

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Vinícius Quintas Souto Maior

**SYMARMA: Um modelo dinâmico para dados temporais sob
distribuição simétrica condicional**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Estatística do Departamento de Estatística da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito parcial para obten-
ção do grau de Mestre em Estatística.*

Orientador: *Francisco José de Azevêdo Cysneiros*

Recife
28 de fevereiro de 2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Souto Maior, Vinícius Quintas

SYMARMA: um modelo dinâmico para dados temporais sob distribuição simétrica condicional /
Vinícius Quintas Souto Maior - Recife: O Autor, 2012.
xiv, 101 folhas: il., fig., tab.

Orientador: Francisco José de Azevêdo Cysneiros.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Séries temporais. 2. Distribuições simétricas. 3. Outliers.
4. Previsões. I. Cysneiros, Francisco José de Azevêdo (orientador). II. Título.

519.232

CDD (23. ed.)

MEI2012 – 026

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

28 de fevereiro de 2012

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Vinícius Quintas Souto Maior

intitulada

“SYMARMA: Um modelo dinâmico para dados temporais sob distribuição simétrica condicional”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Francisco José de Azevedo Cysneiros orientador

Francisco Cribari Neto

Verônica Maria Cadena Lima (UFBA)

*À meus pais e irmãos,
com gratidão,*

*A minha vó Maria de Lourdes (in memorian),
com saudade,*

dedico com carinho.

Agradecimentos

- Ao professor **Dr. Francisco José de Azevêdo Cysneiros**, pela orientação, pelo exemplo de competência e humildade. Pela dedicação e disponibilidade que sempre teve comigo e que, algumas vezes, sabiamente me deixou “voar” sozinho, me fazendo perceber o quanto eu era capaz de finalizar esse trabalho.
- Aos demais professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, agradeço a experiência compartilhada, e aos colegas do mestrado, obrigado pela convivência e pelo companheirismo. Em especial aos professores: **Francisco Cribari** e **Audrey Cysneiros**.
- Aos meus pais, **Abílio** e **Patrícia**, agradeço pelo exemplo, compreensão, carinho e incentivo. Aos meus irmãos: **Danilo** e **Flávia**, a eles devo incríveis lembranças da minha vida.
- À minha família, pelo amor e investimento que fez em mim.
- Aos amigos que o mestrado me deu: **Fernanda De Bastiani**, **Daniel Aguilar**, **Francisco Willian** e **Mariana Araújo**, pelas angústias, alegrias e conhecimentos compartilhados.
- À **Lutemberg Pedrosa**, **Leandro Lucena** e **Flávio Santos**, grandes amigos e companheiros nesta e em outras batalhas.
- Aos parceiros de farras: **Sandra**, **Jorge**, **Marcílio**, **Eduardo**, **Clóvis**, **Levik**, agradeço pelos momentos desopilantes que me proporcionaram nesses dois anos de Mestrado.
- À minha namorada **Karine Torres** que sempre me incentivou nesta caminhada.
- À **Valéria Bittencourt**, secretária da pós-graduação em estatística, pela competência, carinho, amizade e atenção.
- À CAPES, pelo financiamento dos dois anos do meu Mestrado, o que viabilizou dedicação exclusiva à vida acadêmica.

Resumo

Modelos gaussianos de séries temporais ARMA têm sido largamente utilizados na literatura. Benjamin et al. (2003) estenderam estes modelos para variáveis pertencente a família de distribuição exponencial. Nesta mesma linha, Rocha e Cribari-Neto (2009) propuseram um modelo de série temporal para a classe de distribuições Beta. Nesse sentido, nós propomos o modelo autorregressivo de médias móveis simétrico (SYMARMA), um modelo dinâmico para variáveis aleatórias pertencentes à classe de distribuições simétricas que inclui tanto a dinâmica autorregressiva e de média móveis, como também permite inserir regressores no modelo. O modelo SYMARMA é construído a partir da classe de regressão simétrica só que agora, na especificação da média, temos uma componente adicional com termos autoregressivos e de médias móveis incluídos aditivamente. A estimação dos parâmetros do modelo SYMARMA é feita através da maximização do logaritmo da função de verossimilhança condicional usando um algoritmo de otimização não-linear, em particular utilizamos o algoritmo escore de Fisher. Estudos de simulação foram realizados para avaliar o desempenho e o comportamento do estimador de máxima verossimilhança condicional para os parâmetros do modelo e, para também avaliar o efeito da presença de outlier aditivo ou de inovação no ajuste e na previsão de observações futuras. Discutimos testes de hipóteses para os parâmetros do modelo. Aplicações com dados reais também serão apresentadas e discutidas.

Palavras-chave: ARMA, distribuição simétrica, máxima verossimilhança condicional, outliers, previsões, séries temporais.

Abstract

Gaussian ARMA time series have been widely used in the literature. Benjamin et al. (2003) extended these models to variables belonging to the exponential family distribution. Along this line, Rocha and Cribari-Neto (2009) proposed a time series model for the class of Beta distributions. Accordingly, we propose symmetric autoregressive moving average model (SYMARMA), a dynamic model for random variables belonging to the class of symmetric distributions which includes both dynamic autoregressive and moving average, but also allows you to enter the model regressors. The model SYMARMA is built from the class of symmetric regressions only now, in the specification of the mean, we have an additional component in terms of autoregressive and moving average included additively. The estimation of model parameters SYMARMA is done by maximizing the logarithm of the conditional likelihood function using an algorithm for nonlinear optimization, in particular we use the Fisher scoring algorithm. Simulation studies were conducted to evaluate the performance and behavior of the conditional maximum likelihood estimator for the parameters of the model and we also evaluate the effect of the presence of additive or innovation outliers in the setting and forecasting of future observations. We discuss tests for the model parameters. Applications with real data are also presented and discussed.

Keywords: ARMA, conditional maximum likelihood, forecasts, outliers, symmetric distributions, time series.

Sumário

1	Introdução e Motivação	1
1.1	Motivação	2
1.2	Apresentação dos capítulos	3
1.3	Suporte computacional	5
2	Modelo Autoregressivo de Médias Móveis Simétrico	6
2.1	Definição do modelo	6
2.1.1	Modelos relacionados	9
2.1.2	Condições de estacionariedade	10
2.2	Algoritmo de estimação	12
2.3	Testes de hipótese	17
2.4	Previsões utilizando o modelo SYMARMA	18
3	Estudo de Simulação	19
3.1	Outliers em modelos de séries temporais	20
3.1.1	Outlier aditivo (AO)	20
3.1.2	Outlier inovador (IO)	22
3.2	Algoritmo gerador de séries SYMARMA	23
3.3	Desempenho dos estimadores - modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1)	24
3.4	Qualidade do ajuste dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1)	34
3.5	Previsões - modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1)	42
3.6	Modelos SYMARMA(1,1)	60
4	Aplicações	66
4.1	Modelagem da arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco	67
4.1.1	Índices ICMS e IGP-DI	67
4.1.2	Resultados	68
4.2	Inflação no Brasil	73
4.3	Rotina <i>elliptical.ts</i>	78

5	Considerações Finais	82
A	Vetor escore	84
B	Matriz informação observada de Fisher	87
C	Matriz informação esperada de Fisher condicional	93

Lista de Figuras

1.1	Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.	3
1.2	Série inflação no Brasil de acordo com IGP-DI.	4
3.1	Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) sem regressores com $\alpha = 2$ e $\phi = 0,6$, contaminada (traço descontínuo) por um outlier aditivo.	21
3.2	Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) sem regressores com $\alpha = 2$ e $\phi = 0,6$, contaminada (traço descontínuo) por um outlier inovador.	23
3.3	Média dos vieses obtidos das estimativas do parâmetro ϕ e φ (gráficos superiores), variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro ϕ (gráficos centrais) e variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro φ (gráficos inferiores) nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).	30
3.4	Média dos vieses obtidos das estimativas do parâmetro θ e φ (gráficos superiores), variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro θ (gráficos centrais) e variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro φ (gráficos inferiores) nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).	33
3.5	Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional foram superior aos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional - todos os cenários considerados.	41
3.6	Cenário 1 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontínuo) com um outlier aditivo na segunda parte da amostra.	43
3.7	Cenários 2 e 4 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontínuo) com um(dois) outlier(s) aditivo(s) na primeira parte da amostra.	44
3.8	Cenários 3 e 5 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontínuo) com um(dois) outlier(s) aditivo(s) na primeira parte da amostra e um outlier aditivo na segunda parte da amostra.	44

4.1	Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados brutos.	68
4.2	Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.	69
4.3	Função de autocorrelação da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.	70
4.4	Função de autocorrelação parcial da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.	70
4.5	Séries arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco com dados deflacionados (linha preta), ajustada pelo modelo ARMA(1,0) (linha vermelha) e ajustada pelo modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade (linha verde).	72
4.6	Valores preditos das últimas 6 observações da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco pelos modelos ARMA(1,0) (linha vermelha) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional (linha verde).	73
4.7	Série inflação no Brasil de acordo com IGP-DI.	74
4.8	Função de autocorrelação da série inflação no Brasil de acordo com o IGP-DI.	75
4.9	Função de autocorrelação parcial da série inflação no Brasil de acordo o IGP-DI.	75
4.10	Séries inflação no Brasil (linha preta), ajustada pelo modelo ARMA(1,0) (linha vermelha) e ajustada pelo modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade (linha verde).	77
4.11	Erros de previsão apresentados pelos modelos ARMA(1,0) (linha vermelha) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional (linha verde) na predição das últimas 6 observações da série inflação no Brasil.	77

Lista de Tabelas

2.1	Expressões para $W_g(u)$ e $W'_g(u)$ para algumas distribuições simétricas	13
2.2	Valores de d_g , f_g e ξ para algumas distribuições simétricas	16
3.1	Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro ϕ nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).	28
3.2	Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).	29
3.3	Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro θ nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).	31
3.4	Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).	32
3.5	Distribuição do(s) outlier(s) nas séries simuladas para qualidade do ajuste dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1).	34
3.6	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante um outlier aditivo.	36
3.7	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante dois outliers aditivos.	37
3.8	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante um outlier inovador.	37
3.9	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante dois outliers inovadores.	38
3.10	Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor ajuste que o modelo sob distribuição normal condicional.	38
3.11	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante um outliler aditivo.	39
3.12	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante dois outlilers aditivos.	39

3.13	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante um outliker inovador.	40
3.14	Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante dois outlikers inovadores.	40
3.15	Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor ajuste que o modelo sob distribuição normal condicional.	41
3.16	Distribuição do(s) outlier(s) nas séries simuladas para previsão de observações futuras utilizando os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1).	45
3.17	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos simulados de acordo com o Cenário 1.	46
3.18	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 2.	47
3.19	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 2.	48
3.20	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 2.	48
3.21	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 2.	49
3.22	Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 2.	49
3.23	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 3.	50
3.24	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 3.	51
3.25	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 3.	51
3.26	Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 3.	52
3.27	Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 3.	52

3.28 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 4.	54
3.29 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 4.	54
3.30 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 4.	55
3.31 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 4.	55
3.32 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 4.	56
3.33 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 5.	57
3.34 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 5.	57
3.35 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 5.	58
3.36 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 5.	58
3.37 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 5.	59
3.38 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional foram superior aos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional na previsão de observações futuras - para outliers aditivos e inovadores.	60
3.39 Média, viés, variância e EQM das estimativas dos parâmetros ϕ e θ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional.	62
3.40 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional.	63
3.41 Média, viés, variância e EQM das estimativas dos parâmetros ϕ e θ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional.	64

3.42	Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional.	65
4.1	Modelos ARMA ajustados a série arrecadação do ICMS em Pernambuco, para diferentes configurações, e seus respectivos valores do critério BIC e logaritmo da função de máxima verossimilhança	71
4.2	Estimativas obtidas para os α , ϕ e φ dos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional para os dados da arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco.	71
4.3	Modelos ARMA ajustados a série inflação no Brasil, para diferentes configurações, e seus respectivos valores do critério BIC e logaritmo da função de máxima verossimilhança	76
4.4	Estimativas obtidas para os α , ϕ e φ dos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional para os dados da inflação no Brasil.	76

Introdução e Motivação

I cannot oscillate a time series or properly analyse a variance...

—ELY ESSAYS (in Economics Chapter 6 (p. 105))

A suposição de normalidade para os erros em uma análise de regressão constitui uma importante e muito utilizada técnica na descrição e investigação de fenômenos considerados aleatórios. Um exemplo são os modelos de valorização de ativos de capital, CAPM (“Capital Asset Pricing Model”), desenvolvidos independentemente por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), que consideram que as rentabilidades das ações seguem uma distribuição aproximadamente normal. No entanto, em muitas situações a suposição de normalidade dos erros não é satisfeita e, além disso, muitas vezes nos deparamos com acontecimentos inesperados ou incontroláveis, como, por exemplo, greves, guerras ou mudanças políticas, que dão origem a observações atípicas que de alguma forma são inconsistentes com o resto da série. Tais observações, muito comuns em rentabilidades de ações dos mercados latino americanos, podem comprometer os procedimentos inferenciais usuais de uma análise estatística, podendo, por exemplo, fornecer estimativas bastante viesadas dos parâmetros do modelo ou, até mesmo, uma identificação incorreta do modelo. Neste sentido, algumas extensões foram proposta ao longo dos anos, por exemplo, Galea et al. (2008), Paula e Cysneiros (2009), Maior e Cysneiros (2009), embora nestes modelos a dependência temporal não foi incorporada.

O trabalho pioneiro sobre séries não-Gaussianas foi desenvolvido por Cox (1981) que estudou a autocorrelação dos dados, caracterizando duas classes de modelos dependentes no tempo: modelos condicionados a observações passadas e modelos baseados em processos latentes. Zeger (1988) sugeriu um estudo baseado na dependência no tempo através de processo latente por meio de um modelo linear generalizado (ver, McCullagh e Nelder 1989). West et al. (1985) abordaram esse problema através de um enfoque bayesiano utilizando o filtro de Kalman para resposta perante a família exponencial. Zeger e Qaqish (1988) desenvolveram modelos autorregressivos na família exponencial que permitem a inclusão de covariáveis, em particular, modelos autorregressivo Poisson e Gama condicional, estendendo a classe de modelos lineares

generalizados (MLG), e Li (1994) introduz uma estrutura de médias móveis aos modelos de Ze-ger e Qaqish (1988). Mais recentemente, Benjamin et al. (2003) e Rocha e Cribari-Neto (2009) desenvolveram modelos dinâmicos para variáveis aleatórias na família exponencial (GARMA) e na família de distribuição beta (β ARMA), respectivamente.

O objetivo desta dissertação é propor uma classe de modelos que permita o ajuste de séries temporais pertencentes à classe de distribuições simétricas. A classe de distribuições simétricas contém distribuições com caudas mais pesadas e mais leves que a distribuição normal. Distribuições com caudas mais pesadas, como, por exemplo, a distribuição t de Student, tendem a acomodar melhor observações atípicas e, desta forma, fornecer estimativas mais estáveis para os parâmetros do modelo.

Como exemplo de outras distribuições pertencentes à classe de distribuições simétricas podemos citar a normal contaminada, t de Student generalizada, logística tipos I e II, logística generalizada, Kotz, Kotz generalizada, exponencial potência, dentre outras. Uma revisão de diferentes áreas em que as distribuições simétricas são aplicadas é apresentada em Chmielewski (1981).

Baseado nas características das distribuições simétricas, estendemos os modelos de séries temporais autorregressivo de médias móveis gaussiano (ARMA) considerando um modelo dinâmico para séries temporais com distribuição simétrica condicional, denominado SYMARMA.

1.1 Motivação

Frequentemente, em séries temporais, são encontradas observações que surgem como atípicas face às restantes em consequência de erros de medição, por influência de intervenções exógenas, de alterações inesperadas em certas condições de um sistema físico, entre outras. Essas observações atípicas são comumente denominadas de outliers (Fox (1972)).

Dentre os autores que discutem a influência de outliers na estimação e inferência de parâmetros em modelos estatísticos podemos citar Martin e Yohai (1985) e Ota (1996).

Para ilustrar a presença de observações atípicas em séries temporais, apresentamos, nas Figuras 1.1 e 1.2, duas séries com essas características. A primeira série corresponde à arrecadação do Imposto sobre Operações Relativas da Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços (ICMS) no estado de Pernambuco entre os meses de outubro de 2001 e agosto de 2011. Os dados foram deflacionados pelo Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna (IGP-DI) utilizado como mês de referência agosto de 2011. Deflacionar a série é importante pois precisamos remover o efeito da inflação nos valores da série temporal. Nota-se claramente

que a série possui cinco grandes quedas no valor da arrecadação, essas quedas correspondem aos meses de setembro, outubro e novembro de 2008 em que a arrecadação foi, aparentemente, totalmente transferida para algum outro setor e aos meses de outubro e novembro de 2009 em que o imposto arrecadado com o ICMS foi, aparentemente, parcialmente transferido chegando assim a uma arrecadação de apenas 617 e 660 mil reais, respectivamente.

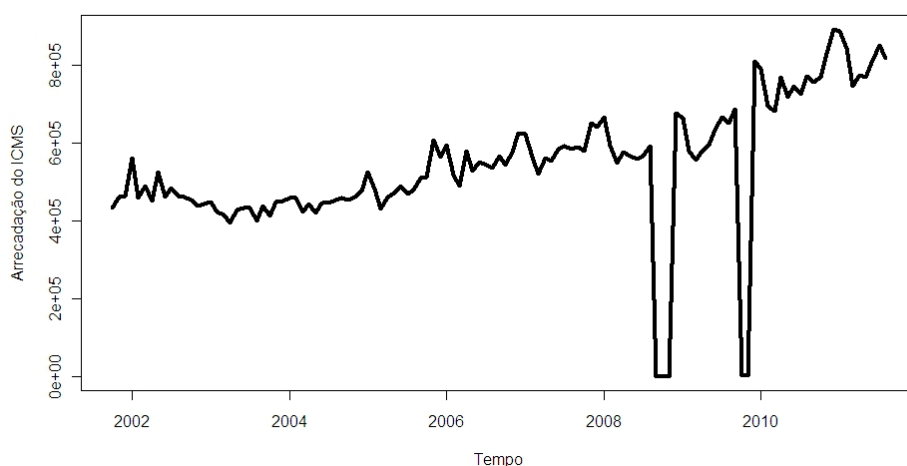


Figura 1.1 Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.

A segunda série refere-se à inflação do Brasil durante o período de janeiro de 1965 a novembro de 2011. A inflação foi medida de acordo com o IGP-DI. Dentre as diversas observações atípicas presentes nesta série, podemos destacar março de 1986 (plano Cruzado), junho de 1987 (plano Bresser), janeiro de 1989 (plano Verão), abril de 1990 (plano Collor I), fevereiro de 1991 (plano Collor II) e junho de 1994 (plano Real).

Estas séries serão estudadas em mais detalhes no decorrer desta dissertação e, como veremos, a utilização de modelos na classe SYMARMA com distribuição condicional de caudas mais pesadas pode ser bastante útil para modelagem desses tipos de séries.

1.2 Apresentação dos capítulos

No segundo capítulo desta dissertação iremos propor o modelo autorregressivo de médias móveis simétrico. Condições de estacionariedade para a média e variância marginal da variável dependente serão checadas. Discutiremos métodos de estimação dos parâmetros do modelo e apresentaremos expressões para o vetor escore, para a matriz de informação observada de

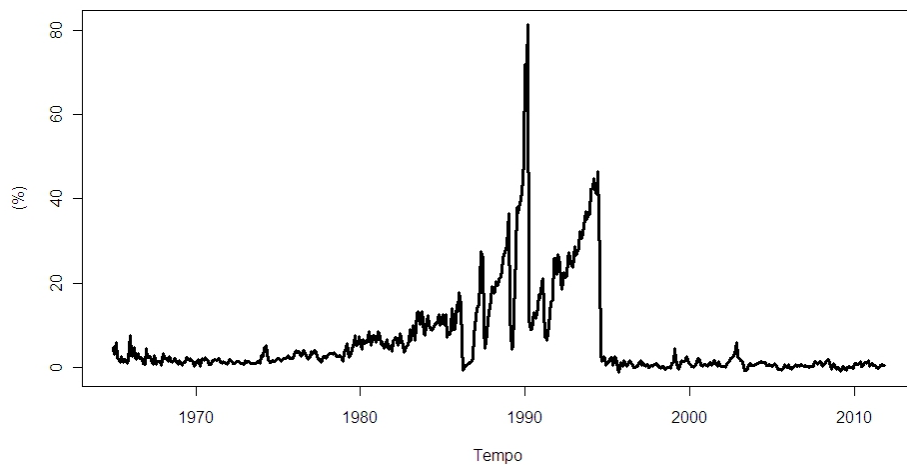


Figura 1.2 Série inflação no Brasil de acordo com IGP-DI.

Fisher e para a matriz informação esperada de Fisher condicional. Por fim, discutiremos como realizar testes de hipóteses para os parâmetros do modelo e previsões.

No capítulo 3 definiremos os chamados outliers aditivos e inovadores, descreveremos o método de geração de séries SYMARMA e apresentaremos resultados de estudos de simulação realizados no modelo SYMARMA com o objetivo de avaliar o desempenho e o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança condicional (EMVC) para os parâmetros autorregressivos, de médias móveis e de escala do modelo SYMARMA, a adequação do ajuste e a performance do modelo sob previsões futuras perante observações atípicas de diferentes tamanhos e em diferentes locais da amostra.

No capítulo 4 utilizaremos dois conjuntos de dados reais para ilustrar a performance do modelo SYMARMA sob previsões de observações futuras em séries temporais contínuas que possuem observações atípicas. Nesses exemplos, a adequação do modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade será comparada com o clássico modelo ARMA. Apresentaremos também detalhes da sintaxe de comandos da rotina *elliptical.ts* desenvolvida pelo autor na plataforma R para modelagem de dados de séries temporais com distribuição simétrica condicional.

Finalmente, o capítulo 5 concluirá esta dissertação com algumas observações.

1.3 Suporte computacional

Todas as avaliações numéricas apresentadas nesta dissertação foram realizadas através do ambiente de programação R (versão 2.13.0) para a plataforma operacional Windows. R é um ambiente integrado que possui grandes facilidades para manipulação de dados, geração de gráficos e modelagem estatística. R pode ser obtido gratuitamente através no endereço eletrônico <http://www.r-project.org>. Para mais informações sobre o R ver, entre outros, Cribari-Neto e Zarkos (1999) e Crawley (2007). As apresentações gráficas foram produzidas no ambiente R (versão 2.13.0) e no Microsoft Office Excel (versão 2007).

A presente dissertação foi redigida utilizando o sistema tipográfico $\text{\LaTeX}$ (Lamport, 1985). O $\text{\LaTeX}$ consiste em uma série de macros e rotinas baseadas no sistema $\text{\TeX}$, criado por Donald Knuth. Particularmente, este volume foi tipografado na classe `UFPETthesis`, desenvolvida por Paulo G. S. da Fonseca e disponível em <http://www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpe-thesis>.

Modelo Autoregressivo de Médias Móveis Simétrico (SYMARMA)

Apaixone-se sempre pelos seus dados. Nunca pelo seu modelo!

—AUTOR DESCONHECIDO

Neste capítulo, estendemos os modelos de séries temporais autorregressivos de médias móveis gaussiano (ARMA) para a classe de distribuições simétricas. A classe de distribuições simétricas tem se tornado bastante popular por permitir uma maior flexibilidade na modelagem de dados que contêm observações atípicas. Propomos o modelo autorregressivo de médias móveis simétrico (SYMARMA), um modelo dinâmico para séries temporais com distribuição simétrica condicional. Nosso enfoque é semelhante ao que é dado em Benjamin et al. (2003) e Rocha e Cribari-Neto (2009).

Este capítulo está organizado em 4 seções. Na seção 2.1 o modelo é apresentado e algumas propriedades são descritas. Em seguida, na seção 2.2, são dadas expressões para o vetor escore e para a matriz informação de Fisher condicional e é desenvolvido um algoritmo para estimação dos parâmetros do modelo proposto. Testes de hipóteses para os parâmetros do modelo são apresentados na seção 2.3. Por fim, a seção 2.4 trata de como realizar previsões para observações futuras da série utilizando o modelo SYMARMA.

2.1 Definição do modelo

Suponha que y_t , $t = 1, \dots, T$, é uma variável aleatória e assuma que condicionalmente ao conjunto de informações passadas $\mathcal{F}_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1)$ y_t segue uma distribuição simétrica. Isto é, a densidade condicional de y_t dado $\mathcal{F}_{t-1}$ é

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} g \left\{ \frac{(y_t - \mu_t)^2}{\varphi} \right\}, \quad y_t \in \mathbb{R}, \mu_t \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi > 0, \quad (2.1)$$

em que μ_t é o parâmetro de locação, φ é o parâmetro de escala e $g(\cdot)$ é a função geradora de densidades, com $g(u) > 0$, para $u > 0$, sendo tal que $\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} g(u) du = 1$. Quando existem, a média e a variância de y_t , dado o conjunto de observações passadas $\mathcal{F}_{t-1}$, são expressas, respectivamente, por

$$E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t \quad \text{e} \quad \text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \xi \varphi, \quad (2.2)$$

em que $\xi > 0$ é uma constante que pode ser obtida pela derivada da função característica de $y_t | \mathcal{F}_{t-1}$ avaliada em zero dada por $\xi = -2\rho'(0)$, sendo $\rho(\cdot)$ a função característica de $y_t | \mathcal{F}_{t-1}$ e $\rho'(0) = \partial \rho(u) / \partial u|_{u=0}$ (Fang, Kotz e Ng, 1990, p.43).

Utilizaremos a notação $y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim S(\mu_t, \varphi, g)$ para denotar que a variável y_t , condicional ao conjunto de observações passadas $\mathcal{F}_{t-1}$, segue uma distribuição simétrica com parâmetro de locação μ_t , parâmetro de escala φ e função geradora de densidades g .

Teorema 1. *Se $Y \sim S(\mu, \varphi, g)$ então $a + bY \sim S(a + b\mu, b^2\varphi)$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, isto é, a distribuição de qualquer combinação linear de uma variável aleatória com distribuição simétrica é também simétrica.*

Prova do Teorema 1: Seja $W = a + bY$ com $Y \sim S(\mu, \varphi, g)$. Então,

$$F_W(w; \mu, \varphi) = P(W \leq w) = P(a + bY \leq w) = P\left(Y \leq \frac{w-a}{b}\right) = F_Y\left(\frac{w-a}{b}\right).$$

Temos que

$$f_W(w; \mu, \varphi) = f_Y\left(\frac{w-a}{b}\right) \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} g\left\{\frac{\left(\frac{w-a}{b} - \mu\right)^2}{\varphi}\right\} \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{b^2\varphi}} g\left\{\frac{(w - (a + b\mu))^2}{b^2\varphi}\right\}.$$

Logo,

$$W \sim S(a + b\mu, b^2\varphi).$$

Aqui, F_Y e F_W são utilizados para denotar a função distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias Y e W , respectivamente. E, f_Y e f_W são utilizados para denotar a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias Y e W , respectivamente. □

Diferentemente da classe de modelos simétricos de regressão, na especificação da média μ_t no modelo SYMARMA temos uma componente dinâmica adicional, τ_t , com termos autorregressivos e de médias móveis incluídos aditivamente. Definimos μ_t como

$$\mu_t = \mathbf{x}_t' \beta + \tau_t, \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{x}'_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tk})$ é o vetor com valores das k variáveis explicativas, $k < T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ um vetor de parâmetros desconhecidos e τ_t é um componente ARMA que será descrito a seguir.

Para motivar a definição da componente ARMA τ_t , considere $\gamma_t = y_t - \mathbf{x}'_t \beta$ como sendo um modelo ARMA(p, q), inicialmente, como função de um termo γ_t . Da forma como definimos γ_t temos que γ_{t-i} para $i > 0$ é mensurado em $\mathcal{F}_{t-1}$. A componente γ_t também pode ser expressa por

$$\gamma_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t, \quad (2.4)$$

em que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ e $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ são parâmetros autorregressivos e de médias móveis, respectivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Os termos de médias móveis, $r'_t s$, são erros aleatórios não-correlacionados que podem ser, por exemplo, erros de medida na escala original (isto é, $y_t - \mu_t$), ou, resíduos de Pearson, entre outros. Perceba que r_{t-j} para $j > 0$ é mensurado em $\mathcal{F}_{t-1}$ e, deste modo, temos que $E(r_{t-j} | \mathcal{F}_{t-1}) = r_{t-j}$ para $j > 0$. Assumindo que $E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ e tomando a esperança condicional com respeito ao conjunto de informações passadas $\mathcal{F}_{t-1}$ em (2.4) temos que

$$\begin{aligned} E(\gamma_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i E(\gamma_{t-i} | \mathcal{F}_{t-1}) + \sum_{j=1}^q \theta_j E(r_{t-j} | \mathcal{F}_{t-1}) + E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} \\ &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}. \end{aligned}$$

De (2.2) e (2.3) temos que $E(\gamma_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t - \mathbf{x}'_t \beta | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) - \mathbf{x}'_t \beta = \mu_t - \mathbf{x}'_t \beta = \tau_t$ e, desta forma,

$$\tau_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}.$$

Portanto,

$$\mu_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}. \quad (2.5)$$

O modelo SYMARMA é definido pela componente aleatória dada em (2.1) e pela compo-

nente dinâmica dada em (2.5).

2.1.1 Modelos relacionados

Modelo ARMA

O modelo clássico ARMA(p, q) é um caso particular do modelo SYMARMA e pode ser obtido considerando a ausência de variáveis exógenas e a distribuição condicional de y_t dado $\mathcal{F}_{t-1}$ em (2.1) como sendo normal. Deste modo, temos o modelo dado por

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t,$$

com $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ para $t = 1, \dots, T$ sendo os r_t 's não-correlacionados. Neste caso, a função de densidade condicional para y_t fica expressa por

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu_t)^2}{2\varphi} \right\},$$

isto é, $y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t, \varphi)$ com $\mu_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}$.

Modelo ARMAX

Considerando a distribuição condicional de y_t dado $\mathcal{F}_{t-1}$ em (2.1) como sendo normal obtemos um caso particular do modelo ARMAX.

O modelo ARMAX é um modelo autorregressivo de médias móveis que possui além da variável endógena dependente, variáveis explicativas exógenas. O modelo ARMAX(p, q) é definido por

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t,$$

com $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ para $t = 1, \dots, T$ sendo os r_t 's não-correlacionados.

O modelo SYMARMA(p, q) com distribuição normal condicional é dado por:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \mathbf{x}'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t \\ &= \alpha + \left(\mathbf{x}'_t \beta - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{x}'_{t-i} \beta \right) + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t, \end{aligned}$$

com $y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t, \varphi)$.

2.1.2 Condições de estacionariedade

Definimos agora as condições de estacionariedade para a média e a variância marginal da variável dependente y_t . As seguintes notações serão utilizadas ao decorrer desta subseção: $B^k y_t = y_{t-k}$ é o operador de defasagem, $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ e $\psi(B) = \Phi(B)^{-1} \Theta(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$.

Teorema 2. A média marginal de y_t no modelo SYMARMA definido por (2.1) e (2.5) é dada por

$$E(y_t) = \alpha^* + \mathbf{x}'_t \beta, \quad (2.6)$$

desde que $\Phi(B)$ seja invertível. A constante α^* é igual a $\alpha \Phi(1)^{-1}$.

Prova do Teorema 2: De (2.5) temos que

$$\mu_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}.$$

Seja $y_t = \mu_t + r_t$ em que os r_t 's são resíduos tais que $E(r_t) = 0$ e $E(r_t r_j) = 0$ para todo $t \neq j$, isto é, os resíduos possuem marginalmente média 0 e são não correlacionados. Dado μ_t como em (2.5) temos que

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + r_t \\ y_t &= \alpha + \mathbf{x}'_t \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t \\ y_t - \mathbf{x}'_t \beta &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t. \end{aligned}$$

Tomando $\omega_t = y_t - \mathbf{x}_t' \beta$, obtemos

$$\begin{aligned}\omega_t &= \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i \omega_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j} + r_t \\ \Phi(B)\omega_t &= \alpha + \Theta(B)r_t \\ \omega_t &= \alpha^* + \psi(B)r_t,\end{aligned}\tag{2.7}$$

desde que $\Phi(B)$ seja invertível. Aqui, $\alpha^* = \alpha\Phi(1)^{-1}$.

A média marginal de y_t , $E(y_t)$, é dada por

$$E(y_t) = E(\mathbf{x}_t' \beta + \omega_t) = \mathbf{x}_t' \beta + E(\omega_t) = \alpha^* + \mathbf{x}_t' \beta.$$

Note que $E(\omega_t) = E(\alpha^* + \psi(B)r_t) = \alpha^* + \psi(B)E(r_t) = \alpha^*$.

□

Teorema 3. A variância marginal de y_t no modelo SYMARMA é dada por

$$\text{Var}(y_t) = \alpha^{*2} + \psi^{(2)}(1)\xi\varphi,\tag{2.8}$$

em que $\alpha^* = \alpha\Phi(1)^{-1}$ e $\psi^{(2)}(B) = 1 + \psi_1^2 B + \psi_2^2 B^2 + \dots$, assumindo que $\Phi(B)$ é invertível.

Prova do Teorema 3: Seja $y_t = \mu_t + r_t$ onde os r_t 's são resíduos tais que $E(r_t) = 0$ e $E(r_t r_j) = 0$ para todo $t \neq j$. Temos que

$$\begin{aligned}\text{Var}(r_t) &= E(r_t^2) = E(E(r_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\text{Var}(y_t - \mu_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= E(\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\xi\varphi) = \xi\varphi.\end{aligned}$$

Note que μ_t dado em (2.5) é $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensurável. Portanto, tomando ω_t como em (2.7) a variância marginal de y_t , $\text{Var}(y_t)$, é dada por

$$\begin{aligned}\text{Var}(y_t) &= \text{Var}(\mathbf{x}_t' \beta + \omega_t) = \text{Var}(\omega_t) = E(\omega_t^2) \\ &= E[(\alpha^* + \psi(B)r_t)(\alpha^* + \psi(B)r_t)] = E(\alpha^{*2} + 2\psi(B)r_t + \psi(B)r_t \psi(B)r_t) \\ &= \alpha^{*2} + 2\psi(B)E(r_t) + E(\psi(B)r_t \psi(B)r_t) \\ &= \alpha^{*2} + E[(r_t + \psi_1 r_{t-1} + \psi_2 r_{t-2} + \dots)(r_t + \psi_1 r_{t-1} + \psi_2 r_{t-2} + \dots)] \\ &= \alpha^{*2} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j E(r_{t-i} r_{t-j})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{*2} + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E(r_{t-i}^2) = \alpha^{*2} + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \text{Var}(r_{t-i}) \\
&= \alpha^{*2} + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \xi \varphi.
\end{aligned}$$

□

De acordo com o Teorema 2 temos que a média marginal de y_t num modelo SYMARMA é estacionária desde que $\Phi(B)$ seja invertível e tenha-se $\mathbf{x}_t' \beta = c$ para todo t , sendo c uma constante. Enquanto que, pelo Teorema 3, a condição de estacionariedade para variância marginal de y_t num modelo SYMARMA é apenas que $\Phi(B)$ seja invertível.

2.2 Algoritmo de estimação

Da expressão (2.1) temos que o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\delta = (\alpha, \beta', \varphi, \phi', \theta')'$ condicional às m primeiras observações, em que $m = \max\{p, q\}$, denotada aqui por ℓ , é dada por

$$\ell = \sum_{t=m+1}^T \ell_t(\mu_t, \varphi) = \sum_{t=m+1}^T \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (2.9)$$

em que $\ell_t(\mu_t, \varphi) = -\log(\varphi)/2 + \log(g(u_t))$ e $u_t = (y_t - \mu_t)^2/\varphi$ sendo μ_t definido como em (2.5). Supõe-se que a função ℓ é regular (Cox e Hinkley, 1974, Cap. 9) e que é possível derivar ℓ em relação aos parâmetros desconhecidos e calcular alguns momentos dessas derivadas. Distribuições pertencentes à classe simétrica que não satisfazem às condições de regularidade e não têm derivadas ou momentos finitos não foram consideradas, por exemplo, a distribuição de Kotz.

Nesta dissertação, consideramos o método de máxima verossimilhança condicional para estimar os parâmetros do modelo SYMARMA. O vetor escore é formado pelas derivadas parciais de primeira ordem do logaritmo da função de verossimilhança condicional. Da expressão (2.9) pode-se calcular, pela regra da cadeia, o vetor escore $\mathbf{U}(\delta) = (\mathbf{U}(\alpha), \mathbf{U}(\beta)', \mathbf{U}(\varphi), \mathbf{U}(\phi)', \mathbf{U}(\theta'))'$ de dimensão $k + p + q + 2 \times 1$, com $\mathbf{U}(\alpha) = \partial \ell / \partial \alpha$, $\mathbf{U}(\beta) = (\mathbf{U}_1(\beta), \dots, \mathbf{U}_k(\beta))'$ em que $\mathbf{U}_s(\beta) = \partial \ell / \partial \beta_s$, $\mathbf{U}(\varphi) = \partial \ell / \partial \varphi$, $\mathbf{U}(\phi) = (\mathbf{U}_1(\phi), \dots, \mathbf{U}_p(\phi))'$ em que $\mathbf{U}_i(\phi) = \partial \ell / \partial \phi_i$ e $\mathbf{U}(\theta) = (\mathbf{U}_1(\theta), \dots, \mathbf{U}_q(\theta))'$ em que $\mathbf{U}_j(\theta) = \partial \ell / \partial \theta_j$.

De acordo com os resultados do Apêndice A e assumindo que a função $g(\cdot)$ é contínua e

diferenciável, as funções escore para α , β , φ , ϕ e θ ficam dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\alpha(\delta) &= \frac{1}{\varphi} \mathbf{v}'(\mathbf{y} - \mu), \\ \mathbf{U}_\beta(\delta) &= \frac{1}{\varphi} \mathbf{M}' \mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{y} - \mu), \\ \mathbf{U}_\varphi(\delta) &= \frac{1}{2\varphi} \left[\frac{1}{\varphi} (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{y} - \mu) - (T - m) \right], \\ \mathbf{U}_\phi(\delta) &= \frac{1}{\varphi} \mathbf{P}' \mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{y} - \mu) \text{ e} \\ \mathbf{U}_\theta(\delta) &= \frac{1}{\varphi} \mathbf{R}' \mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{y} - \mu), \end{aligned}$$

em que $\mathbf{y} = (y_{m+1}, \dots, y_T)'$, $\mu = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_T)'$ e $\mathbf{v} = (v_{m+1}, \dots, v_T)'$ sendo $v_t = v(u_t) = -2W_g(u_t)$ com $W_g(u_t) = \partial \log(g(u_t)) / \partial u_t$. Tem-se também $\mathbf{M}$ uma matriz $(T - m) \times k$ com o elemento (i, j) dado por $x_{(i+m)j} - \sum_{l=1}^p \phi_l x_{(i+m-l)j}$, $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \text{diag}\{v_{m+1}, \dots, v_T\}$, $\mathbf{P}$ uma matriz $(T - m) \times p$ com o elemento (i, j) igual a $y_{i+m-j} - \mathbf{x}'_{i+m-j} \beta$ e $\mathbf{R}$ é uma matriz $(T - m) \times q$ com o elemento (i, j) dado por r_{i+m-j} .

Expressões para $W_g(u_t)$ e $W'_g(u_t) = \partial W_g(u_t) / \partial u_t$ são apresentadas por Cysneiros (2004) para algumas distribuições simétricas e encontram-se reproduzidas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 Expressões para $W_g(u)$ e $W'_g(u)$ para algumas distribuições simétricas

Distribuição	$W_g(u)$	$W'_g(u)$
Normal	$-\frac{1}{2}$	0
t -Student	$-\frac{(v+1)}{2(v+u)}$	$\frac{(v+1)}{2(v+u)^2}$
t -Student generalizada	$-\frac{(r+1)}{2(s+u)}$	$\frac{(r+1)}{2(s+u)^2}$
Logística-I	$-\tanh\left(\frac{u}{2}\right)$	$-\text{sech}\left(\frac{u}{2}\right)/2$
Logística-II	$-\frac{\exp(-\sqrt{u})-1}{(-2\sqrt{u})[1+\exp(-\sqrt{u})]}$	$\frac{2\exp(-\sqrt{u})\sqrt{u}+\exp(-2\sqrt{u})-1}{-4u^{3/2}[1+\exp(-\sqrt{u})]^2}$
Logística generalizada	$-\frac{\alpha m[\exp(-\alpha\sqrt{u})-1]}{(-2\sqrt{u})[1+\exp(-\alpha\sqrt{u})]}$	$-\frac{\alpha m}{4} \frac{2\alpha\exp(-\alpha\sqrt{u})\sqrt{u}+\exp(-2\alpha\sqrt{u})-1}{u^{3/2}[1+\exp(-\alpha\sqrt{u})]^2}$
Exponencial potência	$-\frac{1}{2(1+k)u^{k/(k+1)}}$	$\frac{k}{2(1+k)^2 u^{(2k+1)/(k+1)}}$

O estimador de máxima verossimilhança condicional (EMVC) $\hat{\delta}$ do vetor de parâmetros δ é obtido igualando-se $\mathbf{U}(\delta)$ a zero. Exceto para $\mathbf{U}(\varphi)$, o sistema de equações não possui solução explícita e, desta forma, devemos utilizar um procedimento iterativo tal como Newton-Raphson para estimar os parâmetros do modelo.

O método iterativo de Newton-Raphson para a solução de uma equação $f(x) = 0$ é baseado na aproximação de Taylor para a função $f(x)$ na vizinhança do ponto x_0 , ou seja,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0,$$

obtendo-se

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ou, de uma forma mais geral,

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})},$$

sendo $x^{(i+1)}$ o valor de x no passo $(i+1)$, $x^{(i)}$ o valor de x no passo i , $f(x^{(i)})$ a função $f(x)$ avaliada em $x^{(i)}$ e $f'(x^{(i)})$ a derivada da função $f(x)$ avaliada em $x^{(i)}$.

Considerando que se deseja obter a solução do sistema de equações $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\delta}) = \partial \ell(\boldsymbol{\delta}) / \partial \boldsymbol{\delta} = 0$ e, usando a versão multivariada do método de Newton-Raphson, temos

$$\boldsymbol{\delta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(i)} - (\mathbf{H}^{(i)})^{-1} \mathbf{U}^{(i)},$$

sendo $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ e $\boldsymbol{\delta}^{(i+1)}$ os vetores de parâmetros estimados nos passos i e $(i+1)$, respectivamente, $\mathbf{U}^{(i)}$ o vetor escore avaliado no passo i , e $(\mathbf{H}^{(i)})^{-1}$ a inversa da matriz de segundas derivadas de $\ell(\boldsymbol{\delta})$, com elementos $\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_r \partial \delta_s$, avaliada no passo i .

Após algumas manipulações algébricas apresentadas no Apêndice B, a matriz de segundas derivadas $\mathbf{H}$ para o modelo SYMARMA é dada por

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_r \partial \delta_s} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\alpha\alpha} & \mathbf{H}_{\alpha\beta} & \mathbf{H}_{\alpha\varphi} & \mathbf{H}_{\alpha\phi} & \mathbf{H}_{\alpha\theta} \\ \mathbf{H}_{\beta\alpha} & \mathbf{H}_{\beta\beta} & \mathbf{H}_{\beta\varphi} & \mathbf{H}_{\beta\phi} & \mathbf{H}_{\beta\theta} \\ \mathbf{H}_{\varphi\alpha} & \mathbf{H}_{\varphi\beta} & \mathbf{H}_{\varphi\varphi} & \mathbf{H}_{\varphi\phi} & \mathbf{H}_{\varphi\theta} \\ \mathbf{H}_{\phi\alpha} & \mathbf{H}_{\phi\beta} & \mathbf{H}_{\phi\varphi} & \mathbf{H}_{\phi\phi} & \mathbf{H}_{\phi\theta} \\ \mathbf{H}_{\theta\alpha} & \mathbf{H}_{\theta\beta} & \mathbf{H}_{\theta\varphi} & \mathbf{H}_{\theta\phi} & \mathbf{H}_{\theta\theta} \end{pmatrix},$$

em que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{1}' \mathbf{a}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{M}' \mathbf{a}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \varphi} &= \frac{2}{\varphi^2} \mathbf{1}' \mathbf{b}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi \partial \alpha} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{P}' \mathbf{a}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta'} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{M}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{M}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \varphi} &= \frac{2}{\varphi^2} \mathbf{M}' \mathbf{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{\varphi^2} \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{f})), & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi \partial \phi'} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{P}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{P}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi \partial \varphi} &= \frac{2}{\varphi^2} \mathbf{P}' \mathbf{b}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{R}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{R}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \varphi} &= \frac{2}{\varphi^2} \mathbf{R}' \mathbf{b}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \phi'} &= -\frac{1}{\varphi} [\mathbf{M}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{P} - 2\mathbf{W}], \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \theta'} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{M}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{R}, & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi \partial \theta'} &= -\frac{1}{\varphi} \mathbf{P}' \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{R},
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha} = -\frac{1}{\varphi} \mathbf{R}' \mathbf{a},$$

em que $\mathbf{1}$ é um vetor $(T-m) \times 1$ de uns, $\mathbf{a} = (a_{m+1}, \dots, a_T)'$ com $a_t = -2 \{W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t\}$, $\mathbf{b} = (b_{m+1}, \dots, b_T)'$ com $b_t = \{W_g(u_t) + W'_g(u_t)u_t\} \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$, $\mathbf{D}(\mathbf{a}) = \text{diag} \{a_{m+1}, \dots, a_T\}$, $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \text{diag} \{s_{m+1}, \dots, s_T\}$, $\mathbf{D}(\mathbf{f}) = \text{diag} \{f_{m+1}, \dots, f_T\}$ com $f_t = \frac{1}{2} + W'_g(u_t)u_t^2 - \frac{1}{\varphi} v(u_t) \varepsilon_t^2$. Considere também $\mathbf{W}$ uma matriz $k \times p$ em que cada elemento (i, j) é igual a $\sum_{t=m+1}^T s_t x_{(t-j)i}$ com $s_t = W_g(u_t) \varepsilon_t$.

Outro método que pode ser utilizado para estimar os parâmetros δ do modelo SYMARMA é o *scoring* de Fisher. Esse método envolve a substituição da matriz de derivadas parciais de segunda ordem pela matriz de valores esperados das derivadas parciais, isto é, a substituição da matriz de segundas derivadas, $\mathbf{H}$, pela matriz de informação esperada de Fisher, $\mathbf{K}$. No nosso caso, a substituição é feita pela matriz informação esperada de Fisher condicional. Logo,

$$\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} + (\mathbf{K}^{(i)})^{-1} \mathbf{U}^{(i)},$$

sendo que $\mathbf{K}$ tem elementos dados por

$$K_{r,s} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\delta)}{\partial \delta_r \partial \delta_s} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \delta_r} \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \delta_s} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right].$$

De acordo com os resultado do Apêndice C, a matriz de informação esperada de Fisher condicional para o modelo SYMARMA é expressa por

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} & 0 & \mathbf{K}_{\alpha\phi} & \mathbf{K}_{\alpha\theta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\beta\phi} & \mathbf{K}_{\beta\theta} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\phi\alpha} & \mathbf{K}_{\phi\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{K}_{\phi\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta\alpha} & \mathbf{K}_{\theta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\phi} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} &= 4\varphi^{-1}d_g(T-m), & \mathbf{K}_{\beta\alpha} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{1}^T\mathbf{M}, & \mathbf{K}_{\phi\alpha} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{1}^T\mathbf{P}, \\ \mathbf{K}_{\theta\alpha} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{1}^T\mathbf{R}, & \mathbf{K}_{\beta\beta} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{M}^T\mathbf{M}, & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} &= (4\varphi^2)^{-1}(T-m)(4f_g-1), \\ \mathbf{K}_{\phi\phi} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{P}^T\mathbf{P}, & \mathbf{K}_{\theta\theta} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{R}^T\mathbf{R}, & \mathbf{K}_{\beta\phi} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{M}^T\mathbf{P}, \\ \mathbf{K}_{\phi\theta} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{P}^T\mathbf{R}, & \mathbf{K}_{\beta\theta} &= 4\varphi^{-1}d_g\mathbf{M}^T\mathbf{R}, \end{aligned}$$

em que as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ são definidas como anteriormente. Além disso, temos que $d_g = E[W_g^2(u_t)u_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ e $f_g = E[W_g^2(u_t)u_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]$.

A Tabela 2.2, reproduzida de Cysneiros (2004), mostra valores de d_g e f_g para algumas distribuições simétricas.

Tabela 2.2 Valores de d_g , f_g e ξ para algumas distribuições simétricas

Distribuição	d_g	f_g	ξ
Normal	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
t -Student	$\frac{(v+1)}{4(v+3)}$	$\frac{3(v+1)}{4(v+3)}$	$\frac{v}{v-2}$, $v > 2$
t -Student generalizada	$\frac{r(r+1)}{4s(r+3)}$	$\frac{3(r+1)}{4(r+3)}$	$\frac{s}{r-2}$, $s > 0, r > 2$
Logística-I	0,36931	1,00345	0,79569
Logística-II	$\frac{1}{12}$	0,60749	$\frac{\pi^2}{3}$
Logística generalizada	$\frac{\alpha^2 m^2}{4(2m+1)}$	$\frac{2m(2+m^2\psi'(m))}{4(2m+1)}$	$2\psi'(m)$
Exponencial potência	$\frac{\Gamma\{(3-k)/2\}}{4(2^{k-1})(1+k)^2\Gamma\{(k+1)/2\}}$	$\frac{(k+3)}{4(k+1)}$	$2^{(1+k)} \frac{\Gamma\{3(k+1)/2\}}{\Gamma\{(k+1)/2\}}$

O método *scoring* de Fisher tem sido utilizado por diversos autores para estimar os parâmetros dos modelos simétricos de regressão [ver, por exemplo, Cysneiros et al. (2005)]. Nesta dissertação também escolhemos o método *scoring* de Fisher para estimar os parâmetros do modelo SYMARMA. O processo iterativo fica dado por:

$$\delta^{*(i+1)} = \delta^{*(i)} + \mathbf{K}(\delta^{*(i)})^{-1}\mathbf{U}(\delta^{*(i)})$$

e

$$\varphi^{(i+1)} = \frac{1}{T-m}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{(i+1)})'\mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{(i+1)}).$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$, sendo $\delta^* = (\alpha, \beta', \phi', \theta')'$. Os valores iniciais dos parâmetros δ , $\delta^{*(0)}$ e $\varphi^{(0)}$, são dados pelas estimativas obtivas através do ajuste do modelo clássico ARMA.

Sob as condições de regularidade usuais e para T suficientemente grande, temos que o estimador de máxima verossimilhança condicional converge em distribuição para uma distribuição normal, isto é,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \sim N_{(k+p+q+2)} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}, \mathbf{K}^{-1} \right) \quad (2.10)$$

aproximadamente, em que N_r denota a distribuição normal r -dimensional, e $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\phi}$, e $\hat{\theta}$ são os estimadores de máxima verossimilhança condicional de α , β , φ , ϕ , e θ , respectivamente. Desta forma, $\mathbf{K}^{-1}$ avaliado em $\hat{\delta}$ é um estimador consistente da variância assintótica de $\hat{\delta}$.

2.3 Testes de hipótese

Hipóteses envolvendo os parâmetros $\delta = (\alpha, \beta', \varphi, \phi', \theta')'$ podem ser expressas na forma geral

$$H_0 : \mathbf{Z}\delta = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad H_1 : \mathbf{Z}\delta \neq \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

em que $\mathbf{Z}$ é uma matriz $r \times (k + p + q + 2)$ de posto completo r ($r < k + p + q + 2$). A hipótese nula pode contemplar situações bastante simples, como por exemplo testar $H_0: \beta' = 0$ contra $H_1: \beta' \neq 0$. A estatística utilizada para testar os modelos obtidos das restrições H_0 e H_1 em (2.11) pode ser a razão de verossimilhanças condicional (RLC) dada por

$$\lambda = 2 \left\{ \ell(\hat{\delta}) - \ell(\tilde{\delta}) \right\},$$

onde $\ell(\cdot)$ é o logaritmo da função de verossimilhança condicional, $\tilde{\delta}$ é o estimador de máxima verossimilhança condicional (EMVC) restrito de δ (sob a hipótese H_0 em (2.11)) e $\hat{\delta}$ é o EMVC irrestrito de δ (sob a hipótese H_1 em (2.11)).

Supondo válidas certas condições de regularidade e sob H_0 , $\lambda \xrightarrow{D} \chi_r^2$, em que $\xrightarrow{D}$ denota convergência em distribuição, assim o teste pode ser realizado utilizando os valores críticos aproximados da distribuição χ_r^2 .

Dada a normalidade assintótica do EMVC de δ , $\hat{\delta}$, em (2.10), pode-se facilmente construir intervalos de confiança aproximados para os elementos de δ .

2.4 Previsões utilizando o modelo SYMARMA

A previsão na origem t e horizonte h será denotada por $\hat{y}_t(h)$. Aqui, utilizamos os seguintes fatos:

$$\hat{y}_{t+k} = \hat{y}_t(k), \quad k > 0,$$

$$\hat{y}_{t+k} = y_{t+k}, \quad k \leq 0,$$

$$\hat{r}_{t+k} = 0, \quad k > 0,$$

$$\hat{r}_{t+k} = \hat{r}_{t+k}, \quad k \leq 0.$$

O fato de $\hat{r}_{t+k} = 0$ para $k > 0$ é que admitimos prever de forma correta a observação y_{t+k} .

As estimativas para μ_t , $t = m+1, \dots, T$, denotadas por $\hat{\mu}_t$, são obtidas a partir das estimativas de máxima verossimilhança condicional de δ , $\hat{\delta}$; temos que

$$\hat{\mu}_t = \hat{\alpha} + \mathbf{x}'_t \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \left\{ y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \hat{\beta} \right\} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{t-j}.$$

Utilizando $\hat{\mu}_t$ podemos obter as estimativas para r_t , $\hat{r}_t$, para $t = m+1, \dots, T$. Por exemplo, para $r_t = y_t - \mu_t$, isto é, erros de medida na escala original, temos que

$$\hat{r}_t = y_t - \hat{\mu}_t.$$

Assim, a estimativa para y_{T+1} é dada por

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+1} &= \hat{\mu}_{T+1} + \hat{r}_{T+1} = \hat{\mu}_{T+1} \\ &= \hat{\alpha} + \mathbf{x}'_{T+1} \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \left\{ y_{T+1-i} - \mathbf{x}'_{T+1-i} \hat{\beta} \right\} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{T+1-j}. \end{aligned}$$

Para o tempo $T+2$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+2} &= \hat{\mu}_{T+2} + \hat{r}_{T+2} = \hat{\mu}_{T+2} \\ &= \hat{\alpha} + \mathbf{x}'_{T+2} \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \left\{ y_{T+2-i} - \mathbf{x}'_{T+2-i} \hat{\beta} \right\} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{T+2-j}, \end{aligned}$$

e assim por diante.

Estudo de Simulação

No campo da observação, a chance só favorece uma mente preparada.

—LOUIS PASTEUR

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações realizadas no modelo SYMARMA, baseados em amostras de tamanho finito com e sem observações atípicas. O objetivo destas simulações é avaliar o desempenho e o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança condicional (EMVC) para os parâmetros autorregressivos (ϕ 's), de médias móveis (θ 's) e de escala (φ) do modelo SYMARMA. Avaliaremos também a adequação do ajuste e a performance do modelo sob previsões futuras perante observações atípicas de diferentes intensidades de impacto e em diferentes locais na amostra.

Os resultados obtidos mostram que a presença de observações atípicas na amostra pode afetar bastante as estimativas dos parâmetros do modelo, dependendo do tamanho amostral, do tipo de outlier presente, da quantidade e da intensidade do impacto do(s) outlier(s). Além disso, as previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) quando assumimos distribuição condicional de caudas mais pesadas, na presença de outliers são, em geral, mais precisas que as previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) quando assumimos distribuição normal condicional.

Este capítulo começa com a definição dos dois tipos de outliers utilizados nas simulações: o outliers aditivo (AO) e o outlier inovador (IO). Em seguida, na seção 3.2, será descrito o algoritmo gerador de séries SYMARMA. O desempenho dos EMVC para os parâmetros dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) com distribuições normal e t de Student condicionais serão estudados na seção 3.3. Resultados para adequação do ajuste e performance do modelo sob previsões futuras perante observações atípicas serão apresentados, respectivamente, nas seções 3.4 e 3.5. Finalmente, na seção 3.6, serão apresentados os resultados das simulações do desempenho e comportamento dos EMVC para o modelo SYMARMA(1,1).

3.1 Outliers em modelos de séries temporais

Outliers em séries temporais podem ser classificados como aditivos, inovadores, mudança de nível e mudança temporária de acordo com a sua natureza. Uma discussão mais detalhada sobre a natureza e motivação dos outliers em séries temporais pode ser encontrada em Fox (1972), Chang, et al. (1988), Chen e Liu (1993a,b), Ota (1996), entre outros.

Nesta seção apresentaremos o conceito de outlier em séries temporais e os dois tipos de outliers que serão utilizados nas simulações deste capítulo, outlier aditivo e outlier inovador.

Podemos descrever uma série temporal com outlier através do modelo dado por

$$y_t = x_t + f(t), \quad (3.1)$$

em que x_t representa uma série temporal sem outlier e $f(t)$ é uma função representando uma intervenção exógena no período t , tal como os outliers. A intervenção é assumida ser da forma

$$f(t) = \omega \frac{\Gamma_1(B)}{\Gamma_2(B)} \xi_t^{(T)},$$

em que ω é uma constante representando o impacto inicial da perturbação e a razão $\Gamma_1(B)/\Gamma_2(B)$ descreve o seu comportamento dinâmico. A função indicadora $\xi_t^{(T)}$ é tal que

$$\xi_t^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{para } t = T \\ 0 & \text{para } t \neq T \end{cases},$$

isto é, $\xi_t^{(T)}$ é uma variável indicadora do período T em que ocorre a perturbação.

3.1.1 Outlier aditivo (AO)

Um *outlier aditivo* (AO) caracteriza-se por afetar a série em apenas uma observação. Pode ocorrer de diversas maneiras como, por exemplo, um erro de digitação ou de medição.

Tomando $\Gamma_1(B)/\Gamma_2(B) = 1$ em (3.1) obtemos um modelo que descreve uma série temporal com um outlier aditivo. Este modelo é expressso por

$$y_t = x_t + \omega \xi_t^{(T)}.$$

Assumindo que mais de um outlier ocorra, o modelo fica representado por

$$y_t = x_t + \sum_{i=1}^k \omega_i \xi_t^{(T_i)},$$

em que k é o número total de outliers, ω_i é a intensidade do impacto do i -ésimo outlier no tempo T_i e $\xi_t^{(T_i)}$ é uma função indicadora com $\xi_t^{(T_i)} = 1$ para $t = T_i$ e $\xi_t^{(T_i)} = 0$ para $t \neq T_i$.

Para ilustrar o efeito de um outlier aditivo na série, simulamos um processo SYMARMA(1,0) sujeito a esse tipo de perturbação. Foram geradas 60 observações a partir do modelo

$$y_t = 2 + 0,6y_{t-1} + r_t \quad (3.2)$$

com $r_t \sim N(0, 1)$. Um AO de impacto $\omega = 5$ foi introduzido na série no tempo $t = 30$. A série resultante é apresentada na Figura 3.1. De (2.6), a média marginal de y_t fica dada por

$$E(y_t) = \alpha^* = \alpha \Phi(1)^{-1} = \frac{2}{1 - 0,6} = 5.$$

Note que, para o modelo (3.2), temos que $\Phi(B) = 1 - \phi B$ e, conseqüentemente, $\Phi(1) = 1 - 0,6$.

Na Figura 3.1 percebe-se que os valores das observações mantêm-se inalterados exceto o da observação $t = 30$ que teve o seu valor real acrescido de 5 tornando-se assim uma observação atípica.

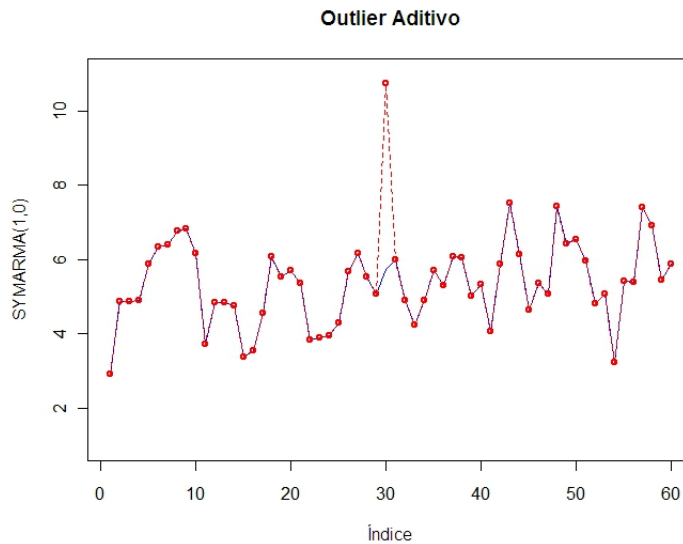


Figura 3.1 Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) sem regressores com $\alpha = 2$ e $\phi = 0,6$, contaminada (traço descontinuo) por um outlier aditivo.

3.1.2 Outlier inovador (IO)

Diferentemente do outlier aditivo, o *outlier inovador* (IO) caracteriza-se por ter um efeito que se propaga para observações subsequentes. Por exemplo, em processos de produção industrial isto corresponde a uma perturbação no sistema subjacente.

Tomando $\Gamma_1(B)/\Gamma_2(B) = \Theta(B)/\Phi(B)$, em que $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ e $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, sendo $B^k y_t = y_{t-k}$, o modelo (3.1) fica dado por

$$y_t = x_t + \omega \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t^{(T)}.$$

Este modelo é uma representação para séries temporais com um outlier do tipo inovador.

Assumindo que mais de um outlier ocorra, o modelo fica representado por

$$y_t = x_t + \sum_{i=1}^k \omega_i \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t^{(T_i)},$$

em que k é o número total de outliers, ω_i é a intensidade do i -ésimo outlier no tempo T_i e $\xi_t^{(T_i)}$ é uma função indicadora com $\xi_t^{(T_i)} = 1$ para $t = T_i$ e $\xi_t^{(T_i)} = 0$ para $t \neq T_i$.

Em particular, para o modelo SYMARMA(1,0) temos que

$$\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t^{(T)} = \xi_t^{(T)} + \phi \xi_{t-1}^{(T)} + \phi^2 \xi_{t-2}^{(T)} + \dots,$$

para o modelo SYMARMA(0,1)

$$\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t^{(T)} = \xi_t^{(T)} + \theta \xi_{t-1}^{(T)}$$

e para o modelo SYMARMA(1,1)

$$\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t^{(T)} = \xi_t^{(T)} + \phi \left(\frac{\phi + \theta}{\phi} \right) \xi_{t-1}^{(T)} + \phi^2 \left(\frac{\phi + \theta}{\phi} \right) \xi_{t-2}^{(T)} + \dots.$$

O efeito de um outlier inovador na série apresentada em (3.2) é ilustrado na Figura 3.2. Aqui, perturbamos a série no período $t = 30$ com um outlier inovador de magnitude $\omega = 5$. Pode-se notar que os valores observados dos períodos $t = 30$ a $t = 37$ situam-se todos acima dos correspondentes à série original, o que confirma que os outliers inovadores, diferentemente dos outliers aditivos, transmitem o seu efeito a observações posteriores.

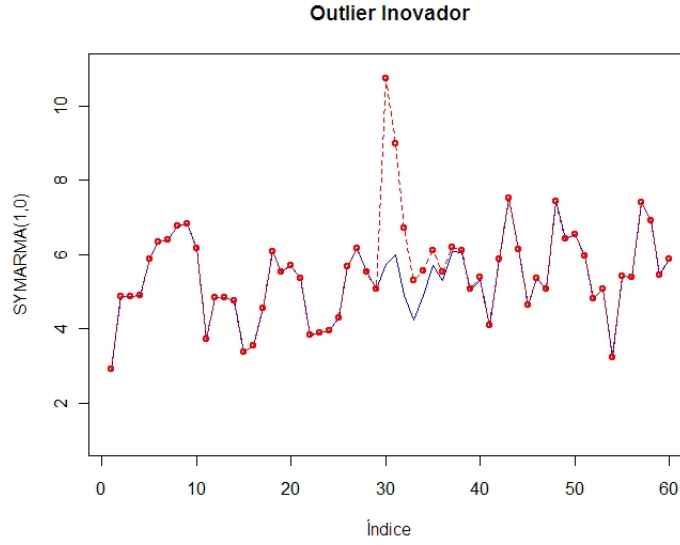


Figura 3.2 Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) sem regressores com $\alpha = 2$ e $\phi = 0,6$, contaminada (traço descontinuo) por um outlier inovador.

3.2 Algoritmo gerador de séries SYMARMA

Nesta seção apresentamos um algoritmo gerador de séries SYMARMA(p, q). O algoritmo é baseado nos seguintes passos:

1. Gere $T + m$ observações de uma variável aleatória r tal que $r \sim S(0, 1, g)$. Aqui T é o número de observações da série a ser gerada e $m = \max\{p, q\}$;
2. Para t variando de $m + 1$ a $m + T$ faça

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \phi_1(y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \boldsymbol{\beta}) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mathbf{x}_{t-p}' \boldsymbol{\beta}) + \theta_1 r_{t-1} + \cdots + \theta_q r_{t-q} + r_t,$$

em que $\mathbf{x}_t$ é o vetor com as observações das variáveis exógenas no tempo t ;

3. A serie é composta pelos T valores de y de $m + 1$ a $m + T$.

Quando variáveis exógenas não estão presentes no modelo o passo 2 fica dado por

2. Para t variando de $m + 1$ a $m + T$ faça

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 r_{t-1} + \cdots + \theta_q r_{t-q} + r_t.$$

3.3 Desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança condicional para os parâmetros dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1)

Nesta seção avaliamos, através de estudos de simulação, o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança condicional (EMVC) para os parâmetros autorregressivo, de média móvel e de escala dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1), sem a presença de regressores, para alguns tamanhos amostrais $n = 36, 72, 144$ e 288 . Observações das séries SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1), expressas por

$$\begin{aligned} \text{SYMARMA}(1,0): \quad y_t &= \alpha + \phi y_{t-1} + r_t, & t = 1, 2, \dots, T \\ \text{SYMARMA}(0,1): \quad y_t &= \alpha + \theta r_{t-1} + r_t, & t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned}$$

foram geradas com α fixo igual a 0 utilizando o método descrito na seção 3.2 assumindo que as variáveis aleatórias r_t são independentes e identicamente distribuídas como normal e t de Student com 4 graus de liberdade. O valor para o parâmetro de escala, ϕ , foi mantido fixo igual a 2 para o modelo SYMARMA com distribuição normal condicional e igual a 1 para modelo SYMARMA distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade. Desta forma, obtemos a mesma variabilidade para ambas as séries (normal e t de Student). Note que a variância marginal de y_t , obtida de (2.8), é igual a

$$\text{Var}(y_t) = \alpha^{*2} + \psi^{(2)}(1)\xi\phi,$$

e que apenas ξ depende da distribuição de y_t . Para distribuição normal $\xi = 1$ e para distribuição t de Student com ν graus de liberdade $\xi = \nu/(\nu - 2)$, $\nu > 2$ [ver Tabela 2.2]. Obtemos então

$$\text{Var}(y_t) = \begin{cases} \alpha^{*2} + \psi^{(2)}(1)2, & \text{para } y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \text{Normal com } \phi = 2 \text{ e} \\ \alpha^{*2} + \psi^{(2)}(1)2, & \text{para } y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim t \text{ de Student com } \phi = 1, \end{cases}$$

isto é, a mesma variância marginal de y_t .

Os coeficientes autorregressivo e de média móvel, ϕ e θ , respectivamente, tomam valores 0,1, 0,3, 0,5 e 0,7.

O estudo de simulação foi baseado em 10.000 réplicas de Monte Carlo. Os estimadores de máxima verossimilhança condicional foram obtidos através da maximização do logaritmo da função de verossimilhança condicional (2.9) utilizando o algoritmo de otimização não-linear escore de Fisher [detalhes, ver Seção 2.2]. Todas as rotinas computacionais foram desenvol-

vidas pelo autor e organizadas numa biblioteca denominada `elliptical.ts` utilizando o ambiente de programação R em sua versão 13.0. Detalhes da sintaxe de comandos para ajuste de um modelo SYMARMA utilizando a biblioteca `elliptical.ts` serão apresentados na seção 4.3.

Os critérios abaixo foram utilizados para avaliar e comparar o desempenho dos EMVC dos parâmetros ϕ , θ e φ . Com intuito de generalizar a notação, consideramos $\hat{e}_i$ como substituto para $\hat{\phi}_i$, $\hat{\theta}_i$ ou $\hat{\varphi}_i$, isto é, $\hat{e}_i$ é o valor estimado do parâmetro e na i -ésima réplica em que e é utilizado como substituto para ϕ , θ ou φ .

(a) Média dos valores estimados

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{10.000} \hat{e}_i}{10.000};$$

(b) Viés de $\hat{e}$

$$\text{Viés}(\hat{e}) = \bar{e} - e;$$

(c) Variância estimada de $\hat{e}$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{e}) = \frac{\sum_{i=1}^{10.000} (\hat{e}_i - \bar{e})^2}{10.000};$$

(d) Erro quadrático médio (EQM) estimado de $\hat{e}$

$$\widehat{\text{EQM}}(\hat{e}) = \frac{\sum_{i=1}^{10.000} (\hat{e}_i - e)^2}{10.000}.$$

Modelos SYMARMA(1,0)

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 são apresentadas a média, o viés, a variância e o erro quadrático médio das estimativas dos parâmetros autorregressivo (ϕ) e de escala (φ), respectivamente, obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) gerados de acordo com as configurações citadas na introdução da seção 3.3.

Podemos notar que a precisão das estimativas está diretamente relacionada com o tamanho

amostral: quando $n \rightarrow \infty$ temos que o viés de $\hat{\phi}$, em média, diminui consideravelmente. Quando incrementamos o tamanho amostral de $n = 36$ para $n = 288$ a redução no viés da estimativa de ϕ foi, em média, de pelo menos 85,8% (passou de 0,037 para 0,005 quando $\phi = 0,1$) para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional e 89,2% (passou de 0,070 para 0,008 quando $\phi = 0,7$) para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade. A redução média do viés de $\hat{\phi}$ também foi bastante significativa quando passamos de $n = 36$ para $n = 288$; pelo menos 90% (passou de 0,117 para 0,012 quando $\phi = 0,3$) para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional e 85,9% (passou de 0,033 para 0,005 considerando $\phi = 0,1$) para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade.

Em todos os cenários considerados, os parâmetros ϕ e φ foram, em média, subestimados, isto é, a estimativa fornecida pelo EMVC para ϕ (ou φ) foi menor que o valor verdadeiro do parâmetro.

Em se tratando da variância das estimativas do parâmetro ϕ , em ambos modelos a mesma não foi superior a 0,027. Isto demonstra a acurácia do estimador $\hat{\phi}$. No que diz respeito à variância das estimativas do parâmetro φ , notamos que a variabilidade das estimativas é bem maior no modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional. Por fim, verifica-se que em ambos modelos a variabilidade das estimativas diminui quando $n \rightarrow \infty$.

Conforme mostramos, as estimativas dos parâmetros ϕ e φ obtidas pelo EMVC são bastante precisas. Isso faz com que os resultados obtidos para o EQM sejam equivalentes aos da variância estimada.

Na Figura 3.3 temos os resultados apresentados em forma de gráficos o que facilita a comparação do comportamento dos modelos SYMARMA (sob distribuição normal condicional e t de Student condicional) no que diz respeito às estimativas obtidas pelo EMVC.

Nota-se que em todos os cenários considerados o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade obteve, em média, menores vieses para as estimativas dos parâmetros, do que o modelo sob distribuição normal condicional.

Modelos SYMARMA(0,1)

Os valores da média, do viés, da variância e do erro quadrático médio das estimativas do parâmetro de média móvel (θ) e do parâmetro escala (φ) são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 3.3 e 3.4.

Assim como nos modelos SYMARMA(1,0), as estimativas obtidas pelo EMVC para θ e φ

tornam-se mais precisas à medida que o tamanho amostral aumenta. Aqui, o EMVC para θ (ou ϕ) também forneceu, em média, estimativas menores que o valor verdadeiro do parâmetro.

A variância e o EQM de $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ diminuem quando $n \rightarrow \infty$ e são menores para modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade [ver Figura 3.4]. Nota-se também que estas medidas aparentam ser invariantes a θ .

Em todos os cenários considerados, as estimativas obtidas pelo EMVC para θ no modelo SYMARMA(0,1) obtiveram, em média, viés menor do que as estimativas obtidas pelo EMVC para ϕ no modelo SYMARMA(1,0), mas com maior EQM. Em média, os vieses de $\hat{\theta}$ foram sempre menor que 0,078 e o EQM estimado de $\hat{\theta}$ não ultrapassou 0,035.

Aqui, também verificamos que o modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade teve uma performance melhor que o modelo sob distribuição normal condicional em todos os cenários considerados.

Tabela 3.1 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro ϕ nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		36		72	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t ₄	N(0,2)	t ₄
0,1	Média	0,063	0,072	0,081	0,087
	Viés	-0,037	-0,028	-0,019	-0,013
	Variância	0,027	0,023	0,013	0,011
	EQM	0,029	0,024	0,014	0,011
0,3	Média	0,246	0,260	0,272	0,280
	Viés	-0,054	-0,040	-0,028	-0,020
	Variância	0,026	0,022	0,013	0,010
	EQM	0,029	0,024	0,013	0,010
0,5	Média	0,428	0,445	0,463	0,474
	Viés	-0,072	-0,055	-0,037	-0,026
	Variância	0,024	0,020	0,011	0,009
	EQM	0,029	0,023	0,012	0,010
0,7	Média	0,609	0,630	0,654	0,666
	Viés	-0,091	-0,070	-0,046	-0,034
	Variância	0,020	0,017	0,009	0,006
	EQM	0,028	0,022	0,011	0,008

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		144		288	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t ₄	N(0,2)	t ₄
0,1	Média	0,090	0,093	0,095	0,097
	Viés	-0,010	-0,007	-0,005	-0,003
	Variância	0,007	0,005	0,003	0,003
	EQM	0,007	0,005	0,003	0,003
0,3	Média	0,286	0,290	0,293	0,296
	Viés	-0,014	-0,010	-0,007	-0,004
	Variância	0,006	0,005	0,003	0,002
	EQM	0,006	0,005	0,003	0,002
0,5	Média	0,481	0,487	0,490	0,494
	Viés	-0,019	-0,013	-0,010	-0,006
	Variância	0,005	0,004	0,003	0,002
	EQM	0,006	0,004	0,003	0,002
0,7	Média	0,677	0,684	0,689	0,692
	Viés	-0,023	-0,016	-0,011	-0,008
	Variância	0,004	0,003	0,002	0,001
	EQM	0,004	0,003	0,002	0,001

Tabela 3.2 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro ϕ nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		36		72	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t ₄	N(0,2)	t ₄
0,1	Média	1,885	0,967	1,944	0,984
	Viés	-0,115	-0,033	-0,056	-0,016
	Variância	0,217	0,104	0,111	0,050
	EQM	0,230	0,105	0,114	0,050
0,3	Média	1,883	0,964	1,945	0,983
	Viés	-0,117	-0,036	-0,055	-0,017
	Variância	0,213	0,103	0,111	0,051
	EQM	0,227	0,104	0,114	0,051
0,5	Média	1,884	0,964	1,945	0,982
	Viés	-0,116	-0,036	-0,055	-0,018
	Variância	0,216	0,102	0,112	0,050
	EQM	0,229	0,103	0,115	0,050
0,7	Média	1,879	0,959	1,940	0,983
	Viés	-0,121	-0,041	-0,060	-0,017
	Variância	0,215	0,099	0,110	0,050
	EQM	0,230	0,101	0,114	0,050
ϕ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		144		288	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t ₄	N(0,2)	t ₄
0,1	Média	1,973	0,993	1,989	0,995
	Viés	-0,027	-0,007	-0,011	-0,005
	Variância	0,055	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,056	0,025	0,028	0,012
0,3	Média	1,975	0,992	1,988	0,996
	Viés	-0,025	-0,008	-0,012	-0,004
	Variância	0,056	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,056	0,025	0,028	0,012
0,5	Média	1,974	0,992	1,989	0,996
	Viés	-0,026	-0,008	-0,011	-0,004
	Variância	0,056	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,057	0,025	0,028	0,012
0,7	Média	1,972	0,991	1,989	0,996
	Viés	-0,028	-0,009	-0,011	-0,004
	Variância	0,055	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,056	0,025	0,028	0,012

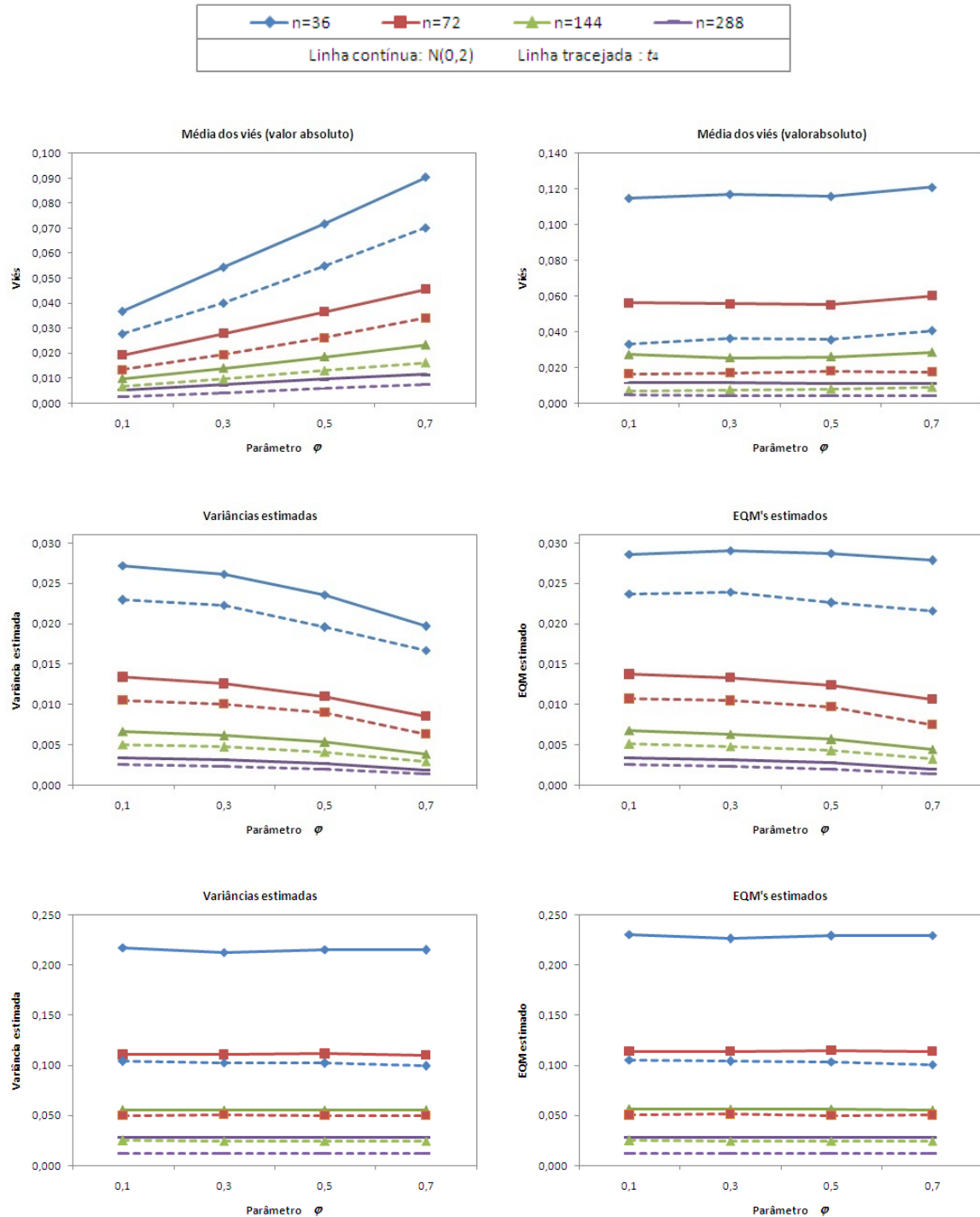


Figura 3.3 Média dos vieses obtidos das estimativas do parâmetro ϕ e ϕ (gráficos superiores), variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro ϕ (gráficos centrais) e variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro ϕ (gráficos inferiores) nas simulações do modelo SYMARMA(1,0).

Tabela 3.3 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro θ nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).

θ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		36		72	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t_4	N(0,2)	t_4
0,1	Média	0,070	0,077	0,084	0,089
	Viés	-0,030	-0,023	-0,016	-0,011
	Variância	0,032	0,026	0,015	0,011
	EQM	0,033	0,027	0,015	0,012
0,3	Média	0,268	0,275	0,284	0,288
	Viés	-0,032	-0,025	-0,016	-0,012
	Variância	0,032	0,027	0,015	0,011
	EQM	0,033	0,027	0,015	0,012
0,5	Média	0,458	0,466	0,480	0,485
	Viés	-0,042	-0,034	-0,020	-0,015
	Variância	0,031	0,026	0,015	0,011
	EQM	0,033	0,027	0,015	0,012
0,7	Média	0,623	0,632	0,665	0,672
	Viés	-0,077	-0,068	-0,035	-0,028
	Variância	0,029	0,025	0,015	0,011
	EQM	0,035	0,030	0,016	0,012

θ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		144		288	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t_4	N(0,2)	t_4
0,1	Média	0,092	0,095	0,096	0,098
	Viés	-0,008	-0,005	-0,004	-0,002
	Variância	0,007	0,005	0,004	0,003
	EQM	0,007	0,005	0,004	0,003
0,3	Média	0,292	0,294	0,296	0,298
	Viés	-0,008	-0,006	-0,004	-0,002
	Variância	0,007	0,005	0,004	0,003
	EQM	0,007	0,005	0,004	0,003
0,5	Média	0,490	0,493	0,495	0,497
	Viés	-0,010	-0,007	-0,005	-0,003
	Variância	0,007	0,005	0,004	0,003
	EQM	0,007	0,005	0,004	0,003
0,7	Média	0,683	0,688	0,691	0,694
	Viés	-0,017	-0,012	-0,009	-0,006
	Variância	0,007	0,005	0,004	0,003
	EQM	0,008	0,006	0,004	0,003

Tabela 3.4 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).

θ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		36		72	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t_4	N(0,2)	t_4
0,1	Média	1,884	0,962	1,945	0,984
	Viés	-0,116	-0,038	-0,055	-0,016
	Variância	0,217	0,101	0,110	0,050
	EQM	0,230	0,103	0,113	0,050
0,3	Média	1,889	0,965	1,948	0,986
	Viés	-0,111	-0,035	-0,052	-0,014
	Variância	0,218	0,102	0,111	0,050
	EQM	0,230	0,104	0,113	0,050
0,5	Média	1,905	0,976	1,956	0,991
	Viés	-0,095	-0,024	-0,044	-0,009
	Variância	0,221	0,105	0,112	0,051
	EQM	0,230	0,106	0,114	0,051
0,7	Média	1,949	1,004	1,979	1,007
	Viés	-0,051	0,004	-0,021	0,007
	Variância	0,232	0,114	0,115	0,053
	EQM	0,235	0,114	0,115	0,053

θ	Medidas de centralização e dispersão	n			
		144		288	
		Distribuição dos Erros		Distribuição dos Erros	
		N(0,2)	t_4	N(0,2)	t_4
0,1	Média	1,973	0,992	1,988	0,995
	Viés	-0,027	-0,008	-0,012	-0,005
	Variância	0,055	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,055	0,025	0,028	0,012
0,3	Média	1,974	0,993	1,989	0,996
	Viés	-0,026	-0,007	-0,011	-0,004
	Variância	0,055	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,055	0,025	0,028	0,012
0,5	Média	1,978	0,996	1,991	0,997
	Viés	-0,022	-0,004	-0,009	-0,003
	Variância	0,055	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,055	0,025	0,028	0,012
0,7	Média	1,991	1,004	1,997	1,001
	Viés	-0,009	0,004	-0,003	0,001
	Variância	0,056	0,025	0,028	0,012
	EQM	0,056	0,026	0,028	0,012

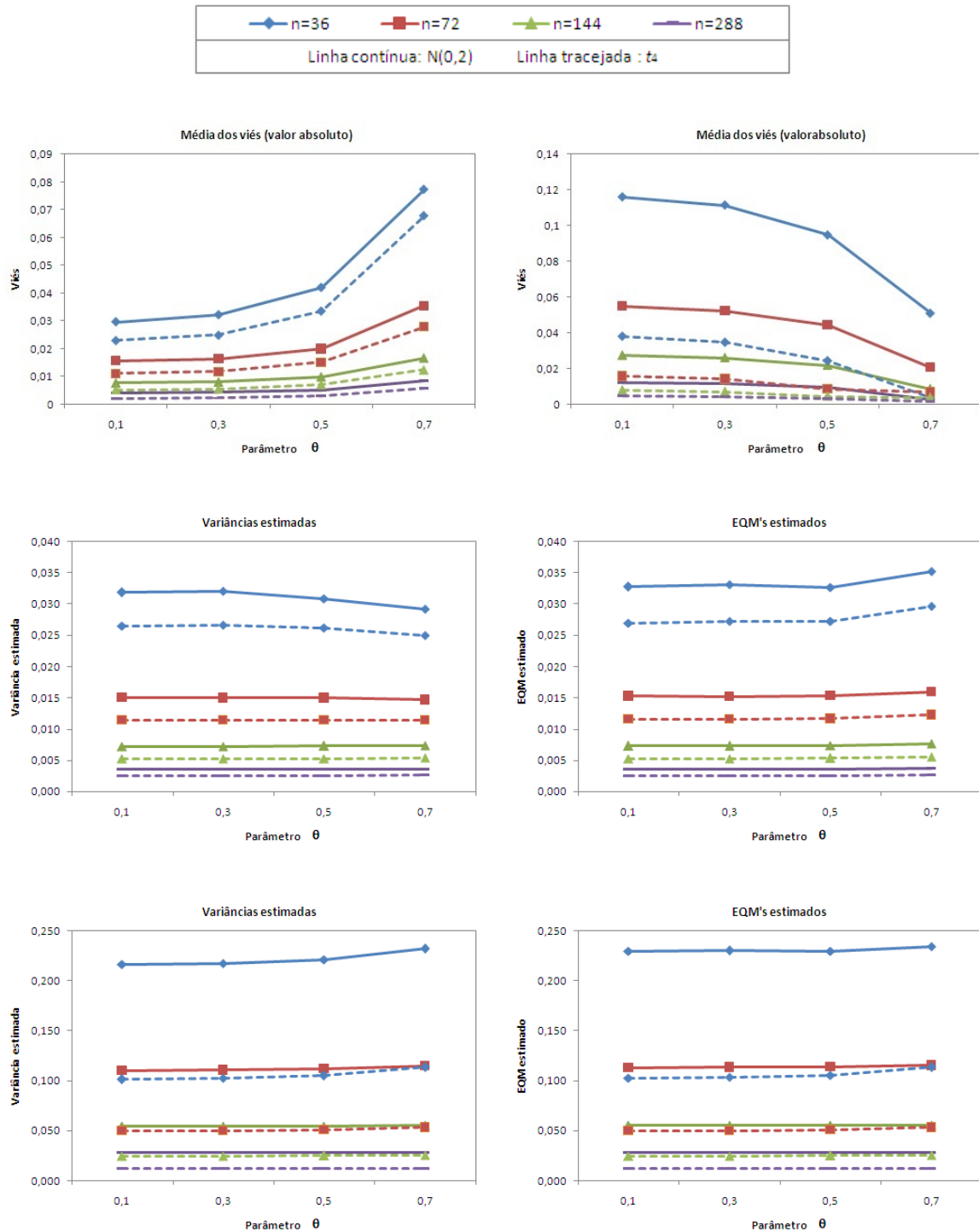


Figura 3.4 Média dos vies obtidos das estimativas do parâmetro θ e ϕ (gráficos superiores), variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro θ (gráficos centrais) e variância estimada e EQM estimado das estimativas do parâmetro ϕ (gráficos inferiores) nas simulações do modelo SYMARMA(0,1).

3.4 Qualidade do ajuste dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1)

Nesta seção o interesse é comparar a qualidade do ajuste das séries perante outliers utilizando os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuições t de Student condicional com 4 graus de liberdade e normal condicional. Espera-se que a suposição de uma distribuição com caudas mais pesadas do que a distribuição normal possa fornecer um melhor ajuste para os dados de séries que possuem observações atípicas. Usaremos a raiz do erro médio quadrático (RMSE) para avaliar e comparar a adequação do modelo:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right)^2}{n}}, \quad (3.3)$$

em que n é o número de observações da série. Nesta seção consideramos $n = 36$ e 72 . Adicionalmente, y_t representa o valor real no instante t e $\hat{y}_t$ representa o valor predito no instante t . Os resultados apresentados são baseados em um estudo de simulação com 10.000 réplicas. As séries foram geradas de acordo com o algoritmo apresentado na seção 3.2 tomando $r_t \sim N(0, 2)$.

O parâmetro autorregressivo (quando o modelo considerado é o SYMARMA(1,0)) e o parâmetro de média móvel (quando o modelo considerado é o SYMARMA(0,1)) tomam valores 0,1, 0,3, 0,5 e 0,7. Outlier(s) aditivo(s) e/ou inovador(es) foram introduzidos na amostra em diferentes locais como mostra a Tabela 3.5. As intensidades do impacto foram $\omega = 5 \times S_{y_t}$ e $\omega = 8 \times S_{y_t}$, em que S_{y_t} denota o desvio padrão da série y_t .

Tabela 3.5 Distribuição do(s) outlier(s) nas séries simuladas para qualidade do ajuste dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1).

Quantidade de outliers	n	Local do outlier			
		L1	L2	L3	L4
01	36	7	14	21	28
	72	14	28	43	57
02	36	3 e 32	7 e 28	10 e 25	14 e 21
	72	7 e 64	14 e 57	21 e 50	28 e 43

Os parâmetros do modelo foram estimados através da maximização da função de log-verossimilhança condicional (2.9) utilizando o algoritmo de otimização não-linear escore de Fisher apresentado na seção 2.2.

Para efeito ilustrativo, as lacunas das tabelas foram pintadas nas cores verde e vermelho. A cor verde indica que o modelo sob distribuição t_4 condicional teve uma performance melhor

que o modelo sob distribuição normal condicional, isto é, obteve menor média das RMSE. Já a cor vermelha indica o modelo sob distribuição normal condicional obteve menores erros de ajuste (RMSE), em média.

Os resultados para qualidade do ajuste dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) para amostras com outlier(s) do tipo aditivo ou inovador são apresentados separadamente a seguir.

Modelos SYMARMA(1,0)

Nas Tabelas 3.6-3.9 são apresentadas, respectivamente, as médias das RMSE obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados com um outlier aditivo, dois outliers aditivos, um outlier inovador e dois outliers inovadores.

Com exceção das simulações realizadas em amostras de tamanho $n = 72$ com apenas um outlier aditivo, o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional teve uma performance melhor que o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional em pelo menos 62,5% dos casos considerados. Os resultados mais destacados foram obtidos nas simulações com dois outliers aditivos em amostras de tamanho $n = 36$ (100% dos casos considerados) e dois outliers inovadores em amostras de tamanho $n = 72$ - 96,9% dos casos. Os resultados encontram-se apresentados na Tabela 3.10.

Em se tratando dos locais em que foram perturbadas as amostras, notamos que não aparentam ter nenhum tipo de relação direta com a qualidade do ajuste da série. Mas, em se tratando do valor do parâmetro autoregressivo, para $\phi = 0,7$, em média, o ajuste do modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional fornece um erro de predição maior que o normal para amostras perante outlier(s) aditivo(s).

Modelos SYMARMA(0,1)

Os resultados obtidos das simulações dos modelos SYMARMA(0,1) são apresentados nas Tabelas 3.11-3.14 que correspondem, respectivamente, às médias das RMSE obtidas das amostras com um outlier aditivo, dois outliers aditivos, um outlier inovador e dois outliers inovadores. Na Tabela 3.15 temos um resumo dos resultados obtidos.

Em todos os cenários considerados, a qualidade o ajuste dos modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade foi superior ao modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional em pelo menos 56,3% dos casos. Vale

destacar que para amostras de tamanho $n = 36$ e $n = 72$ com dois outliers aditivos de intensidade $\omega = 8xS_{y_t}$ o modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional se sobressaiu em 100% dos casos. O mesmo ocorreu para amostras de tamanho $n = 36$ com um outlier inovador de intensidade $\omega = 5xS_{y_t}$.

No geral, para todos os cenários considerados em nossas simulações, os modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional apresentaram um melhor ajuste, no sentido de menor média das RMSE, em 81,3% dos casos e, os modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional em 84,8% dos casos, como pode ser visualizado na Figura 3.5.

Tabela 3.6 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante um outlier aditivo.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	14,368	19,023	26,673	18,624	16,960	18,685	31,584	17,632
		t_4	8,826	24,984	23,966	24,332	8,160	25,537	22,795	24,452
	0,3	N(0,2)	21,282	14,350	17,709	16,487	23,584	16,937	20,293	21,987
		t_4	19,549	11,367	15,668	12,228	17,410	10,080	14,031	11,448
	0,5	N(0,2)	15,813	19,350	15,354	16,215	14,612	19,359	14,823	14,466
		t_4	15,502	15,714	16,239	16,039	12,968	12,714	14,064	13,561
	0,7	N(0,2)	43,945	40,327	39,046	38,689	15,135	15,135	15,860	15,608
		t_4	38,840	43,242	41,194	41,396	13,953	13,953	14,504	14,786
72	0,1	N(0,2)	14,617	14,002	13,787	10,120	17,321	15,980	15,960	10,824
		t_4	12,367	10,352	10,642	11,537	12,531	9,960	10,268	11,754
	0,3	N(0,2)	16,752	21,510	18,735	17,458	15,807	20,605	17,306	15,152
		t_4	15,654	19,257	15,513	17,652	12,833	16,674	11,759	15,432
	0,5	N(0,2)	17,905	18,597	18,193	17,229	16,985	17,876	15,811	15,902
		t_4	19,288	17,589	20,096	16,959	19,370	16,943	19,948	16,313
	0,7	N(0,2)	21,117	20,373	19,330	20,851	18,823	18,204	16,637	18,621
		t_4	23,828	22,508	21,547	22,002	24,746	23,193	22,128	22,243

Tabela 3.7 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante dois outliers aditivos.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	36,010	13,576	38,009	25,065	45,128	16,576	47,022	29,117
		t 4	25,065	9,202	26,460	24,649	23,809	8,649	25,007	24,435
	0,3	N(0,2)	22,811	17,798	20,819	17,451	26,867	20,236	24,779	21,623
		t 4	13,901	15,757	11,599	11,430	13,207	14,592	10,999	10,564
	0,5	N(0,2)	14,886	14,971	18,896	18,223	21,623	17,935	19,560	20,281
		t 4	13,216	13,398	15,232	13,098	10,564	11,564	12,818	10,935
	0,7	N(0,2)	38,061	41,896	35,426	40,095	20,281	18,330	20,686	18,445
		t 4	33,483	33,881	32,572	31,042	10,935	12,314	12,330	12,029
72	0,1	N(0,2)	14,831	12,773	12,116	15,967	19,041	14,918	15,598	19,890
		t 4	9,989	11,247	12,519	9,780	9,709	11,196	12,521	9,416
	0,3	N(0,2)	16,556	15,757	17,266	20,576	16,669	14,967	17,302	20,197
		t 4	15,772	14,857	12,563	17,031	13,438	12,086	10,835	13,906
	0,5	N(0,2)	15,114	17,578	17,933	18,667	13,310	18,063	18,063	17,933
		t 4	15,057	16,502	17,340	18,119	12,201	14,280	14,280	16,157
	0,7	N(0,2)	21,320	20,413	19,633	18,362	19,405	19,180	19,005	16,777
		t 4	22,694	21,128	21,022	19,734	22,005	19,995	19,223	19,471

Tabela 3.8 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante um outlier inovador.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	13,849	20,605	27,535	19,416	16,032	28,234	35,698	20,386
		t 4	9,115	25,651	23,612	24,387	9,272	40,929	24,493	25,615
	0,3	N(0,2)	14,568	46,598	32,328	17,296	15,888	15,888	30,230	54,766
		t 4	13,556	74,781	30,457	19,165	13,323	13,323	26,489	47,395
	0,5	N(0,2)	20,316	28,528	28,528	16,658	16,884	16,884	17,816	19,992
		t 4	22,743	23,885	23,885	15,374	18,404	18,404	16,411	17,137
	0,7	N(0,2)	19,238	21,078	21,570	15,811	19,992	17,256	17,205	16,393
		t 4	17,443	19,495	17,988	15,001	17,137	14,414	15,163	15,152
72	0,1	N(0,2)	15,751	13,717	13,385	10,210	17,149	15,557	16,144	12,563
		t 4	13,295	10,093	10,284	11,245	13,353	9,792	10,175	11,252
	0,3	N(0,2)	17,871	31,128	21,881	23,236	17,247	27,221	27,221	25,471
		t 4	16,967	29,242	17,438	23,290	16,095	24,290	24,290	25,340
	0,5	N(0,2)	20,551	22,597	21,841	22,453	18,067	24,246	22,188	26,660
		t 4	19,681	21,084	21,004	20,879	16,603	21,279	21,164	24,835
	0,7	N(0,2)	23,502	24,732	23,074	24,861	23,820	27,745	23,019	26,058
		t 4	22,990	23,932	23,101	23,079	22,129	26,354	22,828	23,832

Tabela 3.9 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(1,0) em amostras perante dois outliers inovadores.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	14,291	13,160	38,606	24,787	18,462	18,436	48,022	31,814
		t_4	10,176	10,123	26,338	26,273	10,071	10,981	26,187	46,499
	0,3	N(0,2)	18,178	14,598	18,360	27,320	26,741	54,113	30,958	20,813
		t_4	13,855	12,302	12,895	19,990	15,571	35,356	13,465	13,791
	0,5	N(0,2)	16,077	15,632	27,339	18,255	19,197	18,503	31,066	19,363
		t_4	14,029	18,713	20,378	15,328	14,900	15,222	22,952	14,890
	0,7	N(0,2)	16,343	17,256	20,008	19,472	28,591	17,321	18,002	15,462
		t_4	15,194	14,733	17,454	15,897	20,648	13,100	13,053	12,303
72	0,1	N(0,2)	15,562	14,961	11,260	15,324	19,212	15,678	11,759	20,142
		t_4	11,288	12,646	8,939	9,208	10,475	12,167	7,905	9,270
	0,3	N(0,2)	21,014	20,186	25,026	31,821	25,568	21,216	25,506	27,796
		t_4	20,147	18,417	21,426	27,811	22,513	18,320	20,565	19,703
	0,5	N(0,2)	21,578	21,987	23,241	23,090	18,501	22,725	28,568	23,891
		t_4	20,269	19,967	22,234	22,156	16,795	20,703	36,596	21,868
	0,7	N(0,2)	24,201	22,853	26,885	23,989	19,651	22,104	23,303	23,781
		t_4	23,082	21,941	24,768	23,352	18,735	21,564	20,490	21,808

Tabela 3.10 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor ajuste que o modelo sob distribuição normal condicional.

Tipo do outlier	Quantidade	n	Intensidade do impacto		TOTAL
			w = 5	w = 8	
Aditivo	01	36	62,5%	93,8%	78,1%
		72	50,0%	43,8%	46,9%
		TOTAL	56,3%	68,8%	62,5%
	02	36	100,0%	100,0%	100,0%
		72	68,8%	75,0%	71,9%
		TOTAL	84,4%	87,5%	85,9%
Inovador	01	36	68,8%	81,3%	75,0%
		72	81,3%	100,0%	90,6%
		TOTAL	75,0%	90,6%	82,8%
	02	36	87,5%	93,8%	90,6%
		72	100,0%	93,8%	96,9%
		TOTAL	93,8%	93,8%	93,8%

Tabela 3.11 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante um outlier aditivo.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	13,728	12,959	13,754	17,444	16,372	15,788	16,625	20,880
		t_4	10,265	8,658	12,380	13,232	9,660	7,790	11,697	12,289
	0,3	N(0,2)	12,524	14,865	14,414	14,397	12,730	16,544	16,334	15,535
		t_4	12,526	11,654	11,350	11,841	11,712	10,625	10,400	11,043
	0,5	N(0,2)	11,134	11,045	10,368	12,561	15,535	12,529	11,096	12,831
		t_4	9,425	9,382	9,051	9,384	11,043	8,539	8,022	8,041
	0,7	N(0,2)	21,723	21,536	19,461	33,471	19,873	19,873	18,629	36,331
		t_4	27,263	27,737	27,254	21,419	24,682	24,682	23,901	17,112
72	0,1	N(0,2)	18,181	34,100	34,100	35,262	14,144	40,287	39,802	41,383
		t_4	34,929	35,822	35,822	37,194	29,547	35,721	36,034	35,391
	0,3	N(0,2)	13,927	14,952	18,022	15,505	11,951	13,522	18,288	15,676
		t_4	13,894	13,821	15,896	11,942	11,696	11,785	13,765	9,880
	0,5	N(0,2)	15,250	15,840	15,727	15,803	13,360	14,077	14,541	14,184
		t_4	15,532	15,080	15,337	15,716	13,534	13,121	14,110	13,986
	0,7	N(0,2)	70,921	72,182	80,313	123,477	53,489	56,730	60,881	107,893
		t_4	71,241	69,317	75,951	142,256	58,939	56,568	60,540	149,813

Tabela 3.12 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante dois outliers aditivos.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	14,905	18,763	13,409	15,752	19,442	22,912	18,220	21,093
		t_4	10,299	11,689	9,604	10,444	9,567	10,898	9,398	9,913
	0,3	N(0,2)	11,410	13,695	13,695	16,960	15,925	17,185	21,365	21,473
		t_4	11,566	11,944	11,944	10,768	10,950	11,475	12,764	10,102
	0,5	N(0,2)	12,702	12,032	12,219	12,391	16,006	13,361	12,975	15,082
		t_4	9,489	8,684	8,574	9,172	8,842	8,067	7,388	8,409
	0,7	N(0,2)	115,493	29,068	24,100	24,505	127,959	29,240	24,743	35,762
		t_4	82,655	22,074	24,097	24,681	81,985	18,662	21,130	22,107
72	0,1	N(0,2)	11,814	27,614	44,070	44,817	13,618	29,893	55,406	56,237
		t_4	9,042	31,580	34,544	36,589	8,346	29,315	33,048	35,208
	0,3	N(0,2)	14,734	14,240	14,729	15,540	14,521	15,587	16,491	15,360
		t_4	11,798	10,966	10,912	14,002	9,606	8,965	8,945	10,720
	0,5	N(0,2)	15,659	14,475	14,550	14,550	14,901	13,931	13,701	13,685
		t_4	13,823	13,539	13,987	13,987	11,352	11,225	11,570	10,609
	0,7	N(0,2)	53,656	108,885	60,950	64,085	49,560	92,188	51,903	51,558
		t_4	58,096	106,221	50,109	57,188	44,823	82,532	32,251	37,674

Tabela 3.13 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante um outlier inovador.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	15,428	12,382	14,300	17,413	17,767	15,237	16,879	19,485
		t 4	10,506	9,370	12,553	12,876	10,044	9,220	11,280	11,763
	0,3	N(0,2)	14,922	16,018	16,300	15,182	14,430	17,927	18,390	16,369
		t 4	14,429	12,482	12,435	12,277	12,621	12,076	11,883	11,767
	0,5	N(0,2)	15,173	14,180	12,471	15,939	15,903	15,009	12,423	18,040
		t 4	14,135	12,965	11,753	13,869	14,348	13,414	11,882	14,065
	0,7	N(0,2)	25,120	26,586	26,515	43,002	27,400	34,278	32,784	51,119
		t 4	22,350	33,237	34,559	32,599	22,902	34,348	35,404	33,276
72	0,1	N(0,2)	17,143	35,889	36,075	37,767	17,243	42,631	40,400	43,470
		t 4	36,865	38,335	39,207	37,997	30,593	38,147	38,076	35,568
	0,3	N(0,2)	16,448	17,970	19,148	19,054	15,253	17,655	20,704	19,555
		t 4	15,847	16,050	17,219	15,823	15,388	15,530	16,465	15,422
	0,5	N(0,2)	19,356	19,825	18,048	19,690	19,410	20,418	18,493	20,338
		t 4	18,740	18,759	17,121	18,972	18,863	18,729	17,075	18,940
	0,7	N(0,2)	95,787	112,224	101,168	98,619	97,359	114,628	110,811	99,585
		t 4	101,789	96,527	101,761	85,940	105,014	95,847	102,647	87,296

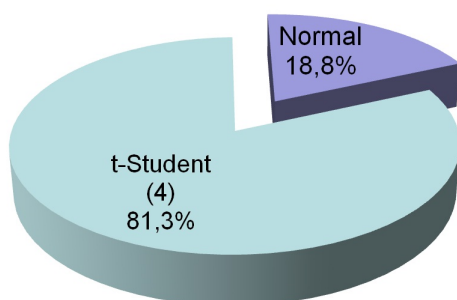
Tabela 3.14 Média das RMSE nas simulações da qualidade do ajuste do modelo SYMARMA(0,1) em amostras perante dois outliers inovadores.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	16,164	18,873	14,295	18,200	20,269	21,568	18,999	20,744
		t 4	11,040	11,606	10,188	11,946	10,140	10,609	9,557	9,759
	0,3	N(0,2)	13,686	15,739	22,300	18,472	17,624	15,446	24,857	22,444
		t 4	12,121	13,312	17,397	11,911	11,904	11,855	15,854	11,154
	0,5	N(0,2)	14,907	16,634	15,713	12,937	17,548	18,733	17,269	15,390
		t 4	12,669	13,996	13,398	11,589	12,667	14,092	13,484	11,964
	0,7	N(0,2)	22,965	26,972	21,808	28,466	26,076	77,927	42,329	49,089
		t 4	20,837	22,665	21,572	23,527	21,474	44,006	44,542	33,782
72	0,1	N(0,2)	13,830	27,255	45,673	47,045	15,450	26,774	57,404	57,980
		t 4	11,254	32,062	36,721	39,293	10,562	28,096	35,728	37,422
	0,3	N(0,2)	20,447	17,385	17,639	17,754	19,236	18,193	19,320	18,341
		t 4	18,260	15,612	14,841	16,104	16,302	15,100	14,513	15,760
	0,5	N(0,2)	20,619	19,568	19,925	17,909	21,451	20,049	20,411	18,737
		t 4	18,832	18,435	18,493	16,453	18,900	18,464	18,333	16,285
	0,7	N(0,2)	101,792	96,289	112,160	103,221	102,915	99,447	114,517	101,101
		t 4	102,468	93,668	91,792	97,106	100,211	96,722	91,380	93,936

Tabela 3.15 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor ajuste que o modelo sob distribuição normal condicional.

Tipo do outlier	Quantidade	n	Intensidade do impacto		TOTAL
			w = 5	w = 8	
Aditivo	01	36	75,0%	81,3%	78,1%
		72	56,3%	75,0%	65,6%
		TOTAL	65,6%	78,1%	71,9%
	02	36	87,5%	100,0%	93,8%
		72	87,5%	100,0%	93,8%
		TOTAL	87,5%	100,0%	93,8%
Inovador	01	36	87,5%	87,5%	87,5%
		72	62,5%	81,3%	71,9%
		TOTAL	75,0%	84,4%	79,7%
	02	36	100,0%	93,8%	96,9%
		72	87,5%	93,8%	90,6%
		TOTAL	93,8%	93,8%	93,8%

SYMARMA (1,0) - 81,3%



SYMARMA (0,1) - 84,8%

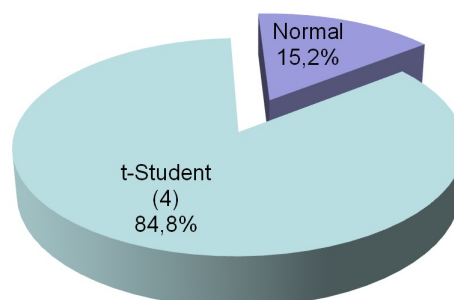


Figura 3.5 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional foram superior aos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional - todos os cenários considerados.

3.5 Performance dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob previsões futuras perante observações atípicas

Para avaliar a performance dos modelos sob previsões futuras, utilizamos de uma previsão *out-of-sample*, que consiste na divisão da amostra em duas partes, a primeira (*in sample*) utilizada para estimar os parâmetros do modelo, com o qual irão ser feitas as previsões, e, em seguida, comparam-se os resultados das previsões com os valores reais que foram separados na segunda parte da amostra (*out of sample*).

Neste estudo de simulação, consideramos amostras de tamanhos $n = 42$ e 78 e, para cada tamanho amostral, as 6 últimas observações foram selecionadas para compor a segunda parte da amostra, isto é, as observações que terão seus valores comparados com os valores preditos pelo modelo estimado com as $n = 36$ e 72 observações da primeira parte da amostra, respectivamente.

Os modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional e o SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade serão utilizados nesse estudo. Outlier(s) aditivo(s) e/ou inovador(es) foram introduzidos na amostra em diferentes locais considerando 5 grandes cenários:

1. Nenhum outlier na primeira parte da amostra e 1 outlier aditivo na segunda parte da amostra;
2. 1 outlier aditivo (ou inovador) na primeira parte da amostra e nenhum outlier na segunda parte da amostra;
3. 2 outliers aditivos (ou inovadores) na primeira parte da amostra e nenhum outlier na segunda parte da amostra;
4. 1 outlier aditivo (ou inovador) na primeira parte da amostra e 1 outlier aditivo na segunda parte da amostra;
5. 2 outliers aditivos (ou inovadores) na primeira parte da amostra e 1 outlier aditivo na segunda parte da amostra.

As Figuras 3.6-3.8 mostram gráficos de séries simuladas do modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional tomando $\alpha = 0$ e $\phi = 0,5$, em que foi introduzido outliers para se ilustrar os cenários considerados nas simulações subsequentes.

Os locais escolhidos para introdução de outliers na amostra estão descritos na Tabela 3.16. Para o cenário 1, em que a perturbação é dada apenas na segunda parte da amostra, o local

escolhido para perturbação foi o período $t = 39$ e $t = 75$ para amostras de tamanho $n = 42$ e $n = 78$, respectivamente.

Da mesma forma abordada nas seções anteriores, assumimos que os parâmetros autorregressivo e de média móvel, ϕ e θ , assumem os valores 0,1, 0,3, 0,5 e 0,7. Para as observações atípicas consideramos um impacto de magnitudes $\omega = 5 \times S_{y_t}$ e $\omega = 8 \times S_{y_t}$; aqui S_{y_t} denota o desvio padrão da série y_t . Previsões foram realizadas como na seção 2.4 do Capítulo 2. A raiz do erro médio quadrático (RMSE), definida em (3.3), foi a medida de erro utilizada para comparar a acurácia das previsões dos modelos.

As lacunas das tabelas foram pintadas de cores verde e vermelho para distinguir as situações em que o modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional obteve melhor performance do que modelo sob distribuição normal condicional (cor verde). As performances dos modelos foram avaliadas pelo RMSE.

Os resultados serão apresentados de acordo com os cenários considerados e, no final, apresentaremos um resumo comparativo.

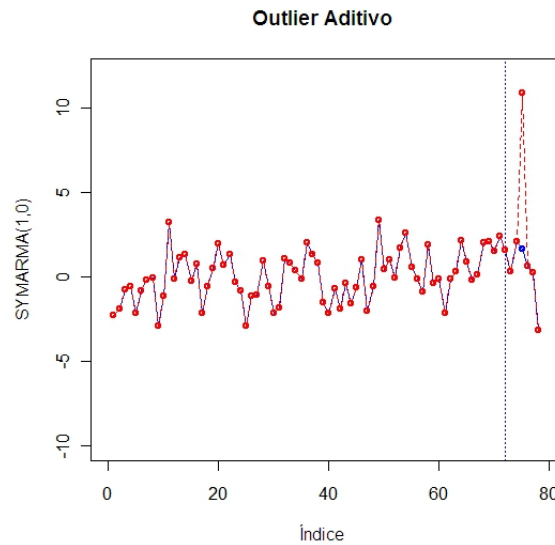


Figura 3.6 Cenário 1 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontínuo) com um outlier aditivo na segunda parte da amostra.

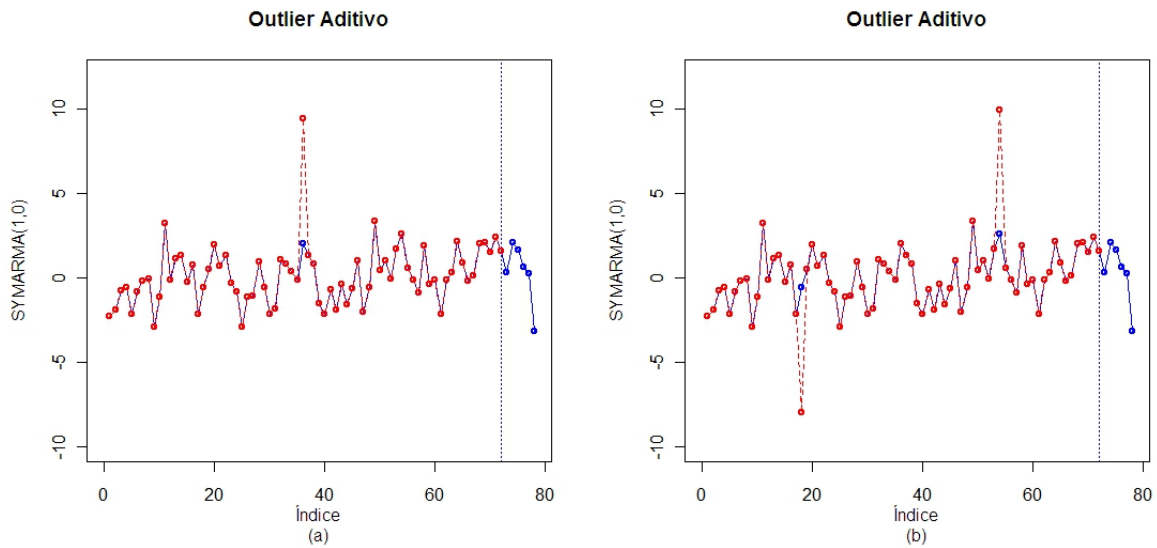


Figura 3.7 Cenários 2 e 4 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontinuo) com um(dois) outlier(s) aditivo(s) na primeira parte da amostra.

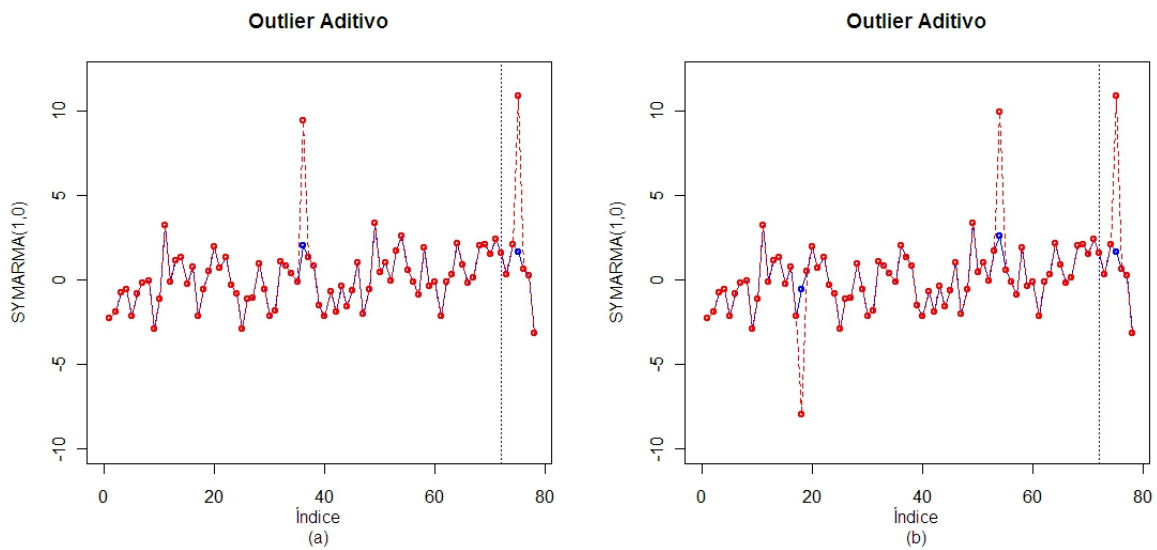


Figura 3.8 Cenários 3 e 5 - Série simulada do modelo SYMARMA(1,0) contaminada (traço descontinuo) com um(dois) outlier(s) aditivo(s) na primeira parte da amostra e um outlier aditivo na segunda parte da amostra.

Tabela 3.16 Distribuição do(s) outlier(s) nas séries simuladas para previsão de observações futuras utilizando os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1).

CENÁRIOS 2 E 4					
n	Local do outlier				
	1ª parte da amostra				2ª parte da amostra
	L1	L2	L3	L4	L
42	7	14	21	28	39
78	14	28	43	57	75

CENÁRIOS 3 E 5					
n	Local do outlier				
	1ª parte da amostra				2ª parte da amostra
	L1	L2	L3	L4	L
42	3 e 32	7 e 28	10 e 25	14 e 21	39
78	7 e 64	14 e 57	21 e 50	28 e 43	75

Cenário 1 - Nenhum outlier na primeira parte da amostra e 01 outlier aditivo na segunda parte da amostra

Os resultados são apresentados na Tabela 3.17 e baseiam-se na média das raízes do erro médio quadrático (RMSE) obtidos da previsão das seis últimas observações em cada uma das 10.000 séries simuladas. De acordo com os resultados, para ambos modelos a intensidade do impacto da observação atípica na segunda parte da amostra não interferiu na média das RMSE.

Ainda de acordo com a Tabela 3.17, os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional obtiveram, em média, menores erros de previsão que o modelos sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade em, respectivamente, 75% e 66,5% dos casos considerados; como era de se esperar pois as séries foram simuladas sob distribuição normal para os erros aleatórios r_t e, sendo assim, as estimativas obtidas para a primeira parte da amostra considerando os modelos sob distribuição normal condicional são, em geral, mais precisas.

Cenário 2 - 01 outlier aditivo (ou inovador) na primeira parte da amostra e nenhum outlier na segunda parte da amostra

Os resultados apresentados nas Tabelas 3.18 e 3.19 mostram as médias das raízes do erro médio quadrático (RMSE) obtidas das previsões realizadas com o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuições normal condicional e t de Student condicional nas 10.000 réplicas conside-

Tabela 3.17 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos simulados de acordo com o Cenário 1.

n	$\phi - \theta$	Distribuição dos Erros	Modelo			
			SYMARMA(1,0)		SYMARMA(0,1)	
			Intensidade do impacto		Intensidade do impacto	
			w=5	w=8	w=5	w=8
36	0,1	N(0,2)	10,438	10,438	3,553	3,553
		t_4	11,084	11,084	3,463	3,463
	0,3	N(0,2)	5,756	5,756	3,162	3,162
		t_4	6,395	6,395	3,333	3,333
	0,5	N(0,2)	6,882	6,882	4,233	4,233
		t_4	7,473	7,473	4,398	4,398
	0,7	N(0,2)	27,411	27,412	6,072	6,072
		t_4	20,913	20,914	5,953	5,953
72	0,1	N(0,2)	3,077	3,077	5,966	5,966
		t_4	3,088	3,088	6,028	6,028
	0,3	N(0,2)	6,616	6,616	6,597	6,597
		t_4	6,736	6,736	6,645	6,645
	0,5	N(0,2)	6,010	6,010	8,474	8,474
		t_4	6,180	6,180	7,907	7,907
	0,7	N(0,2)	9,742	9,743	3,207	3,207
		t_4	8,798	8,799	3,487	3,487

radas, para, respectivamente, um outlier aditivo e um outlier inovador na primeira parte da amostra.

Notamos que o número de casos em que o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade se sobressaiu ao modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional aumentou quando a intensidade do impacto passou de $\omega = 5xS_{y_t}$ para $\omega = 8xS_{y_t}$ e/ou quando o tamanho amostral passou de $n = 36$ para $n = 72$. Além disso, verificamos que as previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional são ainda melhores quando um outlier inovador está presente na primeira parte da amostra.

Dado que o outlier na primeira parte da amostra é do tipo aditivo, para $\omega = 5xS_{y_t}$ ($\omega = 8xS_{y_t}$) a média dos erros de previsão foram menores nos modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional em 56,2% (71,9%) dos casos. Quando o outlier é do tipo inovador esses percentuais passam para 75% e 87,5%. Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 3.22.

Nas Tabelas 3.20 e 3.21 estão apresentados os resultados das simulações realizadas no modelo SYMARMA(0,1). Para $n = 36$ o modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional se sobressaiu ao modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional em todos

os casos considerados. Em geral, quando a intensidade do impacto passa de $\omega = 5xS_{y_t}$ para $\omega = 8xS_{y_t}$ temos um desempenho ainda melhor do modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional. Para um outlier do tipo aditivo na primeira parte da amostra, os percentuais de casos em que o modelo sob distribuição t_4 condicional se sobressaiu ao modelo normal condicional foram 84,4% e 87,5% para, respectivamente, $\omega = 5xS_{y_t}$ e $\omega = 8xS_{y_t}$ e, para um outlier do tipo inovador na primeira parte da amostra, 84,4% e 93,7% . Os resultados estão resumidos na Tabela 3.22.

Tabela 3.18 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 2.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	8,477	15,448	8,727	8,503	7,233	18,411	7,543	7,253
		t_4	10,658	12,146	11,898	11,973	10,830	11,549	12,178	12,345
	0,3	N(0,2)	10,925	9,796	12,763	12,776	12,597	10,947	15,237	15,272
		t_4	8,842	9,731	9,710	8,499	8,770	9,659	9,276	8,323
	0,5	N(0,2)	12,432	13,002	7,439	12,732	15,277	16,018	8,483	15,797
		t_4	8,461	10,086	10,387	8,082	8,600	9,895	10,974	8,186
	0,7	N(0,2)	11,303	7,932	9,896	10,104	17,263	7,297	10,978	16,217
		t_4	16,877	12,273	11,075	16,970	16,442	5,975	11,075	16,389
72	0,1	N(0,2)	3,637	3,816	4,241	3,862	4,272	4,439	4,909	4,909
		t_4	3,169	3,281	3,278	3,259	3,123	3,248	3,165	3,165
	0,3	N(0,2)	7,727	6,540	7,175	8,149	8,367	6,483	7,459	9,433
		t_4	6,539	7,150	6,565	6,678	6,236	6,936	6,240	6,283
	0,5	N(0,2)	7,551	7,317	6,581	7,748	8,138	7,787	6,487	8,332
		t_4	6,759	6,836	7,290	6,659	6,637	6,750	7,255	6,595
	0,7	N(0,2)	6,908	7,763	7,924	7,971	6,537	8,863	8,476	8,691
		t_4	8,664	8,235	8,507	8,258	8,482	8,029	8,188	8,065

Tabela 3.19 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 2.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	8,217	15,999	8,560	8,334	6,866	19,423	7,302	7,001
		t 4	10,376	12,339	11,885	11,813	10,527	11,909	12,079	12,235
	0,3	N(0,2)	12,012	10,166	14,057	14,270	14,546	13,781	17,346	17,824
		t 4	9,352	10,236	10,325	10,002	9,065	10,250	9,801	9,590
	0,5	N(0,2)	16,166	17,583	12,197	16,665	22,269	23,727	17,693	22,882
		t 4	8,943	12,199	9,123	9,377	8,984	12,813	8,896	9,368
	0,7	N(0,2)	16,593	14,081	14,081	12,791	14,087	15,618	37,756	25,291
		t 4	25,190	11,182	11,182	12,974	23,970	9,784	12,335	10,500
72	0,1	N(0,2)	3,761	3,943	4,370	3,984	4,498	4,673	5,149	4,721
		t 4	3,248	3,285	3,336	3,296	3,246	3,285	3,259	3,268
	0,3	N(0,2)	8,493	6,935	7,798	8,918	10,333	7,887	8,521	10,647
		t 4	7,206	7,493	6,999	7,170	7,114	7,579	6,902	7,151
	0,5	N(0,2)	8,514	8,479	6,848	9,149	9,879	10,083	7,366	10,701
		t 4	7,147	7,322	7,091	7,181	7,058	7,364	7,151	7,175
	0,7	N(0,2)	11,675	11,748	10,960	9,916	14,260	12,297	14,219	12,380
		t 4	8,677	9,708	9,591	9,538	9,100	9,934	10,402	9,385

Tabela 3.20 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 2.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,648	4,792	5,018	4,928	7,091	5,946	6,159	6,097
		t 4	3,891	3,991	3,986	4,023	3,800	3,996	4,036	4,012
	0,3	N(0,2)	6,058	6,058	6,281	5,136	7,724	6,972	7,984	6,919
		t 4	4,609	4,609	4,591	3,781	4,628	3,597	4,654	3,804
	0,5	N(0,2)	5,017	5,017	5,302	5,278	5,810	6,403	6,189	6,189
		t 4	4,778	4,778	4,559	4,615	4,662	4,476	4,460	4,460
	0,7	N(0,2)	6,481	5,987	6,437	5,766	7,473	6,979	7,411	7,411
		t 4	5,315	5,500	5,348	5,722	4,948	5,263	5,052	5,052
72	0,1	N(0,2)	6,944	6,926	7,552	6,970	7,552	7,551	9,179	7,833
		t 4	6,197	6,235	6,465	6,170	6,033	6,146	6,450	6,030
	0,3	N(0,2)	4,437	9,621	4,604	5,021	5,987	11,461	6,183	6,894
		t 4	7,729	6,175	7,884	6,912	7,594	5,528	7,748	6,866
	0,5	N(0,2)	8,031	9,712	7,988	9,664	7,740	10,464	7,707	10,388
		t 4	8,523	8,013	8,331	8,075	8,491	7,837	8,337	7,677
	0,7	N(0,2)	3,425	3,475	3,498	3,478	3,642	3,658	3,699	3,706
		t 4	3,324	3,400	3,291	3,404	3,187	3,258	3,151	3,289

Tabela 3.21 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 2.

<i>n</i>	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,859	4,969	5,196	5,099	7,496	6,362	6,578	6,490
		<i>t</i> 4	3,929	4,046	4,048	4,013	3,844	4,015	4,084	4,022
	0,3	N(0,2)	7,057	5,969	7,275	5,924	9,334	8,351	9,529	8,291
		<i>t</i> 4	4,683	4,025	4,497	3,837	4,822	3,889	4,630	3,793
	0,5	N(0,2)	5,934	6,396	6,293	6,370	7,553	8,330	7,997	8,057
		<i>t</i> 4	5,149	4,908	4,915	5,012	5,121	4,964	4,873	4,990
	0,7	N(0,2)	8,577	8,861	8,599	7,806	10,905	10,668	10,503	9,621
		<i>t</i> 4	7,076	7,929	7,609	7,576	6,320	6,307	6,175	6,129
72	0,1	N(0,2)	7,138	7,033	7,766	6,972	7,904	7,746	9,574	8,062
		<i>t</i> 4	6,468	6,271	6,700	6,194	6,437	6,157	6,735	6,132
	0,3	N(0,2)	5,733	11,113	5,970	6,417	8,192	13,883	8,522	9,229
		<i>t</i> 4	7,391	6,428	7,581	6,720	7,616	6,266	7,853	6,899
	0,5	N(0,2)	8,100	10,596	8,015	10,558	7,920	11,943	7,826	11,979
		<i>t</i> 4	8,390	8,189	8,074	8,877	8,494	8,224	8,168	8,938
	0,7	N(0,2)	4,168	4,248	4,256	4,299	4,974	4,995	4,973	5,086
		<i>t</i> 4	3,641	3,696	3,641	3,823	3,645	3,688	3,620	3,805

Tabela 3.22 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição *t* de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 2.

Modelo SYMARMA(1,0)				
Tipo do outlier	<i>n</i>	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	50,0%	62,5%	56,2%
	72	62,5%	81,2%	71,9%
	TOTAL	56,2%	71,9%	64,1%
Inovador	36	62,5%	75,0%	68,7%
	72	87,5%	100,0%	93,7%
	TOTAL	75,0%	87,5%	81,2%

Modelo SYMARMA(0,1)				
Tipo do outlier	<i>n</i>	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	68,7%	75,0%	71,9%
	TOTAL	84,4%	87,5%	85,9%
Inovador	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	68,7%	87,5%	78,1%
	TOTAL	84,4%	93,7%	89,1%

Cenário 3 - 02 outliers aditivos (ou inovadores) na primeira parte da amostra e nenhum outlier na segunda parte da amostra

Neste cenário perturbamos a primeira parte da amostra com dois outliers do tipo aditivo (ou inovadores) e realizamos previsões para as observações que compõem a segunda parte da amostra - observações essas que não sofreram nenhum tipo de perturbação. As médias das raízes do erro médio quadrático (RMSE) obtidas das previsões realizadas com o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuições normal condicional e t de Student condicional, nas 10.000 réplicas, são apresentadas nas Tabelas 3.23 e 3.24 e, para o modelo SYMARMA(0,1) os resultados são apresentados nas Tabelas 3.25 e 3.26. Um resumo comparativo do percentual de casos em que o modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade obteve uma performance melhor que o modelo sob distribuição normal condicional é apresentado na Tabela 3.27.

Tabela 3.23 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 3.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do Impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	12,378	5,511	12,752	12,774	13,671	10,811	14,542	13,872
		t_4	10,795	11,516	11,709	13,142	10,795	12,165	11,711	12,963
	0,3	N(0,2)	11,543	13,552	11,425	11,425	13,605	16,780	15,712	15,361
		t_4	9,044	8,029	9,621	9,621	9,185	7,842	9,712	9,756
	0,5	N(0,2)	9,690	16,745	10,409	10,239	14,603	22,134	12,242	11,835
		t_4	9,833	7,514	9,268	11,014	10,249	7,704	9,369	10,776
	0,7	N(0,2)	9,557	17,835	17,343	8,890	11,706	24,796	24,730	12,111
		t_4	9,836	9,276	9,068	7,662	9,635	7,764	7,240	7,832
72	0,1	N(0,2)	3,925	3,910	3,679	4,702	4,721	4,692	4,602	5,776
		t_4	3,260	3,156	3,213	3,238	3,172	3,096	3,174	3,148
	0,3	N(0,2)	8,372	8,473	6,762	6,779	9,774	9,568	7,356	6,818
		t_4	6,633	6,455	6,994	6,870	6,368	6,179	6,778	6,607
	0,5	N(0,2)	7,605	8,441	6,525	7,036	8,280	9,669	6,601	7,729
		t_4	6,747	6,336	6,962	6,976	6,517	6,110	6,815	6,784
	0,7	N(0,2)	7,275	7,484	6,954	9,043	8,294	7,786	7,024	10,486
		t_4	6,905	7,131	6,584	6,936	6,700	6,625	6,399	6,430

Tabela 3.24 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 3.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	12,652	6,124	13,112	13,055	14,118	12,501	15,123	14,309
		t 4	10,849	11,263	11,903	13,426	10,834	12,028	11,933	13,395
	0,3	N(0,2)	12,325	15,834	14,252	13,951	15,163	20,220	20,259	17,322
		t 4	9,441	8,956	10,687	10,603	9,569	8,274	10,884	10,374
	0,5	N(0,2)	18,917	24,662	12,441	13,051	29,118	35,173	15,648	15,519
		t 4	9,307	9,222	8,564	9,897	8,469	8,911	8,571	9,682
	0,7	N(0,2)	42,038	25,617	17,739	17,739	50,684	47,054	39,239	25,913
		t 4	32,727	20,962	24,934	24,934	38,847	19,398	24,718	12,955
72	0,1	N(0,2)	4,089	4,058	3,885	4,920	4,975	4,943	4,940	6,138
		t 4	3,390	3,253	3,303	3,284	3,284	3,229	3,309	3,222
	0,3	N(0,2)	9,429	9,795	7,634	7,384	11,021	11,691	8,923	7,805
		t 4	7,505	7,348	7,592	7,337	7,465	7,210	7,611	7,329
	0,5	N(0,2)	9,084	10,654	6,989	8,420	10,780	13,342	7,939	9,983
		t 4	7,297	7,285	7,126	7,139	7,283	7,186	7,041	7,102
	0,7	N(0,2)	16,797	11,136	11,355	13,544	20,311	12,642	12,217	18,301
		t 4	12,778	9,031	9,782	9,491	13,098	9,314	9,966	9,648

Tabela 3.25 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 3.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,627	6,388	6,137	5,757	7,673	8,352	8,044	7,834
		t 4	4,155	3,955	4,036	4,033	4,148	3,899	4,050	4,026
	0,3	N(0,2)	5,560	5,617	5,429	5,666	6,983	7,011	6,744	6,864
		t 4	3,860	3,699	4,051	3,876	3,775	3,667	3,650	3,716
	0,5	N(0,2)	6,050	5,568	6,075	6,221	7,402	7,023	7,496	7,768
		t 4	4,585	4,771	4,441	4,517	4,464	4,718	4,368	4,433
	0,7	N(0,2)	7,654	6,509	7,762	6,993	9,835	7,621	9,778	8,906
		t 4	5,252	5,292	4,931	5,204	4,962	4,992	4,632	4,955
72	0,1	N(0,2)	9,930	7,205	6,734	8,235	12,977	8,189	7,836	9,647
		t 4	6,910	6,051	6,035	6,553	6,879	5,924	5,912	6,421
	0,3	N(0,2)	6,987	7,566	12,213	7,042	7,670	11,014	15,555	7,465
		t 4	5,798	7,442	4,441	6,607	5,510	7,310	3,668	5,991
	0,5	N(0,2)	8,982	8,956	9,114	9,114	9,617	9,360	9,633	9,630
		t 4	8,236	8,620	7,877	8,097	8,140	8,379	7,743	7,958
	0,7	N(0,2)	3,612	3,626	3,457	3,678	4,054	4,075	3,898	4,134
		t 4	3,174	3,219	3,239	3,074	2,971	3,078	3,042	2,893

Tabela 3.26 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 3.

<i>n</i>	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,969	6,684	6,418	6,084	8,201	8,835	8,519	8,334
		<i>t</i> 4	4,200	3,972	4,068	4,100	4,145	3,925	4,093	4,083
	0,3	N(0,2)	6,084	6,465	6,201	6,436	8,286	8,271	7,909	8,006
		<i>t</i> 4	4,100	4,010	4,181	4,163	4,137	3,949	4,090	4,025
	0,5	N(0,2)	7,479	7,007	7,493	7,741	9,534	9,186	9,573	10,032
		<i>t</i> 4	5,178	5,267	4,955	5,017	5,038	5,238	4,893	4,921
	0,7	N(0,2)	11,061	8,344	10,653	9,045	14,886	10,018	14,127	11,986
		<i>t</i> 4	6,483	6,428	6,278	6,168	6,313	6,348	6,108	6,099
72	0,1	N(0,2)	10,379	7,474	6,981	8,279	13,722	8,534	8,692	9,766
		<i>t</i> 4	7,304	6,295	6,119	6,631	7,352	6,168	6,038	6,551
	0,3	N(0,2)	7,983	9,957	14,598	8,037	9,165	14,895	19,415	9,046
		<i>t</i> 4	6,730	7,097	5,882	6,737	6,734	7,537	5,460	6,617
	0,5	N(0,2)	8,037	9,633	9,833	9,824	10,810	10,387	10,703	10,841
		<i>t</i> 4	6,737	9,248	8,029	8,046	8,881	9,358	8,025	8,088
	0,7	N(0,2)	4,612	4,762	4,456	4,845	5,746	5,804	5,410	5,928
		<i>t</i> 4	3,704	3,798	3,802	3,694	3,694	3,777	3,759	3,656

Tabela 3.27 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição *t* de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 3.

Modelo SYMARMA(1,0)				
Tipo do outlier	<i>n</i>	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	68,7%	93,7%	81,2%
	72	81,2%	93,7%	87,5%
	TOTAL	75,0%	93,7%	84,4%
Inovador	36	75,0%	100,0%	87,5%
	72	93,7%	100,0%	96,9%
	TOTAL	84,4%	100,0%	92,2%

Modelo SYMARMA(0,1)				
Tipo do outlier	<i>n</i>	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	100,0%	100,0%	100,0%
	TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%
Inovador	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	100,0%	100,0%	100,0%
	TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%

Na presença de dois outliers do tipo aditivo na primeira parte da amostra, em 84,4% de todos os casos considerados o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional apresentou melhor desempenho que o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição normal condicional. Para o modelo SYMARMA(0,1) esse percentual foi de 100%. Considerando agora dois outliers do tipo inovador, esses percentuais são de 92,2% para os modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional e 100% para modelos SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional.

Nota-se ainda que, os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional tornam-se ainda mais adequados para realizar previsões a medida que o número e a intensidade dos outliers aumentam.

Cenário 4 - 01 outlier aditivo (ou inovador) na primeira parte da amostra e 01 outlier aditivo na segunda parte da amostra

Os resultados das simulações nos Cenários 2 e 3 mostraram um melhor desempenho dos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional na previsão de observações futuras sem outliers. A partir de agora, vamos verificar a acurácia das previsões desses modelos na presença de um outlier do tipo aditivo na segunda parte da amostra.

As médias das raízes do erro médio quadrático (RMSE) para os modelos SYMARMA(1,0) tendo na primeira parte da amostra um outlier do tipo aditivo são apresentadas na Tabela 3.28 e, para um outlier do tipo inovador, na Tabela 3.29. Os resultados para os modelos SYMARMA(0,1) são apresentados nas Tabelas 3.30 e 3.31.

Notamos que o número de casos em que o modelo SYMARMA(1,0) ou SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional teve uma performance melhor que o modelo SYMARMA(1,0) com distribuição normal condicional, aumentou quando a intensidade do impacto passou de $\omega = 5xS_{y_t}$ para $\omega = 8xS_{y_t}$ e/ou quando o tamanho amostral passou de $n = 36$ para $n = 72$. Além disso, verificamos que as previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional são ainda melhores quando um outlier inovador está presente na primeira parte da amostra.

Dado que o outlier na primeira parte da amostra é do tipo aditivo, para $\omega = 5xS_{y_t}$ ($\omega = 8xS_{y_t}$) a média dos erros de previsão foi menor nos modelos SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional em 51,3% (68,7%) dos casos. Quando o outlier é do tipo inovador esses percentuais são de 75% e 81,2%. Para $n = 36$ o modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional se sobressaiu ao modelo SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional em todos os casos considerados. Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 3.32.

Tabela 3.28 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 4.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	7,462	14,710	7,618	7,301	5,996	17,569	6,176	5,755
		t 4	10,055	11,527	11,403	11,366	10,208	10,905	11,713	11,726
	0,3	N(0,2)	7,765	5,200	8,569	8,199	9,577	5,576	10,413	9,956
		t 4	5,326	6,617	6,754	5,216	5,242	6,706	6,413	5,039
	0,5	N(0,2)	10,972	11,463	5,879	11,161	13,631	14,247	6,696	14,026
		t 4	7,195	8,775	9,126	6,825	7,345	8,610	9,741	6,990
	0,7	N(0,2)	10,696	7,288	9,250	9,455	16,605	6,587	10,257	15,512
		t 4	16,275	11,678	10,495	16,385	15,862	5,399	10,510	15,818
72	0,1	N(0,2)	3,249	3,576	3,807	3,635	3,769	4,064	4,344	4,117
		t 4	2,926	3,071	3,070	3,034	2,888	3,052	2,972	2,974
	0,3	N(0,2)	7,219	6,002	6,664	7,727	7,767	5,850	6,846	8,879
		t 4	6,228	6,846	6,269	6,343	5,931	6,637	5,950	5,949
	0,5	N(0,2)	6,272	6,325	5,603	6,511	6,682	6,796	5,531	6,932
		t 4	5,963	5,902	6,300	5,749	5,839	5,813	6,264	5,693
	0,7	N(0,2)	6,129	6,952	7,057	7,117	5,816	8,119	7,684	7,929
		t 4	7,658	7,246	7,542	7,267	7,487	7,048	7,232	7,086

Tabela 3.29 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 4.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	7,155	15,252	7,390	7,047	5,551	18,485	5,827	5,379
		t 4	9,762	11,740	11,363	11,185	9,901	11,287	11,610	11,601
	0,3	N(0,2)	9,031	5,127	9,634	9,255	11,761	7,681	12,092	11,764
		t 4	5,953	6,750	7,299	6,418	5,638	6,949	6,941	5,982
	0,5	N(0,2)	14,293	15,601	10,213	14,633	19,962	21,258	15,245	20,383
		t 4	7,642	10,710	7,623	7,889	7,716	11,322	7,419	7,941
	0,7	N(0,2)	15,723	13,186	29,408	9,210	13,040	14,474	36,168	20,155
		t 4	24,419	10,479	11,527	14,213	23,181	9,074	11,249	12,335
72	0,1	N(0,2)	3,355	3,677	3,914	3,733	3,958	4,253	4,545	4,317
		t 4	2,998	3,085	3,130	3,076	3,002	3,099	3,063	3,048
	0,3	N(0,2)	7,882	6,276	7,181	8,425	9,560	7,047	7,737	9,967
		t 4	6,826	7,127	6,654	6,849	6,733	7,211	6,557	6,832
	0,5	N(0,2)	7,009	7,478	5,880	7,709	8,046	8,784	6,133	8,971
		t 4	6,277	6,382	6,094	6,170	6,213	6,464	6,157	6,147
	0,7	N(0,2)	10,577	10,580	9,708	8,713	13,149	11,068	12,924	10,986
		t 4	7,648	8,645	8,400	8,430	8,076	8,876	9,208	8,283

Tabela 3.30 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier aditivo de acordo com o Cenário 4.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	4,864	3,986	4,151	4,084	6,027	4,868	4,999	4,964
		t 4	3,370	3,457	3,423	3,470	3,306	3,476	3,488	3,466
	0,3	N(0,2)	3,614	3,933	3,768	3,871	4,395	4,696	4,574	4,636
		t 4	3,231	3,206	3,281	3,164	3,203	3,107	3,213	3,094
	0,5	N(0,2)	4,568	4,893	4,676	4,627	5,194	5,760	5,367	5,328
		t 4	4,213	4,054	4,072	4,131	4,113	3,934	3,978	4,010
	0,7	N(0,2)	5,451	4,993	5,279	5,047	6,158	5,701	5,951	5,809
		t 4	4,406	4,637	4,565	4,776	4,111	4,443	4,340	4,507
72	0,1	N(0,2)	6,733	6,673	7,311	6,753	7,318	7,318	8,894	7,591
		t 4	5,998	6,047	6,268	5,968	5,832	5,832	6,252	5,826
	0,3	N(0,2)	4,156	9,234	4,239	4,612	5,678	11,000	5,749	6,410
		t 4	7,401	5,866	7,567	6,616	7,265	5,232	7,437	6,579
	0,5	N(0,2)	7,621	9,285	7,566	9,368	7,252	9,956	7,200	10,087
		t 4	8,255	7,729	8,044	7,805	8,227	7,557	8,057	7,421
	0,7	N(0,2)	3,199	3,215	3,263	3,238	3,387	3,357	3,436	3,432
		t 4	3,098	3,195	3,095	3,177	2,960	3,056	2,953	3,062

Tabela 3.31 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outlier inovador de acordo com o Cenário 4.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,030	4,118	4,279	4,206	6,336	5,190	5,317	5,256
		t 4	3,403	3,494	3,464	3,454	3,346	3,477	3,517	3,474
	0,3	N(0,2)	4,061	4,326	4,171	4,294	5,090	5,388	5,187	5,354
		t 4	3,436	3,403	3,461	3,350	3,452	3,355	3,417	3,317
	0,5	N(0,2)	5,348	5,769	5,514	5,561	6,638	7,386	6,860	6,893
		t 4	4,589	4,441	4,406	4,466	4,563	4,498	4,383	4,469
	0,7	N(0,2)	7,989	8,322	8,239	7,341	8,909	8,728	8,372	8,210
		t 4	6,767	7,594	7,301	0,241	5,305	5,328	5,264	5,117
72	0,1	N(0,2)	6,924	6,772	7,518	6,752	7,661	7,430	9,275	7,809
		t 4	6,269	6,080	6,500	5,993	6,235	5,967	6,535	5,929
	0,3	N(0,2)	5,442	10,690	5,576	5,972	7,842	13,357	8,010	8,679
		t 4	7,058	6,111	7,250	6,395	7,275	5,948	7,522	6,576
	0,5	N(0,2)	7,622	10,099	7,520	10,262	7,303	11,307	7,184	11,547
		t 4	8,113	7,911	7,793	8,596	8,214	7,944	7,882	8,668
	0,7	N(0,2)	3,900	3,950	3,979	4,013	4,621	4,595	4,605	4,701
		t 4	3,411	3,481	3,419	3,597	3,419	3,470	3,402	3,584

Tabela 3.32 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obteve melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 4.

Modelo SYMARMA(1,0)				
Tipo do outlier	n	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	43,7%	56,2%	50,0%
	72	62,5%	81,2%	71,9%
	TOTAL	53,1%	68,7%	60,0%
Inovador	36	62,5%	75,0%	68,7%
	72	87,5%	87,5%	87,5%
	TOTAL	75,0%	81,2%	78,1%

Modelo SYMARMA(0,1)				
Tipo do outlier	n	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	68,7%	68,7%	68,7%
	TOTAL	84,4%	84,4%	84,4%
Inovador	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	68,7%	87,5%	78,1%
	TOTAL	84,4%	93,7%	89,1%

Cenário 5 - 02 outliers aditivos (ou inovadores) na primeira parte da amostra e 01 outlier aditivo na segunda parte da amostra

Os resultados apresentados nas Tabelas 3.33-3.36 mostram as médias das raízes do erro médio quadrático (RMSE) obtidas das previsões realizadas com os 10.000 modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuições t de Student condicional com 4 graus de liberdade e normal condicional, simulados de acordo com o cenário 5. Um resumo comparativo do percentual de casos em que o modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus obteve melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional é apresentado na Tabela 3.37.

Os resultados apontam que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional fornecem estimativas mais precisas do que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional para as observações que compõem a segunda parte da amostra. Lembrando que neste cenário a primeira parte da amostra, em que

Tabela 3.33 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 5.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	19,765	5,132	19,754	19,398	26,194	11,010	26,183	25,754
		t 4	12,531	10,873	13,563	13,901	12,128	11,480	13,215	13,510
	0,3	N(0,2)	7,283	10,781	7,939	6,736	11,761	15,061	12,376	10,934
		t 4	5,446	4,801	6,765	5,894	5,262	4,607	6,819	6,100
	0,5	N(0,2)	8,530	15,420	8,741	16,173	14,487	21,635	14,564	22,274
		t 4	8,363	6,348	8,649	9,735	8,897	6,562	8,857	9,955
	0,7	N(0,2)	18,501	18,327	17,815	17,196	25,728	26,391	26,324	25,523
		t 4	6,403	8,715	8,666	5,849	8,283	7,165	6,864	6,052
72	0,1	N(0,2)	4,010	4,210	4,069	4,501	5,193	5,752	5,504	5,994
		t 4	3,164	3,014	3,083	3,034	3,071	2,924	3,010	2,961
	0,3	N(0,2)	7,755	8,660	8,521	6,139	10,118	11,082	10,739	7,726
		t 4	6,001	5,898	6,973	6,229	5,792	5,504	6,711	6,024
	0,5	N(0,2)	5,722	7,118	6,030	7,280	6,167	8,440	6,529	8,685
		t 4	6,016	5,611	5,918	5,852	5,883	5,412	5,744	5,638
	0,7	N(0,2)	8,218	6,456	6,679	8,876	10,135	7,953	8,306	10,849
		t 4	5,658	6,533	6,240	6,032	5,335	6,030	5,816	5,524

Tabela 3.34 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(1,0) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 5.

n	ϕ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	20,956	5,783	20,943	20,530	28,114	12,839	28,118	27,623
		t 4	13,201	10,603	14,315	14,376	12,783	11,322	13,925	14,183
	0,3	N(0,2)	9,410	13,868	9,945	9,792	15,336	19,984	15,932	15,815
		t 4	5,465	5,596	6,717	6,315	5,516	4,926	6,920	6,505
	0,5	N(0,2)	17,753	24,034	18,781	25,223	29,449	35,985	30,512	37,084
		t 4	7,124	7,971	6,274	11,813	6,128	7,838	7,101	11,370
	0,7	N(0,2)	31,533	25,516	19,602	20,074	52,910	49,035	43,760	42,214
		t 4	6,560	23,143	26,710	9,635	7,359	22,210	26,692	9,218
72	0,1	N(0,2)	4,222	4,482	4,354	4,761	5,548	6,210	5,978	6,462
		t 4	3,321	3,142	3,224	3,091	3,217	3,062	3,187	3,049
	0,3	N(0,2)	9,481	10,764	10,492	7,431	12,652	14,450	14,139	9,556
		t 4	6,601	6,814	8,207	6,568	6,533	6,566	8,173	6,541
	0,5	N(0,2)	6,656	9,278	7,152	9,797	9,121	12,267	9,176	12,894
		t 4	5,939	6,303	6,263	7,005	6,074	6,258	6,225	7,049
	0,7	N(0,2)	15,625	14,997	9,203	14,290	22,005	21,024	14,684	20,847
		t 4	9,469	8,483	9,289	8,757	9,758	8,954	9,804	8,898

Tabela 3.35 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers aditivos de acordo com o Cenário 5.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Aditivo							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	5,964	6,895	5,931	5,761	8,879	9,838	8,719	8,629
		t 4	3,551	3,718	3,425	3,594	3,516	3,589	3,389	3,535
	0,3	N(0,2)	5,247	5,050	4,969	5,334	7,360	7,230	7,096	7,421
		t 4	3,275	3,261	3,161	3,306	3,154	3,223	3,133	3,186
	0,5	N(0,2)	5,627	5,733	6,385	6,398	7,811	8,087	8,752	8,821
		t 4	4,104	4,169	3,933	4,108	4,025	4,110	3,863	4,069
	0,7	N(0,2)	7,333	6,733	7,367	6,166	10,093	9,638	10,169	9,120
		t 4	4,379	4,233	4,089	3,979	4,120	4,040	3,851	3,881
72	0,1	N(0,2)	9,760	7,835	6,746	7,724	13,176	9,744	8,701	9,737
		t 4	6,660	5,729	5,735	6,169	6,606	5,494	5,667	6,105
	0,3	N(0,2)	12,328	6,730	12,112	12,542	16,569	10,430	15,850	16,707
		t 4	5,532	7,007	4,121	6,319	4,656	6,901	3,368	5,494
	0,5	N(0,2)	7,181	7,175	7,171	10,513	6,973	6,862	6,946	12,356
		t 4	7,836	7,950	7,724	7,825	7,859	7,951	7,744	7,747
	0,7	N(0,2)	3,697	3,665	3,589	3,607	4,581	4,465	4,351	4,370
		t 4	2,958	3,011	3,047	2,891	2,787	2,844	2,880	2,697

Tabela 3.36 Média das RMSE das previsões obtidas dos 10.000 modelos SYMARMA(0,1) simulados na presença de outliers inovadores de acordo com o Cenário 5.

n	θ	Distribuição dos Erros	Intensidade do impacto - Outlier Inovador							
			w=5				w=8			
			Locais das perturbações				Locais das perturbações			
			L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
36	0,1	N(0,2)	6,395	7,298	6,309	6,175	9,566	10,511	9,369	9,328
		t 4	3,621	3,781	3,469	3,681	3,524	3,656	3,416	3,629
	0,3	N(0,2)	6,164	5,919	5,921	6,239	8,850	8,564	8,619	8,890
		t 4	3,587	3,522	3,504	3,647	3,449	3,464	3,434	3,496
	0,5	N(0,2)	7,653	7,690	8,439	8,488	10,983	11,224	11,972	11,981
		t 4	4,575	4,629	4,576	4,825	4,520	4,583	4,491	4,662
	0,7	N(0,2)	11,005	10,393	10,816	9,240	19,672	20,431	20,070	21,509
		t 4	5,666	5,654	5,636	5,396	5,501	5,469	6,277	6,193
72	0,1	N(0,2)	10,245	8,204	7,126	7,959	14,006	10,827	9,785	10,611
		t 4	6,924	6,086	5,779	6,330	6,973	5,897	5,755	6,256
	0,3	N(0,2)	15,064	9,254	14,661	15,209	20,899	14,498	19,976	21,008
		t 4	6,719	6,543	5,562	7,737	6,074	7,034	5,138	7,562
	0,5	N(0,2)	7,222	7,168	7,220	12,176	7,036	6,945	7,010	15,043
		t 4	7,819	8,155	7,521	8,543	7,936	8,250	7,775	8,504
	0,7	N(0,2)	5,103	5,118	4,967	5,076	6,880	6,892	6,694	6,816
		t 4	3,495	3,598	3,602	3,516	3,477	3,574	3,585	3,476

Tabela 3.37 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t de Student condicional obtiveram melhor performance que o modelo sob distribuição normal condicional nas previsões futuras considerando o Cenário 5.

Modelo SYMARMA(1,0)				
Tipo do outlier	n	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	93,7%	93,7%	93,7%
	72	81,2%	100,0%	90,6%
	TOTAL	87,5%	96,9%	92,2%
Inovador	36	87,5%	100,0%	93,7%
	72	93,7%	100,0%	96,9%
	TOTAL	90,6%	100,0%	95,3%

Modelo SYMARMA(0,1)				
Tipo do outlier	n	Intensidade do impacto		TOTAL
		w = 5	w = 8	
Aditivo	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	75,0%	81,2%	78,1%
	TOTAL	87,5%	90,6%	89,1%
Inovador	36	100,0%	100,0%	100,0%
	72	81,2%	81,2%	81,2%
	TOTAL	90,6%	90,6%	90,6%

o modelo é estimado, contém dois outliers do tipo aditivo ou inovador e a segunda parte da amostra contém um outlier do tipo aditivo.

A acurácia das previsões realizadas pelos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional pode ser comprovada ao verificar que na pior das hipóteses ($n = 72$, $\omega = 5xS_{y_t}$ e outliers do tipo aditivo na primeira parte da amostra) os modelos obtiveram, em média, menores erros de previsão que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional em 81,2% e 75% dos casos considerados, respectivamente.

A Tabela 3.38 apresenta um resumo dos resultados obtidos das simulações realizadas para esta seção. Nela constam os percentuais de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional obtiveram menores médias das raízes do erro médio quadrático (RMSE), na previsão de observações futuras, do que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional, para cada um dos cinco cenários considerados. Nota-se que na presença de outliers na série, a utilização dos modelos

SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional, em geral, fornece melhores previsões, no sentido de menor RMSE, relativamente aos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional. Em 79,4% de todos os cenários considerados o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional se sobressaiu ao normal condicional; para o modelo SYMARMA(1,0) esse percentual é ainda maior chegando a 89,4%.

Tabela 3.38 Percentual de casos em que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional foram superior aos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional na previsão de observações futuras - para outliers aditivos e inovadores.

Modelo SYMARMA(1,0)		Modelo SYMARMA(0,1)
25,0%	Cenário 1	37,5%
72,7%	Cenário 2	87,5%
88,3%	Cenário 3	100,0%
69,5%	Cenário 4	86,7%
93,8%	Cenário 5	89,8%
79,4%	TOTAL	89,4%

3.6 Modelos SYMARMA(1,1)

Nesta seção serão apresentados resultados do estudo de simulação realizado do modelo SYMARMA(1,1). O objetivo destas simulações é avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança condicional (EMVC) para o parâmetro autorregressivo (ϕ), de média móvel (θ) e de escala (φ) do modelo SYMARMA(1,1). Foram realizadas 10.000 réplicas de Monte Carlo com amostras de tamanho $n = 150$ considerando α fixo igual a 0. Os valores considerados para o parâmetro ϕ foram 0,1, 0,3, 0,5 e 0,7, para o parâmetro θ , 0,1, 0,3 e 0,5 e, por fim, o parâmetro de escala, φ , foi mantido fixo igual a 2 para o modelo SYMARMA sob distribuição normal condicional e igual a 1 para modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade. As séries foram geradas como na Seção 3.2

de acordo a distribuição condicional do modelo, isto é, para o modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional consideramos $r_t \sim N(0,2)$ e para o modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional consideramos $r_t \sim t_4$.

Todas as rotinas de simulação e estimação foram desenvolvidas utilizando o software R em sua versão 13.0. Os estimadores de máxima verossimilhança condicional foram obtidos através da maximização do logaritmo da função de verossimilhança condicional (2.9) utilizando o algoritmo de otimização não-linear score de Fisher [detalhes, ver Seção 2.2].

Para avaliar e comparar o comportamento do EMVC para os diferentes parâmetros, utilizaremos a média dos valores estimados, a média dos vieses, a variância estimada e o erro quadrático médio (EQM) dos parâmetros, definidos na Seção 3.3.

Os resultados das simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional estão apresentados nas Tabelas 3.39 e 3.40. Para o modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional, temos as Tabelas 3.41 e 3.42. Pode-se notar que os EMVC para os parâmetros do modelo SYMARMA(1,1) forneceram estimativas bastante precisas para o valor verdadeiro do parâmetro. Sob distribuição normal condicional, o viés médio relativo dos parâmetros $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ ou $\hat{\rho}$ não ultrapassou 21,2% e, sob distribuição t_4 condicional, o maior valor do viés médio relativo foi de 16,1%. Em ambos os modelos o valor máximo do viés médio relativo foi obtido para $\phi = 0,3$ e $\theta = 0,1$.

Podemos observar também um leve decaimento da variância e do EQM dos parâmetros ϕ e θ à medida que os parâmetros ϕ e/ou θ aumentam de valor.

Tabela 3.39 Média, viés, variância e EQM das estimativas dos parâmetros ϕ e θ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional.

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	$n = 150$		
		θ		
		0,1	0,3	0,5
0,1	Média de ϕ	0,102	0,103	0,109
	Viés de ϕ	0,002	0,003	0,009
	Variância de ϕ	0,076	0,038	0,020
	EQM de ϕ	0,076	0,038	0,020
	Média de θ	0,118	0,294	0,484
	Viés de θ	0,018	-0,006	-0,016
	Variância de θ	0,077	0,038	0,018
	EQM de θ	0,078	0,038	0,018
0,3	Média de ϕ	0,268	0,279	0,291
	Viés de ϕ	-0,032	-0,021	-0,009
	Variância de ϕ	0,037	0,020	0,014
	EQM de ϕ	0,038	0,021	0,014
	Média de θ	0,127	0,311	0,496
	Viés de θ	0,027	0,011	-0,004
	Variância de θ	0,040	0,021	0,013
	EQM de θ	0,041	0,021	0,013
0,5	Média de ϕ	0,468	0,475	0,484
	Viés de ϕ	-0,032	-0,025	-0,016
	Variância de ϕ	0,016	0,011	0,009
	EQM de ϕ	0,017	0,012	0,009
	Média de θ	0,122	0,312	0,496
	Viés de θ	0,022	0,012	-0,004
	Variância de θ	0,020	0,014	0,010
	EQM de θ	0,021	0,014	0,010
0,7	Média de ϕ	0,670	0,675	0,679
	Viés de ϕ	-0,030	-0,025	-0,021
	Variância de ϕ	0,007	0,006	0,005
	EQM de ϕ	0,008	0,007	0,006
	Média de θ	0,116	0,306	0,489
	Viés de θ	0,016	0,006	-0,011
	Variância de θ	0,012	0,010	0,008
	EQM de θ	0,012	0,010	0,009

Tabela 3.40 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição normal condicional.

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	$n = 150$		
		θ		
		0,1	0,3	0,5
0,1	Média de φ	1,969	1,966	1,970
	Viés de φ	-0,031	-0,034	-0,030
	Variância de φ	0,053	0,053	0,053
	EQM de φ	0,054	0,054	0,054
0,3	Média de φ	1,963	1,964	1,969
	Viés de φ	-0,037	-0,036	-0,031
	Variância de φ	0,053	0,053	0,053
	EQM de φ	0,054	0,054	0,054
0,5	Média de φ	1,962	1,964	1,972
	Viés de φ	-0,038	-0,036	-0,028
	Variância de φ	0,052	0,053	0,053
	EQM de φ	0,054	0,054	0,054
0,7	Média de φ	1,961	1,966	1,977
	Viés de φ	-0,039	-0,034	-0,023
	Variância de φ	0,053	0,054	0,054
	EQM de φ	0,055	0,055	0,055

Tabela 3.41 Média, viés, variância e EQM das estimativas dos parâmetros ϕ e θ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional.

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	$n = 150$		
		θ		
		0,1	0,3	0,5
0,1	Média de ϕ	0,108	0,109	0,118
	Viés de ϕ	0,008	0,009	0,018
	Variância de ϕ	0,066	0,030	0,016
	EQM de ϕ	0,066	0,030	0,016
	Média de θ	0,106	0,290	0,477
	Viés de θ	0,006	-0,010	-0,023
	Variância de θ	0,066	0,029	0,013
	EQM de θ	0,066	0,029	0,014
0,3	Média de ϕ	0,277	0,287	0,301
	Viés de ϕ	-0,023	-0,013	0,001
	Variância de ϕ	0,029	0,016	0,010
	EQM de ϕ	0,029	0,016	0,010
	Média de θ	0,119	0,307	0,488
	Viés de θ	0,019	0,007	-0,012
	Variância de θ	0,031	0,016	0,009
	EQM de θ	0,031	0,016	0,010
0,5	Média de ϕ	0,477	0,483	0,458
	Viés de ϕ	-0,023	-0,017	-0,042
	Variância de ϕ	0,013	0,009	0,007
	EQM de ϕ	0,013	0,009	0,009
	Média de θ	0,116	0,307	0,485
	Viés de θ	0,016	0,007	-0,015
	Variância de θ	0,015	0,010	0,008
	EQM de θ	0,016	0,010	0,008
0,7	Média de ϕ	0,679	0,683	0,654
	Viés de ϕ	-0,021	-0,017	-0,046
	Variância de ϕ	0,005	0,004	0,004
	EQM de ϕ	0,006	0,005	0,006
	Média de θ	0,112	0,302	0,481
	Viés de θ	0,012	0,002	-0,019
	Variância de θ	0,009	0,007	0,008
	EQM de θ	0,009	0,007	0,008

Tabela 3.42 Média, viés, variância e EQM das estimativas do parâmetro φ nas simulações do modelo SYMARMA(1,1) sob distribuição t_4 condicional.

ϕ	Medidas de centralização e dispersão	$n = 150$		
		θ		
		0,1	0,3	0,5
0,1	Média de φ	0,988	0,986	0,987
	Viés de φ	-0,012	-0,014	-0,013
	Variância de φ	0,024	0,024	0,024
	EQM de φ	0,024	0,024	0,024
0,3	Média de φ	0,984	0,984	0,985
	Viés de φ	-0,016	-0,016	-0,015
	Variância de φ	0,024	0,024	0,024
	EQM de φ	0,024	0,024	0,024
0,5	Média de φ	0,982	0,983	0,951
	Viés de φ	-0,018	-0,017	-0,049
	Variância de φ	0,024	0,024	0,021
	EQM de φ	0,024	0,024	0,023
0,7	Média de φ	0,981	0,981	0,956
	Viés de φ	-0,019	-0,019	-0,044
	Variância de φ	0,024	0,024	0,022
	EQM de φ	0,024	0,024	0,024

CAPÍTULO 4

Aplicações

It always helps to know the answer when you are working toward the solution of a problem.

—AUTOR DESCONHECIDO

Nesse capítulo utilizamos dois conjuntos de dados reais para ilustrar a performance do modelo SYMARMA no ajuste de séries temporais contínuas na presença de observações atípicas. O banco de dados utilizado no primeiro exemplo é composto por observações mensais, desde outubro de 2001 até o mês de agosto de 2011, referentes à arrecadação do Imposto sobre Operações Relativas da Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços (ICMS) no estado de Pernambuco, sendo composto por um total de 119 observações. Os valores arrecadados foram deflacionados através do índice de inflação IGP-DI (Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna). Para o segundo exemplo, utilizamos dados da inflação no Brasil calculada de acordo com o IGP-DI. Os dados correspondem a 563 observações mensais abrangendo o período de janeiro de 1965 a novembro de 2011. A fonte dos dados é o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)¹.

Este capítulo está dividido em 2 seções. A primeira seção trata do ajuste da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco por meio de modelos estatísticos. Em seguida, na Seção 4.2, o comportamento da série inflacionária do Brasil foi estudado e previsões para inflação nos primeiros meses de 2012 foram geradas. Em ambos exemplos, o modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade foi utilizado e os resultados comparados com o tradicional modelo ARMA.

¹As séries utilizadas neste capítulo foram retiradas do sítio do IPEADATA através do endereço eletrônico <http://www.ipeadata.gov.br/> em 19 de dezembro de 2011.

4.1 Modelagem da arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco

4.1.1 Índices ICMS e IGP-DI

O **ICMS** (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços) é um imposto de competência estadual que incide (base de cálculo) sobre a circulação de mercadorias, prestações de serviços de transporte interestadual, ou intermunicipal, de comunicações, de energia elétrica. Também sobre a entrada de mercadorias importadas e serviços prestados no exterior.

O fato gerador é a saída da mercadoria do estabelecimento do contribuinte, fornecimento de refeições, prestação de serviços de transporte, entre outros.

Cada Estado da Federação tem liberdade para adotar regras próprias relativas à cobrança desse imposto, respeitados os requisitos mínimos fixados na Constituição Federal e pelo Código Tributário Nacional.

O estado de Pernambuco em 2010 arrecadou 8.411.014,00 milhões de reais em ICMS. Este valor correspondeu a uma participação relativa de 3,11% no ano de 2010.

O **IGP-DI** (Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna), calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas - FGV, foi instituído no ano de 1944 com a finalidade de medir o comportamento de preços em geral da economia brasileira. É uma média aritmética, ponderada dos seguintes índices:

- a) **IPA** - é o Índice de Preços no Atacado e mede a variação de preços no mercado atacadista. O IPA ponderada em 60% o IGP-DI;
- b) **IPC** - é o Índice de Preços ao Consumidor e mede a variação de preços entre as famílias que recebem renda de 1 a 33 salários mínimos nas cidades de São Paulo e Rio de Janeiro. O IPC pondera em 30% o IGP-DI;
- c) **INCC** - é o Índice Nacional da Construção Civil e mede a variação de preços no setor da construção civil, considerando no caso tanto materiais como também a mão de obra empregada no setor. O INCC pondera em 10% o IGP-DI.

DI ou Disponibilidade Interna é a consideração das variações de preços que afetam diretamente as atividades econômicas localizadas no território brasileiro. Não se consideram as variações de preços dos produtos exportados, que são consideradas somente no caso da variação no aspecto de Oferta Global.

O que difere o IGP-M (Índice Geral de Preço do Mercado) do IGP-DI é que as variações de preços consideradas pelo IGP-M se referem ao período do dia vinte e um do mês anterior

ao dia vinte do mês de referência enquanto no IGP-DI referem-se ao período do dia um ao dia trinta do mês em referência.

A divulgação ocorre sempre na segunda quinzena do mês seguinte. Portanto, este índice mede a variação de preços de um determinado mês por completo.

4.1.2 Resultados

Na Figura 4.1 é apresentado o gráfico da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco para o período de outubro de 2001 até agosto de 2011. Nota-se claramente que a série possui cinco grandes quedas no valor da arrecadação; essas quedas correspondem aos meses de setembro, outubro e novembro de 2008, em que a arrecadação foi, aparentemente, totalmente transferida para algum outro setor, e aos meses de outubro e novembro de 2009 em que o imposto arrecadado com o ICMS foi, aparentemente, parcialmente transferido chegando assim a uma arrecadação de apenas 617 e 660 mil reais, respectivamente.

As observações referentes aos meses de setembro, outubro e novembro de 2008 e outubro e novembro de 2009 são consideradas observações atípicas por serem inconsistentes com o restante da série. Esta é a primeira vez que esses dados foram analisados sob a ótica de acomodar observações atípicas utilizando distribuições mais flexíveis.

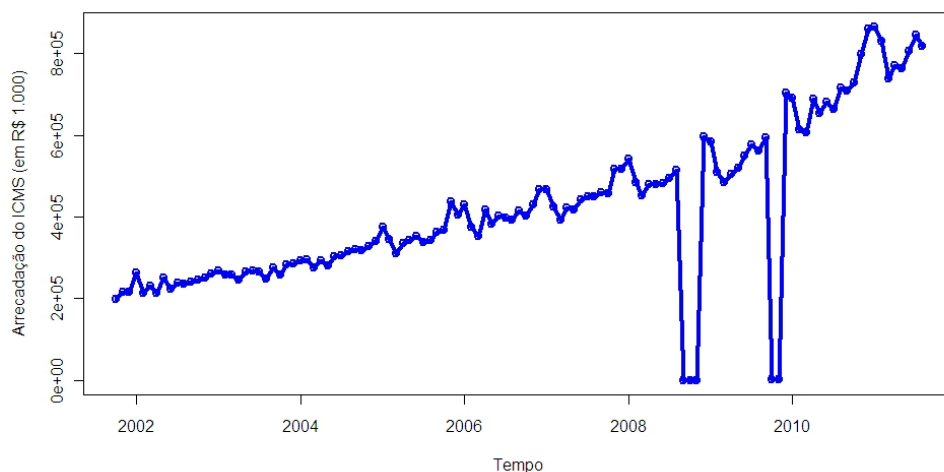


Figura 4.1 Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados brutos.

A série deflacionada pelo IGP-DI, tomando como mês de referência agosto de 2011, é apresentada na Figura 4.2. Deflacionar a série é importante pois precisamos remover o efeito da inflação nos valores da série temporal. Temos que em média a arrecadação foi de R\$ 542.798,8

milhões com desvio-padrão de R\$ 168.062,0 milhões. A arrecadação mediana foi R\$ 542.791,8 milhões. O valor máximo da série deflacionada, atingido em dezembro de 2010, chegou ao patamar de R\$ 890.825,1 milhões. Já a menor arrecadação, R\$ 0,0, ocorre nos meses de setembro, outubro e dezembro de 2008, devido, aparentemente, à total transferência da arrecadação para outro setor.

Nota-se também que entre meses consecutivos ocorreu uma taxa média de crescimento de 0,82% na arrecadação do ICMS, ou seja, em média ocorreu um aumento de 0,82% na arrecadação quando passou-se de um mês para o outro de forma ordenada.

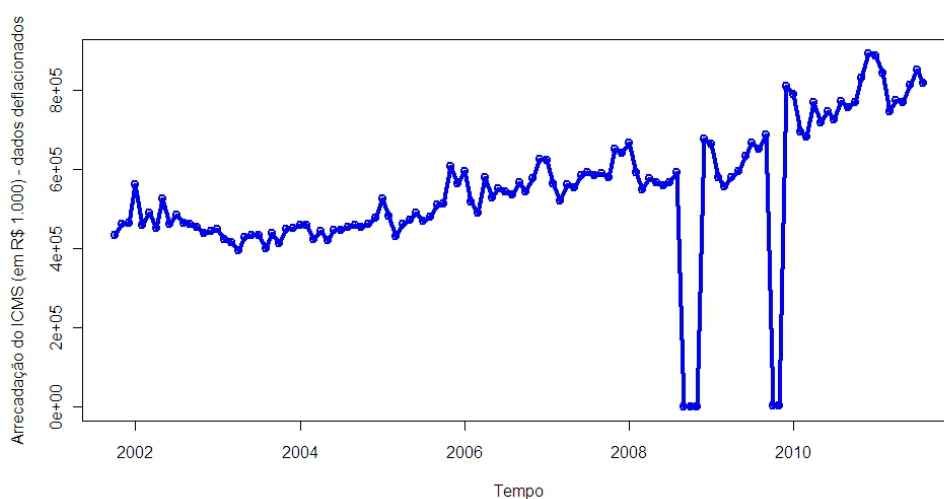


Figura 4.2 Série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.

Em nosso estudo, nos meses em que a arrecadação foi de R\$ 0,0 somamos R\$ 10,0 para evitar possíveis problemas na divisão de um número inteiro positivo por zero.

Para verificar a estacionariedade da série utilizamos o teste de raiz unitária Dickey-Fuller (Said e Dickey, 1984) admitindo-se como hipótese nula a não-estacionariedade. Uma raiz unitária encontrada no polinômio autorregressivo sugere que a série segue um processo não-estacionário integrado de ordem um. O teste da raiz unitária de Dickey-Fuller apresentou valor p igual a 0,043, evidenciando, ao nível de 5% de significância, a estacionariedade da série. Logo, não é necessária alguma transformação para tornar a série estacionária.

O correlograma e o correlograma parcial da série estão apresentados, respectivamente, nas Figuras 4.3 e 4.4. Eles auxiliam na identificação dos possíveis modelos que descrevem o seu comportamento dinâmico. Através do correlograma apresentado na Figura 4.3 existem observações fora do intervalo de confiança representado pelas linhas pontilhadas, o que indica uma possível existência de parâmetros de médias móveis. Notamos também, através do correlo-

grama parcial apresentado na Figura 4.4, que existe um observação no *lag* 9 fora do intervalo de confiança, o que indica a existência de um possível parâmetro autoregressivo de ordem 9.

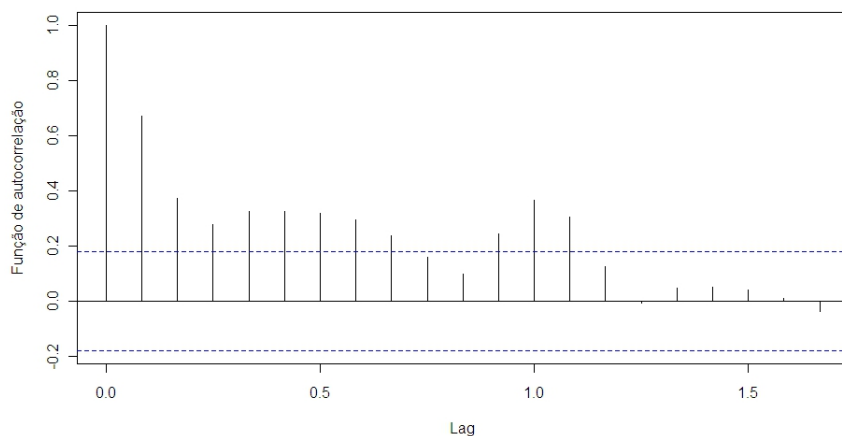


Figura 4.3 Função de autocorrelação da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.

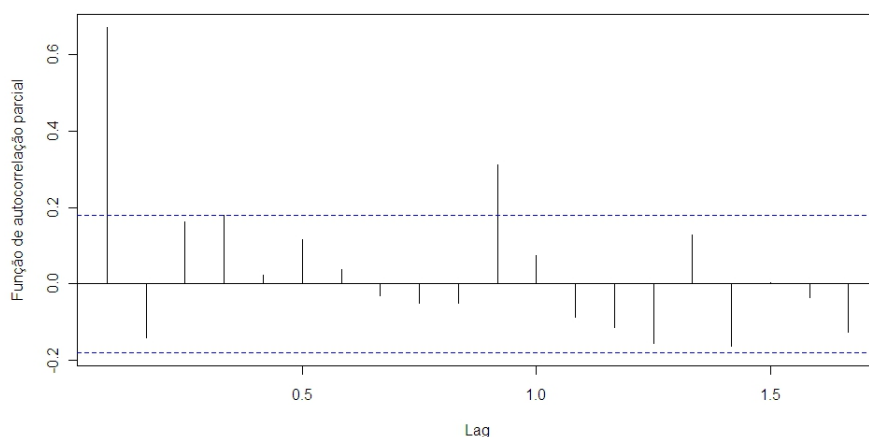


Figura 4.4 Função de autocorrelação parcial da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco - dados deflacionados pelo IGP-DI.

Desta forma, alguns modelos temporais na classe $ARMA(p,q)$ foram propostos a fim de ajustar os dados, ver Tabela 4.1. Para a escolha dentre os modelos propostos utilizou-se o critério BIC (*Bayesian Information Criterion*) [ver, Schwarz (1978)] dado por

$$BIC = -2\log\hat{L} + k\log T,$$

em que L é o valor da função de verossimilhança avaliada em $\hat{\delta}$, k é o número de parâmetros a serem estimados e T é o número de observações da série, neste exemplo $T = 119$. O BIC é um critério consistente, de forma que ele fornece estimativas de p e q que convergem em probabilidade para os valores verdadeiros à medida que o tamanho da amostra tende a infinito. De acordo com esse critério, o modelo que melhor descreve a dinâmica dos dados da série é o ARMA(1,0), pois possui menor BIC e também apresenta baixo valor para o logaritmo da função de máxima verossimilhança.

Tabela 4.1 Modelos ARMA ajustados a série arrecadação do ICMS em Pernambuco, para diferentes configurações, e seus respectivos valores do critério BIC e logaritmo da função de máxima verossimilhança

Modelo	BIC	$\ell(\hat{\theta})$
ARMA(0,1)	3.156,26	-1.570,96
ARMA(1,0)	3.141,36	-1.563,51
ARMA(1,1)	3.143,10	-1.561,99
ARMA(1,2)	3.143,02	-1.559,56
ARMA(1,3)	3.144,43	-1.557,88
ARMA(2,3)	3.147,75	-1.557,15

Vamos agora comparar os ajustes dos dados utilizado o modelo ARMA(1,0) e o modelo com caudas mais pesadas SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade. Lange et al. (1989) sugerem que os graus de liberdade devem ser fixados para amostra pequenas e mencionam que $\nu = 4$ tem funcionado bem para diversas aplicações. A Tabela 4.2 apresenta as estimativas obtidas por ambos modelos.

Tabela 4.2 Estimativas obtidas para os α , ϕ e φ dos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional para os dados da arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	BIC	RMSE
ARMA(1,0)	α	172.400	109.855	3.141,36	5.778,55
	ϕ	0,687	0,0002		
	φ	15.111.303.330	-		
SYMARMA(1,0)	α	16.629	68.918	2.931,29	5.448,64
	ϕ	0,973	0,0001		
	φ	1.194.293.270	-		

Percebe-se que o modelo SYMARMA(1,0) apresentou um menor valor para o critério BIC,

um menor erro padrão assintótico das estimativas dos parâmetros e também uma redução na estimativa do parâmetro de dispersão ϕ . Além disso, o modelo SYMARMA(1,0) apresentou menor valor para raiz do erro médio quadrático (RMSE), mostrando-se ajustar melhor aos dados do que o modelo ARMA(1,0). As séries ajustadas pelos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) são apresentadas juntamente com a série original na Figura 4.5.

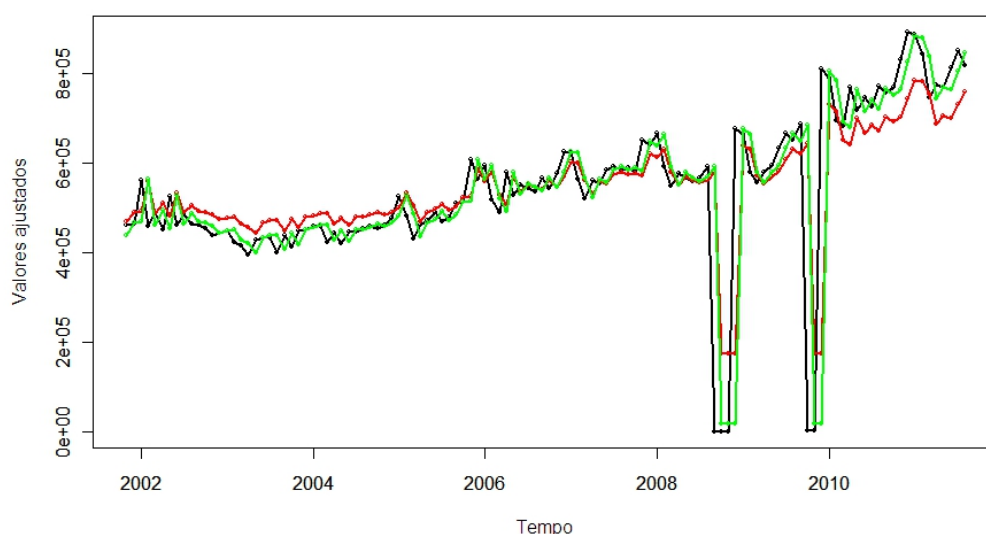


Figura 4.5 Séries arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco com dados deflacionados (linha preta), ajustada pelo modelo ARMA(1,0) (linha vermelha) e ajustada pelo modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade (linha verde).

Para verificar a acurácia dos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) em prever observações futuras, retiramos as últimas 6 observações da série e reajustamos os modelos. A previsão obtida por estes novos modelos para as últimas 6 observações retiradas anteriormente são apresentadas na Figura 4.6.

Os erros de previsão (RMSE) foram iguais a 0,237 para o modelo ARMA(1,0) e 0,067 para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade.

Neste exemplo mostramos que a utilização de uma distribuição condicional com caudas mais pesadas que a distribuição normal acomodou melhor as observações atípicas da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco, fornecendo assim uma melhor qualidade no ajuste dos dados e menores erros de previsão para observações futuras.

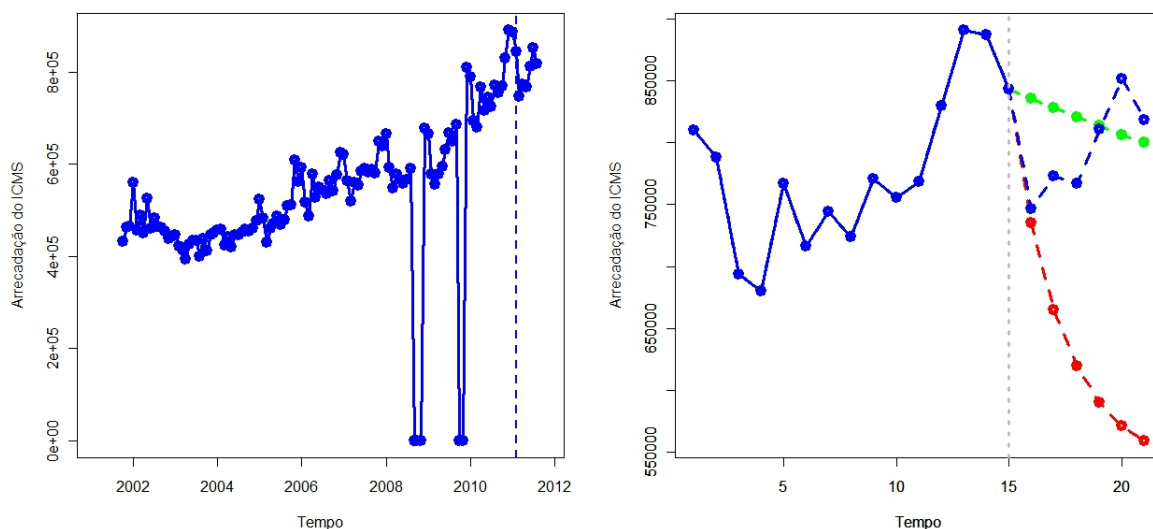


Figura 4.6 Valores preditos das últimas 6 observações da série arrecadação do ICMS no estado de Pernambuco pelos modelos ARMA(1,0) (linha vermelha) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional (linha verde).

4.2 Inflação no Brasil

A série inflacionária do Brasil, de acordo com o IGP-DI, para dados mensais abrangendo o período de janeiro de 1965 à novembro de 2011 é apresentada na Figura 4.7. Estes dados também foram estudados por Cribari-Neto e Cassiano (2005) que propuseram quatro medidas robustas para checar impacto de choques econômicos no longo prazo. Da Figura 4.7 observa-se que a partir dos anos 80 a série é caracterizada por crescimentos acentuados, que levaram o país à hiperinflação em 1989. Conforme relatam Cribari-Neto e Cassiano (2005): “Desde 1979 a história econômica brasileira foi marcada por muitas intervenções governamentais repentinas destinadas a controlar a inflação. Porém, alguns destes planos de choque não obtiveram o efeito esperado, nem mesmo a curto prazo, e por isso não introduziram inliers significativos na série, uma vez que não conseguiram baixar o nível das taxas inflacionárias. Este foi o caso dos planos de choque Delfim I, Delfim II, Delfim III, Dornelles, Arroz com Feijão, Éris, Marcílio e o Programa de Ação Imediata.”

Dentre as diversas observações atípicas presentes na série, podemos destacar março de 1986 (plano Cruzado), junho de 1987 (plano Bresser), janeiro de 1989 (plano Verão), abril de 1990 (plano Collor I), fevereiro de 1991 (plano Collor II) e junho de 1994 (plano Real). No período considerado, a maior taxa de inflação registrada foi de 81,32% que ocorreu em março de 1990.

Algumas deflações também podem ser observadas, dentre elas a de setembro de 1995 que atingiu o patamar de -1,08%.

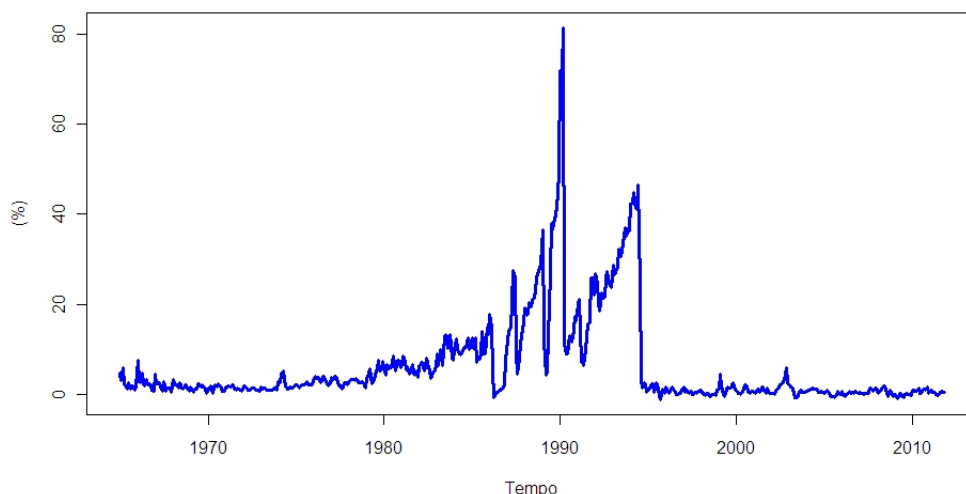


Figura 4.7 Série inflação no Brasil de acordo com IGP-DI.

A fim de chegar a estacionariedade da série, realizamos o teste da raiz unitária de Dickey-Fuller. A hipótese nula (H_0), de que a série testada possui raiz unitária (é não estacionária), foi rejeitada ao nível de 5% de significância; valor p obtido pelo teste de Dickey-Fuller foi igual a 0,042.

As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam, respectivamente, o correlograma e o correlograma parcial da série. Apesar do correlograma apresentado na Figura 4.8 exibir correlações não desprezíveis até o *lag* 20, intuitivamente é razoável considerar que a inflação no Brasil segue um processo estacionário: a inflação tende a flutuar em torno de algum patamar ao longo do tempo. Este fato, somado à evidência apresentada contrária à hipótese de não estacionariedade, permite considerar que a série inflação no Brasil segue um processo estacionário. O correlograma parcial apresentado na Figura 4.9 dá indícios de um possível parâmetro autorregressivo no modelo.

Considerando que a série segue um processo estacionário, variantes do modelo ARMA foram estimados. O critério de seleção utilizado para selecionar o modelo final, dentre os modelos estimados, será o BIC (*Bayesian Information Criterion*). Os resultados são apresentados na Tabela 4.3 e, como podemos notar, dentre os modelos estimados o que melhor descreveu a dinâmica dos dados foi o modelo ARMA(1,0) pois apresentou menor BIC e também menor valor para o logaritmo da função de máxima verossimilhança.

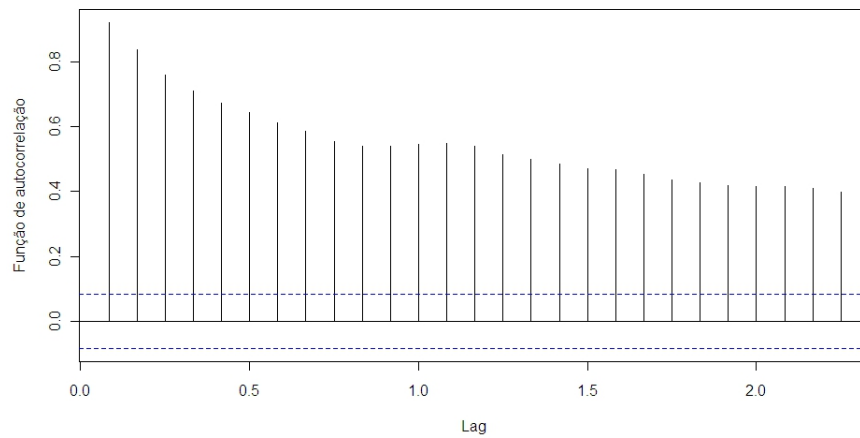


Figura 4.8 Função de autocorrelação da série inflação no Brasil de acordo com o IGP-DI.

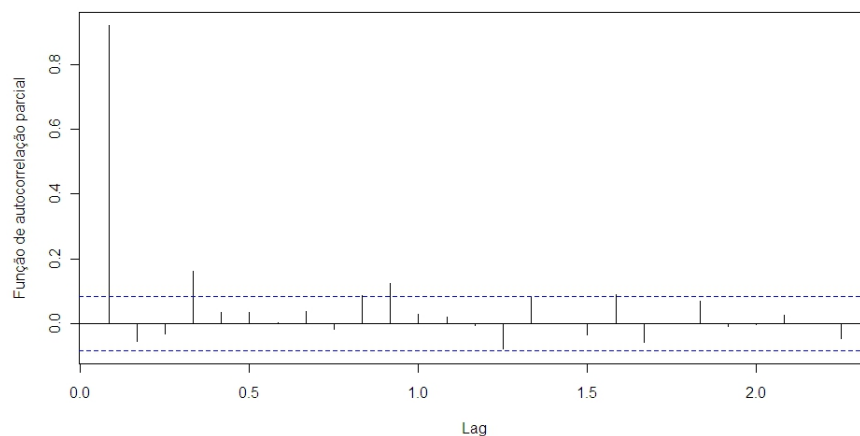


Figura 4.9 Função de autocorrelação parcial da série inflação no Brasil de acordo com o IGP-DI.

Vamos agora comparar os ajustes dos dados utilizando o modelo ARMA(1,0) e o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade. A Tabela 4.4 fornece as estimativas obtidas. Note que o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional apresentou menor valor para o critério BIC e também menor raiz do erro médio quadrático (RMSE). Além disso, os erros-padrão assintóticos das estimativas de α e ϕ foram menores. Outro fato a ser destacado é a estimativa para o parâmetro de dispersão que no modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional foi de 1,35, bem inferior ao modelo ARMA(1,0) que estimou o valor de ϕ em 16,71. As séries ajustadas pelos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional, juntamente com a série original, são apresentadas na Figura 4.10.

Tabela 4.3 Modelos ARMA ajustados a série inflação no Brasil, para diferentes configurações, e seus respectivos valores do critério BIC e logaritmo da função de máxima verossimilhança

Modelo	BIC	Logaritmo da função de máx-verossimilhança
ARMA(1,0)	3.193,36	-1.587,18
ARMA(2,1)	3.203,57	-1.585,95
ARMA(1,1)	3.197,61	-1.586,14
ARMA(1,2)	3.201,59	-1.584,96
ARMA(1,3)	3.194,74	-1.578,37
ARMA(2,3)	3.195,19	-1.575,43

Tabela 4.4 Estimativas obtidas para os α , ϕ e φ dos modelos ARMA(1,0) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional para os dados da inflação no Brasil.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	BIC	RMSE
ARMA(1,0)	α	0,489	0,099	3.193,36	7,02
	ϕ	0,921	0,008		
	φ	16,713	-		
SYMARMA(1,0)	α	0,038	0,063	2.302,32	5,89
	ϕ	1,014	0,005		
	φ	1,350	-		

Agora, retiramos as 6 últimas observações da série, que correspondem aos meses de junho a novembro de 2011, e reajustamos os modelos. Em seguida, utilizando das estimativas obtidas anteriormente, realizamos previsões para as 6 observações que haviam sido retiradas no primeiro momento. Os erros de previsão apresentados pelos modelos são apresentados na Figura 4.11. Como podemos notar, as previsões fornecidas pelo modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional foram mais precisas que as do modelo ARMA(1,0), a raiz do erro médio quadrático (RMSE) para as previsões do modelo ARMA(1,0) foi igual a 1,846 e para o modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional, 1,605.

Por fim, de posse do modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional estimado anteriormente, podemos fornecer previsões para inflação no Brasil nos três primeiros meses do ano de 2012. Para o mês de janeiro a inflação é estimada em 0,51%, para o mês de fevereiro, 0,55%, e, para o mês de março, 0,60%.

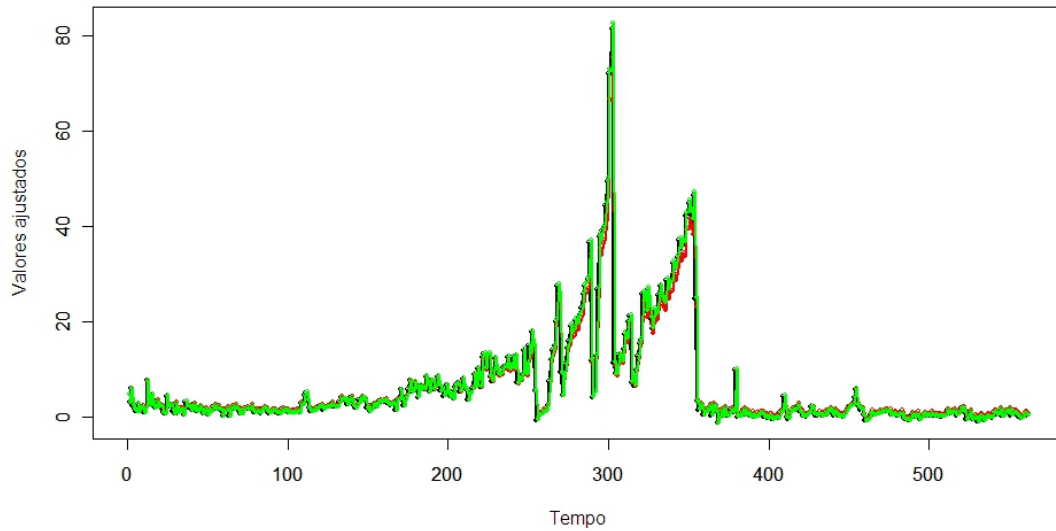


Figura 4.10 Séries inflação no Brasil (linha preta), ajustada pelo modelo ARMA(1,0) (linha vermelha) e ajustada pelo modelo SYMARMA(1,0) sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade (linha verde).

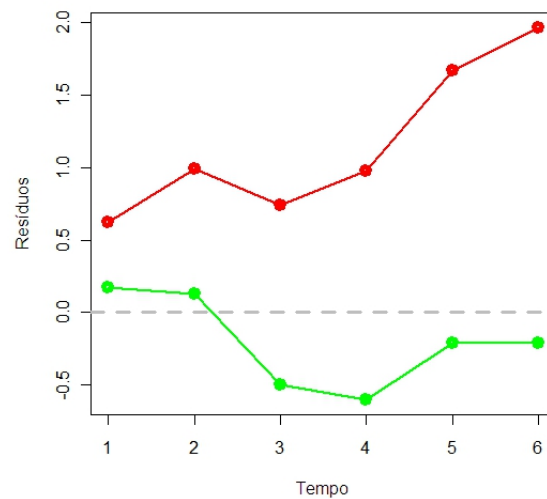


Figura 4.11 Erros de previsão apresentados pelos modelos ARMA(1,0) (linha vermelha) e SYMARMA(1,0) sob distribuição t_4 condicional (linha verde) na previsão das últimas 6 observações da série inflação no Brasil.

4.3 Rotina *elliptical.ts*

É importante que toda a teoria desenvolvida nesta dissertação esteja disponível em algum software. Com esta preocupação foram desenvolvidos macros no software R (Ihaka e Gentleman, 1996). O R é um ambiente integrado que possui grandes facilidades para a manipulação de dados, a geração de gráficos e a modelagem estatística. Devido ao seu código fonte ser aberto, o mesmo tem recebido inúmeras contribuições de várias comunidades científicas. O R encontra-se disponível em <http://www.r-project.org>, bem como diversos macros, que são implementações das mais variadas áreas de estudo.

Com a ideia de difundir a modelagem estatística para dados temporais, desenvolvemos a biblioteca *elliptical.ts*, que consiste em um conjunto de rotinas computacionais que permitem a definição de distribuições pertencentes a classe simétrica e o ajuste dos parâmetros autoregressivos, de médias móveis e de escala do modelo SYMARMA pelo método de máxima verossimilhança condicional. Este conjunto de rotinas encontra-se disponível gratuitamente para uso acadêmico em <http://www.de.ufpe.br/~cysneiros/elliptical.ts.html>.

Vamos agora apresentar a sintaxe do comando para o ajuste de um modelo SYMARMA sob uma particular distribuição simétrica condicional.

```
elliptical.ts(formula = formula(data), family = Normal, data =  
sys.parent(), dispersion = NULL, weights, subset, na.action =  
"na.fail", method = "elliptical.fit", control = glm.control(  
epsilon=0.0001, maxit=100, trace=F), model = F, x = F, y = T,  
contrasts = NULL, linear = T, offset, np = 0, nq = 0, ...)
```

Para o uso da library *elliptical.ts* é necessário chamar inicialmente a library *Matrix*. Após o ajuste do modelo utilizando a library *elliptical.ts* ficará disponível uma lista de objetos gerados, tais como:

coefficients: coeficientes autorregressivos, de médias móveis e de locação do modelo ajustado;

dispersion: coeficiente de dispersão do modelo ajustado;

residuals: resíduo $(y - \mu)/\sqrt{\phi}$;

fitted.values: valores ajustados;

loglik: o logaritmo da verossimilhança maximizada do modelo ajustado;

Wg: os valores da função $W_g(u)$;

Wgder: os valores da função $W'_g(u)$;

v: os valores da função v_i ;

iter: número de iterações;

scale: $4d_g$;

scaledispersion: $4f_g - 1$;

scalevariance: ξ ;

DesP: desvio padrão assintótico dos coeficientes autoregressivos, de médias móveis e de localização do modelo ajustado;

rmse: raiz do erro médio quadrático.

Na opção `family`, define-se a família de distribuição a ser ajustada. Esta library até o presente momento está definida para as distribuições abaixo:

Normal: `family = Normal()`;

t de Student: `family = Student(v)`;

t de Student Generalizada: `family = Gstudent(c(s,r))`;

Logística-I: `family = LogisI()`;

Logística-II: `family = LogisII()`;

Logística Generalizada: `family = Glogis(c( $\alpha$ ,m))`;

Exponencial Potência: `family = Powerexp(k)`.

Também é possível usar a library para definir outras distribuições através do comando `make.family.elliptical`. Por exemplo, pode-se criar a família Cauchy através dos comandos abaixo:

```
Cauchy <- function()
```

```

{
make.family.elliptical("Cauchy")
}
Cauchy.deriv <- structure(.Data=list(
g0 = function(z,...)  log((1/pi)*(1+z^2)^(-1)),
g1 = function(z,...)  -1/(1+z^2),
g2 = function(z,...)  1/8,
g3 = function(z,...)  3/8,
g4 = function(z,...)  1, # não definido
g5 = function(z,...)  1/((1+z^2)^2),
.Dim = c(6,1),
.Dimnames = list(c("g0","g1","g2","g3","g4","g5"),c("Cauchy"))

```

Vamos agora utilizar a série de dados inflacionários do Brasil [ver, Seção 4.2] para ilustrar algumas saídas disponibilizadas pelas funções implementadas. Os comandos utilizados são apresentados a seguir.

```

library(Matrix)
inflacao <- scan(what=list(y=0))
4.82
3.12
6.01
.
.
.
0.43

attach(inflacao)
inflacao <- ts(inflacao, start=c(1965,1), end=c(2011,11),
frequency=12)
ajuste <- elliptical.ts(formula=inflacao~1, family=Student(4),
np=1, nq=0)
ajuste

Call:

```

```
elliptical(formula = inflacao ~ 1, family = Student(4), np = 1,  
nq = 0) # np: número de parâmetros autoregressivos no modelo; nq:  
número de parâmetros de médias móveis
```

Coefficients:

```
(Intercept)      ar1  
0.0383187    1.0141667
```

Scale parameter: 1.34976

Error distribution: Student

-2*Log-Likelihood 2255.65

ajuste\$DesP

```
0.062651948 0.005159947
```

ajuste\$rmse

```
5.887852
```

Considerações Finais

I know of no way of judging the future but by the past.

—PATICK HENRY (Speech at Second Virginia Convention, March 23, 1775)

Nesta dissertação estendemos a classe de modelos autorregressivos de médias móveis gaussiano (ARMA) para a classe não-gaussiana. Em particular, propomos os modelos SYMARMA, uma classe de modelos que permite o ajuste de séries temporais pertencentes à classe de distribuições simétricas. A classe de distribuições simétricas contém distribuições com caudas mais pesadas que a distribuição normal, como, por exemplo, a distribuição t de Student, que tendem a acomodar melhor observações atípicas. Foram apresentadas características e condições de estacionariedade para o modelo SYMARMA além dos procedimentos existentes para estimação do processo e propriedades assintóticas dos estimadores. Além disso, apresentamos procedimentos para realização de testes de hipóteses para os parâmetros do modelo. Uma breve revisão sobre outliers em séries temporais foi apresentada com destaque para os outliers aditivos e inovadores, utilizados nas simulações.

Notamos que a presença de observações atípicas na amostra pode afetar bastante as estimativas dos parâmetros do modelo, dependendo do tamanho amostral, do tipo de outlier presente, da quantidade e da intensidade do impacto do(s) outlier(s). As previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição condicional de caudas mais pesadas, na presença de outliers são, em geral, mais precisas que as previsões obtidas pelos modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional. Os resultados das simulações de Monte Carlo realizadas com os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuições normal condicional e t de Student condicional com 4 graus de liberdade (t_4) mostraram que o estimador de máxima verossimilhança condicional (EMVC) para os parâmetros dos modelos fornece estimativas bastante precisas, para ambas distribuições, principalmente para tamanhos amostrais acima de 72 observações. Na presença de observações atípicas, os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição t_4 condicional apresentaram,

em média, menores erros de ajustes, medidos através da raiz do erro médio quadrático, do que os modelos SYMARMA(1,0) e SYMARMA(0,1) sob distribuição normal condicional em, respectivamente, 81,3% e 84,8% dos casos considerados. Para previsões de observações futuras, esses percentuais foram de 79,4% e 89,4%. Os resultados das simulações realizadas no modelo SYMARMA(1,1) mostraram um bom comportamento do EMVC, no sentido de fornecer estimativas para os parâmetros do modelo bem próximas da realidade e com baixa variabilidade.

Observou-se também que a localização do outlier na série não apresentou nenhuma relação direta com a qualidade do ajuste. Os cenários em que o modelo SYMARMA sob distribuição t de Student condicional com 4 graus de liberdade apresentou resultados ainda mais favoráveis, no que diz respeito a predição e previsões, foram amostras com pequenos tamanhos amostrais na presença de outliers do tipo inovador.

Dessa forma, dependendo da quantidade e intensidade das observações atípicas contidas na série, recomenda-se utilizar distribuições mais robustas, com caudas mais pesadas, tal como a t de Student. Além disso, através de dois exemplos práticos, notamos que a utilização do modelo SYMARMA sob distribuição t_4 condicional acomodou melhor as observações atípicas presentes nas séries estudadas, fornecendo assim uma melhor qualidade no ajuste e menores erros de predição e previsão de observações futuras.

APÊNDICE A

Vetor escore

Este apêndice contém as expressões que compõem o vetor escore do logaritmo da função de verossimilhança condicional do modelo SYMARMA.

Como foi apresentado no Capítulo 2, o logaritmo da função de verossimilhança condicional pode ser expresso como

$$\ell = \sum_{t=m+1}^T \ell_t(\mu_t, \varphi) = \sum_{t=m+1}^T \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (\text{A.1})$$

em que $m = \max\{p, q\}$ sendo p e q a ordem dos parâmetros autoregressivos e de médias móveis, respectivamente, $\ell_t(\mu_t, \varphi) = -\log(\varphi)/2 + \log(g(u_t))$ e $u_t = (y_t - \mu_t)^2/\varphi$ com μ_t definido como

$$\mu_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}' \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}.$$

Os resultados a seguir foram obtidos utilizando a representação (A.1).

(a) Primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao parâmetro α

Tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha) = \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{t=m+1}^T W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi} \sum_{t=m+1}^T v(u_t)(y_t - \mu_t), \end{aligned}$$

em que $v(u_t) = -2W_g(u_t)$ e $W_g(u_t) = \partial \log(g(u_t))/\partial u_t$.

(b) Primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros β

Para $\beta_s, s = 1, \dots, k$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s(\beta) = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_s} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_s} \\ &= \sum_{t=m+1}^T W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \left(x_{ts} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)s} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi} \sum_{t=m+1}^T v(u_t)(y_t - \mu_t) \left(x_{ts} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)s} \right), \end{aligned}$$

em que $v(u_t)$ é definido da mesma forma que em (a).

(c) Primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao parâmetro φ

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\varphi) = \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2\varphi} + \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \varphi} \\ &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2\varphi} + W_g(u_t) \left(\frac{-(y_t - \mu_t)^2}{\varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\varphi} \sum_{t=m+1}^T \left(\frac{v(u_t)(y_t - \mu_t)^2}{\varphi} - 1 \right), \end{aligned}$$

em que $v(u_t)$ é definido da mesma forma que em (a).

(d) Primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros ϕ

Para $i = 1, \dots, p$,

$$\mathbf{U}_i(\phi) = \frac{\partial \ell}{\partial \phi_i} = \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \phi_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=m+1}^T W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\phi} \right) (y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}^T \boldsymbol{\beta}) \\
&= \frac{1}{\phi} \sum_{t=m+1}^T v(u_t)(y_t - \mu_t) (y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}^T \boldsymbol{\beta}),
\end{aligned}$$

em que $v(u_t)$ é definido da mesma forma que em (a).

(e) Primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros θ

Para $j = 1, \dots, q$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_j(\theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \theta_j} \\
&= \frac{1}{\phi} \sum_{t=m+1}^T v(u_t)(y_t - \mu_t) r_{t-j},
\end{aligned}$$

em que $v(u_t)$ é definido da mesma forma que em (a).

Matriz informação observada de Fisher

Este apêndice contém as expressões que compõem a matriz de derivadas parciais de segunda ordem do logaritmo da função de verossimilhança condicional do modelo SYMARMA.

Como foi apresentado no Capítulo 2, o logaritmo da função de verossimilhança condicional pode ser expresso como

$$\ell = \sum_{t=m+1}^T \ell_t(\mu_t, \varphi) = \sum_{t=m+1}^T \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (\text{B.1})$$

em que $m = \max\{p, q\}$ sendo p e q a ordem dos parâmetros autoregressivos e de médias móveis, respectivamente, $\ell_t(\mu_t, \varphi) = -\log(\varphi)/2 + \log(g(u_t))$ e $u_t = (y_t - \mu_t)^2/\varphi$ com μ_t definido como

$$\mu_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}' \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}. \quad (\text{B.2})$$

A representação (B.1) foi utilizada para obtermos os resultados apresentados a seguir. Além disso, consideramos $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$. Note que as derivadas de primeira e segunda ordem do logaritmo da função de verossimilhança condicional $\ell_t(\mu_t, \varphi)$ com relação a μ_t podem ser expressas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} &= \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} = W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \\ &= -\frac{2}{\varphi} W_g(u_t) \varepsilon_t \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t^2} &= \frac{\partial^2 \log(g(u_t))}{\partial u_t^2} \left(\frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \right)^2 + \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial^2 u_t}{\partial \mu_t^2} \\ &= W_g'(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right)^2 + W_g(u_t) \frac{2}{\varphi} \\ &= \frac{2}{\varphi} (W_g(u_t) + 2W_g'(u_t)u_t), \end{aligned}$$

em que $W_g(u_t) = \partial \log(g(u_t)) / \partial u_t$ e $W'_g(u_t) = \partial W_g(u_t) / \partial u_t$.

Para simplificar os cálculos, utilizamos λ_i e η_i como substitutos para β_i , ϕ_i ou θ_i .

(a) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros λ e o vetor de parâmetros η

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \right) \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi} (W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} - \frac{2}{\varphi} W_g(u_t) \varepsilon_t \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} \\ &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} \left\{ 2s_t \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} + a_t \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \right\}, \end{aligned}$$

em que $s_t = W_g(u_t) \varepsilon_t$ e $a_t = -2 \{W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t\}$. Utilizando as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_l} &= x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l}, & \frac{\partial \mu_t}{\partial \phi_i} &= y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta & \frac{\partial \mu_t}{\partial \theta_j} &= r_{t-j}, \\ \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \beta_l \partial \phi_i} &= -x_{(t-i)l}, & \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \phi_i \partial \theta_j} &= 0 & \text{e} & \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \beta_l \partial \theta_j} = 0, \end{aligned}$$

obtidas de (B.2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_\lambda \partial \beta_\eta} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} a_t \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) \left(x_{t\eta} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\eta} \right) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_\lambda \partial \phi_i} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} \left\{ -2s_t x_{(t-i)\lambda} + a_t \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) \right\} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_\lambda \partial \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} a_t \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) r_{t-j} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i \partial \phi_j} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} a_t (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) (y_{t-j} - \mathbf{x}'_{t-j} \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i \partial \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) r_{t-j} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t r_{t-i} r_{t-j}.\end{aligned}$$

(b) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros λ e o parâmetro α

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_i \partial \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \right) \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \lambda_i \partial \alpha} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\phi} (W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i},\end{aligned}$$

em que $a_t = -2 \{W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t\}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_\lambda \partial \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i \partial \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_j \partial \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\phi} a_t r_{t-j}.\end{aligned}$$

(c) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao parâmetro α

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha} = \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t^2} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi} (W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t) = \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{\varphi} a_t,\end{aligned}$$

em que $a_t = -2 \{W_g(u_t) + 2W'_g(u_t)u_t\}$.

(d) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao vetor de parâmetros λ e o parâmetro φ

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_i} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_i \partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T W'_g(u_t) \frac{\partial u_t}{\partial \varphi} \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} + W_g(u_t) \left(\frac{2(y_t - \mu_t)}{\varphi^2} \right) \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \left[W'_g(u_t) \left(\frac{-u_t}{\varphi} \right) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) + W_g(u_t) \left(\frac{2(y_t - \mu_t)}{\varphi^2} \right) \right] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} [W'_g(u_t)u_t + W_g(u_t)] \varepsilon_t \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} b_t \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i},\end{aligned}$$

em que $b_t = \{W_g(u_t) + W'_g(u_t)u_t\} \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_\lambda \partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} b_t \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi_i \partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} b_t (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_j \partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} b_t r_{t-j}.\end{aligned}$$

(e) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação ao parâmetro φ

Da derivada de $U(\varphi)$ com relação a φ apresentada no Apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \varphi^2} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{1}{2\varphi^2} + W'_g(u_t) \left(\frac{-u_t}{\varphi} \right)^2 + W_g(u_t) \frac{\partial^2 u_t}{\partial \varphi^2} \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{1}{2\varphi^2} + W'_g(u_t) \left(\frac{u_t^2}{\varphi^2} \right) + W_g(u_t) \left(\frac{2(y_t - \mu_t)^2}{\varphi^3} \right) \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{1}{2} + W'_g(u_t) u_t^2 + \frac{2}{\varphi} W_g(u_t) \varepsilon_t^2 \right] \\ &= \sum_{t=m+1}^T \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{1}{2} + W'_g(u_t) u_t^2 - \frac{1}{\varphi} v(u_t) \varepsilon_t^2 \right],\end{aligned}$$

em que $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ e $v(u_t) = -2W_g(u_t)$.

(f) Derivadas cruzadas do logaritmo da função de verossimilhança condicional em relação a parâmetro α e o parâmetro φ

Observe que

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha} = \sum_{t=m+1}^T \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} = \sum_{t=m+1}^T W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \varphi} &= \sum_{t=m+1}^T W'_g(u_t) \frac{\partial u_t}{\partial \varphi} \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) + W_g(u_t) \left(\frac{2(y_t - \mu_t)}{\varphi^2} \right) \\
&= \sum_{t=m+1}^T W'_g(u_t) \left(\frac{-u_t}{\varphi} \right) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) + W_g(u_t) \left(\frac{2(y_t - \mu_t)}{\varphi^2} \right) \\
&= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} [W'_g(u_t) u_t + W_g(u_t)] \varepsilon_t \\
&= \sum_{t=m+1}^T \frac{2}{\varphi^2} b_t,
\end{aligned}$$

em que $b_t = \{W_g(u_t) + W'_g(u_t) u_t\} \varepsilon_t$, com $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$.

Matriz informação esperada de Fisher condicional

Este apêndice contém as expressões que compõem a matriz informação esperada de Fisher condicional, $\mathbf{K}$, do modelo SYMARMA.

Como discutido na Seção 2.2 do Capítulo 2, a matriz $\mathbf{K}$ tem elementos dados por

$$K_{r,s} = -E \left[\frac{\partial^2 \ell(\delta)}{\partial \delta_r \partial \delta_s} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = E \left[\frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \delta_r} \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \delta_s} | \mathcal{F}_{t-1} \right],$$

em que ℓ é o logaritmo da função de verossimilhança condicional expresso por

$$\ell = \sum_{t=m+1}^T \ell_t(\mu_t, \varphi) = \sum_{t=m+1}^T \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (\text{C.1})$$

com $m = \max\{p, q\}$ sendo p e q a ordem dos parâmetros autoregressivos e de médias móveis, respectivamente, $\ell_t(\mu_t, \varphi) = -\log(\varphi)/2 + \log(g(u_t))$ e $u_t = (y_t - \mu_t)^2 / \varphi$ com μ_t definido como

$$\mu_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i \{y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}' \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}. \quad (\text{C.2})$$

A representação (C.1) foi utilizada para obtermos os resultados apresentados a seguir. Além disso, consideramos $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$.

Sob condições de regularidade usuais

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= E \left(\frac{\partial \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\partial \mu_t} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\partial \mu_t} f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) d\mu_t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})} \frac{\partial f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\partial \mu_t} \right) f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) d\mu_t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\partial \mu_t} d\mu_t = \frac{\partial}{\partial \mu_t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) d\mu_t = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \mu_t} = \frac{\partial \log(g(u_t))}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} = W_g(u_t) \left(\frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) = -\frac{2}{\sqrt{\varphi}} W_g(u_t) z_t,$$

com $W_g(u_t) = \partial \log(g(u_t)) / \partial u_t$ e $z_t = (y_t - \mu_t) / \sqrt{\varphi}$, temos que

$$E(W_g(u_t)z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Em particular, $E(\partial \ell_t(\mu_t, \varphi) / \partial \mu_t) = 0$. No que segue, λ_i e η_i são usados como substitutos para β_i , ϕ_i ou θ_i . Note que as expressões

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_l} = x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l}, \quad \frac{\partial \mu_t}{\partial \phi_i} = y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu_t}{\partial \theta_j} = r_{t-j}, \quad (\text{C.4})$$

obtidas de (C.2), são $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensuráveis.

(a) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\lambda, \eta}$

Temos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \eta_j} | \mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)(y_t - \mu_t)}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} z_t\right) \left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} z_t\right) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{4}{\varphi} E\left[W_g^2(u_t) z_t^2 \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{4}{\varphi} E[W_g^2(u_t) z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j} \\ &= \frac{4}{\varphi} d_g \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_j}, \end{aligned}$$

em que $d_g = E[W_g^2(u_t) z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ e $z_t = (y_t - \mu_t) / \sqrt{\varphi}$. Note que $z_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim S(0, 1)$ e $u_t = (y_t - \mu_t)^2 / \varphi = z_t^2$. Podemos reescrever d_g como $d_g = E[W_g^2(u_t) u_t | \mathcal{F}_{t-1}]$.

Utilizando os resultados em (C.4) os elementos de $\mathbf{K}_{\beta, \beta}$, $\mathbf{K}_{\beta, \phi}$, $\mathbf{K}_{\beta, \theta}$, $\mathbf{K}_{\phi, \phi}$, $\mathbf{K}_{\phi, \theta}$ e $\mathbf{K}_{\theta, \theta}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\beta_\lambda, \beta_\eta} &= \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{4}{\varphi} d_g \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) \left(x_{t\eta} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\eta} \right) \right], \\ \mathbf{K}_{\beta_\lambda, \phi_i} &= \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{4}{\varphi} d_g \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\beta_\lambda, \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{4}{\varphi} d_g \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) r_{t-j} \right], \\
\mathbf{K}_{\phi_i, \phi_j} &= \sum_{t=m+1}^T \left(\frac{4}{\varphi} d_g (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) (y_{t-j} - \mathbf{x}'_{t-j} \beta) \right), \\
\mathbf{K}_{\phi_i, \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T \left(\frac{4}{\varphi} d_g (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) r_{t-j} \right) \quad \text{e} \\
\mathbf{K}_{\theta_i, \theta_j} &= \sum_{t=m+1}^T \left(\frac{4}{\varphi} d_g r_{t-i} r_{t-j} \right).
\end{aligned}$$

(b) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\lambda, \alpha}$

O parâmetro λ_i é utilizado aqui como substituto de β_i , ϕ_i ou θ_i . Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \alpha} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{(y_t - \mu_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \right) \left(W_g(u_t) \frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi} \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} z_t \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \right) \left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} z_t \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
&= \frac{4}{\varphi} \mathbb{E} \left[W_g^2(u_t) z_t^2 \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \frac{4}{\varphi} \mathbb{E} [W_g^2(u_t) z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\
&= \frac{4}{\varphi} d_g \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i},
\end{aligned}$$

em que $d_g = \mathbb{E} [W_g^2(u_t) z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\beta_\lambda, \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{4}{\varphi} d_g \left(x_{t\lambda} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)\lambda} \right) \right] \\
\mathbf{K}_{\phi_i, \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{4}{\varphi} d_g (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \beta) \\
\mathbf{K}_{\theta_j, \alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{4}{\varphi} d_g r_{t-j}.
\end{aligned}$$

(c) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\alpha,\alpha}$

Temos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \alpha} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left[\left(W_g(u_t) \frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} z_t\right) \left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} z_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{4}{\varphi} E[W_g^2(u_t) z_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{4}{\varphi} d_g, \end{aligned}$$

em que $d_g = E[W_g^2(u_t) z_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}]$. Desta forma, o elemento $\mathbf{K}_{\alpha,\alpha}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha,\alpha} &= \sum_{t=m+1}^T \frac{4}{\varphi} d_g \\ &= \frac{4}{\varphi} d_g (T - m). \end{aligned}$$

(d) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\lambda,\varphi}$

O parâmetro λ_i é utilizado aqui como substituto de β_i , ϕ_i ou θ_i . Temos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \varphi} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{(y_t - \mu_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i}\right) \left(-\frac{1}{2\varphi} + W_g(u_t) \frac{-(y_t - \mu_t)^2}{\varphi^2}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} z_t\right) \left(-\frac{1}{2\varphi} - \frac{W_g(u_t)}{\varphi} u_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\frac{W_g(u_t)}{\varphi \sqrt{\varphi}} z_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} + E\left[\frac{2W_g^2(u_t)}{\varphi \sqrt{\varphi}} z_t u_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \frac{1}{\varphi \sqrt{\varphi}} E[W_g(u_t) z_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} + \frac{2}{\varphi \sqrt{\varphi}} E[W_g^2(u_t) z_t u_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}] \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda_i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Note que para z_t fixo, $\partial \ell / \partial \lambda_i$ é uma função par de z_t e $\partial \ell / \partial \varphi$ é uma função ímpar de z_t . O resultado $E[W_g^2(u_t) z_t u_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ foi retirado de Fang, Kotz e Ng (1990) e, de (C.3),

$E[W_g(u_t)z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$. Desta forma,

$$\mathbf{K}_{\beta_\lambda, \varphi} = 0, \quad \mathbf{K}_{\phi_i, \varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{\theta_j, \varphi} = 0.$$

(e) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\varphi, \varphi}$

Temos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \varphi} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left[\left(-\frac{1}{2\varphi} - \frac{W_g(u_t)}{\varphi} u_t\right) \left(-\frac{1}{2\varphi} - \frac{W_g(u_t)}{\varphi} u_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\frac{1}{4\varphi^2} + \frac{W_g(u_t)u_t}{\varphi^2} + \frac{W_g^2(u_t)u_t^2}{\varphi^2} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{1}{4\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2} E[W_g(u_t)u_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \frac{1}{\varphi^2} E[W_g^2(u_t)u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \frac{1}{4\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\varphi^2} f_g \\ &= \frac{1}{\varphi^2} f_g - \frac{1}{4\varphi^2} = \frac{1}{4\varphi^2} (4f_g - 1), \end{aligned}$$

em que $f_g = E[W_g^2(u_t)u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$. O resultado $E[W_g(u_t)u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = -1/2$ foi retirado de Fang, Kotz e Ng (1990, p. 94).

O elemento $\mathbf{K}_{\varphi, \varphi}$ é dado por

$$\mathbf{K}_{\varphi, \varphi} = \sum_{t=m+1}^T \frac{1}{4\varphi^2} (4f_g - 1) = \frac{1}{4\varphi^2} (4f_g - 1) (T - m).$$

(f) Elementos da matriz $\mathbf{K}_{\alpha, \varphi}$

Temos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \varphi)}{\partial \varphi} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) &= E\left[\left(W_g(u_t) \frac{-2(y_t - \mu_t)}{\varphi}\right) \left(-\frac{1}{2\varphi} + W_g(u_t) \frac{-(y_t - \mu_t)^2}{\varphi^2}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= E\left[\left(\frac{-2W_g(u_t)}{\sqrt{\varphi}} z_t\right) \left(-\frac{1}{2\varphi} - \frac{W_g(u_t)}{\varphi} u_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}} E[W_g(u_t)z_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \frac{2}{\varphi\sqrt{\varphi}} E[W_g^2(u_t)z_t u_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

O resultado $E[W_g^2(u_t)z_t u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ foi retirado de Fang, Kotz e Ng (1990) e, de (C.3), $E[W_g(u_t)z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$. Desta forma,

$$\mathbf{K}_{\alpha, \varphi} = 0.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Benjamin, M.A., Rigby, R.A. e Stasinopoulos, M. (2003). Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, **98**, 214-223.
- [2] Box, G.E.P. e Tiao, G.C. (1975). Intervention analysis with application to economic and environmental problems. *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 70-79.
- [3] Chang, I., Tiao, G.C. e Chen, C. (1988). Estimation of time series parameters in the presence of outliers. *Technometrics*, **30**, 193-204.
- [4] Chen, C. e Liu L.M. (1993a). Joint estimation of model parameters and outliers affects in time series. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 284-297.
- [5] Chen, C. e Liu L.M. (1993b). Forecasting time series with outliers. *Journal of Forecasting*, **12**, 13-35.
- [6] Chmielewski, M.A. (1981). Elliptically symmetric distributions: a review and bibliography. *International Statistical Review*, **49**, 67-74.
- [7] Cox, D.R. (1981). Statistical analysis of time series: some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics*, **8**, 93-115.
- [8] Cox, D.R. e Hinkley, D.V. (1974). *Theoretical statistics*. Chapman and Hall. London.
- [9] Crawley, M.J. (2007). *The R Book*. John Wiley & Sons. England.
- [10] Cribari-Neto, F. e Cassiano, K.M. (2005). Uma Análise da Dinâmica Inflacionária Brasileira. *Revista Brasileira de Economia*, **59**, 535-566.
- [11] Cribari-Neto, F. e Zarkos, S.G. (1999). R: yet another econometric programming environment. *Journal of Applied Econometrics*, **14**, 319-329.
- [12] Cysneiros, F.J.A. (2004). *Métodos restritos e validação de modelos simétricos de regressão*. Tese de doutorado, Departamento de Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil.

- [13] Cysneiros, F.J.A, Paula, G.A. e Galea, M. (2005). *Modelos Simétricos Aplicados*. Texto de Minicurso da 9ª Escola de Modelos de Regressão.
- [14] Fang, K.T., Kotz, S. e Ng, K.W. (1990). *Symmetric multivariate and relates distributions*. Chapman and Hall, London.
- [15] Fox, A.J. (1972). Outliers in times series. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **34**, 350-363.
- [16] Galea, M., Díaz-García, J.A. e Vilca, F. (2008). Influence diagnostics in the capital asset pricing model under elliptical distribution. *Journal of Applied Statistics*, **35**, 179-192.
- [17] Ihaka, R. e Gentleman, R. (1996). R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational Graphical and Statistics*, **5**, 299-314.
- [18] Lamport, L. (1985). *TEX: A Document Preparation System*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Professional.
- [19] Lange, K.L., Little, R.J.A. e Taylor, J.M.G. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 881-896.
- [20] Li, W.K. (1994). Time series models based on generalized linear models: some further results. *Biometrics*, **50**, 506-511.
- [21] Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capitals budgetd. *Review of Ecomonics and Statistics*, **42**, 13-37.
- [22] Maior, V.Q.S. e Cysneiros, F.J.A. (2009). Estimação do risco sistemático em modelos CAPM com erros normais assimétricos. *Revista Brasileira de Biometria*, **27**, 197-209.
- [23] Martin, R.D. e Yohai, V.J. (1985). Robustness in time series and estimating ARMA models. In: *Handbook of Statistics*, pp. 119-155.
- [24] McCullagh, P. e Nelder, J.A. (1989). *Generalized linear models*, 2nd edn. Chapman and Hall, London.
- [25] Mossin, J. (1966). Equilibrium in capital asset market. *Econometrica*, **35**, 768-783.
- [26] Nocedal, J. e Wright, S.J. (1999). *Numerical Optimization*. Springer, New York.

- [27] Ota, R. (1996). *Valores aberrantes em séries temporais: teste de detecção e efeito na previsão de valores agregados*. Dissertação de mestrado, Departamento de Estatística, UNICAMP, Brasil.
- [28] Paula, G.A. e Cysneiros, F.J.A. (2009). Systematic risk estimation in symmetric models. *Applied Economics Letters*, **16**, 217-212.
- [29] Rocha, A.V. e Cribari-Neto, F. (2009). Beta autoregressive moving average models. *Test (Madrid)*, **18**, 529-545.
- [30] Said, S.E. e Dickey, D.A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive moving average models of unknown order. *Biometrika*, **71**, 599-607.
- [31] Schwarz, G.E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, **6**, 461-464.
- [32] Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of markets equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, **19**, 425-442.
- [33] West, M., Harrison, P.J., e Migon, H.S. (1985). Dynamic generalized linear models and bayesian forecasting. *Journal of the American Statistical Association*, **80**, 73-96.
- [34] Zeger, S.L. (1988). A regression model for time series of counts. *Biometrics*, **75**, 822-835.
- [35] Zeger, S.L. e Qaqish, B. (1988). Markov regression models for time series: a quasi-likelihood approach. *Biometrics*, **44**, 1019-1031.