



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## TESE DE DOUTORADO

TRANSIÇÕES DE FASE EM REDES DE ELEMENTOS EXCITÁVEIS  
ESTOCÁSTICOS

por

**Vladimir Ramos Vitorino de Assis**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

### **Banca examinadora:**

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva (Orientador - UFPE)

Prof. Sérgio Galvão Coutinho (DF - UFPE)

Prof. Nestor Felipe Caticha Alfonso (IF - USP)

Prof. Osame Kinouchi Filho (FFCLRP - USP)

Prof. Paulo Roberto de Araújo Campos (DF - UFRPE)

Recife - PE, Brasil  
6 de agosto de 2010

Assis, Vladimir Ramos Vitorino de.  
Transições de fase em redes de elementos  
excitáveis estocásticos / Vladimir Ramos Vitorino de  
Assis. - Recife: O Autor, 2010.  
xx p., 79 p.: il. fig.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Transformações de fase (Física estatística).  
2. Processo estocástico. 3. Teoria da bifurcação. I. Título.

530.13

(22.ed.)

FQ 2010-046



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

---

**VLADIMIR RAMOS VITORINO DE ASSIS**

**TRANSIÇÕES DE FASE EM REDES DE ELEMENTOS  
EXCITÁVEIS ESTOCÁSTICOS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Mauro Copelli Lopes da Silva (Presidente e Orientador), Sérgio Galvão Coutinho, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Nestor Felipe Caticha Alfonso, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Paulo Roberto de Araújo Campos, do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco e Osame Kinouche Filho, do Departamento de Física e Matemática da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em seis de agosto de dois mil e dez.

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva  
Presidente e Orientador

Prof. Sérgio Galvão Coutinho

Prof. Nestor Felipe Caticha Alfonso

Prof. Paulo Roberto de Araújo Campos

Prof. Osame Kinouche Filho

*A meu pai, Pedro (in Memoriam), minha mãe, Joselita e  
minhas irmãs, Maristella e Sionara*

## AGRADECIMENTOS

A meu pai, Pedro (*in Memoriam*), minha mãe, Joselita e minhas irmãs, Maristella e Sionara, por terem-me ajudado ser capaz de chegar pelo menos até aqui.

Ao Mauro Copelli, pela novamente excelente orientação.

Ao Ronald Dickman, ao Francisco George Brady Moreira, ao Cesar Sampaio e ao Geovani Ferreira, por terem respondido a todas as minhas dúvidas relacionadas a assuntos fundamentais para esta tese.

Ao Fernando, por ter feito o serviço de instalação e manutenção do sistema gerenciador do cluster, por ter tirado todas as minhas dúvidas sobre informática e por ter lido partes da minha tese, me dando boas dicas sobre a mesma.

Ao Eglânio, por ter tirado várias dúvidas minhas sobre informática e por ter-me ajudado a garantir a segurança dos meus dados.

Ao CNPq, por ter garantido minha sobrevivência durante esses quatro anos de doutorado e à CAPES pelo envio da verba necessária para o funcionamento da pós-graduação.

Aos professores Sérgio Galvão Coutinho, Nestor Felipe Caticha Alfonso, Osame Kinouchi Filho, Paulo Roberto de Araújo Campos, Francisco George Brady Moreira e Viviane Morais de Oliveira, por terem aceitado o convite para participar da banca de defesa desta tese.

Ao Osame Kinouchi, pelo aparentemente desprezioso comentário que serviu de inspiração para a procura feita nesta tese.

Aos professores Sérgio Coutinho e Osame Kinouchi pelas excelentes dicas para a versão final desta tese.

Aos colegas de laboratório que me deram apoio moral para a conclusão desta tese, Fernando, Fernanda e Bruno.

Aos amigos do DF e do CIN que me ajudaram, principalmente nos últimos tempos, a fazer alguma coisa além de cuidar da tese, Cesar Sampaio (Soft), Douglas (“Uh, uh...”), Gerson Cortês (Farrapão), Geovani Ferreira (Pardo), Augusto Cesar (Marion), Plínio (Panda), Maury (Psicopata), Milrian<sup>1</sup>, Marco Antônio (Misera), Lincoln (Pataca).

---

<sup>1</sup>Cuidado com o cruzado de direita dela!

*Meu vizinho jogou  
Uma semente no seu quintal.  
De repente brotou  
Um tremendo matagal.*

—BEZERRA DA SILVA (A Semente)

## RESUMO

Há muitos exemplos na natureza de sincronização em sistemas contendo um grande número de elementos interagentes. Muito esforço foi feito para tentar descobrir quais são as condições necessárias e suficientes para a ocorrência desse fenômeno. Hoje em dia já se conhecem várias propriedades que fazem um modelo apresentar transição de fase para sincronização. Embora muitos desses modelos não aparentem ser muito realistas devido à sua grande simplicidade, os mesmos são bastante úteis para que se descubram algumas características responsáveis pela sincronização comuns a uma classe de situações reais. Assim como na investigação de outros fenômenos coletivos, é comum que se usem modelos estocásticos extremamente simplificados para tornar factível o estudo do comportamento do sistema no limite termodinâmico. A análise matemática do problema da sincronização de um grande número de osciladores não-lineares acoplados por fase atingiu um alto grau de simplificação recentemente com o modelo de Wood *et al.* [Phys. Rev. Lett. **96**, 145701 (2006)]. A simplicidade decorre do fato do modelo ser markoviano em tempo contínuo, onde cada oscilador tem 3 estados (sendo portanto uma simplificação de um oscilador de fase, que por si só já é uma simplificação) entre os quais transita de maneira cíclica e estocástica.

O nosso objetivo principal nesta tese é estudar a sincronização entre elementos *excitáveis* estocásticos. Diferentemente de modelos de osciladores, sistemas de elementos excitáveis têm necessariamente um estado absorvente, o que dificulta a sincronização. Embora existam modelos na literatura em que ocorre sincronização entre elementos excitáveis, eles são não-markovianos ou de tempo discreto. Aqui descrevemos as tentativas para obter sincronização entre elementos excitáveis em modelos markovianos de tempo contínuo. Especificamente, estudamos modelos construídos a partir de modificações no modelo de Wood *et al.* (ou suas variantes) e/ou no modelo suscetível-infectado-recuperado-suscetível (SIRS). Mostramos que estes modelos podem exibir diversos fenômenos coletivos ainda pouco estudados na literatura de modelos de rede de não-equilíbrio, como, por exemplo, a mudança na ordem da transição de fase para um estado ativo em redes de dimensionalidade maior que 1 sem difusão e transição de fase de período infinito (com ou sem quebra espontânea de simetria  $C_3$ ). Além disso, observamos excita-

bilidade coletiva (mesmo quando os elementos não são isoladamente excitáveis) e coexistência de oscilações coletivas com estados ativos não-sincronizados. Uma das variantes do modelo exhibe sincronização entre elementos excitáveis acoplados por fase ou por pulso.

**Palavras-chave:** Transição de fase, não-equilíbrio, sincronização, osciladores, elementos excitáveis, SIRS

## ABSTRACT

There are many examples in nature of synchronization in systems containing a large number of interacting elements. Much effort was directed at trying to discover what are the necessary and sufficient conditions for the occurrence of this phenomenon. Today several properties are known to make a model show a phase transition to synchronization. Although these models frequently do not seem realistic, because of their simple rules, they are very useful for discovering some features which describe a class of real situations. Like the investigation of other collective phenomena, it is common to use greatly simplified stochastic models to render the study of the behavior of the system in the thermodynamic limit feasible. The mathematical analysis of the problem of synchronization of a large number of phase-coupled nonlinear oscillators reached a high degree of simplification recently with the model of Wood *et al.* [Phys. Rev. Lett. **96**, 145701 (2006)]. The simplicity stems from the fact that the model is Markovian in continuous time, where each oscillator has three states (and therefore is a simplification of a phase oscillator, which in itself is a simplification) among which it moves in a cyclical and stochastic manner.

Our main objective in this thesis is to study the synchronization of stochastic excitable elements. Unlike models of oscillators, systems of excitable elements necessarily have an absorbing state, which makes synchronization more difficult to achieve. Although there are models in the literature in which synchronization occurs among excitable elements, they are either non-Markovian or in discrete time. Here we describe attempts to obtain synchronization among excitable elements in continuous-time Markovian models. Specifically, we study models constructed from modifications in the model of Wood *et al.* (or its variants) and/or in the susceptible-infected-recovered-susceptible (SIRS) model. We show that these models can exhibit several collective phenomena still little studied in the literature of nonequilibrium lattice models, such as the change of the order of the phase transition to an active state in lattices of dimensionality greater than one without diffusion and infinite-period phase transitions (with or without spontaneous  $C_3$  symmetry breaking). Moreover, we observe collective excitability (even when the elements are not individually excitable) and coexistence of collective oscillations with non-synchronized

active states. A variant of the model exhibits synchronization among phase- or pulse-coupled excitable elements.

**Keywords:** Phase transition, nonequilibrium, synchronization, oscillators, excitable elements, SIRS

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Transições de fase em modelos em rede . . . . .	1
1.1.1 Transições de fase de não-equilíbrio . . . . .	2
1.1.1.1 Transições de fase contínuas. . . . .	2
1.1.1.1.1 Osciladores estocásticos acoplados por fase . . . . .	3
1.1.1.1.2 Os modelos com um estado absorvente. . . . .	4
1.1.1.2 Transições de fase descontínuas. . . . .	5
1.2 Transição de fase para sincronização nos modelos em rede . . . . .	6
1.2.1 Sincronização de muitos osciladores acoplados . . . . .	6
1.2.2 Oscilações globais em grupos de elementos excitáveis interagentes	7
1.3 Organização desta tese . . . . .	9
<b>Capítulo 2—O modelo SIRS com um acoplamento não-linear por pulso</b>	11
2.1 Definição do modelo . . . . .	12
2.2 Análise de campo médio . . . . .	13
2.3 Simulações na rede aleatória . . . . .	15
2.4 Ausência de oscilações globais sustentadas . . . . .	16
2.5 Simulações em redes hipercúbicas . . . . .	19
2.6 Histerese em transições de fase contínuas . . . . .	24
2.7 Revisitando as transições descontínuas para uma fase absorvente . . . . .	27
2.8 Conclusões . . . . .	28
<b>Capítulo 3—Quebra espontânea de simetria C3 num modelo de osciladores</b>	30
3.1 Definição do modelo . . . . .	31
3.2 Resultados . . . . .	32
3.2.1 Análise de campo médio e simulações em grafos completos . . . . .	32
3.2.2 Simulações em redes hipercúbicas quadridimensionais . . . . .	39

3.3	Conclusões . . . . .	41
<b>Capítulo 4—Um modelo de osciladores não-uniformes acoplados por fase</b>		<b>42</b>
4.1	Definição do modelo . . . . .	42
4.2	Resultados . . . . .	44
4.2.1	Análise de campo médio . . . . .	44
4.2.2	Simulações em grafos completos . . . . .	48
4.3	Conclusões . . . . .	52
<b>Capítulo 5—Sincronização em modelos com um único estado absorvente</b>		<b>54</b>
5.1	Definições dos modelos . . . . .	55
5.1.1	Acoplamento por fase . . . . .	55
5.1.2	Acoplamento por pulso . . . . .	56
5.2	Análise de campo médio e simulações em grafos completos . . . . .	56
5.2.1	Acoplamento por fase . . . . .	56
5.2.2	Acoplamento por pulso . . . . .	60
5.3	Conclusões . . . . .	64
<b>Capítulo 6—Conclusões e perspectivas</b>		<b>66</b>
<b>Apêndice A—Simulação conduzida por eventos</b>		<b>69</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>72</b>

## LISTA DE FIGURAS

- 1.1 Diagrama de fases pressão-temperatura (P,T) para as fases líquida e gasosa numa substância pura típica. Obviamente ignoramos a fase sólida do diagrama de fases por simplicidade. A curva sólida representa a linha de transição de fase de primeira ordem, onde há coexistência de fases em equilíbrio com os dois mínimos de energia livre  $G$  em função do volume  $V$  (de cada uma das fases) iguais (veja detalhe central). As curvas tracejadas AC e BC delimitam os limites de estabilidade das fases gasosa e líquida, respectivamente. O ponto C representa o ponto crítico, ou seja, o ponto de transição de fase de segunda ordem. Partindo da região do diagrama de fases onde há *somente* a fase gasosa (líquida), ao cruzar a linha tracejada BC (AC), uma fase líquida (gasosa) metaestável aparece com a fase gasosa (líquida) ainda estável [veja, no detalhe direito (esquerdo), o mínimo relativo na energia livre]. Ao cruzar a linha sólida, a fase gasosa (líquida) passa a ser metaestável enquanto a fase líquida (gasosa) passa a ser estável [veja, no detalhe esquerdo (direito), o mínimo relativo na energia livre]. Finalmente, ao cruzar a linha tracejada AC (BC), resta *somente* a fase líquida (gasosa). Essa figura é baseada nas notas de aula do professor Francisco George Brady Moreira. . . . . 5

- 2.1 Espaço de fase  $[P(S), P(I)]$  mostrando as isóclinas  $\dot{P}(I) = 0$  (linhas tracejadas em azul) e  $\dot{P}(S) = 0$  (linhas pontilhadas-tracejadas em vermelho). Os triângulos cinzas correspondem à região fisicamente aceitável  $0 \leq P(I) \leq 1 - P(S)$ . Em cada linha,  $a$  é mantido constante e  $b$  cresce da esquerda para a direita. No painel inferior (b) ( $a = 0,5$ ), o estado absorvente em  $P(S) = 1$  perde a estabilidade em uma bifurcação transcritical à medida que  $b$  aumenta. No painel superior (a) ( $a = 2,25$ ), a isóclina  $\dot{P}(I) = 0$  é dobrada pela não-linearidade exponencial [equação (2.4)], criando um estado ativo com  $P(I)$  finito em uma bifurcação sela-nó. Símbolos fechados (abertos) indicam pontos fixos estáveis (instáveis). Note que a isóclina  $\dot{P}(I) = 0$  inclui sempre a linha  $P(I) = 0$ . Quando o estado absorvente é instável (uma sela),  $P(I) = 0$  corresponde à sua variedade estável (coluna mais à direita). Exceto para esse caso, as trajetórias (linhas sólidas pretas) representam as variedades estáveis e instáveis das selas. 14
- 2.2 Diagrama de fases (da versão de campo médio) do modelo. A linha tracejada marca o início da biestabilidade, com o aparecimento repentino de uma fase ativa com parâmetro de ordem finito [bifurcação sela-nó nas equações (2.5)-(2.7)]. A linha sólida indica uma transição em que o estado absorvente perde a estabilidade [bifurcação transcritical nas equações (2.5)-(2.7)]. Símbolos correspondem às simulações na rede aleatória com  $\gamma = 1$ ,  $K = 10$ ,  $N = 10^4$ ,  $t_{max} = 5 \times 10^3$ ,  $h = 10^{-5}$  e a média feita em cinco realizações independentes. O detalhe inferior (superior) mostra o parâmetro de ordem  $P(I)^*$  para uma mudança cíclica no parâmetro de acoplamento  $b$ , mostrando uma transição contínua (descontínua) para um valor pequeno (grande) de  $a$ . Triângulos apontados para cima (para baixo) indicam  $b$  crescente (decrecente). . . . . 15



2.4 Simulações para  $d = 3$  com  $N = 25^3$  e  $h = 2,5 \times 10^{-5}$ . (a) ( $a = 4,5$ , média sobre 20 realizações) O comprimento do ciclo de histerese  $\Delta b$  diminui com  $t_{max}$  ( $\Delta b$  representado pela seta horizontal para  $t_{max} = 10^5$ ). Triângulos apontados para cima (baixo) representam  $b$  crescente (decrecente). Linhas verticais mostram valores de  $b$  empregados nos painéis (c) e (d). (b) Dependência de  $\Delta b$  em  $t_{max}$  é qualitativamente diferente para  $a$  acima (círculos preenchidos) e abaixo (círculos abertos) de  $a_c$ , respectivamente mostrando um valor assintótico não-nulo ou nulo no limite  $t_{max} \rightarrow \infty$ .

O gráfico inferior é bem ajustado pela lei de potência com expoente 0,55. Note que a precisão em  $\Delta b$  é limitada pelo incremento em  $b$  empregado no ciclo de histerese ( $\delta b = 1,8 \times 10^{-3}$  no caso de  $a = 1,875$ ). Painéis (c) e (d) mostram a evolução temporal de  $P(I)$  (média sobre 20 realizações) para  $a = 4,5$  e diferentes condições iniciais [com  $NP(I)$  sítios no estado  $I$  em  $t = 0$  e o restante no estado  $S$ ], mostrando biestabilidade de fase para  $b = 3,25$  mas não para  $b = 7$ . . . . . 20

2.5 Simulações para  $d = 2$  com  $N = 150^2$  e  $h = 2,5 \times 10^{-5}$ . (a) ( $a = 7$ , média sobre 20 realizações) O comprimento do ciclo de histerese  $\Delta b$  diminui com  $t_{max}$  ( $\Delta b$  representado pela seta horizontal para  $t_{max} = 2 \times 10^5$ ). Triângulos apontados para cima (baixo) representam  $b$  crescente (decrecente). Linhas verticais mostram valores de  $b$  empregados nos painéis (c) e (d). (b) Dependência de  $\Delta b$  em  $t_{max}$  é qualitativamente diferente para  $a$  acima (círculos preenchidos) e abaixo (círculos abertos) de  $a_c$ , respectivamente mostrando um valor assintótico não-nulo ou nulo no limite  $t_{max} \rightarrow \infty$ .

O gráfico inferior é bem ajustado pela lei de potência com expoente 0,63. Note que a precisão em  $\Delta b$  é limitada pelo incremento em  $b$  empregado no ciclo de histerese ( $\delta b = 10^{-2}$  no caso de  $a = 4,5$ ). Painéis (c) e (d) mostram a evolução temporal de  $P(I)$  (média sobre 20 realizações) para  $a = 7$  e diferentes condições iniciais [com  $NP(I)$  sítios no estado  $I$  em  $t = 0$  e o restante no estado  $S$ ], mostrando biestabilidade de fase para  $b = 4,4$  mas não para  $b = 21,5$ . . . . . 21

- 2.6 Diagrama de fases do modelo na redes hipercúbicas uni-, bi-, e tridimensionais (quadrados, círculos e triângulos, respectivamente). Símbolos abertos (com linhas tracejadas para guiar os olhos) marcam o início da biestabilidade de fase, com o aparecimento repentino de uma fase ativa estável com o parâmetro de ordem finito. Símbolos preenchidos (com linhas sólidas para guiar os olhos) representam a transição em que o estado absorvente perde a estabilidade. A região entre as linhas sólida e tracejada corresponde ao regime biestável. Linhas sem símbolos mostram os resultados de campo médio (CM) para comparação. Todos os outros resultados correspondem a simulações com  $\gamma = 1$  e  $h = 2, 5 \times 10^{-5}$ . Para  $d = 1, 2$  e  $3$ , os tamanhos lineares dos sistemas são  $L = 32400$ ,  $L = 150$ , e  $L = 25$  (onde  $N = L^d$ ), os valores máximos de  $t_{max}$  são  $5 \times 10^5$ ,  $2 \times 10^5$ , e  $10^5$ , com médias sobre 10, 10, e 20 realizações, respectivamente. . . . . 23
- 3.1 Representação gráfica das taxas de transição do modelo para uma única unidade *isolada*. Figura idêntica à original da referência [Wood et al., 2006b]. 31
- 3.2 Espaço de fase  $(P_1, P_2)$ . Os triângulos cinzas correspondem à região fisicamente aceitável  $0 \leq P_2 \leq 1 - P_1$ . O parâmetro  $a$  cresce da esquerda para a direita. As linhas tracejadas (sólidas) indicam as isóclinas  $\dot{P}_1 = 0$  ( $\dot{P}_2 = 0$ ) nos painéis superiores. Os painéis inferiores mostram as trajetórias das simulações em grafo completo com  $N = 5000$  (linhas grossas) e as soluções das equações de campo médio (linhas finas com setas). O painel (a) mostra que  $\vec{P}_{1/3}^*$  é o único ponto fixo do sistema para  $a = 1,6 > a_c$ . (b) O ponto fixo  $\vec{P}_{1/3}^*$  é instável, com trajetórias convergindo para um ciclo-limite estável, que corresponde a oscilações globais [veja também figura 3.4(a)]. (c) Com  $a = 3$ , as isóclinas estão se aproximando uma da outra em três posições adicionais, daí criando três fantasmas simétricos de sela-nó. (d) O ciclo-limite é quase tão grande quanto o perímetro da região fisicamente aceitável. Note a superlotação de linhas perto dos fantasmas, com conseqüente não-harmonicidade nas séries temporais [figura 3.4(b)]. (e) Para  $a = 3,25$  há seis pontos fixos adicionais que nasceram simultaneamente em três bifurcações sela-nó em  $a = a^c$ . (f) Neste caso, se o sistema inicia no ponto fixo instável simétrico  $\vec{P}_{1/3}^*$ , as flutuações determinam para qual ponto fixo estável ele vai. Os símbolos fechados (abertos) indicam os pontos fixos estáveis (instáveis). . . . . 32

- 3.3 Representação de osciladores de fase contínua. Os círculos representam o espaço de fase dos osciladores. Cada bolinha representa a fase em que cada oscilador está. Figura idêntica à original do artigo de Steven Henry Strogatz e Ian Stewart [Strogatz e Stewart, 1993]. No painel (a), os osciladores estão mais sincronizados do que no (b), que, por sua vez, estão mais sincronizados que no (c). No painel (d), os osciladores estão (pelo menos momentaneamente) sincronizando-se. . . . . 33
- 3.4 Os painéis (a) e (b) mostram a evolução temporal de  $P_1$  para  $a = 1,6$  e  $a = 3$ , respectivamente. Os pontos representam as simulações para um grafo completo com  $N = 10000$  enquanto as linhas mostram as soluções de campo médio. (c) Dependência de  $r$  e da frequência angular  $\omega$  em  $a$ , exibindo duas transições de fase. (d) Variância escalada  $\chi_r$  versus  $a$ , mostrando os picos nas transições de fase [tamanhos dos sistemas mostrados em (c)]. Para cada ponto nos gráficos dos painéis (c) e (d) deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 5000$  descontando um transiente de 2000 para tirar a média em cada execução. Os valores de  $a_c$  e  $a^c$  são 1,5 e 3,1024, respectivamente. . . . . 35
- 3.5 Comportamento de escala de  $\omega$  e colapso com os expoentes críticos no grafo completo obtidos através da aplicação da teoria de escala de tamanho finito. Nos painéis (a) e (b) supomos  $d_c\nu_\perp = 2$  e nos painéis (c) e (d) supomos  $d_c\nu_\perp = 3/2$ . Para todos os dados dessa figura deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 2 \times 10^5$  e descontamos um transiente igual a  $2 \times 10^4$ . . . . . 37
- 3.6 Resultados de simulações na rede quadridimensional. (a)  $\omega$  versus  $a$ . Para os dados desse painel, após um transiente igual a  $1,5 \times 10^4$ , deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 1,5 \times 10^5$ . (b)  $q_\infty$  versus  $a$ . (c)  $\chi_{q_\infty}$  versus  $a$ . Para os dados dos painéis (b) e (c) foram feitas extrapolações análogas às do capítulo 2, onde os tempos usados aqui foram  $7,29 \times 10^4$ ,  $8,1 \times 10^4$ ,  $9 \times 10^4$ ,  $10^5$ ,  $1,25 \times 10^5$  e  $1,5 \times 10^5$ . (d) Extrapolação em  $L$  dos valores de  $a$  correspondentes aos picos de  $\chi_{q_\infty}$ . . . . . 40
- 4.1 Representação gráfica das taxas de transição do modelo para uma única unidade *isolada*. . . . . 43

- 4.2 (a) Diagrama de fases com fases caracterizadas por retratos de fase. Os triângulos marcam o contorno da região fisicamente aceitável  $0 \leq P_1 \leq 1, 0 \leq P_2 \leq 1$  e  $0 \leq P_1 + P_2 \leq 1$ . Abaixo (acima) da linha rosa o ponto fixo estável é uma espiral (nó). As linhas restantes representam bifurcações nas equações de campo médio (4.3)-(4.5): bifurcação de Hopf (H—vermelha), bifurcação sela-nó (SN—azul) e bifurcação de período infinito (PI—preta). Os quadrados indicam a linha de bifurcação homoclínica (HC). O triângulo preto indica o ponto  $(a', \alpha')$  de encontro das linhas HC, H e SN, onde  $a' = 1.853579$  e  $\alpha' = 0.873612$ . A linha tracejada (verde) no topo do painel (em  $\alpha = 1$ ) marca a região do espaço de parâmetros onde há um único estado absorvente (mas não necessariamente o único atrator, veja texto para mais detalhes). Só há ciclo-limite na região cinza. (b) Ampliação do painel (a) mostrando detalhes perto da linha homoclínica. Painéis (c), (d) e (e) mostram os retratos de fase para os parâmetros marcados no painel (b), veja também figura 4.4. CLE = ciclo-limite estável. . . . . 45

- 4.3 Retratos de fase e resultados de simulações para um grafo completo com  $N = 500$ . A cada 50 unidades de tempo, os parâmetros do modelo são alterados de modo a eliminar uma solução estável. (a) Diagrama de fase com rótulos para indicar os lugares no espaço de parâmetros correspondente aos retratos de fase (b)-(e) e setas para mostrar a ordem dos saltos nos valores dos parâmetros de controle. (b) Retrato de fase para  $\alpha = 0,2$  e  $a = 4$ . As três amostras das simulações começam no ponto fixo instável perto do centro do triângulo, então cada uma converge para um atrator diferente devido às flutuações. (c) Retrato de fase para  $\alpha = 0,9$  e  $a = 4$ . Durante as simulações, alteramos o parâmetro  $\alpha$  para o valor deste retrato de fase. Assim, um dos atratores desaparece, então a amostra que estava em torno desse converge para o ponto fixo estável da bacia de atração onde essa amostra está agora. Obviamente, as outras duas amostras continuam em torno dos respectivos atratores delas. (d) Retrato de fase para  $\alpha = 0,9$  e  $a = 2,5$ . Mais um atrator desaparece, então novamente acontece o que foi mostrado no caso do painel (c). Assim, a amostra que estava isolada converge para o atrator restante. (e) Retrato de fase para  $\alpha = 0,2$  e  $a = 2,25$ . Finalmente, o ponto fixo estável restante desaparece, então as três amostras oscilam quase juntas (a menos de flutuações). O painel (f) mostra as séries temporais para as trajetórias simuladas mostradas nos painéis (b), (c), (d), e (e), nessa ordem no tempo. . . . . 49
- 4.4 Retratos de fase e resultados de simulações para um grafo completo com  $N = 20000$ , veja figura 4.2. (a) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,675$ . Há dois atratores: um nó e uma espiral. Obviamente, eles estão separados por uma sela. (c) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,725$ . A espiral tornou-se instável via uma bifurcação de Hopf e é rodeada por um ciclo-limite. (e) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,775$ . Depois de uma bifurcação homoclínica, o ciclo-limite desapareceu. Os painéis (b), (d) e (f) mostram as séries temporais para as trajetórias simuladas mostradas nos painéis (a), (c) e (e), respectivamente, com exemplos de excitabilidade coletiva e oscilações estocásticas. . . . . 51

5.1 Diagrama de bifurcação mostrando uma bifurcação transcítica envolvendo os pontos fixos correspondentes ao estados absorvente e ativo, sucedida por uma bifurcação de Hopf envolvendo o ponto fixo correspondente ao estado ativo. As linhas pretas representam as coordenadas  $P_1^*$  dos pontos fixos, onde as sólidas representam os pontos fixos estáveis e as tracejadas, os instáveis. A linha sólida rosa representa a frequência das oscilações do sistema no ciclo-limite. As linhas pontilhadas azuis representam os extremos de  $P_1$  no ciclo-limite. As constantes  $a_c = 0,564(4)$  e  $a^c = 2,491(4)$  são os valores de  $a$  onde acontecem as bifurcações trancrítica e de Hopf supercrítica, respectivamente. A seta aponta para o valor de  $a$  para o qual foi realizada a simulação mostrada na figura 5.3. . . . . . 57

5.2 Retratos de fase na coluna esquerda com as séries temporais correspondentes na coluna direita. As linhas sólidas vermelhas e pretas representam os resultados de campo médio e as pontilhadas azuis, os resultados das simulações em um grafo completo com  $N = 2 \times 10^5$ . Os círculos preenchidos representam os pontos fixos estáveis e os abertos, os instáveis. Assim como nos capítulos anteriores, os triângulos representam os limites da região fisicamente aceitável. . . . . 58

5.3 Série temporal de uma simulação no grafo completo de  $N = 200$  para  $a = 3,5$  (realização única). . . . . 60

5.4 No painel (c), temos o diagrama de fases, onde a linha preta representa as bifurcações transcíticas e a vermelha, as de Hopf. Os outros painéis representam os retratos de fase com as setas indicando os pontos no espaço de parâmetros onde eles se realizam, onde as linhas sólidas vermelhas representam os resultados da aproximação de campo médio e as pontilhadas azuis, os resultados das simulações num grafo completo de  $N = 10^6$ . Os círculos abertos e os preenchidos representam os pontos fixos instáveis e estáveis, respectivamente. A linha pontilhada rosa no painel (a) representa o ciclo limite instável. Empregamos  $\gamma = 1$  nessa figura. Assim como na figura 5.2, os triângulos representam os limites da região fisicamente aceitável. . . . . 62

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 TRANSIÇÕES DE FASE EM MODELOS EM REDE

Modelos em rede possuem um número ilimitado e crescente de aplicações em Física, Química, Biologia, Economia, Sociologia e outras áreas do conhecimento. Devido à natureza ruidosa do fenômeno a ser estudado, à ignorância sobre os seus detalhes, ou à dificuldade técnica em tratar de forma precisa tais detalhes, uma grande parte dos modelos em rede estudados são estocásticos. A grande maioria dos sistemas desse tipo apresenta transição de fase quando algum dos parâmetros de controle é variado, o que normalmente é o principal interesse no estudo desses processos. É extremamente raro um exemplo não-trivial de uma transição de fase que possa ser trabalhada com rigor e exatidão matemática, sendo o modelo de Ising bidimensional o mais famoso desses casos incomuns [Huang, 1987].

Uma importante abordagem usada para estudar transições de fase em modelos estocásticos em que não temos a solução exata são as simulações de Monte Carlo. Como essa técnica pode ser muito demorada e ter inevitáveis efeitos de tamanho e tempo finitos, é essencial termos uma boa idéia do que exatamente estamos procurando antes de nos aventurarmos a iniciar uma simulação de Monte Carlo. O método mais conhecido para isso são as aproximações de campo médio. Embora tais aproximações baseiem-se em uma premissa que é falsa na maior parte das vezes (a de que a correlação entre os sítios da rede é de curto alcance mesmo perto da transição de fase), elas são muito úteis para previsões e entendimento da existência e da natureza qualitativa das transições de fase [Huang, 1987, Marro e Dickman, 1999]. É claro que às vezes algumas previsões falham, principalmente em modelos definidos em redes regulares de baixa dimensionalidade (por exemplo, tridimensional [Grassberger, 1982], bidimensional [Mermin e Wagner, 1966, Hohenberg, 1967, Mermin, 1968, Wilson et al., 1995, Risler et al., 2004, Wood et al., 2006b] e unidimensional [Ising, 1925, Bidaux et al., 1989, Assis e Copelli, 2009]), pois é onde as premissas estão mais longe da verdade.

Mesmo as aproximações refinadas de campo médio como, por exemplo, a aproximação de vários sítios (aproximações de aglomeração), cedem-nos os mesmos expoentes críticos

da aproximação de campo médio simples (aproximação de único sítio). No entanto, os expoentes críticos das redes regulares com dimensão espacial menor que uma dimensão crítica superior (que depende do tipo de transição de fase) são diferentes dos expoentes de campo médio. Mesmo acima da dimensão crítica superior, as aproximações de campo médio continuam nos dando valores errados dos pontos críticos [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a, Assis e Copelli, 2008]. Por outro lado, as previsões de campo médio simples não costumam falhar em algumas topologias não-regulares, como por exemplo em redes aleatórias [Erdős e Rényi, 1960] (mesmo quantitativamente com relação ao ponto crítico [Kinouchi e Copelli, 2006, Assis e Copelli, 2009]). De qualquer forma, uma das grandes utilidades da aproximação de campo médio simples é que, se ela prevê que uma transição de fase *não* deve ocorrer, é quase certo que a mesma não acontecerá nas simulações de Monte Carlo em qualquer topologia de rede, não havendo uma única exceção no nosso conhecimento.

### 1.1.1 Transições de fase de não-equilíbrio

Visto que a ausência de equilíbrio termodinâmico, mesmo no estado estacionário é o que faz um modelo ser assim chamado de não-equilíbrio, o conceito de temperatura *propriamente dita* baseado na Lei Zero da Termodinâmica não faz sentido, por definição, nos modelos de não-equilíbrio. Portanto a temperatura não pode ser o parâmetro de controle em transições de fase de não-equilíbrio. Além disso, o parâmetro de ordem não pode ser mais a derivada da energia livre com relação ao parâmetro de controle, pois o conceito de energia livre também não faz mais sentido aqui. No mais, por incrível que pareça, quase tudo o que se aprendeu sobre transições de equilíbrio pode ser usado no estudo de transições de fase de não-equilíbrio.

**1.1.1.1 Transições de fase contínuas.** A maior parte das hipóteses de escala que foram introduzidas na Estatística de Equilíbrio ainda são válidas para as transições de fase contínuas de não-equilíbrio [Ódor, 2008]. Contudo, alguns expoentes críticos definidos para os sistemas de equilíbrio não se aplicam aqui, pois eles estão relacionados a grandezas que não fazem sentido em sistemas de não-equilíbrio. Apesar disso, as relações de escala e hiperescala que não contêm esses expoentes continuam exatamente iguais. Assim, podemos reaproveitar quase todo o conhecimento adquirido nas transições de fase contínuas de equilíbrio.

Na proximidade de uma transição de fase contínua, o sistema obedece a certas leis de

potência que definem os tão famosos expoentes críticos [Ódor, 2008]:

$$\psi \propto |\mu - \mu_c|^\beta, \quad (1.1)$$

$$L^d (\langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \rangle^2) \equiv \chi \propto |\mu - \mu_c|^{-\gamma}, \quad (1.2)$$

$$\xi \propto |\mu - \mu_c|^{-\nu_\perp}. \quad (1.3)$$

onde  $\psi$  é o parâmetro de ordem,  $\chi$  é variância escalada do parâmetro de ordem,  $L$  e  $d$  são respectivamente o tamanho linear e a dimensão da rede,  $\xi$  é o comprimento de correlação,  $\mu$  é o parâmetro de controle e  $\mu_c$  é o respectivo ponto crítico. As equações (1.1), (1.2) e (1.3) definem os expoentes críticos  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\nu_\perp$ , respectivamente. Além disso, esses três expoentes obedecem à seguinte relação de hiperescala:

$$\gamma = d\nu_\perp - 2\beta. \quad (1.4)$$

É comum que vários sistemas diferentes tenham os mesmos expoentes críticos. Um conjunto de sistemas nessa situação é dito pertencer a uma classe de universalidade, que geralmente leva o nome do modelo mais antigo pertencente a mesma.

*1.1.1.1.1 A classe de universalidade de modelos de osciladores estocásticos acoplados por fase.* T. Risler, J. Prost e F. Jülicher [Risler et al., 2004, Risler et al., 2005] mostraram, usando grupo de renormalização, que a transição de fase para sincronização nos modelos em rede de osciladores de fase contínua estocásticos idênticos acoplados localmente está na classe de universalidade do modelo XY [Gottlob et al., 1993]. Esse foi um resultado um tanto quanto surpreendente, pois, embora no modelo XY possa se dizer que há uma fase associada a cada sítio da rede, a mesma não possui uma analogia óbvia com a fase de um oscilador por causa da intrínseca simetria de reflexão dos spins no modelo XY. Podemos impor uma simetria de reflexão de fase em modelo de osciladores, como feito por Peter Reimann, Christian Van den Broeck e Ryoichi Kawai [Reimann et al., 1999], fazendo com que a frequência natural de cada um deles seja nula. No entanto, a natureza da transição de fase ainda será completamente diferente daquela do modelo XY, pois a transição de fase para o estado sincronizado leva a uma quebra de espontânea de simetria contínua de translação temporal, que é intrinsecamente de não-equilíbrio.

Recentemente, Kevin Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai e Katja Lindenberg [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] publicaram resultados de simulações computacionais que dão suporte à idéia de que a transição de fase para sincronização em um modelo de osciladores estocásticos que possuem uma fase discreta de apenas três estados também

está na classe de universalidade do modelo XY. Esse resultado é ainda mais surpreendente e ainda não há no nosso conhecimento um cálculo de grupo de renormalização corroborando isso. Uma comparação pode ser feita entre o modelo de Wood *et al.* e um modelo de osciladores estocásticos de fase contínua (cuja transição para sincronização Risler *et al.* haviam mostrado estar na classe XY) pela seguinte analogia: o modelo de Wood *et al.* está para um modelo osciladores estocásticos de fase contínua assim como o modelo de Potts de três estados está para o modelo XY. Embora o modelo de Potts de três estados não possua os mesmos expoentes críticos do modelo XY [Janke e Villanova, 1997], a versão antiferromagnética do primeiro pertence a classe de universalidade do último [Pelissetto, 2002, Gottlob e Hasenbusch, 1994, Kolesik e Suzuki, 1995]. Isso parece ser compatível com os resultados de Wood *et al.* Contudo, a transição de fase para sincronização envolve uma quebra espontânea de simetria de translação temporal contínua que é intrinsecamente de não-equilíbrio, o que torna ainda mais surpreendente o fato que essa transição esteja mesmo numa classe de universalidade de equilíbrio.

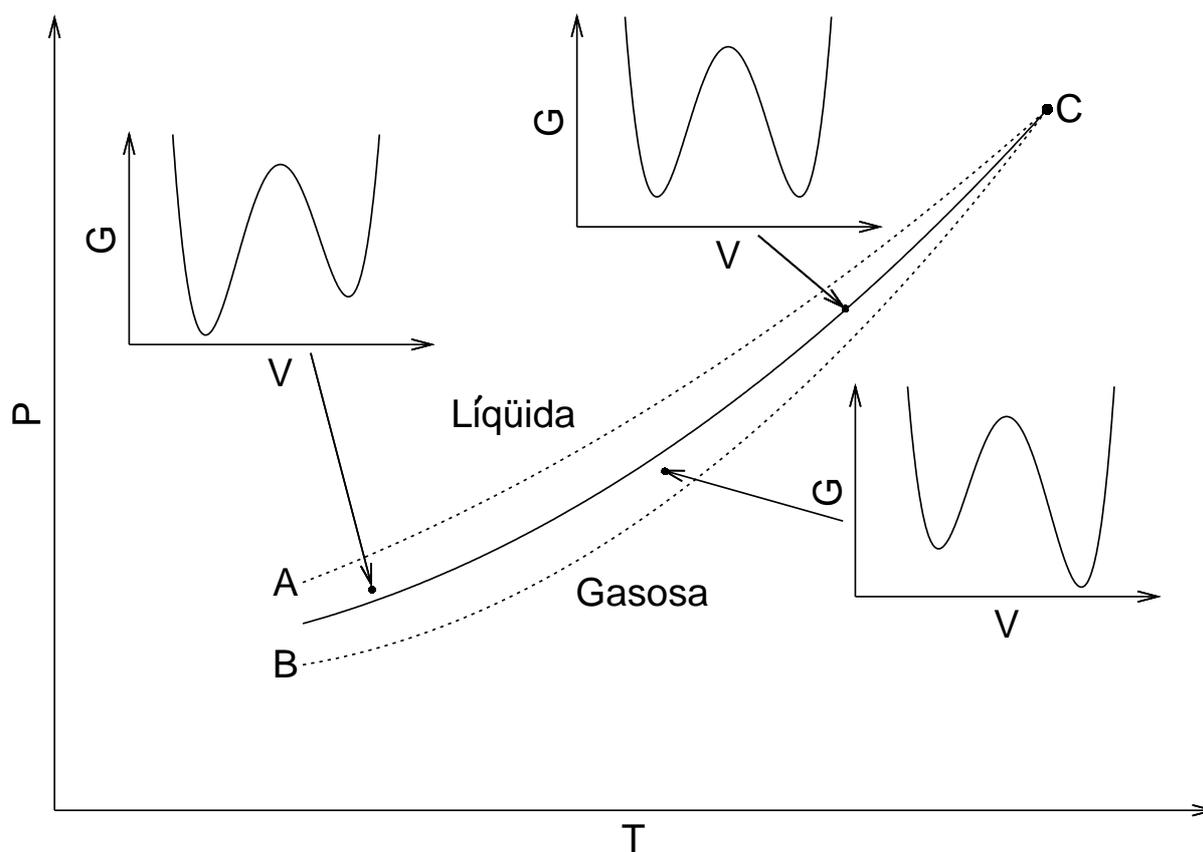
*1.1.1.1.2 Os modelos com um estado absorvente.* Estado absorvente é um *microestado* de um sistema de muitos corpos do qual *nunca mais* se pode sair [Marro e Dickman, 1999, Takeuchi, 2008]. Assim, a transição de fase para um estado absorvente não pode ter um análogo de equilíbrio, pois tal estado é irreversível por definição, lembrando que a reversibilidade é uma condição necessária para que haja equilíbrio termodinâmico [Ódor, 2008].

A grande maioria dos modelos com um único estado absorvente estão na mesma classe de universalidade. Mais precisamente, a conjectura sugerida por Janssen [Janssen, 1981], Grassberger [Grassberger, 1982] e Grinstein *et al.* [Grinstein et al., 1989] é que “todas as transições de fase contínuas para um único estado absorvente em sistemas de uma componente (sem simetria extra e/ou inhomogeneidade ou desordem) possuindo somente interações de curto alcance pertencem à classe de universalidade da Percolação Direcionada (PD)”<sup>1</sup> [Ódor, 2008].

As classes de universalidade de modelos com um estado absorvente não surgem de generalizações dinâmicas de sistemas de equilíbrio e são assim chamadas de classes de universalidade “de não-equilíbrio genuíno”. Naturalmente nesses modelos não há Hamiltoniano hermitiano e eles são definidos por taxas que não satisfazem a condição de balanceamento detalhado. Além disso, esses modelos podem apresentar transição de fase na rede unidimensional [Ódor, 2008], ao contrário dos sistemas de equilíbrio.

---

<sup>1</sup>Esse trecho é essencialmente uma tradução livre do original com alguns poucos ajustes.



**Figura 1.1** Diagrama de fases pressão-temperatura (P,T) para as fases líquida e gasosa numa substância pura típica. Obviamente ignoramos a fase sólida do diagrama de fases por simplicidade. A curva sólida representa a linha de transição de fase de primeira ordem, onde há coexistência de fases em equilíbrio com os dois mínimos de energia livre  $G$  em função do volume  $V$  (de cada uma das fases) iguais (veja detalhe central). As curvas tracejadas AC e BC delimitam os limites de estabilidade das fases gasosa e líquida, respectivamente. O ponto C representa o ponto crítico, ou seja, o ponto de transição de fase de segunda ordem. Partindo da região do diagrama de fases onde há *somente* a fase gasosa (líquida), ao cruzar a linha tracejada BC (AC), uma fase líquida (gasosa) metaestável aparece com a fase gasosa (líquida) ainda estável [veja, no detalhe direito (esquerdo), o mínimo relativo na energia livre]. Ao cruzar a linha sólida, a fase gasosa (líquida) passa a ser metaestável enquanto a fase líquida (gasosa) passa a ser estável [veja, no detalhe esquerdo (direito), o mínimo relativo na energia livre]. Finalmente, ao cruzar a linha tracejada AC (BC), resta *somente* a fase líquida (gasosa). Essa figura é baseada nas notas de aula do professor Francisco George Brady Moreira.

**1.1.1.2 Transições de fase descontínuas.** Em modelos de não-equilíbrio também há transições de fase descontínuas com a diferença que não existe mais uma linha de transição de fase onde há coexistência de fases *em equilíbrio* (linha sólida na figura 1.1). No caso de não-equilíbrio há somente as linhas que delimitam a estabilidade das fases (li-

nhas tracejadas AC e BC na figura 1.1). Além disso, no lugar da coexistência de fases *em equilíbrio*, há *biestabilidade* de fases, ou seja, mesmo nessa região do espaço de parâmetros o sistema irá apresentar no estado estacionário características macroscópicas de somente uma das fases. Nessa situação, o destino do sistema é decidido geralmente apenas pelas condições iniciais, exceto quando as mesmas são escolhidas muito próximas da fronteira de separação das bacias de atração das duas fases. Nesse último caso, o ruído é fundamental para a determinação do estado estacionário observado na prática.

Poder-se-ia dizer também que há biestabilidade nas transições de fase de primeira ordem em sistemas de equilíbrio, mas a fase metaestável, correspondente ao mínimo relativo da energia livre (detalhes esquerdo e direito na figura 1.1), é abandonada se o sistema for perturbado. No caso de sistemas ferromagnéticos, a fase metaestável só é observada por uma fração de segundo em experimentos específicos [Callen, 1985, Tholence, 1980] antes do sistema chegar na sua verdadeira fase estável. Por isso as linhas que delimitam a estabilidade das fases no diagrama de fases geralmente não recebem tanta atenção nesses sistemas.

Voltando aos modelos de não-equilíbrio, quando a bacia de atração de uma das fases é muito pequena, inevitáveis flutuações devidas ao efeito de tamanho finito levará o sistema para o atrator da outra fase. Isso nos dá algo remotamente análogo à metaestabilidade observada em transições de fase de primeira ordem em sistemas de equilíbrio.

## 1.2 TRANSIÇÃO DE FASE PARA SINCRONIZAÇÃO NOS MODELOS EM REDE

### 1.2.1 Sincronização de muitos osciladores acoplados

Existem muitos casos de sincronização em grupos extremamente grandes de osciladores não-lineares com acoplamento fraco (acoplados por fase [Winfree, 1967]) que são observados experimentalmente em Física, Química e Biologia [Kuramoto, 1984, Strogatz, 2000, Winfree, 2001, Pikovsky et al., 2001, Strogatz, 2004, Uhlhaas et al., 2009]. Norbert Wiener [Wiener, 1958, Wiener, 1961] foi um dos primeiros a estudar matematicamente esse problema. Posteriormente, Arthur Taylor Winfree [Winfree, 1967] relacionou a sincronização às transições de fase, fazendo com que tal assunto passasse a ser um novo ramo da Mecânica Estatística [Strogatz e Stewart, 1993].

Baseado nos trabalhos de Winfree [Winfree, 1967, Winfree, 2001], Yoshiki Kuramoto [Kuramoto, 1975] mostrou que qualquer conjunto de osciladores aproximadamente idênticos (de comportamentos análogos, de mesma amplitude e de frequências próximas) com acoplamento fraco pode ser aproximado por um sistema de equações de fase de uma

forma universal. O tão famoso modelo de Kuramoto é um caso particular desse sistema [Kuramoto, 1975]. Risler *et al.* [Risler et al., 2004, Risler et al., 2005] mostraram, usando grupo de renormalização, que qualquer modelo em rede de osciladores de fase contínua estocásticos idênticos acoplados localmente pertence à classe de universalidade do modelo XY [Gottlob et al., 1993]. Isso foi confirmado, em seguida, por Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] em um modelo muito mais simples de osciladores estocásticos *discretos*.

Devido à simplicidade do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b], eles fizeram, com relativa facilidade, cálculos de campo médio simples, cujas equações exibem uma bifurcação de Hopf que corresponde a uma transição contínua para uma fase com oscilações globais. Contudo, do mesmo modo que em outros modelos [Grassberger, 1982, Mermin e Wagner, 1966, Hohenberg, 1967, Mermin, 1968, Wilson et al., 1995], essa previsão de campo médio tem as suas limitações. Assim como no modelo de osciladores estocásticos de fase contínua [Risler et al., 2004, Risler et al., 2005, Sakaguchi, 1988], essa transição de fase não acontece mais nas redes bidimensional e/ou unidimensional por mais que se aumente o acoplamento entre os osciladores. Guan Jian-Yue, Xu Xin-Jian, Wu Zhi-Xi e Wang Ying-Hai [Jian-Yue et al., 2006] mostraram que, nas redes de mundo pequeno [Watts e Strogatz, 1998] de Newman-Watts [Newman e Watts, 1999] em uma e duas dimensões, o modelo de Kuramoto [Kuramoto, 1975] apresenta transição de fase para o estado coletivamente sincronizado para qualquer probabilidade de religação não-nula.

### 1.2.2 Oscilações globais em grupos de elementos excitáveis interagentes

Entender efeitos coletivos de elementos excitáveis ruidosos é essencial para várias disciplinas, tais como Neurociência, Epidemiologia e Química, entre outras. Um elemento excitável isolado é um sistema dinâmico que permanece em estado de repouso até que sofra uma perturbação suficientemente forte. Nesse caso, a trajetória dele no espaço de fase pode ser caracterizada por um estado excitado, que é então seguida por uma refratariedade a mais perturbações antes de retornar ao repouso. Um modelo mínimo (discreto) de um elemento excitável consiste então de um sistema de três estados [Lindner et al., 2004]. Na linguagem de Neurociência (Epidemiologia), cada elemento poderia representar um neurônio ou parte de membrana ativa (indivíduo) que seqüencialmente torna-se polarizado (suscetível), disparando ou despolarizado (infectado), e então refratário (recuperado). A dinâmica coletiva emerge porque elementos em repouso são tipicamente perturbados por elementos excitados.

Um sistema simples que incorpora esses ingredientes em um cenário com ruído é o modelo epidêmico em rede suscetível-infectado-recuperado-suscetível (SIRS) estocástico [Joo e Lebowitz, 2004]. Esse é um modelo em tempo contínuo em que um sítio passa de suscetível para infectado a uma taxa que depende *linearmente* da densidade de vizinhos infectados (o assim chamado acoplamento difusivo). Em epidemiologia, o modelo (ou variantes dele) pode ser aplicado para investigar, por exemplo, se uma densidade inicial de sítios infectados alcançará um valor de estado estacionário (cujo valor médio é usualmente escolhido como o parâmetro de ordem) não-nulo ou diminuirá até zero. Se todos os sítios vão para o repouso, a dinâmica cessa completamente (sem flutuações!), pois o sistema estará em um estado absorvente (veja página 4) [Marro e Dickman, 1999, Ódor, 2008].

Crescendo o acoplamento entre os sítios infectados e susceptíveis, o modelo SIRS sofre uma transição de fase de não-equilíbrio de uma fase absorvente para uma fase ativa caracterizada por uma densidade estacionária não-nula de sítios infectados. Contudo, dados experimentais (de Neurociência [Laurent, 2002, Shew et al., 2009], Epidemiologia [Anderson e May, 1991] e Química [Belousov, 1958, Field e Burger, 1985], entre outras) podem exibir também oscilações globais. Uma importante questão é a identificação das condições sob as quais essa classe geral de modelos (com um único estado absorvente) pode exibir oscilações globais sustentáveis. Essa transição adicional foi observada [Lewis e Rinzel, 2000, Kuperman e Abramson, 2001, Lindner et al., 2004, Kinouchi e Copelli, 2006] e entendida analiticamente [Girvan et al., 2002] principalmente em autômatos celulares, onde os sítios são sincronamente atualizados.

Em modelos em tempo contínuo, a situação é diferente: no modelo SIRS padrão com acoplamento difusivo [Joo e Lebowitz, 2004], oscilações globais não parecem ser estáveis, mesmo na condição favorável de acoplamento global ou aleatório [Joo e Lebowitz, 2004, Rozhnova e Nunes, 2009b, Rozhnova e Nunes, 2009c, Rozhnova e Nunes, 2009a]. Esse detalhe técnico é aparentemente relevante, visto que oscilações globais em modelos estocásticos de tempo contínuo são menos comuns. Como discutido por Risau-Gusman e Abramson, elas às vezes aparecem como oscilações estocásticas em execuções únicas do modelo, mas desaparecem na média das trajetórias da atividade da rede e em descrições analíticas (usualmente de campo médio) das mesmas [Risau-Gusman e Abramson, 2007]. Oscilações globais previstas pelas aproximações de campo médio foram observadas em modelos não-Markoviano [Prager et al., 2003] e Markoviano [Wood et al., 2006b] em tempo contínuo de osciladores estocásticos de três estados. Esses modelos, contudo, não têm um estado absorvente.

De um ponto de vista formal, a estrutura cíclica das unidades excitáveis impede o

uso de uma descrição de equilíbrio (pois não há equilíbrio detalhado possível, nesse caso). Além disso, o sistema dessas unidades interagentes tem um único estado absorvente (todas as unidades em repouso), o que fornece uma conexão interessante com uma enorme classe de problemas bem estudados relacionados, a percolação direcionada [Ódor, 2008]. Assim, no contexto de modelos markovianos em tempo contínuo, é natural que se pergunte: há sistemas excitáveis com um estado absorvente (ou seja, sem acionador externo) que podem sustentar as oscilações globais? Responder a essa pergunta é o nosso objetivo principal nesta tese.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DESTA TESE

No capítulo 2, estudamos uma versão modificada do modelo estocástico suscetível-infectado-recuperado-suscetível (SIRS) aplicando um reforço não-linear (exponencial) na taxa de contágio e sem difusão. Realizamos simulações em grafos completos e redes aleatórias bem como em redes hipercúbicas  $d$ -dimensionais (para  $d = 3, 2, 1$ ). Para não-linearidade fraca o suficiente, uma transição de fase contínua entre uma fase absorvente e uma ativa é obtida, tal como no modelo SIRS estocástico usual [Joo e Lebowitz, 2004]. Contudo, para não-linearidade forte, a transição entre essas duas fases pode ser descontínua para  $d \geq 2$ . Tal descontinuidade da transição é confirmada por ciclos de histerese bem caracterizados e biestabilidade. Resultados analíticos de campo médio corretamente prevêem a estrutura global do diagrama de fases. Além disso, contrariamente ao que foi observado no modelo de osciladores estocásticos acoplados por fase com uma não-linearidade similar no acoplamento [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], não encontramos uma transição para um estado sincronizado estável em nossos elementos excitáveis acoplados não-linearmente por pulso. Para tempos de duração da imunidade suficientemente longos e não-linearidade suficientemente alta, contudo, o sistema pode exibir excitabilidade coletiva e oscilações coletivas instáveis.

No capítulo 3, mostramos que, no modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b], se aumentarmos o acoplamento após a transição de fase para a sincronização, a frequência média das oscilações coletivas diminui até que uma transição de fase de período infinito ocorre, onde as oscilações coletivas cessam. Acima deste segundo ponto crítico, uma fração macroscópica dos osciladores fica a maior parte do tempo *em um dos* três estados, nos dando um exemplo de não-equilíbrio (sem um análogo de equilíbrio) em que a simetria rotacional discreta ( $C_3$ ) é quebrada espontaneamente na ausência de estados absorventes.

No capítulo 4, fizemos um ajuste no modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b] que nos permitiu transformar continuamente os osciladores uniformes do modelo original

em elementos excitáveis. Verificamos que para não-uniformidade suficientemente alta, mesmo antes da transformação ser completada, não ocorre mais a transição para a fase sincronizada e, portanto, não há oscilações globais estáveis nesse caso.

No capítulo 5, finalmente estudamos modelos markovianos em tempo contínuo com um único estado absorvente que apresentam transição de fase para sincronização. Os dois se baseiam na segunda versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b]. Em um deles, transformamos os osciladores em elementos excitáveis, analogamente ao que fizemos no capítulo 4. No outro, modificamos o modelo SIRS para incluir o acoplamento usado na segunda versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a], analogamente ao que foi feito no capítulo 2.

Nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 6.

## CAPÍTULO 2

# O MODELO SIRS ESTOCÁSTICO NA REDE COM UM ACOPLAMENTO NÃO-LINEAR POR PULSO

Neste capítulo, fizemos nossa primeira tentativa [Assis e Copelli, 2009] de encontrar um modelo que satisfaça simultaneamente a duas condições: (1<sup>a</sup>) tem que ser markoviano em tempo contínuo com um único estado absorvente; (2<sup>a</sup>) deve apresentar uma transição de fase para um estado estável coletivamente sincronizado. Assim, nos baseamos em dois modelos: (1<sup>o</sup>) um que satisfaz a primeira condição, mas não satisfaz a segunda; (2<sup>o</sup>) e outro que é markoviano em tempo contínuo, satisfaz a segunda condição, mas não tem um estado absorvente. De modo que ajustamos o primeiro modelo adicionando uma característica do segundo, garantindo a existência do estado absorvente.

Mais precisamente, investigamos uma versão modificada do modelo SIRS padrão [Joo e Lebowitz, 2004] com uma taxa não-linear que pode ser considerada uma versão *excitável com acoplamento por pulso* do modelo original de *osciladores acoplados por fase* de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Mostraremos que essa extensão não-linear (mas markoviana) do modelo SIRS padrão é aparentemente insuficiente para a geração de oscilações coletivas sustentadas. Por outro lado, o modelo apresenta transições de fase para um estado absorvente que pode ser contínua (se fracamente não-linear) ou descontínua (se suficientemente não-linear e para  $d \geq 2$ ). De modo que dispomos de um modelo de três estados em tempo contínuo que pode sofrer transições de fase descontínuas como aquelas descritas por Bidaux *et al.* para um autômato celular de dois estados exceto que a natureza da transição aqui pode ser controlada por um parâmetro livre (não somente a dimensão espacial) [Bidaux et al., 1989]. Além disso, diferentemente da maioria dos modelos que apresentam transições de fase de não-equilíbrio descontínuas [Ódor et al., 1993, Marro e Dickman, 1999], o parâmetro que controla a natureza da transição não é a difusão (que é inexistente em nosso modelo). O modelo pode também exibir um cenário de bifurcação diferente do que é usualmente observado em modelos de rede de não-equilíbrio, mostrando excitabilidade coletiva e oscilações globais instáveis.

## 2.1 DEFINIÇÃO DO MODELO

Na versão estocástica convencional do modelo epidêmico SIRS na rede [Murray, 1980], um sítio suscetível ( $S$ ) na posição  $x$  ( $x = 1, \dots, N$ ) torna-se infectado ( $I$ ) com taxa  $\lambda n_I(x)/k(x)$ , onde  $k(x)$  é o número de vizinhos de  $x$ , dos quais  $n_I(x)$  sítios estão infectados, e  $\lambda$  é a chamada taxa de infecção (o parâmetro de acoplamento). Depois de infectado, o sítio torna-se temporariamente insensível aos seus vizinhos (daí o termo acoplamento por pulso), passando de infectado para recuperado ( $R$ ) em uma taxa constante  $\delta$ , e evoluindo de recuperado para suscetível a uma taxa  $\gamma$ . Isso é resumido da seguinte forma:

$$S \longrightarrow I \quad \text{com taxa } \lambda n_I/k, \quad (2.1)$$

$$I \longrightarrow R \quad \text{com taxa } \delta, \quad (2.2)$$

$$R \longrightarrow S \quad \text{com taxa } \gamma. \quad (2.3)$$

Como todas as taxas poderiam em princípio ser normalizadas por  $\delta$ , a seguir fazemos  $\delta = 1$  sem perda de generalidade.

Para baixos valores de  $\lambda$ , uma densidade inicial de sítios infectados anula-se após um tempo característico e o sistema atinge o seu único estado absorvente (todos os sítios suscetíveis). Para  $\lambda$  maior que um valor crítico  $\lambda_c$ , por outro lado, uma densidade não-nula de sítios infectados torna-se estável no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$  (embora o estado absorvente seja, obviamente, sempre uma solução). A transição em  $\lambda_c$  (estudada muito detalhadamente por Joo e Lebowitz [Joo e Lebowitz, 2004]) acredita-se amplamente ser contínua e pertencente à classe de universalidade PD [Assis e Copelli, 2008].

Adaptando o acoplamento aplicado por Wood *et al.* [Wood et al., 2006b] para elementos excitáveis acoplados por pulso, obtém-se uma generalização do modelo SIRS. Em vez da equação (2.1), propomos:

$$S \longrightarrow I \text{ com taxa} \\ g(n_I/k, n_S/k) \equiv b [e^{a(n_I - n_S)/k} - e^{-an_S/k}], \quad (2.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros de acoplamento,  $n_S$  é o número de vizinhos suscetíveis, e as equações (2.2) e (2.3) permanecem inalteradas. Note que a interação ocorre somente entre os primeiros vizinhos. O segundo termo na taxa (2.4) garante a existência de um estado absorvente: se todos os sítios estiverem suscetíveis ( $n_I = 0$  para todos os sítios), eles permanecerão suscetíveis para sempre. Para pequenos valores de  $a$  ( $a \ll 1$ ), recupera-

se o comportamento linear do modelo SIRS original, com  $\lambda \simeq ab$ , em primeira ordem. Então, para  $a$  pequeno, aumentar  $b$  leva a uma transição de fase contínua simplesmente como no modelo SIRS [Joo e Lebowitz, 2004]. Para  $a$  suficientemente grande, contudo, mostraremos que aumentar  $b$  leva a uma transição de fase descontínua.

Como uma motivação para a taxa (2.4), notemos que a dinâmica subjacente do disparo neuronal é altamente não-linear em vários dos seus aspectos: a membrana despolariza quando canais (tipicamente de  $\text{Na}^+$ ) abrem muito rapidamente, em um comportamento tipo limiar. Esse processo, por sua vez, é acionado por uma soma (não-linear) de despolarizações menores induzidas nas sinapses pelos neurônios pré-sinápticos. A própria dinâmica sináptica (incluindo a ligação do neurotransmissor, no caso mais simples) é não-linear. Portanto, é comum que modelos reduzidos de fenômenos neuronais coletivos permitam termos não-lineares [Gerstner e Kistler, 2002]. Em nosso caso, a não-linearidade é controlada pelo parâmetro  $a$ .

## 2.2 ANÁLISE DE CAMPO MÉDIO

A estrutura do diagrama de fases no plano  $(a, b)$  pode ser capturada mais facilmente analisando a versão de campo médio do modelo. Se  $P(\alpha)$  é a probabilidade do sítio estar no estado  $\alpha$  ( $\alpha \in \{S, I, R\}$ ), obtém-se

$$\dot{P}(S) = -g[P(I), P(S)]P(S) + \gamma P(R), \quad (2.5)$$

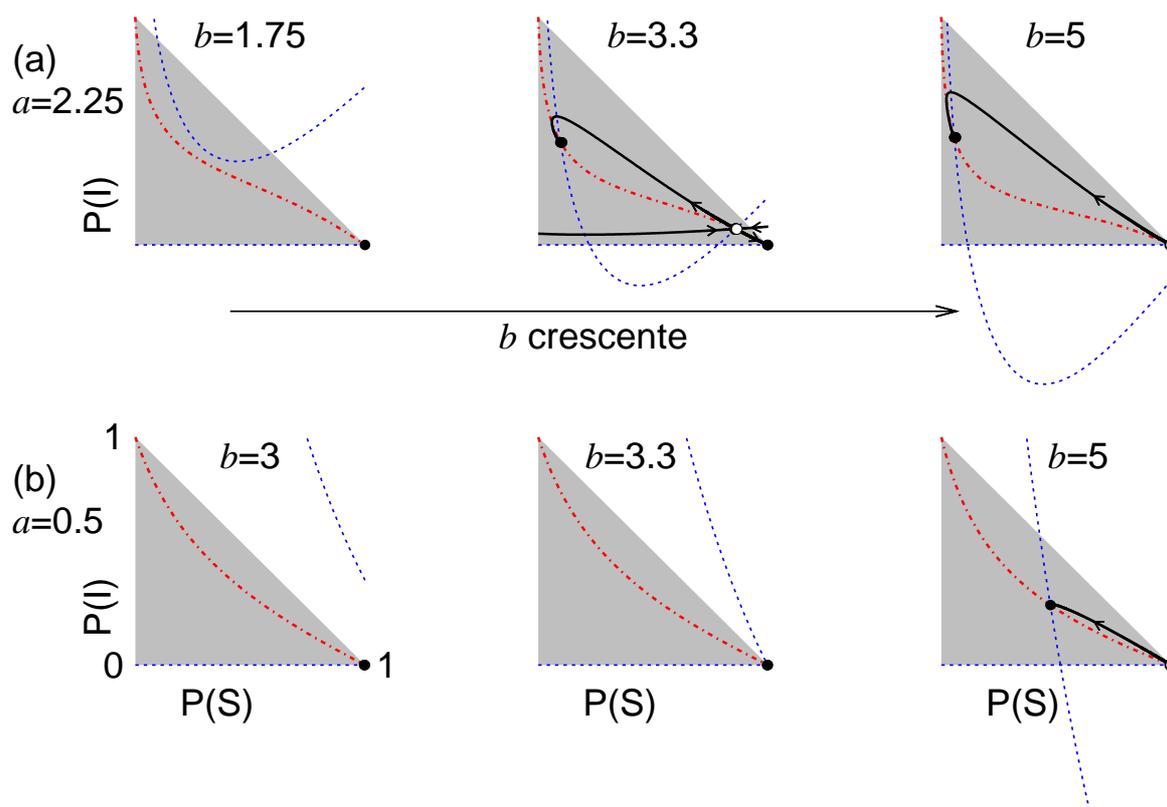
$$\dot{P}(I) = g[P(I), P(S)]P(S) - P(I), \quad (2.6)$$

$$\dot{P}(R) = P(I) - \gamma P(R), \quad (2.7)$$

onde fizemos  $\delta = 1$  (veja a seção 2.1). Essas equações são exatas para um grafo completo no limite termodinâmico quando  $k = N \rightarrow \infty$  e  $n_\alpha \rightarrow \infty$  com  $n_\alpha/k = P(\alpha)$ . No que segue-se, empregaremos o valor estacionário da densidade de sítios infectados  $P(I)^*$  como o parâmetro de ordem.

Aplicando a condição de normalização  $P(S) + P(I) + P(R) = 1$ , pode-se eliminar  $P(R)$  e estudar o fluxo bidimensional resultante da dinâmica de campo médio no plano  $[P(S), P(I)]$ , como mostrado na figura 2.1. Para valores baixos de  $a$  (painel inferior da figura 2.1), o estado absorvente  $P(S) = 1$  perde a estabilidade em uma bifurcação transcítica, dando origem a um estado ativo estável com uma densidade de sítios infectados que cresce continuamente de  $P(I) = 0$ . Para  $a$  suficientemente grande, o caráter descontínuo da transição de fase revela-se nas equações de campo médio através de uma bifurcação sela-nó (painel superior da figura 2.1): um estado ativo aparece com  $P(I)$  não-

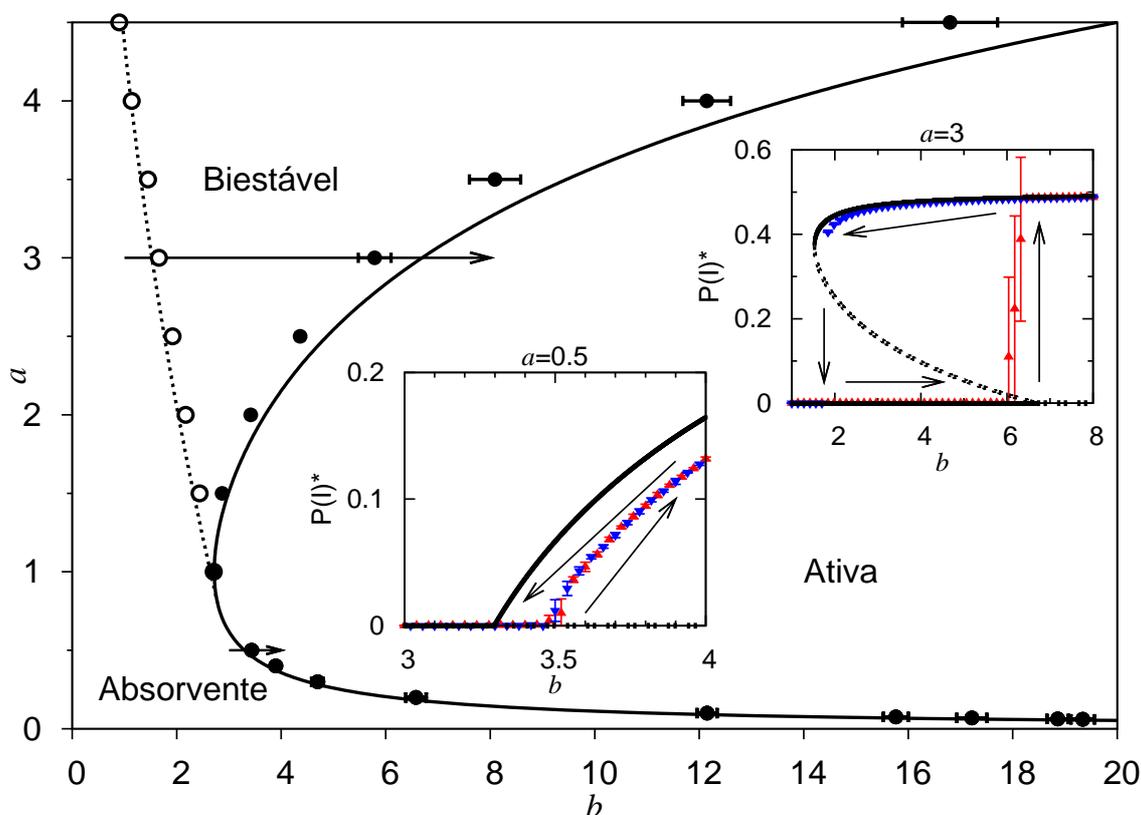
nulo, enquanto o estado absorvente permanece estável (veja seção 2.7). Como é usual, essa biestabilidade é regulada pela variedade estável da sela, que separa as bacias de atração dos dois pontos fixos estáveis. Aumentando mais o valor de  $b$ , uma bifurcação transcritical ocorre: o estado absorvente perde a estabilidade e o estado ativo torna-se o único atrator do sistema.



**Figura 2.1** Espaço de fase  $[P(S), P(I)]$  mostrando as isóclinas  $\dot{P}(I) = 0$  (linhas tracejadas em azul) e  $\dot{P}(S) = 0$  (linhas pontilhadas-tracejadas em vermelho). Os triângulos cinzas correspondem à região fisicamente aceitável  $0 \leq P(I) \leq 1 - P(S)$ . Em cada linha,  $a$  é mantido constante e  $b$  cresce da esquerda para a direita. No painel inferior (b) ( $a = 0, 5$ ), o estado absorvente em  $P(S) = 1$  perde a estabilidade em uma bifurcação transcritical à medida que  $b$  aumenta. No painel superior (a) ( $a = 2, 25$ ), a isóclina  $\dot{P}(I) = 0$  é dobrada pela não-linearidade exponencial [equação (2.4)], criando um estado ativo com  $P(I)$  finito em uma bifurcação sela-nó. Símbolos fechados (abertos) indicam pontos fixos estáveis (instáveis). Note que a isóclina  $\dot{P}(I) = 0$  inclui sempre a linha  $P(I) = 0$ . Quando o estado absorvente é instável (uma sela),  $P(I) = 0$  corresponde à sua variedade estável (coluna mais à direita). Exceto para esse caso, as trajetórias (linhas sólidas pretas) representam as variedades estáveis e instáveis das selas.

## 2.3 SIMULAÇÕES NA REDE ALEATÓRIA

A histerese é uma das mais simples evidências de biestabilidade e, neste sistema, ela pode ser claramente detectada nas simulações em redes aleatórias de Erdős-Rényi [Erdős e Rényi, 1960, Albert e Barabási, 2002] de conectividade média  $K$ , com as quais as equações de campo médio mostram uma boa concordância. As simulações foram realizadas para um valor fixo de  $a$ . Para cada valor de  $b$ , deixamos o sistema evoluir durante  $t_{max}$  passos de tempo de Monte Carlo. A duração de cada um desses pas-



**Figura 2.2** Diagrama de fases (da versão de campo médio) do modelo. A linha tracejada marca o início da biestabilidade, com o aparecimento repentino de uma fase ativa com parâmetro de ordem finito [bifurcação sela-nó nas equações (2.5)-(2.7)]. A linha sólida indica uma transição em que o estado absorvente perde a estabilidade [bifurcação transcritical nas equações (2.5)-(2.7)]. Símbolos correspondem às simulações na rede aleatória com  $\gamma = 1$ ,  $K = 10$ ,  $N = 10^4$ ,  $t_{max} = 5 \times 10^3$ ,  $h = 10^{-5}$  e a média feita em cinco realizações independentes. O detalhe inferior (superior) mostra o parâmetro de ordem  $P(I)^*$  para uma mudança cíclica no parâmetro de acoplamento  $b$ , mostrando uma transição contínua (descontínua) para um valor pequeno (grande) de  $a$ . Triângulos apontados para cima (para baixo) indicam  $b$  crescente (decrecente).

os  $\Delta t$  (correspondendo a  $N$  atualizações aleatórias [Marro e Dickman, 1999]) foi escolhido para ser  $(\delta + \gamma + be^a)^{-1}$  para certificar-se de que as probabilidades serão menores que um. O parâmetro  $b$  foi incrementado e decrementado em intervalos constantes  $\delta b$ , e a condição inicial para cada valor corresponde à condição final do caso precedente. Aplicamos uma pequena taxa  $h$  ( $h < 1/N$ ) para excitar espontaneamente sítios em repouso, evitando assim que o sistema fique preso eternamente no estado absorvente quando esse for instável [Bidaux et al., 1989, Takeuchi, 2008].

Na figura 2.2 mostramos o diagrama de fases no espaço de parâmetros  $(a, b)$ , onde se observa o aparecimento de uma fase ativa. Os detalhes da figura 2.2 mostram que uma mudança cíclica em  $b$  leva a um ciclo de histerese [observado para a densidade de sítios ativos  $P(I)$ ] para valores de  $a$  suficientemente altos ( $a > a_c$ ). Para valores baixos de  $a$ , a transição de fase é contínua. As fronteiras entre as fases no plano  $(a, b)$  (gráfico principal da figura 2.2) podem ser numericamente e analiticamente<sup>1</sup> obtidas das equações de campo médio e facilmente estimadas das simulações em redes aleatórias (ciclos de histerese não se alteraram significativamente quando  $t_{max}$  foi duplicado; veja também seção 2.5).

Para obter o diagrama de fases mostrado na figura 2.2, empregamos um período refratário médio comparável ao tempo de excitação,  $\gamma = 1$ . Contudo, não encontramos diferenças qualitativas no diagrama de fases em campo médio no caso limite  $\gamma \rightarrow \infty$ , o que sugere que os resultados das simulações que apresentamos até aqui, também, serão válidos para um sistema de dois estados. O mesmo não podemos afirmar para valores de  $a$  mais altos do que os mostrados até agora, como veremos na próxima seção. Como esperado, o diagrama de fases deste sistema com  $\gamma$  finito difere cada vez mais do diagrama de fases do sistema de dois estados, quanto menor for  $\gamma$ .

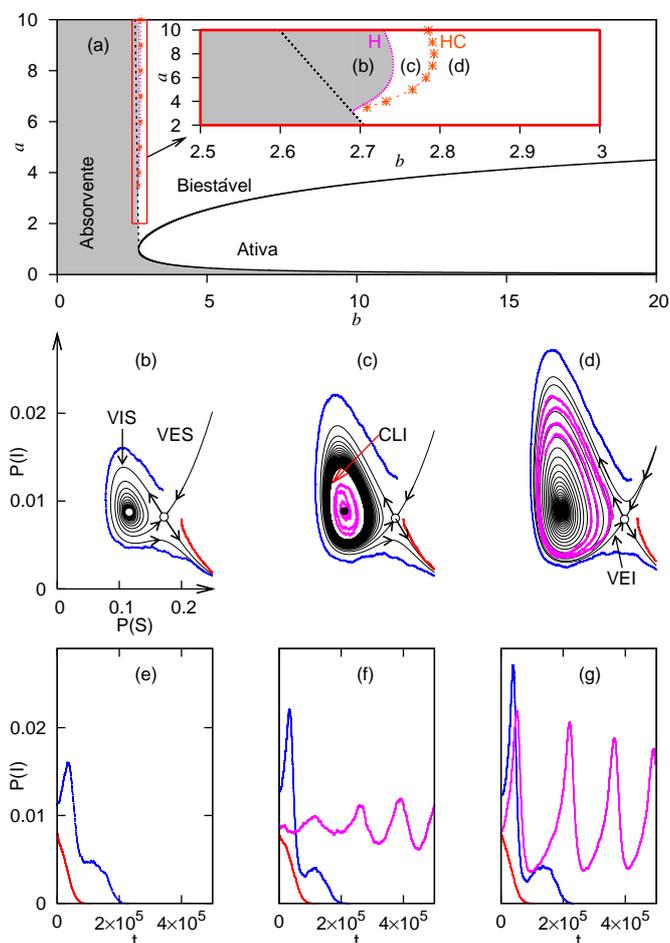
## 2.4 AUSÊNCIA DE OSCILAÇÕES GLOBAIS SUSTENTADAS

No processo de varredura do espaço de parâmetros em busca de oscilações coletivas, encontramos pequenas regiões em que uma bifurcação de Hopf na equações de campo médio (2.5)-(2.7) envolvendo o estado ativo pode de fato ocorrer. Contudo, como mostraremos, isso não necessariamente implica na existência de oscilações coletivas sustentadas, que nós não encontramos neste modelo.

Exemplificamos com os resultados para  $\gamma = 0,01$ , cujo diagrama de fases é mostrado na figura 2.3a. Embora qualitativamente similar à figura 2.2, há agora um estreito intervalo de valores de  $b$  (para altos valores de  $a$ ) em que a rota para a biestabilidade, em vez do simples cenário de bifurcação sela-nó mostrado na figura 2.1(a), requer bifurcações inter-

---

<sup>1</sup>Veja equação (2.14).



**Figura 2.3** (a) Diagrama de fases (da versão de campo médio) do modelo para  $\gamma = 0,01$  (painéis b–g também mostram simulações de realização única em um grafo completo com  $N = 10^6$ ). As bifurcações são como as da figura 2.2, exceto por aquelas que ocorrem adicionalmente na região limitada pelo retângulo marcado (detalhe): aumentando  $b$ , uma bifurcação sela-nó (linha tracejada) é seguida por uma bifurcação de Hopf (H) (linha pontilhada), depois da qual uma bifurcação homoclínica (HC) ocorre (veja texto). A fase absorvente corresponde à região cinza. Os rótulos (b)–(d) no detalhe mostram os pontos no espaço de parâmetros que correspondem aos retratos de fase abaixo. (b) Uma sela e um ponto fixo *instável* nascem em uma bifurcação sela-nó. (c) O ponto fixo torna-se estável via uma bifurcação de Hopf e é rodeado por um ciclo-limite *instável*. (d) Após uma bifurcação homoclínica, o ciclo-limite desaparece. VIS = variedade instável superior da sela; VES = variedade estável superior da sela; CLI = ciclo-limite instável; VEI = variedade estável inferior. A escala em (b) também aplica-se (a menos de uma translação) a (c) e (d). A variedade instável inferior da sela *sempre* vai para o ponto fixo do estado absorvente. Os painéis (e), (f) e (g) mostram as séries temporais para as trajetórias simuladas, respectivamente, mostradas nos painéis (b), (c), e (d), com exemplos de excitabilidade coletiva e oscilações estocásticas (veja texto para mais detalhes).

mediárias adicionais<sup>2</sup> [detalhe da figura 2.3(a)]. Todas essas bifurcações extras ocorrem enquanto o ponto fixo do estado absorvente mantém-se estável.

Começando da fase absorvente e aumentando  $b$ , primeiro uma bifurcação sela-nó ocorre na qual o nó é *instável* [e rapidamente torna-se uma espiral, figura 2.3(b)]. Neste estágio, o sistema ainda tem somente um único ponto fixo estável, mas a estrutura do espaço de fase é tal que o sistema tornou-se *coletivamente excitável*: se o sistema estiver abaixo do variedade estável superior (VES) da sela [figura 2.3(b)], ele retornará monotonicamente ao estado absorvente, enquanto se estiver em um ponto acima da VES, ele fará uma longa excursão em torno da variedade instável superior (VIS) antes de ir para o repouso<sup>3</sup> [figura 2.3(b)], exibindo uma série temporal análoga à de um elemento excitável [figura 2.3(e)].

Aumentando  $b$  ainda mais, a espiral torna-se *estável* em uma bifurcação de Hopf e é agora rodeada por um ciclo-limite *instável* (CLI) [figura 2.3(c)]. Formalmente, nesta região do espaço de parâmetros, o sistema é coletivamente biestável, mas note que o estado ativo só será alcançado a partir de condições iniciais na região limitada pelo CLI [que, devido ao pequeno valor de  $\gamma$ , é também muito pequeno — veja a escala na figura 2.3(b)]. Note também que a superlotação de linhas em volta do CLI sinaliza que ele é fracamente repulsivo. O ponto fixo estável interno (o estado ativo) é correspondentemente fracamente atrativo (que é a razão por que o fluxo na região limitada pelo CLI não é mostrado). Isso significa que uma solução de oscilação coletiva existe (o CLI), mas é tão fracamente instável que pode ser confundido com oscilações sustentadas [mesmo na integração numérica das equações (2.5)-(2.7)]. De simulações de realizações únicas em um grafo completo com  $N = 10^6$ , obtivemos uma série temporal com oscilações [figura 2.3(f)] que desaparecem somente quando, devido a flutuações de efeito de tamanho finito, o sistema alcança o estado absorvente [Marro e Dickman, 1999]. Então, confirmamos o cenário predito por Risau-Gusman e Abramson: como os autovalores do ponto fixo estável tem uma componente imaginária, inevitáveis flutuações gerarão oscilações estocásticas [Risau-Gusman e Abramson, 2007].

Finalmente, o CLI desaparece em uma bifurcação homoclínica (HC), após a qual o ponto fixo do estado ativo é separado do ponto fixo do estado absorvente pelas variedades estáveis da sela. Note que variedade estável inferior [VEI, veja figura 2.3(d)] não vem mais da espiral instável nem do CLI, mas, em vez disso, une-se a VES em  $t \rightarrow -\infty$ . A VEI desdobrar-se-á gradualmente com o crescimento de  $b$  até que um retrato de fase similar

---

<sup>2</sup>Para valores maiores de  $\gamma$  (por exemplo,  $\gamma = 1$ ), as mesmas bifurcações intermediárias podem ocorrer, mas para valores maiores de  $a$  e restritas a intervalos mais estreitos de valores  $b$ .

<sup>3</sup>Veja primeiro parágrafo da subseção 1.2.2.

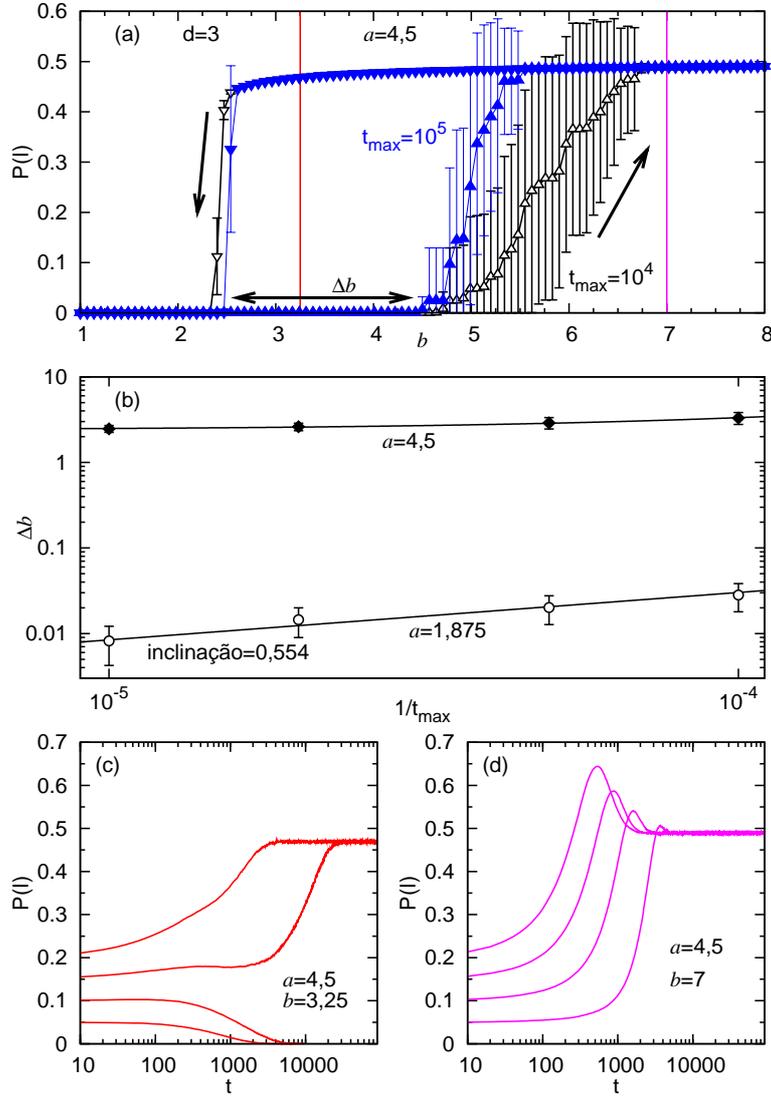
àquele do gráfico central da figura 2.1(a) seja alcançado (antes que a sela colida – para valores maiores ainda de  $b$  – com o ponto fixo do estado absorvente em uma bifurcação transcítica). Excitabilidade coletiva e oscilações estocásticas mantêm-se presentes nesse regime [figuras 2.3(d) e 2.3(g)].

Nosso diagrama de fases emergiu essencialmente da análise de estabilidade local, então, em princípio, não exclui que uma bifurcação sela-nó de ciclos possa ocorrer nas regiões ativa ou biestável. Contudo, a integração numérica das equações (2.5)-(2.7) para uma variedade de condições iniciais e combinações de parâmetros não mostra quaisquer sinais disso.

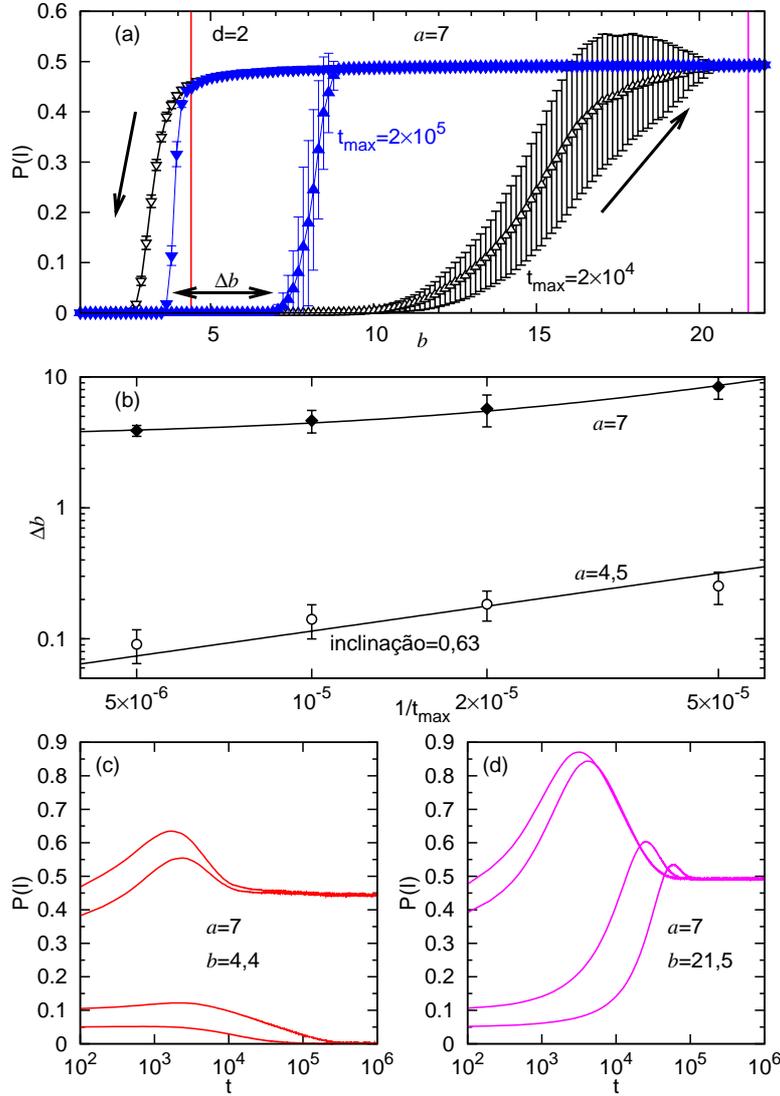
Embora a análise desta seção seja baseada na aproximação de campo médio simples, vale ressaltar que melhorias na aproximação de campo médio não necessariamente ajudam a previsão de oscilações coletivas. Rozhnova e Nunes [Rozhnova e Nunes, 2009b] recentemente observaram que as equações obtidas por Joo e Lebowitz [Joo e Lebowitz, 2004] para a aproximação de pares leva a oscilações sustentadas em uma pequena região para  $\gamma \ll 1$ . Contudo, nas simulações em redes aleatórias na mesma região do espaço de parâmetros, essas oscilações são amortecidas [Rozhnova e Nunes, 2009c]. Além disso, na referência [Rozhnova e Nunes, 2009a] elas mostraram que a aproximação de trincas não exibe ciclo-limite estável em várias partes do diagrama de fases em que são previstas para ter pela aproximação de pares. Se bem que a aproximação de trincas ainda prevê a existência de ciclo-limite estável mesmo que numa região menor do espaço de parâmetros, mas essa previsão tampouco é confirmada pelas simulações de Monte Carlo na rede.

## 2.5 SIMULAÇÕES EM REDES HIPERCÚBICAS

Como as simulações com valores pequenos de  $\gamma$  são muito difíceis de executar-se [Joo e Lebowitz, 2004], agora, vamos nos concentrar no cenário de bifurcação mais simples da figura 2.2 e discutiremos os resultados das simulações para  $\gamma = 1$ . Identificar a natureza da transição em redes hipercúbicas não é tão simples como para redes aleatórias e grafos completos. Como foi recentemente discutido muito detalhadamente por Takeuchi [Takeuchi, 2008], mesmo um sistema que sofre uma transição de fase contínua para um estado absorvente (tal como aquela pertencente à classe de universalidade PD) pode mostrar um ciclo de histerese quando o parâmetro de acoplamento varia ciclicamente em torno do valor crítico dele (veja seção 2.6 para mais detalhes). Isso é devido à divergência dos tempos transientes na criticalidade no limite termodinâmico. Nas simulações, isso é refletido na largura do ciclo de histerese que obedece a uma relação de escala com a taxa de rampa (definida como o incremento em  $b$  por unidade de tempo)



**Figura 2.4** Simulações para  $d = 3$  com  $N = 25^3$  e  $h = 2,5 \times 10^{-5}$ . (a) ( $a = 4,5$ , média sobre 20 realizações) O comprimento do ciclo de histerese  $\Delta b$  diminui com  $t_{max}$  ( $\Delta b$  representado pela seta horizontal para  $t_{max} = 10^5$ ). Triângulos apontados para cima (baixo) representam  $b$  crescente (decrecente). Linhas verticais mostram valores de  $b$  empregados nos painéis (c) e (d). (b) Dependência de  $\Delta b$  em  $t_{max}$  é qualitativamente diferente para  $a$  acima (círculos preenchidos) e abaixo (círculos abertos) de  $a_c$ , respectivamente mostrando um valor assintótico não-nulo ou nulo no limite  $t_{max} \rightarrow \infty$ . O gráfico inferior é bem ajustado pela lei de potência com expoente 0,55. Note que a precisão em  $\Delta b$  é limitada pelo incremento em  $b$  empregado no ciclo de histerese ( $\delta b = 1,8 \times 10^{-3}$  no caso de  $a = 1,875$ ). Painéis (c) e (d) mostram a evolução temporal de  $P(I)$  (média sobre 20 realizações) para  $a = 4,5$  e diferentes condições iniciais [com  $NP(I)$  sítios no estado  $I$  em  $t = 0$  e o restante no estado  $S$ ], mostrando biestabilidade de fase para  $b = 3,25$  mas não para  $b = 7$ .



**Figura 2.5** Simulações para  $d = 2$  com  $N = 150^2$  e  $h = 2,5 \times 10^{-5}$ . (a) ( $a = 7$ , média sobre 20 realizações) O comprimento do ciclo de histerese  $\Delta b$  diminui com  $t_{max}$  ( $\Delta b$  representado pela seta horizontal para  $t_{max} = 2 \times 10^5$ ). Triângulos apontados para cima (baixo) representam  $b$  crescente (decrescente). Linhas verticais mostram valores de  $b$  empregados nos painéis (c) e (d). (b) Dependência de  $\Delta b$  em  $t_{max}$  é qualitativamente diferente para  $a$  acima (círculos preenchidos) e abaixo (círculos abertos) de  $a_c$ , respectivamente mostrando um valor assintótico não-nulo ou nulo no limite  $t_{max} \rightarrow \infty$ . O gráfico inferior é bem ajustado pela lei de potência com expoente 0,63. Note que a precisão em  $\Delta b$  é limitada pelo incremento em  $b$  empregado no ciclo de histerese ( $\delta b = 10^{-2}$  no caso de  $a = 4,5$ ). Painéis (c) e (d) mostram a evolução temporal de  $P(I)$  (média sobre 20 realizações) para  $a = 7$  e diferentes condições iniciais [com  $NP(I)$  sítios no estado  $I$  em  $t = 0$  e o restante no estado  $S$ ], mostrando biestabilidade de fase para  $b = 4,4$  mas não para  $b = 21,5$ .

na forma  $(1/t_{max})^{1/(\beta+1)}$ , onde  $\beta$  é o expoente crítico governando o parâmetro de ordem [Takeuchi, 2008, Marro e Dickman, 1999]. Veja a dedução dessa relação de escala na seção 2.6.

Considere, por exemplo, os ciclos de histerese mostrados na figura 2.4(a) para  $d = 3$  e dois valores de  $t_{max}$  diferentes por uma ordem de magnitude (enquanto os incrementos nos valores de  $b$  foram mantidos os mesmos [Takeuchi, 2008]). Se a transição é ou não contínua dependerá se a largura  $\Delta b$  do ciclo de histerese diminui até zero no limite  $t_{max} \rightarrow \infty$ . Definimos operacionalmente  $\Delta b$  como se segue: para cada realização, atribuímos à extremidade superior do ciclo de histerese o valor de  $b$  no qual a densidade média de sítios ativos  $P(I)$  (com média feita sobre  $t_{max}$  passos de tempo de Monte Carlo) é a primeira acima de  $1/\sqrt{N}$ . Similarmente, a extremidade inferior do ciclo de histerese é definida como o ponto onde  $P(I)$  cai abaixo de  $1/\sqrt{N}$ . A largura do ciclo de histerese  $\Delta b$  é então obtida fazendo a média sobre as realizações da diferença entre as extremidades superior e inferior. Traçamos  $\Delta b$  versus  $1/t_{max}$  na figura 2.4(b) para dois valores de  $a$ . Para  $a = 4, 5$  [que corresponde aos ciclos de histerese mostrados na figura 2.4(a)], uma extrapolação linear leva a um valor não-nulo de  $\Delta b$  com  $t_{max} \rightarrow \infty$ , que é consistente com uma transição de fase descontínua. Para  $d = 3$  e  $a = 1, 875$ , por outro lado,  $\Delta b$  decresce até zero com uma lei de potência  $(1/t_{max})^{0,55}$ , que é consistente com a previsão de Takeuchi [Takeuchi, 2008] para classe de universalidade PD  $\{\beta \simeq 0,805(10)$  [Jensen, 1992]].

Pode-se, em princípio, sentir-se desconfortável com o critério descrito acima para decidir-se sobre a descontinuidade da transição porque na prática a extrapolação<sup>4</sup> linear pode não coincidir com  $\lim_{t_{max} \rightarrow \infty} \Delta b$  se os tempos transientes são longos demais (e esperamos que eles sejam longos próximo de uma transição contínua<sup>5</sup>). Esse inconveniente torna-se mais saliente quando diminuimos a dimensão espacial da rede, como representado para  $d = 2$  e  $a = 7$  na figura 2.5. Note a suavidade do maior ciclo de histerese na figura 2.5(a), que é muito similar àquelas observadas por Takeuchi [Takeuchi, 2008] perto de uma transição *contínua*. De acordo com o valor extrapolado de  $\Delta b$  para  $t_{max} \rightarrow \infty$ , contudo, essa transição seria considerada descontínua [veja gráfico superior na figura 2.5(b)], enquanto para uma não-linearidade mais fraca [ $a = 4, 5$ , gráfico inferior da figura 2.5(b)] obtemos novamente uma lei de potência  $(1/t_{max})^{0,63}$  [Takeuchi, 2008] compatível com PD em  $d = 2$   $\{\beta \simeq 0,583(4)$  [Jensen, 1992]].

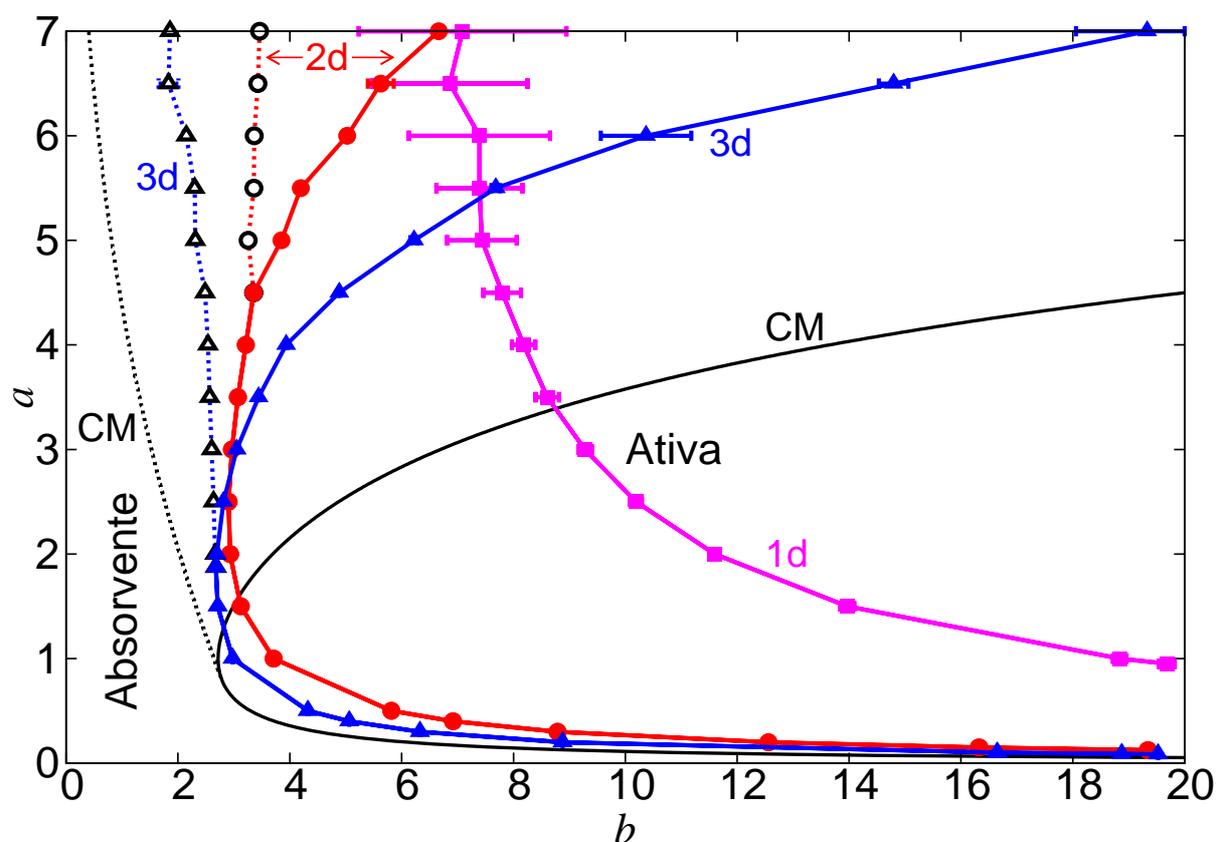
Para ter a certeza da descontinuidade da transição de fase, é mais simples (e computacionalmente menos dispendioso) investigar diretamente a biestabilidade alegada:

<sup>4</sup>Esse problema foi claramente exposto por Iwan Jensen [Jensen, 1993] para a extrapolação no tamanho de rede.

<sup>5</sup>Para sermos mais precisos, esperamos que eles *divirjam* na criticalidade no limite termodinâmico!

fixamos  $a$  e  $b$  e verificamos a dependência do estado estacionário nas condições iniciais [Dickman e Maia, 2008, Ódor e Dickman, 2009]. Este teste é mostrado nas figuras 2.4(c), 2.4(d), 2.5(c), e 2.5(d) para  $d = 3$  e  $d = 2$ , respectivamente. As figuras 2.4(c) e 2.5(c) confirmam a biestabilidade visto que, para os valores iniciais mais baixos (altos) de  $P(I)$ , o sistema converge para o estado absorvente (ativo)<sup>6</sup>. As figuras 2.4(d) e 2.5(d) servem como um controle negativo, confirmando (em uma região onde somente o

<sup>6</sup>Veja a seção 2.7.



**Figura 2.6** Diagrama de fases do modelo na redes hipercúbicas uni-, bi-, e tridimensionais (quadrados, círculos e triângulos, respectivamente). Símbolos abertos (com linhas tracejadas para guiar os olhos) marcam o início da biestabilidade de fase, com o aparecimento repentino de uma fase ativa estável com o parâmetro de ordem finito. Símbolos preenchidos (com linhas sólidas para guiar os olhos) representam a transição em que o estado absorvente perde a estabilidade. A região entre as linhas sólida e tracejada corresponde ao regime biestável. Linhas sem símbolos mostram os resultados de campo médio (CM) para comparação. Todos os outros resultados correspondem a simulações com  $\gamma = 1$  e  $h = 2,5 \times 10^{-5}$ . Para  $d = 1, 2$  e  $3$ , os tamanhos lineares dos sistemas são  $L = 32400, L = 150$ , e  $L = 25$  (onde  $N = L^d$ ), os valores máximos de  $t_{max}$  são  $5 \times 10^5, 2 \times 10^5$ , e  $10^5$ , com médias sobre 10, 10, e 20 realizações, respectivamente.

estado ativo é estável) que a convergência para o estado absorvente nos casos anteriores não é devida a flutuações do efeito de tamanho finito. Notamos que *todas* as amostras convergem para o mesmo atrator (tanto absorvente como ativo) correspondente à média delas.

A extrapolação  $\lim_{t_{max} \rightarrow \infty} \Delta b$  foi empregada para desenhar o diagrama de fases do modelo para as redes bi- e tridimensionais. Como mostrado na figura 2.6, a estrutura qualitativa do diagrama de fases é bem reproduzida pelas previsões de campo médio, embora a concordância quantitativa piore com a diminuição da dimensionalidade, como esperado. Note que a fase biestável para  $d = 2$  é muito menor que para  $d = 3$ . Para  $d = 1$ , as enormes barras de erro na figura 2.6 para valores grandes de  $a$  emergem devido a transientes extremamente grandes. Não observamos claramente transições descontínuas para  $d = 1$  até  $a = 7$ . Isso está em concordância com os resultados de Bidaux *et al.* [Bidaux et al., 1989, Jensen, 1991], bem como com a conjectura de Hinrichsen que transições descontínuas em  $d = 1$  devem ocorrer somente na presença de difusão [Hinrichsen, 2000a].

## 2.6 HISTERESE EM TRANSIÇÕES DE FASE CONTÍNUAS

Como foi dito na seção anterior, recentemente Takeuchi [Takeuchi, 2008] mostrou que modelos com um único estado absorvente podem apresentar fenômeno de histerese em torno da transição de fase mesmo que essa seja contínua. Isso resolveu um paradoxo em um resultado experimental publicado em 1990 por Kai *et al.* [Kai et al., 1990]. Além disso, como acontece com outras grandezas em transições de fase contínuas, a largura dos ciclos de histerese obedece a uma lei de escala, cujo expoente obviamente depende dos outros já conhecidos da literatura [Grassberger e de la Torre, 1979, Marro e Dickman, 1999, Hinrichsen, 2000b].

Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, vamos repetir a dedução de Takeuchi [Takeuchi, 2008] para o caso do processo de contato [Harris, 1974, Ódor, 2008, Marro e Dickman, 1999]. Seja  $r$  a taxa de rampa, definida como o incremento no parâmetro de controle por unidade de tempo. Isso equivale à seguinte equação:

$$r = \frac{\delta \lambda}{t_{max} \times \Delta t},$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de controle,  $t_{max}$  é o número de passos de Monte Carlo (dando-nos um tempo de  $t_{max} \times \Delta t$ ) em que  $\lambda$  permanece constante antes de ser incrementado em  $\delta \lambda$  e  $\Delta t$  é o tempo avançado entre dois passos de Monte Carlo. Como, numa transição de fase

contínua, sempre temos um único atrator, os ciclos de histerese desaparecem no limite de  $r$  pequeno. Isso pode resolver as dúvidas se uma transição de fase corresponde a uma bifurcação supercrítica ou a uma bifurcação subcrítica (sela-nó antes da transcítica), como mostrado na seção anterior.

Como, uma vez que todos os sítios estiverem inativos, o sistema estará em um estado absorvente, é necessário haver uma pequena taxa  $h$  de transição espontânea do estado inativo para o ativo. Essa taxa deve ser pequena o bastante para que, na fase quase absorvente, não haja atividade além do esperado para mera flutuações, ou seja, para que a densidade de sítios ativos não seja maior que  $\sqrt{N}$ , onde  $N$  é o número de sítios da rede. Assim, nas transições contínuas entre uma fase quase absorvente e uma ativa, os ciclos de histerese se formam do seguinte modo. Primeiro, grandes aglomerados ativos não emergem mesmo para  $\lambda > \lambda_c$ , pois a atividade da rede ainda é muito pequena para sobreviver sem a ativação espontânea dos sítios inativos. Contudo, uma vez que surge um aglomerado de sítios ativos (ASA) suficientemente grande para sobreviver apenas devido à taxa de infecção  $\lambda$ , ele cresce e finalmente se estende pelo sistema inteiro, pois  $\lambda > \lambda_c$ . A densidade de sítios ativos satura no valor do estado estacionário. Por outro lado, quando  $\lambda$  é diminuído, o número de sítios ativos decresce gradualmente e homogeneamente, seguindo aproximadamente a densidade estacionária, de modo destoante ao processo de crescimento. Portanto, a histerese observada em torno da transição de fase contínua não é uma propriedade estacionária do sistema, como implicaria uma transição descontínua, mas sim um efeito dinâmico devido à varredura do parâmetro de controle.

Vamos finalmente deduzir a relação de escala de Takeuchi, que nos ajudará a entender *por que* mesmo nas transições de fase contínuas sempre haverá ciclo de histerese para qualquer  $r$  finito. Para transições de fase de um estado absorvente para um ativo, seja  $P_\infty$  a probabilidade de um estado ativo sobreviver eternamente iniciando de um único sítio infectado [Marro e Dickman, 1999]. O valor de  $P_\infty$  cresce algebricamente da forma  $P_\infty(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\beta'}$  para  $\varepsilon \equiv \lambda - \lambda_c > 0$ , onde  $\beta'$  é um dos expoentes críticos caracterizando essas transições. Para a classe de universalidade PD temos que  $\beta' = \beta$  [Grassberger e de la Torre, 1979, Hinrichsen, 2000b], onde  $\beta$  é o expoente crítico correspondente à densidade estacionária de sítios ativos [Marro e Dickman, 1999]. Suponhamos que  $\varepsilon$  é aumentado continuamente e linearmente da forma

$$\varepsilon(t) = rt \tag{2.8}$$

(ou seja, em  $t = 0$ , temos que  $\lambda = \lambda_c$ ) e um ASA cresce de maneira robusta no

tempo  $t = T$ . Assumimos que a taxa de rampa  $r$  é tão lenta que a probabilidade de sobrevivência em um tempo finito converge para  $P_\infty$  antes que o parâmetro de controle mude significativamente. Temos então a seguinte relação aproximada:

$$1 \approx \int_0^T h' P_\infty[\varepsilon(t)] dt \sim h' r^{\beta'} T^{\beta'+1}, \quad (2.9)$$

onde  $h' = hN$ , ou seja,  $h'dt$  é probabilidade de surgir espontaneamente *um* sítio ativo durante o intervalo de tempo de duração  $dt$ . Vamos usar, para  $\Delta\lambda$ , a mesma definição de  $\Delta b$  descrita na seção anterior. Como, quando  $\lambda$  é diminuído, o número de sítios ativos decresce seguindo aproximadamente a densidade estacionária e essa proximidade é maior quanto menor for o  $r$ , então:

$$\Delta\lambda \approx rT \stackrel{(2.9)}{\approx} r \times r^{-\beta'/( \beta'+1)} = r^{1/(\beta'+1)}. \quad (2.10)$$

Isso dá o expoente de histerese  $1/(\beta' + 1)$ . É claro que o crescimento assumido do ASA é estocástico, de modo que, a rigor, deve-se lidar com a largura média  $\langle \Delta\lambda \rangle$  baseado na distribuição probabilística. Esta abordagem mais rigorosa não é muito mais difícil. Com  $P_0(t)$  sendo a probabilidade de *não* ter aparecido um ASA com crescimento auto-sustentado até o tempo  $t$ , a probabilidade que esse ASA com crescimento estável ocorra pela primeira vez entre o tempo  $t$  e  $t + dt$  é dada por:

$$\left\{ \frac{d[1 - P_0(t)]}{dt} \right\} dt = -dP_0(t) = P_0(t) h' P_\infty[\varepsilon(t)] dt \quad (2.11)$$

$$= Ch' r^{\beta'} t^{\beta'} \exp\left(-\frac{Ch' r^{\beta'}}{\beta' + 1} t^{\beta'+1}\right) dt, \quad (2.12)$$

onde substituímos a solução da equação diferencial (2.11) no último membro dela mesma e  $C$  é definido por  $P_\infty = C\varepsilon^{\beta'} \stackrel{(2.8)}{=} Cr^{\beta'} t^{\beta'}$ . Isso dá a média da largura de histerese da forma:

$$\langle \Delta\lambda \rangle \stackrel{(2.10)}{\approx} r \int_0^\infty t \left[ -\frac{dP_0(t)}{dt} \right] dt \stackrel{(2.12)}{=} \Gamma\left(\frac{\beta' + 2}{\beta' + 1}\right) \left[ \frac{(\beta' + 1)r}{Ch'} \right]^{1/(\beta'+1)},$$

que confirma a relação de escala (2.10).

## 2.7 REVISITANDO AS TRANSIÇÕES DE FASE DESCONTÍNUAS PARA UM ESTADO ABSORVENTE

Como foi dito no início deste capítulo, nossa intenção era encontrar uma transição de fase para um estado estável coletivamente sincronizado. No entanto, o que encontramos foram transições de fase descontínuas para um estado absorvente. Nesta seção, deciframos esse resultado “surpreendente”.

A primeira pergunta que devemos nos fazer é: o que faz uma transição de fase para um estado absorvente em modelos com parâmetro de ordem escalar ser descontínua? Joaquín Marro e Ronald Dickman [Marro e Dickman, 1999] nos dão a resposta: “Se providenciarmos para que estados de baixa densidade sejam intrinsecamente instáveis enquanto estados de alta densidade são viáveis, então devemos observar uma transição de primeira ordem no vácuo.”<sup>7</sup>

De modo que resta-nos, agora, a seguinte questão: o modelo de que tratamos neste capítulo satisfaz à condição necessária descrita acima? Como quase sempre, a análise de campo médio vai ajudar-nos a chegar à resposta. Assim, escrevemos a versão de campo médio da equação (2.4):

$$g[P(I), P(S)] \equiv b \{e^{a[P(I)-P(S)]} - e^{-aP(S)}\}. \quad (2.13)$$

Primeiramente, vamos calcular quando o estado absorvente perde a estabilidade na versão de campo médio, ou seja, vamos encontrar a equação da curva da bifurcação transcítica. O estado absorvente é estável se na proximidade dele  $\dot{P}(I) \leq 0$ . Conseqüentemente, na bifurcação transcítica devemos ter:

$$\lim_{\substack{P(S) \rightarrow 1^- \\ \Rightarrow P(I) \rightarrow 0^+}} \dot{P}(I) = 0 \stackrel{(2.6)}{\implies} \lim_{\substack{P(S) \rightarrow 1^- \\ \Rightarrow P(I) \rightarrow 0^+}} \frac{g[P(I), P(S)] P(S)}{P(I)} = 1 \stackrel{(2.13)}{\implies} b = \frac{e^a}{a}. \quad (2.14)$$

De modo que para  $b \leq e^a/a$ , o estado absorvente é estável e, daí, nessa região do espaço de parâmetros, “estados de baixa densidade são intrinsecamente instáveis”. Falta verificar se, nesse caso, existem valores de  $a$  e  $b$  que satisfazem também a segunda parte da condição de Marro e Dickman. Pela equação (2.13), é fácil ver que, se  $P(I) > P(S)$  (“estado de alta densidade”), para *qualquer*  $b$  (mesmo  $b < e^a/a$ ), *sempre* existe algum  $a$  grande o bastante para que  $g[P(I), P(S)]P(S)/P(I) > 1 \Leftrightarrow \dot{P}(I) > 0$  e, portanto, tenhamos um estado ativo (“de alta densidade”) estável.

---

<sup>7</sup>Tradução livre do original.

A bifurcação sela-nó que aparece nos resultados da aproximação de campo médio é devida exclusivamente ao acoplamento [equação (2.13)] no regime fortemente não-linear (valor de  $a$  grande o suficiente), que foi adaptado do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. O que nos leva a perguntar: esse acoplamento também leva a alguma bifurcação sela-nó, para algum valor de  $a$  suficientemente alto, no modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]? Se sim, essa transição de fase (além da transição para a sincronização) também acontece em redes regulares? Essa pergunta será respondida no próximo capítulo.

## 2.8 CONCLUSÕES

Resumindo, propomos um modelo markoviano em tempo contínuo de rede de elementos excitáveis acoplados por pulso não-linearmente. O acoplamento depende linearmente da taxa  $b$  e não-linearmente do parâmetro adimensional  $a$ . Mostramos que aumentar a não-linearidade do acoplamento leva a uma mudança na natureza da transição de fase para o estado ativo. No regime de acoplamento linear ( $a \ll 1$ ), onde o modelo aproxima-se do modelo SIRS estocástico padrão [Joo e Lebowitz, 2004], uma fase ativa com  $P(I) > 0$  aparece através de uma transição de fase contínua com o aumento de  $b$ . Em um regime suficientemente não-linear (valor de  $a$  grande o bastante), aumentar  $b$  leva a uma transição de fase descontínua. A natureza da transição pode então ser controlada por um único parâmetro, que não é a difusão. Esses resultados podem ser previstos por análise de campo médio e são qualitativamente confirmados em simulações em rede aleatórias e redes hipercúbicas para  $d \geq 2$ . O fato que uma transição descontínua não foi encontrada para  $d = 1$  é consistente com resultados anteriores para sistemas de dois estados com pouca ou nenhuma difusão [Bidaux et al., 1989, Jensen, 1991, Ódor et al., 1993, Hinrichsen, 2000a].

Caracterizamos as transições descontínuas por dois critérios complementares: primeiro, ciclos de histerese são obtidos e a largura deles é estimada por extrapolação para um número infinito de passos tempo de Monte Carlo; então, a biestabilidade foi explicitamente confirmada verificando que a trajetória do sistema exhibe dependência nas condições iniciais. No caso de transições contínuas, a largura dos ciclos de histerese obedecem a uma relação de escala que envolve a taxa de rampa de acordo com as previsões recentes de Takeuchi [Takeuchi, 2008].

Finalmente, relembremos que o acoplamento exponencial na equação (2.4) foi inspirado no modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Enquanto o sistema de osciladores estocásticos acoplados por fase não-linearmente, proposto por es-

ses autores, realmente sofre uma transição de fase para um estado sincronizado, não encontramos oscilações coletivas sustentadas com uma não-linearidade similar entre os elementos excitáveis acoplados por pulso. Contudo, encontramos (embora em uma pequena região do espaço de parâmetros) oscilações globais instáveis e *excitabilidade coletiva* nas equações de campo médio. Simulações em grafos completos revelam oscilações estocásticas em realizações únicas quando a fase ativa corresponde a uma espiral estável nas equações de campo médio. Permanece para ser investigado se a excitabilidade coletiva e as oscilações estocásticas permanecem em redes regulares ou aparecem na transição para um regime de mundo pequeno.

Como não encontramos a tão desejada transição de fase para um estado coletivamente sincronizado com este modelo, no capítulo 4 usamos uma estratégia diferente. Abrimos mão do acoplamento por pulso (que é mais comum e plausível para sistemas de elementos excitáveis) e passamos a usar o acoplamento por fase para ver se conseguimos observar oscilações globais estáveis em um modelo markoviano em tempo contínuo de rede de elementos excitáveis (com um único estado absorvente). Em vez de modificarmos o modelo SIRS estocástico convencional [Joo e Lebowitz, 2004] para acrescentar características do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], fizemos, nesse último, o ajuste mínimo necessário para que ele possa ter um único estado absorvente. E, assim, procuramos novamente por tais oscilações coletivas sustentadas. Mas, primeiro, estudamos em detalhe no próximo capítulo uma segunda transição de fase no modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] que não tinha sido observada por eles. Esse estudo será necessário para entendermos certos detalhes do capítulo 4.

Os resultados deste capítulo 2 foram publicados na referência [Assis e Copelli, 2009].

# QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA C3 EM UM MODELO DE NÃO-EQUILÍBRIO SEM ESTADO ABSORVENTE

No capítulo anterior, observamos, na aproximação de campo médio, bifurcações sela-nó no regime suficientemente não-linear devidas ao acoplamento adaptado para o modelo SIRS do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]<sup>1</sup>. Lá essas bifurcações correspondiam a transições de fase descontínuas entre um estado absorvente e um estado ativo. Aqui constatamos que, de fato, aumentar bastante o parâmetro de controle (o *acoplamento*) na versão de campo médio do modelo de Wood *et al.* leva a três bifurcações sela-nó simultâneas e simétricas no ciclo-limite surgido da bifurcação de Hopf previamente relatada nas referências [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Assim, investigamos a transição de fase correspondente a essa bifurcação adicional.

Neste capítulo, confirmamos o que tinha sido relatado por Wood *et al.* na referência [Wood et al., 2007b]. Esses autores observaram que, na primeira versão do modelo [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] (que é a estudada neste capítulo),

“... acima do ponto da [primeira] transição, as unidades tornam-se cada vez mais sincronizadas com o aumento do acoplamento. Nessa fase coletivamente sincronizada, a taxa média de transição de um aglomerado de osciladores torna-se fundamentalmente dependente do parâmetro de acoplamento. Mais especificamente, as taxas de transição e a frequência de oscilação dos aglomerados de osciladores diminuem com o aumento do parâmetro de acoplamento devido a uma diminuição exponencial na probabilidade de transição. Para citar um exemplo explícito, considere um pequeno subsistema composto de unidades que estão todas no mesmo estado (isto é, um aglomerado de unidades perfeitamente sincronizadas). A forma do acoplamento produz uma taxa de transição exponencialmente pequena neste caso e daí a frequência desse aglomerado aproxima-se de zero para altos valores do parâmetro de acoplamento.”<sup>2</sup>

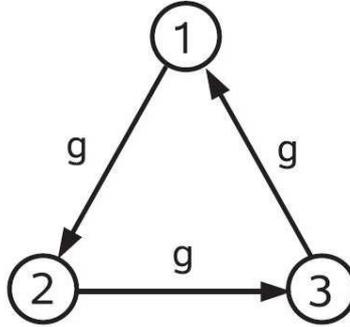
---

<sup>1</sup>Veja-se seção 2.7.

<sup>2</sup>Tradução livre do original com alguns ajustes.

Aqui, mostramos que, quando o parâmetro de acoplamento se aproxima de *um valor crítico superior*, a frequência média das oscilações globais diminui continuamente *realmente até zero*, de modo que o período das oscilações coletivas diverge no ponto crítico numa *transição de fase* de período infinito (TFPI). Acima desse segundo ponto crítico, uma fração macroscópica dos osciladores passa a maior parte do tempo *em um dos* três estados, que é, portanto, espontaneamente superpovoado. Isso nos dá um exemplo prototípico de não-equilíbrio (sem uma contrapartida de equilíbrio) de um modelo sem estado absorvente [Tainaka, 1988, Tainaka, 1989, Tainaka e Itoh, 1991, Tainaka, 1994, Itoh e Tainaka, 1994] cuja simetria rotacional discreta  $C_3$  é espontaneamente quebrada.

### 3.1 DEFINIÇÃO DO MODELO



**Figura 3.1** Representação gráfica das taxas de transição do modelo para uma única unidade isolada. Figura idêntica à original da referência [Wood et al., 2006b].

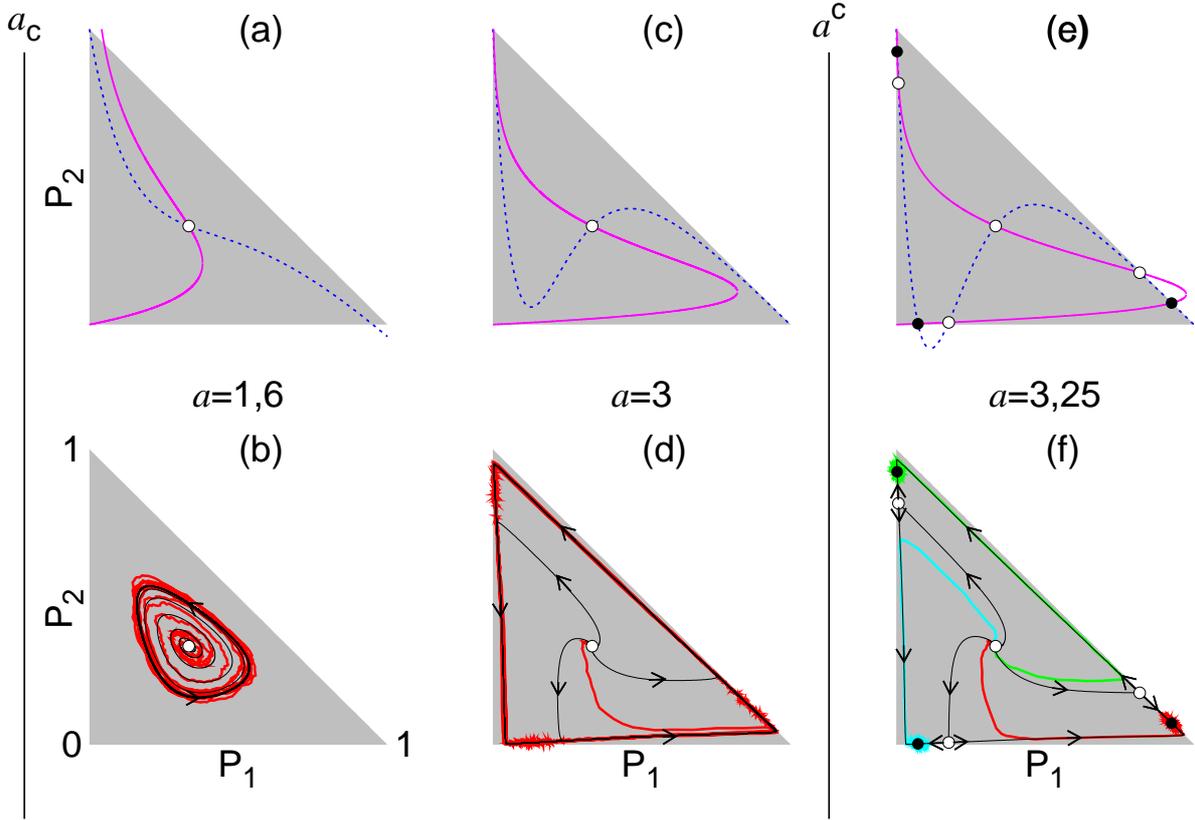
Neste modelo, cada elemento é um oscilador com o estado caracterizado por uma fase  $\phi_x$  no sítio  $x$  ( $x = 1, \dots, N$ ) que pode ter um dos três valores:  $\phi_x = j_x\pi/3$ , onde  $j_x \in \{1, 2, 3\}$ . Os osciladores são acoplados por fase. As transições permitidas são:  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$  e  $3 \rightarrow 1$ . As taxas de transição associadas (de  $j$  para  $j + 1$ ) são:

$$g_{j,j+1} = g \exp \left[ \frac{a(N_{j+1} - N_j)}{z} \right], \quad (3.1)$$

onde  $j + 1 = 1$  quando  $j = 3$ ,  $g$  é uma constante (que pode ser definida como a unidade sem perda de generalidade),  $a$  é o parâmetro de acoplamento,  $N_k$  é o número de vizinhos mais próximos no estado  $k$  e  $z$  é o número total de vizinhos mais próximos. As taxas são invariantes sob permutação cíclica dos índices, ou seja, pertencem ao grupo de simetria  $C_3$  de rotações discretas. Observe que somente quando  $a \rightarrow \infty$  o sistema tem três estados absorventes simétricos (todos os sítios *parados* na mesma fase).

## 3.2 RESULTADOS

## 3.2.1 Análise de campo médio e simulações em grafos completos



**Figura 3.2** Espaço de fase  $(P_1, P_2)$ . Os triângulos cinzas correspondem à região fisicamente aceitável  $0 \leq P_2 \leq 1 - P_1$ . O parâmetro  $a$  cresce da esquerda para a direita. As linhas tracejadas (sólidas) indicam as isóclinas  $\dot{P}_1 = 0$  ( $\dot{P}_2 = 0$ ) nos painéis superiores. Os painéis inferiores mostram as trajetórias das simulações em grafo completo com  $N = 5000$  (linhas grossas) e as soluções das equações de campo médio (linhas finas com setas). O painel (a) mostra que  $\vec{P}_{1/3}^*$  é o único ponto fixo do sistema para  $a = 1,6 > a_c$ . (b) O ponto fixo  $\vec{P}_{1/3}^*$  é instável, com trajetórias convergindo para um ciclo-limite estável, que corresponde a oscilações globais [veja também figura 3.4(a)]. (c) Com  $a = 3$ , as isóclinas estão se aproximando uma da outra em três posições adicionais, daí criando três fantasmas simétricos de sela-nó. (d) O ciclo-limite é quase tão grande quanto o perímetro da região fisicamente aceitável. Note a superlotação de linhas perto dos fantasmas, com conseqüente não-harmonicidade nas séries temporais [figura 3.4(b)]. (e) Para  $a = 3,25$  há seis pontos fixos adicionais que nasceram simultaneamente em três bifurcações sela-nó em  $a = a^c$ . (f) Neste caso, se o sistema inicia no ponto fixo instável simétrico  $\vec{P}_{1/3}^*$ , as flutuações determinam para qual ponto fixo estável ele vai. Os símbolos fechados (abertos) indicam os pontos fixos estáveis (instáveis).

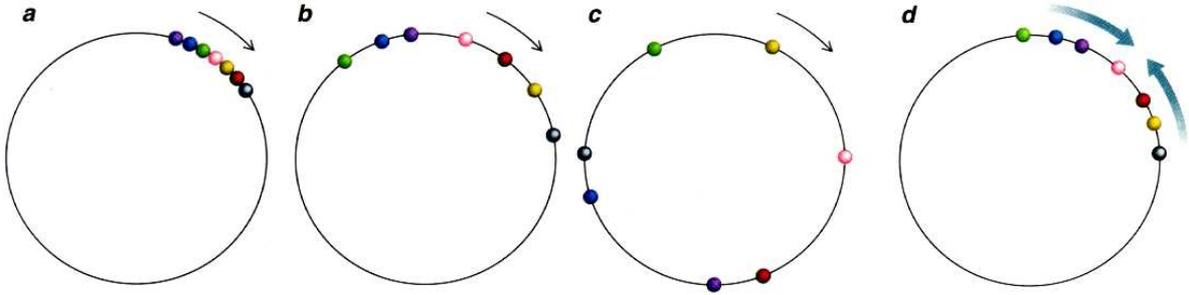
A aproximação de campo médio é obtida trocando  $N_k/z$  no argumento da exponencial de (3.1) pela probabilidade correspondente  $P_k$ , levando ao seguinte conjunto de equações:

$$\dot{P}_j = g_{j-1,j}P_{j-1} - g_{j,j+1}P_j, \quad (3.2)$$

onde agora

$$g_{j,j+1} = g \exp[a(P_{j+1} - P_j)]. \quad (3.3)$$

Essas, também, representam as equações para um grafo completo no limite  $N \rightarrow \infty$ : visto que  $z = N - 1$ , podemos trocar  $N_k/N$  por  $P_k$  no limite de tamanho infinito. A normalização reduz essas equações a um fluxo bidimensional no plano  $(P_1, P_2)$  (figura 3.2).



**Figura 3.3** Representação de osciladores de fase contínua. Os círculos representam o espaço de fase dos osciladores. Cada bolinha representa a fase em que cada oscilador está. Figura idêntica à original do artigo de Steven Henry Strogatz e Ian Stewart [Strogatz e Stewart, 1993]. No painel (a), os osciladores estão mais sincronizados do que no (b), que, por sua vez, estão mais sincronizados que no (c). No painel (d), os osciladores estão (pelo menos momentaneamente) sincronizando-se.

Partindo do parâmetro de ordem complexo

$$v \equiv \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N e^{i\phi_x}, \quad (3.4)$$

definimos as quantidades que caracterizam o comportamento coletivo do sistema. Note que  $v \in \mathbb{C}$  se anula caso os osciladores estiverem uniformemente distribuídos entre as três fases possíveis (veja a figura 3.3). Assim como fizeram Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] empregamos o assim chamado parâmetro de ordem de Kuramoto [Kuramoto, 1975, Strogatz e Stewart, 1993, Strogatz, 2000]

$$r \equiv \langle \langle |v| \rangle \rangle_t \quad (3.5)$$

como o parâmetro de ordem para sincronização [Pikovsky et al., 2001], onde  $\langle \rangle_t$  indica uma média temporal sobre uma realização única (no estado estacionário), e  $\langle \rangle_s$  uma média sobre as realizações independentes. Note que  $r > 0$  é consistente com, mas não necessariamente implica em, oscilações globalmente sincronizadas. Essas são caracterizadas por uma fase de  $v$  variando periodicamente (veja a figura 3.3).

Na aproximação de campo médio definida pelas equações (3.2), a transição de fase para o regime sincronizado é associada a uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $a = a_c = 1,5$ . Na figura 3.2, apresentamos os resultados para as soluções de campo médio do modelo no espaço de fase  $(P_1, P_2)$ . Nos painéis superiores (a), (c) e (e), mostramos as isóclinas e, nos inferiores (b), (d) e (f), as trajetórias correspondentes no campo médio e nas simulações de grafo completo para valores de  $a = 1,6$ ,  $a = 3$  e  $a = 3,25$ , respectivamente. O ponto fixo trivial  $\vec{P}_{1/3}^* \equiv (P_1 = 1/3, P_2 = 1/3)$  perde a estabilidade em  $a = a_c$ , e um ciclo-limite cercado esse ponto aparece [figura 3.2(a)-(b)] [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a].

Na figura 3.4, os painéis (a) e (b) mostram a evolução temporal de  $P_1$  para  $a = 1,6$  e  $a = 3$ , respectivamente. No painel (c), mostramos a dependência de  $r$  e da frequência angular  $\omega$  em  $a$ , exibindo duas transições de fase e, no (d), a variância escalada  $\chi_r$  versus  $a$ , mostrando os picos nas transições de fase. Para  $a \gtrsim a_c = 3,1024$ , as oscilações sustentadas em  $P_k$  caracterizam a sincronização entre os osciladores [figura 3.4(a)]. Correspondentemente,  $r$  cresce continuamente<sup>3</sup>

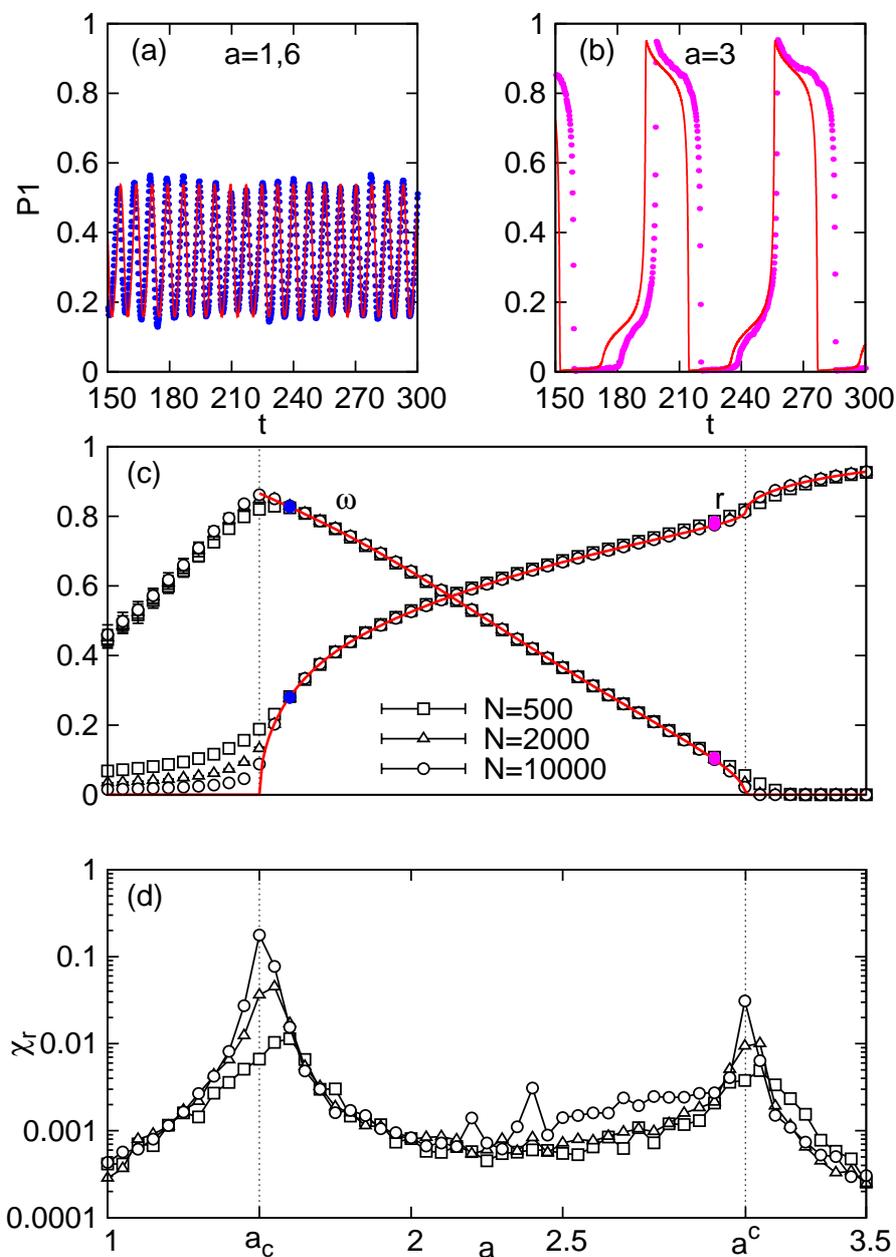
$$r \sim (a - a_c)^{\beta_c}, \text{ com } \beta_c = 1/2, \quad (3.6)$$

na transição [figura 3.4(c)]. Como não poderia deixar de ser, a relação (3.6) coincide com a relação do crescimento de um ciclo-limite em função do parâmetro de controle logo após uma bifurcação de Hopf supercrítica [Strogatz, 1997]. A variância escalada  $\chi_r \equiv L^d [\langle \langle |v| \rangle_t^2 \rangle_s - r^2]$  diverge com o tamanho do sistema na criticalidade, como mostrado para simulações de grafos completos na figura 3.4(d).

Note que a transição de fase para as oscilações globalmente sincronizadas está associada com a quebra de simetria contínua de translação temporal: as séries temporais  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  e  $P_3(t)$  tornam-se periódicas para  $a \gtrsim a_c$ , mas são estatisticamente idênticas, exceto por uma fase. Aumentar  $a$  acima de  $a_c$  melhora a sincronização entre os osciladores, levando ao aumento da amplitude das oscilações coletivas, como mostrado nas figuras 3.2(d) e 3.4(b).

Wood *et al.* [Wood et al., 2007b] descobriram que o aumento da amplitude das osci-

<sup>3</sup>Empregamos  $\beta_c$  para denotar o expoente crítico (em vez da notação usual,  $\beta$ ) para poder distingui-lo do expoente  $\beta^c$  na segunda transição de fase relatada.



**Figura 3.4** Os painéis (a) e (b) mostram a evolução temporal de  $P_1$  para  $a = 1,6$  e  $a = 3$ , respectivamente. Os pontos representam as simulações para um grafo completo com  $N = 10000$  enquanto as linhas mostram as soluções de campo médio. (c) Dependência de  $r$  e da frequência angular  $\omega$  em  $a$ , exibindo duas transições de fase. (d) Variância escalada  $\chi_r$  versus  $a$ , mostrando os picos nas transições de fase [tamanhos dos sistemas mostrados em (c)]. Para cada ponto nos gráficos dos painéis (c) e (d) deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 5000$  descontando um transiente de 2000 para tirar a média em cada execução. Os valores de  $a_c$  e  $a^c$  são 1,5 e 3,1024, respectivamente.

lações globais é acompanhado por uma diminuição da frequência angular<sup>4</sup>  $\omega$  das mesmas [figura 3.4(c)]. Isso pode ser entendido qualitativamente pela dependência exponencial das taxas (3.1) nas frações de vizinhos em cada estado: quando um estado é altamente povoado, a taxa com que os osciladores deixam esse estado torna-se muito pequena. Além disso, a taxa com que um estado altamente povoado atrai osciladores de seu antecessor é também muito alta.

Assim, estudamos o efeito de mais um aumento no acoplamento  $a$ , além da faixa de valores investigada em [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Na versão de campo médio e/ou grafo completo do modelo, quando  $a$  atinge um valor crítico superior  $a^c \simeq 3.1024$ , três bifurcações sela-nó simétricas ocorrem simultaneamente, e o período das oscilações coletivas diverge. Acima de  $a^c$ , há três atratores simétricos no sistema, e a simetria rotacional  $C_3$  (isto é, com invariância perante rotações por um ângulo  $2\pi/3$ ) é quebrada: a figura 3.2(f) ilustra como o destino de três trajetórias diferentes iniciando das mesmas condições iniciais é determinado por flutuações. Além disso, a transição de fase pode ser considerada reentrante, no sentido que a simetria contínua de translação temporal que foi quebrada em  $a_c$  é restaurada em  $a^c$ .

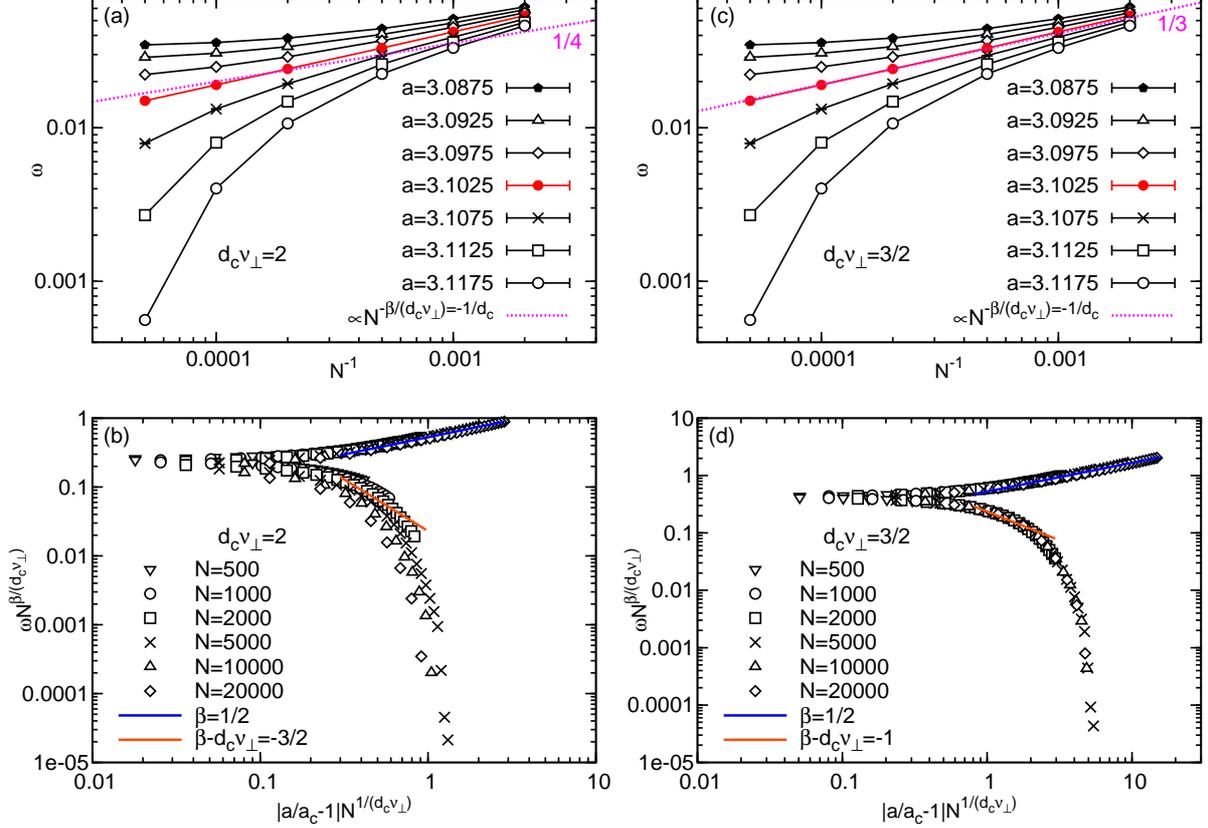
Analogamente ao que ocorre em uma condensação ou em uma transição de fase ferromagnética [Huang, 1987], o congelamento da ocupação relativa de cada estado não implica que os *osciladores individuais* congelaram também. As frequências dos *osciladores individuais* de fato diminuem com o aumento de  $a$ , mas anulam-se *somente* no limite  $a \rightarrow \infty$ , quando um dos estados é totalmente ocupado, cujo estado global correspondente (nesse caso, e *somente nesse caso*) é um estado absorvente.

Embora  $\chi_r$  atinja o ponto máximo em  $a = a^c$  *no grafo completo*, estimar o valor (não-nulo) de  $r$  na segunda transição de fase (que chamaremos de  $r^c$ ) é proibitivamente complexo, o que dificulta o uso das técnicas de escala de tamanho finito para identificar a classe de universalidade dessa transição. Pode-se empregar  $\omega$  como um parâmetro de ordem, visto que ele anula-se continuamente em  $a^c$ . Para o grafo completo (com dimensão  $d \rightarrow \infty$  por definição) é necessário modificar a relação de escala usual  $\omega = L^{-\beta^c/\nu_\perp} F(|a - a^c|L^{1/\nu_\perp})$  para  $a \approx a^c$  e  $L \gg 1$ , onde  $F(x)$  é uma função de escala e  $L$  seria o tamanho linear da rede<sup>5</sup>. Seguindo Brézin [Brézin, 1982], Jones e Young [Jones e Young, 2005], fazemos as seguintes transformações  $L \rightarrow L^{d/d_c}$  e aqui  $L^d \rightarrow N$  [Botet et al., 1982]. A escala de tamanho finito a partir das simulações em grafos completos usando  $\omega$  como o parâmetro

<sup>4</sup>Definimos, neste trabalho, a frequência angular como  $\omega \equiv 2\pi/T$ , onde  $T$  é o período de oscilações de  $P_1$ . Por sua vez, definimos o período  $T$  como o intervalo médio de tempo entre dois picos de  $P_1$ .

<sup>5</sup>Como comentado acima, utilizamos  $\beta^c$  para denotar o expoente crítico  $\beta$  na transição de fase de período infinito.

ordem nos dá expoentes compatíveis com a aproximação de campo médio, como mostrado na figura 3.5.



**Figura 3.5** Comportamento de escala de  $\omega$  e colapso com os expoentes críticos no grafo completo obtidos através da aplicação da teoria de escala de tamanho finito. Nos painéis (a) e (b) supomos  $d_c \nu_{\perp} = 2$  e nos painéis (c) e (d) supomos  $d_c \nu_{\perp} = 3/2$ . Para todos os dados dessa figura deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 2 \times 10^5$  e descontamos um transiente igual a  $2 \times 10^4$ .

Como a transição de fase estudada aqui é de período infinito, os nossos resultados podem depender fortemente do tempo  $t_{max}$  durante o qual deixamos o sistema evoluir. Assim, para produzir os gráficos da figura 3.5, que exigem alta precisão, usamos  $t_{max} = 2 \times 10^5$  descontando um transiente igual a  $2 \times 10^4$  para garantir resultados confiáveis, embora para  $t_{max} = 5000$  (sem preocupação com o transiente) obtivemos essencialmente os mesmos resultados, o que nos leva a crer que não há necessidade de aumentar  $t_{max}$  ainda mais. Além disso, se excluirmos os resultados para  $N = 20000$ , chegaremos às mesmas conclusões sobre os valores dos expoentes  $\beta$  e  $d_c \nu_{\perp}$ , ou seja, também não deve ser necessário fazer simulações em redes maiores.

A suposição mais óbvia de que  $\nu_{\perp} = 1/2$  (campo médio de Landau [Huang, 1987] e percolação direcionada [Marro e Dickman, 1999]) e  $d_c = 4$  (dimensão crítica superior dos modelos XY, de Ising e da percolação direcionada) é claramente incompatível com os nossos resultados em grafo completo [veja figuras 3.5(a) e (b)]. No entanto, a suposição de que  $d_c\nu_{\perp} = 3/2$  está em *grande concordância* com a escala de tamanho finito no grafo completo. Isso é constatado com muita segurança pelos resultados *auto-consistentes*<sup>6</sup> das figuras 3.5(c) e (d) [Botet et al., 1982].

O valor do expoente  $\beta^c = 1/2$  usado na figura 3.5 se ajusta bem no colapso independentemente dos valores de  $d_c\nu_{\perp}$  empregados. Esse expoente pode ser determinado a partir do comportamento de  $\omega$  nas equações de campo médio logo antes da bifurcação. Observe que o  $\beta^c$  de campo médio neste caso é o expoente com que o período de oscilação diverge numa bifurcação de período infinito

$$2\pi/\omega \sim (a^c - a)^{-\beta^c}, \text{ onde } \beta^c = 1/2. \quad (3.7)$$

Podemos deduzir a equação acima lembrando que a bifurcação de período infinito nada mais é que uma bifurcação sela-nó no ciclo-limite. Considere uma direção  $x$  do espaço de fase tangente ao ciclo-limite no ponto ( $x = 0$ ) onde acontece a bifurcação sela-nó e seja  $\Delta$  a distância no espaço de parâmetros da bifurcação sela-nó. Para  $0 < \Delta \ll 1$  podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\dot{x} \approx \Delta + x^2.$$

Como o sistema passa muito mais tempo no gargalo da bifurcação sela-nó do que no resto do espaço de fase podemos fazer mais esta aproximação:

$$T_{\text{gargalo}} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Delta + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

onde  $T_{\text{gargalo}}$  é o tempo que o sistema passa perto do gargalo (que é o tempo dominante no período do ciclo-limite). Trocando  $T_{\text{gargalo}}$  por  $2\pi/\omega$  e fazendo  $\Delta = a^c - a$ , recuperamos a equação (3.7) [Strogatz, 1997].

O valor de  $\nu_{\perp}$  de campo médio não é óbvio para a TFPI, embora seja razoável esperar que seja mesmo  $1/2$ , pois esse é o valor de  $\nu$  (de equilíbrio) extraído da teoria de Landau [Huang, 1987] e é também o valor de  $\nu_{\perp}$  de campo médio na percolação direcionada [Marro e Dickman, 1999]. Entretanto, se  $\nu_{\perp}$  for realmente  $1/2$ , a dimensão crítica superior será  $d_c = 3$  [Botet et al., 1982]. Como a transição de fase para a sincronização

---

<sup>6</sup>Veja o *excelente* colapso da figura 3.5(d).

é necessária para a ocorrência da TFPI, nesse caso *não haverá expoentes não-triviais nessa transição de fase*, visto que não há transição de fase para as oscilações globais para  $d < 3$ . Além disso, se substituirmos na relação de hiperescala ( $\gamma = d\nu_{\perp} - 2\beta^e$ ) (veja a equação (1.4) [Marro e Dickman, 1999, Ódor, 2008]) os valores que encontramos pelo colapso de dados [figuras 3.5(c) e (d)] de  $\beta^e$  e  $d_c\nu_{\perp}$ , encontraremos que  $\gamma = 1/2$ , que não coincide com o  $\gamma$  de Landau ( $\gamma = 1$ ) [Huang, 1987] nem com o de campo médio da percolação direcionada ( $\gamma = 0$ ) [Marro e Dickman, 1999]. Assim, tentamos encontrar o valor do expoente  $\gamma$  no grafo completo usando a teoria de escala de tamanho finito para  $\chi_{\omega}$  como um teste de auto-consistência, mas não chegamos a resultados conclusivos. Provavelmente é necessário realizar simulações em redes ainda maiores para isso.

### 3.2.2 Simulações em redes hipercúbicas quadridimensionais

Uma vez que os resultados das simulações em grafos completos nos sugerem que a dimensão crítica superior pode ser  $d_c = 3$ , devemos testar essa hipótese encontrando os valores dos expoentes críticos da TFPI em três dimensões. Como os nossas primeiras simulações em redes regulares não nos deu qualquer sinal de que a TFPI ocorre na rede tridimensional, resolvemos testar se a mesma ocorre ao menos em quatro dimensões com os resultados mostrados na figura 3.6. No painel (a), mostramos  $\omega$  versus  $a$ , no painel (b):  $q_{\infty}$  versus  $a$ , no painel (c):  $\chi_{q_{\infty}}$  versus  $a$  e no (d): a extrapolação em  $L$  dos valores de  $a$  correspondentes aos picos de  $\chi_{q_{\infty}}$ . Contudo, os resultados das simulações em redes hipercúbicas quadridimensionais (assim como os das simulações em redes tridimensionais) exibem um comportamento anômalo no parâmetro de ordem  $\omega$  [figura 3.6(a)] que nos trouxe sérias dúvidas sobre a existência da TFPI em redes hipercúbicas. Resultados preliminares das simulações em redes tridimensionais indicam que, se há TFPI para essa dimensionalidade da rede, ela deve ocorrer para  $a^c$  consideravelmente grande. Por isso, resolvemos testar se ao menos em quatro dimensões essa transição de fase ocorre.

Como podemos ver na figura 3.6(a), o parâmetro de ordem  $\omega$  *crece* ao invés de diminuir com aumento do tamanho da rede! Além disso, para cada tamanho de rede, quando o valor de  $a$  ultrapassa um certo limiar,  $\omega$  torna-se identicamente igual a zero por causa do efeito de tempo finito. Para tentar contornar esses problemas, empregamos um outro parâmetro de ordem que detectaria a quebra da simetria  $C_3$ ,

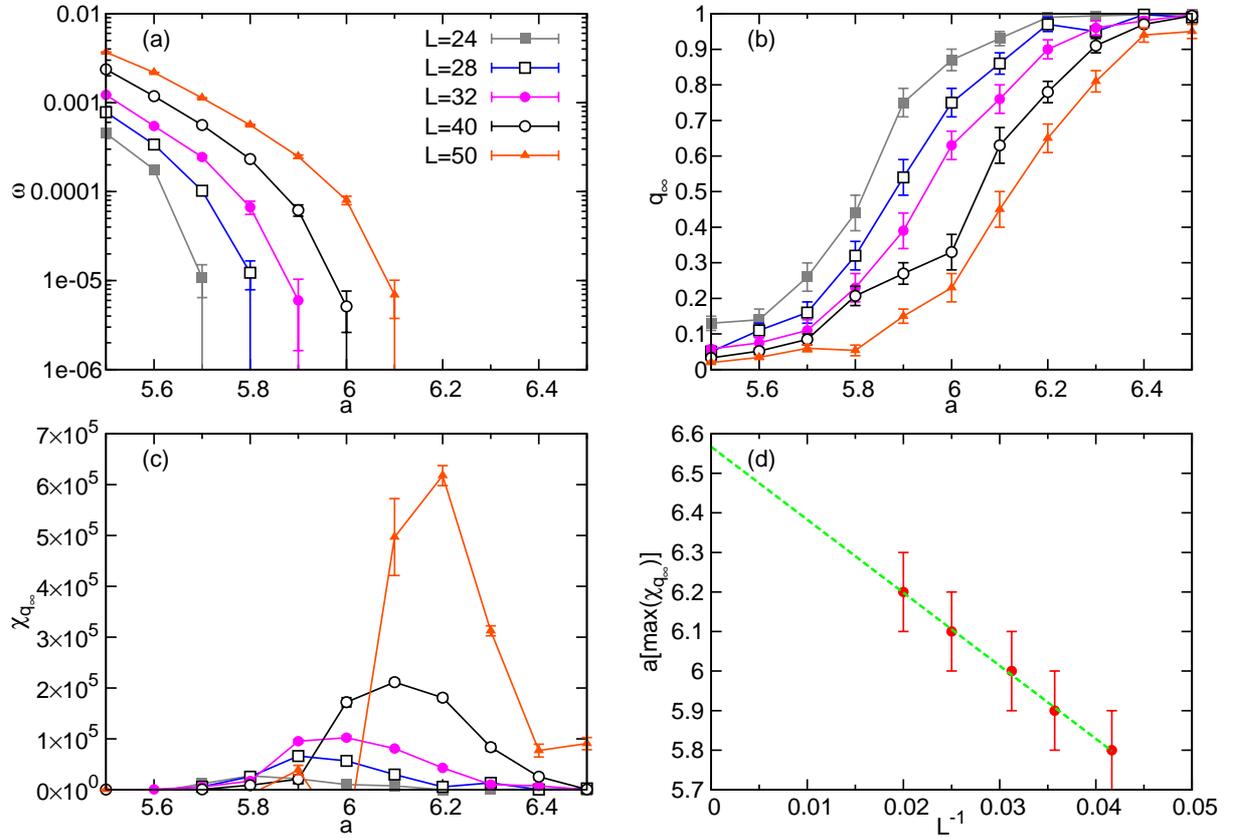
$$q = \langle |\langle v \rangle_t| \rangle_s, \quad (3.8)$$

e a sua variância escalada  $\chi_q = L^d [\langle |\langle v \rangle_t|^2 \rangle_s - q^2]$ . A média temporal  $\langle v \rangle_t$  se anula

abaixo de  $a = a_c$  pelas mesmas razões que  $r$  se anula. Visto que as oscilações coletivas têm séries temporais periódicas, para  $a_c < a < a^c$  esperamos que  $\langle v \rangle_t$  continue igual a zero, enquanto  $r$  é não-nulo. Acima de  $a^c$ , tanto  $q$  como  $r$  devem ser não-nulos. Note que, na transição, é de se esperar que  $q$  salte de zero para um valor  $q^c \approx r^c$  (veja a figura 3.3).

Na prática, o parâmetro  $q$  já começa a ter valores razoáveis mesmo quando as oscilações globais possuem frequência não-nula bem definida. Como isso acontece por causa do efeito de tempo finito<sup>7</sup>, empregamos uma extrapolação nos tempos de modo análogo à usada no capítulo 2. Mesmo assim, os valores de  $a$  onde acontecem as subidas de  $q_\infty$  [figura 3.6(b)] parecem ser inconsistentes com os valores de  $a$  onde  $\omega$  vai a zero [figura 3.6(a)].

<sup>7</sup>Os resultados são visivelmente melhores quanto maior for o tempo empregado nas séries temporais.



**Figura 3.6** Resultados de simulações na rede quadridimensional. (a)  $\omega$  versus  $a$ . Para os dados desse painel, após um transiente igual a  $1,5 \times 10^4$ , deixamos o sistema evoluir por um tempo  $t_{max} = 1,5 \times 10^5$ . (b)  $q_\infty$  versus  $a$ . (c)  $\chi_{q_\infty}$  versus  $a$ . Para os dados dos painéis (b) e (c) foram feitas extrapolações análogas às do capítulo 2, onde os tempos usados aqui foram  $7, 29 \times 10^4$ ,  $8, 1 \times 10^4$ ,  $9 \times 10^4$ ,  $10^5$ ,  $1, 25 \times 10^5$  e  $1, 5 \times 10^5$ . (d) Extrapolação em  $L$  dos valores de  $a$  correspondentes aos picos de  $\chi_{q_\infty}$ .

Todavia, os valores de  $a$  onde acontecem os picos em  $\chi_{q_\infty}$  [figura 3.6(c)] são compatíveis com os resultados da figura 3.6(a). Desse modo, fazemos uma extrapolação desses valores de  $a$  com o tamanho da rede [figura 3.6(d)]. Essa última extrapolação nos sugere que existe um valor finito de  $a$  tal que a partir dele não há oscilações globais no limite termodinâmico. Infelizmente, isso não comprova a existência da TFPI em quatro dimensões, pois não temos uma teoria bem fundamentada que sustente a nossa extrapolação, ou seja, nada garante que ao usarmos tempos ainda maiores não teremos ainda mudanças relevantes.

### 3.3 CONCLUSÕES

Estudamos a primeira versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b] e confirmamos o que eles já haviam relatado que a frequência das oscilações globais é monotonicamente decrescente com acoplamento desde o aparecimento delas. Além disso, observamos uma bifurcação de período infinito nas equações de campo médio, que prevê que a frequência das oscilações globais irá a zero num acoplamento crítico superior. Essa previsão é confirmada qualitativamente e *quantitativamente* nas simulações de grafo completo. Além de confirmar a correção dos cálculos de campo médio, os resultados das simulações de grafo completo nos cedem pelo menos um expoente crítico e/ou a dimensão crítica superior incompatíveis com a teoria de Landau [Huang, 1987] e com a percolação direcionada [Marro e Dickman, 1999]. Embora os expoentes encontrados no grafo completo sejam compatíveis com dimensão crítica superior igual a três (desde que se aceite que  $\nu_\perp = 1/2$  no campo médio) [Botet et al., 1982], não conseguimos observar a segunda transição de fase mesmo nas redes quadridimensionais. É importante encontrarmos o  $\gamma$  no grafo completo e os expoentes críticos em alguma rede hipercúbica para a verificação da autoconsistência dos expoentes encontrados e para a confirmação direta da dimensão crítica superior, respectivamente. No próximo capítulo, estudaremos uma generalização do modelo aqui estudado que nos permite transformar os osciladores em elementos excitáveis, voltando assim para o assunto principal desta tese.

# UM MODELO DE OSCILADORES ESTOCÁSTICOS NÃO-UNIFORMES ACOPLADOS POR FASE NÃO-LINEARMENTE

Como a nossa primeira tentativa não foi bem sucedida em dar-nos o efeito coletivo procurado nesta Tese, neste capítulo, fazemos nossa segunda tentativa de encontrar um modelo markoviano em tempo contínuo com um estado absorvente que apresente transição de fase para sincronização. Para tentar encontrar um exemplo de tais modelos, fazemos uma pequena modificação no simples modelo markoviano em tempo contínuo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], que tem uma fase coletivamente sincronizada. Devido a esse ajuste, podemos transformar continuamente os osciladores uniformes do modelo original em elementos excitáveis. Verificamos que, mesmo antes que os osciladores tornem-se elementos excitáveis, não há mais transição de fase para sincronização, ou seja, não há mais oscilações globais estáveis.

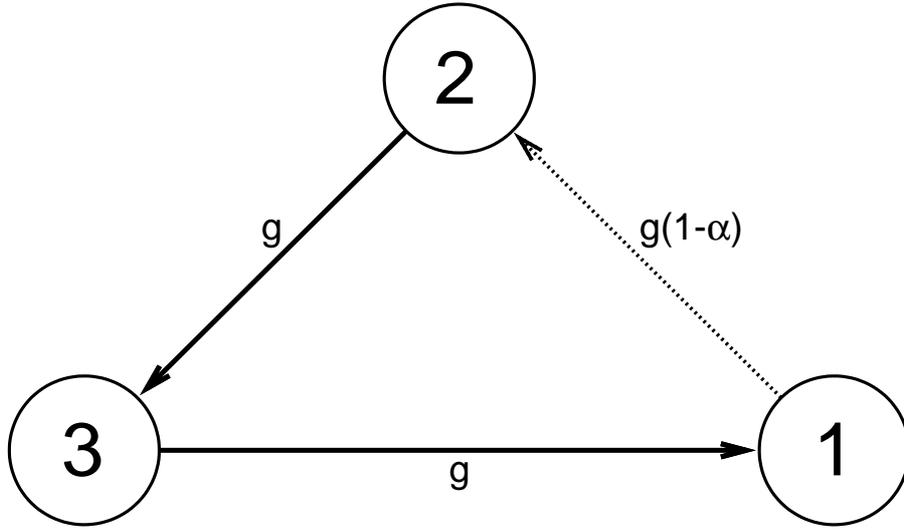
## 4.1 DEFINIÇÃO DO MODELO

Cada unidade  $x$  ( $x = 1, \dots, N$ ) é representada por uma fase  $\phi_x$ , que pode estar em um dos três estados:  $\phi_x = (i_x - 1)\pi/3$ , onde  $i_x \in \{1, 2, 3\}$  (como ilustrado na figura 4.1). Quando a unidade está isolada, as taxas de transição são:

$$\begin{aligned}
 1 &\longrightarrow 2 && \text{com taxa } g(1 - \alpha), \\
 2 &\longrightarrow 3 && \text{com taxa } g, \\
 3 &\longrightarrow 1 && \text{com taxa } g.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

O parâmetro  $\alpha$  controla a não-uniformidade (média) dos osciladores desacoplados. Para  $\alpha = 0$  recuperamos os osciladores uniformes empregados por Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Para  $0 < \alpha < 1$ , contudo, cada oscilador tende a demorar mais tempo no estado 1 do que nos outros estados, o que seria uma versão estocástica de um oscilador não-uniforme (tal como, por exemplo, um pêndulo supera-

mortecido sob os efeitos da gravidade e de um torque constante aplicado [Strogatz, 1997]). Para  $\alpha = 1$ , uma unidade *isolada* permanece no estado 1 eternamente (embora ela será capaz de deixar esse estado quando acoplada a outras unidades, veja abaixo). A frequência angular média das unidades desacopladas é  $\omega = 2\pi g(1 - \alpha) / (3 - \alpha)$ , que vai a zero continuamente em  $\alpha = 1$ . Isso é qualitativamente similar ao que é observado no cenário de bifurcação de modelos de neurônio tipo-I [Koch e Segev, 1998]. Então, quando  $\alpha = 1$  as unidades tornam-se excitáveis.



**Figura 4.1** Representação gráfica das taxas de transição do modelo para uma única unidade *isolada*.

O acoplamento entre as unidades é essencialmente o mesmo que o usado por Wood *et al.* nas referências [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], exceto pelo parâmetro  $\alpha$  que controla a não-uniformidade na transição do estado 1 para o estado 2:

$$\begin{aligned}
 1 \longrightarrow 2 \quad \text{com taxa} \quad g_{1,2} \left( \frac{N_2}{k}, \frac{N_1}{k} \right) &= g \left\{ e^{[a(N_2 - N_1)]/k} - \alpha e^{(-aN_1)/k} \right\}, \\
 2 \longrightarrow 3 \quad \text{com taxa} \quad g_{2,3} \left( \frac{N_3}{k}, \frac{N_2}{k} \right) &= g e^{[a(N_3 - N_2)]/k}, \\
 3 \longrightarrow 1 \quad \text{com taxa} \quad g_{3,1} \left( \frac{N_1}{k}, \frac{N_3}{k} \right) &= g e^{[a(N_1 - N_3)]/k},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde a taxa  $g$  pode ser definida para ser unitária sem perda de generalidade,  $a$  é o parâmetro de acoplamento,  $N_i$  é o número de vizinhos no estado  $i$  e  $k$  é o número total de

vizinhos. Assim, para  $\alpha = 0$  o modelo original de Wood *et al.* é recuperado, enquanto que para  $\alpha = 1$  o sistema tem um único estado absorvente (todas as unidades no estado 1).

## 4.2 RESULTADOS

### 4.2.1 Análise de campo médio

Seja  $g_{i,j}$  a taxa de transição do estado  $i$  para o estado  $j$ , dada por (4.2), onde  $i$  e  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Na aproximação de campo médio, esse modelo é descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{P}_1 = g_{3,1}(P_3, P_1)P_3 - g_{1,2}(P_1, P_2)P_1, \quad (4.3)$$

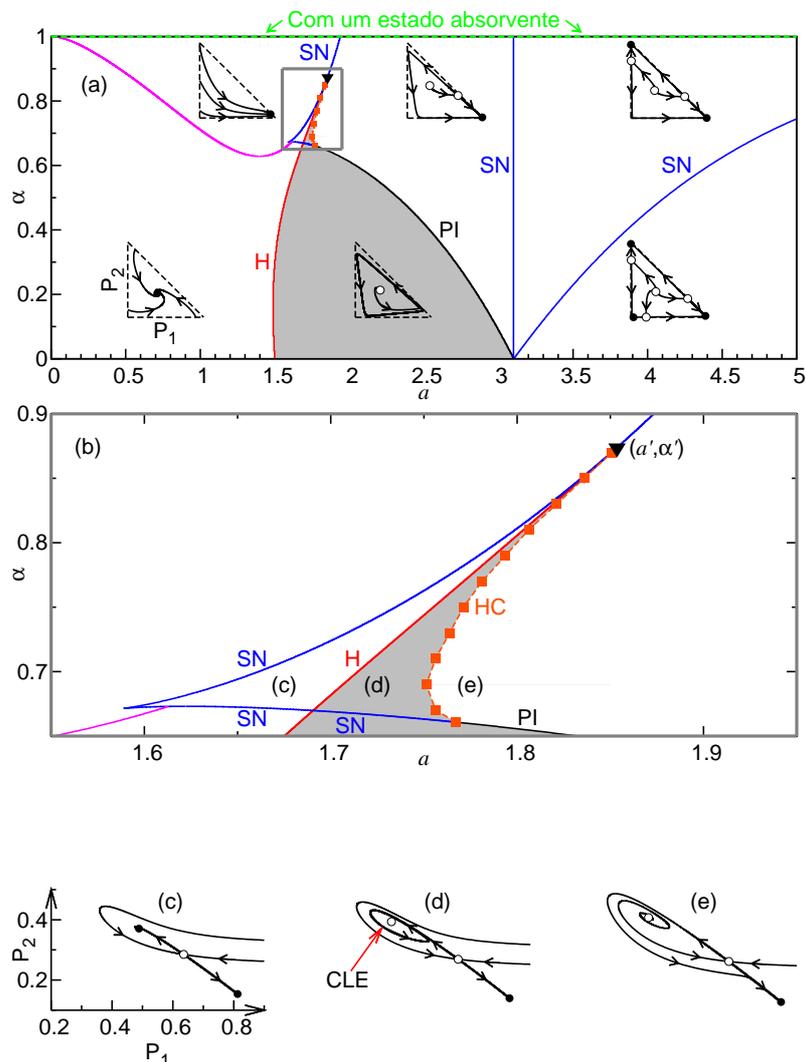
$$\dot{P}_2 = g_{1,2}(P_1, P_2)P_1 - g_{2,3}(P_2, P_3)P_2, \quad (4.4)$$

$$\dot{P}_3 = g_{2,3}(P_2, P_3)P_2 - g_{3,1}(P_3, P_1)P_3. \quad (4.5)$$

Essa descrição também coincide com as equações para um grafo completo no limite  $N \rightarrow \infty$  com a suposição inerente de que podemos trocar  $N_i/N$  por  $P_i$ . A normalização ( $P_3 = 1 - P_1 - P_2$ ) reduz essas equações a um fluxo bidimensional no plano  $(P_1, P_2)$ .

Começamos analisando o diagrama de bifurcação das equações de campo médio (4.3)-(4.5) no plano de fase  $(P_1, P_2)$ , que é restrito ao triângulo  $0 \leq P_1 \leq 1$ ,  $0 \leq P_2 \leq 1$ , e  $0 \leq P_1 + P_2 \leq 1$ . A figura 4.2 mostra o diagrama de fases no espaço  $a \times \alpha$ . No painel superior, temos o diagrama de fases com as fases caracterizadas por retratos de fase. No painel central, mostramos detalhes perto da linha homoclínica. No painéis inferiores, mostramos os retratos de fase para os parâmetros marcados no painel (b).

Como mostrado na figura 4.2, o caso de osciladores uniformes (onde o sistema tem uma simetria  $C_3$  perfeita) mostra, com o aumento de  $a$  na linha  $\alpha = 0$ , as duas bifurcações que foram relatadas no capítulo 3. Primeiro [Wood et al., 2006b], em  $a = a_c = 1.5$ , uma bifurcação de Hopf supercrítica ocorre, acima da qual o ponto fixo simétrico  $(P_1^*, P_2^*) = (1/3, 1/3)$  perde estabilidade e oscilações coletivas estáveis emergem [um ciclo-limite no plano de fase  $(P_1, P_2)$ ]. Aumentando mais o acoplamento  $a$ , a frequência dessas oscilações globais decresce continuamente com o crescimento do ciclo-limite. Para grandes valores de  $a$ , a forma do ciclo-limite torna-se menos circular, aproximando-se das bordas do triângulo, e oscilações globais tornam-se altamente não-harmônicas, com uma fração finita dos osciladores coletivamente demorando um longo tempo em cada um dos três estados antes de ir para o próximo estado em uma escala de tempo muito curta. Em  $a = a^c \simeq 3.102$ , três bifurcações sela-nó (SN) ocorrem simultaneamente no ciclo-



**Figura 4.2** (a) Diagrama de fases com fases caracterizadas por retratos de fase. Os triângulos marcam o contorno da região fisicamente aceitável  $0 \leq P_1 \leq 1$ ,  $0 \leq P_2 \leq 1$  e  $0 \leq P_1 + P_2 \leq 1$ . Abaixo (acima) da linha rosa o ponto fixo estável é uma espiral (nó). As linhas restantes representam bifurcações nas equações de campo médio (4.3)-(4.5): bifurcação de Hopf (H—vermelha), bifurcação sela-nó (SN—azul) e bifurcação de período infinito (PI—preta). Os quadrados indicam a linha de bifurcação homoclínica (HC). O triângulo preto indica o ponto  $(a', \alpha')$  de encontro das linhas HC, H e SN, onde  $a' = 1.853579$  e  $\alpha' = 0.873612$ . A linha tracejada (verde) no topo do painel (em  $\alpha = 1$ ) marca a região do espaço de parâmetros onde há um único estado absorvente (mas não necessariamente o único atrator, veja texto para mais detalhes). Só há ciclo-limite na região cinza. (b) Ampliação do painel (a) mostrando detalhes perto da linha homoclínica. Painéis (c), (d) e (e) mostram os retratos de fase para os parâmetros marcados no painel (b), veja também figura 4.4. CLE = ciclo-limite estável.

limite, correspondendo a uma transição de período infinito em que a simetria  $C_3$  é quebrada (visto que três atratores são criados — veja o capítulo 3). Como notado anteriormente [Wood et al., 2007b], essa segunda transição é um tanto quanto artificial da perspectiva de modelos mais realistas, para os quais espera-se (e observa-se) que os osciladores fiquem numa frequência independente do acoplamento. Contudo, ela é muito interessante da perspectiva de transições de fase de não-equilíbrio de sistemas de partículas interagentes, visto que fornece uma quebra espontânea de simetria  $C_3$  na ausência de estado absorvente (de modo destoante dos modelos com três estados absorventes, a exemplo dos jogos pedra-papel-tesoura [Tainaka, 1988, Tainaka, 1989, Tainaka e Itoh, 1991, Tainaka, 1994, Itoh e Tainaka, 1994]).

Para  $\alpha > 0$ , a simetria  $C_3$  não está mais presente. De fato, mesmo para  $\alpha$  arbitrariamente pequeno, a bifurcação de Hopf é seguida (com o aumento de  $a$ ) por uma transição de período infinito que ocorre devido a uma única bifurcação SN [de modo destoante da tripla bifurcação SN para  $\alpha = 0$ , veja figura 4.2(a)]. Acima do valor de  $a$  onde essa transição ocorre, as oscilações coletivas desaparecem porque as unidades tendem a condensar no estado 1, que é favorecido pela não uniformidade do modelo (veja figura 4.1). Aumentando mais o parâmetro  $a$ , uma outra bifurcação SN ocorre [figura 4.2(a)], em que um valor de  $P_2^* > 1/3$  torna-se um segundo ponto fixo estável do modelo (ou seja, o estado 2, que vem logo depois do 1, agora também pode atrair os osciladores). Finalmente, para valores maiores ainda de  $a$ , uma terceira bifurcação SN ocorre e  $P_3^* > 1/3$  torna-se um terceiro atrator. Com três atratores, o espaço de fase é similar ao que foi observado para  $\alpha = 0$ , exceto que as bacias de atração têm tamanhos diferentes: se  $B_i$  é o tamanho da bacia de atração da solução com  $P_i^* > 1/3$ , então  $B_1 > B_2 > B_3$  para  $\alpha > 0$ .

Vamos agora abordar os efeitos mais fortes da não-uniformidade do modelo. Ainda para  $\alpha$  pequeno porém não-nulo, considere primeiro a parte mais à esquerda da figura 4.2(a), ou seja, para valores do acoplamento  $a$  que são pequenos demais para gerar oscilações coletivas sustentadas. Nesse regime, o único atrator é uma espiral estável, que para  $\alpha = 0$  é simétrica:  $(P_1^*, P_2^*) = (1/3, 1/3)$ . Aumentando  $\alpha$ , essa espiral desloca-se em direção a valores maiores de  $P_1^*$ . Enfim, a parte imaginária dos autovalores do ponto fixo anula-se e ele torna-se um nó [linha rosa na figura 4.2(a)]. Somente quando  $\alpha = 1$ , o nó alcança  $P_1^* = 1$ , que é então (e somente então) um estado absorvente [figura 4.2(a), linha verde tracejada).

Note que a linha de bifurcação de período infinito termina no início das linhas de bifurcação SN e de bifurcação homoclínica [figura 4.2(b)]. Como veremos abaixo, isso não acontece por mera coincidência, mas sim por haver uma intrínseca relação de interde-

pendência entre essas três bifurcações. Uma bifurcação de período infinito é devida a uma bifurcação SN. Por outro lado, a bifurcação homoclínica é um tipo de bifurcação *de período infinito*, visto que o período do ciclo-limite também diverge nesse caso [Strogatz, 1997]. A diferença entre a bifurcação de período infinito propriamente dita e a bifurcação homoclínica é que, na primeira, uma sela surge (junto com um nó, é claro) no ciclo-limite, enquanto que, na última, o ciclo-limite cresce até alcançar uma sela (no caso deste modelo, surgida anteriormente de uma bifurcação SN), transformando-se numa órbita *homoclínica* [Strogatz, 1997].

Agora, o que acontece se nós começarmos a partir de um regime com oscilações coletivas ( $a > a_c \equiv a_c(\alpha = 0)$ ,  $\alpha \gtrsim 0$ ) e aumentarmos a não-uniformidade dos osciladores do sistema, mantendo  $a$  constante? Responder essa pergunta é o nosso principal objetivo neste capítulo. A resposta depende de qual é o valor de  $a$  que vamos fixar, mas, de qualquer maneira, aumentar essa não-uniformidade sempre levará à destruição do ciclo-limite em algum  $\alpha \leq \alpha' < 1$  [figura 4.2(b)]. No entanto, o modo em que o ciclo-limite será extinto depende mesmo do valor de  $a$  em que isso acontecerá. Se fixarmos um valor de  $a$  muito próximo de  $a_c$ , o tamanho do ciclo-limite diminuirá continuamente com o aumento de  $\alpha$  até anular-se em uma bifurcação de Hopf supercrítica. Se o valor fixado de  $a$  for suficientemente próximo de  $a^c \equiv a^c(\alpha = 0)$ , o ciclo-limite será destruído pelo aumento de  $\alpha$  através uma bifurcação de período infinito.

Existem valores intermediários de  $a$  em que o caminho para a aniquilação do ciclo-limite pelo crescimento da não-uniformidade é mais tortuoso [veja figura 4.2(b)]. Há um ponto no espaço de parâmetros  $(a, \alpha) = (a_c < a' < a^c, 0 < \alpha' < 1)$  onde a linha da bifurcação de Hopf termina [representado por um triângulo preto nas figuras 4.2(a) e (b)]. Para qualquer  $a \in (a_c, a')$ , aumentar  $\alpha$  levará à extinção do ciclo-limite através de uma bifurcação de Hopf [veja figuras 4.2(a) e (b)]. Contudo, para  $a \lesssim a'$ , antes de encontrar sua morte final, o ciclo-limite é desfeito por uma bifurcação de período infinito, mas ressurgue por meio de uma bifurcação homoclínica, até desaparecer pela última vez em uma bifurcação de Hopf [veja figura 4.2(b)]. Existe também uma pequena reentrância na bifurcação homoclínica [figura 4.2(b)], de modo que para qualquer valor de  $a$  nesse curto intervalo, o crescimento de  $\alpha$  leva a destruição e recriação do ciclo-limite por bifurcações homoclínicas. Finalmente, para valores de  $a$  um pouco abaixo do intervalo do caso anterior acontece uma bifurcação SN levando ao retrato de fase da figura 4.2(d), antes do ciclo-limite ser aniquilado por uma bifurcação de Hopf [veja figura 4.2(b)].

Se fixarmos  $\alpha$  em um valor maior que  $\alpha'$  e variarmos o parâmetro  $a$  começando de valores menores que  $a'$ , inicialmente teremos apenas um nó estável com  $P_1^* \approx 1$  (para  $\alpha = 1$

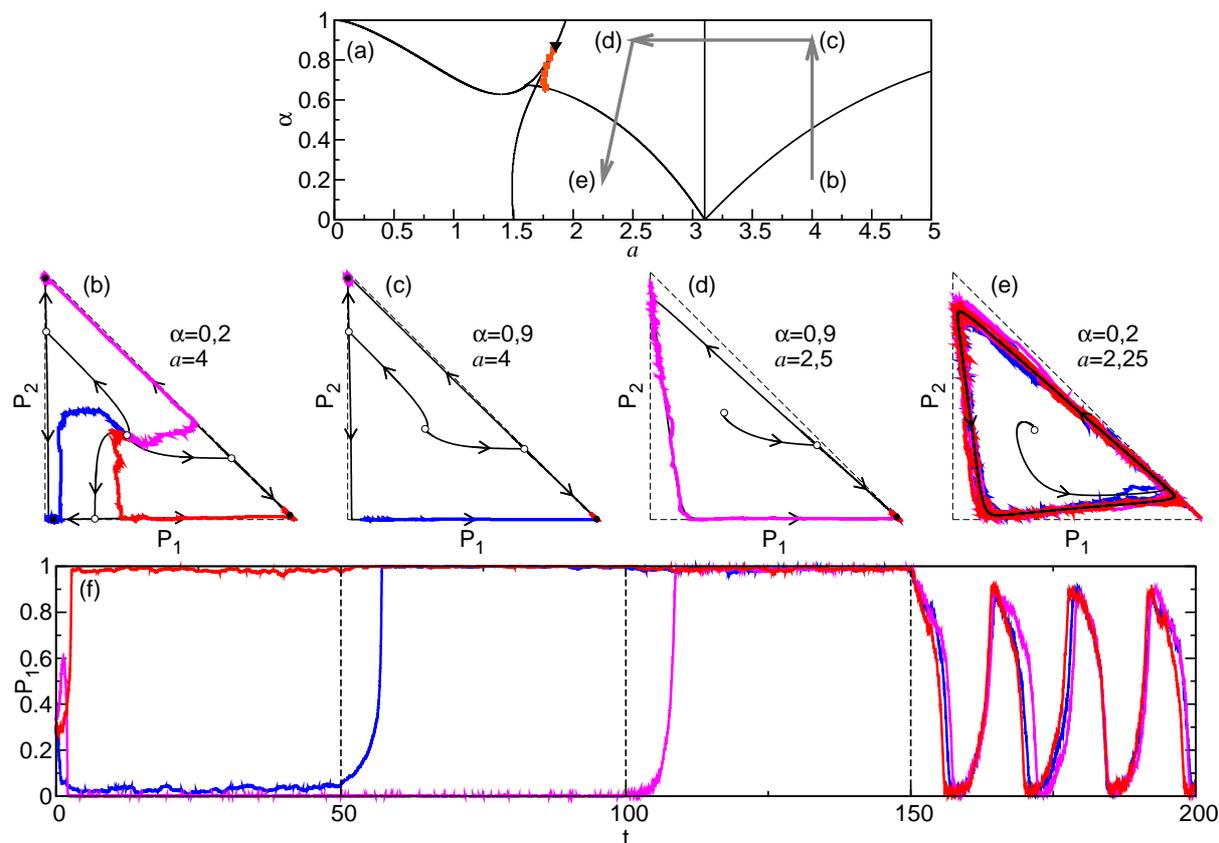
teremos  $P_1^* = 1$ , que corresponderá ao estado absorvente). A cada vez que  $a$  passar de um certo valor, acontecerá uma bifurcação SN, sendo que a primeira será com um nó instável (que após um aumento extremamente pequeno de  $a$  transformar-se-á numa espiral) [figura 4.2(a)]. Após a terceira bifurcação SN, o sistema terá três atratores com um retrato de fase do mesmo tipo que o da figura 4.3(b). É importante ressaltar que, além das três bifurcações SN citadas, nenhuma outra bifurcação acontece para  $\alpha > \alpha'$ .

### 4.2.2 Simulações em grafos completos

Como foi dito na subseção 4.2.1, os cálculos de campo médio são exatos por definição para o grafo completo no limite termodinâmico. Por completude, vamos estudar agora os efeitos de flutuações em redes de tamanho finito. Como não há ciclo-limite estável no regime em que as unidades são elementos excitáveis (na verdade, basta que  $\alpha \geq \alpha'$ ) mesmo nas equações de campo médio, então não deve existir esperança de que apareça oscilações globais estáveis nas simulações nesse regime. Portanto, é justo que se pergunte por que ainda insistimos em realizar simulações de Monte Carlo. A resposta não é difícil de compreender: dependendo da solução estacionária de campo médio, devem haver oscilações estocásticas (como as encontradas por Risau-Gusman e Abramson [Risau-Gusman e Abramson, 2007]) em qualquer rede finita. Além disso, há um efeito devido à multiestabilidade que só aparece na presença de flutuação. Mais especificamente, quando há multiestabilidade, algumas soluções previstas para serem estáveis na aproximação de campo médio mostram-se *instáveis* nas simulações de Monte Carlo para qualquer rede finita (até onde observamos, é claro), mesmo no grafo completo.

Primeiro, vamos tratar dos efeitos das flutuações em redes de tamanho finito em um cenário onde há multiestabilidade, iniciando o sistema perto de uma solução estacionária instável. Iniciamos o sistema com valores dos parâmetros de controle onde há triestabilidade com a condição inicial na interseção das bacias de atração das três soluções estáveis [figura 4.3(b)] para várias realizações independentes. Mostramos na figura 4.3(b) três amostras típicas que convergem para cada um dos atratores. É importante salientar que não fomos nós que determinamos para qual atrator cada amostra convergiu, mas sim as flutuações. A única coisa que escolhemos foram quais amostras iríamos exibir. A seguir, o comportamento qualitativo do sistema mostrado na figura 4.3 não dependerá mais das flutuações.

Segundo, depois que cada amostra já estava no seu respectivo estado estacionário, aumentamos  $\alpha$  descontinuamente sem interrupção nas simulações para extinguir um dos atratores. Conseqüentemente, a amostra que estava em torno do atrator recém extinto



**Figura 4.3** Retratos de fase e resultados de simulações para um grafo completo com  $N = 500$ . A cada 50 unidades de tempo, os parâmetros do modelo são alterados de modo a eliminar uma solução estável. (a) Diagrama de fase com rótulos para indicar os lugares no espaço de parâmetros correspondente aos retratos de fase (b)-(e) e setas para mostrar a ordem dos saltos nos valores dos parâmetros de controle. (b) Retrato de fase para  $\alpha = 0,2$  e  $a = 4$ . As três amostras das simulações começam no ponto fixo instável perto do centro do triângulo, então cada uma converge para um atrator diferente devido às flutuações. (c) Retrato de fase para  $\alpha = 0,9$  e  $a = 4$ . Durante as simulações, alteramos o parâmetro  $\alpha$  para o valor deste retrato de fase. Assim, um dos atratores desaparece, então a amostra que estava em torno desse converge para o ponto fixo estável da bacia de atração onde essa amostra está agora. Obviamente, as outras duas amostras continuam em torno dos respectivos atratores delas. (d) Retrato de fase para  $\alpha = 0,9$  e  $a = 2,5$ . Mais um atrator desaparece, então novamente acontece o que foi mostrado no caso do painel (c). Assim, a amostra que estava isolada converge para o atrator restante. (e) Retrato de fase para  $\alpha = 0,2$  e  $a = 2,25$ . Finalmente, o ponto fixo estável restante desaparece, então as três amostras oscilam quase juntas (a menos de flutuações). O painel (f) mostra as séries temporais para as trajetórias simuladas mostradas nos painéis (b), (c), (d), e (e), nessa ordem no tempo.

converge para a solução estável da bacia de atração onde essa amostra passa a se encontrar. Isso acontece enquanto as outras duas amostras acompanham o pequeno desloca-

mento dos seus respectivos atratores [figura 4.3(c)].

Terceiro, de maneira análoga ao caso anterior, diminuimos  $a$  descontinuamente para suprimir o atrator da amostra isolada, de modo que essa vai para o último (e único) atrator restante, que novamente sofreu um pequeno deslocamento. Assim, todas as amostras passam a ter o mesmo comportamento a menos de flutuações [figura 4.3(d)].

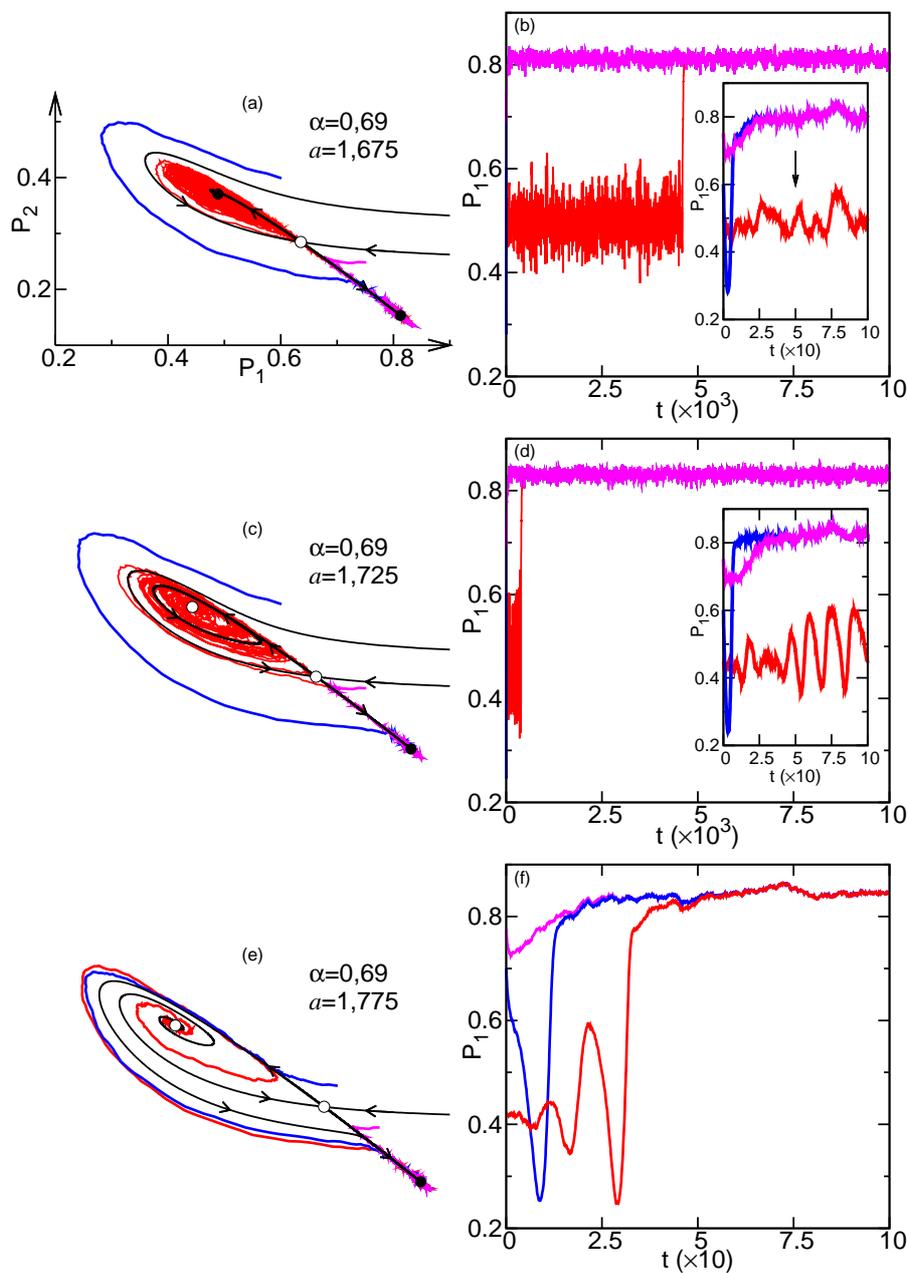
Finalmente, ainda de forma análoga aos casos anteriores, diminuimos  $a$  e  $\alpha$  descontinuamente e simultaneamente para eliminar o ponto fixo estável remanescente. Portanto, as três amostras convergem aproximadamente ao mesmo tempo para uma solução estável em que oscilam quase juntas (a menos de flutuações) [figura 4.3(e) e (f)].

Vale ressaltar que o processo ilustrado na figura 4.3 não fecha um ciclo, ou seja, se mudarmos os parâmetros de controle para seus valores iniciais, o sistema jamais irá para a mesma situação estacionária da figura 4.3(b). Além disso, esse processo é completamente irreversível, isto é, se aplicarmos o processo inverso de mudança nos parâmetros de controle, também não se repetirá a situação estacionária da figura 4.3(b).

Agora, considere o diagrama de fase da figura 4.2(b). Na parte mais à esquerda (menores valores de  $a$ ) há apenas um nó estável. Aumentando o acoplamento  $a$ , acontece uma bifurcação SN em que o nó recém surgido transforma-se em espiral após um incremento extremamente pequeno em  $a$ . Assim, ficamos com o retrato de fase da figura 4.2(c), cujos resultados de simulações para grafo completo aparecem nas figuras 4.4(a) e (b). Embora os cálculos de campo médio digam que a espiral que aparece nas figuras 4.2(c) e 4.4(a) é estável, mesmo para grafos completos consideravelmente grandes (como o de  $N = 20000$  com os resultados de simulações mostrado na figura 4.4) as flutuações devidas a efeitos de tamanho finito sempre levam o sistema para o outro atrator. Contudo, antes que isso aconteça, essas flutuações levam a oscilações estocásticas, que podem ser vistas mais claramente no detalhe da figura 4.4(b) (olhe aonde aponta a seta).

Aumentando o parâmetro  $a$  um pouco mais, a espiral perde a estabilidade numa bifurcação de Hopf, dando origem a um ciclo-limite estável (CLE). Desse modo, temos o retrato de fase mostrado na figura 4.2(d), cujos resultados de simulações para grafo completo são mostrados nas figuras 4.4(c) e (d). Novamente, embora os cálculos de campo médio digam que o ciclo-limite que aparece nas figuras 4.2(d) e 4.4(c) é *estável*, mesmo para grafos completos bastante grandes, as flutuações devidas a efeitos de tamanho finito levam o sistema para o outro atrator em um tempo consideravelmente menor do que no caso anterior [figuras 4.2(c), 4.4(a) e (b)].

Logo após a bifurcação de Hopf, incrementar o valor de  $a$  leva a um aumento no tamanho do CLE, até que ele é destruído por uma bifurcação homoclínica [figura 4.2(b)].



**Figura 4.4** Retratos de fase e resultados de simulações para um grafo completo com  $N = 20000$ , veja figura 4.2. (a) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,675$ . Há dois atratores: um nó e uma espiral. Obviamente, eles estão separados por uma sela. (c) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,725$ . A espiral tornou-se instável via uma bifurcação de Hopf e é rodeada por um ciclo-limite. (e) Retrato de fase para  $\alpha = 0,69$  e  $a = 1,775$ . Depois de uma bifurcação homoclínica, o ciclo-limite desapareceu. Os painéis (b), (d) e (f) mostram as séries temporais para as trajetórias simuladas mostradas nos painéis (a), (c) e (e), respectivamente, com exemplos de excitabilidade coletiva e oscilações estocásticas.

Dessa forma, chegamos ao retrato de fase da figura 4.2(e), com os resultados de simulações de grafo completo mostrados nas figuras 4.4(e) e (f). Agora sim, realmente só há um único atrator. Como esperado, se iniciarmos o sistema na espiral instável, haverá oscilações de amplitude crescente até o sistema alcançar o estado estacionário estável. Além disso, desde que ocorreu a bifurcação SN que levou ao retrato de fase da figura 4.2(c), o sistema tornou-se coletivamente excitável e assim permaneceu após as bifurcações de Hopf e homoclínica (compare as linhas azuis e linhas rosas na figura 4.4).

### 4.3 CONCLUSÕES

No regime em que as unidades são elementos excitáveis, não encontramos oscilações globais estáveis nem mesmo no grafo completo. Essa topologia é aquela em que uma solução sincronizada seria mais favorável, como mostrado em vários trabalhos anteriores [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a, Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a, Risau-Gusman e Abramson, 2007]. Em retrospectiva, isso justifica por que não tentamos executar simulações do modelo em redes de topologia hipercúbica (nem mesmo de mundo pequeno).

Visto que não encontramos sincronização na situação procurada (no caso deste capítulo, quando  $\alpha = 1$ ) nem efeitos que já não tivéssemos observado nos capítulos 2 e 3, é natural que se pergunte o que se aprendeu com esses resultados. No caso particular do modelo estudado aqui, mostramos que a não-uniformidade dos osciladores dificulta a sincronização, enquanto que a não-uniformidade suficientemente alta ( $\alpha \geq \alpha'$ ) e, conseqüentemente, a transformação das unidades oscilatórias em elementos excitáveis ( $\alpha = 1$ ) impossibilita o aparecimento do estado sincronizado estável. Todavia, isso obviamente não comprova a inexistência de sincronização em modelos markovianos em tempo contínuo com um único estado absorvente.

Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] conceberam o acoplamento no modelo deles para facilitar ao máximo que a maioria dos osciladores ficasse na mesma fase em média. Por outro lado, esses autores não se preocuparam inicialmente com certos detalhes das oscilações. Contudo, esses detalhes se mostraram importantes, como foi explicado nos seus trabalhos seguintes [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] em que foi usado um acoplamento ligeiramente diferente. Nesses últimos [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a], é necessário um valor maior do acoplamento para que aconteça a transição de fase para a sincronização, mas, uma vez que ela ocorre, as oscilações coletivas não sofrem outras transformações além do aumento da amplitude por mais que se incremente o acoplamento. Se transformarmos os osciladores em elementos excitáveis

no modelo das referências [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a], talvez finalmente aconteça a transição de fase para a sincronização coletiva depois da transição para o estado ativo. Isso será estudado no próximo capítulo.

# SINCRONIZAÇÃO EM MODELOS DE REDE ESTOCÁSTICOS COM UM ÚNICO ESTADO ABSORVENTE

Nos capítulos anteriores, fizemos duas tentativas de encontrar um modelo markoviano em tempo contínuo com um único estado absorvente que apresente transição de fase para um estado coletivamente sincronizado. Nessas tentativas, usamos o acoplamento da primeira versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]. Na primeira (capítulo 2), modificamos o modelo SIRS estocástico padrão [Joo e Lebowitz, 2004], inserindo o acoplamento de Wood *et al.* no lugar do original. No entanto, não encontramos oscilações globais estáveis nem mesmo na aproximação de campo médio. Na segunda (capítulo 4), modificamos o próprio modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] de modo a tornar os osciladores do modelo original cada vez mais não-uniformes até transformá-los em elementos excitáveis dando origem a um estado absorvente. Contudo, para não-uniformidade suficiente alta dos osciladores, mesmo antes do surgimento do estado absorvente, as oscilações globais estáveis já na aproximação de campo médio desaparecem. Aqui fazemos as nossas últimas tentativas nesta tese.

As duas tentativas deste capítulo são baseadas na versão do modelo de Wood *et al.* usada nas referências [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a]. A versão anterior [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] apresenta um efeito espúrio de diminuição da frequência das oscilações coletivas com o acoplamento (estudado muito detalhadamente no capítulo 3) que pode ser altamente inconveniente. Esse efeito não-realista foi aparentemente tolerado pelos autores para facilitar a transição de fase, ou seja, para que o valor crítico do parâmetro de acoplamento fosse o menor possível. Isso torna as simulações muito mais rápidas na região de interesse por causa das fórmulas das taxas e do método comumente usado nas simulações de Monte Carlo em modelos markovianos em tempo contínuo [Wood et al., 2007b] (veja o primeiro parágrafo do apêndice A). Entretanto, nos seus trabalhos seguintes [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] esse resultado não realista tornou-se gravemente indesejável. Na referência [Wood et al., 2007a], Wood *et al.* dizem que apesar de a versão do modelo das referências [Wood et al., 2006b,

Wood et al., 2006a] poder ser útil para explorar o comportamento da transição de fase perto do limiar, ela não fornece características fisicamente relevantes muito acima do limiar (embora talvez sejam matematicamente interessantes<sup>1</sup>). Isso justifica as nossas tentativas com a segunda versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] que mostramos abaixo.

## 5.1 DEFINIÇÕES DOS MODELOS

### 5.1.1 Acoplamento por fase

Cada unidade  $x$  ( $x = 1, \dots, N$ ) é representada por uma fase  $\phi_x$ , que pode estar em um dos três estados:  $\phi_x = i_x\pi/3$ , onde  $i_x \in \{0, 1, 2\}$  (de modo análogo<sup>2</sup> ao ilustrado na figura 4.1). Quando a unidade está isolada, as taxas de transição são:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 1 && \text{com taxa } zero, \\ 1 &\longrightarrow 2 && \text{com taxa } g, \\ 2 &\longrightarrow 0 && \text{com taxa } g. \end{aligned} \tag{5.1}$$

O acoplamento entre as unidades é essencialmente o mesmo que o usado por Wood *et al.* nas referências [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a], exceto que agora existe um estado absorvente (todos os sítios no estado 0):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 1 && \text{com taxa } g_{0,1} \left( \frac{N_1}{k}, \frac{N_2}{k} \right) = g \{ e^{[a(N_1-N_2)]/k} - e^{(-aN_2)/k} \}, \\ 1 &\longrightarrow 2 && \text{com taxa } g_{1,2} \left( \frac{N_2}{k}, \frac{N_0}{k} \right) = g e^{[a(N_2-N_0)]/k}, \\ 2 &\longrightarrow 0 && \text{com taxa } g_{2,0} \left( \frac{N_0}{k}, \frac{N_1}{k} \right) = g e^{[a(N_0-N_1)]/k}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde a taxa  $g$  pode ser definida para ser unitária sem perda de generalidade,  $a$  é o parâmetro de acoplamento,  $N_i$  é o número de vizinhos no estado  $i$  e  $k$  é o número total de vizinhos. Observe que diferentemente do modelo estudado no capítulo 4, um oscilador no estado  $i$  é sensível somente aos vizinhos nos estados  $i+1$  e  $i-1$ , ignorando os vizinhos no seu próprio estado.

<sup>1</sup>Veja o capítulo 3.

<sup>2</sup>Trocamos aqui a notação dos estados dos sítios de  $\{1, 2, 3\}$  para  $\{0, 1, 2\}$  a fim de facilitar a intuição com relação ao estado absorvente (todos os sítios em 0, ou seja, a ausência de atividade na rede).

### 5.1.2 Acoplamento por pulso

Assim como foi feito no capítulo 2, partimos do modelo epidêmico SIRS estocástico. Aqui, em vez da taxa (2.1) do modelo SIRS convencional e da taxa (2.4) usada no capítulo 2, empregamos:

$$S \longrightarrow I \text{ com taxa } g(n_I/k, n_R/k) \equiv b [e^{a(n_I - n_R)/k} - e^{-an_R/k}], \quad (5.3)$$

onde  $n_R$  é o número de vizinhos recuperados (refratários). As equações (2.2) e (2.3) continuam válidas na definição deste modelo. Novamente, o segundo termo na taxa (5.3) garante a existência de um estado absorvente. A aproximação para pequenos valores de  $a$  ( $a \ll 1$ ) também recupera o comportamento linear do modelo SIRS original do mesmo modo que no capítulo 2.

## 5.2 ANÁLISE DE CAMPO MÉDIO E SIMULAÇÕES EM GRAFOS COMPLETOS

### 5.2.1 Acoplamento por fase

Obviamente, vamos seguir um caminho análogo ao da subseção 4.2.1. Seja  $g_{i,j}$  a taxa de transição do estado  $i$  para o estado  $j$ , dada por (5.2), onde  $i$  e  $j \in \{0, 1, 2\}$ . Na aproximação de campo médio, isso leva às seguintes equações:

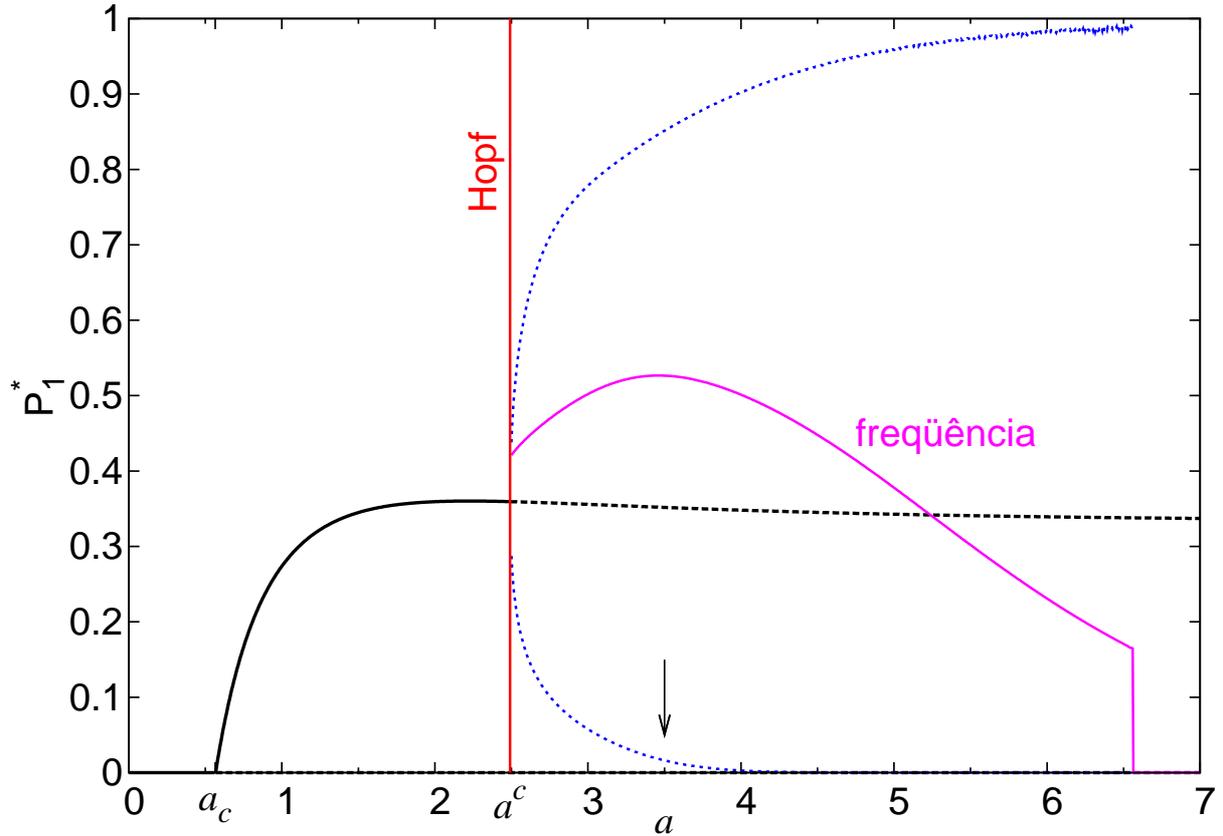
$$\dot{P}_0 = g_{2,0}(P_0, P_1)P_3 - g_{0,1}(P_1, P_2)P_1, \quad (5.4)$$

$$\dot{P}_1 = g_{0,1}(P_1, P_2)P_1 - g_{1,2}(P_2, P_0)P_2, \quad (5.5)$$

$$\dot{P}_2 = g_{1,2}(P_2, P_0)P_2 - g_{2,0}(P_0, P_1)P_3. \quad (5.6)$$

Como não poderia deixar de ser, a normalização ( $P_2 = 1 - P_0 - P_1$ ) reduz essas equações a um fluxo bidimensional no plano  $(P_0, P_1)$ .

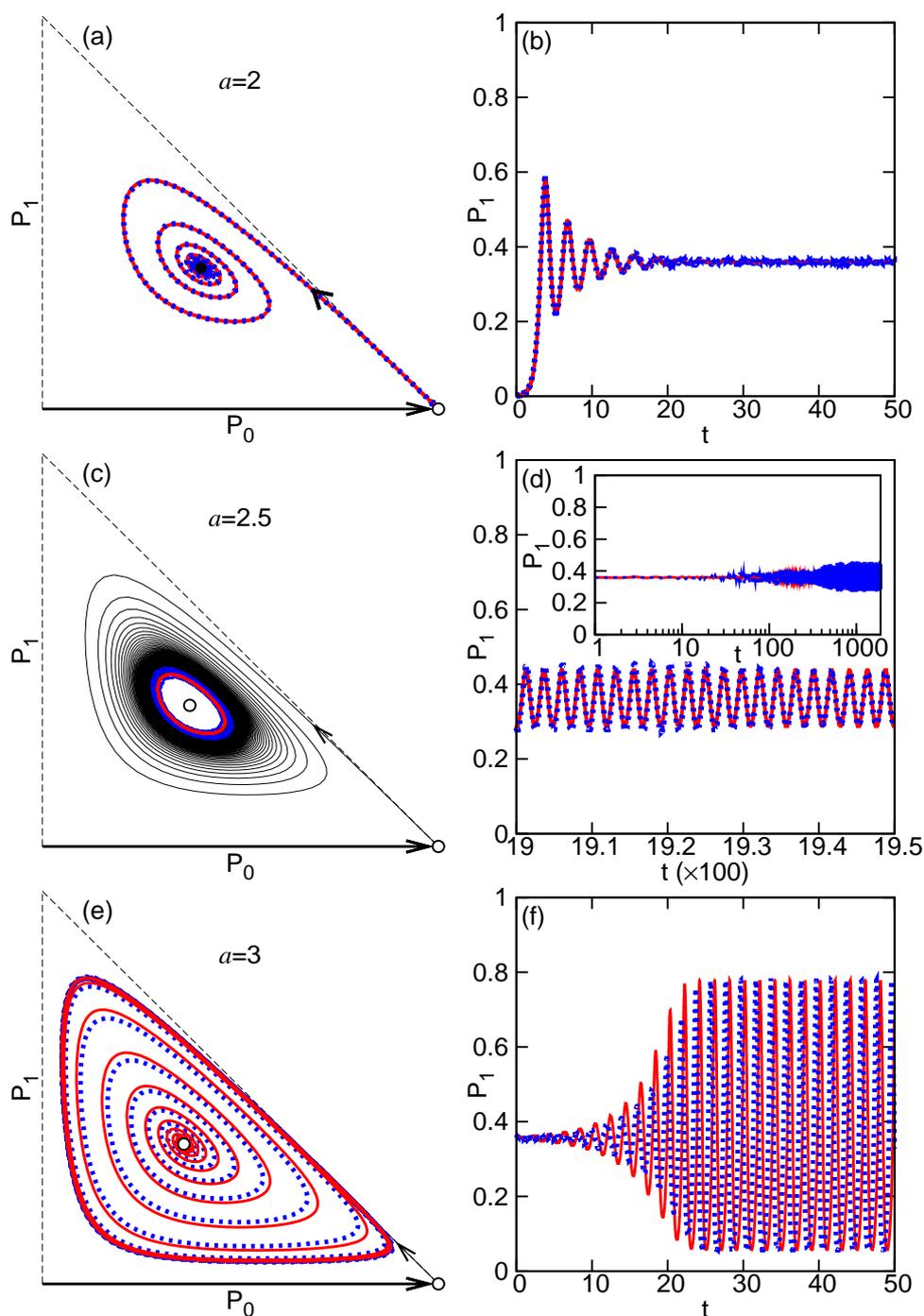
Como para  $P_1 = 0$  o sistema fatalmente chegará ao estado absorvente, a escolha de  $P_1^*$  como parâmetro de ordem da transição de fase do estado absorvente para o estado ativo é mais ou menos óbvia. Além disso, é um tanto quanto conveniente olhar para o comportamento de  $P_1$  para estudar a transição de fase para a sincronização e as características quantitativas das oscilações globais (amplitude e frequência) como mostrado na figura 5.1. Nessa, temos o diagrama de bifurcação mostrando uma bifurcação transcítica envolvendo os pontos fixos correspondentes aos estados absorvente e ativo, sucedida por uma bifurcação de Hopf envolvendo o ponto fixo correspondente ao estado ativo. A transição para a fase ativa é prevista (na aproximação de campo médio) por



**Figura 5.1** Diagrama de bifurcação mostrando uma bifurcação transcritical envolvendo os pontos fixos correspondentes aos estados absorvente e ativo, sucedida por uma bifurcação de Hopf envolvendo o ponto fixo correspondente ao estado ativo. As linhas pretas representam as coordenadas  $P_1^*$  dos pontos fixos, onde as sólidas representam os pontos fixos estáveis e as tracejadas, os instáveis. A linha sólida rosa representa a frequência das oscilações do sistema no ciclo-limite. As linhas pontilhadas azuis representam os extremos de  $P_1$  no ciclo-limite. As constantes  $a_c = 0,564(4)$  e  $a^c = 2,491(4)$  são os valores de  $a$  onde acontecem as bifurcações transcritical e de Hopf supercrítica, respectivamente. A seta aponta para o valor de  $a$  para o qual foi realizada a simulação mostrada na figura 5.3.

uma bifurcação transcritical em  $a_c$  (como a descrita na figura 2.1), enquanto a transição para a fase sincronizada é prevista por uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $a^c$  (veja a figura 5.1).

Na figura 5.2, mostramos alguns retratos de fase na coluna esquerda com as séries temporais correspondentes na coluna direita. Para  $a_c < a < a^c$ , se o sistema iniciar em qualquer condição inicial diferente do estado absorvente [embora possa ser muito próxima dele, veja as figuras 5.2(a) e (b)], ele irá para um estado estacionário ativo que apresentará flutuações devidas ao efeito de tamanho finito nas simulações de Monte Carlo [veja a



**Figura 5.2** Retratos de fase na coluna esquerda com as séries temporais correspondentes na coluna direita. As linhas sólidas vermelhas e pretas representam os resultados de campo médio e as pontilhadas azuis, os resultados das simulações em um grafo completo com  $N = 2 \times 10^5$ . Os círculos preenchidos representam os pontos fixos estáveis e os abertos, os instáveis. Assim como nos capítulos anteriores, os triângulos representam os limites da região fisicamente aceitável.

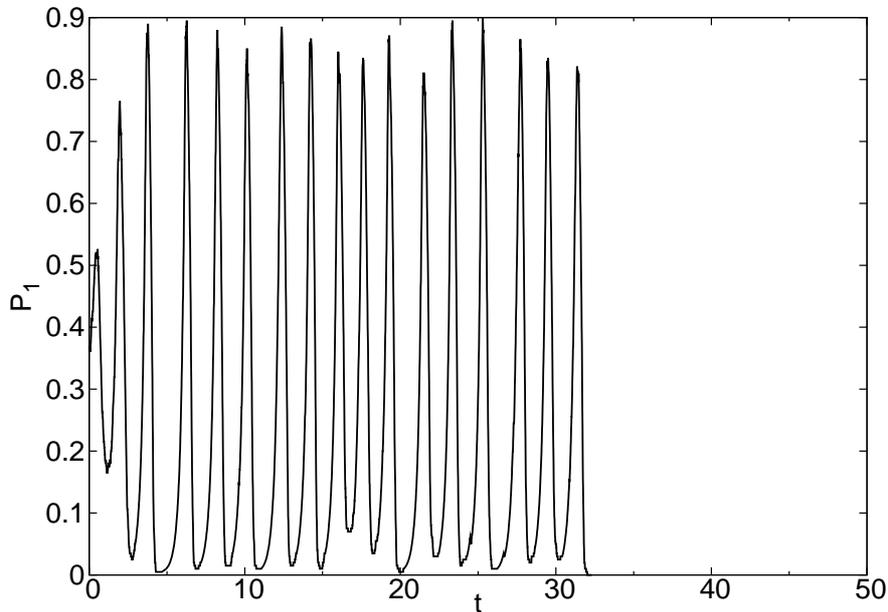
figura 5.2(b)]. Para  $a > a^c$  o sistema apresenta oscilações globais estáveis cuja amplitude é monotonicamente crescente com  $a$  [veja as linhas azuis pontilhadas na figura 5.1 e as figuras 5.2(c)-(f)]. Como esperado, logo após a bifurcação de Hopf, o transiente é muito longo [veja o detalhe da figura 5.2(d)] pois, além da espiral ainda ser fracamente instável, o ciclo-limite ainda é fracamente estável [veja a variedade instável da sela na figura 5.2(c)]. A concordância com as simulações de um grafo completo de  $N = 2 \times 10^5$  é excelente, exceto por pequenas flutuações causadas pelo efeito de tamanho finito. É interessante notar que, embora o valor mínimo de  $P_1$  diminua muito rapidamente com  $a$ , mesmo para valores de  $a$  consideravelmente altos, como  $a = 3, 5$ , onde o extremo inferior de  $P_1$  já é razoavelmente pequeno (veja a linha pontilha azul inferior na figura 5.1), as oscilações são mais ou menos estáveis até para redes pequenas.

Na figura 5.3, mostramos uma série temporal de uma simulação no grafo completo de  $N = 200$  para  $a = 3, 5$  (realização única). Para observarmos os efeitos de tamanho finito da rede jogando o sistema no estado absorvente em um tempo não tão longo, realizamos simulações numa rede pequena para um valor de  $a$  que gere um valor mínimo (nas oscilações globais) de  $P_1$  (previsto por aproximação de campo médio simples) baixo e mesmo assim o sistema completou vários ciclos de oscilações globais antes de cair no estado absorvente (veja a figura 5.3). Obviamente, o valor mínimo que  $P_1$  atinge nos dar o número mínimo de sítios que a rede tem que ter para que as oscilações globais possam ser sustentadas, pois  $P_1 = N_1/N$  não pode ser menor que  $1/N$ , como relatado previamente por Girvan *et al.* [Girvan et al., 2002].

A partir de  $a \approx 3, 5$  a frequência das oscilações do sistema diminui lentamente com  $a$ , pois o crescimento do ciclo-limite faz o mesmo se aproximar da sela correspondente ao estado absorvente. Para algum valor de  $a$  suficientemente grande o ciclo-limite deve alcançar finalmente a sela, numa bifurcação homoclínica na qual o ciclo transformar-se-ia numa órbita homoclínica *somente* no ponto *exato* do espaço de parâmetros onde essa bifurcação ocorre.

A órbita homoclínica quase nunca é observada na prática na grande maioria dos sistemas dinâmicos, pois, *logo após* a bifurcação homoclínica em um *sistema qualquer*, o mesmo normalmente vai para o infinito ou para o atrator cuja bacia de atração era separada da bacia de atração do ciclo-limite pelas variedades estáveis da sela, como relatamos nos capítulos 2 e 4. No caso do modelo estudado *neste capítulo*, o sistema não pode sair da região do espaço de fase limitada pelas restrições  $0 \leq P_0 \leq 1$ ,  $0 \leq P_1 \leq 1$  e  $P_0 + P_1 \leq 1$ , então o único comportamento que observamos a partir da bifurcação é a órbita homoclínica.

Numa bifurcação homoclínica espera-se que o período do ciclo-limite divirja com  $|\ln(a - a^c)|$  [Strogatz, 1997, Gaspard, 1990]. Portanto, a frequência deve ir a zero continuamente. Contudo, o que observamos é uma clara descontinuidade na frequência em  $a \gtrsim 6,5$ , veja a linha sólida rosa na figura 5.1. Isso acontece provavelmente devido ao método que usamos para integrar as equações (5.4)-(5.6), o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Mais precisamente, é possível que, quando a trajetória se aproxima muito da sela, as derivadas estejam tornando-se tão pequenas que o passo de tempo usado passa a ser grande demais para que elas possam ser calculadas corretamente. Assim, talvez o controle adaptativo do tamanho do passo para o método de Runge-Kutta resolva esse paradoxo.



**Figura 5.3** Série temporal de uma simulação no grafo completo de  $N = 200$  para  $a = 3,5$  (realização única).

### 5.2.2 Acoplamento por pulso

Aqui, vamos seguir um caminho análogo ao da seção 2.2. Se  $P(\alpha)$  é a probabilidade de o sítio estar no estado  $\alpha$  ( $\alpha \in \{S, I, R\}$ ), obtém-se, na aproximação de campo médio,

$$\dot{P}(S) = -g[P(I), P(R)]P(S) + \gamma P(R), \quad (5.7)$$

$$\dot{P}(I) = g[P(I), P(R)]P(S) - P(I), \quad (5.8)$$

$$\dot{P}(R) = P(I) - \gamma P(R), \quad (5.9)$$

onde fizemos  $\delta = 1$  (veja a seção 2.1). Assim como fizemos no capítulo 2, no que se segue, empregaremos o valor estacionário da densidade de sítios infectados  $P(I)^*$  como o parâmetro de ordem.

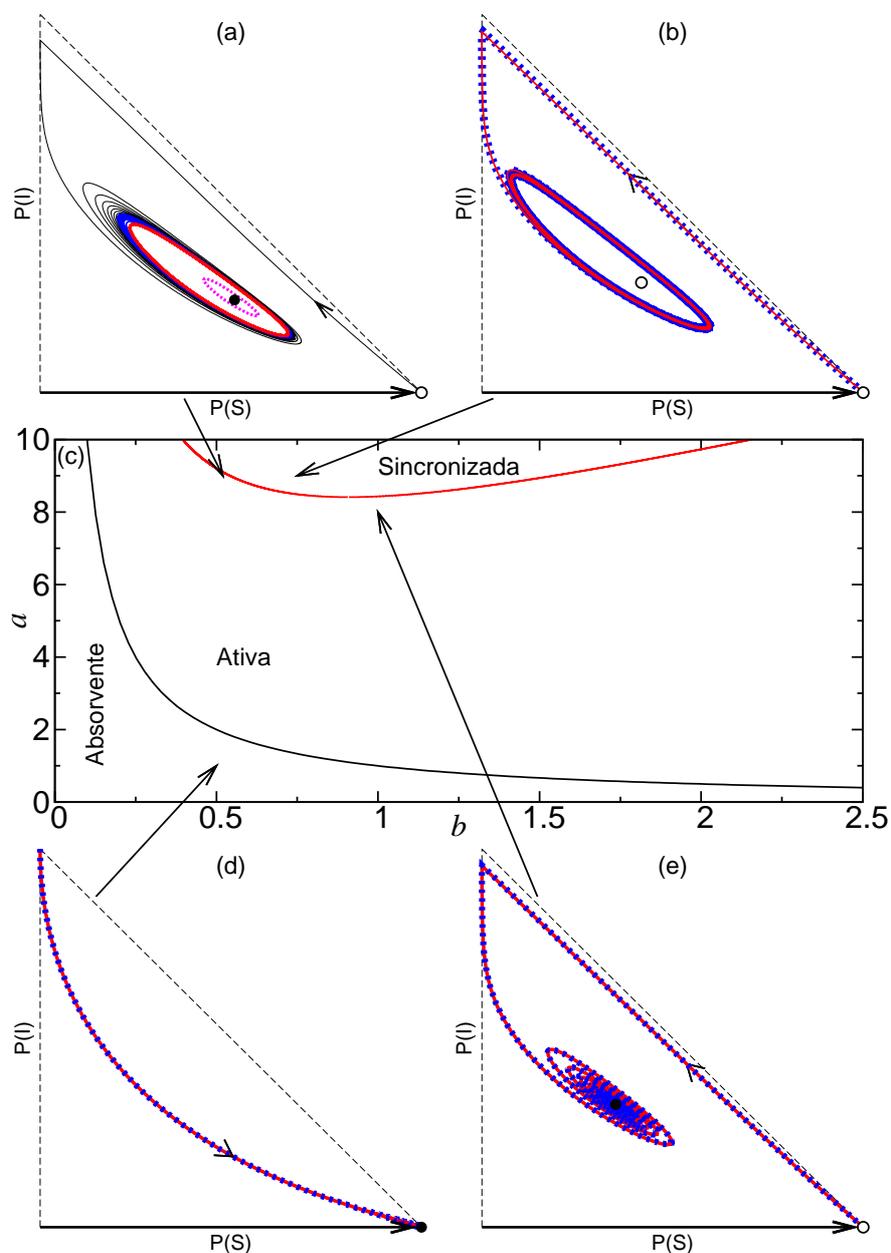
Na figura 5.4, mostramos o diagrama de fases da versão de campo médio do modelo com acoplamento por pulso. Diferentemente da subseção anterior, agora há dois parâmetros de acoplamento  $a$  e  $b$ , então o diagrama de fases é mostrado no plano  $(a, b)$ , veja a figura 5.4(c). Há também um outro parâmetro de controle livre, a taxa  $\gamma$ . Usamos  $\gamma = 1$  na figura 5.4. Como não poderia deixar de ser, se iniciarmos em  $b = 0$ , para qualquer valor de  $a$ , quando o parâmetro  $b$  atingir um certo valor  $b_c \equiv b_c(a)$ , acontecerá uma bifurcação transcritical envolvendo o ponto fixo do estado absorvente.

Destoando do capítulo 2, aqui não há mais bifurcação sela-nó por maior que seja o valor de  $a$ . Podemos deduzir o motivo da ausência da bifurcação sela-nó e encontrar a expressão analítica da curva de bifurcação transcritical  $b_c(a)$  adaptando os argumentos utilizados na seção 2.7. Se houver bifurcação sela-nó envolvendo o estado ativo enquanto o ponto fixo do estado absorvente continua estável, deve haver alguma região no espaço de parâmetros onde há biestabilidade (estados absorvente e ativo estáveis). Nesse caso, haveria dependência nas condições iniciais. Para entender-se por que aqui *não* pode existir essa dependência, é mais fácil lembrar por que no capítulo 2 existia. Então, vamos reescrever a equação (2.13):

$$g[P(I), P(S)] = b \{ e^{a[P(I)-P(S)]} - e^{-aP(S)} \}.$$

Nesse caso, é óbvio que se  $P(I) > P(S)$ , então  $g[P(I), P(S)]$  é função crescente de  $a$ . Analogamente, se  $P(I) < P(S)$ , então  $g[P(I), P(S)]$  é função decrescente de  $a$ . Além disso,  $g[P(I), P(S)]$  cresce monotonicamente com o aumento da diferença  $P(I) - P(S)$ . Assim, para qualquer  $b$  não-nulo sempre haverá um valor de  $a$  alto o bastante tal que o acoplamento seja suficientemente forte para sustentar um estado estacionário ativo quando  $P(I) > P(S)$ , mas insuficiente para a sobrevivência da atividade na rede (levando o sistema para o estado absorvente) quando  $P(I) < P(S)$ . Não podemos mais usar o mesmo argumento neste capítulo para a versão de campo médio da equação (5.3):

$$g[P(I), P(R)] \equiv b \{ e^{a[P(I)-P(R)]} - e^{-aP(R)} \}, \quad (5.10)$$



**Figura 5.4** No painel (c), temos o diagrama de fases, onde a linha preta representa as bifurcações transcricais e a vermelha, as de Hopf. Os outros painéis representam os retratos de fase com as setas indicando os pontos no espaço de parâmetros onde eles se realizam, onde as linhas sólidas vermelhas representam os resultados da aproximação de campo médio e as pontilhadas azuis, os resultados das simulações num grafo completo de  $N = 10^6$ . Os círculos abertos e os preenchidos representam os pontos fixos instáveis e estáveis, respectivamente. A linha pontilhada rosa no painel (a) representa o ciclo limite instável. Empregamos  $\gamma = 1$  nessa figura. Assim como na figura 5.2, os triângulos representam os limites da região fisicamente aceitável.

pois a solução estacionária de  $P(I)$  e  $P(R)$  obedece a seguinte restrição<sup>3</sup>:

$$P(I)^* = \gamma P(R)^*. \quad (5.11)$$

Portanto, para  $\gamma > 1$  ( $\gamma < 1$ ), sempre teremos  $P(I)^* > P(R)^*$  [ $P(I)^* < P(R)^*$ ], o que faz que o argumento que usamos para o caso do capítulo 2 não possa ser usado aqui, de modo que a solução estacionária estável tem que ser única, ou seja, não pode haver biestabilidade. Uma maneira bastante intuitiva de entender isso é olhar para a equação (5.9) e ver que se  $P(I) < \gamma P(R)$  [ $P(I) > \gamma P(R)$ ], então  $\dot{P}(R) < 0$  [ $\dot{P}(R) > 0$ ], de modo que qualquer tentativa de manipular as condições iniciais para obter o mesmo efeito de biestabilidade observado no capítulo 2 levará o sistema para a situação da equação (5.11). Portanto, não deve haver bifurcação sela-nó nas equações de campo médio (5.7)-(5.9).

Agora, vamos encontrar a equação da curva de bifurcação transcítica  $b_c(a)$ . O estado absorvente é estável se na proximidade dele  $\dot{P}(I) \leq 0$ . Conseqüentemente, na bifurcação transcítica devemos ter:

$$\lim_{\substack{P(I) \rightarrow 0^+ \\ P(R) \rightarrow 0^+}} \dot{P}(I) = 0 \xrightarrow{(5.8)} \lim_{\substack{P(I) \rightarrow 0^+ \\ P(R) \rightarrow 0^+}} \frac{g[P(I), P(R)] P(S)}{P(I)} = 1 \xrightarrow{(5.10)} b = \frac{1}{a}, \quad (5.12)$$

que é a curva preta mostrada na figura 5.4(c). As figuras 5.4(d) e (e) mostram retratos de fase típicos da fase absorvente (d) e da fase ativa sem oscilações globais sustentadas (e).

Além das bifurcações transcíticas, encontramos (para valores relativamente<sup>4</sup> grandes de  $a$ ) as bifurcações de Hopf no ponto fixo do estado ativo que estávamos procurando no capítulo 2. Como podemos ver na figura 5.4(c), a bifurcação de Hopf é reentrante, sendo que a primeira é subcrítica e a segunda é supercrítica. Na figura 5.4(a) vemos um retrato de fase entre as bifurcações sela-nó de ciclos e de Hopf subcrítica, enquanto que na figura 5.4(b) temos um retrato de fase entre as duas bifurcações de Hopf.

Vamos fazer um breve esclarecimento sobre a dependência do diagrama de fases com a taxa  $\gamma$ , lembrando que os resultados mostrados na figura 5.4 são para  $\gamma = 1$ . Como esperado, para valores maiores de  $\gamma$  o ciclo-limite nas equações de campo médio (5.4)-(5.6) aparece para valores maiores de  $a$  numa região mais estreita do espaço de parâmetros. Para valores de  $\gamma < 1$  o ciclo-limite nas equações de campo médio (5.4)-(5.6) existe numa região mais larga do espaço de parâmetros, embora os valores de  $a$  necessários para que aconteçam as bifurcações de Hopf não diminuam muito a partir de  $\gamma = 1$  para baixo.

<sup>3</sup>Veja a equação (5.9).

<sup>4</sup>Devemos nos lembrar aqui que  $g[P(I), P(R)]$  cresce [para  $P(I) > P(R)$ ] ou diminui [para  $P(I) < P(R)$ ] exponencialmente com  $a$ .

Assim, confirmamos o que já havia sido observado em outros modelos [Girvan et al., 2002, Rozhnova e Nunes, 2009b, Rozhnova e Nunes, 2009a, Assis e Copelli, 2009]: períodos refratários longos facilitam a sincronização.

Vamos fazer um breve resumo sobre como acontecem as bifurcações de Hopf neste modelo. Se fixarmos um valor de  $a$  suficientemente alto para que aconteçam as bifurcações de Hopf, iniciando de um valor de  $b \gtrsim b_c(a)$ , aumentando o bastante o parâmetro  $b$  acontecerá uma bifurcação sela-nó de ciclos. Assim, o sistema passa a ter coexistência de duas soluções estáveis com o ciclo-limite instável separando as bacias de atração do ciclo-limite estável e da espiral. Aumentando  $b$  um pouco mais, os dois ciclos-limite diminuem de amplitude, sendo que a do ciclo limite instável diminui muito mais rapidamente, até que esse engole a espiral estável numa bifurcação de Hopf subcrítica. Continuando a aumentar  $b$  mais ainda, o ciclo-limite estável manter-se-á com a sua amplitude sendo continuamente diminuída até engolir o espiral instável numa bifurcação de Hopf supercrítica.

### 5.3 CONCLUSÕES

Embora tenhamos constatado nos capítulos anteriores que a existência de um estado absorvente realmente dificulta a ocorrência da transição de fase para sincronização em modelos markovianos em tempo contínuo, aqui mostramos dois casos semelhantes (um com acoplamento por fase e outro com acoplamento por pulso) em que essa transição acontece. As tentativas dos capítulos anteriores se basearam na *primeira versão* do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], que apresenta condensação dos osciladores em um estado quando o acoplamento é razoavelmente forte. Isso limita a região do espaço de parâmetros onde há sincronização mesmo quando as unidades individuais são osciladores uniformes e, portanto, não há estado absorvente no sistema e os estados de seus elementos são igualmente prováveis a priori (veja o capítulo 3). Como mostramos no capítulo 4, a inclusão de um estado absorvente no modelo das referências [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] impossibilita o aparecimento de oscilações globais estáveis, o que explica por que também não há oscilações coletivas sustentadas no modelo (com acoplamento por pulso) estudado no capítulo 2. Na *segunda versão* do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] não há mais condensação dos osciladores, então não há limite superior na região do espaço de parâmetros onde há sincronização. Confirmamos neste capítulo que isso é o bastante para que os modelos com um único estado absorvente, baseados nesse último, exibam transição de fase para sincronização.

O modelo com acoplamento por fase que definimos neste capítulo nada mais é que a

*segunda versão* do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] com um pequeno ajuste para que exista um único estado absorvente. Como esperado, há uma bifurcação transcítica envolvendo o ponto fixo do estado absorvente dando origem a um ponto fixo estável correspondente a um estado estacionário ativo. Aumentando ainda mais o acoplamento, acontece uma bifurcação de Hopf supercrítica, surpreendentemente, para um valor crítico ( $\approx 2,49$ ) *menor* do que o valor crítico ( $= 3$ ) em que ocorre a *mesma bifurcação* no modelo original [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] sem estado absorvente! Visto que a partir da bifurcação transcítica há uma sela correspondente ao estado absorvente no retrato de fase, é de se esperar que (para algum valor suficientemente grande do parâmetro de controle) o ciclo-limite cresça até alcançá-la numa bifurcação homoclínica. Aparentemente, observamos tal bifurcação, embora não tenhamos conseguido determinar com segurança o valor do parâmetro de controle em que tal bifurcação acontece, provavelmente por causa do método usado para a integração numérica.

O modelo com acoplamento por pulso é um pouco mais realista. Essa é a razão pela qual o estudamos também, embora nesse caso a bifurcação de Hopf aconteça para valores razoavelmente maiores (do que no caso anterior com acoplamento por fase) do parâmetro de controle responsável pela não-linearidade (exponencial) do acoplamento. Além disso, a bifurcação de Hopf é reentrante, diminuindo ainda mais a região do espaço de parâmetros onde há ciclo-limite estável nas equações de campo médio. É interessante notar que as bifurcações de Hopf que encontramos nesse modelo podem ser subcríticas ou supercríticas. Ainda falta determinar a linha de bifurcação sela-nó de ciclos nos casos em que as bifurcações de Hopf são subcríticas.

Os resultados das simulações em grafos completos que realizamos são muito preliminares ainda e só serviram para testar a acurácia dos cálculos de campo médio. Como não poderia deixar de ser, há uma excelente concordância entre os resultados de campo médio e as simulações em grafos completos grandes.

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, construímos e estudamos alguns modelos a partir das duas versões do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a] e/ou do SIRS sempre tendo em vista a obtenção de uma transição de fase para a sincronização em modelos markovianos em tempo contínuo de rede de elementos excitáveis (MMTCREE). Nessa busca, encontramos várias outras transições de fase (e outras mudanças de regime coletivo) de naturezas diferentes, previstas, na aproximação de campo médio, através de todas as bifurcações mais conhecidas para fluxos bidimensionais. Além disso, estudamos uma quebra espontânea de simetria  $C_3$  na primeira versão do modelo de Wood *et al.*

Na nossa primeira tentativa (capítulo 2), onde adaptamos o acoplamento da primeira versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] no modelo SIRS estocástico, não encontramos nem mesmo uma previsão de oscilações globais estáveis na aproximação de campo médio simples (CMS). Entretanto, encontramos transições de fase descontínuas entre o estado absorvente e o ativo na redes aleatória e em redes hipercúbicas (para  $d \geq 2$ ) na ausência de difusão, onde um parâmetro livre adimensional (a não-linearidade do acoplamento) controla a continuidade da transição. Para períodos refratários longos e não-linearidades altas no acoplamento há regiões no diagrama de fase com oscilações estocásticas e excitabilidade coletiva no grafo completo. Deve-se testar no futuro se esses últimos comportamentos coletivos persistem em redes regulares ou pelo menos em redes aleatórias.

Embora o modelo estudado no capítulo 2 não tenha sido construído para apresentar transições de fase descontínuas, mostramos, na seção 2.7 e depois de uma maneira mais direta na subseção 5.2.2, que, baseado no critério relatado por Marro e Dickman na referência [Marro e Dickman, 1999], esse modelo deveria mesmo apresentar transições de fase descontínuas para o estado absorvente. Pela nossa argumentação, a descontinuidade da transição viria da natureza do acoplamento inspirado na primeira versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], que é responsável pelo aparecimento das bifurcações sela-nó nas equações de CMS. Assim, no capítulo 3, constatamos que no próprio modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] aconte-

cem três bifurcações sela-nó simultâneas e simétricas, dessa vez, no ciclo limite (surgido da bifurcação de Hopf originalmente relatada [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a]) numa bifurcação de período infinito. Como não poderia deixar de ser, a transição de fase correspondente a essa bifurcação adicional realmente acontece no grafo completo, pois a aproximação de CMS é exata para essa topologia no limite termodinâmico, por definição.

Os resultados de escala de tamanho finito no grafo completo nos levam a concluir que a dimensão crítica superior da transição de fase estudada no capítulo 3 deve ser  $d_c = 3$ , embora essa conclusão seja baseada na suposição (cuja veracidade não garantimos, ainda que seja uma suposição bastante razoável) de que  $\nu_\perp = 1/2$  em campo médio. Contudo, não conseguimos ver claramente essa transição de fase de período infinito nem mesmo na rede quadridimensional<sup>1</sup>, ainda que a frequência das oscilações globais se aproximem cada vez mais de zero quando aumentamos muito o parâmetro acoplamento  $a$ . Como conseguimos medir  $d_c \nu_\perp = 3/2$  com muita precisão, podemos futuramente tentar resolver esse paradoxo, calculando  $\nu_\perp$  de campo médio analiticamente para descobrirmos a dimensão crítica superior com segurança. Além disso, como sabemos com certeza que  $\beta^c = 1/2$  no campo médio<sup>2</sup>, devemos verificar se realmente  $\gamma = 1/2$  para fazer um teste de autoconsistência através da relação de hiperescala no campo médio,  $\gamma = d_c \nu_\perp - 2\beta^c$ .

Esse efeito espúrio de diminuição da frequência das oscilações globais com o aumento de  $a$  na primeira versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a], além de não-realista, limita a região do diagrama de fase onde há sincronização. Na nossa segunda tentativa (capítulo 4), adicionamos um parâmetro  $\alpha$  (que controla a não-uniformidade) a esse modelo que nos permite transformar continuamente os osciladores uniformes do modelo original ( $\alpha = 0$ ) em elementos excitáveis ( $\alpha = 1$ ). De modo que, na aproximação de CMS, ao aumentarmos  $\alpha$ , a faixa de valores de  $a$  onde há sincronização (que já era limitada no modelo de Wood *et al.*) diminui cada vez mais, até que a partir de um certo  $\alpha = \alpha' < 1$  (ou seja, antes mesmo dos osciladores serem transformados em elementos excitáveis) não há mais sincronização para qualquer valor de  $a$ . Ainda restam algumas perguntas para serem respondidas com relação a esse modelo. Para  $0 < \alpha < \alpha'$  (ou seja, na ausência de qualquer simetria de rotação) até que valor de  $\alpha$  ainda há transição de fase para sincronização em redes regulares? Os expoentes críticos dessa transição dependem de  $\alpha$ ? De que forma?

Os modelos estudados no capítulo 5, que são baseados na segunda versão do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2007b, Wood et al., 2007a], apresentam, tanto na versão com

<sup>1</sup>Pelos resultados de extrapolações mostrados na subseção 3.2.2, ainda não podemos descartar completamente a possibilidade de que a transição de fase de período infinito ocorra em quatro dimensões.

<sup>2</sup>Mantivemos aqui a notação  $\beta^c$  usada no capítulo 3 para evitar confusão.

acoplamento por fase como com acoplamento por pulso, bifurcação de Hopf nas equações de CMS. Concordância quantitativa dos resultados de simulações em grafos completos confirmam a correção dos cálculos de CMS. Devemos no futuro usar a teoria de escala de tamanho finito no grafo completo para descobrir algo sobre a dimensão crítica superior. Assim, devemos testar se as transições de fase para sincronização, previstas pelos resultados de CMS através das bifurcações de Hopf, se realizam em redes regulares. Caso elas realmente ocorram, é muito importante verificar se essas transições estão em alguma classe de universalidade conhecida ou em uma nova, verificando assim se a simetria  $C_3$  ou alguma outra simetria de rotação é necessária para que a transição para sincronização esteja na classe XY. Se houver fortes evidências de que, em um desses modelos estudados no capítulo 5, transições de fase não ocorre em redes regulares, seria interessante conferir se elas acontecem ao menos em redes aleatórias.

Pelos estudos feitos nesta tese, constatamos que a sincronização entre elementos excitáveis ocorre com muito mais dificuldade do que entre osciladores. Aparentemente é muito difícil ocorrer transição de fase para sincronização em MMTCREE. No entanto, mostramos que existem pelo menos dois modelos desse tipo que apresentam sincronização nos resultados de CMS e nas simulações de grafo completo. Embora o estudo nesses dois modelos ainda esteja muito preliminar, o pouco que descobrimos já é bastante interessante, pois, para o nosso conhecimento, nem mesmo previsão de transição de fase para sincronização através de bifurcação de Hopf em cálculos de CMS havia sido relatada em MMTCREE. Devemos lembrar que essa previsão já havia sido feita no modelo SIRS estocástico [Joo e Lebowitz, 2004] pela aproximação de pares [Rozhnova e Nunes, 2009b], mas essa previsão é aparentemente espúria, pois ela não se confirma nem mesmo na rede aleatória [Rozhnova e Nunes, 2009c].

## APÊNDICE A

# SIMULAÇÃO CONDUZIDA POR EVENTOS

Nas simulações de Monte Carlo devemos ter as probabilidades  $p_{trans}$  de transição. No entanto, nos modelos markovianos em tempo contínuo, normalmente temos somente as taxas  $r$ , sendo que comumente a unidade de tempo pode ser definida para que uma das taxas seja igual a um, sem perda de generalidade. Assim, nas simulações convencionais, devemos encontrar as probabilidades de transição em função dessas taxas para cada passo de Monte Carlo que corresponde a um passo de tempo  $\Delta t < 1$ . Essas probabilidades de transição são dadas por  $p_{trans} = r\Delta t$ . Portanto o valor de  $\Delta t$  deve ser escolhido de modo que  $p_{trans}$  nunca seja maior do que 1. Então, se alguma das taxas for muito maior que a unidade, o valor de  $\Delta t$  terá que ser muito pequeno e, conseqüentemente, serão necessários muitos passos de Monte Carlo para que haja um avanço razoável no tempo. Além disso, se alguma das taxas for muito menor que a unidade, teremos que a probabilidade  $p_{trans}$  correspondente a essa taxa será muito pequena. Portanto haverá muitas chamadas ao gerador de números aleatórios sem qualquer mudança no sistema, o que é um desperdício de tempo de processamento computacional. Nesse caso, existe uma alternativa *extremamente* eficaz (com um ganho de tempo de várias ordens de grandeza!) que é a *simulação conduzida por eventos* [Dickman, 2010].

Primeiramente, vamos tratar do caso em que o número de vizinhos não depende do tamanho da rede, como é o caso das redes regulares, aleatórias e de mundo pequeno. Para facilitar o entendimento, vamos explicar *com todos os mínimos detalhes técnicos* como as simulações foram feitas na prática para o modelo estudado no capítulo 3. Quando necessário, esclareceremos o que é válido para qualquer modelo estocástico em tempo contínuo.

Os sítios da rede devem ser divididos em  $n$  conjuntos, de acordo com a taxa de transição a que cada um estiver submetido no momento. No caso do modelo de Wood *et al.* [Wood et al., 2006b, Wood et al., 2006a] estudado no capítulo 3, a taxa de um sítio depende do número de vizinhos nos estados iguais e posteriores ao estado dele. Assim, é fácil deduzir quanto é  $n$  em função do número máximo de vizinhos de um sítio. Seja  $k_{max}$  o número máximo de vizinhos de um sítio. A diferença máxima e mínima entre o número de vizinhos nos estados posterior e igual ao estado dele é  $k_{max}$  e  $-k_{max}$ . Portanto te-

mos  $2k_{max} + 1$  taxas possíveis, que é o número  $n$  de conjuntos. No caso das redes regulares o número de vizinhos de um sítio (que não esteja na borda da rede<sup>1</sup>) é uma constante chamada de número de coordenação da rede  $z$  e, daí, teremos  $n = 2z + 1$ .

A partir de agora, a nossa descrição do método só necessita da independência do número de vizinhos com o tamanho da rede. Além disso, não depende mais do modelo. Sejam  $n_j$  o número de sítios no grupo  $j$ ,

$$R = \sum_{j=1}^n n_j r_j$$

a taxa total de transições e

$$p_j = n_j r_j / R$$

a probabilidade de que o próximo evento envolva um sítio no grupo  $j$ . Os valores de  $r_j$  correspondentes a cada conjunto são fixos, pois não dependem da configuração do sistema, mas somente das regras do modelo. O que muda é em qual conjunto está cada sítio. Seja  $P_m$  a probabilidade acumulada de qualquer conjunto  $j \leq m$  ser sorteado:

$$P_m = \sum_{j=1}^m p_j .$$

Obviamente  $P_0 = 0$ ,  $m \leq n$  e  $P_n = 1$ . Geramos um número aleatório  $x$  uniformemente distribuído no intervalo  $[0, 1)$  e escolhemos o grupo para o próximo evento:

$$j = m , \text{ caso } P_{m-1} \leq x < P_m .$$

Escolhido o grupo  $j$ , escolhemos um dos  $n_j$  sítios desse grupo aleatoriamente, e fazemos a atualização desse sítio *de acordo com a regra do modelo*. O incremento de tempo é  $\Delta t = 1/R$ . Após a transição, é preciso atualizar a lista de sítios (o sítio que mudou e seus primeiros vizinhos podem mudar de grupo).

No caso do grafo completo, a simulação torna-se um pouco mais simples. Seja  $N$  o número de sítios da rede. Se  $N \gg 1$ , podemos considerar que cada sítio é vizinho dele mesmo sem qualquer alteração relevante nos resultados. Desse modo, todos os sítios da rede compartilham da mesma vizinhança (que é a própria rede). Nesse caso, a taxa  $r_j$  de mudar é a mesma para todo sítio no mesmo estado. Portanto o número taxas

---

<sup>1</sup>Quase sempre utilizam-se condições periódicas de contorno, o que faz com que essa ressalva seja desnecessária. Mesmo que esse artifício não seja usado, o nosso raciocínio continua válido, pois o número de vizinhos de um sítio na borda será *menor* do que o dos outros sítios.

possíveis (número de conjuntos  $n$ ) é igual ao número de estados possíveis de um sítio. Agora os valores de  $r_j$  correspondentes a cada conjunto mudam de acordo com a densidade de sítios em cada estado. O resto do procedimento será análogo [Dickman, 2010].

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Albert e Barabási, 2002] Albert, R. e Barabási, A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97.
- [Anderson e May, 1991] Anderson, R. M. e May, R. M. (1991). *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, Oxford.
- [Assis e Copelli, 2008] Assis, V. R. V. e Copelli, M. (2008). Dynamic range of hypercubic stochastic excitable media. *Phys. Rev. E*, 77:011923.
- [Assis e Copelli, 2009] Assis, V. R. V. e Copelli, M. (2009). Discontinuous nonequilibrium phase transitions in a nonlinearly pulse-coupled excitable lattice model. *Phys. Rev. E*, 80:061105.
- [Belousov, 1958] Belousov, B. P. (1958). Oscillation reaction and its mechanism. In *Sbornik Referatov po Radiacioni Medicinie*, page 145, in Russian.
- [Bidaux et al., 1989] Bidaux, R., Boccara, N., e Chaté, H. (1989). Order of the transition versus space dimension in a family of cellular automata. *Phys. Rev. A*, 39(6):3094–3105.
- [Botet et al., 1982] Botet, R., Jullien, R., e Pfeuty, P. (1982). Size scaling for infinitely coordinated systems. *Phys. Rev. Lett.*, 49(7):478–481.
- [Brézin, 1982] Brézin, E. (1982). An investigation of finite size scaling. *J. Phys. (France)*, 43:15–22.
- [Callen, 1985] Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 2nd edition.
- [Dickman, 2010] Dickman, R. (2010). Comunicação privada.
- [Dickman e Maia, 2008] Dickman, R. e Maia, D. S. (2008). The nature of the absorbing-state phase transition in the diffusive epidemic process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(40):405002.

- [Erdős e Rényi, 1960] Erdős, P. e Rényi, A. (1960). *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17.
- [Field e Burger, 1985] Field, R. e Burger, M., editors (1985). *Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems*. Wiley, New York.
- [Gaspard, 1990] Gaspard, P. (1990). Measurement of the instability rate of a far-from-equilibrium steady state at an infinite period bifurcation. *J. Phys. Chem.*, 94(1):1–3.
- [Gerstner e Kistler, 2002] Gerstner, W. e Kistler, W. (2002). *Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity*. Cambridge University Press.
- [Girvan et al., 2002] Girvan, M., Callaway, D. S., Newman, M. E. J., e Strogatz, S. H. (2002). Simple model of epidemics with pathogen mutation. *Phys. Rev. E*, 65:031915.
- [Gottlob e Hasenbusch, 1994] Gottlob, A. P. e Hasenbusch, M. (1994). Three-state anti-ferromagnetic Potts model in three dimensions: universality and critical amplitudes. *Physica A*, 210(1-2):217–236.
- [Gottlob et al., 1993] Gottlob, A. P., Hasenbusch, M., e Meyer, S. (1993). Critical behaviour of the 3D XY-model: A Monte Carlo study. *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.*, B30:838 – 841.
- [Grassberger, 1982] Grassberger, P. (1982). On phase transitions in Schlögl’s second model. *Z. Phys. B*, 47(4):365–374.
- [Grassberger e de la Torre, 1979] Grassberger, P. e de la Torre, A. (1979). Reggeon field-theory (Schlögl 1st model) on a lattice - Monte-Carlo calculations of critical behavior. *Ann. Phys.*, 122(2):373–396.
- [Grinstein et al., 1989] Grinstein, G., Lai, Z.-W., e Browne, D. A. (1989). Critical phenomena in a nonequilibrium model of heterogeneous catalysis. *Phys. Rev. A*, 40(8):4820–4823.
- [Harris, 1974] Harris, T. E. (1974). Contact interactions on a lattice. *Ann. Probab.*, 2(6):969–988.
- [Hinrichsen, 2000a] Hinrichsen, H. (2000a). First-order transitions in fluctuating 1+1-dimensional nonequilibrium systems. arXiv:cond-mat/0006212.

- [Hinrichsen, 2000b] Hinrichsen, H. (2000b). Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Adv. Phys.*, 49(7):815–958.
- [Hohenberg, 1967] Hohenberg, P. C. (1967). Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.*, 158(2):383–386.
- [Huang, 1987] Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons.
- [Ising, 1925] Ising, E. (1925). Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258.
- [Itoh e Tainaka, 1994] Itoh, Y. e Tainaka, K. (1994). Stochastic limit cycle with power-law spectrum. *Phys. Lett. A*, 189:37–42.
- [Janke e Villanova, 1997] Janke, W. e Villanova, R. (1997). Three-dimensional 3-state Potts model revisited with new techniques. *Nucl. Phys. B*, 489(3):679–696.
- [Janssen, 1981] Janssen, H. K. (1981). On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Z. Phys. B*, 42(2):151–154.
- [Jensen, 1991] Jensen, I. (1991). Universality class of a one-dimensional cellular automaton. *Phys. Rev. A*, 43(6):3187–3189.
- [Jensen, 1992] Jensen, I. (1992). Critical behavior of the three-dimensional contact process. *Phys. Rev. A*, 45(2):R563–R566.
- [Jensen, 1993] Jensen, I. (1993). Conservation laws and universality in branching annihilating random-walks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26(16):3921–3930.
- [Jian-Yue et al., 2006] Jian-Yue, G., Xin-Jian, X., Zhi-Xi, W., e Ying-Hai, W. (2006). Synchronization of coupled oscillators on Newman-Watts small-world networks. *Chinese Physics Letters*, 23(6):1410.
- [Jones e Young, 2005] Jones, J. L. e Young, A. P. (2005). Finite-size scaling of the correlation length above the upper critical dimension in the five-dimensional Ising model. *Phys. Rev. B*, 71(17):174438.
- [Joo e Lebowitz, 2004] Joo, J. e Lebowitz, J. L. (2004). Pair approximation of the stochastic susceptible-infected-recovered-susceptible epidemic model on the hypercubic lattice. *Phys. Rev. E*, 70:036114.

- [Kai et al., 1990] Kai, S., Zimmermann, W., Andoh, M., e Chizumi, N. (1990). Local transition to turbulence in electrohydrodynamic convection. *Phys. Rev. Lett.*, 64(10):1111–1114.
- [Kinouchi e Copelli, 2006] Kinouchi, O. e Copelli, M. (2006). Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nat. Phys.*, 2:348–351.
- [Koch e Segev, 1998] Koch, C. e Segev, I., editors (1998). *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks*. MIT Press, 2nd edition.
- [Kolesik e Suzuki, 1995] Kolesik, M. e Suzuki, M. (1995). Critical exponents of the 3D antiferromagnetic three-state Potts model using the coherent-anomaly method. *Physica A*, 216(4):469–477.
- [Kuperman e Abramson, 2001] Kuperman, M. e Abramson, G. (2001). Small world effect in an epidemiological model. *Phys. Rev. Lett.*, 86(13):2909–2912.
- [Kuramoto, 1975] Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In Araki, H., editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, pages 420–422, New York, NY, USA. Springer.
- [Kuramoto, 1984] Kuramoto, Y., editor (1984). *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Dover, Berlin.
- [Laurent, 2002] Laurent, G. (2002). Olfactory network dynamics and the coding of multidimensional signals. *Nat. Rev. Neurosci.*, 3(11):884–895.
- [Lewis e Rinzel, 2000] Lewis, T. J. e Rinzel, J. (2000). Self-organized synchronous oscillations in a network of excitable cells coupled by gap junctions. *Network: Comput. Neural Syst.*, 11:299–320.
- [Lindner et al., 2004] Lindner, B., García-Ojalvo, J., Neiman, A., e Schimansky-Geier, L. (2004). Effects of noise in excitable systems. *Phys. Rep.*, 392:321–424.
- [Marro e Dickman, 1999] Marro, J. e Dickman, R. (1999). *Nonequilibrium Phase Transition in Lattice Models*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Mermin, 1968] Mermin, N. D. (1968). Crystalline order in two dimensions. *Phys. Rev.*, 176(1):250–254.

- [Mermin e Wagner, 1966] Mermin, N. D. e Wagner, H. (1966). Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17(22):1133–1136.
- [Murray, 1980] Murray, J. D. (1980). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, New York.
- [Newman e Watts, 1999] Newman, M. E. J. e Watts, D. J. (1999). Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys. Rev. E*, 60(6):7332–7342.
- [Ódor, 2008] Ódor, G. (2008). *Universality In Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations*. World Scientific Publishing Company.
- [Ódor et al., 1993] Ódor, G., Boccara, N., e Szabó, G. (1993). Phase-transition study of a one-dimensional probabilistic site-exchange cellular automaton. *Phys. Rev. E*, 48(4):3168–3171.
- [Ódor e Dickman, 2009] Ódor, G. e Dickman, R. (2009). On the absorbing-state phase transition in the one-dimensional triplet creation model. *J. Stat. Mech.*, (08):P08024.
- [Pelissetto, 2002] Pelissetto, A. (2002). Critical phenomena and renormalization-group theory. *Phys. Rep.*, 368(6):549–727.
- [Pikovsky et al., 2001] Pikovsky, A., Rosenblum, M., e Kurths, J. (2001). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Prager et al., 2003] Prager, T., Naundorf, B., e Schimansky-Geier, L. (2003). Coupled three-state oscillators. *Physica A*, 325:176–185.
- [Reimann et al., 1999] Reimann, P., Van den Broeck, C., e Kawai, R. (1999). Nonequilibrium noise in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 60(6):6402–6406.
- [Risau-Gusman e Abramson, 2007] Risau-Gusman, S. e Abramson, G. (2007). Bounding the quality of stochastic oscillations in populations models. *Eur. Phys. J. B*, 60:515–520.
- [Risler et al., 2004] Risler, T., Prost, J., e Jülicher, F. (2004). Universal critical behavior of noisy coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 93(17):175702.
- [Risler et al., 2005] Risler, T., Prost, J., e Jülicher, F. (2005). Universal critical behavior of noisy coupled oscillators: A renormalization group study. *Phys. Rev. E*, 72(1):016130.

- [Rozhnova e Nunes, 2009a] Rozhnova, G. e Nunes, A. (2009a). Cluster approximations for infection dynamics on random networks. *Phys. Rev. E*, 80:051915.
- [Rozhnova e Nunes, 2009b] Rozhnova, G. e Nunes, A. (2009b). Fluctuations and oscillations in a simple epidemic model. *Phys. Rev. E*, 79:041922.
- [Rozhnova e Nunes, 2009c] Rozhnova, G. e Nunes, A. (2009c). SIRS dynamics on random networks: Simulations and analytical models. In Zhou, J., editor, *Complex Sciences*, volume 4, pages 792–797. Springer Berlin Heidelberg. arXiv:0812.1812v1 [q-bio.PE].
- [Sakaguchi, 1988] Sakaguchi, H. (1988). Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progr. Theoret. Phys.*, 79(1):39–46.
- [Shew et al., 2009] Shew, W., Yang, H., Petermann, T., Roy, R., e Plenz, D. (2009). Neuronal avalanches imply maximum dynamic range in cortical networks at criticality. *J. Neurosci.*, 29(49):15595–15600.
- [Strogatz, 1997] Strogatz, S. H. (1997). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [Strogatz, 2000] Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143:1–20.
- [Strogatz, 2004] Strogatz, S. H. (2004). *Sync: How Order Emerges From Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life*. Hyperion, New York.
- [Strogatz e Stewart, 1993] Strogatz, S. H. e Stewart, I. (1993). Coupled oscillators and biological synchronization. *Sci. Am.*, 269(6):102–109.
- [Tainaka, 1988] Tainaka, K. (1988). Lattice model for the Lotka-Volterra system. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 57(8):2588–2590.
- [Tainaka, 1989] Tainaka, K. (1989). Stationary pattern of vortices or strings in biological systems: Lattice version of the Lotka-Volterra model. *Phys. Rev. Lett.*, 63(24):2688–2691.
- [Tainaka, 1994] Tainaka, K. (1994). Vortices and strings in a model ecosystem. *Phys. Rev. E*, 50(5):3401.

- [Tainaka e Itoh, 1991] Tainaka, K. e Itoh, Y. (1991). Topological phase transition in biological ecosystems. *Europhys. Lett.*, 15(4):399–404.
- [Takeuchi, 2008] Takeuchi, K. A. (2008). Scaling of hysteresis loops at phase transitions into a quasiabsorbing state. *Phys. Rev. E*, 77:030103(R).
- [Tholence, 1980] Tholence, J. L. (1980). On the frequency dependence of the transition temperature in spin glasses. *Solid State Communications*, 35:113.
- [Uhlhaas et al., 2009] Uhlhaas, P. J., Pipa, G., Lima, B., Melloni, L., Neuenschwander, S., Nikolić, D., e Singer, W. (2009). Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status. *Front. Integr. Neurosci.*, 3:17.
- [Watts e Strogatz, 1998] Watts, D. J. e Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:440–442.
- [Wiener, 1958] Wiener, N. (1958). *Nonlinear Problems in Random Theory*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [Wiener, 1961] Wiener, N. (1961). *Cybernetics*. MIT Press, Cambridge, MA, 2nd edition.
- [Wilson et al., 1995] Wilson, W. G., Mccauley, E., e Deroos, A. M. (1995). Effect of dimensionality on Lotka-Volterra predator-prey dynamics: Individual based simulation results. *Bull. Math. Biol.*, 57(4):507–526.
- [Winfree, 1967] Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16(1):15–42.
- [Winfree, 2001] Winfree, A. T. (2001). *The Geometry of Biological Time*, volume 12 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition.
- [Wood et al., 2006a] Wood, K., Van den Broeck, C., Kawai, R., e Lindenberg, K. (2006a). Critical behavior and synchronization of discrete stochastic phase-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 74(3):031113.
- [Wood et al., 2006b] Wood, K., Van den Broeck, C., Kawai, R., e Lindenberg, K. (2006b). Universality of synchrony: Critical behavior in a discrete model of stochastic phase-coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 96:145701.
- [Wood et al., 2007a] Wood, K., Van den Broeck, C., Kawai, R., e Lindenberg, K. (2007a). Continuous and discontinuous phase transitions and partial synchronization in stochastic three-state oscillators. *Phys. Rev. E*, 76(4):041132.

- [Wood et al., 2007b] Wood, K., Van den Broeck, C., Kawai, R., e Lindenberg, K. (2007b). Effects of disorder on synchronization of discrete phase-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 75(4):041107.