



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

VARIEDADES DE CONTATO E FÍSICA-MATEMÁTICA

por

Getúlio Corrêa Bulhões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Orientador-UFPE)

Prof. Jairo Rolim Lopes de Almeida (DF – UFPE)

Prof. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (DM - UFPE)

Recife - PE, Brasil
Março - 2006

Bulhões, Getúlio Corrêa
Variedades de contato e física-matemática /
Getúlio Corrêa Bulhões. – Recife : O Autor, 2006.
93 folhas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal
de Pernambuco. CCEN. Física, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Física-matemática – Geometria diferencial. 2.
Variedades de contato – Superfícies imersas –
Dimensão ímpar. 3. Geometria de Finsler – Definições
e propriedades básicas – Propagação de luz. 4.
Modelo geométrico – Meios anisotrópicos. I. Título.

501
530

CDU (2.ed.)
CDD (22.ed.)

UFPE
BC2006-192



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++) 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++) 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Getúlio Corrêa Bulhões

VARIEDADES DE CONTATO E FÍSICA-MATEMÁTICA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Fernando Jorge Sampaio Moraes (Presidente e Orientador) da Universidade Federal da Paraíba, Jairo Rolim Lopes de Almeida, da Universidade Federal de Pernambuco e Eduardo Shirlippe Goes Leandro do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, consideram o candidato:

() Aprovado com Distinção

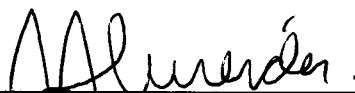
(☒) Aprovado

() Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em seis de março de 2006.



Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Presidente e Orientador



Prof. Jairo Rolim Lopes de Almeida



Prof. Eduardo Shirlippe Góes Leandro

Resumo

Este trabalho divide-se em duas partes distintas, ambas dedicadas à Geometria Diferencial.

Na primeira parte, introduzimos um novo invariante geométrico, criado por R.R.Montes e J.A.Verderesi¹, para estudar superfícies imersas em esferas de dimensão ímpar. Nos detemos exclusivamente à esfera tridimensional, apresentando uma caracterização do Toro de Clifford como a única superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ com “Ângulo de Contato” constante.

A segunda parte inicia-se com uma rápida revisão das definições e propriedades básicas da Geometria de Finsler. Na sequência analisamos um modelo geométrico para a propagação da luz em meios anisotrópicos, que era tido como finsleriano. Mostramos que, ao menos no caso originalmente considerado de um cristal líquido, a geometria efetiva é sempre riemanniana.

Há uma modesta tentativa de conectar os dois assuntos. Comentamos como a estrutura de contato presente no fibrado projetivizado de uma variedade finsleriana pode ter sido o ponto de partida dos estudos de S.S.Chern em Geometria finsleriana.

palavras-chave: Física-Matemática; Geometria Diferencial; Óptica Geométrica

¹R.R.Montes, J.A.Verderesi, *Contact Angle for Immersed Surfaces in $\mathbb{S}^5$* , a ser publicado no “Differential Geometry and Its Applications”.

Abstract

This work may be viewed as divided into two distinct parts although in the same subject, the Differential Geometry. In the first one is introduced a new geometric invariant to study immersed surfaces in odd dimensional spheres, which was created by R.R.Montes and J.A.Verderesi². We restricted ourselves to the 3-dimensional case. A caraterization of the Clifford Torus as the only minimal surface in $\mathbb{S}^3$ with constant “contact angle” is presented.

The second part begins with a brief revision of definitions and basic properties of Finsler Geometry. In the following, we analyse a geometrical model for the propagation of rays in an anisotropic inhomogeneous medium. The effective geometry was thought to be finslerian, but we show that, at least in the case of a liquid crystal originally considered, the geometry is always riemannian.

A modest attempt in linking the two parts was made. We comment how the contact structure of the projetivisized tangent bundle of a Finsler manifold could be the starting point of S.S.Chern in his works in Finsler Geometry.

keywords: Mathematical Physics; Differential Geometry; Geometric Optics

²R.R.Montes, J.A.Verderesi, *Contact Angle for Immersed Surfaces in $\mathbb{S}^5$* , to appear in Differential Geometry and Its Applications.

Advertência:

Alguns dos rodapés ao longo do texto expressam a opinião do autor, e portanto devem ser encarados com este valor.

Sumário

Resumo	1
Abstract	2
Advertência	3
1 Preliminares	6
1.1 Variedades de Contato	6
1.2 Propriedades	11
1.3 Estrutura Canônica de Contato	14
PARTE I	17
2 Ângulo de Contato e o Toro de Clifford	18
2.1 Introdução	18
2.2 Base para $T\mathbb{S}^3$ Adaptada à Distribuição de Contato . .	21
2.3 Ângulo de Contato para $S \subseteq \mathbb{S}^3$	24
2.4 Formas de Conexão de $S \subseteq \mathbb{S}^3$	27

2.5	Nova Caracterização do Toro de Clifford	31
3	Apêndice	34
3.1	O Lema de Hopf	34
PARTE II		38
4	Geometria Finsleriana	39
4.1	Definições e Propriedades	39
4.2	Forma de Hilbert	48
4.3	Estrutura de Contato	56
4.4	Geodésicas	62
5	Aplicação: Luz em Meios Anisotrópicos	66
5.1	O modelo de Joets/Ribotta	68
5.1.1	Interpretação Dinâmica	68
5.1.2	Interpretação Geométrica de Joets/Ribotta . . .	71
5.2	Luz em Nemáticos com Defeitos Topológicos	73
5.3	O Tensor de Cartan	76
	Conclusões e Comentários Finais	84
	Referências	86

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo destina-se a apresentar as definições e explicar os conceitos envolvidos¹ nas duas partes deste trabalho. Trataremos apenas do mínimo necessário.

1.1 Variedades de Contato

Definição 1.1.1

¹Infelizmente, tais definições não serão totalmente acessíveis caso o leitor não tenha ao menos noções de variedades, campos e formas diferenciais, geometria riemanniana, fibrados e o método do referencial móvel.

Uma variedade C^∞ $(2n + 1)$ -dimensional M é dita possuir uma **estrutura de contato** se existe uma 1-forma η globalmente definida tal que $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ sobre M .



Observação 1.1.1

Há uma discordância na literatura sobre o que chamar de variedade de contato. Em “R. Abraham, J.E. Marsden, *Foudations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company” esta definição é chamada de estrutura de contato exata. Seguimos aqui a nomenclatura usada pelos geômetras.



Definição 1.1.2

η é chamada de **forma de contato**.



Definição 1.1.3

Uma variedade que possui uma estrutura de contato é chamada de **variedade de contato**.



Para termos uma intuição sobre tais objetos, é necessário que interpretemos geometricamente a forma de contato. Vamos, momentaneamente, nos restringir a $\mathbb{R}^3$, que é uma variedade de contato com uma quantidade infinita de possíveis estruturas de contato.

Como pensar sobre η ? Considere a equação pfaffiana $\eta = 0$. Resolver esta equação significa encontrar campos vetoriais não-nulos X tais que $\eta(X) = 0$. Ou seja, queremos descrever o núcleo da 1-forma η :

$$\ker(\eta) = \{ X \mid \eta(X) = 0 \} \subseteq T\mathbb{R}^3$$

Em geral, temos a

Definição 1.1.4

Chamamos $\Delta = \ker(\eta)$, de **distribuição de contato** associada à forma de contato η .



Temos que

$$X \in \Delta \Leftrightarrow \eta(X) = 0$$

Em $\mathbb{R}^3$, fixado η teríamos $\eta|_{(x_0, y_0, z_0)} = a_1^{(0)}dx + a_2^{(0)}dy + a_3^{(0)}dz$, onde $a_i^{(0)} = a_i(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Seja $X = x_1(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + x_2(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + x_3(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$ um campo tal que $\eta(X)|_{(x_0, y_0, z_0)} = 0$, i.e.,

$$a_1^{(0)}x_1(x_0, y_0, z_0) + a_2^{(0)}x_2(x_0, y_0, z_0) + a_3^{(0)}x_3(x_0, y_0, z_0) = 0$$

A equação acima nos diz que X “anula” η no ponto (x_0, y_0, z_0) se, e somente se, $X|_{(x_0, y_0, z_0)}$ está no plano perpendicular ao vetor

$$(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(x_0, y_0, z_0)$$

que é o dual da 1-forma η . Variando o ponto, imaginamos um “campo de hiperplanos”, i.e., o conjunto de pares compostos por: ponto de $\mathbb{R}^3$ e plano por este ponto. Um elemento deste conjunto é chamado um **elemento de contato**.

Uma outra possibilidade é usar uma correspondência biunívoca que há entre os elementos de contato e retas que passam pelo ponto e têm a direção do vetor dual ξ . Note que isso não tem nenhuma dependência com a métrica. Portanto, ao tratarmos com η , podemos alternativamente pensar num conjunto de pares: ponto e reta pelo ponto.

Focalizando a atenção ao ponto, vemos que o conjunto de todas as possíveis formas de contato podem ser parametrizadas pelo conjunto de todas as retas passando por aquele ponto, ou seja, pelo plano projetivo “centrado no ponto”.

Mais abstratamente, este pensamento nos conduz a considerar o fibrado tangente projetivizado PTM da variedade M . Então, um campo de hiperplanos pode ser pensado como uma secção do fibrado $PTM \xrightarrow{\pi} M$ cujas fibras PTM_m , $m \in M$ é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{\dim M - 1}$, o espaço de linhas em $T_m M$. A dimensão de PTM é $2\dim M - 1$.²

Definição 1.1.5

*Uma subvariedade N r -dimensional é dita uma **subvariedade integral** de Δ se, e somente se, $\forall X \in TN, X \in \Delta$.*



Definição 1.1.6

*Δ é **maximal** se não for um subconjunto próprio de alguma outra subvariedade integral de dimensão r .*



Como é de praxe em Matemática, após definirmos uma estrutura qualquer, procuramos por situações em que há invariância desta.

Definição 1.1.7

²Na parte II adiante, utilizaremos estas idéias em ordem reversa.

Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito uma **transformação de contato** de M se, e só se, $f^*\eta = \tau\eta$, para alguma $\tau : M \rightarrow (\mathbb{R}_+ - 0)$, $\tau \in C^\infty$.



A coleção de todas as transformações de contato constituem um pseudogruppo. Isso foi utilizado por S. Lie no estudo de EDP's. O estudos das transformações de contato é, na verdade, o que dá origem a todas as definições anteriores. Elas aparecem em vários contextos como EDP, mecânica e geometria diferencial. Foram estudadas também por Hamilton, Huygens, Sasaki, entre outros.

1.2 Propriedades

Uma variedade de contato M é sempre orientável, e admite um campo vetorial ξ tal que

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{e} \quad d\eta(\xi, X) = 0, \forall X \in TM$$

Definição 1.2.1

*Tal campo vetorial ξ é chamado de **campo de Reeb** de Δ .*



Os dois teoremas a seguir foram extraídos de um mesmo artigo³. Prová-los aqui significaria transcrever toda publicação, sendo preferível, portanto, que o leitor leia o trabalho original⁴.

Teorema 1.2.1 (Sasaki)

Seja M uma variedade de contato e $\dim M = 2n + 1$. Então, a maior dimensão de uma subvariedade integral é n .



Definição 1.2.2

*Tais subvariedades são chamadas **legendrianas**.*



O próximo teorema dá uma caracterização geométrica das transformações de contato.

Teorema 1.2.2 (Sasaki)

³Sasaki, S., *A characterization of contact transformations*, Tôhoku Math. J. 16 (1964) 285-290.

⁴O qual está didaticamente escrito.

Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ transforma subvariedades legendrianas em subvariedades legendrianas se, e somente se, f for uma transformação de contato.



Embora não seja necessário ao longo deste trabalho, é interessante citar que a classificação topológica das variedades de contato tem sido de grande interesse nas últimas décadas. O teorema abaixo⁵ afirma que localmente, todas as variedades de contato são difeomorfas.

Teorema 1.2.3 (Darboux)

Seja η uma 1-forma sobre M^{2n+1} . Suponha que $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$. Então, na vizinhança de cada ponto existem coordenadas

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z)$$

tal que $\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$.



⁵Veja uma demonstração direta em “Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall”.

1.3 Estrutura Canônica de Contato

O teorema abaixo⁶ garante a existência da estrutura de contato de $\mathbb{S}^3$.

Teorema 1.3.1 (Gray)

Seja $i : M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{2n+2}$ tal que

$$T_m M \cap \{0\} = \emptyset, \forall m \in M^{2n+1}$$

Então, M^{2n+1} é uma variedade de contato.

Dem.:

Sejam $(x^1, \dots, x^{2n+1})$ coordenadas locais sobre $\mathbb{R}^{2n+2}$ e considere a 1-forma

$$\eta = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots + x^{2n+1} dx^{2n+2} - x^{2n+2} dx^{2n+1}$$

Sejam $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n+1}$ $2n+1$ vetores linearmente independentes no ponto $\tilde{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{2n+2})$ e defina um vetor $\vec{w}$ em $\tilde{x}_0$ por

$$\vec{w} = (*dx^1(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n+1}), \dots, *dx^{2n+2}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n+1}))$$

⁶Gray, J., *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math., 69 (1959), 421-450.

onde $*$ é o operador estrela de Hodge da métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^{2n+2}$. Temos que $\vec{w}$ é normal ao hiperplano gerado por $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n+1}$. Vendo $\tilde{x}_0$ como um vetor, vê-se facilmente que

$$\eta \wedge (d\eta)^n(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n+1}) = \langle \tilde{x}_0, \vec{w} \rangle$$

Logo, se nenhum espaço tangente de M contém a origem, então o “pullback” de η por i é uma forma de contato sobre M .



Definição 1.3.1

A 1-forma⁷ $\eta = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots + x^{2n+1} dx^{2n+2} - x^{2n+2} dx^{2n+1}$ (da demonstração acima) é chamada de **forma de contato canônica** e a estrutura proveniente desta é a **estrutura canônica de contato**.



Teorema 1.3.2

S^{2n+1} e RP^{2n+1} são variedades de contato.

Dem.:

⁷Que seja entendido que estamos considerando o “pullback” desta.

O caso S^{2n+1} é óbvio. Para $\mathbb{R}P^{2n+1}$, basta notar que a 1-forma η é invariante por reflexões pela origem.



PARTÉ I

Capítulo 2

Ângulo de Contato e o Toro de Clifford

2.1 Introdução

Este capítulo descreve um resultado obtido a partir da estrutura de contato presente em esferas de dimensão ímpar, servindo como ilustração de uma situação geral em que importantes descobertas são desenvolvidas explorando-se, às vezes tacitamente, a estrutura de contato presente no espaço ambiente.

As noções de “ângulo de contato” definido abaixo e “ângulo de holomorfia” foram introduzidas por R.R. Montes e J.A. Verderesi, atualmente professores da UFPB e USP, respectivamente, no artigo *Contact Angle for Immersed Surfaces in S^5* , a ser publicado no “Dif-

ferential Geometry and Its Applications”. A existência do presente capítulo foi possível graças às sugestões e discussões com o professor **Rodrigo Ristow Montes** que conhecemos por ocasião da disciplina de Variedades Diferenciáveis proferida por ele no Departamento de Matemática da **UFPB**. Por motivos “burocráticos”¹, o professor Rodrigo não pôde figurar como co-orientador deste trabalho.

O “ângulo de holomorfia” é análogo ao “ângulo Kähler” inventado por S.S. Chern e seu ex-aluno J.G. Wolfson em *Minimal Surfaces by Moving Frames*, Amer.J. of Math. 105 (1983), sendo este um invariante fundamental para superfícies mínimas imersas em variedades complexas. Usando a técnica do referencial móvel de Cartan, Wolfson² obteve equações para o laplaciano e curvatura gaussiana para superfícies mínimas imersas no espaço projetivo complexo e em uma variedade kähleriana de curvatura seccional constante. Desde então, superfícies mínimas com curvatura gaussiana e ângulo Kähler constante vêm sendo estudadas³ atualmente⁴.

¹Leia-se isto como um **protesto** contra a referida decisão da COMPG do DF-UFPE.

²J.G. Wolfson, *Minimal Surfaces in Complex Manifolds*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley 1982

³T. Ogata, *Curvature Pinching Theorem for Minimal Surfaces with Constant Kähler Angle in Complex Projective Spaces*, Tôhoku Math. J. 43 (1991), 361-374, e

L. Zhenqui, *Counterexamples to the Conjecture on Minimal S^2 into $\mathbb{C}P^n$ with constant Kähler angle*, Manuscripta Math. 88 (1995), 417-431.

⁴A escala de tempo é bastante diferente entre matemáticos e físicos. Enquanto qualquer artigo mais antigo que 10 anos é considerado “velho” pelos físicos, para matemáticos, dependendo da sub-área, este seria relativamente “atual”. Haja vista a conjectura de Poincaré, em que uma (possível) demonstração já foi publicada há mais de 2 anos e até hoje não é tida como provada, dada a

Superfícies mínimas em esferas foram estudadas por Kenmotsu⁵, que classificou toros mínimos em esferas de dimensão ímpar, e Bryant⁶, que provou a não-existência de imersões mínimas de curvatura gaussiana constante negativa.

O fato de o Toro de Clifford ser a única superfície mínima com curvatura gaussiana nula em $\mathbb{S}^3$ é um resultado conhecido em geometria das imersões e que será usado abaixo (sem demonstração)⁷. Uma pergunta natural é se seria possível classificar todas as superfícies mínimas deste espaço. Esta pergunta tem importância fundamental em vários contextos que estão muito além do escopo deste trabalho. Uma conjectura, conhecida como “*conjectura de Lawson*”, afirma que *o Toro de Clifford é a **única** superfície mínima em $\mathbb{S}^3$* . Este é um problema em aberto há mais de 70 anos.

Nas próximas secções mostraremos como o ângulo de contato produz uma nova caracterização do Toro de Clifford, constituindo-se num invariante geométrico capaz de trazer resultados inesperados em

complexidade das técnicas envolvidas. Esta diferença, na opinião do autor, tem origem no fato de a fronteira do conhecimento em Física ser de muito mais fácil acesso em várias de suas sub-áreas.

⁵K. Kenmotsu, *On compact minimal surfaces with non-negative gaussian curvature in a space of constant curvature, I*, Tôhoku Math. J. 25 (1973).

K. Kenmotsu, *On compact minimal surfaces with non-negative gaussian curvature in a space of constant curvature, II*, Tôhoku Math. J. 27 (1975).

K. Kenmotsu, *On a parametrization of minimal immersions of $\mathbb{R}^2$ into $\mathbb{S}^5$* , Tôhoku Math. J. 27 (1975)

⁶R. Bryant, *Minimal Surfaces of Constant Curvature in $\mathbb{S}^n$* , Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985).

⁷Veja, por exemplo, o livro *Método do Referencial Móvel* de M.P. do Carmo

várias áreas diferentes, ou até mesmo na busca de uma demonstração ou contra-exemplo para a conjectura de Lawson.

Dada a atualidade deste tema, pouco foi feito nesta direção, e *absolutamente nada* foi feito fora do âmbito da geometria diferencial.

2.2 Base para $T\mathbb{S}^3$ Adaptada à Distribuição de Contato

Um referencial real, ortonormal e positivamente orientado de $T\mathbb{S}^3$ pode ser escolhido arbitrariamente. Tomaremos $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ com a exigência de que $\vec{f}_3$ seja igual ao campo de Reeb da estrutura de contato canônica de $\mathbb{S}^3$. Nestas condições, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ é uma base ortonormal positiva da distribuição canônica de contato Δ , sem nenhuma particularidade adicional. Uma tal base é chamada *adaptada* a distribuição.

Considerado como subconjunto de $\mathbb{C}^2$, Δ tem uma estrutura complexa. Tiramos vantagem disso escrevendo

$$\vec{f}_2 = i\vec{f}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}_1 = -i\vec{f}_2 \quad (2.1)$$

A este referencial corresponde uma base dual de co-vetores

$$\{\phi^1, \phi^2, \phi^3\} \in T^*\mathbb{S}^3$$

na qual ϕ^3 é precisamente a forma de contato canônica de $\mathbb{S}^3$. Denotaremos por d a diferencial exterior e por D a derivada covariante em $\mathbb{S}^3$.

As formas de conexão Φ_i^j são as 1-formas que desempenham o papel de coeficientes das derivadas covariantes do campo com relação à mesma base. Ou seja, $\Phi_i^j = \langle D\vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle$ e

$$D\vec{f}_i = \sum_{j=1}^3 \vec{f}_j \Phi_i^j \quad (2.2)$$

Derivando $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle = 0$, vemos que $\Phi_i^j + \Phi_j^i = 0$ (anti-simetria).

Da particular escolha de $\vec{f}_{3p} = \vec{\xi}(p) = iz$ e da unicidade das formas de conexão, encontraremos algumas relações.

Como $dz = \mathbf{Id}$, temos

$$\begin{aligned} d\vec{f}_3 &= i \left(\vec{f}_1 \phi^1 + \vec{f}_2 \phi^2 + \vec{f}_3 \phi^3 \right) \\ \Rightarrow d\vec{f}_3 &= -\vec{f}_1 \phi^2 + \vec{f}_2 \phi^1 - z \phi^3 \end{aligned}$$

na qual foi usado 2.1.

Sendo z perpendicular a $\mathbb{S}^3$, e $D\vec{f}_3$ a projeção de $d\vec{f}_3$ em $T\mathbb{S}^3$, segue que

$$D\vec{f}_3 = -\vec{f}_1 \phi^2 + \vec{f}_2 \phi^1$$

De 2.2 e da anti-simetria, temos

$$D\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \Phi_3^1 + \vec{f}_2 \Phi_3^2$$

Comparando as duas expressões anteriores obtemos da unicidade de D

$$\begin{cases} \Phi_3^1 = -\phi^2 \\ \Phi_3^2 = \phi^1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Analisaremos agora as equações de estrutura de $\mathbb{S}^3$:

$$\begin{cases} d\phi^i + \sum_{j=1}^3 \Phi_j^i \wedge \phi^j = 0 \quad (\text{primeiras}) \\ d\Phi_j^i + \sum_{k=1}^3 \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k = \Omega_j^i \quad (\text{segundas}) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

onde $\Omega_j^i = \phi^i \wedge \phi^j$ são as formas de curvatura riemanniana de $\mathbb{S}^3$.

Substituindo 2.3 nas primeiras equações de estrutura, obtemos

$$d\phi^1 + (\Phi_2^1 + \phi^3) \wedge \phi^2 = 0$$

$$d\phi^2 + (\Phi_1^2 - \phi^3) \wedge \phi^1 = 0$$

$$d\phi^3 - 2\phi^1 \wedge \phi^2 = 0$$

Substituindo 2.3 nas segundas equações de estrutura, chegamos

a

$$d\Phi_2^1 - 2\phi^1 \wedge \phi^2 = 0$$

$$d\phi^1 + (\Phi_2^1 + \phi^3) \wedge \phi^2 = 0$$

$$d\phi^2 + (\Phi_1^2 - \phi^3) \wedge \phi^1 = 0$$

⁸veja, e.g., M.P. do Carmo, *O Método do Referencial Móvel*, IMPA.

Eliminando as repetições, a conclusão é que as equações

$$\begin{cases} d\phi^1 + (\Phi_2^1 + \phi^3) \wedge \phi^2 = 0 \\ d\phi^2 - (\Phi_2^1 + \phi^3) \wedge \phi^1 = 0 \\ d\phi^3 - 2\phi^1 \wedge \phi^2 = 0 \\ d\Phi_2^1 - 2\phi^1 \wedge \phi^2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

exprimem as restrições impostas sobre a escolha da base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$. Note a troca $\Phi_1^2 = -\Phi_2^1$.

2.3 Ângulo de Contato para $S \subseteq \mathbb{S}^3$

Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{S}^3$. Num ponto de S , a intersecção entre o plano tangente à superfície e um hiperplano da distribuição de contato é uma linha ou o próprio hiperplano⁹.

Uma distribuição de contato é totalmente não-integrável. Por isso nenhuma superfície imersa em $\mathbb{S}^3$ pode ser tangente aos hiperplanos da distribuição Δ , exceto em pontos isolados. Caso contrário, Δ seria integrável numa vizinhança do ponto de tangência.

⁹A curva que é tangente à distribuição de contato é chamada um **nó legendriano**. O estudo de tais objetos constitui grande parte do progresso feito recentemente em Variedades de Contato. Este é um tema interessantíssimo, mas que envolve conhecimentos profundos de Topologia Combinatória.

Seja

$$U = \{ p \in S \mid \dim(\Delta_p \cap T_p S) = 1 \}$$

Pela discussão acima, U é um conjunto aberto e denso em S , uma vez que $\dim(\Delta_p \cap T_p S) = 2$ implicaria a coincidência de um hiperplano de *Delta* com um plano tangente à S . Portanto, em cada ponto p de S podemos escolher um vetor unitário $\vec{e}_1$ na intersecção $\Delta_p \cap T_p S$ de modo contínuo. Nos pontos $q \notin U$ a escolha se dá por continuidade, i.e.,

$$\vec{e}_1(q) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow q} \vec{e}_1(p)$$

Definido $\vec{e}_1$, tomamos $\vec{e}_3$ como sendo o vetor normal a S em p , e $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \in TS$ de modo que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ seja *um referencial ortonormal positivamente orientado em $\mathbb{S}^3$ adaptado a S* . Estendendo esta construção a todos os pontos de S , obtemos um referencial de Darboux para uma curva, um nó legendriano contido em S , uma vez que $\vec{e}_1$ é tangente à curva. Note que $\vec{e}_1$ está unicamente determinado a menos de um sinal.

Queremos estabelecer um vínculo entre o referencial construído acima e o referencial $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ da secção anterior. Como $\vec{f}_1 \in \Delta$ não foi fixado, tomaremos

$$\vec{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1$$

Portanto, a definição abaixo torna-se perfeitamente natural:

Definição 2.3.1 (R.R.Montes/J.A.Verderesi)

*O **ângulo de contato** $\wp$ para uma superfície é o ângulo complementar entre a distribuição de contato e o plano tangente da superfície.*



Ou seja,

$$\cos(\wp) = \langle \vec{\xi}, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{f}_3, \vec{e}_2 \rangle$$

Assim,

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{e}_2 = \sin(\wp)\vec{f}_2 + \cos(\wp)\vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = -\cos(\wp)\vec{f}_2 + \sin(\wp)\vec{f}_3 \end{cases} \quad (2.6)$$

Invertendo,

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \sin(\wp)\vec{e}_2 - \cos(\wp)\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \cos(\wp)\vec{e}_2 + \sin(\wp)\vec{e}_3 \end{cases} \quad (2.7)$$

Seja $\{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ a base dual de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, então, as relações duais daquelas acima são

$$\begin{cases} \epsilon^1 = \phi^1 \\ \epsilon^2 = \sin(\wp)\phi^2 + \cos(\wp)\phi^3 \\ \epsilon^3 = -\cos(\wp)\phi^2 + \sin(\wp)\phi^3 \end{cases} \quad (2.8)$$

e

$$\begin{cases} \phi^1 &= \epsilon^1 \\ \phi^2 &= \sin(\wp)\epsilon^2 - \cos(\wp)\epsilon^3 \\ \phi^3 &= \cos(\wp)\epsilon^2 + \sin(\wp)\epsilon^3 \end{cases} \quad (2.9)$$

Obtivemos a relação entre os dois referenciais e co-referenciais. Na verdade uma rotação no “eixo” $\vec{e}_1$ e ângulo $(\frac{\pi}{2} - \wp)$ de um para o outro.

2.4 Formas de Conexão de $S \subseteq \mathbb{S}^3$

Agora que definimos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$, queremos calcular as formas de conexão E_j^i , confrontando as equações de estrutura deste referencial adaptado a S com aquelas do referencial $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ e $\{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ adaptado a Δ . A importância das E_j^i 's reside no fato de suas diferenciais estarem relacionadas com a curvatura de S .

Sobre S , $\epsilon^3 = 0$. Substituindo em 2.9 chegamos a

$$\begin{cases} \phi^1 &= \epsilon^1 \\ \phi^2 &= \sin(\wp)\epsilon^2 \\ \phi^3 &= \cos(\wp)\epsilon^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Calculando a diferencial $d\epsilon^i$ a partir de 2.8 e usando 2.5 juntamente com 2.10 obtemos

$$\begin{cases} d\epsilon^2 - \sin(\wp) [\Phi_2^1 - \cos(\wp)\epsilon^2] \wedge \epsilon^1 = 0 \\ d\epsilon^3 + d\wp \wedge \epsilon^2 - \cos(\wp)\Phi_2^1 \wedge \epsilon^1 + [1 + \sin^2(\wp)] \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Comparando a segunda equação com

$$d\epsilon^2 + E_1^2 \wedge \epsilon^1 + E_3^2 \wedge \underbrace{\epsilon^3}_{=0} = 0$$

encontramos (note a troca $E_1^2 = -E_2^1$)

$$E_2^1 = \sin(\wp) [\Phi_2^1 - \cos(\wp)\epsilon^2] \quad (2.12)$$

Para encontrarmos E_3^1 e E_3^2 , procederemos calculando $D\vec{e}_3$, a derivada covariante de S , e comparando o resultado com $D\vec{e}_3 = \vec{e}_1 E_3^1 + \vec{e}_2 E_3^2$. De 2.6 segue

$$\begin{aligned} D\vec{e}_3 &= -\vec{f}_1 [\cos(\wp)\Phi_2^1 + \sin(\wp)\phi^2] + \vec{f}_2 \sin(\wp) (d\wp + \phi^1) + \\ &\quad + \vec{f}_3 \cos(\wp) (d\wp + \phi^1) \end{aligned}$$

Substituindo 2.10 acima e escrevendo na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ através de 2.7, encontramos

$$D\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 [\cos(\wp)\Phi_2^1 + \sin^2(\wp)\epsilon^2] + \vec{e}_2 (d\wp + \epsilon^1)$$

logo,

$$\begin{cases} E_3^1 &= -\cos(\wp)\Phi_2^1 - \sin(\wp)\phi^2 \\ E_3^2 &= d\wp + \epsilon^1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Vamos agora escrever Φ_2^1 em função de $\wp$ e ϵ^i . Desde que $d\epsilon^3 = 0$ sobre S , avaliando a terceira equação de 2.11 em $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,

$$\begin{aligned}
0 &= [d\wp \otimes \epsilon^2 - \epsilon^2 \otimes d\wp - \cos(\wp)(\Phi_2^1 \otimes \epsilon^1 - \epsilon^1 \otimes \Phi_2^1) + \\
&\quad + (1 + \sin^2(\wp))(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 - \epsilon^2 \otimes \epsilon^1)]|_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \\
\implies \quad \Phi_2^1(\vec{e}_2) &= -\frac{1 + d\wp(\vec{e}_2) + \sin^2(\wp)}{\cos(\wp)} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Para calcularmos $\Phi_2^1(\vec{e}_1)$ necessitamos do fato de ser S uma superfície mínima, i.e.,

$$E_1^3 \wedge \epsilon^2 - E_2^3 \wedge \epsilon^1 = 2H\epsilon^1 \wedge \epsilon^2 = 0$$

$$\implies \quad \cos(\wp)\Phi_2^1 \wedge \epsilon^2 + d\wp \wedge \epsilon^1 = 0$$

Avaliando em $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, encontramos

$$\Phi_2^1(\vec{e}_1) = \frac{d\wp(\vec{e}_2)}{\cos(\wp)} \quad (2.15)$$

Lembremos dos fundamentos da teoria das formas diferenciais: calculando qualquer funcional em uma base determinamos este funcional. Como $\epsilon^3 = 0$ sobre S , temos

$$\Phi_2^1 = \Phi_2^1(\vec{e}_1)\epsilon^1 + \Phi_2^1(\vec{e}_2)\epsilon^2$$

$$\implies \Phi_2^1 = \frac{d\wp(\vec{e}_2)}{\cos(\wp)}\epsilon^1 - \frac{1 + d\wp(\vec{e}_2) + \sin^2(\wp)}{\cos(\wp)}\epsilon^2 \quad (2.16)$$

Observação 2.4.1

S poderia ser parametrizada por (x^1, x^2) , de modo que $dx^1 = \epsilon^1$ e $dx^2 = \epsilon^2$, então,

$$\begin{aligned} d\wp &= \frac{\partial \wp}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \wp}{\partial x^2} dx^2 = d\wp(\vec{e}_1)\epsilon^1 + d\wp(\vec{e}_2)\epsilon^2 \\ \implies d\wp(\vec{e}_1) &= \frac{\partial \wp}{\partial x^1} \quad \text{e} \quad d\wp(\vec{e}_2) = \frac{\partial \wp}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Ou seja, $d\wp(\vec{e}_1)$ e $d\wp(\vec{e}_2)$ são derivadas parciais.



Tendo em vista a observação acima, é interessante reunir 2.16, 2.12 e 2.13, escritos em termos de $d\wp(\vec{e}_1)$ e $d\wp(\vec{e}_2)$:

$$\begin{cases} E_2^1 &= \tan(\wp) [\wp_2\epsilon^1 - (\wp_1 + 2)\epsilon^2] \\ E_3^1 &= -\wp_2\epsilon^1 + (1 + \wp_1)\epsilon^2 \\ E_3^2 &= (1 + \wp_1)\epsilon^1 + \wp_2\epsilon^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

onde usamos as abreviações $\wp_i = d\wp(\vec{e}_i)$.

2.5 Nova Caracterização do Toro de Clifford

Com as formas de conexão acima podemos calcular a curvatura de S em função do ângulo de contato. Utilizamos a equação de Gauss:

$$dE_1^2 = -K\epsilon^1 \wedge \epsilon^2 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + E_1^3 \wedge E_2^3$$

Usando 2.17 chegamos a

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + E_1^3 \wedge E_2^3 = -[(\wp_1)^2 + 2\wp_1\wp_2 + (\wp_2)^2]\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$$

logo, (reescrevendo o coeficiente acima em termos do gradiente de $\wp$)

$$K = 1 - \|\nabla\wp + \vec{e}_1\|^2 \quad (2.18)$$

Temos ainda as equações de Codazzi

$$\begin{cases} dE_1^3 + E_2^3 \wedge E_1^2 = 0 \\ dE_2^3 + E_1^3 \wedge E_2^1 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação é prontamente verificada na substituição por 2.17. Por outro lado, a primeira nos fornece uma fórmula para o laplaciano

$$\begin{aligned} d[\wp_2\epsilon^1 - (1+\wp_1)\epsilon^2] + [-(1+\wp_1)\epsilon^1 - \wp_2\epsilon^2] \wedge \{-\tan(\wp)[\wp_2\epsilon^1 - (\wp_1+2)\epsilon^2]\} &= 0 \\ \implies \nabla^2\wp &= -\tan(\wp) \|\nabla\wp + 2\vec{e}_1\|^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

As equações 2.18 e 2.19 são o resultado principal deste capítulo. Em 2.18, temos a curvatura gaussiana de uma superfície mínima imersa

em $\mathbb{S}^3$ em função do ângulo de contato. Em 2.19, uma equação diferencial parcial, não-linear, que deve ser satisfeita pelo ângulo de contato.

Suponha que $\wp \neq \frac{\pi}{2}$ e que $\wp$ é constante, então, por 2.18 $K = 0$ sobre $\mathbb{S}^3$. A única superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ com curvatura identicamente nula é o Toro de Clifford. Isto prova o seguinte teorema

Teorema 2.5.1 (R.R.Montes/J.A.Verderesi)

O Toro de Clifford é a única superfície mínima imersa em $\mathbb{S}^3$ com ângulo de contato constante.



Suponha que $\wp$ esteja limitado ao intervalo $0 \leq \wp < \frac{\pi}{2}$. Neste intervalo $\tan(\wp) \geq 0$ e por 2.19, $\nabla^2 \wp \leq 0$. Como S é compacta, pelo Lema de Hopf 3.1.2, $\wp$ deve ser constante. Portanto, $K = 0$ e S é o Toro de Clifford. Isto prova o

Teorema 2.5.2 (R.R.Montes/J.A.Verderesi)

O Toro de Clifford é a única superfície mínima compacta em $\mathbb{S}^3$ com ângulo de contato $\wp$ restrito ao intervalo $0 \leq \wp < \frac{\pi}{2}$.



Se $\wp$ está limitado a $\frac{\pi}{2} < \wp \leq \pi$, temos a mesma conclusão.

Teorema 2.5.3 (R.R.Montes/J.A.Verderesi)

O Toro de Clifford é a única superfície mínima compacta em $\mathbb{S}^3$ com ângulo de contato $\wp$ restrito ao intervalo $\frac{\pi}{2} < \wp \leq \pi$.



Note que a EDP 2.19 tem uma singularidade em $\wp = \frac{\pi}{2}$, que ocorre justamente quando o plano tangente a S coincide com a distribuição de contato Δ num certo ponto. É um problema em aberto resolvê-la. Suponha que $K \neq 0$. Se conseguíssemos inver 2.18, substituindo em 2.19 obteríamos uma EDP capaz de (possivelmente) resolver a conjectura de Lawson. Se conseguíssemos provar que tal EDP não tem solução, estaríamos provando a inexistência de uma superfície mínima imersa em $\mathbb{S}^3$ com $K \neq 0$. Se conseguíssemos uma solução, teríamos meios de construir um contra-exemplo à conjectura.

A idéia apresentada neste capítulo, foi utilizada por seus criadores, R. R. Montes e J.A.Verderesi, para investigar superfícies mínimas em $\mathbb{S}^5$. Um dos resultados obtidos foi uma prova muito mais simples do seguinte teorema de classificação:

O Toro de Clifford e a Esfera Totalmente Geodésica são as únicas superfícies mínimas legendrianas em $\mathbb{S}^5$ com curvatura gaussiana constante.

Capítulo 3

Apêndice

3.1 O Lema de Hopf

Seja M uma variedade riemanniana n -dimensional com elemento de volume $dv \in \bigwedge^n(T^*M)$. Em contextos gerais, a *divergência* de um campo X é definida como sendo a função tal que $L_X dv = (\nabla \cdot X)dv$ sendo o operador $L_X : \bigwedge^n(T^*M) \rightarrow \bigwedge^n(T^*M)$ a derivada de Lie com relação a X ; o gradiente de uma função real é o (único) campo vetorial definido pela relação $\langle \nabla f, Y \rangle = df(Y) = Y(f)$, para todo campo Y . Em coordenadas temos:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$
$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_{ij} f^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\nabla \cdot X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}, \text{ onde } X = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

Lembremos o clássico teorema abaixo (na verdade um corolário do teorema de Stokes)¹:

Teorema 3.1.1 (Green)

Seja M uma variedade riemanniana n -dimensional compacta e sem fronteira com uma forma-volume dv . Para todo campo vetorial X sobre M temos

$$\int_M \nabla \cdot X dv = \int_{\partial M} X \lrcorner dv = 0$$

onde $\lrcorner$ significa a contração da n -forma dv com o campo X .



Entre o laplaciano, gradiente e divergente, verificam-se as seguintes relações:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla) f \quad (\text{por definição})$$

$$\nabla \cdot (f X) = X(f) + f \nabla \cdot X \quad (3.1)$$

¹para maiores detalhes veja, e.g., S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, John Wiley & Sons inc.

$$\nabla^2(fg) = f\nabla f + g\nabla g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle \quad (3.2)$$

Uma função h é dita harmônica se $\nabla^2 h = 0$ sobre M . Funções harmônicas têm amplas aplicações em Análise Complexa, Física e etc. A importância do teorema abaixo está, entre outras coisas, no fato dele afirmar que a menos das funções constantes, M (nas condições abaixo) não possui nenhuma função harmônica.

Teorema 3.1.2 (Lema de Hopf)

Seja M uma variedade riemanniana n -dimensional compacta sem fronteira. Se f é uma função real diferenciável, tal que $\nabla^2 f \geq 0$ sobre M , então f é constante.

Dem.:

Seja $X = \nabla f$. Pela definição de laplaciano e pelo teorema 3.1.1,

$$\int_M \nabla^2 f dv = \int_M \nabla \cdot X dv = 0$$

Por hipótese, $\nabla^2 f \geq 0$ sobre M . Segue da igualdade acima que necessariamente $\nabla^2 f = 0$.

Usando agora a propriedade 3.2 e o parágrafo anterior para $\frac{f^2}{2}$ obtemos

$$0 = \int_M \nabla^2 \left(\frac{f^2}{2} \right) dv = \int_M f \underbrace{\nabla^2 f}_{=0} dv + \int_M \|\nabla f\|^2 dv$$

logo, $\nabla f = 0$ e portanto f é constante.



Observação 3.1.1

Temos a mesma conclusão se trocarmos $\nabla^2 f \geq 0$ por $\nabla^2 f \leq 0$ no teorema acima.



PARTÉ II

Capítulo 4

Geometria Finsleriana

4.1 Definições e Propriedades

Sejam M uma variedade diferenciável e TM seu fibrado tangente.

Definição 4.1.1

Uma função $F : (TM - 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **métrica Finsler** se é uma função tal que, para cada $x \in M$, a restrição F_x de F à fibra T_xM é um funcional de Minkowski.



Definição 4.1.2

Um **funcional de Minkowski** é uma função $F_x : (T_xM - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ que apresenta as seguintes características:

(F1) (*Regularidade:*) F_x é de classe C^∞ ;

(F2) (*Homogeneidade positiva:*) $F_x(\lambda \vec{X}) = |\lambda| F_x(\vec{X})$, $\forall \lambda \neq 0$, $\vec{X} \in T_x M$;

(F3) (*Convexidade forte:*) o tensor $g_{ij}|_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F_x^2)}{\partial X^i \partial X^j}$, chamado de *tensor fundamental*, é definido positivo $\forall (x, \vec{X}) \in TM - \{0\}$.



Uma variedade é **finsleriana** se existe um funcional de Minkowski em cada espaço tangente, que varia suavemente em toda seção não nula do fibrado tangente.

Definição 4.1.3

Seja $\Gamma : [a, b] \rightarrow TM$, $\Gamma(t) = (u(t); \frac{d\vec{u}}{dt}(t))$ uma curva suave na variedade finsleriana M , então,

$$\textit{comprimento de } \Gamma = s \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F \left(u; \frac{d\vec{u}}{dt} \right) dt \quad (4.1)$$



Note que no caso riemanniano teríamos

$$F(x, X) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x) X^i X^j}$$

de onde seguiria $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial X^i \partial X^j}$. Então, a métrica de Finsler pode ser pensada como uma métrica riemanniana generalizada, uma vez que depende também da direção $\vec{X}$. Mostraremos ainda nesta secção que 4.1 está bem definida.

De um outro ponto de vista, podemos encarar a definição 4.1 como um problema em Cálculo Variacional. A principal aplicação dos espaços de Finsler encontram-se, na verdade, em problemas de análise funcional.

Vamos justificar e/ou comentar cada uma das restrições sobre F , indicando suas origens.

(F1) é esperado já que queremos tratar com variedades *diferenciáveis*.

(F2) é uma condição necessária e suficiente para que a integral 4.1 seja independente da escolha do parâmetro t , i.e., para termos um comprimento de arco invariante sob reparametrizações. (Afinal, é desejável que o comprimento de uma curva não diminua se a percorrermos mais ou menos rapidamente.)

Algumas conseqüências de (F2) surgem a partir do teorema abaixo, o qual desempenhará um papel central.

Teorema 4.1.1 (Euler)

Seja ϕ uma função real sobre $\mathbb{R}^n$, diferenciável para todo $\vec{X} \neq 0$. As seguintes condições são equivalentes:

- $\phi(c\vec{X}) = c^r \phi(\vec{X}), \forall c \neq 0$ (*homogeneidade de grau r*)
- $\sum_i X^i \frac{\partial \phi}{\partial X^i} = r\phi$

Dem.:

A implicação de cima para baixo com $r = 1$ (que é o caso de interesse) segue facilmente de uma derivação com respeito a c .



Segue-se, portanto,

$$\sum_i X^i \frac{\partial F}{\partial X^i} = F \quad (4.2)$$

Derivando esta expressão em relação a X^j obtemos

$$\sum_i X^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} = 0 \quad (4.3)$$

Sendo 4.3 válida $\forall \vec{X} \neq 0$, deduzimos a identidade

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Derivando duas vezes ambos os membros da equação que define $(F2)$ em relação a X^i , deduzimos

$$\frac{\partial F}{\partial X^i}(x, \lambda \vec{X}) = \frac{\partial F}{\partial X^i}(x, \vec{X}), \lambda > 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \lambda \vec{X}) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}), \lambda > 0 \quad (4.6)$$

A condição $(F2)$ afirma que g_{ij} tem o mesmo valor ao longo uma linha $\lambda \vec{X} \in T_x M$, o que motiva o seguinte: considere que o grupo $\mathbb{R}^*$ age sobre TM por uma dilatação em cada fibra. Restrita a $TM - 0$ esta ação é livre e regular. Passando ao quociente, obtemos o PTM , o *fibrado tangente projetivizado*, que têm esse nome porque as fibras de $PTM \xrightarrow{p} M$ são espaços projetivos de dimensão $m - 1$ ($m = \dim M$) (logo, $\dim PTM = 2m - 1$), e cada trivialização local $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ corresponde a uma trivialização $\hat{\phi}_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}P^{n-1}$.

Cada elemento de PTM pode ser pensado como um vetor que definiria a linha ou como o seu complemento ortogonal deste (um $(n - 1)$ -hiperplano). *Podemos identificar PTM com o conjunto dos elementos de contato de M .*

Mudando a perspectiva para TM propriamente dito, lembre-se que uma métrica riemanniana sobre M associa (suavemente) um produto interno a cada espaço tangente $T_x M$. Por outro lado, uma

métrica finsleriana atribui *uma família* de produtos internos

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x, \vec{X}) dx^i \otimes dx^j$$

a cada $T_x M$, pois o que (F2) significa é que temos um produto interno para cada direção. A recíproca é verdadeira. Se for dada uma família de produtos internos, dependendo suavemente de x e não nulo em $TM - 0$, invariante sob dilatação de $\vec{X}$ e tal que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$ é totalmente simétrica em i, j e k , então construímos uma métrica finsleriana por

$$F(x, \vec{X}) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x, \vec{X}) X^i X^j} \quad (4.7)$$

Vê-se facilmente que esta definição é coerente com (F1-F3). A equação 4.11 que deduziremos abaixo comprovará que esta relação é completamente natural.

Se u^i , $1 \leq i \leq m$ são coordenadas locais sobre M , um vetor tangente não nulo pode ser expresso como

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \text{ com algum } X^i \neq 0$$

Os u^i, X^i 's são coordenadas locais sobre TM , que podem ser extendidas a coordenadas locais sobre PTM se identificarmos $\lambda X^i \approx X^i$. 4.5 mostra que $\frac{\partial F}{\partial X^i}$ é uma função homogênea de grau zero em X^i 's, sendo funções sobre PTM .

A condição $(F3)$ tem como conseqüências a existência da transformação de Legendre e que a desigualdade de Schwarz é válida para F^2 . De fato, sejam $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in T_x M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X})(\xi^i + \lambda \eta^i)(\xi^i + \lambda \eta^i) &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j + \\ &+ 2\lambda \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \eta^j + \lambda^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \eta^i \eta^j \end{aligned}$$

Esta expressão não possui nenhum zero real a menos que $\vec{\xi} + \lambda \vec{\eta} = 0$. Impondo que o discriminante seja maior ou igual a zero, chegamos a

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \eta^j \right]^2 &\leq \\ \left[\sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j \right] &\cdot \left[\sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \eta^i \eta^j \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Simplesmente derivando F^2 , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{\partial F}{\partial X^i} \frac{\partial F}{\partial X^j} + F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \quad (4.9)$$

Usando a definição de g_{ij} , *deduz-se* portanto a expressão 4.7, graças ao teorema de Euler.

Multiplicando por X^j e somando, segue de 4.2 e 4.3 que

$$\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j} X^j = F \frac{\partial F}{\partial X^i} \quad (4.10)$$

Multiplicando agora por X^i e somando, usamos novamente 4.2 para obtermos

$$\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j} X^i X^j = F^2 \quad (4.11)$$

(compare com 4.7).

Através de 4.10, reescremos 4.9 como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j} &= \frac{1}{4F^2} \left(\sum_h \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^h} X^h \right) \left(\sum_k \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^k} X^k \right) + \\ &+ F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Resolvemos esta equação para $\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}$, fixamo-nos no ponto $(x, \vec{X}) \in (TM - 0)$ e avaliamos a forma quadrática acima nas variáveis ξ^i 's,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j &= \frac{1}{2F(x, \vec{X})} \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2F(x, \vec{X})} \left[\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) X^i \xi^j \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Agora aplicamos a desigualdade de Schwarz 4.8 com $\eta^i = X^i$ e 4.11 para deduzirmos que

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j \geq \frac{1}{4F(x, \vec{X})} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F^2}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \xi^i \xi^j \geq 0 \quad (4.13)$$

onde o sinal de igualdade ocorre se e somente se $\vec{\xi} = \lambda \vec{X}$.

A parte relativa à igualdade na frase anterior é o que nos interessa agora, pois ela mostra que a matriz hessiana de F tem um núcleo unidimensional (composto pelos múltiplos de $\vec{X}$), logo,

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}(x, \vec{X}) \right) \text{ tem posto } n - 1 \quad (4.14)$$

Aplicamos então um conhecido teorema sobre funções convexas para justificarmos o título de (F3): $F(x, \vec{X})$ é uma função convexa nas variáveis X^i , i.e,

$$F(x, \frac{\vec{X} + \vec{Y}}{2}) \leq \frac{1}{2} [F(x, \vec{X}) + F(x, \vec{Y})]$$

Decorre facilmente disto (e da homogeneidade) a desigualdade triangular para F :

$$F(x, \vec{X} + \vec{Y}) \leq F(x, \vec{X}) + F(x, \vec{Y})$$

O que mostra que F é de fato uma “métrica”:

Definição 4.1.4

Uma métrica num espaço topológico M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(d1) $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, $\forall p, q \in M$;

(d2) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$, $\forall p, q, r \in M$ (desigualdade triangular)



4.2 Forma de Hilbert

Seja $(v, \vec{Y})$ um outro sistema de coordenadas sobre PTM . Então, temos

$$Y^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j} X^j$$

logo,

$$\frac{\partial F}{\partial X^k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial Y^i} \underbrace{\frac{\partial v^i}{\partial u^k}}_{=\frac{\partial Y^i}{\partial X^k}}$$

Portanto, a 1-forma

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial Y^i} dv^i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \in PTM$$

é independente da escolha de coordenadas locais, estando intrinsecamente definida sobre PTM .

Definição 4.2.1

A 1-forma α acima é chamada de **forma de Hilbert**



Queremos definir a derivada exterior. Para tanto, devemos notar que, sendo α uma forma diferencial sobre PTM , este é um elemento de T^*PTM , o “fibrado cotangente do fibrado tangente projetivizado”. Este é o palco da geometria de Finsler. Para introduzir coordenadas neste espaço, representamos uma forma diferencial sobre PTM por uma forma em TM , com as propriedades adicionais:

1. ser invariante por dilatação das variáveis X^i , e
2. a contração com o campo $\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ ser nula.

Deste modo, a diferenciação exterior sobre PTM pode ser obtida por uma diferenciação formal em TM .

De fato, sejam (u^i, X^i) , $i = 1, \dots, m$ coordenadas locais de PTM , onde os X^i são coordenadas homogêneas. Seja

$$\alpha = \sum_{i=1}^m (f_i dX^i + g_i du^i)$$

uma 1-forma sobre TM tal que seja invariante por multiplicação escalar em X^i e

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial X^i} \right) = 0 \quad (4.15)$$

então,

$$\alpha|_{(\vec{u}, \vec{X})} = \alpha|_{(\vec{u}, \lambda \vec{X})} \implies$$

$$\sum_{i=1}^m (f_i(\vec{X}) dX^i + g_i(u, \vec{X}) du^i) = \sum_{i=1}^m (f_i(\lambda \vec{X}) d(\lambda X^i) + g_i(u, \lambda \vec{X}) du^i)$$

logo,

$$\implies \begin{cases} \sum_{i=1}^m f_i X^i &= 0 \\ f_i(\lambda \vec{X}) &= \frac{1}{\lambda} f_i(\vec{X}), \quad \lambda \neq 0 \\ g_i(u, \lambda \vec{X}) &= g_i(u, \vec{X}), \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

onde a primeira equação é decorrente de 4.15.

Sem perda de generalidade, suporemos $X^m \neq 0$. Então,

$$\sum_{i=1}^m f_i X^i = 0 \implies f_m = - \sum_{k=1}^{m-1} f_k \frac{X^k}{X^m}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=1}^{m-1} (f_k dX^k) + f_m dX^m + \sum_{i=1}^m g_i du^i \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} f_k \left(dX^k - \frac{X^k}{X^m} dX^m \right) + \sum_{i=1}^m g_i du^i \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} X^m f_k(\vec{u}, \vec{X}) d\left(\frac{X^k}{X^m}\right) + \sum_{i=1}^m g_i(u, \vec{X}) du^i \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} f_k(\vec{u}, \frac{\vec{X}}{X^m}) d\left(\frac{X^k}{X^m}\right) + \sum_{i=1}^m g_i(u, \frac{\vec{X}}{X^m}) du^i, \quad X^m \neq 0 \end{aligned}$$

O que comprova ser α uma 1-forma definida sobre a projetivização do fibrado tangente.

Definição 4.2.2

Sejam

$$e_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^m p_i^l \frac{\partial}{\partial u^l} \tag{4.16}$$

$$\epsilon^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m q_k^i du^k \quad (4.17)$$

Dizemos que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é um **referencial** móvel ortonormal sobre o fibrado tangente de PTM , $T(PTM)$, e que $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^m\}$ é o **co-referencial** dual em $T^*(PTM)$, se são satisfeitas as condições

$$\text{(ortonormalidade)} \quad \langle e_i, e_j \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l,k=1}^m p_i^l g_{lk} p_j^k = \delta_{ij}$$

$$\text{(dualidade)} \quad \epsilon^j(e_i) = \delta_i^j$$



A condição de dualidade é equivalente a

$$\sum_{l=1}^m p_i^l q_l^k = \delta_i^k \quad (4.18)$$

ou a $\begin{bmatrix} p_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j^k \end{bmatrix}^{-1}$.

Tomamos um referencial 4.16 de modo que

$$\epsilon^m = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i = \alpha \quad \text{e} \quad e_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{F} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

(Observe que em consequência do teorema de Euler na forma 4.3, de fato verificamos $\sum_{l=1}^m p_m^l q_l^m = 1$)

Ou seja,

$$q_k^m = \frac{\partial F}{\partial X^k} \quad \text{e} \quad p_m^l = \frac{X^l}{F}$$

o que, usando 4.18 produz

$$\sum_{k=1}^m q_k^a X^k = 0, \text{ para } a = 1, \dots, m-1 \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial X^k} p_a^k = 0, \text{ para } a = 1, \dots, m-1 \quad (4.20)$$

Lembre que de acordo com 4.5, $\frac{\partial F}{\partial X^i}$, e portanto q_k^a , é homogênea de grau 0 em $\vec{X}$.

Vamos agora derivar a forma de Hilbert $\epsilon^m = \alpha$ sobre PTM ,

$$d\alpha = d\epsilon^m = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^k} du^i \wedge du^k + \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} dX^j \wedge du^k$$

Invertendo 4.17, obtemos $du^i = \sum_k p_k^i \epsilon^k$, logo,

$$d\epsilon^m = \sum_{i,k=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^k} \sum_{j,l=1}^m p_j^i p_l^k \epsilon^j \wedge \epsilon^l \right) + \sum_{j,k=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} \sum_{l=1}^m p_l^k dX^j \wedge \epsilon^l \right) \quad (4.21)$$

A idéia agora é “por em evidência” os ϵ^i 's na equação acima. Baseando-se na expressão que “sobra”, encontramos as formas de conexão ω_a^m , cuja expressão deverá ser *a mais geral possível* capaz de

satisfazer 4.21. Fazendo isso, e invocando-se a unicidade de tais 1-formas, somos levados a seguinte

Definição 4.2.3

$$\begin{aligned} \omega_a^m \stackrel{\text{def}}{=} & \sum_{i,j=1}^m \left[-p_a^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} dX^j + \frac{p_a^i}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} - X^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j} \right) \epsilon^m \right] \\ & + \sum_{b=1}^{m-1} \left[\sum_{i,j=1}^m \left(p_a^i p_b^j \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^j} \right) \epsilon^b + \lambda_{ab} \epsilon^b \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $a = 1, \dots, m-1$.



As funções indeterminadas λ_{ab} introduzidas acima deverão ser simétricas com respeito à troca de índices, esta sendo a única restrição, podendo ser tomadas arbitrariamente.

Impondo que na geometria não tenhamos torção e que certas relações de compatibilidade com a métrica sejam satisfeitas, S.S. Chern, em seu conhecido artigo¹ “*Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler-Spaces*”, Science Reports Tsing Hua University, vol.5 (1948), 95-121”. calculou tais λ_{ab} ’s (além de introduzir as idéias a cerca de *PTM* neste contexto), provando sua unicidade sob estas

¹Publicado também em *Shiing-Shen Chern Selected Papers, vol.II*, Springer-Verlag 1989, 194-212

condições. Mostrou que estas parecem meras generalizações das conexões de Christoffel-Levi-Civita na geometria riemanniana, e resolveu certos problemas de equivalência em geometria finsleriana.

A dedução de tais funções não é tão difícil a partir de onde estamos (usando as equações de estrutura de M), mas foge do objetivo deste capítulo. A título de informação, daremos sua expressão:

$$\lambda_{ab} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left[p_a^i p_b^j \left(G_{ijm} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial u^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j} \right) \right]$$

onde

$$G_{ijm} = \sum_{ks} \left[g_{ks} F \frac{\partial^3 F}{\partial X^k \partial X^i \partial X^j} \left(\frac{\partial F}{\partial u^s} - \sum_r X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^s \partial u^r} \right) + X^s \frac{\partial^3 F}{\partial X^s \partial X^i \partial X^j} + \frac{X^s}{F} \frac{\partial F}{\partial u^s} \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \right]$$

No seu trabalho, S.S. Chern calculou todas as formas de conexão ω_i^j (que não usaremos). Em sua homenagem,

Definição 4.2.4

*As 1-formas ω_i^j , com a escolha de λ_{ab} acima compõem a **conexão de Chern**.*



4.3 Estrutura de Contato

Teorema 4.3.1

Os conjuntos de 1-formas

$$\left\{ \sum_{k=1}^m (g_{jk} dX^k) \quad | \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

e

$$\left\{ \sum_{j,k=1}^m (p_i^j g_{jk} dX^k) \quad | \quad i = 1, \dots, m-1 \right\}$$

são linearmente independentes.

Dem.:

Suponha que existam $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^m (g_{1k} dX^k) + \dots + \lambda_m \sum_{k=1}^m (g_{mk} dX^k) = 0 \quad (4.23)$$

Contraindo ambos os membros com o campo $\frac{\partial}{\partial X^j}$ chegamos a

$$\lambda_1 g_{1j} + \dots + \lambda_m g_{mj} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Considere a matriz (g_{ij}) e o produto matricial

$$\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} + \cdots + \lambda_m g_{m1} \\ \vdots \\ \lambda_1 g_{1m} + \cdots + \lambda_m g_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretando (g_{ij}) como a matriz de um operador no $\mathbb{R}^n$, a igualdade acima nos diz que o vetor $(\lambda_i) \neq 0$ estaria em seu núcleo. Portanto, (g_{ij}) seria uma matriz singular. Mas isto seria uma contradição ao fato do tensor fundamental g_{ij} ser definido positivo. Repetindo o raciocínio anterior para o segundo conjunto, chegaremos a

$$\begin{pmatrix} p_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por 4.18, vemos que a matriz produto $\begin{pmatrix} p_i^j \end{pmatrix} \cdot (g_{ij})$ é não singular. Logo, 4.23 só é possível se $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$.



O teorema a seguir ilustra o que talvez tenha sido a inspiração de S.S. Chern.

Teorema 4.3.2

A 1-forma de Hilbert $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i$ define uma estrutura de contato sobre PTM .

Dem.:

O que temos a mostrar é que $\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1} \neq 0$. Com a definição 4.22, temos que

$$d\alpha = d\epsilon^m = \epsilon^a \wedge \omega_a^m \quad (4.24)$$

logo

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1} = \pm(m-1)! \bigwedge_{i=1}^m \epsilon^i \bigwedge_{a=1}^{m-1} \omega_a^m$$

Substituindo (4.22) na última expressão, Notamos que qualquer termo que possua algum ϵ^i será cancelado no produto com $\bigwedge_{i=1}^m \epsilon^i$, segue que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1} = \pm(m-1)! \bigwedge_{i=1}^m \epsilon^i \bigwedge_{a=1}^{m-1} \left(\sum_{j,k=1}^m p_a^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} dX^k \right)$$

Pela definição de g_{ij} , e por 4.20, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^m p_a^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} dX^k &= \frac{1}{F} \sum_{j,k=1}^m \left[p_a^j \left(g_{jk} - \frac{\partial F}{\partial X^j} \frac{\partial F}{\partial X^k} \right) dX^k \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^m (p_a^j g_{jk} dX^k) + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m p_a^j \frac{\partial F}{\partial X^j} \right)}_{=0} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial X^k} dX^k \right) \end{aligned}$$

então,

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1} = \pm \frac{(m-1)!}{F} \bigwedge_{i=1}^m \epsilon^i \bigwedge_{a=1}^{m-1} \left[\sum_{j,k=1}^m (p_a^j g_{jk} dX^k) \right]$$

Lembre que na definição das formas ϵ^i 4.17 não aparecem dX^j 's. Por isso e pelo lema anterior, o conjunto

$$\left\{ \epsilon^i, \sum_{j,k=1}^m (p_a^j g_{jk} dX^k) \mid i = 1, \dots, m, a = 1, \dots, m-1 \right\}$$

é linearmente independente, e portanto, a forma volume $\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1}$ é $\neq 0$.



Uma conseqüência do teorema de Euler, a relação 4.2, nos permite reescrever o comprimento 4.1 de uma curva Γ como a integral da forma de contato, e portanto um invariante da estrutura de contato de PTM :

$$\begin{aligned} \text{comprimento de } \Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F\left(\vec{u}; \frac{d\vec{u}}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_i X^i \frac{\partial F}{\partial X^i} \left(\vec{u}; \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_{\Gamma} \alpha \end{aligned}$$

Teorema 4.3.3

O campo e_m é o campo de Reeb da forma de contato.

Dem.:

Que $\alpha(e_m) = 1$ e que e_m é unitário decorrem das “condições de dualidade e ortonormalidade” (acima de 4.18). Para ver que $d\alpha(e_m, \cdot) = 0$, basta lembrar que $d\alpha = d\epsilon^m = \sum_{a=1}^{m-1} \epsilon^a \wedge \omega_a^m$ (de 4.24)



A interpretação de que a geometria se passa em PTM e a definição do referencial móvel 4.16 foram cruciais na teoria desenvolvida por Chern. Como a projetivização do fibrado tangente de qualquer variedade diferenciável sempre apresenta uma estrutura de contato, a escolha do co-referencial tal que ϵ^m fosse a forma de contato, e portanto e_m o campo de Reeb, é algo, até certo ponto, óbvia. *O aproveitamento da estrutura de contato em contextos gerais tem sido usada tacitamente em vários contextos. Este é mais um exemplo bem sucedido.*

Num contexto analítico, a forma de Hilbert é conhecida desde 1900 e está relacionada com o último dos 23 “problemas de Hilbert”. Além dos teoremas de Chern, esta 1-forma se relaciona com o seguinte: considere a família de ideais algébricos

$$\{\alpha, d\alpha\}, \{\alpha \wedge (d\alpha)^2\}, \dots, \{\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}\}$$

gerados pela forma de contato. Um fato que não estamos considerando é que PTM em si é uma variedade riemanniana com a métrica natural induzida pelos g_{ij} 's. Em ⁽²⁾ mostra-se que, com respeito ao operador de Laplace-Beltrami sobre PTM , as formas dos ideais anteriores têm autovalores $(n-1), 2(n-2)$ e assim por diante. Ou seja, estão naturalmente “quantizados”. É uma questão em aberto relacionar este fato com qualquer problema físico

A teoria de Hodge sobre formas harmônicas é um dos trabalhos fundamentais em geometria riemanniana global. Seu resultado principal diz que “*sobre uma variedade riemanniana compacta sem fronteira, toda classe de cohomologia possui um único representante harmônico*”. O ingrediente principal desta teoria foi, é claro, a definição de laplaciano em termos do *operador estrela de Hodge* e do co-diferencial. D.Bao e B.Lackay³ estenderam a formulação do operador de Laplace em variedades com estrutura finsleriana por intermédio de um detalhado estudo do operador estrela de Hodge sobre PTM . A título de ilustração daremos o principal resultado obtido com esse laplaciano:

²D. Bao, B. Lackay, *Special eigenforms on the sphere bundle of a Finsler manifold*, Cont. Math., vol.196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 67-78.

³D.Bao, B. Lackay, *A Hodge decomposition theorem for Finsler spaces*, C.R.Acad.Sci. Paris, 45 49-123 (1997)

Teorema 4.3.4

Sobre uma variedade finsleriana compacta orientável, toda classe de cohomologia tem um único representante harmônico. A dimensão do espaço de todas as formas harmônicas de grau p é o p -ésimo número de Betti da variedade.



4.4 Geodésicas

Como comentado anteriormente, a origem dos espaços de Finsler está associada a problemas analíticos. A determinação da equação de uma geodésica $\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$ percorre o caminho do Cálculo Variacional.

O funcional de Minkowski $F(u, \frac{\vec{du}}{dt})$ é uma função definida sobre TM , logo, podemos encará-la como uma lagrangeana. Esta interpretação coloca à nossa disposição todo o ferramental do cálculo variacional. Em particular, temos as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0$$

Para cada campo vetorial $\vec{X} = \sum_{i=1}^m \xi^i e_i$, existe o seu equivalente no espaço co-tangente, dado por

$$\vec{Y} = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m g_{ki} \xi^i \right) \epsilon^k \quad (4.25)$$

Este é o isomorfismo entre TM e T^*M induzido pela métrica, análogo ao caso riemanniano.

A condição $(F3)$ assegura a existência da transformação de Legendre, que mapeia $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ em uma função hamiltoniana correspondente $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$. Sem maiores detalhes, informamos apenas que H desempenha um papel de uma “métrica dual” no fibrado co-tangente, totalmente simétrica a F , satisfazendo as propriedades e condições a que F está sujeita. Existem artigos nos quais toda a geometria finsleriana é apresentada em T^*M ao invés de em TM .

Como em qualquer problema mecânico, temos um “momento” associado ao “sistema” (M, F) dado por

$$Y_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^i} \quad \text{e} \quad \frac{dY_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial u^i} \quad (4.26)$$

e a seguinte relação:

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{u}^i} \quad (4.27)$$

Substituindo 4.27 em 4.26 e usando a relação 4.11, segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{dY_i}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i} \left[\sqrt{\sum_{h,k=1}^m g_{hk} \dot{u}^h \dot{u}^k} \right] \\ \implies \frac{dY_i}{ds} &= \frac{1}{2F} \sum_{h,k=1}^m \frac{\partial g_{hk}}{\partial u^i} \dot{u}^h \dot{u}^k\end{aligned}\quad (4.28)$$

Suporemos que a curva esteja parametrizada por um parâmetro tal que $F(u, \frac{\vec{du}}{dt}) = 1$.

Na geometria riemanniana, tem-se os “símbolos de Christoffel do primeiro tipo” definidos por

$$\Gamma_{ihk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^h} \right)$$

No nosso caso em que g_{hk} também depende da direção, tomamos a mesma definição. Como

$$g_{hk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial X^h \partial X^k} \implies \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^k} = \frac{\partial^3(F^2)}{\partial X^i \partial X^h \partial X^k} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^h}$$

temos que

$$\Gamma_{ihk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hk}}{\partial u^i} \quad (4.29)$$

Agora substituímos tudo (4.25 e 4.29) em 4.28, usando que $\vec{Y} \Leftarrow \frac{\vec{du}}{dt}$ em 4.25. Obtemos

$$\sum_{j=1}^m g_{ij} \ddot{u}^j + \sum_{h,k=1}^m \Gamma_{hik} \dot{u}^h \dot{u}^k = 0 \quad (4.30)$$

Portanto, concluímos

$$\ddot{u}^j + \sum_{h,k=1}^m \Gamma_{hk}^j \dot{u}^h \dot{u}^k = 0 \quad (4.31)$$

onde $\Gamma_{hk}^j = \sum_{i=1}^m g^{ij} \Gamma_{hik}$ são chamados de “símbolos de Christoffel do segundo tipo”, e $[g^{ij}] = [g_{ij}]$.

Este é um resultado análogo ao do caso riemanniano, entretanto, $g_{ij} = g_{ij}(u, \frac{du}{dt})$ o que complicará consideravelmente as equações diferenciais envolvidas.

Capítulo 5

Aplicação: Luz em Meios Anisotrópicos

A comparação entre uma função real definida sobre campos vetoriais (ou seja, sobre o espaço tangente à variedade) e uma lagrangeana é mais do que conhecida. Apesar disso, nos dias atuais ainda surgem novas aplicações (ou às vezes mera reinterpretações) baseadas nessa idéia tão antiga.

No caso de sistemas físicos onde há isotropia, a interpretação do formalismo lagrangeano para obter a equação descrita por um raio de luz remonta á Fermat. No caso anisotrópico, apenas em 1994 foi publicado¹ um modelo que estende essa interpretação ao caso anisotrópico. Sistemas como cristais líquidos, substâncias magnéticas, materiais sob

¹A. Joets, R. Ribotta, *A geometrical model for the propagation of rays in an anisotropic inhomogeneous medium*, Optics Communications 107 (1994) 200-204.

tensão, entre outros, são exemplos de onde este modelo pode vir a ser utilizado².

Analisaremos o modelo, e em seguida o aplicaremos ao caso específico de cristais líquidos com a presença de um defeito topológico. Deduziremos os resultados obtidos por C. Sátiro e F. Moraes³, comentando e analisando a possibilidade de generalizações.

As condições que devem ser satisfeitas por um sistema óptico necessárias à viabilidade da aproximação da óptica geométrica são que os comprimentos típicos sejam “grandes” comparados ao comprimento de onda da luz monocromática, que o meio não seja ativo nem absorvente, e a polarização desconsiderada. Os cálculos serão realizados para o caso bidimensional. Para que estas análises possam ser extendidas à realidade tridimensional é necessário que o sistema físico apresente uma simetria cilíndrica.

²Dado o interesse tecnológico e comercial dos cristais líquidos, é surpreendente que uma idéia tão “corriqueira” só em 1994 tenha sido aplicada a este contexto.

³C. Sátiro, F. Moraes, *A liquid crystal analogue of the cosmic string*, Modern Physics Letters A, vol.21, No.2 (2006) 1-5

5.1 O modelo de Joets/Ribotta

O princípio de Fermat afirma que o *comprimento óptico* entre dois pontos dados é o menor possível. Em um meio caracterizado pelo índice de refração N o comprimento óptico é dado por

$$\mathcal{L} = \int_a^b N dl = \int_a^b N \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

No caso em que N depende somente do ponto (x, y) , o raio de luz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é prontamente interpretado como uma geodésica. Vamos analisar o método variacional no caso mais geral em que há uma dependência também na direção.

5.1.1 Interpretação Dinâmica

Considerando $L = N \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ como um lagrangeano, as funções $x(t)$ e $y(t)$ deverão satisfazer as equações de Euler-Lagrange correspondentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Introduzindo L e desenvolvendo os cálculos chega-se ao seguinte sistema de equações acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \frac{d^2 x}{dt^2} + A_{12} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial \dot{x}} \frac{dy}{dt} + \\ \quad + \frac{\frac{\partial N}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \\ \\ A_{21} \frac{d^2 x}{dt^2} + A_{22} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial \dot{y}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial \dot{y}} \frac{dy}{dt} + \\ \quad + \frac{\frac{\partial N}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial N}{\partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

em que usamos as abreviações

$$A_{11} = \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x}^2} + \frac{N + 2 \frac{dx}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} - \frac{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 N}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^2}$$

$$A_{22} = \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{y}^2} + \frac{N + 2 \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{y}}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} - \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 N}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^2}$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} + \frac{\frac{dx}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{y}} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} - \frac{\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right) N}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^2}$$

Gostaríamos de isolar as segundas derivadas. Para tal, a maneira usual é escrever o sistema 5.1 no modo matricial

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \dots \dots$$

para então multiplicar à esquerda ambos os membros da equação acima pela matriz inversa $[A_{ij}]^{-1}$ obtendo as derivadas $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ em função das outras funções e das primeiras derivadas $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Note que se $N = N(x, y)$ (somente), o sistema todo simplifica-se bastante.

Fisicamente, um índice de refração local depende somente da direção do raio de luz, e não do módulo de sua velocidade. Traduzindo isso matematicamente, temos

$$N \left((x, y), \lambda \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right) = N \left((x, y), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right)$$

i.e., N deve ser uma função homogênea de grau zero. Logo, $L = N \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ será uma função homogênea de grau 1, valendo assim o teorema 4.1.1 de Euler exposto acima, bem como suas conseqüências. Dentre as quais está 4.14, que diz que o determinante da hessiana desta lagrangeana deverá ser nulo. No nosso caso, é fácil ver que

$$\det \begin{pmatrix} A_{ij} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz $[A_{ij}]$ não pode ser invertida. Isso ocorre mesmo no caso isotrópico.

5.1.2 Interpretação Geométrica de Joets/Ribotta

A idéia agora é associar o elemento de comprimento óptico

$$dl = N \left((x, y), (\vec{dx}, \vec{dy}) \right) \left\| (\vec{dx}, \vec{dy}) \right\|$$

com o elemento de comprimento de arco finsleriano

$$ds = F \left((x, y), \left(\frac{\vec{dx}}{dt}, \frac{\vec{dy}}{dt} \right) \right) dt$$

Essa identificação é possível, pois as condições (*F1-F3*) estão em correspondência com as hipóteses acerca do sistema. Então associaremos um espaço métrico ao sistema físico em questão, no qual a métrica em cada espaço tangente provém do índice de refração local multiplicado pela norma *euclidiana* do vetor tangente ao raio de luz.

$$F \left((x, y), \left(\frac{\vec{dx}}{dt}, \frac{\vec{dy}}{dt} \right) \right) = N \left((x, y), \left(\frac{\vec{dx}}{dt}, \frac{\vec{dy}}{dt} \right) \right) \left\| \left(\frac{\vec{dx}}{dt}, \frac{\vec{dy}}{dt} \right) \right\| \quad (5.2)$$

A informação a respeito da velocidade de propagação no meio está, portanto, sendo levada em consideração pelo modelo. Poderia falar-se em uma “geometria gerada pelo sistema físico”.

Reinterpretando o princípio de Fermat, obtemos que a luz deverá propagar-se por uma trajetória geodésica. . Usando que $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial \dot{X}^i \partial \dot{X}^j}$ calcularemos as geodésicas desta geometria: chega-se a

$$g_{11} = (1 + N) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x}^2} + N \left(N + 4 \frac{dx}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{x}} \right)$$

$$g_{22} = (1 + N) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{y}^2} + N \left(N + 4 \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial \dot{y}} \right)$$

$$g_{12} = g_{21} = (1 + N) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} + 2N \left(\dot{x} \frac{\partial N}{\partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{\partial N}{\partial \dot{x}} \right)$$

O próximo passo é calcular os símbolos de Christoffel. Impondo que a curva esteja parametrizada pelo comprimento de arco, substituímos tudo na equação das geodésicas. Algumas páginas depois chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\left(\frac{dy}{dt} N + \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial N}{\partial \dot{y}} \right) \left[\|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial \dot{x}} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial \dot{y}} \right) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial x} \right]}{N \left[N + \|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{y}^2} \right) \right]} + \\ \quad + \frac{1}{N} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial y} \right] = 0 \\ \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\left(\frac{dx}{dt} N + \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial N}{\partial \dot{x}} \right) \left[\|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x} \partial x} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial N}{\partial y} \right]}{N \left[N + \|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \dot{y}^2} \right) \right]} + \\ \quad + \frac{1}{N} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{\partial N}{\partial x} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

onde $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$. Este é o sistema que generaliza as equações da trajetória de um raio de luz no caso riemanniano.

5.2 Luz em Nemáticos com Defeitos Topológicos

Por causa de sua forma alongada, cristais líquidos nemáticos apresentam propriedades ópticas dependentes da temperatura. Não apresentam nenhuma ordem na posição relativa de suas moléculas quando em altas temperaturas. A medida que a temperatura vai diminuindo, o sistema atinge uma fase em que as moléculas estão ainda desordenadas mas alinham-se paralelamente umas às outras. Adquirem, portanto, uma certa simetria orientacional. Durante o processo, falhas nesta estrutura sempre ocorrem. Surgem então os defeitos topológicos. Dentre os mais simples de serem tratados analiticamente estão as disclinações e os vórtices, os quais são classificados como defeitos lineares.

Nos vórtices, as moléculas estão contornando um eixo de simetria, enquanto que nas disclinações as moléculas “emanam” deste. Graças a esta simetria axial, estes defeitos podem ser estudados bi-dimensionalmente. Disclinações são modeladas com a utilização de campos vetoriais radiais, e vórtices como perpendiculares aos anteriores.⁴

⁴Note o seguinte: só estamos interessados na direção destes campos. O sentido dos vetores é irrelevante uma vez que estes representam moléculas “sem cabeça”. Cada molécula pode ser pensada também como um elemento do *espaço tangente projetivizado* PTM , em que a variedade M seria o meio tridimensional em que o cristal líquido está confinado. No caso específico do artigo de Joets/Ribotta, M é tomada simplificada como $\mathbb{R}^2$ ou uma vizinhança neste. Apesar de ser esta uma comparação tão óbvia, não foi encontrado na literatura nenhuma menção a esse respeito.

Buscamos descrever a trajetória da luz no meio. Para tal, o ponto de vista de um observador fixo parece ser mais adequado. Pela simetria da disposição molecular, torna-se mais conveniente a utilização de coordenadas polares.

Considere o raio de luz passando pelo ponto (r, θ) e um referencial móvel paralelo ao do observador neste ponto. Sejam β o ângulo entre a direção do raio e uma molécula, e ϕ o ângulo entre um eixo de referência e a molécula.

Se $y = y(x)$ descreve a trajetória do raio em coordenadas retangulares, o ângulo entre o raio e o eixo será $\arctan(\frac{dy}{dx})$, logo,

$$\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \beta + \phi$$

Em coordenadas polares, a derivada acima torna-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta}{\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta}$$

Sejam n_O e n_E os índices de refração ordinário e extraordinário respectivamente. Born/Wolf em seu livro “*Principles of Optics*, Pergamon Press” mostram que

$$N = \sqrt{n_O^2 \cos^2 \beta + n_E^2 \sin^2 \beta} \quad (5.4)$$

Agora temos de escrever $\cos \beta$ e $\sin \beta$ em função de $r, \theta, \dot{r}$ e $\dot{\theta}$, o que é um bom exercício de trigonometria. Para simplificar, definimos

uma constante auxiliar

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \arctan \frac{dy}{dx}$$

então,

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \beta = \psi + \phi$$

Usando as seguintes identidades trigonométricas:

$$\sin \psi = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta}{\|\dot{\gamma}\|}$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta}{\|\dot{\gamma}\|}$$

$$\sin \beta = \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi$$

$$\cos \beta = \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi$$

onde $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$, chegamos a

$$\sin \beta = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \left[(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \cos \phi - (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \sin \phi \right]$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \left[(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \cos \phi + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \sin \phi \right]$$

Neste ponto entra a informação sobre o defeito topológico. Tomaremos

$\phi = \theta$ para disclinações, e $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$ para vórtices

Após a substituição em 5.2 e 5.4 e mais cálculos, seguem os resultados surpreendentemente simples:

$$F^2 = n_O^2 \dot{r}^2 + n_E^2 r^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{para a disclinação}$$

$$F^2 = n_O^2 r^2 \dot{\theta} + n_E^2 \dot{r}^2 \quad \text{para o vórtice}$$

Com os quais conclui-se, então que a métrica é riemanniana nos dois casos:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} n_O^2 & 0 \\ 0 & n_E^2 r^2 \end{pmatrix} \quad \text{para a disclinação}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} n_E^2 r^2 & 0 \\ 0 & n_O^2 \end{pmatrix} \quad \text{para o vórtice}$$

5.3 O Tensor de Cartan

Esse comportamento não finsleriano foi atribuído, por Sátiro/Moraes, ao “alto grau de simetria do defeito estudado”. Entretanto, esse resultado, nos motivou a indagar:

- *Para quais configurações moleculares a geometria seria não-riemanniana?*

Uma idéia óbvia é a seguinte: Uma vez que, no caso riemanniano g_{ij} só dependeria da posição (r, θ) , uma derivada com respeito a $\dot{r}$ ou $\dot{\theta}$ daria uma “medida” de quanto a métrica se afastaria de ser riemanniana. Entretanto, a realidade é um pouco mais sofisticada... Em contextos muito mais gerais, tem-se (com a notação da primeira secção) a seguinte

Definição 5.3.1

Sejam

$$A_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k}$$

Então,

$$A = \sum_{i,j,k=1}^m A_{ijk} du^i \otimes du^j \otimes du^k$$

*é chamado de **tensor de Cartan** .*



Note que $A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$, logo, g_{ij} depende *apenas* da posição $\vec{x}$ se, e somente se, todas as componentes A_{ijk} anulam-se, i.e., *a geometria é riemanniana se, e somente se, o tensor de Cartan é nulo*. Mais uma vez, o teorema de Euler 4.1.1 será o centro das atenções:

Teorema 5.3.1

As componentes do tensor de Cartan satisfazem a relação

$$\sum_{k=1}^m X^k A_{ijk} = 0$$

Dem.:

Da condição de homogeneidade ($F2$), temos que

$$F^2(\vec{x}, \lambda \vec{X}) = \lambda^2 F^2(\vec{x}, \vec{X})$$

Derivando sucessivamente *em relação a* X^i e X^j , segue facilmente que o tensor fundamental $g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial X^i \partial X^j}$ é uma função homogênea de grau zero em $\vec{X}$. Basta agora derivar *em relação a* λ a equação $g_{ij}(\vec{x}, \lambda \vec{X}) = g_{ij}(\vec{x}, \vec{X})$ para obtermos

$$0 = \sum_{k=1}^m X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial (\lambda X^k)}(\vec{x}, \lambda \vec{X}) = \sum_{k=1}^m X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}(\vec{x}, \vec{X}) = \frac{2}{F} \sum_{k=1}^m X^k A_{ijk}$$



Teorema 5.3.2

Em dimensão 2, a geometria é riemanniana se, e somente se,
 $\frac{\partial^3 F^2}{\partial (X^1)^3} = 0$

Dem.:

Pela simetria de A_{ijk} em relação aos índices, temos

$$\begin{cases} A_{211} = A_{121} = A_{112} \\ A_{221} = A_{212} = A_{122} \end{cases} \quad (5.5)$$

Do teorema anterior, seguem as seguintes relações, válidas para todo $X^1, X^2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X^1 A_{111} + X^2 A_{211} = 0 \\ X^1 A_{121} + X^2 A_{221} = 0 \\ X^1 A_{122} + X^2 A_{222} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Suponha que $A_{111} = 0$, usando 5.5 e 5.6 conclui-se que as outras componentes anulam-se.

Reíprocamente, se g_{ij} depende apenas de (x^1, x^2) , temos $A_{111} = \frac{\partial g_{11}}{\partial X^1} = 0$.



Portanto, a resposta à nossa questão deverá vir com a análise de $\frac{\partial^3(F^2)}{\partial \dot{r}^3}$. Abaixo apresentaremos alguns passos intermediários

Usando

$$\begin{cases} F^2 &= N^2 \|\dot{\gamma}\|^2 \\ \frac{\partial(\|\dot{\gamma}\|^2)}{\partial \dot{r}} &= 2 \frac{dr}{dt} \\ \frac{\partial(N^2)}{\partial \dot{r}} &= (n_E^2 - n_O^2) \sin(2\beta) \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \end{cases}$$

encontramos

$$\frac{\partial(F^2)}{\partial \dot{r}} = (n_E^2 - n_O^2) \sin(2\beta) \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \|\dot{\gamma}\|^2 + 2 \frac{dr}{dt} N^2$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(n_E^2 - n_O^2)} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial \dot{r}^2} = & + \|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \right)^2 \cos(2\beta) + \frac{N^2}{(n_E^2 - n_O^2)} + \\ & + \left(\frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \right) \sin(2\beta) \end{aligned} \quad (5.7)$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(n_E^2 - n_O^2)} \frac{\partial^3(F^2)}{\partial \dot{r}^3} = & 3 \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} + \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} \right) \cos(2\beta) + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial^3 \beta}{\partial \dot{r}^3} + 3 \frac{dr}{dt} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \left[3 - 2 \|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \right)^2 \right] \right\} \sin(2\beta) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Até este ponto, não foi levado em consideração nenhum fato particular a respeito da função β . Apesar de complicada, esta equação nos revela uma surpresa ao substituirmos o “ β ” modelado no problema, para o qual temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} &= -\frac{r}{\|\dot{\gamma}\|^2} \frac{d\theta}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} &= \frac{2r}{\|\dot{\gamma}\|^4} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} \\ \frac{\partial^3 \beta}{\partial \dot{r}^3} &= \frac{2r}{\|\dot{\gamma}\|^6} \frac{d\theta}{dt} \left[\|\dot{\gamma}\|^2 - 4 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\partial^3 \phi}{\partial \dot{r}^3} \end{cases}$$

Lembre que no problema em questão, ϕ representava o ângulo entre o eixo e a molécula de cristal líquido, concentrando toda a informação sobre o defeito topológico. Não há nenhuma razão para se esperar uma dependência desta variável com a taxa de variação da distância ao eixo do defeito. Portanto, o último fator nas expressões acima deve ser desconsiderado, $\frac{\partial \phi}{\partial \dot{r}} = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial \dot{r}^3}$.

Após mais uma secção de cálculos, encontramos que, usando

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} &= -\frac{r}{\|\dot{\gamma}\|^2} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} &= \frac{2r}{\|\dot{\gamma}\|^4} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \\ \frac{\partial^3 \beta}{\partial \dot{r}^3} &= \frac{2r}{\|\dot{\gamma}\|^6} \frac{d\theta}{dt} \left[\|\dot{\gamma}\|^2 - 4 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \end{cases}$$

a equação 5.8 é identicamente nula, pois os coeficientes das funções trigonométricas anulam-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{dr}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} + \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} = 0 \\ \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 \frac{\partial^3 \beta}{\partial \dot{r}^3} + 3 \frac{dr}{dt} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \left[3 - 2 \|\dot{\gamma}\|^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \dot{r}} \right)^2 \right] = 0 \end{array} \right.$$

Então, no caso específico de um cristal líquido, que foi o sistema estudado por Joets/Ribotta, e com hipóteses assumidas, ***a geometria “gerada” por $F = N \|\dot{\gamma}\|$ é sempre riemanniana, independentemente da configuração molecular***, contrariando o artigo, o qual *afirma ser finsleriana*. Para que o modelo “gere” uma geometria finsleriana, é necessário que ϕ dependa, ao menos de $\dot{r}$, podendo depender ainda de $\dot{\theta}$ (isso pode ser determinado calculando-se os outros A_{ijk}).

Vale ressaltar que toda a discussão acima é bidimensional. Está em aberto realizar qualquer coisa em dimensões maiores. Para investigar o tipo de geometria, a idéia seria a mesma, mudando apenas a quantidade de componentes A_{ijk} a considerar e o tamanho das expressões envolvidas.

Apesar de tudo, o resultado acima não invalida totalmente o mérito do artigo. A reinterpretação de $L = N \|\dot{\gamma}\|$ para $F = N \|\dot{\gamma}\|$ produziu um sistema de equações diferenciais mais simples (compare 5.1 com 5.3, no qual as segundas derivadas já estão naturalmente isoladas). Aparentemente, esta diferença ocorre porque num caso minimizamos um funcional diretamente, enquanto que, na dedução das

equações das geodésicas, utilizou-se o formalismo hamiltoniano.

Mesmo num âmbito bidimensional, ainda cabem as indagações:

- Existe algum outro defeito topológico ou meio físico no qual as hipóteses feitas sobre o raio de luz mantenham-se válidas, em que seria justificável um dependência $\phi = \phi(\dot{r})$? Neste caso, 5.8 pode dar condições para que a geometria fosse riemanniana. Ou ainda uma trajetória particular na qual a geometria “sentida” pelo raio de luz fosse riemanniana, mesmo que tivéssemos uma geometria finsleriana.
- Existe outro sistema físico (fora da óptica) no qual pudéssemos mapear as equações acima?

Conclusões e Comentários Finais

Tratamos de assuntos que fogem totalmente do curriculum comum de qualquer físico e até matemático. Apesar de simples, os tópicos abordados não são de modo algum, de fácil acesso. A literatura é escassa e está quase sempre mergulhada em contextos muito mais avançados e gerais.

Se tomarmos a data de publicação como uma medida do quanto algo é recente, podemos afirmar que este trabalho atende plenamente ao critério da “atualidade” ao qual uma dissertação de mestrado está sujeita. Gostaríamos de ter feito um texto muito mais amplo, mas o tempo dedicado à digitação não foi suficiente.

Vários problemas em aberto nas áreas de Geometria e Topologia podem ser relacionados com o “ângulo de contato”. Para um físico é interessante mencionar que em qualquer contexto físico, não há ainda uma interpretação para tal invariante geométrico.

Um aspecto pessoal interessante foi ter descoberto ao longo do

trabalho que as estruturas de contato são muito mais ricas que as simpléticas, apesar destas últimas serem muito mais famosas. Infelizmente, só conseguimos tardiamente material sobre os trabalhos de Lie sobre transformações de contato em EDP⁵.

A Geometria de Finsler é algo que os físicos estão descobrindo agora. A opinião do autor é que a tendência natural é a de surgirem vários artigos em diferentes áreas que tentarão generalizar a geometria envolvida, de riemanniana a finsleriana⁶. Até que ponto isto trará progresso científico *real* é uma incógnita. Potencial para tal existe.⁷

Ter estudado tais temas foi acostumar-se com a solidão...

⁵Fica a sugestão para alguma futura dissertação de mestrado que queira abordar as origens do modelo de Huygens ! Será mais facilmente feita e interessante que esta. Não deixe de abordar as transformações de Bäcklund e talvez o método do espalhamento inverso em vários contextos físicos.

⁶Fenômeno parecido ocorreu com a “álgebra geométrica” ou “álgebra de Clifford”...

⁷Devo admitir que esta parte final era inicialmente apenas um exemplo, que só foi abordado pela necessidade de ter-se um “exemplo de utilização na Física”. Entretanto, cresceu tanto que, mesmo resumido, dividiu-se em dois capítulos e me poupou de tratar de assuntos muito mais difíceis.

Referências Bibliográficas

- [1] A.C. da Silva, *Symplect Geometry*, arXiv:math.SG/0505366 v1 17May2005.
- [2] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, (versão disponível na web).
- [3] A.L.T. de Carvalho, *Fundamentos Matemáticos das Teorias de Gauge*, preprint.
- [4] A. Trautman, *Fiber bundles associated with space-time*, Rep. on Math.Phys. vol.1 no.1 (1970) 29-61.
- [5] A.V. de Oliveira, *Sistemas Integráveis*, Dissertação de Mestrado DMAT-UFPE (2003).
- [6] C. von Westenholz, *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland.
- [7] D.E. Blair, *Almost Contact Manifolds with Killing Structure Tensors*, Pacific J. of Math., vol.39, No.2, 269-276, 1971.

- [8] D.E. Blair, K. Ogiue, *Geometry of Integral Submanifolds of a Contact Distribution*, Illinois J. of Math., vol.19, 628-630, 1975.
- [9] D.E. Blair, K. Ogiue, *Positively Curved Integral Submanifolds of a Contact Distribution*, Illinois J. of Math., vol.19, 1975.
- [10] D.E. Blair, *Riemannian Geometry in Contact Manifolds*, Lec. Notes in Math., 509.
- [11] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, with an introduction to the problem of three bodies*, Cambridge University Press.
- [12] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds*, van Nostrand Reinhold company.
- [13] F. Dillen, L. Vrancken, *C-Totally Real Submanifolds of Sasakian Space Forms*, J. Math. Pures et Appl., 69, 1990, p.85 à 93.
- [14] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Differential Geometry of Time-Dependent Mechanics*, arXiv:dg-ga/9702020 v1 25Feb1997.
- [15] G. Sardanashvily, *Ten Lectures on Jet Manifolds in Classical and Quantum Field Theory*, arXiv:math-ph/0203040 v1 20Mar2002.
- [16] H. Geiges, *Contact Geometry*, arXiv:math.SG/0307242 v2 24jan2004.

- [17] H. Osborn, *The Existence of Conservation Laws, I*, Annals of Math., vol.69, No.1, 1959, 105-118.
- [18] J.B. Etnyre, *Introductory Lectures on Contact Geometry*, Proc. Sympos. Pure Math. 71 (2003), 81-107.
- [19] J.B. Etnyre, R. Ghrist, *An Index for Closed Orbits in Beltrami Fields*, arXiv:math.DS/0101095 v1 10Jan2001.
- [20] J.B. Etnyre, R. Ghrist, *Contact Topology and Hydrodynamics*, arXiv:dg-ga/9708011 v1 22Aug1997.
- [21] J.F.R. Arancibia, *O Funcional de Yang-Mills*, Dissertação de Mestrado DMAT-UFPE (1990).
- [22] J.G. Wolfson, *On Minimal Surfaces in a Kähler Manifold of Constant Holomorphic Sectional Curvature*, Trans. of the Am. Math. Soc., vol.290, No.2, 1985.
- [23] J. Martinet, *Forme de contact sur les variétés de dimension 3*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium II 1971.
- [24] J.W. Gray, *Some Global Properties of Contact Structures*, Annals of Math. vol.69, No.2, 1959.
- [25] K. Honda, *notes for math 599: Contact Geometry*, disponível na web.
- [26] L.N. de Andrade, *Breve introdução ao Latex 2*, disponível na web.

- [27] M.A. Aguilar, J.M. Isidro, M. Socolovsky, *Moduli space of potentials in the Aharonov-Bohm effect*, Adv. in App. Clifford Alg. 14, no.1, 179-184 (2004).
- [28] M.A. Aguilar, M. Socolovsky, *Aharonov-Bohm effect, flat connections, and Green's theorem*, Int. Jour. of Theor. Phys., vol.41, no.5 (2002).
- [29] M. de León, P.R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland.
- [30] M. Gökeler, T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity*, Cambridge University Press.
- [31] M.J. Gotay, J.A. Isenberg, *The Symplectization of Science*, preprint disponível na web.
- [32] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA.
- [33] M.P. do Carmo, *Formas Diferenciais e Aplicações*, 8o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA 1971.
- [34] M.P. do Carmo, *O Método do Referencial Móvel*, IMPA.
- [35] M.P. do Carmo, *Notas de um Curso de Grupos de Lie*, IMPA.
- [36] P. Libermann, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company.

- [37] P. Severa, *Contact Reductions, Mechanics and Duality*, arXiv:math.DS/9903168 v1 29Mar1999.
- [38] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foudations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [39] R. da Rocha Jr., E.C. de Oliveira, J. Vaz Jr., *O Laplaciano: de Gauss a Beltrami até Hodge-de Rham*, publicação UNICAMP.
- [40] R. Hermann, *Geometry, Physics, and Systems*, Marcel Dekker inc.
- [41] R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics, vol. 1*, W.A. Benjamin inc.
- [42] R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics, vol. 2*, W.A. Benjamin inc.
- [43] R. Komendarczyk, *On the Contact Geometry of Nodal Sets*, arXiv:math.DG/0402070 v1 4Feb2004.
- [44] R.L. Bryant, *Minimal Surfaces of Constant Curvature in S^n* , Trans. of the Am. Math. Soc., vol.290, No.1, 1985.
- [45] R. Percacci, *Geometry of Nonlinear Field Theories*, World Scientific.
- [46] R.W.R. Darling, *Differential Forms and Connetions*, Cambridge University Press.

- [47] S.I. Goldberg, *Ridigity of Positively Curved Contact Manifolds*, J. London Math. Soc., 42 (1967), 257-263.
- [48] S.I. Goldberg, *Totally Geodesic Hypersurfaces of Kaehler Manifolds*, Pacific J. of Math., vol.27, No.2, 1968.
- [49] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, John Wiley & Sons inc.
- [50] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, John Wiley & Sons inc.
- [51] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir Moscovo.
- [52] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.
- [53] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics*, North-Holland.
- [54] Y. Eliashberg, *Contact 3-Manifolds twenty years since J.Martinet's work*, Ann.Inst. Fourier, Grenoble 42, no.1-2 (1992) 165-192.
- [55] Y. Yaremko, *Contact Transformations in Classical Mechanics*, Nonlinear Math. Phys. 1997, N 1-2, 117-123.

- [56] Z. Chen, *Geometric Meanings of Curvatures in Finsler Geometry*,
arXiv:math.DG/0011136v1 18nov2000