e Strogatz ilustram o processo para uma cadeia linear com  $N = 20$  vértices, onde cada vértice possui  $k = 4$  ligações. Se o valor da probabilidade de reconexão for zero,  $p = 0$ , a rede não ganha nenhuma ligação de longo alcance e permanece como uma rede regular. Se  $p = 1$ , todas as ligações de curto alcance são substituídas por ligações de longo alcance e a rede aproxima-se ao máximo de um grafo aleatório. Quando  $0 < p < 1$ , tem-se uma fração  $p$  de ligações de longo alcance e a topologia da rede é um meio termo entre uma rede regular e um grafo aleatório. A Figura 1.4 representa o processo de religação e a transição de uma rede regular para uma rede aleatória, passando pelo regime small-world. O processo de criação de uma rede small-world a partir de uma rede regular proposto por Watts e Strogatz não altera o número total de ligações, nem a conectividade média da rede, uma vez que o processo de religação altera apenas o sítio final da ligação.

Existem variações do modelo WS, entre elas, uma das mais estudadas foi proposta por Newman e Watts [17, 18], na qual ligações entre vértices escolhidos aleatoriamente são adicionadas à rede regular sem que ligações existentes sejam retiradas. Neste caso, nem o número total de ligações, nem o número de ligações por vértice, permanece o mesmo da rede regular original. A análise do modelo de Newman e Watts é um pouco mais simples, visto que não causa o aparecimento de ilhas isoladas como o modelo WS. Para

valores suficientemente pequenos de  $p$  e grandes de  $N$  o modelo de Newman e Watts é equivalente ao modelo WS.

A distância média entre vértices e o coeficiente de agrupamento são funções da probabilidade de religação da rede  $p$ , ou seja,  $l(p)$  e  $C(p)$ . Watts e Strogatz observaram que o comportamento destas funções é bastante robusto, apresentando variações semelhantes para diversos tipos de redes regulares. No limite  $p \rightarrow 0$ , temos

$$l(0) \sim N/k \quad e \quad C(0) \approx 3/4, \quad (1.13)$$

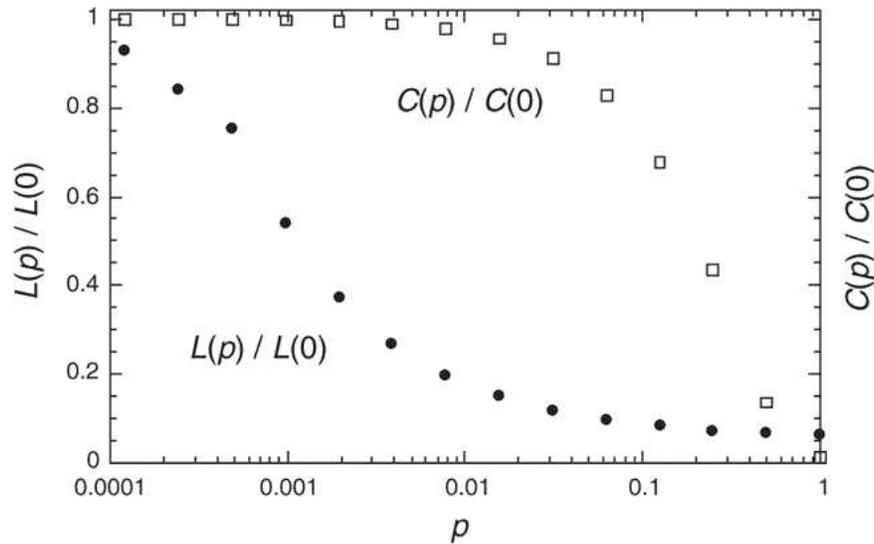
enquanto no limite  $p \rightarrow 1$

$$l(1) \sim \ln(N)/\ln(k) \quad e \quad C(1) \sim k/N. \quad (1.14)$$

Quando a probabilidade de religação é muito pequena a rede comporta-se como uma rede regular, com a distância média aumentando com o número de vértices  $N$  e um alto coeficiente de agrupamento. Na situação em que a rede se aproxima de um grafo aleatório, a distância entre os vértices escala com o logaritmo de  $N$ , como é esperado para um grafo aleatório, e a rede torna-se muito menos agrupada. Dos casos limites  $p \rightarrow 0$  e  $p \rightarrow 1$  vemos que em algum valor de  $p$  ocorre uma transição e as grandezas  $l(p)$  e  $C(p)$  mudam do comportamento característico de uma rede regular para o de grafo aleatório. Na verdade estudos posteriores indicam que o valor de  $p$  onde essas grandezas mudam de comportamento é uma função do tamanho da rede  $N$ .

A Figura 1.5 apresenta as alterações nos valores da distância média entre sítios e do coeficiente de agrupamento quando aumentamos a probabilidade de religação. A distância média entre vértices diminui rapidamente com o aumento do valor de  $p$  devido à introdução de ligações diretas entre vértices anteriormente distantes. No entanto o coeficiente de agrupamento permanece quase que inalterado por praticamente duas décadas de valores de  $p$ , aproximando-se do valor para grafos aleatórios apenas para grandes valores de  $p$ .

No modelo WS com  $p = 0$  temos uma rede regular onde cada vértice da rede tem

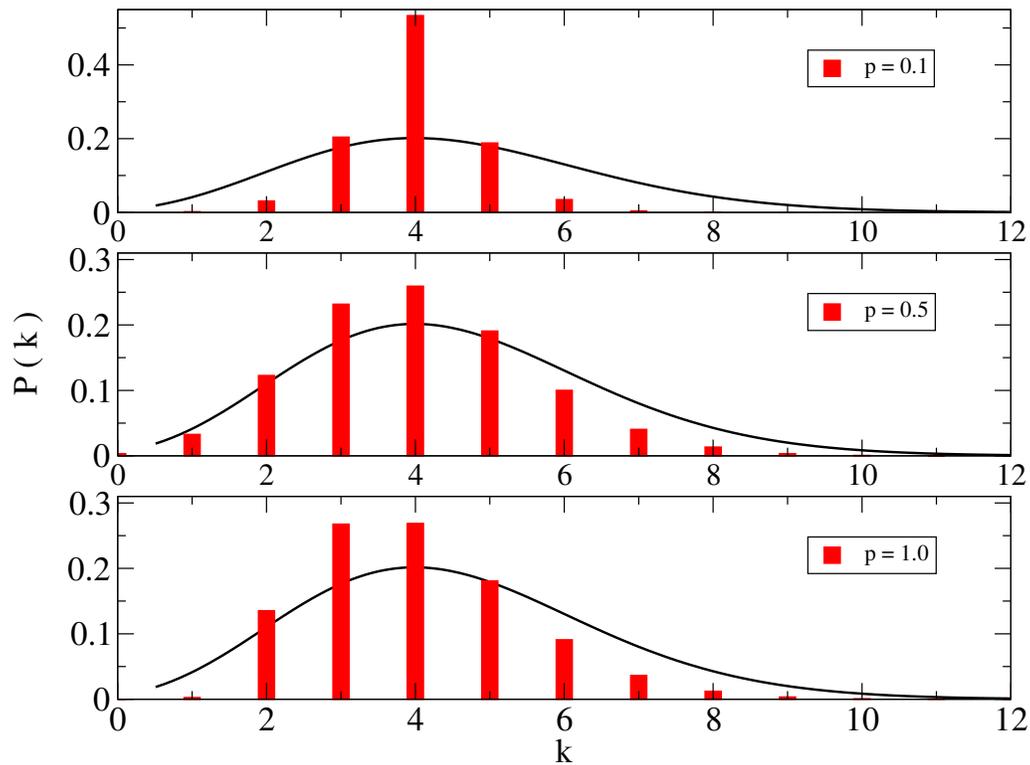


**Figura 1.5.** Comportamento da distância média entre vértices  $l(p)$  e do coeficiente de agrupamento  $C(p)$  no modelo de Watts e Strogatz. Observe a escala logarítmica para a variável  $p$ . A figura é do artigo de Watts e Strogatz de 1998.

$k = \langle k \rangle$  ligações. Logo, a distribuição de ligações é uma função delta centrada em  $\langle k \rangle$ ,  $P(k) = \delta(k - \langle k \rangle)$ . Para valores não nulos de  $p$  o processo de religação retira ligações de alguns vértices adicionando-as a outros, provocando um alargamento da distribuição  $P(k)$  em torno de  $\langle k \rangle$ . A forma da distribuição de ligações de uma rede small-world é semelhante à de um grafo aleatório, possuindo um máximo em  $k = \langle k \rangle$  e decaindo exponencialmente para valores de  $k$  maiores que  $\langle k \rangle$ , como mostrado na Figura 1.6. A linha contínua é a distribuição de Poisson, com média  $\lambda = \langle k \rangle = 4$  [Equação (1.10)].

## 1.4 REDES LIVRES DE ESCALA

A análise de redes reais mostrou que várias delas são do tipo livre de escala (*scale-free networks*), ou seja, possuem uma distribuição de ligações do tipo lei de potência. Albert-László Barabási e Réka Albert [4] foram os primeiros a estudar as origens deste tipo de distribuição de ligações para redes complexas reais e propor possíveis explicações para este comportamento. A primeira causa provável seria que os modelos de redes discutidos até agora assumem que a rede inicia e permanece com o número fixo de vértices  $N$  que são conectados aleatoriamente ou religados. Na verdade, a maioria das redes reais são *sis-*



**Figura 1.6.** Comparação entre a distribuição de ligações de redes small-world, geradas de redes quadradas, e a distribuição de Poisson para  $\lambda = \langle k \rangle = 4$ .

*temas abertos*, onde novos vértices são adicionados a cada instante de tempo. A segunda causa provável seria que, nos modelos anteriores, a probabilidade de que dois vértices estejam ligados é independente do número de ligações que cada um deles possui. Grande parte das redes reais possui a propriedade de *ligação preferencial*, o que significa que a probabilidade de que um novo vértice se conecte a outro já existente depende do número de ligações que este vértice possui. Um exemplo bastante claro dessa ligação preferencial em uma rede real é o caso da rede de citações de artigos científicos. A probabilidade de que um novo artigo cite um artigo já muito conhecido, e conseqüentemente muito citado, é muito maior do que a probabilidade de que ele cite um artigo menos conhecido (menos citado).

Com base nessas duas características principais, foi proposto o modelo Barabási-Albert para redes com distribuição de ligações do tipo lei de potência. O algoritmo do modelo Barabási-Albert é o seguinte:

- **Crescimento:** Começando com  $m_0$  vértices, adicione a cada instante um novo vértice com  $m$  ( $\leq m_0$ ) ligações conectando o novo vértice com  $m$  vértices diferentes presentes na rede.
- **Ligação Preferencial:** Para determinar com quais vértices o novo vértice irá se conectar, consideramos que a probabilidade de que ele se conecte com o vértice  $i$  é dada por

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (1.15)$$

onde  $k_i$  é o número de ligações do vértice  $i$  e o somatório é igual ao número total de ligações distintas que existe na rede.

Após  $t$  instantes de tempo esse algoritmo gera um rede com  $N = t + m_0$  vértices e  $mt$  ligações.

Resultados de simulações numéricas mostram que a distância média  $l$  entre vértices em uma rede de Barabási-Albert é menor do que em um grafo aleatório com os mesmos valores de  $N$  e  $\langle k \rangle$  [19]. Resultados analíticos recentes [20] mostram que  $l$  escala com  $N$  de acordo com

$$l \sim \frac{\ln(N)}{\ln[\ln(N)]}. \quad (1.16)$$

Resultados numéricos [19] mostram que uma rede de Barabási-Albert possui um coeficiente de agrupamento aproximadamente cinco vezes maior que o de um grafo aleatório com os mesmos  $N$  e  $\langle k \rangle$ , e que  $C \sim N^{-0.75}$  na rede Barabási-Albert, enquanto em um grafo aleatório  $C \sim N^{-1}$  e em uma rede small-world  $C$  é independente de  $N$ .

Por fim, resultados analíticos [4, 19] mostram que a distribuição de ligações de uma rede Barabási-Albert é da forma

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (1.17)$$

Em particular, para o algoritmo descrito acima temos  $\gamma = 3$ , independente do valor de  $m$  que é o único parâmetro do modelo.

## CAPÍTULO 2

# PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E A EQUAÇÃO MESTRA

Neste capítulo seguimos de perto o desenvolvimento feito por Tomé e Oliveira ao longo de diversos capítulos de *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* [21]. Nosso objetivo é a obtenção da equação mestra que será utilizada, no contexto da aproximação de campo médio, para determinar a magnetização do modelo do voto da maioria.

### 2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Se uma moeda é atirada para cima e é deixada cair no chão, ao fim de algum tempo um dos lados da moeda estará voltado para cima resultando em "cara" ou "coroa". Sabemos que um dos lados estará para cima, mas não podemos afirmar com certeza qual deles será. Se repetimos este experimento muitas vezes, seja jogando a mesma moeda várias vezes ou jogando várias moedas ao mesmo tempo, iremos verificar que aproximadamente metade dos experimentos resulta em "cara" e o restante em "coroa". O resultado de um desses lançamentos da moeda é uma *variável aleatória*. Uma variável aleatória discreta é uma variável que pode assumir qualquer valor de um conjunto de valores discretos previamente determinados, mas que não sabemos a princípio qual deles.

Seja  $x$  uma variável aleatória discreta e  $P_x$  a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $x$ . A condição de normalização é expressa por

$$\sum_i P_{x_i} = 1, \quad (2.1)$$

onde a soma inclui o conjunto de valores inteiros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  da variável  $x$ .

Um exemplo particular de variável aleatória que utilizamos neste trabalho é o número de vizinhos de um dado sítio de um grafo aleatório. No limite termodinâmico, i.e., quando o número de sítios do grafo aleatório é muito grande ( $N \rightarrow \infty$ ), a probabilidade de que um determinado sítio esteja conectado a  $k$  outros sítios é dada por

$$P_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2.2)$$

onde  $\langle k \rangle$  é o número médio de vizinhos no grafo aleatório. É possível verificar que a distribuição de Poisson (2.2) obedece a condição de normalização

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = e^{-\langle k \rangle} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} e^{\langle k \rangle} = 1, \quad (2.3)$$

onde a soma inclui todos os possíveis valores inteiros da variável aleatória  $k$ .

## 2.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Digamos que uma determinada variável aleatória  $x$  dependa de um parâmetro  $t$ . Se esse parâmetro  $t$  representa um dado instante de tempo, então a variável aleatória  $x(t)$  é chamada de *variável estocástica* e seu processo evolutivo de *processo estocástico*. Para analisar um processo estocástico geral, vamos supor que a variável pode assumir apenas valores inteiros, e o tempo, valores inteiros positivos ou zero. Um processo estocástico é definido até o instante  $l$  pela distribuição de probabilidades conjunta

$$P_l(x_0, x_1, x_2, \dots, x_l) \quad (2.4)$$

de que  $x$  tome o valor  $x_0$  no instante  $t = 0$ , o valor  $x_1$  no instante  $t = 1$ , ..., e o valor  $x_l$  no instante  $t = l$ .

A probabilidade de que a variável estocástica  $x$  assuma o valor  $x_{l+1}$  no instante  $t = l + 1$ , tendo assumido o valor  $x_0$  no instante  $t = 0$ , o valor  $x_1$  no instante  $t = 1$ , ..., e o

valor  $x_l$  no instante  $t = l$  é dada pela probabilidade condicional

$$P_{l+1}(x_{l+1}|x_0, x_1, x_2, \dots, x_l). \quad (2.5)$$

Se esta probabilidade é igual à probabilidade condicional de que a variável estocástica  $x$  assumo o valor  $x_{l+1}$  no instante  $t = l + 1$  tendo assumido o valor  $x_l$  no instante  $t = l$ , independente dos valores  $x_0, x_1, \dots, x_{l-1}$ ; ou seja

$$P_{l+1}(x_{l+1}|x_0, x_1, x_2, \dots, x_l) = P_{l+1}(x_{l+1}|x_l) \quad (2.6)$$

então o processo estocástico de evolução da variável  $x$  é um *processo markoviano*. Esta denominação é em homenagem ao matemático russo Andrey Andreyevich Markov, que apresentou os primeiros resultados do estudo deste tipo de processo estocástico em 1906 [22, 23]. Um processo markoviano é um processo estocástico em que a probabilidade condicional da variável tomar um determinado valor num dado instante, digamos  $x_{l+1}$ , depende somente do seu valor  $x_l$  no instante anterior. A igualdade entre as probabilidades (2.6) é conhecida como propriedade de Markov.

Utilizando a propriedade de Markov podemos escrever a probabilidade conjunta (2.4) na seguinte forma:

$$P_l(x_0, x_1, x_2, \dots, x_l) = P_l(x_l|x_{l-1}) \dots P_1(x_1|x_0) P_0(x_0). \quad (2.7)$$

Assim, o processo markoviano é completamente definido pelas probabilidades condicionais (2.6) e pela probabilidade inicial  $P_0(x_0)$ .

A probabilidade de que variável estocástica  $x$  assumo o valor  $x_l$  no instante  $t = l$ , independentemente dos valores que ela tenha assumido anteriormente é dada por:

$$P_l(x_l) = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{l-1}} P_l(x_0, x_1, x_2, \dots, x_l), \quad (2.8)$$

onde a soma estende-se sobre todos os valores possíveis de  $x_0, x_1, \dots, x_{l-1}$ . Usando a

equação (2.6) obtemos a seguinte relação de recorrência para  $P_l(x_l)$

$$P_l(x_l) = \sum_{x_{l-1}} P_l(x_l|x_{l-1})P_{l-1}(x_{l-1}), \quad (2.9)$$

onde a soma estende-se sobre todos os possíveis caminhos entre  $x_{l-1}$  e  $x_l$ .

A probabilidade condicional  $P_{l+1}(x_{l+1}|x_l)$  é interpretada fisicamente como sendo a probabilidade de transição do estado  $x_l$  para o estado  $x_{l+1}$ . Observe que, em princípio, a probabilidade de transição entre dois estados quaisquer pode variar com o instante de tempo considerado. Vamos nos deter a discutir apenas processos markovianos cujas probabilidades de transição não variam com o tempo. Logo, vamos escrever:

$$P_{l+1}(x_{l+1}|x_l) = P(x_{l+1}|x_l) = T(x_{l+1}, x_l). \quad (2.10)$$

Assim, a Equação (2.9) fica escrita na forma:

$$P(x_l) = \sum_{x_{l-1}} T(x_l, x_{l-1})P(x_{l-1}). \quad (2.11)$$

## 2.3 MATRIZ ESTOCÁSTICA

Na seção anterior, vimos que um processo estocástico markoviano fica completamente definido uma vez que conheçamos a probabilidade de transição entre os estados e a probabilidade inicial. Podemos escrever a Equação (2.11) de uma forma mais simplificada

$$P(n) = \sum_m T(n, m)P(m), \quad (2.12)$$

onde  $T(n, m)$  é um elemento de uma matriz  $T$ , a *matriz estocástica*. Cada elemento desta matriz representa a probabilidade de transição do estado  $m$  para o estado  $n$ .

Como consequência de sua definição, os elementos da matriz estocástica  $T$  devem ser positivos ou nulos,

$$T(n, m) \geq 0, \quad (2.13)$$

e mais, a probabilidade de transição de um estado  $m$  para qualquer outro estado  $n$  deve ser normalizada, logo

$$\sum_n T(n, m) = 1. \quad (2.14)$$

Definindo a matriz coluna  $P_l$ , cujos elementos são  $P_l(n)$ , podemos escrever a Equação (2.12) na forma de uma equação matricial

$$P_l = TP_{l-1}. \quad (2.15)$$

Assim, conhecendo a matriz coluna  $P_0$  num dado instante podemos obter  $P_l$ , após  $l$  passos,

$$P_l = T^l P_0. \quad (2.16)$$

Portanto, para determinar  $P_l(n)$  precisamos apenas calcular a  $l$ -ésima potência da matriz estocástica  $T$ . Podemos ainda escrever esta equação na forma

$$P_l(n) = \sum_m T^l(n, m) P_0(m), \quad (2.17)$$

onde o elemento de matriz  $T^l(n, m)$  é a probabilidade de transição do estado  $m$  para o estado  $n$ , em  $l$  passos.

## 2.4 A EQUAÇÃO MESTRA

Suponha que um determinado processo estocástico markoviano seja definido pela matriz  $T$ . Suponha ainda, que as transições entre dois estados quaisquer ocorram em um dado intervalo de tempo  $\tau$  e que os elementos da matriz estocástica sejam dados por

$$T(m, n) = \tau W(m, n), \quad m \neq n, \quad (2.18)$$

$$T(n, n) = 1 - \tau \Omega(n). \quad (2.19)$$

Lembrando que os elementos de matriz  $T(m, n)$  representam a probabilidade de transição do estado  $n$  para o estado  $m$ , temos

$$\sum_m T(m, n) = 1, \quad (2.20)$$

onde o somatório é sobre todos os valores possíveis de  $m$ . Substituindo as Equações (2.18) e (2.19), na expressão acima, temos

$$\sum_{m \neq n} \tau W(m, n) + [1 - \tau \Omega(n)] = 1, \quad (2.21)$$

$$\Omega(n) = \sum_{m \neq n} W(m, n). \quad (2.22)$$

A probabilidade do sistema estar no estado  $n$  no instante de tempo  $t + \tau$  é dada pela probabilidade dele ir de um estado  $m$  para o estado  $n$  mais a probabilidade dele estar no estado  $n$  e permanecer no mesmo, assim

$$P(n, t + \tau) = \sum_{m \neq n} T(n, m)P(m, t) + T(n, n)P(n, t), \quad (2.23)$$

queremos agora estudar a evolução temporal desta probabilidade. Usando

$$T(n, m) = \tau W(n, m), \quad n \neq m, \quad (2.24)$$

$$T(n, n) = 1 - \tau \Omega(n), \quad (2.25)$$

obtemos

$$P(n, t + \tau) = \sum_{m \neq n} \tau W(n, m)P(m, t) + P(n, t) - \tau \Omega(n)P(n, t). \quad (2.26)$$

Podemos rearranjar os termos e escrever

$$\frac{P(n, t + \tau) - P(n, t)}{\tau} = \sum_{m \neq n} W(n, m)P(m, t) - \Omega(n)P(n, t). \quad (2.27)$$

No limite  $\tau \rightarrow 0$ , o lado esquerdo da equação é a derivada temporal da probabilidade  $P(n, t)$ , ou seja, ficamos com

$$\frac{d}{dt}P(n, t) = \sum_{m \neq n} W(n, m)P(m, t) - \Omega(n)P(n, t). \quad (2.28)$$

Finalmente, usando a Equação (2.22), obtemos

$$\frac{d}{dt}P(n, t) = \sum_{m \neq n} \{W(n, m)P(m, t) - W(m, n)P(n, t)\}, \quad (2.29)$$

que é a *Equação Mestra*. Observe que de acordo com a definição (2.18),  $W(n, m)$  é a probabilidade de transição do estado  $m$  para o estado  $n$  por unidade de tempo, isto é, a taxa de transição de  $m$  para  $n$ . As probabilidades  $W(n, m)$  são os elementos da *matriz de evolução* do sistema.

Vamos considerar um sistema com  $N$  partículas constituintes (sítios), onde a cada constituinte está associada uma variável estocástica que pode assumir apenas dois valores distintos (por exemplo  $+1$  e  $-1$ ). Nesse caso a matriz de evolução,  $W$ , possui dimensão  $2^N \times 2^N$ . O estado de um sítio  $i$  é denotado por  $\sigma_i$ , e o estado de todo o sistema é representado por  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ .

A equação mestra para esse sistema fica então escrita na forma

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{\sigma' \neq \sigma} \{W(\sigma, \sigma')P(\sigma', t) - W(\sigma', \sigma)P(\sigma, t)\} \quad (2.30)$$

Os elementos da diagonal da matriz de evolução não aparecem na equação mestra, podemos então defini-los de acordo com nossa conveniência. Definimos os elementos da diagonal de forma que

$$\sum_{\sigma'} W(\sigma, \sigma') = 0. \quad (2.31)$$

Assim, os elementos fora da diagonal da matriz de evolução  $W(\sigma, \sigma')$  e os elementos da

diagonal  $W(\sigma, \sigma)$  estão relacionados por

$$W(\sigma, \sigma) = - \sum_{\sigma' \neq \sigma} W(\sigma, \sigma'). \quad (2.32)$$

Substituindo na Equação (2.30), ficamos com

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{\sigma'} W(\sigma, \sigma')P(\sigma', t), \quad (2.33)$$

onde, agora, a soma em  $\sigma'$  é irrestrita.

Para simplificar, trataremos somente casos em que as transições se dão entre estados que diferem entre si apenas pelo estado de um único sítio, de maneira que escrevemos

$$W(\sigma', \sigma) = \sum_i \delta(\sigma'_1, \sigma_1)\delta(\sigma'_2, \sigma_2)\dots\delta(\sigma'_i, -\sigma_i)\dots\delta(\sigma'_N, \sigma_N)\omega_i(\sigma), \quad (2.34)$$

onde  $\delta(i, j)$  é o delta de Kronecker. O termo  $\omega_i(\sigma)$  é a taxa de inversão do estado do  $i$ -ésimo sítio de  $\sigma_i$  para  $-\sigma_i$ . Finalmente, a equação mestra se escreve

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N \{\omega_i(\sigma^i)P(\sigma^i, t) - \omega_i(\sigma)P(\sigma, t)\}, \quad (2.35)$$

onde o estado  $\sigma^i$  é obtido do estado  $\sigma$  trocando o estado do  $i$ -ésimo sítio,  $\sigma_i$  por  $-\sigma_i$ .

## 2.5 VALORES MÉDIOS

A evolução temporal da média de uma função de estado  $f(\sigma)$  é definida como

$$\langle f(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} f(\sigma)P(\sigma, t). \quad (2.36)$$

Multiplicando por  $f(\sigma)$  os dois lados da equação mestra (2.35) e somando em todos os estados do sistema  $\sigma$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}\langle f(\sigma) \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \{f(\sigma^i) - f(\sigma)\} \omega_i(\sigma) \rangle. \quad (2.37)$$

Em particular, a evolução temporal do valor médio do estado de um sítio  $\langle \sigma_i \rangle$  é dada por

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_i \rangle = -2\langle \sigma_i \omega_i(\sigma) \rangle. \quad (2.38)$$

A Equação (2.38) será utilizada na aproximação de campo médio apresentada no Capítulo 3, na Seção 3.4.

## CAPÍTULO 3

# O MODELO DO VOTO DA MAIORIA

### 3.1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, têm sido propostos e estudados diversos modelos estatísticos para sistemas magnéticos. Talvez o mais conhecido seja o modelo de Ising, seguido de vários outros como o modelo de Heisenberg, o modelo XY e o modelo de Potts. Existem ainda modelos que podem, também, ser utilizados no tratamento de sistemas sociais como o modelo do votante e sua variação, o modelo do votante majoritário.

Estes modelos estatísticos podem ser divididos em duas categorias distintas: os microscopicamente reversíveis e os microscopicamente irreversíveis. Nos modelos reversíveis a dinâmica é controlada por um hamiltoniano que modela a interação entre os constituintes do sistema, ou seja, a transição entre dois estados depende da energia envolvida neste processo e da energia que o sistema possui. Ao contrário, os modelos irreversíveis não admitem uma descrição em termos de um hamiltoniano e a evolução dinâmica é determinada por uma probabilidade de transição entre os possíveis estados do sistema.

Para sistemas reversíveis os estados estacionários são estados de equilíbrio termodinâmico. Assim, a probabilidade do sistema percorrer uma determinada sequência de estados microscópicos na ordem direta é igual à probabilidade do sistema percorrer a mesma sequência na ordem inversa. Uma vez que essas probabilidades são iguais, diz-se que os sistemas reversíveis obedecem a condição do balanceamento detalhado. Nos sistemas irreversíveis, a probabilidade do sistema percorrer uma sequência de estados microscópicos na ordem direta é diferente da probabilidade do mesmo percorrer a sequência na ordem inversa. Sistemas irreversíveis são aqueles que não obedecem à condição do balanceamento detalhado, além disso, os estados estacionários de um sistema irreversível

não são estados de equilíbrio termodinâmico.

### 3.2 O MODELO

O *modelo do voto da maioria*, ou *modelo do votante majoritário*, é um dos modelos estocásticos irreversíveis mais simples que apresenta um ponto crítico, isto é, sofre uma transição de fase. O modelo é definido em uma rede, onde a cada sítio (vértice) da rede está associada uma variável estocástica (*spin*) que pode assumir apenas os valores  $\sigma_i = \pm 1$ .

Imagine um grupo de indivíduos no qual cada indivíduo possui uma opinião própria sobre um determinado assunto: *favorável* ou *contrário* ao tópico. Com o passar do tempo, devido à interação com indivíduos próximos (vizinhos), os indivíduos vão mudando de opinião. Um indivíduo passa a ser a favor ou contra se a maioria dos seus vizinhos for favorável ou contrário ao tópico, respectivamente. No entanto, existem indivíduos que às vezes agem contrariamente à opinião da maioria dos indivíduos de sua vizinhança. Para representar essa situação de um indivíduo ser contrário à maioria dos seus vizinhos, foi introduzido [24, 21] um parâmetro positivo  $q$  que corresponde à probabilidade de um sítio assumir um estado contrário ao da maioria de seus vizinhos. O parâmetro  $q$  é usualmente chamado de *parâmetro de ruído*.

A dinâmica do modelo do voto da maioria é governada pela equação mestra (2.35), com a taxa de inversão de um sítio  $i$  dada por

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - 2q)\sigma_i S \left( \sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_\delta \right) \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $S(x) = -1, 0, 1$  se  $x < 0, x = 0$  e  $x > 0$ , respectivamente, e a soma se estende sobre todos os  $k_i$  primeiros vizinhos do sítio  $i$ . Observe que a equação (3.1) é invariante sob a inversão de todos os sítios da rede, isto é, a transformação  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ . De fato, o modelo possui simetria de inversão, se alteramos o estado de todos os sítios da rede temos um estado completamente equivalente ao anterior.

Considere o modelo do voto da maioria definido em uma rede. Começando em um

estado desordenado, onde aproximadamente metade dos sítios aponta em uma direção e a outra metade na direção contrária, escolhemos um sítio aleatoriamente e invertemos seu estado com a probabilidade (3.1). Após a repetição deste procedimento várias vezes, o sistema estará em um dos dois possíveis estados, dependendo do valor de  $q$ :

- i) Para  $q = 0$ , todos os sítios estão no mesmo estado,  $+1$  ou  $-1$ . Para  $0 < q < q_c$ , a maioria dos sítios está num dos estados  $+1$  ou  $-1$ , o restante no estado contrário. Quando o sistema encontra-se no estado onde há uma predominância de spins em um dos estados ( $+1$  ou  $-1$ ), dizemos que o sistema está na fase ferromagnética.
- ii) Para  $q \geq q_c$ , metade dos sítios está em um estado e a outra metade no estado contrário. O sistema encontra-se na fase paramagnética.

O modelo do voto da maioria é um análogo irreversível do modelo de Ising ferromagnético na ausência de campo magnético externo, com o parâmetro de ruído  $q$  fazendo o papel da temperatura de equilíbrio do sistema  $T$ . Logo, o valor crítico do parâmetro de ruído  $q_c$  corresponde à temperatura crítica  $T_c$  (temperatura de Curie) de um material ferromagnético.

Para analisar o comportamento do sistema como um todo vamos calcular algumas quantidades que dependem do estado do sistema e, portanto, do parâmetro  $q$ . A primeira quantidade de interesse é o *parâmetro de ordem do sistema*. Fazendo uso da analogia com o modelo de Ising, a *magnetização* do modelo do voto da maioria é definida como

$$M = \langle m \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i \right| \right\rangle, \quad (3.2)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa a média em um ensemble de estados do sistema. Consideramos o módulo do somatório dos spins, uma vez que o modelo possui simetria de inversão, e os estados com magnetizações de sinais contrários ocorrem com a mesma probabilidade.

A segunda grandeza calculada é a variância do parâmetro de ordem do sistema, que também fornece informações importantes a respeito do estado do sistema. Seguindo a

analogia, a *susceptibilidade* do modelo do voto da maioria é

$$\chi = N\langle\{m - \langle m \rangle\}^2\rangle = N\{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2\}. \quad (3.3)$$

Por fim, calculamos também o cumulante de quarta ordem de Binder [25], definido como

$$U = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3\langle m^2 \rangle^2}. \quad (3.4)$$

Como vimos anteriormente, na fase ferromagnética ( $q < q_c$ ) o número de spins no estado  $\sigma = +1$  é diferente do número de spins no estado  $\sigma = -1$ , de forma que o parâmetro de ordem do sistema, a magnetização, possui um valor não nulo  $M = M(q)$ . Na fase paramagnética ( $q \geq q_c$ ), o número de spins em cada estado é, em média, o mesmo, logo a magnetização do sistema é nula.

Esta mudança no valor do parâmetro de ordem do sistema caracteriza uma transição de fase do tipo ordem-desordem. O sistema vai do estado ferromagnético (ordenado) para o estado paramagnético (desordenado), devido ao aumento do valor do parâmetro de ruído  $q$ .

### 3.3 EXPOENTES CRÍTICOS E EFEITO DE TAMANHO FINITO

Os expoentes críticos foram definidos para estudar o comportamento singular das funções termodinâmicas na transição de fase (veja por exemplo [26, 27]). A maior importância dos expoentes críticos vem do fato de que sistemas aparentemente muito diferentes possuem os mesmos expoentes críticos. Uma *classe de universalidade* é definida por um conjunto de valores de expoentes críticos, de forma que, sistemas que apresentam os mesmos expoentes críticos pertencem a uma mesma classe de universalidade.

No caso do modelo do voto da maioria com ruído, podemos definir um parâmetro adimensional

$$\varepsilon \equiv q - q_c, \quad (3.5)$$

que é uma medida da distância ao ponto crítico. Assim, o expoente crítico associado a

uma função termodinâmica  $f(\varepsilon)$  é definido como

$$\lambda \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |f(\varepsilon)|}{\ln |\varepsilon|}, \quad (3.6)$$

assumindo que o limite existe. A forma mais usual de explicitar a relação da função com o expoente crítico associado é

$$f(\varepsilon) \sim |\varepsilon|^\lambda, \quad (3.7)$$

lembrando que esta relação só é válida no limite  $|\varepsilon| \rightarrow 0$ , ou seja, quando o sistema encontra-se suficientemente próximo do ponto crítico.

Dessa forma, o comportamento do parâmetro de ordem (magnetização) é dado por

$$M \sim |\varepsilon|^\beta. \quad (3.8)$$

Enquanto a susceptibilidade no ponto crítico diverge de acordo com

$$\chi \sim |\varepsilon|^{-\gamma}. \quad (3.9)$$

O comprimento de correlação do sistema, que também diverge na transição de fase, é dado por

$$\xi \sim |\varepsilon|^{-\nu}. \quad (3.10)$$

Para sistemas finitos, as funções termodinâmicas apresentam uma dependência com o tamanho do sistema. Esta dependência é uma consequência da divergência do comprimento de correlação estar limitada pelo tamanho finito do sistema. Logo, na região crítica

$$\xi \sim N \sim |\varepsilon|^{-\nu}, \quad (3.11)$$

de forma que

$$|\varepsilon| \sim N^{-1/\nu}. \quad (3.12)$$

Explicitando a dependência de  $|\varepsilon|$  com  $N$  para a magnetização (Equação (3.8)) e para

a susceptibilidade [Equação (3.9)], obtemos as relações:

$$M_N \sim N^{-\beta/\nu}, \quad (3.13)$$

$$\chi_N \sim N^{\gamma/\nu}. \quad (3.14)$$

As razões  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$  determinam a dependência da magnetização e da susceptibilidade com o tamanho do sistema próximo ao ponto crítico. Determinando o valor da magnetização e da susceptibilidade no ponto crítico para sistemas de diferentes tamanhos, podemos utilizar as Equações (3.13) e (3.14) para estimar os expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ .

O cumulante de quarta ordem de Binder é definido de forma que o expoente crítico associado é igual a zero [25],  $U \sim N^0$ . Assim, em  $|\varepsilon| = 0$  o valor do cumulante é independente do tamanho do sistema tratado

$$U_N(q = q_c) = U(q = q_c) = U^*. \quad (3.15)$$

Utilizamos esta propriedade do cumulante de Binder na obtenção do valor do parâmetro crítico no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), ou seja, para um sistema de tamanho infinito. O valor de  $q_c$  é o valor de  $q$  onde as curvas  $U_N$  se encontram.

De forma mais rigorosa, pode ser mostrado que no limite  $|\varepsilon| \rightarrow 0$  [24]

$$M_N(q) = N^{-\beta/\nu} \widetilde{M}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (3.16)$$

$$\chi_N(q) = N^{\gamma/\nu} \widetilde{\chi}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (3.17)$$

$$U_N(q) = \widetilde{U}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (3.18)$$

onde  $\widetilde{M}(x)$ ,  $\widetilde{\chi}(x)$  e  $\widetilde{U}(x)$  são funções universais de escala. Das relações acima, é possível obter uma relação entre os expoentes críticos  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ ,

$$2\frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} = D, \quad (3.19)$$

onde  $D$  é a dimensão efetiva do sistema. A Equação (3.19) é conhecida como relação de hiper-escala.

Existe ainda um expoente associado ao tempo de relaxação do sistema no ponto crítico, isto é, o tempo que o sistema leva para ir de um estado completamente ordenado ao estado completamente desordenado. Em  $q = q_c$  temos a relação de escala

$$\tau \sim \xi^z \sim N^z, \quad (3.20)$$

onde o expoente  $z$  é chamado *expoente crítico dinâmico*. A dependência temporal da magnetização no ponto crítico é dada por

$$M_N \sim t^{-\zeta}, \quad (3.21)$$

onde, usando as Equações (3.16) e (3.20), obtemos para o expoente  $\zeta$  a relação

$$\zeta = \frac{\beta}{\nu z}. \quad (3.22)$$

Para sistemas de tamanho finito a susceptibilidade não diverge, mas em um certo valor do parâmetro de ruído, seu valor atinge um máximo. Este valor máximo da susceptibilidade,  $\chi_{N_{MAX}}$ , também exhibe uma dependência com o tamanho do sistema, e o expoente associado é o mesmo de  $\chi_N(q)$ ,

$$\chi_{N_{MAX}} \sim N^{\gamma/\nu}. \quad (3.23)$$

As Equações (3.17) e (3.23) fornecem duas formas independentes de calcular o expoente crítico  $\gamma/\nu$ , logo, a utilização das duas relações permite uma verificação da consistência dos valores estimados para  $\gamma/\nu$ .

O valor do parâmetro de ruído onde a susceptibilidade atinge seu valor máximo,  $q_c(N)$ , é uma função do tamanho do sistema e do valor do ruído crítico no limite termodinâmico

$$q_c(N) = q_c + bN^{-1/\nu}, \quad (3.24)$$

onde  $b$  é uma constante.

Utilizamos ainda uma forma de obter o expoente  $1/\nu$  independentemente dos outros expoentes e do valor de  $q_c$ . Calculando a derivada do cumulante de Binder [Equação (3.18)] em relação ao ruído na região crítica temos

$$\frac{dU_N(q)}{dq} = N^{1/\nu} \frac{d\tilde{U}(N^{1/\nu}\varepsilon)}{dq}. \quad (3.25)$$

Logo, em  $q = q_c$  ( $\varepsilon = 0$ ) o valor da derivada do cumulante em relação ao parâmetro de ruído escala com o tamanho do sistema, de acordo com

$$U'_N(q_c) = N^{1/\nu} \tilde{U}'(0). \quad (3.26)$$

Conhecendo  $q_c(N)$  e  $1/\nu$  podemos utilizar a Equação (3.24) para obter uma outra estimativa para os valores de  $q_c$  no limite termodinâmico.

### 3.4 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

É possível obter uma solução aproximada para o parâmetro de ordem em função do ruído para o modelo do voto da maioria em grafos aleatórios, utilizando a aproximação de campo médio. Da expressão para o parâmetro de ordem, podemos estimar o valor crítico do parâmetro de ruído em uma rede com conectividade média igual a  $\langle k \rangle$ .

Utilizando a equação para a evolução temporal do valor médio do spin de um sítio (2.38)

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = -2 \langle \sigma_i \omega_i(\sigma) \rangle, \quad (3.27)$$

e a probabilidade de inversão de um sítio (3.1)

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - 2q) \sigma_i S \left( \sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_\delta \right) \right\}, \quad (3.28)$$

podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = -\langle \sigma_i \rangle + \langle \phi S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) \rangle, \quad (3.29)$$

onde utilizamos  $\sigma_i^2 = 1$ , definimos  $\phi = 1 - 2q$ , e os termos  $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_i}$  representam os estados dos vizinhos do sítio  $i$ .

Podemos escrever a função  $S(\sum_{\delta} \sigma_{\delta})$  como uma expansão de produtos de  $\sigma_{\delta}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) &= a_1(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) + a_2(\sigma_1\sigma_2 + \dots + \sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i}) + \\ &\quad a_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \dots + \sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i}) + \\ &\quad a_4(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \dots + \sigma_{k_{i-3}}\sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i}) + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Escolhendo valores para o estado de cada um dos sítios, ou seja, fazendo  $\sigma_1 = \pm 1, \dots, \sigma_{k_i} = \pm 1$ , e calculando o valor correspondente de  $S(\sum_{\delta} \sigma_{\delta})$  para cada conjunto de valores escolhido, obtemos um sistema de equações lineares que pode ser resolvido para fornecer os valores dos coeficientes  $a_j$  da expansão. Devido à simetria de inversão do modelo do voto da maioria, os coeficientes de ordem par,  $a_2, a_4, a_6, \dots$ , são nulos, logo a expansão fica escrita como

$$\begin{aligned} S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) &= a_1(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) + a_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \dots + \sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i}) + \\ &\quad a_5(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 + \dots + \sigma_{k_{i-4}}\sigma_{k_{i-3}}\sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i}) + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo a expansão para  $S(\sum_{\delta} \sigma_{\delta})$  na Equação (3.29), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \sigma_i \rangle &= -\langle \sigma_i \rangle + \phi\{a_1(\langle \sigma_1 \rangle + \dots + \langle \sigma_{k_i} \rangle) + \\ &\quad a_3(\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle + \dots + \langle \sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i} \rangle) + \\ &\quad a_5(\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 \rangle + \dots + \langle \sigma_{k_{i-4}}\sigma_{k_{i-3}}\sigma_{k_{i-2}}\sigma_{k_{i-1}}\sigma_{k_i} \rangle) + \dots\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Lembrando que a aproximação de campo médio não depende da geometria da rede [26], mas apenas do número de ligações de cada sítio, vamos considerar que todos os sítios da rede possuem o mesmo número de vizinhos, igual ao número médio de vizinhos do grafo aleatório, ou seja,  $k_i = \langle k \rangle$ . Na verdade, essa consideração reduz o grafo aleatório a uma rede com coordenação igual a  $\langle k \rangle$ .

Na aproximação de campo médio, a equação para a evolução temporal do parâmetro de ordem se reduz a

$$\frac{d}{dt}m = -m + \phi\{a_1 C_{\langle k \rangle}^1 m + a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^3 + a_5 C_{\langle k \rangle}^5 m^5 + \dots\}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{dt}m = -(1 - \phi a_1 C_{\langle k \rangle}^1)m + \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^3 + \phi a_5 C_{\langle k \rangle}^5 m^5 + \dots, \quad (3.34)$$

onde

$$C_{\langle k \rangle}^j = \frac{\langle k \rangle!}{(\langle k \rangle - j)!j!}. \quad (3.35)$$

Aqui usamos a aproximação

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \dots \langle \sigma_n \rangle, \quad (3.36)$$

e o princípio de invariância translacional, de modo que  $\langle \sigma_i \rangle = m$ , para todos os sítios da rede.

Desprezando termos de ordem maior que  $m^3$  na Equação (3.34) e escrevendo  $\epsilon = 1 - \phi a_1 C_{\langle k \rangle}^1$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}m = -\epsilon m + \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^3. \quad (3.37)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $m$ , ficamos com

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}m^2 = -\epsilon m^2 + \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^4, \quad (3.38)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem para a variável  $y = m^2$ . Para resolvê-la, escrevemos a equação como

$$\frac{dy}{2y(\epsilon - y\phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3)} = -dt. \quad (3.39)$$

Integrando ambos os lados da equação e utilizando as condições iniciais  $t = 0$  e

$y(0) = y_0 = m^2(0) = m_0^2$ , obtemos

$$\ln \left[ \frac{y/y_0}{(\epsilon - \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 y)/(\epsilon - \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 y_0)} \right] = -2\epsilon t. \quad (3.40)$$

Fazendo a substituição inversa  $y = m^2$ ,  $y_0 = m_0^2$  e reagrupando os termos, obtemos

$$m^2 = \frac{m_0^2 \epsilon}{(\epsilon - \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m_0^2) e^{2\epsilon t} + m_0^2 \phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3}. \quad (3.41)$$

Estamos interessados nas soluções no regime estacionário, isto é, no limite  $t \rightarrow \infty$ . Existem então duas soluções possíveis, dependendo do valor de  $\epsilon$ . Para  $\epsilon > 0$  a solução é

$$m = 0, \quad (3.42)$$

que corresponde à fase paramagnética (desordenada) do modelo.

A solução para  $\epsilon < 0$  é

$$m = \sqrt{\frac{|\epsilon|}{\phi a_3 C_{\langle k \rangle}^3}}, \quad (3.43)$$

a qual corresponde à fase ferromagnética (ordenada) do modelo. Finalmente, podemos agora obter uma expressão para o valor do ruído  $q_c$  onde a magnetização se anula, fazendo  $m = 0$  em (3.43)

$$m = 0 \Rightarrow |\epsilon| = 0, \quad (3.44)$$

lembrando que  $\epsilon = 1 - \phi a_1 C_{\langle k \rangle}^1$ , onde  $\phi = 1 - 2q$ ; e que  $C_{\langle k \rangle}^1 = \langle k \rangle$ , obtemos

$$q_c = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{a_1 \langle k \rangle} \right). \quad (3.45)$$

Calculamos o valor de  $q_c$  no intervalo  $2 \leq \langle k \rangle \leq 20$ . Observamos que os coeficientes  $a_1$ , obtidos da solução de (3.31), são da mesma ordem de grandeza,  $10^{-1}$ , enquanto a conectividade média variou de uma ordem de grandeza. Desta forma, concluímos que  $q_c$  é uma função crescente da conectividade média e possui um limitante superior, uma vez

que para  $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ , obtemos

$$q_c = \frac{1}{2}, \quad (3.46)$$

desde que o coeficiente  $a_1$  seja finito. Este é o valor máximo para  $q$  permitido pela definição do modelo [24].

Os valores do parâmetro de ruído crítico obtidos através da Equação (3.45) serão apresentados no Capítulo 4, Seção 4.4, onde fazemos uma comparação com os valores obtidos através de simulações Monte Carlo.

### 3.5 RESULTADOS ANTERIORES NO MODELO DO VOTO DA MAIORIA

O primeiro estudo do modelo do voto da maioria com ruído foi realizado por de Oliveira [24]. Neste trabalho, são apresentados os resultados obtidos através de simulações Monte Carlo para o modelo definido em uma rede regular bidimensional (rede quadrada). O valor crítico do parâmetro de ruído obtido por de Oliveira é  $q_c = 0.075 \pm 0.001$ , e os valores estimados para os expoentes críticos são  $\beta/\nu = 0.125 \pm 0.005$ ,  $\gamma/\nu = 1.73 \pm 0.05$  e  $1/\nu = 1.01 \pm 0.05$ . Os valores exatos para o modelo de Ising em duas dimensões foram calculados por Onsager [28], e são  $\beta/\nu = 1/8$ ,  $\gamma/\nu = 7/8$  e  $1/\nu = 1$ . Do trabalho de Oliveira podemos concluir que o modelo do voto da maioria com ruído, definido em uma rede quadrada pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional. Este resultado está de acordo com a conjectura proposta por Grinstein, Jayaparakash e He [29], ou seja, que modelos de não equilíbrio com simetria de inversão pertencem à mesma classe de universalidade do modelo de Ising, ambos definidos em redes regulares.

Santos e Teixeira [30] estudaram o efeito de uma anisotropia na probabilidade de inversão, sobre o comportamento crítico do modelo do voto da maioria. Com uma probabilidade  $x$ , a probabilidade de inversão de um spin depende de apenas dois de seus vizinhos (versão unidimensional), e com probabilidade  $(1 - x)$ , tem-se a versão bidimensional do modelo. Os resultados de Santos e Teixeira mostram que a introdução da anisotropia não altera a classe de universalidade do modelo.

O efeito de ligações de longo alcance sobre o comportamento crítico do modelo de

Ising foi estudado por diversos autores [31, 32, 33, 34], que consideraram o modelo em redes small-world geradas a partir de redes regulares unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Os resultados desses trabalhos mostram que a temperatura crítica  $T_c$  é uma função crescente da probabilidade de religação  $p$ , até mesmo para redes unidimensionais. Gitterman [31], Pekalski [33] e Herrero [34] mostram que o comportamento crítico do sistema muda da classe de universalidade do respectivo modelo de Ising (bidimensional ou tridimensional), em  $p = 0$ , para a classe de universalidade de campo médio, para qualquer valor de  $p > 0$ .

**Tabela 3.1.** Expoentes críticos estáticos do modelo do voto da maioria com ruído, do modelo de Ising e previstos pela teoria de campo médio.

	$\beta/\nu$	$\gamma/\nu$	$1/\nu$	$D$	Referência
Voto da Maioria	$0.125 \pm 0.005$	$1.73 \pm 0.05$	$1.01 \pm 0.05$	2	de Oliveira [24]
	$0.125 \pm 0.005$	–	1	2	Silva e Moreira [35]
Ising	0.125	1.75	1	2	Onsager [28]
Campo Médio	1	2	2	4	

O modelo do voto da maioria em redes small-world foi estudado por Campos e co-autores [36]. As redes small-world foram geradas fazendo a religação da rede quadrada de acordo com o modelo de Watts e Strogatz [2]. O valor crítico do parâmetro de ruído obtido nas simulações é uma função crescente da probabilidade de religação  $p$ . Os resultados indicam que a inclusão de ligações de longo alcance altera o comportamento crítico do sistema. Para  $p = 0$  os expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$  são os mesmos do modelo em uma rede quadrada, enquanto que para  $0 < p < 1$  o sistema apresenta um comportamento crítico cuja classe de universalidade difere da classe de universalidade do modelo de Ising e de campo médio. Utilizando a relação de hiper-escala, os autores estimam que a dimensionalidade efetiva da rede é  $D = 2$ , que é igual à dimensão da rede regular a partir da qual a rede small-world foi gerada.

Também foram realizados estudos de espalhamento de dano no modelo do voto da maioria com ruído na rede quadrada e em redes small-world. O comportamento do dano em função do parâmetro de ruído apresenta uma transição entre as fases caótica

e congelada em um valor crítico do ruído. No estudo na rede regular, Silva e Moreira [35] concluíram que os expoentes estáticos são os mesmos do modelo de Ising, enquanto que o expoente dinâmico  $z$  é muito menor do que os obtidos usando as dinâmicas usuais de Metropolis [37], de Glauber e do banho térmico [38, 39]. Medeiros e co-autores [40] realizaram um estudo de espalhamento de dano no modelo do voto da maioria em redes small-world geradas a partir da rede quadrada. O diagrama de fases resultante indica que o valor crítico do ruído é uma função crescente da probabilidade de religação  $p$ . Para qualquer valor de  $p > 0$ ,  $1/\nu = 2$ , enquanto que os expoentes  $\beta/\nu$  e  $z$  variam com  $p$ .

Recentemente publicamos um artigo [41] sobre o modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios. Um estudo mais detalhado deste trabalho será apresentado no capítulo seguinte.

### 4.1 A SIMULAÇÃO

Com o objetivo de verificar a existência de uma transição de fase no modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios, desenvolvemos simulações Monte Carlo e calculamos os valores médios do parâmetro de ordem (magnetização), da variância do parâmetro de ordem (susceptibilidade) e do cumulante de quarta ordem de Binder. Para cada valor da conectividade média  $\langle k \rangle$  utilizamos cinco tamanhos de rede e calculamos os valores médios destas grandezas em um intervalo de valores do parâmetro de ruído  $q$ .

As simulações são iniciadas com o sistema no estado completamente ordenado, ou seja, todos os spins no estado  $\sigma = +1$ . Para um dado valor de  $q$ , iniciamos a simulação, esperamos um determinado número de passos Monte Carlo (*Monte Carlo Steps*, MCS) para que o sistema atinja o estado estacionário (tempo de relaxação) e então calculamos os valores médios das grandezas de interesse. Em nossas simulações, um MCS é definido como  $N$  tentativas de inversão de spin. Repetimos o procedimento para o mesmo grafo um determinado número de vezes (número de amostras) e depois calculamos o valor médio das grandezas nos estados estacionários. Por fim, geramos novos grafos e calculamos as médias para os diferentes grafos.

Os valores médios das grandezas calculadas podem ser expressos na forma

$$M_N(q) = \langle \langle m \rangle_T \rangle_G = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i \right| \right\rangle_T \right\rangle_G, \quad (4.1)$$

$$\chi_N(q) = N \left[ \langle \langle m^2 \rangle_T \rangle_G - \langle \langle m \rangle_T \rangle_G^2 \right], \quad (4.2)$$

$$U_N(q) = 1 - \frac{\langle \langle m^4 \rangle_T \rangle_G}{3 \langle \langle m^2 \rangle_T \rangle_G^2}, \quad (4.3)$$

onde  $\langle \dots \rangle_T$  denota médias temporais no estado estacionário e  $\langle \dots \rangle_G$  representa médias em diferentes grafos. Em nossas simulações utilizamos 10 amostras para cada grafo e 10 grafos diferentes para cada conjunto de valores de  $q$ ,  $N$  e  $\langle k \rangle$ . Para sistemas de tamanho  $N = 1000$ , 1750 e 2500 desprezamos os primeiros 8000 MCS e as médias foram calculadas nos 4000 MCS seguintes. Em sistemas com  $N = 5000$  e 10000, esperamos 10000 MCS para o sistema atingir o estado estacionário e calculamos as médias nos 4000 MCS seguintes.

Como apresentado no Capítulo 1, para pequenos valores de  $\langle k \rangle$ , o grafo é formado por uma ilha gigante e algumas ilhas isoladas. As ilhas isoladas são excluídas da dinâmica do sistema, uma vez que sua evolução temporal é independente da evolução do componente gigante. A identificação das ilhas foi feita utilizando o algoritmo de rotulação de ilhas proposto por Hoshen e Kopelman [42], utilizado inicialmente para aplicações em problemas de percolação, e que permite uma grande minimização do tempo necessário para rotular toda a rede, isto é, saber a que ilha cada sítio da rede pertence.

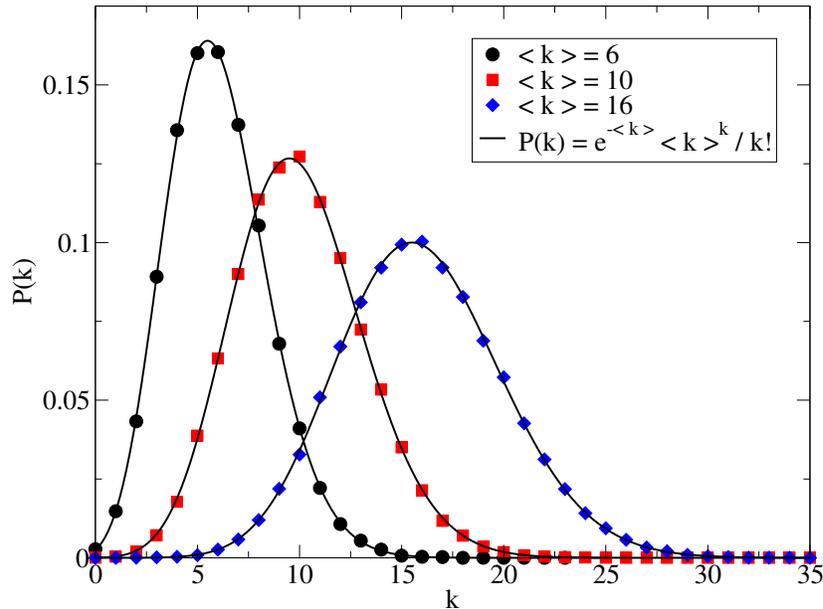
## 4.2 GERAÇÃO DE GRAFOS ALEATÓRIOS

O primeiro procedimento na realização das simulações é gerar no computador um grafo aleatório que possua as mesmas características de um grafo aleatório de Erdős e Rényi. Os parâmetros para a geração dos grafos aleatórios são o número de vértices  $N$  e a conectividade média  $\langle k \rangle$ . Os grafos gerados devem possuir uma distribuição de ligações muito próxima da distribuição de Poisson.

O procedimento que utilizamos para a geração de grafos aleatórios é uma pequena variação do proposto por Erdős e Rényi, conforme apresentamos na Seção 1.2.1. Com o objetivo de diminuir o tempo de geração dos grafos, introduzimos aleatoriamente as  $pN(N-1)/2$  ligações existentes sem a necessidade de verificar todas as possíveis  $N(N-1)/2$  ligações entre sítios.

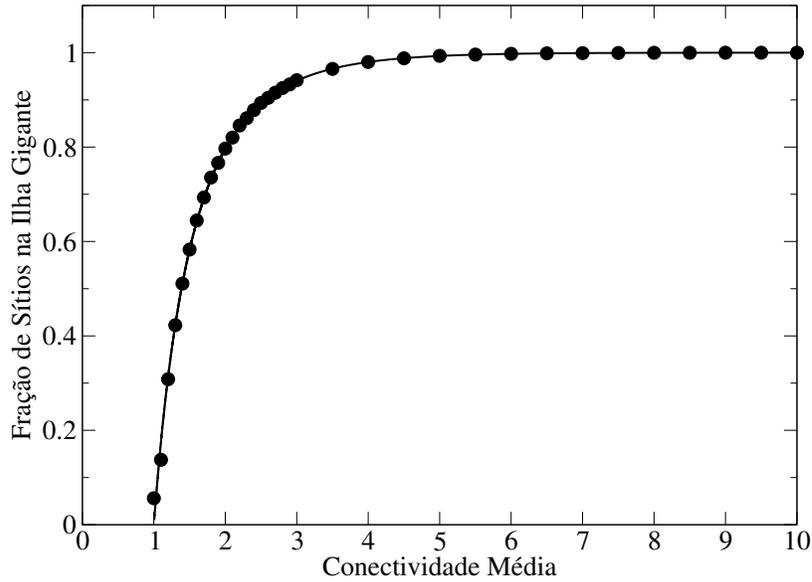
A Figura 4.1 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para a distribuição de ligações. Os dados numéricos foram obtidos considerando-se os valores médios entre 10 grafos aleatórios distintos, de tamanho  $N = 5000$ , onde utilizamos três

valores distintos para a conectividade média do grafo,  $\langle k \rangle = 6, 10$  e  $16$ . A figura indica que os grafos aleatórios gerados em nossas simulações possuem uma distribuição de ligações muito próxima da distribuição de Poisson.



**Figura 4.1.** Distribuição de ligações para os grafos gerados nas simulações. Os símbolos indicam resultados numéricos e as linhas apresentam os valores analíticos, dados pela distribuição de Poisson para o correspondente valor de  $\langle k \rangle$ . As barras de erros são menores que os símbolos.

Para cada grafo gerado em nossas simulações podemos também calcular o número de vértices na maior ilha, comparando-o com o valor dado pela equação (1.12). Na Figura 4.2, a linha representa o valor analítico para a fração de sítios na maior ilha de um grafo aleatório, a função  $G(\langle k \rangle)$ , e os pontos são os valores calculados nos grafos aleatórios gerados em nossas simulações. Cada ponto foi calculado como o valor médio em 20 grafos distintos de tamanho  $N = 5000$ . Para  $\langle k \rangle = 6$ , aproximadamente 99,8% dos sítios pertencem ao componente gigante do grafo.



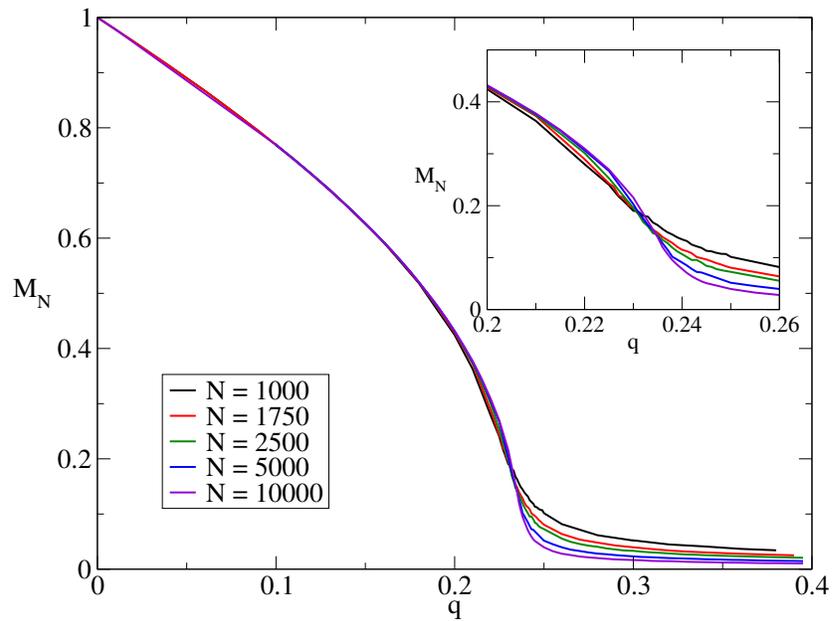
**Figura 4.2.** Fração de sítios na ilha gigante em função da conectividade média. A linha representa a função apresentada no Capítulo 1, enquanto os pontos foram calculados como uma média entre vários grafos gerados em nossas simulações. As barras de erros dos pontos são menores que os símbolos.

## 4.3 COMPORTAMENTO DAS GRANDEZAS CALCULADAS

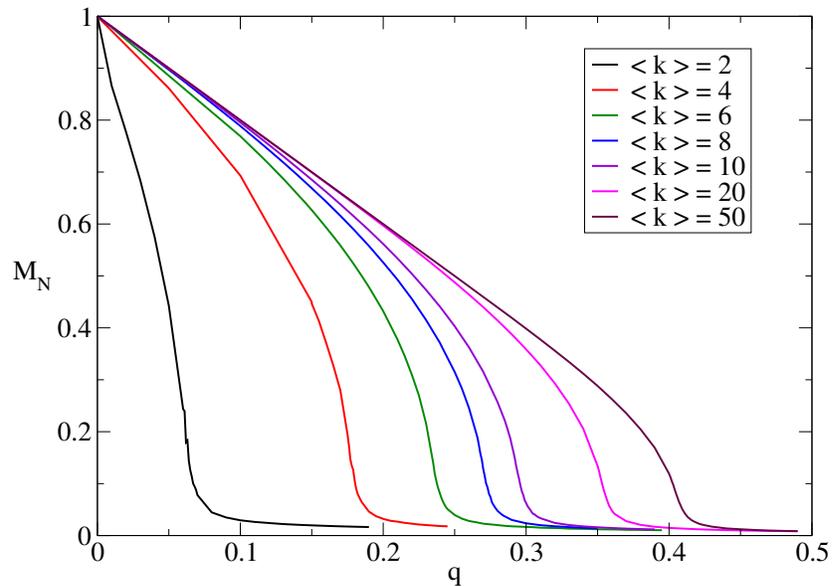
### 4.3.1 O Parâmetro de Ordem

Através da análise do parâmetro de ordem, as curvas de  $M_N(q)$  para um dado valor de  $\langle k \rangle$ , podemos determinar a existência de uma transição de fase no modelo. Na Figura 4.3 é possível observar que, de fato, o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem, uma vez que o parâmetro de ordem não tem descontinuidade na transição. As curvas foram obtidas com  $\langle k \rangle = 6$  e os cinco valores de  $N$  indicados. Antes da transição as curvas estão praticamente superpostas, passando a apresentar uma pequena dependência com  $N$  na região crítica e após a mesma, como pode ser observado no detalhe da figura.

Analisamos também a dependência do parâmetro de ordem com a conectividade média dos grafos. Na Figura 4.4 apresentamos as curvas  $M_N(q)$  para grafos com  $N = 10000$  e diversos valores de  $\langle k \rangle$ . Do comportamento das curvas, podemos inferir que o valor crítico do parâmetro de ruído aumenta com  $\langle k \rangle$ , ou seja, quanto maior a conectividade



**Figura 4.3.** Magnetização em função do ruído para  $\langle k \rangle = 6$ . As curvas indicam que o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem. No detalhe a dependência com o tamanho do sistema na região crítica.

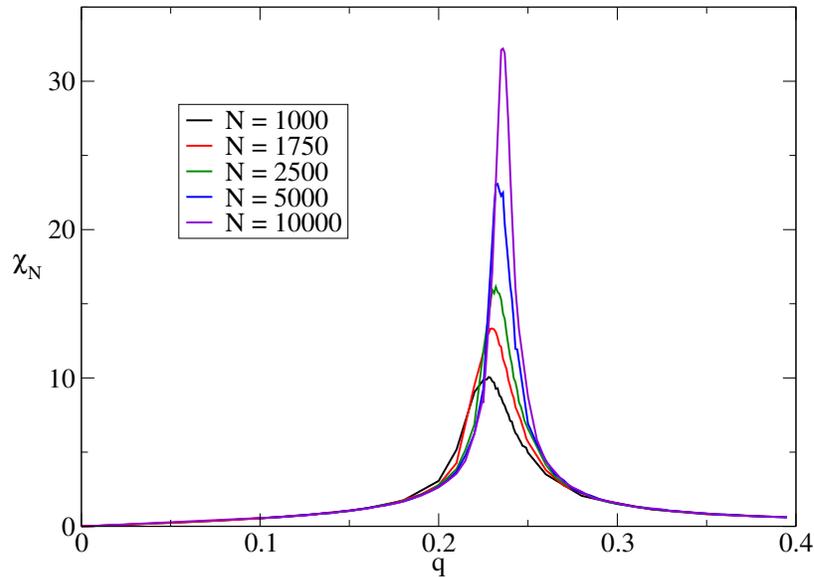


**Figura 4.4.** Magnetização em função do ruído para  $N = 10000$ . Da esquerda para a direita temos  $\langle k \rangle = 2, 4, 6, 8, 10, 20$  e  $50$ . As curvas indicam que o valor crítico do parâmetro de ruído aumenta com a conectividade média  $\langle k \rangle$ .

do sistema maior é o valor do ruído que leva o sistema do estado ordenado para o estado desordenado, como esperado.

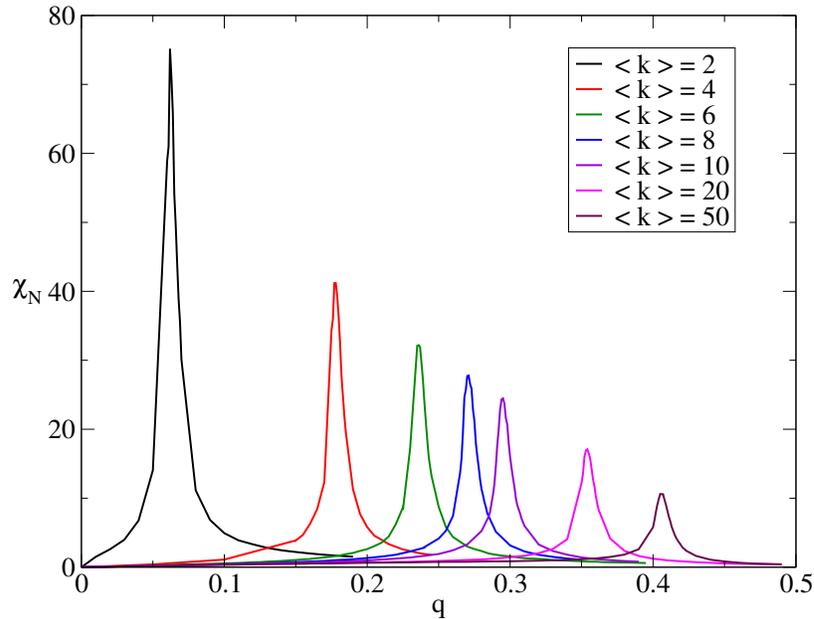
### 4.3.2 A Susceptibilidade

A Figura 4.5 apresenta o comportamento da susceptibilidade,  $\chi_N(q)$ , para  $\langle k \rangle = 6$  e cinco diferentes tamanhos de sistema. As curvas para a susceptibilidade são características de sistemas que apresentam uma transição de fase de segunda ordem, exibindo um máximo no valor crítico do parâmetro de ruído. O valor de  $q$  onde a susceptibilidade é máxima,  $q_c(N)$ , é uma função do tamanho do sistema (ver Equação (3.24)). Verificamos também que o valor máximo da susceptibilidade,  $\chi_{N_{MAX}}$ , apresenta uma dependência com  $N$ , de acordo com a Equação (3.23).



**Figura 4.5.** Susceptibilidade em função do ruído para  $\langle k \rangle = 6$  e diferentes valores de  $N$ . As curvas são características de um sistema que apresenta uma transição de fase de segunda ordem. O valor de  $q$  onde  $\chi_N$  é máximo é uma função de  $N$ , assim como o valor máximo da susceptibilidade  $\chi_{N_{MAX}}$ .

Na Figura 4.6 apresentamos o comportamento da susceptibilidade para  $N = 10000$  e diferentes valores de  $\langle k \rangle$ . Observamos claramente que o valor do ruído crítico é uma função crescente de  $\langle k \rangle$ , enquanto que a amplitude máxima é menor para grafos com



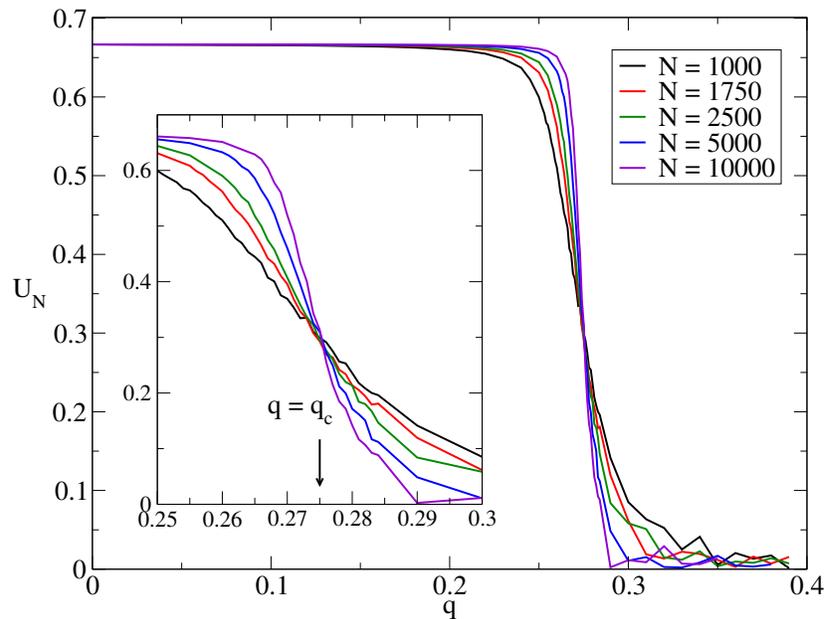
**Figura 4.6.** Susceptibilidade em função do ruído para  $N = 10000$ . Da esquerda para a direita temos  $\langle k \rangle = 2, 4, 6, 8, 10, 20$  e  $50$ . As curvas indicam que o valor crítico do parâmetro de ruído aumenta com a conectividade média do grafo.

maiores valores de  $\langle k \rangle$ .

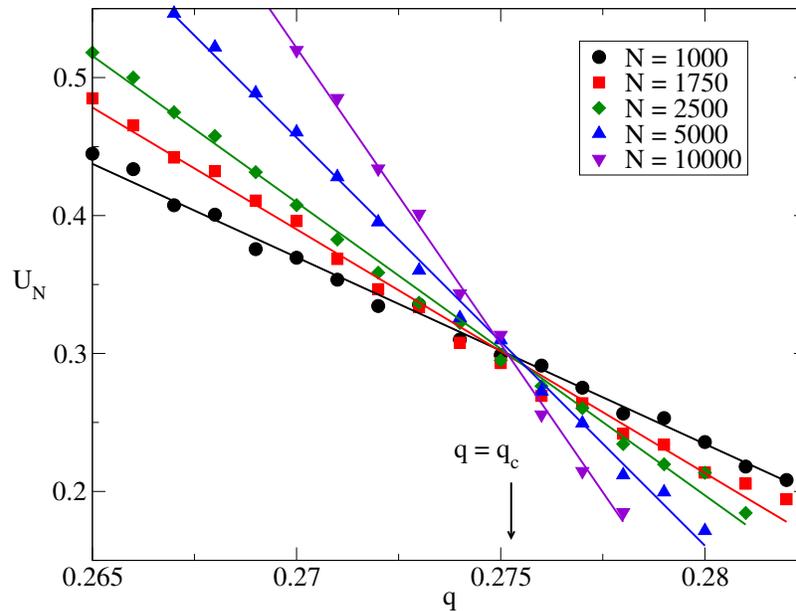
### 4.3.3 O Cumulante de Quarta Ordem de Binder

Calculamos o cumulante de quarta ordem de Binder com o objetivo de obter os valores críticos do parâmetro de ruído  $q_c$ . Devido à forma como é definido na Equação (3.4), o valor do cumulante no ponto crítico é independente do tamanho do sistema. Para grafos aleatórios com um dado valor de  $\langle k \rangle$ , as curvas de  $U_N(q)$  interceptam-se em  $q = q_c$ . Na Figura 4.7 são apresentadas as curvas  $U_N(q)$  para grafos aleatórios com  $\langle k \rangle = 8$ . O detalhe da figura apresenta apenas a região crítica, onde podemos identificar com maior clareza a interseção das curvas para os cinco valores de  $N$  usados nas simulações.

Uma outra propriedade importante do cumulante de quarta ordem de Binder é que, na região crítica,  $U_N(q)$  é uma função linear de  $q$ . Para obter maior precisão na estimativa de  $q_c$ , fazemos um ajuste linear dos valores calculados para  $U_N(q)$ , na região crítica, e estimamos  $q_c$  como sendo o valor da abscissa onde as retas ajustadas interceptam-se.



**Figura 4.7.** Cumulante de quarta ordem de Binder em função do ruído para grafos com  $\langle k \rangle = 8$ . No detalhe apresentamos apenas a região próxima ao ponto crítico, e indicamos o valor do ruído onde ocorre a intersecção das curvas.



**Figura 4.8.** Ajuste linear para o cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica para grafos com  $\langle k \rangle = 8$ . Os pontos foram obtidos nas simulações Monte Carlo. O valor crítico do ruído, onde as linhas se encontram, é  $q_c = 0.2753 \pm 0.0003$ .

A Figura 4.8 mostra o resultado dos ajustes para grafos com  $\langle k \rangle = 8$ . Neste caso em particular, estimamos  $q_c = 0.2753 \pm 0.0003$ .

#### 4.4 DIAGRAMA DE FASES

Através da análise do cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica, estimamos com boa precisão o valor do ruído crítico para grafos com conectividade no intervalo  $1 < \langle k \rangle < 1000$ . Verificamos que o valor crítico do parâmetro de ruído é uma função crescente da conectividade do grafo, como previsto pela solução obtida da aproximação de campo médio (Seção 3.4).

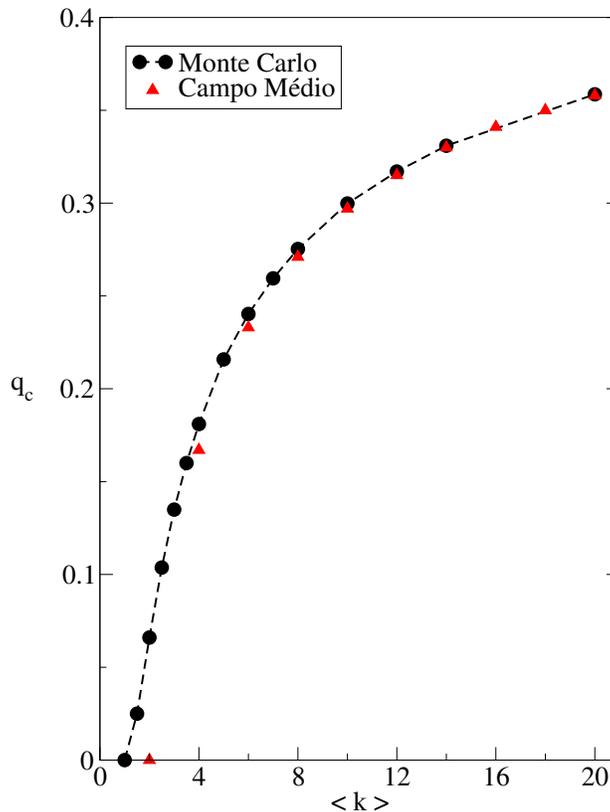
**Tabela 4.1.** Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através da aproximação de campo médio (CM) e de simulações Monte Carlo (MC), para diferentes valores da conectividade média do grafo aleatório.

$\langle k \rangle$	$q_c^{CM}$	$q_c^{MC}$	$\langle k \rangle$	$q_c^{CM}$	$q_c^{MC}$
1	–	0.0	8	0.2714	$0.2753 \pm 0.0003$
1.5	–	$0.025 \pm 0.001$	10	0.2968	$0.2998 \pm 0.0004$
2	0.0	$0.066 \pm 0.001$	12	0.3153	$0.3170 \pm 0.0007$
2.5	–	$0.1037 \pm 0.0006$	14	0.3295	$0.3309 \pm 0.0004$
3	–	$0.1349 \pm 0.0006$	16	0.3409	–
3.5	–	$0.160 \pm 0.002$	18	0.3502	–
4	0.1667	$0.181 \pm 0.001$	20	0.3581	$0.3586 \pm 0.0002$
5	–	$0.2158 \pm 0.002$	50	–	$0.4110 \pm 0.0002$
6	0.2333	$0.2403 \pm 0.0005$	100	–	$0.4368 \pm 0.0003$
7	–	$0.2595 \pm 0.0002$	1000	–	$0.476 \pm 0.001$

Utilizando a Equação (3.45), resultante da aproximação de campo médio, obtemos uma estimativa independente para os valores críticos do parâmetro de ruído, que podem ser comparados com os resultados numéricos da análise do cumulante de Binder. A Tabela 4.1 apresenta essa comparação para grafos com  $\langle k \rangle \leq 20$ . Para pequenos valores da conectividade média do grafo os valores de  $q_c$  são bastante distintos. Este comportamento é justificado uma vez que a aproximação de campo médio fica mais precisa à medida que aumenta o número de interações entre sítios. Em particular, para valores de  $\langle k \rangle \geq 8$  as soluções são bastante próximas, indicando que os valores críticos calculados para o

parâmetro de ruído são consistentes.

O diagrama de fase do sistema, representado no plano  $q_c$  vs  $\langle k \rangle$ , é apresentado na Figura 4.9. Para um grafo com dado valor de  $\langle k \rangle$ , o sistema está na fase ordenada (ferromagnética) para  $q < q_c$  e na fase desordenada (paramagnética) para  $q \geq q_c$ . Vemos que o limite inferior  $\langle k \rangle = 1$  para a existência de ordenamento previsto pelas simulações Monte Carlo está de acordo com o valor mínimo de  $\langle k \rangle$  para a existência de uma aglomeração gigante (veja Figura 4.2). Isso deve ser comparado com o valor mínimo para ordenamento,  $\langle k \rangle = 2$ , previsto por aproximação de campo médio. Para pequenos valores de  $\langle k \rangle$  o aumento do valor crítico de ruído é mais pronunciado, tornando-se mais suave à medida que a conectividade média do grafo aumenta. O valor máximo  $q_c = 0.5$ , previsto por campo médio, é observado em nossas simulações para valores de  $\langle k \rangle$  e  $N$  muito grandes.



**Figura 4.9.** Diagrama de Fase do modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios. No limite de validade da aproximação de campo médio os valores de  $q_c$  coincidem com os valores obtidos através de simulações Monte Carlo.

## 4.5 EXPOENTES CRÍTICOS

Conforme afirmado no Capítulo 3, utilizamos a dependência da magnetização com o tamanho do sistema para calcular o expoente  $\beta/\nu$ . Tomando o logaritmo da Equação (3.16) ficamos com

$$\ln[M_N(q_c)] = -\frac{\beta}{\nu} \ln[N] + \ln[\widetilde{M}(0)]. \quad (4.4)$$

Assim, um gráfico de  $\ln[M_N(q_c)]$  versus  $\ln[N]$  é uma reta com coeficiente linear igual ao logaritmo da função universal  $\widetilde{M}(0)$  e coeficiente angular igual ao expoente  $\beta/\nu$ . Na Figura 4.10 apresentamos os resultados obtidos nas simulações, assim como os melhores ajustes lineares, para diversos valores da conectividade média dos grafos aleatórios. Para cada valor de  $\langle k \rangle$ , o expoente  $\beta/\nu$  e a sua incerteza são obtidos do ajuste linear das curvas. As retas para diferentes valores da conectividade média são aproximadamente paralelas, indicando que o expoente é aproximadamente o mesmo para todos os valores de  $\langle k \rangle$ . De fato, a partir dos valores numéricos obtidos para  $\beta/\nu$  observamos que este expoente apresenta apenas uma leve tendência de crescimento com a conectividade média. Para fins de comparação,  $\beta/\nu = 0.242 \pm 0.006$  para  $\langle k \rangle = 4$ , enquanto obtemos  $\beta/\nu = 0.267 \pm 0.004$  para  $\langle k \rangle = 100$ .

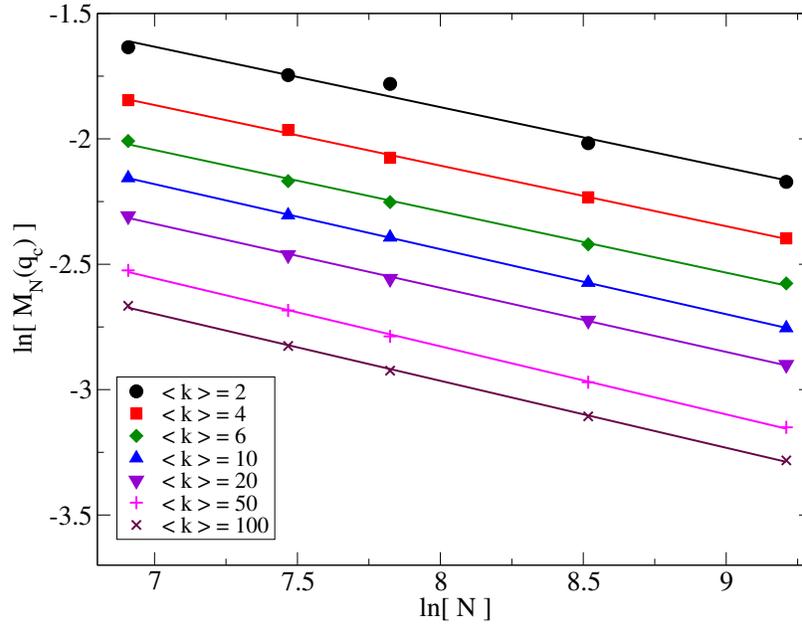
A obtenção do expoente  $\gamma/\nu$  para cada valor de  $\langle k \rangle$  é feita de duas formas independentes, conforme discussão apresentada no Capítulo 3. O procedimento para as duas estimativas é análogo ao descrito acima para o expoente da magnetização. Tomando o logaritmo das Equações (3.17) e (3.23), obtemos respectivamente

$$\ln[\chi_N(q_c)] = \frac{\gamma}{\nu} \ln[N] + \ln[\widetilde{\chi}(0)] \quad (4.5)$$

e

$$\ln[\chi_{N_{MAX}}] = \frac{\gamma}{\nu} \ln[N] + A, \quad (4.6)$$

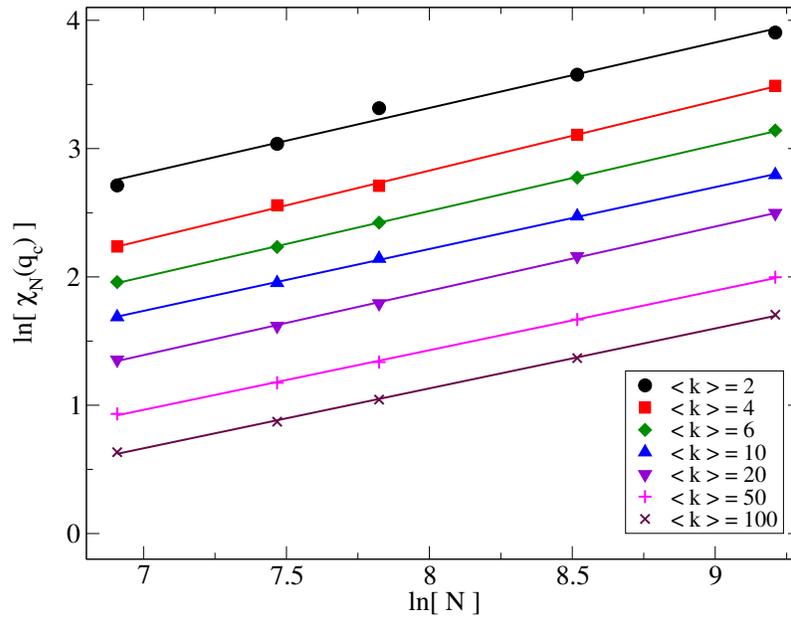
onde  $A$  é uma constante. Observe que a determinação dos expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , a partir das Equações (4.4) e (4.5), assume explicitamente o conhecimento prévio do valor de  $q_c$  no limite termodinâmico.



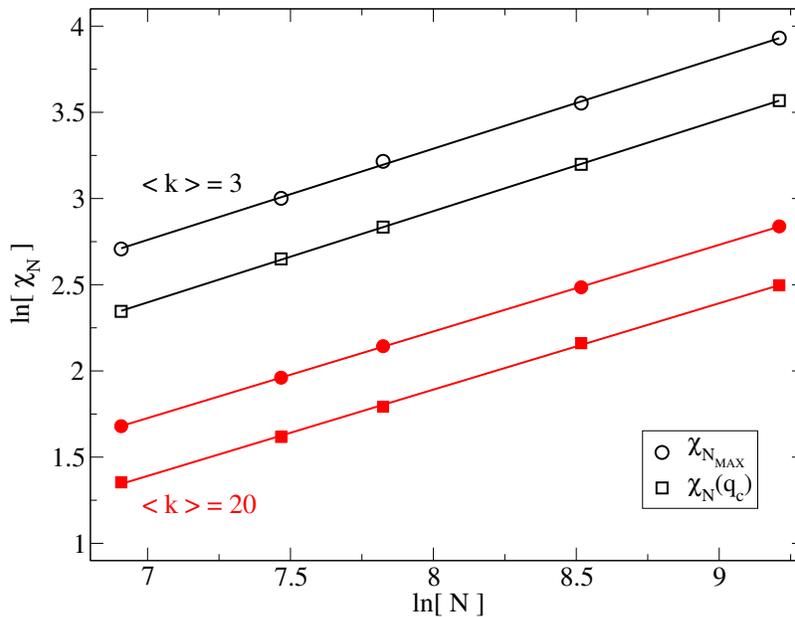
**Figura 4.10.** Ajustes lineares para  $\ln[M_N(q_c)]$  versus  $\ln[N]$  para diferentes valores de  $\langle k \rangle$ . O expoente  $\beta/\nu$ , obtido do coeficiente angular das retas, apresenta uma leve tendência de crescimento com  $\langle k \rangle$ .

A Figura 4.11 apresenta os resultados para  $\ln[\chi_N(q_c)]$  em função de  $\ln[N]$ , para os mesmos valores de  $\langle k \rangle$  e de  $N$  da Figura 4.10. Na figura também são apresentados os melhores ajustes lineares para os pontos. Os expoentes  $\gamma/\nu$  e as respectivas incertezas associadas, são calculados como os coeficientes angulares das retas ajustadas. Novamente observamos que as retas possuem aproximadamente o mesmo coeficiente angular. Assim como o expoente  $\beta/\nu$ , o expoente  $\gamma/\nu$  apresenta uma pequena dependência com a conectividade média. Entretanto, enquanto  $\beta/\nu$  apresenta um pequeno crescimento com a conectividade,  $\gamma/\nu$  possui uma leve tendência de decréscimo com  $\langle k \rangle$ . Para  $\langle k \rangle = 4$  obtemos  $\gamma/\nu = 0.54 \pm 0.01$  e para  $\langle k \rangle = 100$  estimamos  $\gamma/\nu = 0.467 \pm 0.007$ .

Na Figura 4.12 apresentamos a dependência de  $\ln[\chi_N(q_c)]$  e de  $\ln[\chi_{N_{MAX}}]$  com  $\ln[N]$  para  $\langle k \rangle = 3$  e  $\langle k \rangle = 20$ . As linhas são os melhores ajustes lineares para os pontos obtidos das simulações, e, de acordo com as Equações (4.5) e (4.6), devem possuir o mesmo coeficiente angular para um dado valor de  $\langle k \rangle$ . Os valores obtidos para  $\langle k \rangle = 3$  são  $\gamma/\nu = 0.529 \pm 0.002$ , usando  $\chi_N(q_c)$ , e  $\gamma/\nu = 0.529 \pm 0.007$ , usando  $\chi_{N_{MAX}}$ . Para  $\langle k \rangle = 20$  os resultados são, respectivamente,  $\gamma/\nu = 0.501 \pm 0.006$  e  $\gamma/\nu = 0.503 \pm 0.002$ .



**Figura 4.11.** Dependência de  $\ln[\chi_N(q_c)]$  com  $\ln[N]$  para diversos valores de  $\langle k \rangle$ , e respectivos ajustes lineares. Diferentemente de  $\beta/\nu$ , o expoente  $\gamma/\nu$  tem uma pequena tendência de decrescimento com  $\langle k \rangle$ .



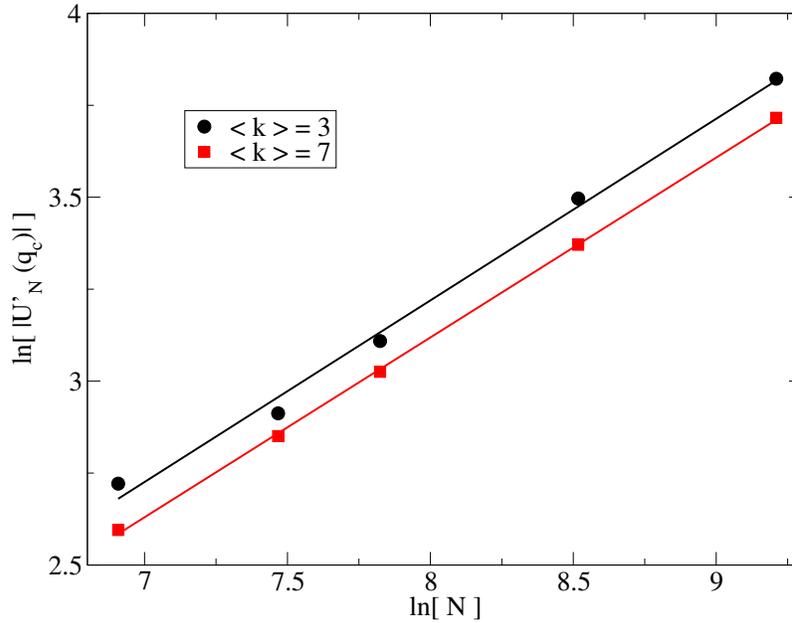
**Figura 4.12.** Ajustes lineares para  $\ln[\chi_N(q_c)]$  e  $\ln[\chi_{N_{MAX}}]$  versus  $\ln[N]$ . Os símbolos vazios são para  $\langle k \rangle = 3$  e os cheios para  $\langle k \rangle = 20$ . As retas possuem o mesmo coeficiente angular para cada valor de  $\langle k \rangle$ .

Verificamos que, para quase todos os valores de  $\langle k \rangle$ , as duas estimativas independentes para  $\gamma/\nu$  são iguais dentro da faixa de incerteza. Nos casos em que os valores dos expoentes não coincidem, acreditamos que seja devido à uma subestimação da incerteza associada, uma vez que a mesma é calculada apenas do ajuste linear, sem levar em consideração erros numéricos inerentes às simulações.

Para calcular o expoente  $1/\nu$ , exploramos a dependência com o tamanho do sistema da derivada do cumulante de Binder em relação ao ruído, no ponto crítico. Tomando o logaritmo da Equação (3.26), ficamos com

$$\ln[ |U'_N(q_c)| ] = \frac{1}{\nu} \ln[N] + \ln[\tilde{U}'(0)], \quad (4.7)$$

onde precisamos tomar o valor absoluto de  $U'_N(q_c)$  uma vez que esta derivada é negativa.



**Figura 4.13.** Dependência de  $\ln[ |U'_N(q_c)| ]$  com  $\ln[N]$  para  $\langle k \rangle = 3$  e  $\langle k \rangle = 7$ . Os coeficientes angulares dos ajustes lineares são os expoentes  $1/\nu$ . Diferentemente de  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , o expoente  $1/\nu$  não apresenta uma tendência de crescimento ou decrescimento com  $\langle k \rangle$ .

A Figura 4.13 apresenta os pontos calculados através das simulações e os melhores ajustes lineares para os mesmos. Para um mesmo valor de  $\langle k \rangle$ , a inclinação da reta é igual ao expoente  $1/\nu$ . Os valores obtidos para  $\langle k \rangle = 3$  e  $\langle k \rangle = 7$  são, respectivamente,

**Tabela 4.2.** Expoentes críticos e dimensão efetiva para o modelo do voto da maioria em grafos aleatórios. Os expoentes  $\gamma/\nu$  na terceira e quarta coluna foram obtidos usando  $\chi_N(q_c)$  e  $\chi_{N_{MAX}}$ , respectivamente.  $D$  foi calculado usando os valores de  $\gamma/\nu$  da terceira coluna.

$\langle k \rangle$	$\beta/\nu$	$\gamma/\nu$	$\gamma/\nu$	$1/\nu$	$D$
2	$0.24 \pm 0.02$	$0.51 \pm 0.03$	$0.52 \pm 0.02$	$0.48 \pm 0.04$	$0.99 \pm 0.07$
3	$0.233 \pm 0.002$	$0.529 \pm 0.002$	$0.529 \pm 0.007$	$0.49 \pm 0.02$	$1.00 \pm 0.01$
4	$0.242 \pm 0.006$	$0.54 \pm 0.01$	$0.515 \pm 0.006$	$0.51 \pm 0.03$	$1.02 \pm 0.02$
5	$0.28 \pm 0.01$	$0.48 \pm 0.01$	$0.514 \pm 0.007$	$0.41 \pm 0.01$	$1.04 \pm 0.03$
6	$0.245 \pm 0.007$	$0.514 \pm 0.004$	$0.507 \pm 0.004$	$0.45 \pm 0.03$	$1.00 \pm 0.02$
7	$0.236 \pm 0.006$	$0.510 \pm 0.005$	$0.525 \pm 0.007$	$0.489 \pm 0.005$	$0.98 \pm 0.02$
8	$0.242 \pm 0.005$	$0.510 \pm 0.009$	$0.510 \pm 0.003$	$0.501 \pm 0.004$	$0.99 \pm 0.02$
10	$0.259 \pm 0.001$	$0.483 \pm 0.005$	$0.502 \pm 0.005$	$0.46 \pm 0.01$	$1.00 \pm 0.01$
12	$0.247 \pm 0.007$	$0.505 \pm 0.006$	$0.508 \pm 0.001$	$0.49 \pm 0.02$	$1.00 \pm 0.02$
14	$0.256 \pm 0.002$	$0.492 \pm 0.005$	$0.508 \pm 0.006$	$0.47 \pm 0.02$	$1.00 \pm 0.01$
20	$0.255 \pm 0.004$	$0.501 \pm 0.006$	$0.503 \pm 0.002$	$0.50 \pm 0.02$	$1.01 \pm 0.01$
50	$0.271 \pm 0.004$	$0.465 \pm 0.006$	$0.485 \pm 0.004$	$0.48 \pm 0.01$	$1.01 \pm 0.01$
100	$0.267 \pm 0.004$	$0.467 \pm 0.007$	$0.479 \pm 0.004$	$0.495 \pm 0.008$	$1.00 \pm 0.02$

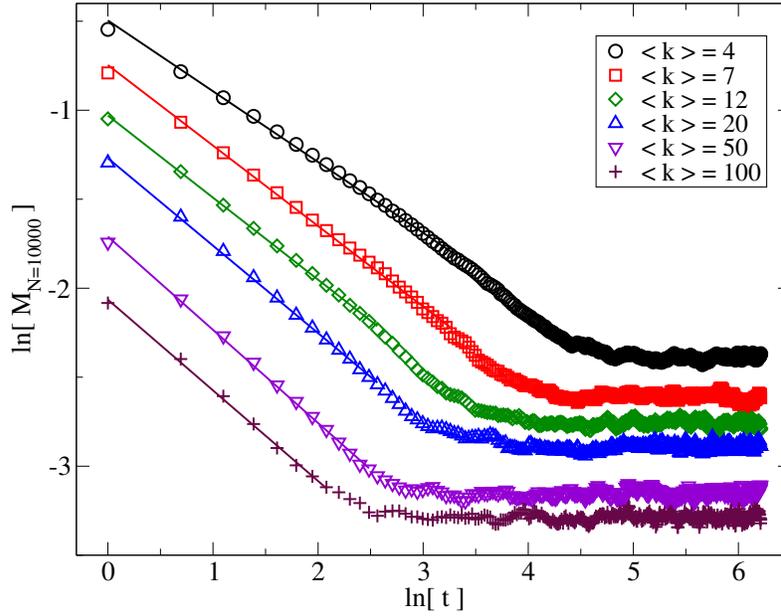
$1/\nu = 0.49 \pm 0.02$  e  $1/\nu = 0.489 \pm 0.005$ . Ao contrário do que ocorre com  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , o expoente  $1/\nu$  não apresenta uma tendência de crescimento ou decrescimento com a conectividade média. Os valores estimados para  $1/\nu$  estão distribuídos em torno de um valor médio igual a  $0.48 \pm 0.02$ .

Utilizando a relação de hiper-escala (Equação (3.19)) e os valores calculados dos expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , podemos obter uma estimativa para a dimensão efetiva dos grafos aleatórios. Para todos os valores de  $\langle k \rangle$ , levando-se em consideração as incertezas associadas, a relação de hiper-escala é satisfeita com  $D = 1.0$ . É importante observar que, apesar das variações nos expoentes, o valor de  $D$  é o mesmo, inclusive utilizando as duas estimativas do expoente  $\gamma/\nu$ .

Na Tabela 4.2 resumimos os nossos resultados para os expoentes  $1/\nu$ ,  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$  (incluindo as duas estimativas) e a dimensão efetiva do grafo para diversos valores de  $\langle k \rangle$ .

O cálculo do expoente crítico dinâmico  $z$  é feito através da análise da dependência temporal da magnetização no ponto crítico. Tomando o logaritmo da Equação (3.21), ficamos com

$$\ln[M] = -\zeta \ln[t] + B, \quad (4.8)$$



**Figura 4.14.** Relaxação da magnetização no ponto crítico para  $N = 10000$ . Do coeficiente angular dos ajustes obtemos o expoente  $\zeta$ . Cada ponto é a média em 1000 grafos distintos.

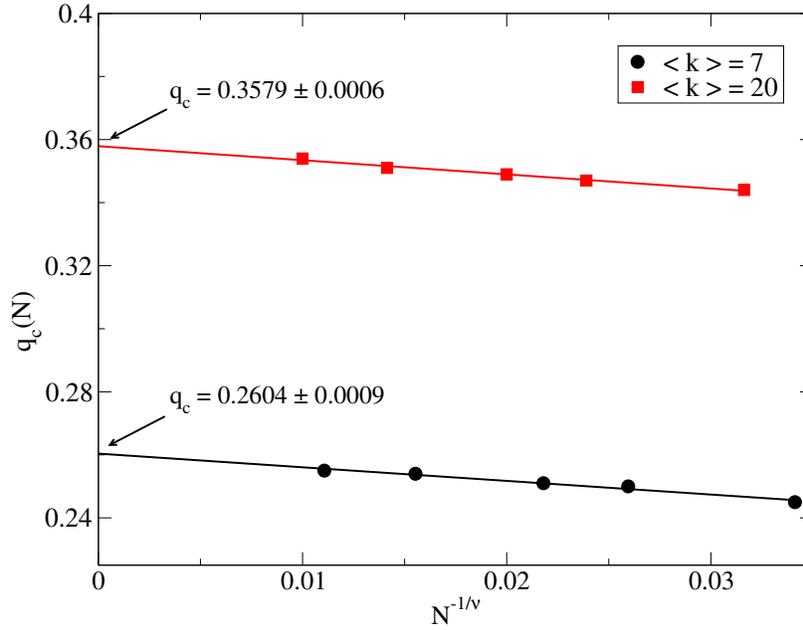
onde  $B$  é uma constante e, da relação (3.22), podemos escrever

$$z = \frac{\beta/\nu}{\zeta}. \quad (4.9)$$

A Figura 4.14 apresenta o comportamento da magnetização em função do tempo, no ponto crítico, para  $N = 10000$  e os valores de  $\langle k \rangle$  indicados. O expoente  $\zeta$  é o coeficiente angular dos ajustes mostrados na figura. Para  $3 \leq \langle k \rangle \leq 5$  obtivemos  $z = 0.64 \pm 0.02$ , que é um valor muito próximo do obtido na rede quadrada  $z = 0.65 \pm 0.05$  [35]. No intervalo  $6 \leq \langle k \rangle \leq 100$  obtivemos valores distribuídos em torno de  $z = 0.55 \pm 0.02$ .

## 4.6 UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA

É possível submeter os resultados apresentados na seção anterior para os expoentes críticos e os valores críticos do parâmetro de ruído a exames mais rigorosos, de autoconsistência. Com essa finalidade consideramos nesta seção verificações conjuntas, isto é, verificações envolvendo mais de um resultado.



**Figura 4.15.** Ajustes lineares para  $q_c(N)$  em função de  $N^{-1/\nu}$ . O coeficiente linear das retas ajustadas fornece uma nova estimativa para  $q_c$ , igual à obtida da análise do cumulante de Binder levando em consideração as incertezas associadas.

A primeira verificação é feita utilizando a Equação (3.24)

$$q_c(N) = q_c + bN^{-1/\nu}, \quad (4.10)$$

apresentada no Capítulo 3. Assim, para um dado valor de  $\langle k \rangle$ , o valor do ruído onde a susceptibilidade é máxima para um certo tamanho do sistema é uma função linear de  $N^{-1/\nu}$ , com coeficiente linear igual ao valor crítico do parâmetro de ruído no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ). Na Figura 4.15, mostramos a dependência de  $q_c(N)$  com  $N^{-1/\nu}$ , para dois valores de  $\langle k \rangle$ . Os dados para  $q_c(N)$  foram obtidos das curvas da susceptibilidade (ver Figura 4.5) e os expoentes  $1/\nu$  foram obtidos da dependência da derivada do cumulante de Binder no ponto crítico (ver Figura 4.13). Dessa forma, os coeficientes lineares dos ajustes fornecem estimativas independentes do valor de  $q_c$  para um dado  $\langle k \rangle$ . Os valores de  $q_c$  obtidos destes ajustes coincidem com os resultados obtidos da análise do cumulante de Binder para todos os valores de  $\langle k \rangle$ , indicando a consistência dos resultados para  $q_c$  e  $1/\nu$ .

Conforme discutido no Capítulo 3, na região crítica a magnetização e a susceptibilidade podem ser escritas em termos das respectivas funções de escala

$$M_N(q) = N^{-\beta/\nu} \widetilde{M}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (4.11)$$

$$\chi_N(q) = N^{\gamma/\nu} \widetilde{\chi}(N^{1/\nu} \varepsilon). \quad (4.12)$$

Das Equações (4.11) e (4.12), obtemos para as funções universais  $\widetilde{M}(u)$  e  $\widetilde{\chi}(u)$

$$\widetilde{M}(u) = M_N(q) N^{\beta/\nu}, \quad (4.13)$$

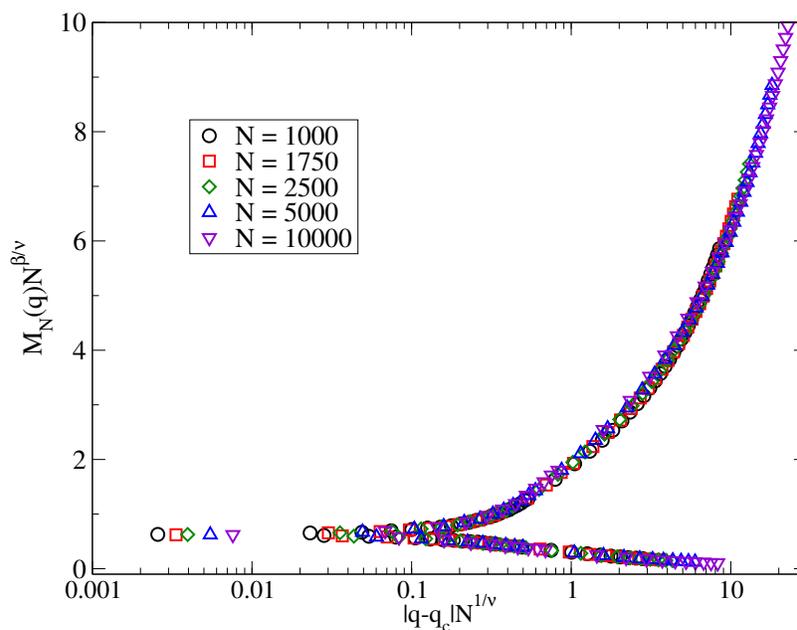
$$\widetilde{\chi}(u) = \chi_N(q) N^{-\gamma/\nu}, \quad (4.14)$$

onde  $u = N^{1/\nu} \varepsilon$  e  $\varepsilon = q - q_c$ .

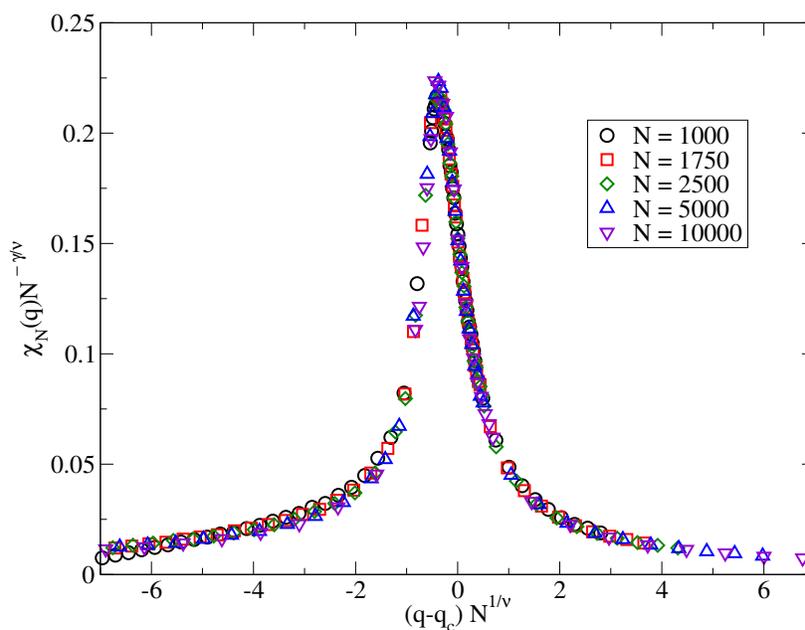
Desta forma, as curvas de  $\widetilde{M}(u)$  e  $\widetilde{\chi}(u)$ , para diferentes valores de  $N$ , devem colapsar formando uma única curva. Quanto melhor forem as estimativas para os expoentes e para o ruído crítico, melhor será o colapso das curvas. Este procedimento é conhecido como *colapso de dados* (ou *data collapse*).

A Figura 4.16 apresenta o colapso das curvas  $M_N(q) N^{\beta/\nu}$  para  $\langle k \rangle = 14$ . Os valores usados são  $q_c = 0.3309 \pm 0.0004$ ,  $\beta/\nu = 0.256 \pm 0.002$  e  $1/\nu = 0.47 \pm 0.02$ , de acordo com as Tabelas 4.1 e 4.2. A figura mostra que o colapso dos dados é muito bom, por aproximadamente quatro décadas, indicando novamente a consistência de nossos resultados para  $q_c$  e para os expoentes  $\beta/\nu$  e  $1/\nu$ .

Utilizando o mesmo procedimento para a susceptibilidade, obtemos a Figura 4.17, que apresenta o colapso das curvas  $\chi_N(q) N^{-\gamma/\nu}$ , também para  $\langle k \rangle = 14$ . Utilizamos o expoente  $\gamma/\nu = 0.492 \pm 0.005$  (Tabela 4.2) e os valores correspondentes para  $q_c$  e  $1/\nu$ . Mais uma vez observamos na figura um bom colapso das curvas para diferentes valores de  $N$ , corroborando as estimativas para  $q_c$  e para os expoentes  $\gamma/\nu$  e  $1/\nu$ .



**Figura 4.16.** Função universal  $\widetilde{M}(N^{1/\nu}|\varepsilon) = M_N(q)N^{\beta/\nu}$  para  $\langle k \rangle = 14$ . O colapso das curvas corrobora os valores calculados para  $q_c$ ,  $\beta/\nu$  e  $1/\nu$ .



**Figura 4.17.** Colapso das curvas  $\chi_N(q)N^{-\gamma/\nu} = \widetilde{\chi}(N^{1/\nu}\varepsilon)$  para  $\langle k \rangle = 14$ . Indicando a consistência dos valores estimados para  $q_c$ ,  $\gamma/\nu$  e  $1/\nu$ .

# CONCLUSÕES

Descrevemos um procedimento para gerar grafos aleatórios que apresentam as mesmas propriedades do modelo proposto por Erdős e Rényi. Verificamos que a distribuição de ligações e o tamanho da maior ilha dos grafos gerados satisfazem as previsões teóricas.

O comportamento do parâmetro de ordem e de sua variância mostram que o modelo do voto da maioria com ruído em grafos aleatórios apresenta uma transição de fase de segunda ordem, assim como mostrado por estudos anteriores em redes regulares e redes *small world*. Obtivemos o diagrama de fase do modelo através de simulações Monte Carlo e aproximação de campo médio. Observamos que o valor crítico do parâmetro de ruído  $q_c$  é uma função crescente da conectividade média dos grafos, e apresenta um limite superior, que corresponde ao valor máximo de variação do parâmetro  $q$  [24]. Estudos anteriores nos modelos do voto da maioria e de Ising em redes *small world* indicam que o valor do ruído crítico, ou da temperatura crítica, são funções crescentes da fração de ligações de longo alcance (probabilidade de religação)  $p$ .

Através de uma análise de escala com o tamanho do sistema, calculamos os expoentes críticos associados à magnetização, à susceptibilidade e ao comprimento de correlação para diversos valores da conectividade média  $\langle k \rangle$ . Observamos apenas pequenas variações nos expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , enquanto que o expoente  $1/\nu$  não apresenta dependência com  $\langle k \rangle$ . Os expoentes que obtivemos são diferentes dos expoentes em redes regulares e em redes *small-world*, indicando que o modelo em grafos aleatórios não pertence à mesma classe de universalidade do modelo em redes regulares nem à classe do modelo em redes *small-world*.

Utilizando a relação de hiper-escala e os expoentes  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$ , obtivemos para a dimensão efetiva dos grafos aleatórios o valor  $D = 1$ , independentemente do valor de  $\langle k \rangle$ .

Muito embora a dimensão não seja uma propriedade bem definida em grafos aleatórios, acreditamos que este resultado indica que, na prática, grafos aleatórios comportam-se como redes de topologia unidimensional. O modelo do voto da maioria, assim como o modelo de Ising, não apresenta transição de fase em redes regulares unidimensionais. Porém, a transição de fase observada no modelo do votante majoritário em grafos aleatórios pode ser induzida pela existência de interações de longo alcance entre vértices. De fato a existência deste tipo de ligação em redes *small-world*, obtidas a partir de uma cadeia linear, faz com que o modelo de Ising apresente uma transição de fase [31, 32, 33].

Acreditamos ainda, que outros modelos de spin definidos em grafos aleatórios devem apresentar o mesmo resultado para a dimensão, calculada a partir da relação de hiperescala e dos expoentes críticos correspondentes.

O estudo de outros modelos reversíveis ou irreversíveis em grafos aleatórios, que também apresentem simetria de inversão, pode estender também para grafos aleatórios a validade da conjectura [29] de que os expoentes críticos são os mesmos. Esta conjectura tem sido observada em modelos de spin definidos em redes regulares. Contudo, a comparação entre os resultados obtidos nas Referências [34] e [36] mostra que esta conjectura não é válida para modelos definidos em redes *small-world*.

APÊNDICE A

**ARTIGO PUBLICADO: MAJORITY-VOTE MODEL ON  
RANDOM GRAPHS. *PHYSICAL REVIEW E*, 71,  
016123, 2005**

## Majority-vote model on random graphs

Luiz F. C. Pereira\* and F. G. Brady Moreira†

*Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife-PE, Brazil*

(Received 31 August 2004; published 18 January 2005)

The majority-vote model with noise on Erdős-Rényi's random graphs has been studied. Monte Carlo simulations were performed to characterize the order-disorder phase transition appearing in the system. We found that the value of the critical noise parameter  $q_c$  is an increasing function of the mean connectivity  $z$  of the random graph. The critical exponents  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$ , and  $1/\nu$  were calculated for several values of  $z$ , and our analysis yielded critical exponents satisfying the hyperscaling relation with effective dimensionality equal to unity.

DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016123

PACS number(s): 64.60.Cn, 05.10.Ln, 64.60.Fr, 75.10.Hk

### I. INTRODUCTION

Since Erdős and Rényi's work more than 40 years ago [1,2], intense theoretical research on random graphs has been taking place [3,4]. In particular, models of networks with more complex connectivities than the traditional uncorrelated random graphs have been introduced [5,6] and used to describe many systems in nature and society [7-9].

A random graph is a set of  $N$  vertices (sites) connected by  $B$  links (bonds). The probability  $p$  that a given pair of sites is connected by a bond is  $p=2B/N(N-1)$ . The connectivity of a site is defined as the total number of bonds connected to it, that is  $k_i=\sum_j c_{ij}$ , where  $c_{ij}=1$  if there is a link between the sites  $i$  and  $j$  and  $c_{ij}=0$  otherwise. Random graphs are completely characterized by the mean number of bonds per site, or the average connectivity  $z=p(N-1)$ . In the limit  $N\rightarrow\infty$  the distribution of connectivities is given by the Poisson distribution.

For values of  $z\leq 1$  the random graph does not have a percolating cluster [2,10]. There are a few disconnected clusters and there is no long-range order on such systems. For  $1<z\leq 4$  there is a percolating cluster, but there are a few small islands disconnected from the giant cluster. These small islands do not contribute to the system dynamics and so they are excluded from our simulations. For values of  $z>4$  almost all the sites belong to the giant cluster, so no sites need to be excluded from the dynamics.

Our goal in this work is to identify the critical character of the majority-vote model with noise on random graphs. Previous works on the majority-vote model consider the spins either on regular  $d$ -dimensional lattices [11,12] or on small-world networks [13,14] interpolating between regular lattices and random graphs. We use Monte Carlo (MC) simulations and standard finite-size scaling techniques to determine the critical noise parameter  $q_c$ , as well as the exponents  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$  and  $1/\nu$  for several values of the mean connectivity  $z$  of the graph. We also use mean-field approximation to obtain the phase diagram in the  $q_c$ - $z$  space and make a comparison with the corresponding phase diagram that follows from our simulations.

This paper is organized in the following way: In Sec. II we describe the isotropic majority-vote model with noise and introduce the relevant quantities used in our simulations. In Sec. III we present our results along with a discussion. And finally, in the last section we present our conclusions.

### II. THE MODEL AND COMPUTATIONAL METHOD

The isotropic majority-vote model with noise is defined by a set of spin variables  $\{\sigma_i\}$ , where each spin is associated with one vertex of the random graph and can have the values  $\pm 1$ . The system dynamics is as follows: For each spin we determine the sign of the majority of its neighboring spins, that is, all the spins that are linked to it. With probability  $q$  the spin takes the opposite sign of the majority of its neighbors, and it takes the same sign with probability  $(1-q)$ . The probability  $q$  is known as the noise parameter.

The probability of a single spin flip is given by

$$w(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 - (1-2q)\sigma_i S \left( \sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_{i+\delta} \right) \right], \quad (1)$$

where  $S(x)=\text{sgn}(x)$  if  $x\neq 0$  and  $S(0)=0$ , and the summation is over all the  $k_i$  spins connected to the spin at site  $i$ .

To study the critical behavior of the model we consider the magnetization  $M_N$ , the susceptibility  $\chi_N$ , and the Binder's fourth-order cumulant  $U_N$ . These quantities are defined by

$$M_N(q) = \langle \langle m \rangle_T \rangle_C = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \left| \sum_1^N \sigma_i \right| \right\rangle_T \right\rangle_C, \quad (2)$$

$$\chi_N(q) = N[\langle \langle m^2 \rangle_T \rangle_C - \langle \langle m \rangle_T \rangle_C^2], \quad (3)$$

$$U_N(q) = 1 - \frac{\langle \langle m^4 \rangle_T \rangle_C}{3\langle \langle m^2 \rangle_T \rangle_C^2}, \quad (4)$$

where  $N$  is the number of vertices of the random graph with fixed  $z$ ,  $\langle \dots \rangle_T$  denotes time averages taken in the stationary regime, and  $\langle \dots \rangle_C$  stands for configurational averages.

These quantities are functions of the noise parameter  $q$  and, in the critical region, satisfy the following finite-size scaling relations [11]:

\*Electronic address: luizfc@df.ufpe.br

†Electronic address: brady@df.ufpe.br

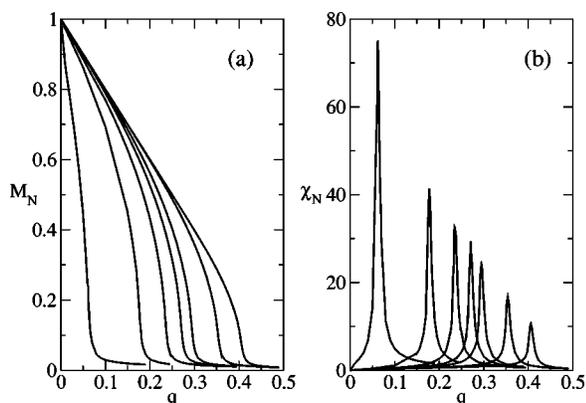


FIG. 1. Magnetization and susceptibility as a function of the noise parameter  $q$ , for  $N=10\,000$  sites. From left to right we have  $z=2, 4, 6, 8, 10, 20$ , and  $50$ .

$$M_N(q) = N^{-\beta/\nu} \tilde{M}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (5)$$

$$\chi_N(q) = N^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (6)$$

$$U_N(q) = \tilde{U}(N^{1/\nu} \varepsilon), \quad (7)$$

where  $\varepsilon = q - q_c$ . From the size dependence of  $M_N$  and  $\chi_N$  we obtained the exponents  $\beta/\nu$  and  $\gamma/\nu$ , respectively. The maximum value of the susceptibility also scales as  $N^{\gamma/\nu}$ . Moreover, the value of  $q$  for which  $\chi_N$  has a maximum,  $q_c(N)$ , is expected to scale with the system size as

$$q_c(N) = q_c + bN^{-1/\nu}, \quad (8)$$

where the constant  $b$  is close to unity. The above relation is used to determine the exponent  $1/\nu$  and also to provide a check for the values of  $q_c$  obtained from the analysis of the Binder's cumulant [Eq. (7)]. Finally, we have checked whether the calculated exponents satisfy the hyperscaling hypothesis

$$2\beta/\nu + \gamma/\nu = D_{eff} \quad (9)$$

in order to get the effective dimensionality,  $D_{eff}$ , for several values of  $z$ .

We have performed Monte Carlo simulations on random graphs with various values of mean connectivity  $z$ . For a given  $z$ , we used systems of size  $N=1000, 1750, 2500, 5000$ , and  $10\,000$ . We waited 8000 Monte Carlo steps (MCS) to make the system reach the steady state, and the time averages were estimated from the next 4000 MCS. In our simulations, one MCS is accomplished after all the  $N$  spins are updated. The simulations were performed using the standard  $C$  random number generator. For all sets of parameters, we have generated ten distinct random networks, and we have simulated ten independent runs for each distinct graph.

### III. RESULTS AND DISCUSSION

In Fig. 1 we show the dependence of the magnetization  $M_N$  and the susceptibility  $\chi_N$  on the noise parameter, obtained from simulations on random graphs with  $N=10\,000$

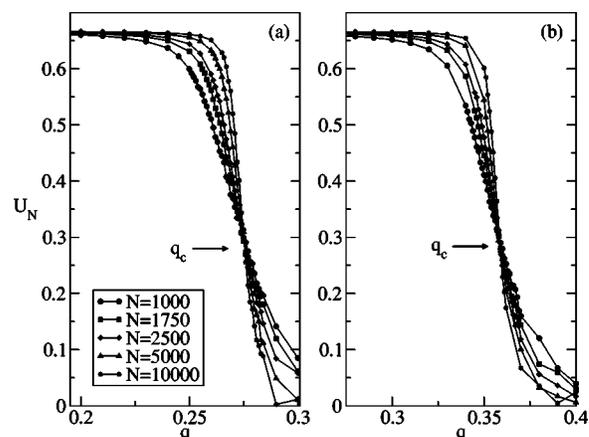


FIG. 2. Binder's fourth-order cumulant as a function of  $q$  and five values of system size  $N$ . In part (a) we have  $z=8$  and in part (b)  $z=20$ .

nodes and several values of the average connectivity  $z$ . In part (a) each curve for  $M_N$ , for a given value of  $N$  and  $z$ , clearly indicates that there exists a phase transition from an ordered state to a disordered state. We also notice that the transition occurs at a value of the critical noise parameter  $q_c$ , which is an increasing function of the mean connectivity  $z$  of the random graph. In part (b) we show the corresponding behavior of susceptibilities  $\chi_N$ . The value of  $q$  where  $\chi_N$  has a maximum is here identified as  $q_c(N)$ . In Fig. 2 we plot the Binder's fourth-order cumulant  $U_N$  for different values of  $N$  and two distinct values of  $z$ . The critical noise parameter  $q_c$ , for a given value of  $z$ , is estimated as the point where the curves for different system sizes  $N$  intercept each other. In this way we have obtained the phase diagram shown in Fig. 3.

The phase diagram of the majority-vote model on random graphs shows that for a given graph (fixed  $z$ ) the system becomes ordered for  $q < q_c$ , whereas it has zero magnetization for  $q \geq q_c$ . We notice that the increase of  $q_c$  is more pronounced for small values of  $z$ . The error bars in  $q_c$  (see Table I) are smaller than the symbols. In Fig. 3, it is also

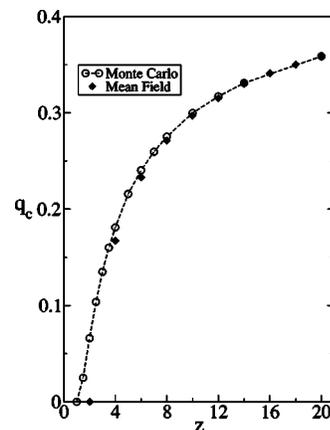


FIG. 3. The phase diagram, showing the dependence of the critical noise parameter  $q_c$  on the average connectivity  $z$ , obtained from MC simulations and from MF approximation.

TABLE I. The critical noise  $q_c$ , the critical exponents, and the effective dimensionality  $D_{eff}$ , for random networks with mean connectivity  $z$ .

$z$	$q_c$	$\beta/\nu$	$\gamma/\nu^a$	$\gamma/\nu^b$	$1/\nu$	$D_{eff}^c$
2	0.066(1)	0.24(2)	0.51(3)	0.52(2)	0.48(5)	0.99(7)
3	0.1349(6)	0.233(2)	0.529(2)	0.529(7)	0.37(9)	1.00(1)
4	0.181(1)	0.242(6)	0.54(1)	0.515(6)	0.59(7)	1.02(2)
6	0.2403(5)	0.245(7)	0.514(4)	0.507(4)	0.44(6)	1.00(2)
8	0.2753(3)	0.242(5)	0.510(9)	0.510(3)	0.56(3)	0.99(2)
10	0.2998(4)	0.259(1)	0.483(5)	0.502(5)	0.51(3)	1.00(1)
20	0.3586(2)	0.255(4)	0.501(6)	0.503(2)	0.49(4)	1.01(1)
50	0.4110(2)	0.271(4)	0.465(6)	0.485(4)	0.39(5)	1.01(1)
100	0.4368(3)	0.267(4)	0.467(7)	0.479(4)	0.47(3)	1.00(2)

<sup>a</sup>Obtained using  $\chi_N(q_c)$ . See Eq. (6).

<sup>b</sup>Obtained using  $\chi_N(\max)$ .

<sup>c</sup>Estimated using  $\gamma/\nu$  from  $\chi_N(q_c)$ .

shown the values of  $q_c$  obtained from mean-field (MF) approximation. For small connectivities  $z$  the MF estimate of the critical noise parameter is very inaccurate. In particular MF theory gives  $q_c=0$  for  $z \leq 2$ , whereas our MC phase diagram exhibits an ordered state for all values of the mean connectivity greater than 1. This is in agreement with the limiting value of  $z=1$  for the existence of a percolating cluster and, therefore, the onset of long-range order in the system. However, as  $z$  increases the two estimates get closer. This is expected because MF approximation becomes more precise as the number of interacting nodes is increased. We have also performed simulations for random graphs with higher values of  $z$ , such as  $z=50$ ,  $z=100$ , and  $z=1000$ . The corresponding values of the critical noise (not shown in the figure) are smaller than 0.50, which is the limiting prediction value as provided by mean-field theory when  $z \rightarrow \infty$ .

In Fig. 4 we plot the dependence of the magnetization at  $q=q_c$  with the system size. The straight lines, obtained from simulations with different values of the mean connectivity  $z$ , confirm the scaling of the magnetization according to Eq. (5). The slopes of curves correspond to the exponent ratio  $\beta/\nu$ . Our results show that the increase of  $\beta/\nu$  with  $z$  is quite small.

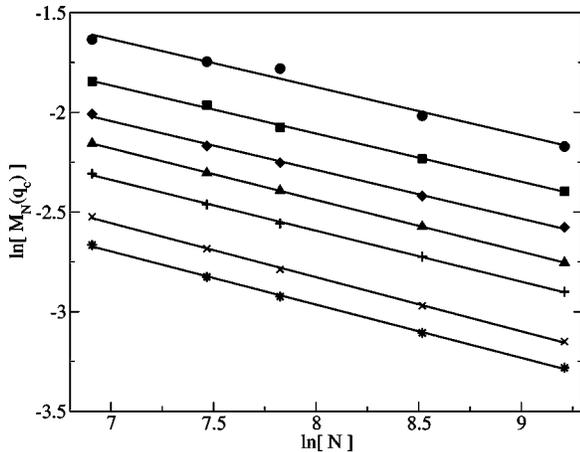


FIG. 4.  $\ln[M_N(q_c)]$  vs  $\ln N$ . From top to bottom,  $z=2, 4, 6, 10, 20, 50, 100$ .

In Fig. 5(a) we display the scalings for the susceptibility at  $q=q_c$ ,  $\chi_N(q_c)$ , and for its maximum amplitude,  $\chi_N(\max)$ . The exponent ratio  $\gamma/\nu$  is obtained from the slopes of the straight lines. For almost all the values of  $z$ , the exponents  $\gamma/\nu$  of the two estimates agree within error bars (Table I). An increased  $z$  means a slight tendency to decrease the exponent ratio  $\gamma/\nu$ .

In a similar way, for fixed  $z$  the critical exponent  $1/\nu$  was obtained from a plot of  $\ln[q_c(N) - q_c]$  versus  $\ln N$  [see Eq. (8)]. We used the corresponding values of  $q_c(N)$  that follow from the maximum of the susceptibility and the limiting value of  $q_c$  which has been obtained from Binder's cumulant. The slope of the resulting straight line equals the exponent  $1/\nu$ . The results quoted in Table I indicate that  $1/\nu$  is not a monotonic function of the mean connectivity  $z$ .

Figure 5(b) illustrates the scaling relation for  $q_c(N)$  given in Eq. (8). The constant  $b$  equals the slope of the straight line, whereas the extrapolation of the fitting provides an alternative way of determining the critical parameter  $q_c$ . We have obtained a quite satisfactory agreement between the values of  $q_c$  determined in this way and the corresponding

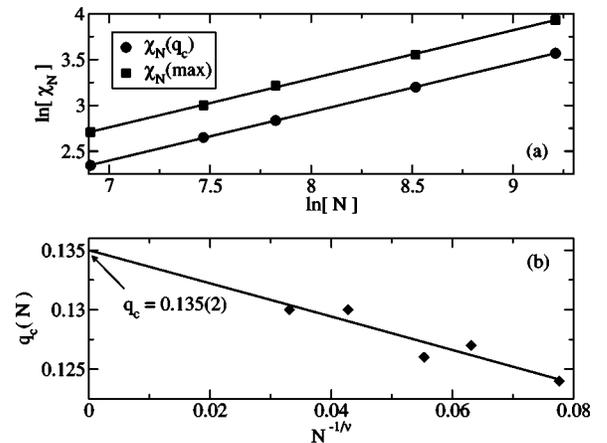


FIG. 5. (a) Plot of  $\ln[\chi_N(q_c)]$  and  $\ln[\chi_N(\max)]$  vs  $\ln N$ . (b) The dependence of the noise parameter  $q_c(N)$  on system size. The extrapolation gives an independent estimation for  $q_c$ . The data are for the case of mean connectivity  $z=3$ .

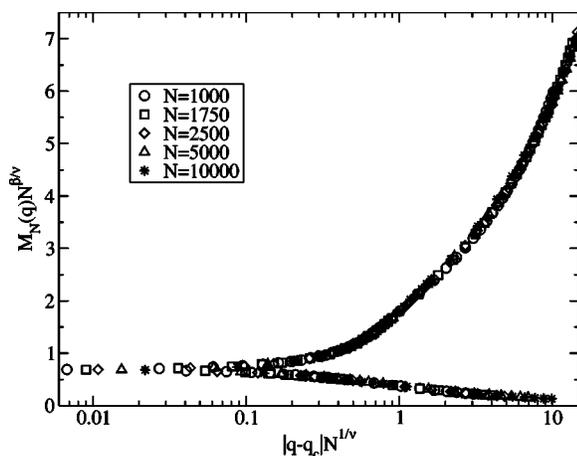


FIG. 6. Data collapsing for five different values of  $N$ , with  $z = 10$ .

ones that follow from the analysis of Binder's cumulant.

In Fig. 6 we show the data-collapse plot for  $\tilde{M}(u) = M_N(q)N^{\beta/\nu}$ , which is a universal function of the combined variable  $u = N^{1/\nu}(q - q_c)$ . We have also obtained quite good data collapse for  $\tilde{\chi}(u) = \chi_N(q)N^{-\gamma/\nu}$ . The collapsing of curves for five different system sizes corroborates the quoted values for  $q_c$ ,  $\beta/\nu$ ,  $\gamma/\nu$ , and  $1/\nu$ .

Table I resumes the values (along with errors) of  $q_c$ , the three critical exponents ( $\gamma/\nu$  was obtained by using two different scalings), and the effective dimensionality of the system. It is worth to mention that, for all  $z$ , the value  $D_{eff} = 1$ , which has been obtained from the hyperscaling hypothesis [Eq. (9)], is satisfied when we use both estimate procedures for the exponent ratio  $\gamma/\nu$ .

There are no previous works studying the majority-vote model on Erdős-Rényi's graphs, to allow a direct comparison of the present results. Yet, for completeness, it would be of

interest to mention earlier simulations of the majority-vote model on other kinds of networks. Campos *et al.* [13] investigated the phase diagram and critical behavior of the majority-vote model on small-world networks [5] by rewiring the two-dimensional square lattice. Using a similar procedure to ours they found critical exponents depending on the fraction of long-range interactions and satisfying the hyperscaling relation with  $D_{eff} = 2$  (the dimensionality of the regular lattice). On the other hand, the model which has been defined on a regular lattice has critical exponents that fall into the same class of universality as the corresponding equilibrium Ising model [11,12]. The results of the present simulations show that the majority-vote models defined on a regular lattice, on small-world networks, and on Erdős-Rényi's random graphs, belong to different universality classes.

Finally, we remark that our MC results are quite different from the mean-field estimates  $\beta/\nu = 1$ ,  $\gamma/\nu = 2$ , and  $1/\nu = 2$ , which result in  $D = 4$  for the upper critical dimensionality. This is a reasonable result since for all networks simulated we are far away from the mean-field picture where every spin interacts with all the remaining  $N - 1$  spins.

#### IV. CONCLUSION

We have obtained the phase diagram and critical exponents of the majority-vote model with noise on random graphs. The second-order phase transition which occurs in the model with mean connectivity  $z > 1$  has exponents that show a slight variation along the critical line. Nevertheless, our Monte Carlo simulations have demonstrated that the effective dimensionality  $D_{eff}$  equals unity, for all values of  $z$ . This interesting result may suggest that other spin models defined on random graphs have exponents which satisfy the hyperscaling relation with  $D_{eff} = 1$ .

#### ACKNOWLEDGMENTS

Luiz F. C. Pereira is supported by CAPES. We acknowledge partial support from CNPq, FINEP, and FACEPE.

- 
- [1] P. Erdős and A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5**, 17 (1960).
  - [2] B. Bollobás, *Random Graphs* (Academic, New York, 1985).
  - [3] R. Albert and A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
  - [4] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
  - [5] D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature (London)* **393**, 440 (1998).
  - [6] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
  - [7] M. Baiesi and S. S. Manna, *Phys. Rev. E* **68**, 047103 (2003).
  - [8] G. Palla, I. Derényi, I. Farkas, and T. Vicsek, *Phys. Rev. E* **69**, 046117 (2004).
  - [9] V. M. L. dos Santos, F. G. B. Moreira, and R. L. Longo, *Chem. Phys. Lett.* **390**, 157 (2004).
  - [10] J. Dall and M. Christensen, *Phys. Rev. E* **66**, 016121 (2002).
  - [11] M. J. de Oliveira, *J. Stat. Phys.* **66**, 273 (1992).
  - [12] M. A. Santos and S. Teixeira, *J. Stat. Phys.* **78**, 963 (1995).
  - [13] P. R. A. Campos, V. M. de Oliveira, and F. G. B. Moreira, *Phys. Rev. E* **67**, 026104 (2003).
  - [14] N. G. F. Medeiros, A. T. C. Silva, and F. G. B. Moreira, *Physica A* (to be published).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos, and Christos Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications Review*, **29**, 251, 1999.
- [2] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, **393**, 440, 1998.
- [3] Fredrik Liljeros, Christofer R. Edling, Luís A. Nunes Amaral, H. Eugene Stanley, and Yvonne Åberg. The web of human sexual contacts. *Nature*, **411**, 907, 2001.
- [4] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, **286**, 509, 1999.
- [5] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Internet: Diameter of the world-wide web. *Nature*, **401**, 130, 1999.
- [6] Vivianni Marques Leite dos Santos, F. G. Brady Moreira, and Ricardo L. Longo. Topology of the hydrogen bond networks in liquid water at room and supercritical conditions: a small-world structure. *Chemical Physics Letters*, **390**, 157, 2004.
- [7] Mark E. J. Newman. Gallery of network images: High school dating. *World Wide Web*, <http://www-personal.umich.edu/~mejn/networks/>, 2004.
- [8] Peter S. Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, **110**, 44, 2004.
- [9] Paul Erdős and Alfred Rényi. On random graphs I. *Publ. Math. (Debrecen)*, **6**, 290, 1959.

- 
- [10] Paul Erdős and Alfred Rényi. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5**, 17, 1960.
- [11] Stanley Milgram. The small-world problem. *Psychology Today*, **2**, 60, 1967.
- [12] Fan Chung and Linyuan Lu. The diameter of sparse random graphs. *Advances in Applied Mathematics*, **26**, 257, 2001.
- [13] Béla Bollobás. Degree sequences of random graphs. *Discrete Mathematics*, **33**, 1, 1981.
- [14] Béla Bollobás. *Random Graphs*, volume 73 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Academic Press, New York, second edition, 2001.
- [15] Jesper Dall and Michael Christensen. Random geometric graphs. *Physical Review E*, **66**, 016121, 2002.
- [16] Duncan J. Watts. *Small Worlds. The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton Studies in Complexity. Princeton University Press, New Jersey, 1999.
- [17] M. E. J. Newman and Duncan J. Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, **263**, 341, 1999.
- [18] M. E. J. Newman and Duncan J. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, **60**, 7332, 1999.
- [19] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, **74**, 47, 2002.
- [20] Béla Bollobás and Oliver Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, **24**, 5, 2004.
- [21] Tânia Tomé and Mário José de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, São Paulo, 2001.

- [22] Andrey A. Markov. Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga. *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, **15**, 135, 1906.
- [23] Andrey A. Markov. Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain. *reimpresso no Apêndice B de R. Howard. Dynamic Probabilistic Systems, volume 1: Markov Chains. John Wiley and Sons*, 1971.
- [24] Mário José de Oliveira. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, **66**, 273, 1992.
- [25] Kurt Binder. Finite size scaling analysis of Ising model block distribution functions. *Zeitschrift für Physik B*, **43**, 119, 1981.
- [26] H. Eugene Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [27] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [28] Lars Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, **65**, 117, 1944.
- [29] G. Grinstein, C. Jayaparakash, and Yu He. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Physical Review Letters*, **55**, 2527, 1985.
- [30] M. A. Santos and S. Teixeira. Anisotropic voter model. *Journal of Statistical Physics*, **78**, 963, 1995.
- [31] M. Gitterman. Small-world phenomena in physics: The Ising model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **33**, 8373, 2000.
- [32] A. Barrat and M. Weigt. On the properties of small-world network models. *European Physical Journal B*, **13**, 547, 2000.

- [33] Andrzej Pekalski. Ising model on a small world network. *Physical Review E*, **64**, 057104, 2001.
- [34] Carlos P. Herrero. Ising model in small-world networks. *Physical Review E*, **65**, 066110, 2002.
- [35] Abel G. da Silva Filho and F. G. Brady Moreira. Dynamical critical exponent for the majority-vote model. *Journal of Statistical Physics*, **106**, 391, 2002.
- [36] Paulo R. A. Campos, Viviane M. de Oliveira, and F. G. Brady Moreira. Small-world effects in the majority-vote model. *Physical Review E*, **67**, 026104, 2003.
- [37] S. S. Manna. Damage spreading in Ising model with increased range of interaction. *Journal de Physique*, **51**, 1261, 1990.
- [38] Fugao Wang and Masuo Suzuki. Time-evolution of damage in the Ising model. *Physica A*, **223**, 34, 1996.
- [39] Marta Fernanda de Araújo Bibiano. *Propagação de Danos, Transições de Fase e Expoentes Dinâmicos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 1999.
- [40] Nazareno G. F. Medeiros, Ana T. C. Silva, and F. G. Brady Moreira. Damage spreading in the majority-vote model on small-world networks. *Physica A*, **348**, 691, 2005.
- [41] Luiz F. C. Pereira and F. G. Brady Moreira. Majority-vote model on random graphs. *Physical Review E*, **71**, 016123, 2005.
- [42] J. Hoshen and R. Kopelman. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, **14**, 3438, 1976.

Todas as simulações desenvolvidas para a realização deste trabalho foram escritas nas linguagens de programação *C* e *C++*. O compilador utilizado foi o *GNU GCC* - *gcc/g++* ([www.gnu.org/software/gcc](http://www.gnu.org/software/gcc)).

As simulações foram realizadas nos sistemas operacionais de código aberto *FreeBSD* ([www.freebsd.org](http://www.freebsd.org)), *Red Hat Linux* ([www.redhat.com](http://www.redhat.com)) e *SUSE Linux* ([www.suse.com](http://www.suse.com)).

Todos os gráficos contendo resultados de simulações foram feitos no software de código aberto *Grace* (<http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>).

Este texto foi tipografado em  $\text{\LaTeX}$  na classe *UFPETHesis* ([www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis](http://www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis)).

A fonte do corpo do texto é a Computer Modern Roman 12pt.