



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**CRESCIMENTO LAPLACIANO EM DUAS DIMENSÕES: UMA ABORDAGEM
ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE LOEWNER**

por

Miguel Angel Durán Roa

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca examinadora:

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador - UFPE)

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (DF - UFPE)

Prof. Flávio Menezes de Aguiar (DF - UFPE)

Prof. Francisco Castilho Alcaraz (IFSC - USP)

Prof. Roberto André Kraenkel (IFT - UNESP)

Recife - PE, Brasil

- 2010

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Duran Roa, Miguel Angel.

Crescimento Laplaciano em duas dimensões:
uma abordagem através da equação de Loewner /
Miguel Angel Duran Roa. - Recife: O Autor, 2010.
iii, 117 folhas : il. fig. tab.

Orientador: Giovani Lopes Vasconcelos
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia, apêndice e anexo.

1.Física matemática. 2.Equação de Loewner.
I. Vasconcelos, Giovani Lopes (orientador). II.Título.

530.15 (22.ed.) FQ 2010-066



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

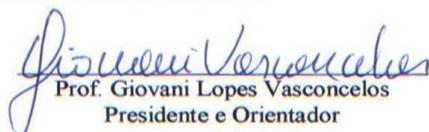
Miguel Angel Duran Roa

CRESCIMENTO LAPLACIANO EM DUAS DIMENSÕES: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE LOEWNER

A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovanni Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, Flávio Menezes de Aguiar, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Roberto André Kraenkel, do Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" e Francisco Castilho Alcaraz, do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

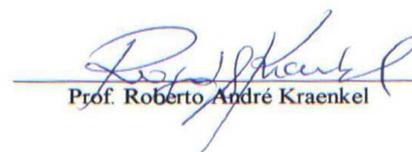
Aprovado () Reprovado () Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em trinta de novembro de dois mil e dez.


Prof. Giovanni Lopes Vasconcelos
Presidente e Orientador


Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha


Prof. Flávio Menezes de Aguiar


Prof. Roberto André Kraenkel


Prof. Francisco Castilho Alcaraz

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Dedos Viscosos na Célula de Hele-Shaw	3
1.2	Agregação limitada por difusão (DLA)	6
1.3	Crescimento Laplaciano	7
1.4	Modelos de Crescimento e a Equação de Loewner	8
1.5	Transformações Conformes e a Conjectura de Bieberbach	8
1.6	Equação de Loewner	9
1.7	Equação de Loewner Estocástica	13
1.8	Organização da Tese	14
2	A equação de Loewner no semiplano superior	15
2.1	Equação de Loewner para uma curva crescendo no semiplano	15
2.2	Soluções Exatas e Numéricas da equação de Loewner	19
3	Equação de Loewner: Uma abordagem através da Transformação de Schwarz-Christoffel	23
3.1	A equação de Loewner para uma curva	23
3.2	Equação de Loewner para múltiplas curvas	26
3.2.1	Dedução da Equação de Loewner para Múltiplas Curvas	26
3.2.2	Soluções exatas da equação de Loewner para dois dedos simétricos	30
3.2.3	Solução exata da equação de Loewner para três dedos	36
4	A equação de Loewner para uma interface crescendo no semiplano	44
4.1	Interface crescendo no semiplano superior	44
4.1.1	Interface com uma crista	50
4.1.2	Interface com duas cristas	54
4.1.3	Múltiplas interfaces crescendo no semiplano	58
5	Equação de Loewner para um dedo de largura infinitesimal na geometria do canal	63
5.1	Equação de Loewner na geometria do canal	63

5.2	Soluções Numéricas	70
5.2.1	Um dedo	71
5.2.2	Dois dedos	71
5.2.3	Três dedos	73
6	Crescimento de uma interface no canal	76
6.1	Equação de Loewner para uma interface no canal	76
6.1.1	Dedução da equação de Loewner	76
6.1.2	Interface simétrica	83
6.1.3	Interface assimétrica	84
6.2	Interface com múltiplas cristas	86
6.2.1	Formulação do problema	86
6.2.2	Interfaces simétricas	88
6.2.3	Interfaces Assimétricas	89
6.2.4	Múltiplas Interfaces	91
7	Conclusões e Perspectivas	95
A	Transformação de Schwarz-Christoffel	97
B	Método Numérico	99
B.1	Integração da Equação de Loewner no semiplano	99
B.1.1	Dois dedos	99
B.1.2	Três dedos	100
B.2	Integração da Equação de Loewner na geometria do canal	101
B.2.1	Dois dedos	101
B.2.2	Três dedos	102
B.3	Raízes de um polinômio cúbico	103
B.4	Raízes de um polinômio de quarto grau	105
C	Integrais para o dedo de Largura infinitesimal no Canal	107
	Referências Bibliográficas	114
D	Trabalhos publicados	117

Resumo

Padrões complexos são frequentemente observados em diferentes fenômenos físicos, tais como, o movimento de uma interface entre dois fluidos não miscíveis, eletrodeposição, etc, onde a dinâmica da interface é controlada pelo gradiente de uma função potencial, a qual satisfaz a equação de Laplace. Recentemente, uma ferramenta importante da análise complexa, a equação de Loewner, tem sido utilizada para estudar problemas de crescimento laplaciano em duas dimensões. Em poucas palavras, a equação de Loewner é uma equação diferencial de primeira ordem para a evolução temporal da transformação conforme que leva o “domínio físico”, onde se dá o crescimento, em um “domínio matemático” que se assemelha ao domínio físico inicial (ou seja, aquele existente antes de começar o processo de crescimento). Nesta tese, primeiramente apresentamos uma dedução alternativa da equação de Loewner para dois casos considerados recentemente na literatura em que curvas simples crescem no semiplano superior ou na geometria do canal. Nosso método de obtenção da equação de Loewner é baseado na transformação de Schwarz-Christoffel entre os planos matemáticos em dois instantes de tempo infinitesimalmente próximos. Em seguida, estendemos o formalismo da equação de Loewner para estudar uma classe mais geral de problemas de crescimento, em que agora tem-se o avanço de uma interface envolvendo uma região de área crescente. Em nosso modelo de crescimento, a interface possui certos pontos especiais, chamados de cristas e vales, onde o fator de crescimento é um máximo e um mínimo local, respectivamente. A regra de crescimento do modelo é definida em termos de certas curvas poligonais que crescem no plano matemático. Para as duas geometrias de interesse, o semiplano superior e o canal, deduzimos a correspondente equação de Loewner que governa a dinâmica da interface. Vários exemplos de evolução temporal de interfaces são discutidos, tanto no caso em que se tem uma única interface, seja com uma ou várias cristas, quanto no caso de múltiplas interfaces crescendo simultaneamente. Em particular, o conhecido efeito de blindagem, onde uma das cristas avança bem mais que as outras, é normalmente observado para o caso de interfaces não simétricas. Uma breve comparação qualitativa é feita entre nossos resultados e alguns padrões observados em experimentos

Palavras-chave: Equação de Loewner, crescimento laplaciano, dinâmica de interfaces, formação de padrões.

Abstract

Complex patterns are often observed in different physical phenomena, such as the evolving interface between two immiscible fluids, electrodeposition, etc, where the interface dynamics is driven by the gradient of a potential function, which in turn satisfies Laplace equation. Recently, a powerful tool from complex analysis, the Loewner equation, has been used to study Laplacian growth problems in two dimensions. Briefly said, the Loewner equation is a first order differential equation for the conformal mapping that maps the “physical domain,” where the growth is taking place, to a “mathematical domain” that resembles the initial physical domain (i.e., before growth had begun). In this dissertation, we first present an alternative method, based on the Schwarz-Christoffel transformation between the mathematical planes in two instants of time infinitesimally close, to derive the Loewner equation for the problem, recently considered in the literature, of slit-like fingers growing in both the upper half-plane and in the channel geometry. We then extend the Loewner-equation formalism to study a more general class of interface growth problems. In our growth models, the interface has certain special points, called tips and troughs, where the growth rate is a local maximum and a local minimum, respectively, and the growth rule is defined in terms of a polygonal growing curve in the mathematical plane. We derive the corresponding Loewner equation for both the upper half-plane and in the channel geometry. Several examples are discussed, such as a single interface with one or more tips as well as multiple interfaces. In particular, the so-called “screening effect”, where one of the tips surges ahead of the other ones, is typically observed in the case of non-symmetric interfaces. A comparison between our findings and results on fingering experiments is briefly made.

Keywords: Loewner equation, Laplacian growth, Interface dynamics, Pattern formation.

CAPÍTULO 1

Introdução

Fenômenos de crescimento estão presentes em diversos tipos de processos físicos, por exemplo: formação de cristais, eletrodeposição química, formação de dedos viscosos, etc. A ubiquidade e a complexidade dos padrões formados nessas situações, tem motivado muitos estudos que procuram entender os processos que acontecem na formação dessas estruturas. Esses processos, de não equilíbrio, tem motivado o desenvolvimento de ferramentas matemáticas novas, ou a aplicação das existentes com o propósito de entender melhor como se formam essas estruturas, e fazer modelos que descrevam da forma mais fiel possível os padrões observados na natureza.

Uma descrição de vários tipos de padrões pode ser feita em termos de uma superfície que se desloca devido a um processo de transporte externo e instabilidades na superfície. Em muitos casos, esse processo de transporte pode ser descrito por um campo escalar que satisfaz a equação de Laplace dando origem ao chamado crescimento laplaciano. A rapidez com que se desloca essa superfície está relacionada ao gradiente do respectivo campo escalar, como descreveremos a seguir. Exemplos de crescimento laplaciano, muito estudados na literatura e que descreveremos a seguir, incluem a formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw [1] e o fenômeno de agregação limitada por difusão [2].

1.1 Dedos Viscosos na Célula de Hele-Shaw

A formação de dedos viscosos é um tipo de crescimento laplaciano que se refere ao aparecimento e a evolução de instabilidades que ocorrem no deslocamento de dois fluidos viscosos em um meio poroso. Essa instabilidade, na maioria dos casos, está relacionada com variações de viscosidade entre as fases. O cenário mais conveniente para o estudo de dedos viscosos é dado pela célula de Hele-Shaw [1], a qual consiste de duas placas de vidro paralelas com uma pequena separação entre elas, de largura b , entre as quais os fluidos acontece o escoamento como mostrado na Fig. 1.1. Essa montagem é usualmente utilizada para estudar as características bidimensionais do escoamento. A formação de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw se dá quando um fluido mais viscoso (e.g. óleo) é empurrado por outro fluido de viscosidade menor

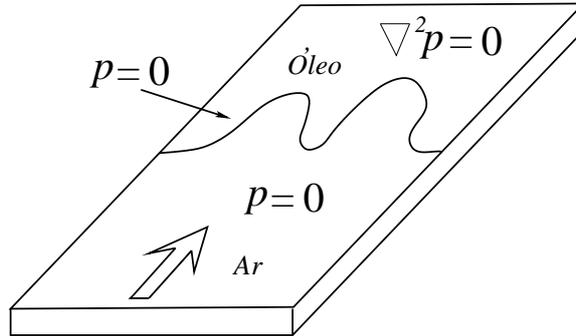


Figura 1.1 Formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw.

(e.g. ar), que é injetado por uma das extremidades da célula, como ilustrado na Fig. 1.1. No regime de fluxo laminar (fluidos com número de Reynolds pequeno, $Re \ll 1$), as forças inerciais são desprezíveis em relação à força de viscosidade. Nesse caso, a equação de Navier-Stokes pode ser reduzida à seguinte expressão

$$\mu \nabla^2 v(x, y, z) - \nabla p(x, y, z; t) = 0, \quad (1.1)$$

onde μ é a viscosidade e $p(x, y, z; t)$ corresponde a pressão entre os fluidos, e $v(x, y, z)$ corresponde ao campo de velocidades. Considerando fluidos incompressíveis, ou seja

$$\nabla \cdot v(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

a Eq. (1.1) se reduz ao laplaciano da pressão

$$\nabla^2 p(x, y, z; t) = 0. \quad (1.3)$$

Então, a pressão no domínio do ar é constante e é fixada como sendo zero por convenção. Assim, na região do óleo, a pressão satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 p(x, y, z; t) = 0$. Desprezando-se a tensão superficial, a pressão é nula na interface óleo-ar e temos então um crescimento laplaciano. Consideramos as coordenadas como mostrado na Fig. 1.2, assim o escoamento será paralelo às placas, no plano xy , e a largura da célula fica na direção z , com os fluidos confinados entre $z = 0$ e $z = b$. As Eqs. (1.2) e (1.3) são válidas em três dimensões, por isso devem ser feitas algumas considerações adicionais para aplicá-las na geometria quase-dois-dimensional da célula de Hele-Shaw. Assumindo que a velocidade dos fluidos é zero nas placas, isto é $v_z(0) = 0$ e $v_z(b) = 0$, e fazendo uma média da equação de incompressibilidade (1.2) ao longo

da separação entre as placas, temos

$$\frac{1}{b} \int_0^b \nabla \cdot \mathbf{v} \, dz = \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial y} + \frac{v_z(b) - v_z(0)}{b} = \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial y}. \quad (1.4)$$

onde \hat{v}_x e \hat{v}_y são as médias entre as placas, das componentes das velocidades nas direções x e y respectivamente. Note que Eq. (1.4) mostra que a condição de incompressibilidade valida a Eq. (1.3) para a aproximação da célula de Hele-Shaw. Adicionalmente, assumimos que as componentes das velocidades $v_x(x, y, z)$ e $v_y(x, y, z)$ possuem uma dependência parabólica na direção z :

$$v_i(x, y, z) = -v_i z(z - b), \quad i = x, y, \quad (1.5)$$

onde v_i denota a resistência média ao escoamento entre as placas. Podemos utilizar a dependência parabólica das velocidades para determinar a média de cada componente da velocidade entre as placas:

$$\hat{v}_i = \frac{1}{b} \int_0^b v_i(x, y, z) \, dz = -\frac{1}{b} \int_0^b v_i z(z - b) \, dz = v_i \frac{b^2}{6}. \quad (1.6)$$

A seguinte consideração é $\frac{\partial^2 v_i}{\partial j^2} \ll \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}$ para $j = x, y$, tal que a Eq. (1.1) se reduz a

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} = \nabla p. \quad (1.7)$$

Substituindo Eq. (1.5) em Eq. (1.7), e finalmente utilizando Eq. (1.6) encontramos a Lei de Darcy para o escoamento na célula de Hele-Shaw:

$$\hat{\mathbf{v}} = -\frac{b^2}{12\mu} \nabla p. \quad (1.8)$$

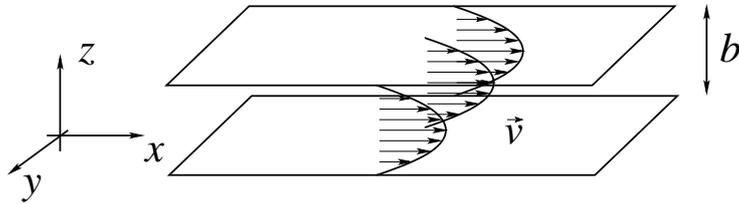


Figura 1.2 Escoamento entre duas placas paralelas separadas a uma distância b entre elas. As setas indicam o campo de velocidades \vec{v} .

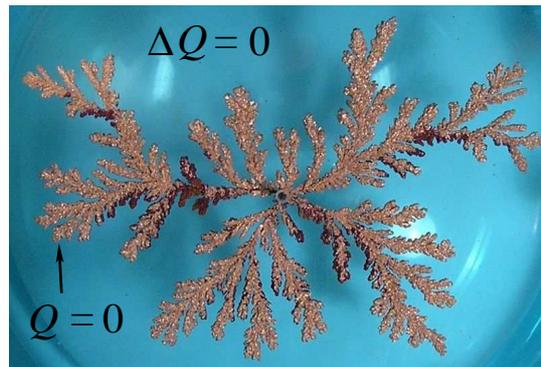


Figura 1.3 Estrutura DLA gerada por uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição

1.2 Agregação limitada por difusão (DLA)

Outro exemplo de crescimento laplaciano é o fenômeno de Agregação Limitada por Difusão (DLA, do inglês “diffusion-limited aggregation”). O DLA é um processo no qual partículas submetidas a um passeio aleatório formam agregados. Esse tipo de agregados foi estudado por Witten e Forrest [3], observando o aglomeramento produzido ao esfriar um vapor metálico. O modelo proposto em 1981 por Witten e Sander [2], considera inicialmente uma partícula localizada na origem de uma rede. Posteriormente uma segunda partícula é liberada a partir de um local arbitrário, a uma grande distância da origem. Esta partícula avança aleatoriamente até atingir uma posição adjacente da partícula inicial. Quando a partícula atinge uma posição adjacente da que está localizada na origem, ela então passa a fazer parte do agregado de partículas. Posteriormente, outra partícula é liberada a partir de outra posição arbitrária até que a mesma faça parte do aglomerado, e assim por diante. Um crescimento desse tipo gera estruturas ramificadas como a que se mostra na Fig. 1.3. O modelo proposto por Witten e Sander é aplicável a agregação de qualquer sistema onde a difusão é o meio primário de transporte. Em uma aproximação discreta, pode-se pensar que as partículas são pequenos quadrados que se deslocam em uma rede quadrada cuja constante de rede é igual às arestas do quadrado, tal que as partículas preenchem a rede quando se colam entre elas. O centro da partícula faz uma caminhada aleatória na rede. A probabilidade $Q(x)$, de que uma partícula visite uma posição determinada da rede x (na região exterior do agregado) satisfaz uma versão discreta da equação de Laplace $\Delta Q(x) = 0$ (com $\Delta = \nabla^2$). Essa probabilidade é zero no contorno do domínio formado pelas partículas, ou seja $Q = 0$, porque a probabilidade para uma partícula visitar um ponto da rede já ocupado é nulo, ou seja, um ponto que faça parte do aglomerado que cresce, é zero. A velo-

cidade local a qual o domínio cresce é proporcional à probabilidade para um lugar próximo da interface, mas do lado externo, seja visitado. Essa probabilidade é proporcional ao gradiente normal discreto de $Q(x)$, já que a probabilidade é zero na interface. Assim, a velocidade local é $v_n = \nabla Q$. Durante o processo de formação do agregado, este se ramifica em várias escalas. A probabilidade para uma partícula fazer parte do agregado é maior na ponta dos ramos que no espaço que se forma entre eles, essa propriedade presente em todas as escalas, é responsável pela natureza fractal dos DLA. A formação de padrões que surgem pela difusão de caminhantes aleatórios pode ser observada em diversas situações tais como eletrodeposição e depósitos minerais. Hastings e Levitov [4] mostraram que os padrões que surgem nos aglomerados limitados por difusão podem ser obtidos teoricamente iterando mapas conformes estocásticos. Ou seja, o crescimento é representado como uma sequência de mapas conformes. Posteriormente, a utilização de mapas conformes foi empregada em [5, 6] para mostrar que os padrões de DLA podem ser obtidos simplesmente iterando transformações conformes sem utilizar elementos aleatórios.

1.3 Crescimento Laplaciano

Os fenômenos mencionados acima pertencem à classe de problemas conhecidos como crescimento laplaciano em que o crescimento de um domínio, delimitado por uma interface, é governado por um campo escalar $\phi(x, y, x; t)$ que satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(x, y, x; t) = 0, \quad (1.9)$$

sujeito a condições de contorno apropriadas. A natureza física do campo escalar ϕ depende do problema específico, por exemplo, no contexto da hidrodinâmica o campo escalar ϕ corresponde à pressão, ao passo que em problemas de crescimento induzido por um campo elétrico a função ϕ corresponde ao potencial elétrico. A evolução temporal da interface é definida determinando-se a velocidade normal aos pontos da interface como o gradiente de ϕ elevado a alguma potência η

$$v_n \sim |\nabla \phi(x, y; t)|^\eta. \quad (1.10)$$

1.4 Modelos de Crescimento e a Equação de Loewner

Reduzir o problema de crescimento a duas dimensões fornece um cenário mais favorável para o tratamento teórico, porque isso permite utilizar as ferramentas matemáticas das funções analíticas. Nesse contexto surge o formalismo da equação de Loewner, que utilizaremos nesta tese e descreveremos detalhadamente no capítulo 2. Na sua formulação mais básica, a equação de Loewner é uma equação diferencial de primeira ordem para a transformação conforme $g_t(z)$ que leva uma região do plano físico z para o semiplano superior de um plano matemático w . É importante mencionar, contudo, que a equação de Loewner originalmente surgiu, em 1923, em um contexto de matemática pura, mais especificamente em um problema de teoria de funções univalentes conhecido como a conjectura de Bieberbach [7]. Só mais recentemente, a partir de 2000, com o desenvolvimento por Schramm [8] do formalismo da equação de Loewner estocástica, que se mostrou descrever vários problemas em mecânica estatística e teoria de campos conformes, o método da equação de Loewner despertou o interesse dos físicos. Desde então houve uma explosão de trabalhos nessa área, como pode ser verificado pelos vários artigos de revisão recentes [9, 10, 11, 12, 13, 14].

A título de introdução histórica ao tema, faremos a seguir uma breve exploração do formalismo da equação de Loewner, começando pelo contexto em que ela surgiu (conjectura de Bieberbach), até chegar na equação de Loewner e suas aplicações .

1.5 Transformações Conformes e a Conjectura de Bieberbach

Na teoria de funções analíticas de uma variável complexa, define-se um domínio como um subconjunto conexo (ou seja, que pode ser comprimido a um ponto) do plano complexo \mathbb{C} . Uma transformação, f , é dita conforme se esta leva um domínio $D \neq \mathbb{C}$, em outro domínio $D' \neq \mathbb{C}$ e além disso é uma transformação univalente (um para um) que preserva ângulos. Mais especificamente, se γ_0 e γ_1 são duas curvas no domínio D que se interceptam fazendo um certo ângulo entre elas, então, suas imagens $f(\gamma_0)$ e $f(\gamma_1)$ deverão se interceptar com o mesmo ângulo no domínio D' . Na prática, isso quer dizer que a transformação $f : D \rightarrow D'$ é uma transformação analítica e injectiva em D , que tem derivada diferente de zero em todo ponto do domínio D . O mapa f tem inversa f^{-1} que também é conforme [15].

O principal teorema sobre as transformações conformes é o teorema de Riemman, que nos diz que o interior de qualquer domínio D simplesmente conexo, pode ser levado em um domínio de referência, seja o disco unitário \mathbb{D} ou o semiplano complexo \mathbb{H} . Vale notar que o teorema

não diz nada sobre o comportamento do mapa no contorno de D . Não obstante, neste trabalho consideramos unicamente mapas cuja definição pode ser estendida ao contorno do domínio D , ou em outras palavras, domínios com contornos que são curvas contínuas.

Consideramos agora uma classe particular de mapas conformes dentro do disco unitário. Seja f a transformação que leva o domínio D (uma região no interior do disco unitário) em qualquer outro domínio, tal que a transformação f é normalizada por $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. A classe de funções S é a coleção de funções f definidas dentro do disco unitário $\{z : |z| < 1\}$ que podem ser expandidas da forma

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_nz^n. \quad (1.11)$$

Para as funções da classe S , existe desde 1916 uma conhecida conjectura, chamada de conjectura de Bieberbach, e se refere aos coeficientes a_n da expansão, que é exprimida como [7, 16]

Conjectura de Bieberbach

Os coeficientes da expansão (1.11) de qualquer função $f \in S$ satisfazem

$$|a_n| \leq n, \quad \forall n \geq 2. \quad (1.12)$$

Essa conjectura foi demonstrada por de Branges em 1985, depois de muitos resultados parciais, e passou a ser conhecida como o teorema de Bieberbach-de Branges. O mais relevante dos resultados parciais, no contexto desta tese, foi que Loewner introduziu em 1923 sua equação para provar que $a_3 \leq 3$ [7]. Além disso, a equação de Loewner também foi importante na demonstração da conjectura de Bieberbach por de Branges [17].

1.6 Equação de Loewner

Vamos introduzir algumas definições que fazem parte do formalismo de Loewner, que será desenvolvido com mais detalhe no Capítulo 2. Considere o problema de uma curva Γ_t que cresce a partir da origem no semiplano superior do plano complexo z . Seja $w = g_t(z)$ a transformação conforme que leva o domínio de interesse no plano z no semiplano superior do plano w , sendo a curva Γ_t levada em um segmento do eixo real, como mostra a Fig. 1.4.

A extremidade livre da curva, denotada por $\gamma(t)$, a partir da qual o crescimento prossegue, é mapeada no ponto $a(t)$ no eixo real do plano w . Para determinar a evolução temporal da função $g_t(z)$, deve-se considerar o crescimento da curva durante um pequeno intervalo infinitesimal de tempo τ . Seja $\delta\Gamma_t \equiv g_t(\Gamma_{t+\tau} \setminus \Gamma_t)$, que é levado no eixo real por $g_{\tau,t}$. Se o ponto extremo da curva é levado em $a(t + \tau)$, então $g_{t+\tau} = g_{\tau,t} \circ g_t$. Já que o resultado de aplicar o mapa $g_{t+\tau}$ é o mesmo de aplicar sucessivamente os mapas g_t e $g_{\tau,t}$ podemos escrever a seguinte lei de mapas iterados

$$g_{t+\tau} = g_{\tau,t}[g_t(z)]. \tag{1.13}$$

A partir da Eq. (1.13) pode ser mostrado que a transformação g_t satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem dada por

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a(t)}. \tag{1.14}$$

Uma equação análoga foi introduzida pela primeira vez por Loewner em 1923 para o caso de curvas que crescem a partir do círculo unitário, a qual ficou a ser conhecida como a equação de Loewner radial. Por essa razão, a Eq. (1.14) passou a ser chamada de equação de Loewner cordal, que descreve o crescimento de curvas no semiplano superior (o termo cordal refere-se ao fato de que a curva pode ser vista como uma ‘corda’ conectando dois pontos da fronteira em um domínio simplesmente conexo, que no caso do semiplano correspondem à origem e o ponto no infinito). Frequentemente, contudo, vamos nos referir à Eq. (1.14) simplesmente como a equação de Loewner. A Eq. (1.14) é a forma mais conhecida da equação de Loewner para a transformação g_t que leva uma curva no semiplano do plano complexo w .

Em princípio, qualquer curva Γ_t que cresce no semiplano tem associada uma função real $a(t)$ que tenha continuidade Holder, com $\alpha = 1/2$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|a(t-s) - a(t)|}{s^\alpha} < C \tag{1.15}$$

como mostrado em [18].

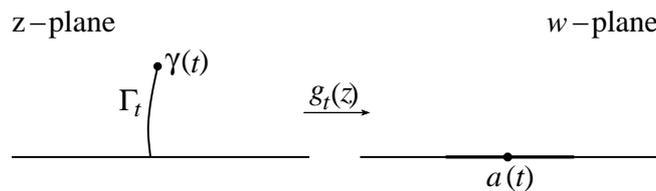


Figura 1.4 Aplicação do mapa g_t para uma curva crescendo no semiplano.

Para ver a relação da transformação g_t com o crescimento laplaciano define-se a função potencial $\phi(x, y; t)$, tal que ela satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi(x, y; t) = 0$, na região definida pelo semiplano superior sem a curva Γ_t (ou seja $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$), e é constante digamos $\phi = 0$ ao longo do eixo real e da curva Γ_t . No instante t , a transformação g_t leva $\gamma(t)$ em $a(t)$, e no instante $t + \tau$ g_t leva a extremidade da curva $\gamma(t + \tau)$ no segmento $a(t) + ih$ no plano matemático w . Com a transformação g_t definida como dito acima, a função $\phi(x, y; t)$ corresponde ao eixo imaginário no plano matemático. Se denotarmos o potencial complexo $w = \psi + i\phi$, onde ψ é a função harmônica conjugada de ϕ , vemos que a transformação $g_t(z)$ corresponde ao potencial complexo w , ver Fig. 1.6. Note ainda que o fato de o crescimento da curva no plano w dá-se de acordo com o segmento vertical implica que no plano físico a extremidade da curva cresce ao longo das linhas de gradiente do potencial $\phi(x, y; t)$. Isso nos permite utilizar a transformação definida pela função g_t para estudar problemas de crescimento laplaciano em duas dimensões, como veremos mais detalhadamente neste trabalho.

O formalismo da equação de Loewner pode ser usado para descrever processos de crescimento mais gerais, não se limitando ao caso das curvas descrito acima. Na Fig. 1.8 vemos um domínio limitado (t representa a parametrização do referido domínio K_t), que cresce a partir do eixo real no semiplano superior \mathbb{H} do plano complexo z denominado de plano físico. O domínio D_t , correspondendo à região do semiplano superior \mathbb{H} excluindo-se o conjunto K_t (ou seja $D_t = \mathbb{H} \setminus K_t$) onde D_t é chamado de domínio físico. Como vimos acima, define-se no formalismo de Loewner uma transformação conforme $g_t(z)$ que leva o domínio físico D_t em \mathbb{H} , e leva o contorno D_t no eixo real; vide Fig. 1.7. No instante $t + \tau$, uma pequena região K_τ foi acrescida ao contorno K_t , tal que $K_{t+\tau} = K_t \cup K_\tau$. Sob a ação de $g_t(z)$ o domínio $K_{t+\tau}$ é levado em um pequeno domínio K'_t no plano w ; vide Fig. 1.8. Por outro lado, por definição, a transformação $g_{t+\tau}(z)$ leva $K_{t+\tau}$ no semiplano superior. Isso implica, como visto, que podemos aplicar sucessivamente a transformação g_t , e então podemos escrever $g_{t+\tau} = g_{\tau,t}[g_t(z)]$. Fazendo $\tau \rightarrow 0$, como mostraremos no Capítulo 2, pode ser deduzida uma equação diferencial

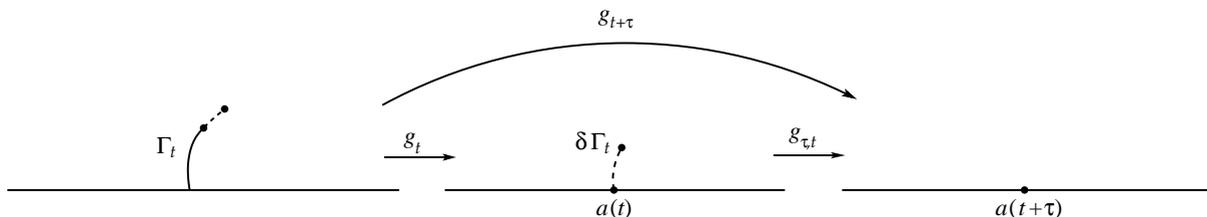


Figura 1.5 Aplicações do mapa g_t para uma curva crescendo no semiplano superior.

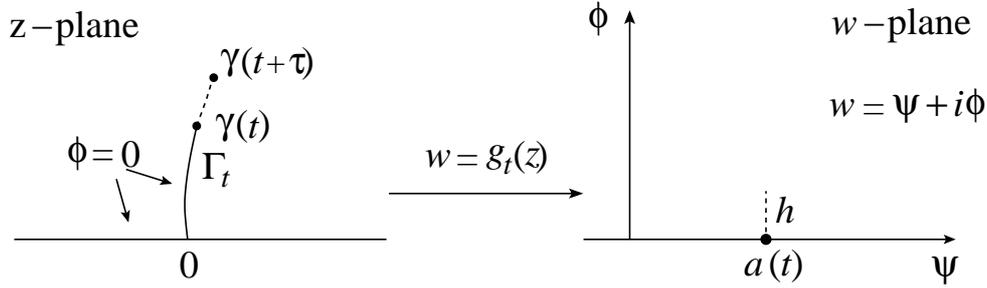


Figura 1.6 A transformação g_t corresponde ao potencial complexo $w = \psi + i\phi$, tal que o crescimento de uma curva no semiplano acontece ao longo das linhas de gradiente da função potencial ϕ .

para a função $g_t(z)$. De forma mais geral, a equação de Loewner no semiplano pode ser obtida de [9]

$$\dot{g}_t(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_t(\omega) d\omega}{g_t(z) - \omega}, \tag{1.16}$$

onde $\rho_t(\omega) d\omega$ é a medida no eixo real que pode depender do tempo e $\rho_t(\omega)$ é o parâmetro que controla o crescimento.

Fazendo

$$\rho_t(\omega) = 2\pi\delta[\omega - a(t)], \tag{1.17}$$

a Eq. (1.16) pode ser reduzida para o caso em que o crescimento acontece somente em um ponto, ou seja que K_t é uma curva (ver Capítulo 2). O crescimento acontece no ponto $a(t)$ sobre essa curva, vide Fig.1.5. Isso implica que a densidade $\rho_t(\omega)$ está concentrada em $a(t)$, como mostramos no início da seção.

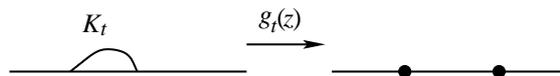


Figura 1.7 Aplicação do mapa g_t para um conjunto de pontos delimitados pelo contorno K_t .

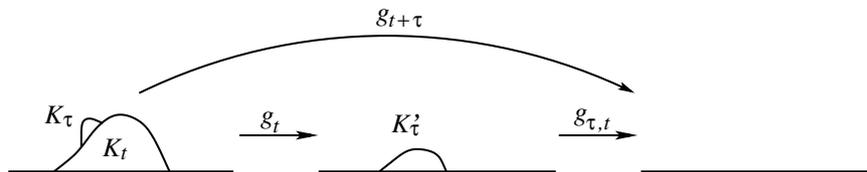


Figura 1.8 Aplicações sucessivas da transformação g_t para um conjunto de pontos delimitados pelo contorno K_t .

1.7 Equação de Loewner Estocástica

Oded Schramm estendeu o uso da equação de Loewner, introduzindo uma função $a(t)$ estocástica na equação (1.14) [8]. Como foi mostrado acima, quando $a(t)$ é uma função contínua do tipo Höder 1/2, obtém-se uma trajetória contínua $\gamma(t)$ no plano z . Schramm percebeu que se $a(t)$ fosse uma função com incrementos, $\delta a = a(t + \delta t) - a(t), \forall \delta t > 0$, aleatórios independentes e indenticamente distribuídos, então a trajetória seria uma curva aleatória sem autointerseções. O processo que satisfaz essa condição é o movimento Browniano em uma dimensão

$$a(t) = \sqrt{\kappa} B(t) \quad (1.18)$$

onde $\langle B(t) \rangle = 0$, $\langle [B(t + \delta t) - B(t)]^2 \rangle = |\delta t|$ e κ é uma constante real. A equação (1.14) considerando $a(t)$ estocástico, é conhecido como evolução de Loewner estocástica ou evolução de Schramm-Loewner (SLE). A SLE descreve curvas aleatórias que sejam invariantes sob transformações conformes em duas dimensões. A SLE permite o estudo dessas curvas diretamente no contínuo, mas usualmente, a partir de modelos discretos de curvas aleatórias em uma rede. Dessa forma, a SLE apresenta as curvas aleatórias como modelos de crescimento, ou seja, a SLE dá uma forma de acumular incrementos infinitesimais aleatoriamente e gerar curvas que corresponderão aos aglomerados que surgem em diferentes modelos de rede bidimensionais, que dependendo do valor de κ podem ser:

- $\kappa = 6$: contorno de aglomerados de percolação [13, 19];
- $\kappa = 3$: contorno de aglomerados de spins Ising [11, 20];
- $\kappa = 4$: explorador harmônico [11, 21];
- $\kappa = 8/3$: caminhadas auto-excludentes [11, 22].

Em outras palavras, as evoluções SLE podem ser utilizadas para estudar o limite contínuo de interfaces em sistemas estatísticos na criticalidade em duas dimensões [11]. O caso mais simples deste tipo de Evoluções de Schramm-Loewner é conhecido como SLE cordal (ou cadeias de Loewner). As cadeias de Loewner descrevem curvas que unem dois pontos de um domínio planar [23]. Contudo, nesta tese consideramos apenas o caso determinístico da equação de Loewner.

1.8 Organização da Tese

No Capítulo 2 mostraremos algumas definições que são necessárias para deduzir a equação de Loewner na forma mais conhecida. Para isso, utilizaremos dois métodos: i) através da forma explícita do mapa g_t ; ii) via expansão da fórmula integral da transformação de Schwarz-Christoffel para esse mapa. Mostramos que as soluções da equação de Loewner dependem de uma função $a(t)$ chamada de função forçante (do inglês “forcing”), cujas propriedades determinam a dinâmica de crescimento. Também ilustramos soluções numéricas da equação para dedos de largura infinitesimal crescendo no semiplano superior.

No Capítulo 3, encontraremos a equação de Loewner para n dedos e mostraremos soluções numéricas e analíticas da equação de Loewner para dois e três dedos de largura infinitesimal crescendo no semiplano superior. Das soluções observamos que os dedos possuem um comportamento assintótico ($t \rightarrow \infty$) que leva o crescimento dos dedos ao longo de linhas retas. Mostraremos também soluções numéricas para casos nos quais o ponto extremo $\gamma(t)$ da curva, não cresce ao longo de linhas de gradiente.

No Capítulo 4 estendemos o formalismo para deduzir uma equação de Loewner generalizada para uma interface no semiplano. Nesse caso, a região delimitada pela interface pode ser vista como um dedo de largura finita, isto é, a largura não é nula, diferente do caso de crescimento de curvas. Mostram-se também algumas soluções numéricas para interfaces com um ou mais pontos máximos locais (cristas), assim como para múltiplas interfaces que crescem simultaneamente.

No Capítulo 5 consideramos a equação de Loewner para dedos de largura infinitesimal na geometria de um canal semi-infinito, e mostramos soluções numéricas da equação de Loewner para o caso de um e múltiplos dedos crescendo no canal.

No Capítulo 6 estendemos o formalismo dos Capítulos 4 e 5 para tratar agora o problema de crescimento de interfaces na geometria do canal. Nesse caso obtemos a equação de Loewner correspondente e mostramos várias soluções dessa equação para interfaces com uma ou múltiplas cristas, bem como para o caso de múltiplas interfaces crescendo na geometria do canal.

No Capítulo 7 apresentamos nossas principais conclusões, bem como algumas perspectivas e possíveis desdobramentos para o trabalho iniciado nesta tese.

A equação de Loewner no semiplano superior

Neste capítulo utilizamos o formalismo de Loewner para deduzir a equação que descreve a dinâmica do mapa g_t no caso mais simples (curvas que crescem no semiplano superior). Com isso, veremos que é possível descrever o comportamento de uma curva que cresce no semiplano superior. Mostramos alguns casos para os quais podemos solucionar analiticamente a equação de Loewner, e também, exemplos onde utilizamos o método numérico descrito em [24], para encontrar a trajetória das curvas que crescem no semiplano.

2.1 Equação de Loewner para uma curva crescendo no semiplano

Nesta seção, vamos deduzir a equação de Loewner para uma curva simples (arco de Jordan) crescendo no semiplano superior [24]. Mais especificamente, considera-se o problema de uma curva que cresce a partir do eixo real em $t = 0$ e avança no semiplano superior \mathbb{H} do plano complexo z :

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}. \quad (2.1)$$

A curva no instante t é denotada por Γ_t e o ponto extremo da curva é chamado de $\gamma(t)$, vide Fig 2.1. A região onde acontece o crescimento da curva é denominada de “domínio físico”, sendo denotado por \mathcal{D}_t , e corresponde à região do semiplano superior obtida excluindo-se a curva Γ_t , ou seja,

$$\mathcal{D}_t = \mathbb{H} \setminus \Gamma_t. \quad (2.2)$$

Consideremos agora a transformação $g_t(z)$ que leva o domínio físico, \mathcal{D}_t , no semiplano superior \mathbb{H} de um plano complexo auxiliar w , chamado de “plano matemático”, ou seja, tem-se $w = g_t(z)$, onde

$$g_t : \mathbb{H} \setminus \Gamma_t \rightarrow \mathbb{H}, \quad (2.3)$$

com a extremidade da curva $\gamma(t)$ sendo levada no ponto $a(t)$ do eixo real no plano w ; ver

Fig. 2.1. A função $g_t(z)$ também deve satisfazer a condição inicial

$$g_0(z) = z, \tag{2.4}$$

já que inicialmente o semiplano superior está vazio. Além disso, impomos no infinito a chamada condição de normalização hidrodinâmica

$$g_t(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty. \tag{2.5}$$

Depois de um tempo infinitesimal τ , o ponto $\gamma(t)$ ocupará a posição $\gamma(t + \tau)$, que corresponde ao ponto B na Fig. 2.1. A porção acrescida da curva durante o tempo τ (segmento \overline{ABC} na Fig. 2.1) será levada por $g_t(z)$ em um corte vertical no domínio w . A altura h do corte está relacionada ao parâmetro infinitesimal τ , como será visto a seguir. Por conveniência de notação, vamos representar o plano matemático no instante $t + \tau$ como o plano complexo ζ , para distingui-lo do plano w que representa o plano matemático no instante t . Temos então que $\zeta = g_{t+\tau}(z)$. A nova extremidade da curva $\gamma(t + \tau)$, representada pelo ponto B na Fig. 2.1 é levada por $g_{t+\tau}(z)$ no ponto $a(t + \tau)$ no plano ζ , enquanto que os pontos A e C são levados nos pontos $a(t + \tau) - \nu$ e $a(t + \tau) + \nu$, respectivamente. Seja agora $w = F(\zeta)$ a transformação que transforma o semiplano superior ζ no plano matemático w , como indicado na Fig. 2.1. Pode-se escrever então a função $g_{t+\tau}(z)$ em termos da seguinte regra de mapas iterados

$$g_{t+\tau} = F^{-1} \circ g_t, \tag{2.6}$$

onde F^{-1} é a inversa de $F(\zeta)$ e o símbolo “ \circ ” denota composição funcional.

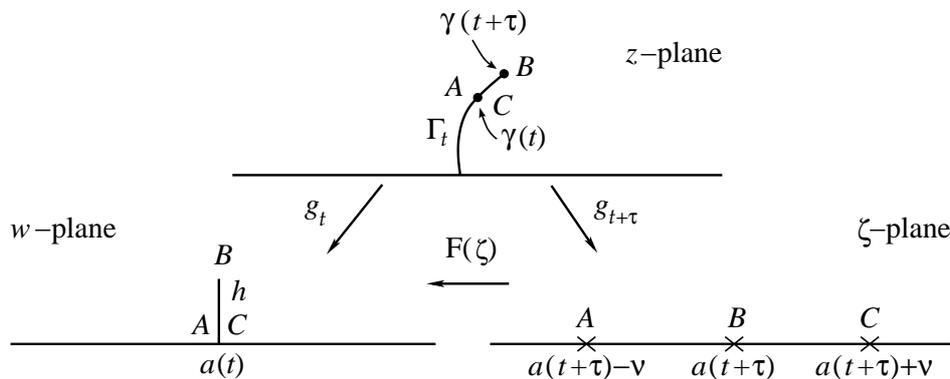


Figura 2.1 Planos físico (plano z) e matemáticos (plano w e plano ζ) para o crescimento de um dedo (curva simples) no semiplano superior.

A equação (2.6) define a evolução temporal do mapa $g_t(z)$, e a partir dela pode-se encontrar a equação de Loewner para g_t como será mostrado a seguir.

Inicialmente vamos inverter a Eq. (2.6), obtendo $g_t = F \circ g_{t+\tau}$, ou mais explicitamente

$$g_t = F(g_{t+\tau}). \quad (2.7)$$

A próxima etapa é determinar a função $F(\zeta)$. Para isso, notemos que $F(\zeta)$ leva o semiplano superior do plano complexo ζ no semiplano superior do plano complexo w com um corte vertical. Por outro lado, o domínio no plano w pode ser visto como um polígono degenerado, de modo que $F(\zeta)$ é encontrada facilmente aplicando-se a fórmula de Schwarz-Christoffel [25] dada no Apêndice A. Nesse caso obtemos

$$F(\zeta) = K \int_{a(t+\tau)-v}^{\zeta} \frac{\zeta - a(t+\tau)}{\sqrt{[\zeta - a(t+\tau)]^2 - v^2}} d\zeta + a(t), \quad (2.8)$$

onde a constante K é escolhida de modo a satisfazer $g_t = g_{t+\tau}$ no limite $g_{t+\tau} \rightarrow \infty$ que resulta da condição hidrodinâmica (2.5), e que em face de (2.7) pode ser escrita como

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} F(\zeta) = \zeta. \quad (2.9)$$

Tomando agora o limite $\zeta \rightarrow \infty$ em (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} F(\zeta) &= K \int d\zeta \\ &= K\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

que comparada com (2.9) resulta $K = 1$, de modo que a transformação $F(\zeta)$ dada em (2.8) torna-se

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{a(t+\tau)-v}^{g_{t+\tau}} \frac{\zeta - a(t+\tau)}{\sqrt{[\zeta - a(t+\tau)]^2 - v^2}} d\zeta + a(t). \quad (2.11)$$

Integrando a equação acima tem-se

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \sqrt{[\zeta - a(t+\tau)]^2 - v^2} \Big|_{a(t+\tau)-v}^{g_{t+\tau}} + a(t), \quad (2.12)$$

e avaliando os limites de integração obtemos

$$g_t = \sqrt{[g_{t+\tau} - a(t+\tau)]^2 - v^2} + a(t). \quad (2.13)$$

Note ainda, que como a imagem de $a_{t+\tau}$ é o ponto $a(t) + ih$, segue que $v = h$.

Resolvendo (2.13) para $g_{t+\tau}$ temos

$$g_{t+\tau} = \sqrt{[g_t - a(t)]^2 + h^2} + a(t + \tau), \quad (2.14)$$

ou ainda

$$g_{t+\tau} = [g_t - a(t)] \sqrt{1 + \frac{h^2}{[g_t - a(t)]^2}} + a(t + \tau). \quad (2.15)$$

Vamos agora expandir a expressão acima até primeira ordem em h^2 :

$$g_{t+\tau} \cong g_t - a(t) + \frac{1}{2} \frac{h^2}{g_t - a(t)} + a(t + \tau). \quad (2.16)$$

Por outro lado, as quantidades $g_{t+\tau}$ e $a(t + \tau)$ podem ser escritas, em primeira ordem em τ , como

$$\begin{aligned} g_{t+\tau} &= g_t + \dot{g}_t \tau, \\ a(t + \tau) &= a(t) + \dot{a}(t) \tau. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo as expressões acima na Eq. (2.16) obtemos

$$\dot{g}_t \tau = \frac{1}{2} \frac{h^2}{g_t - a(t)} + \dot{a}(t) \tau. \quad (2.18)$$

Dividindo por τ a expressão acima e tomando o limite $\tau \rightarrow 0$, tem-se

$$\dot{g}_t = \frac{d(t)}{g_t - a(t)} + \dot{a}(t), \quad (2.19)$$

onde foi definido o fator de crescimento $d(t)$ como

$$d(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h^2}{2\tau}. \quad (2.20)$$

No limite $g_t \rightarrow \infty$, o mapa g_t deve satisfazer a condição hidrodinâmica (2.5) em qualquer instante t , ou seja, \dot{g}_t deve satisfazer a seguinte condição

$$\lim_{g_t \rightarrow \infty} \dot{g}_t = 0. \quad (2.21)$$

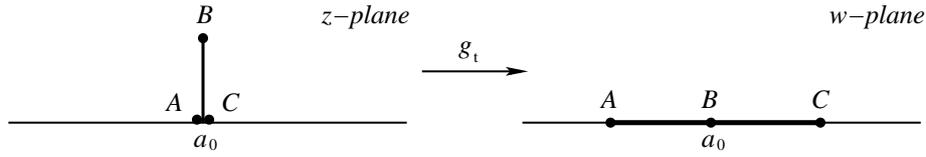


Figura 2.2 A transformação g_t leva o domínio sem o segmento \overline{ABC} no plano z , no semiplano superior w , onde o corte vertical é transformado no segmento \overline{ABC} , no eixo real passando por a_0 .

Assim, para satisfazer a condição acima, vemos de (2.19) que a função $a(t)$ deve ser tal que

$$\dot{a}(t) = 0, \quad (2.22)$$

ou seja $a(t) = a_0$. A função $a(t)$ é chamada de função forçante. Usando a condição dada na Eq. (2.22), obtemos finalmente a equação de Loewner para uma curva simples crescendo no semiplano:

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)}. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) deve ser complementada com a condição inicial (2.4).

A função $d(t)$, determina a rapidez com que a extremidade da curva (“tip”) avança no semiplano [26]. Por outro lado, assumindo que $d(t)$ [se não for constante] é uma função crescente de t , sempre pode-se reescalar a coordenada temporal definindo

$$t' = \int_0^t d(t) dt, \quad (2.24)$$

tal que se tenha $d(t') = 1$ e assim reduzir o problema a um fator de crescimento constante.

2.2 Soluções Exatas e Numéricas da equação de Loewner

Nesta seção estudamos soluções exatas e numéricas da equação de Loewner. Entre as situações estudadas estão: uma curva crescendo no semiplano superior seguindo linhas de gradiente (o termo forçante $a(t)$ é constante), e curvas que crescem com dinâmicas determinadas pela função $a(t)$ que é prescrita a priori.

Como vimos, o caso de crescimento mais simples da equação de Loewner dá-se quando a função $a(t)$ é constante, $a(t) = a_0$, de forma que a curva deve crescer ao longo de uma linha vertical que parte do eixo real em a_0 , como mostrado na Fig. 2.2 pelo corte \overline{ABC} . Nesse caso, podemos deduzir a forma de $g_t(z)$ a partir da solução exata da equação de Loewner, e

utilizamos g_t para encontrar uma equação da trajetória, $\gamma(t)$ descrita pela extremidade livre da curva. Como feito em [27], reescrevemos a equação de Loewner (2.23) como

$$(g_t - a_0)dg_t = 2dt. \quad (2.25)$$

Integrando temos

$$\left[\frac{g_t^2}{2} - g_t a_0 \right]_{g_0=z}^{g_t} = 2t \Big|_{t=0}^t, \quad (2.26)$$

que resulta

$$g_t(z) = a_0 + \sqrt{(z - a_0)^2 + 4t}. \quad (2.27)$$

A extremidade $\gamma(t)$ da curva é, por definição, tal que $g_t[\gamma(t)] = a(t) = a_0$, que substituída na equação acima nos dá

$$\gamma(t) = a_0 + 2i\sqrt{t}, \quad (2.28)$$

Em outras palavras, o mapa $g_t(z)$ adquire uma singularidade do tipo ponto de ramificação para $t > 0$ e no ponto $z = \gamma(t)$, de maneira que a trajetória da singularidade corresponde a um segmento de reta ao longo do eixo imaginário no plano z , como visto na Fig. 2.3, onde mostramos a trajetória do ponto $\gamma(t)$ até $t = 5$ com $a(0) = 0$.

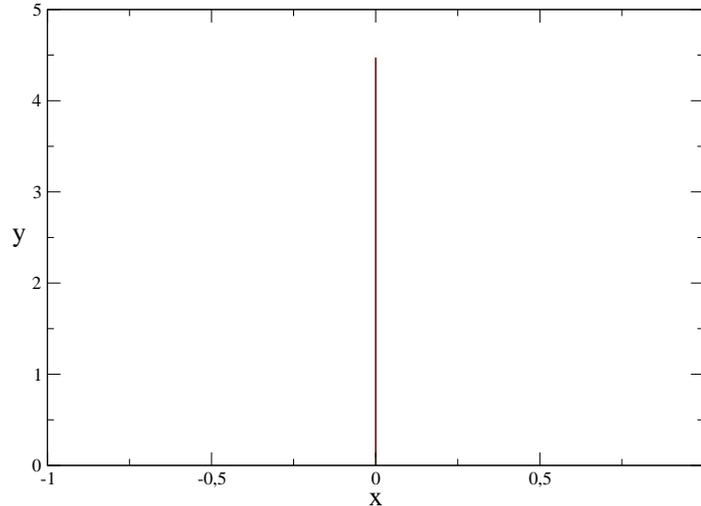


Figura 2.3 Trajetória da extremidade, $\gamma(t)$, da curva para o caso $a(t) = a_0$.

Um procedimento numérico para gerar a trajetória das singularidades consiste em integrar a equação de Loewner para trás no tempo, partindo da condição terminal $g_t[\gamma(t)] = a(t)$, até

o instante $t = 0$. Lembrando que a Eq. (2.23) é válida para o ponto z , mantido fixo durante a integração no parâmetro t , e que a Eq. (2.23) satisfaz a condição inicial $g_0(z) = z$, segue-se então que $g_0[\gamma(t)] = \gamma(t)$. Entretanto, não podemos integrar a Eq. (2.23) a partir de $g_t = a(t)$ por causa da singularidade nesse ponto. A singularidade inicial é evitada utilizando a aproximação de primeira ordem

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \dot{g}_{t-\tau}, \quad (2.29)$$

para encontrar $g_{t-\tau}$. Substituindo \dot{g} , avaliado no instante $t - \tau$, na Eq. (2.29) obtemos

$$g_t = g_{t-\tau} + \frac{\tau d(t)}{g_{t-\tau} - a(t-\tau)}. \quad (2.30)$$

Da expressão acima encontramos um polinômio quadrático em $g_{t-\tau}$, ou seja,

$$g_{t-\tau}^2 + g_{t-\tau}[a(t-\tau) - g_t] + \tau d(t) - a(t-\tau)g_t = 0. \quad (2.31)$$

Substituindo $g_t = a(t)$ em (2.31) encontramos as raízes do polinômio acima, que são uma aproximação do valor de g no instante t , a partir do qual integramos (2.23) para trás até obter g_0 [27]. Embora o caso em que $a(t) = a_0$ admita uma solução exata, vide (2.28), a Fig. 2.3 foi obtida pela integração numérica da Eq. (2.23) como forma de validar o método numérico de integração.

Em princípio, qualquer função suave $a(t)$, vista localmente, é constante. Então, poderia esperar-se que uma função $a(t)$ suficientemente suave gerasse curvas simples que cresçam a partir do eixo real. A condição de suavidade para $a(t)$ é dada pela continuidade Hölder, com expoente $\alpha = 1/2$ que pode se expressa pela seguinte relação

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|a(t-s) - a(t)|}{s^\alpha} < C, \quad (2.32)$$

para todos os valores de t e alguma constante C .

Para o caso em que a função $a(t)$ não satisfaz a condição (2.22), a solução da equação de Loewner gera trajetórias que não crescem ao longo de linhas de gradiente. Nas Figuras 2.5 e 2.6 mostramos duas soluções numéricas de Eq. (2.23) utilizando as funções $a(t) = t$ e $a(t) = \sqrt{t}$. Contudo, para esses dois casos a equação de Loewner também admite solução exata. Comparando o comportamento das soluções numéricas, com as soluções exatas mostradas em [27], validamos o método numérico que vamos utilizar neste trabalho para resolver a equação de Loewner.

Assim, podemos aplicar o método descrito acima para integrar a equação de Loewner (2.23)

nos casos em que ela não admite solução exata. Dois desses casos são mostrados nas Figuras 2.6 e 2.7, onde utilizamos as funções $a(t) = \sin(8\pi t)$ e $a(t) = t \sin(8\pi t)$, cujas soluções também são mostradas em [27].

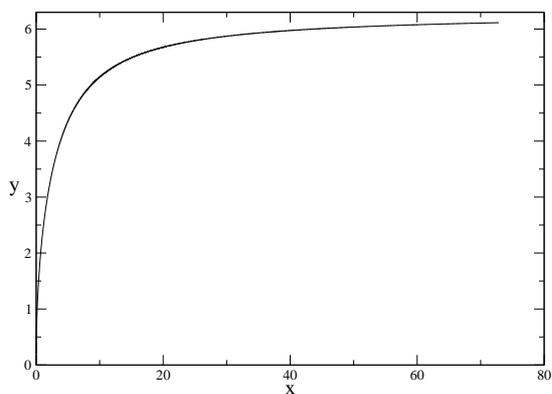


Figura 2.4 Tajetória das singularidades utilizando a função $a(t) = t$ na equação de Loewner.

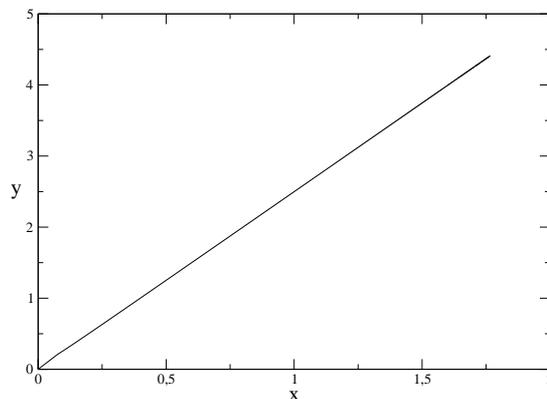


Figura 2.5 Tajetória das singularidades utilizando a função $a(t) = \sqrt{t}$ na equação de Loewner.

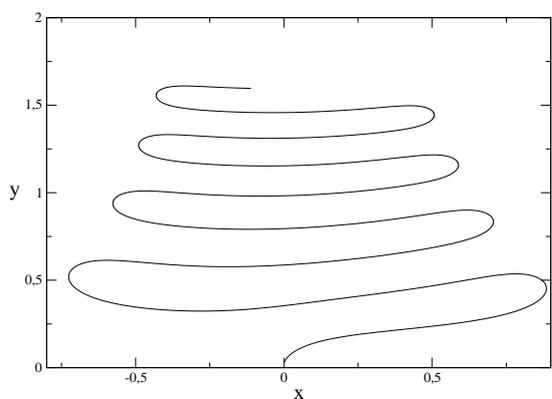


Figura 2.6 Tajetória das singularidades utilizando a função $a(t) = \sin(8\pi t)$ na equação de Loewner.

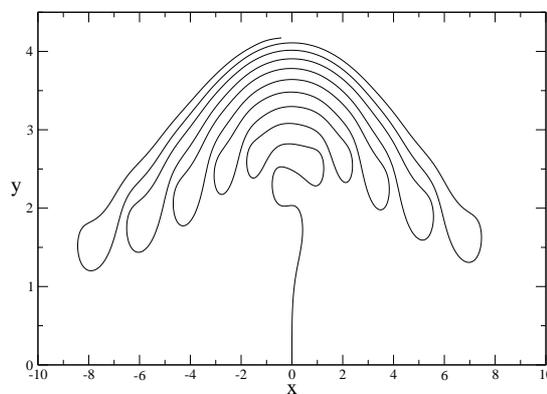


Figura 2.7 Tajetória das singularidades utilizando a função $a(t) = t \sin(\pi t)$ na equação de Loewner.

Equação de Loewner: Uma abordagem através da Transformação de Schwarz-Christoffel

Neste capítulo, vamos rededuzir a equação de Loewner utilizando uma nova abordagem baseada na transformação de Schwarz-Christoffel. Veremos a seguir, que utilizando a referida transformação podemos encontrar uma equação diferencial para o mapa g_t , e simultaneamente, as equações diferenciais que determinam a dinâmica das singularidades $a_i(t)$.

3.1 A equação de Loewner para uma curva

Por conveniência, repetimos na Fig. 3.1 o diagrama que ilustra a dinâmica de Loewner para o caso de uma única curva crescendo no semiplano superior.

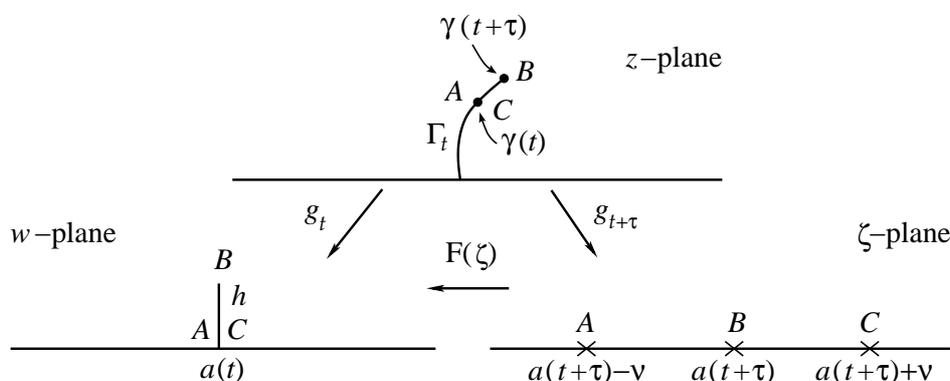


Figura 3.1 Planos físico (plano z) e matemáticos (plano w e plano ζ) para o crescimento de um dedo (curva simples) no semiplano superior.

Como visto anteriormente na Eq. (2.8), a transformação entre os planos matemáticos w e ζ é dada pela seguinte transformação de Schwarz-Christoffel:

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{a(t+\tau)+v}^{g_{t+\tau}} \frac{\zeta - a(t+\tau)}{\sqrt{[\zeta - a(t+\tau)]^2 - v^2}} d\zeta + a(t), \quad (3.1)$$

Na seção 2.1, mostramos que a integral acima pode ser calculada exatamente. Entretanto, aqui vamos adotar um procedimento alternativo, a saber: expandir primeiro o integrando em potências de v e depois resolver as respectivas integrais. Ao final, chegaremos à mesma equação de Loewner obtida na seção 2.1; a vantagem é que nossa abordagem pode ser estendida a situações mais gerais como veremos adiante. Então, colocando em evidência o termo $[\zeta - a(t + \tau)]^2$, a integral (3.1) fica da forma

$$g_t = \int_{a(t+\tau)+v}^{g_{t+\tau}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{[\zeta - a(t+\tau)]^2}}} + a(t). \quad (3.2)$$

Em seguida, expandimos o integrando acima em potências de v^2 para obter

$$g_t \cong \int_{a(t+\tau)+v}^{g_{t+\tau}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{[\zeta - a(t+\tau)]^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{[\zeta - a(t+\tau)]^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{[\zeta - a(t+\tau)]^6} + \frac{35}{128} \frac{v^8}{[\zeta - a(t+\tau)]^8} + \dots \right\} d\zeta + a(t). \quad (3.3)$$

Integrando a equação acima tem-se

$$g_t = \left[\zeta - \frac{1}{2} \frac{v^2}{\zeta - a(t+\tau)} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{[\zeta - a(t+\tau)]^3} - \frac{1}{16} \frac{v^6}{[\zeta - a(t+\tau)]^5} - \frac{5}{128} \frac{v^8}{[\zeta - a(t+\tau)]^7} + \dots \right]_{a(t+\tau)+v}^{g_{t+\tau}} + a(t). \quad (3.4)$$

Avaliando os limites de integração, a expressão acima resulta em

$$g_t = g_{t+\tau} + \left[-\frac{1}{2} \frac{v^2}{g_{t+\tau} - a(t+\tau)} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{[g_{t+\tau} - a(t+\tau)]^3} - \frac{1}{16} \frac{v^6}{[g_{t+\tau} - a(t+\tau)]^5} - \frac{5}{128} \frac{v^8}{[g_{t+\tau} - a(t+\tau)]^7} + \dots \right] - \left[-v - \frac{1}{2} \frac{v^2}{(-v)} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{(-v^3)} - \frac{1}{16} \frac{v^6}{(-v^5)} - \frac{5}{128} \frac{v^8}{(-v^7)} + \dots \right] + a(t) - a(t+\tau). \quad (3.5)$$

Vamos mostrar adiante que os termos de ordem superior a v^2 não contribuem termos relevantes no limite $\tau \rightarrow 0$. Por essa razão, vamos omitir tais termos desde já, de modo que vamos

reescrever Eq. (3.5) na forma

$$g_t = g_{t+\tau} - \frac{v^2/2}{g_{t+\tau} - a(t+\tau)} + v \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \dots \right] + a(t) - a(t+\tau) + O(v^4). \quad (3.6)$$

Note agora que termo entre colchetes na Eq. (3.6) corresponde à expansão em série de Taylor da função $\sqrt{1-x}$, calculada em $x = 1$, ou seja, usando

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots, \quad (3.7)$$

a série entre colchetes pode ser escrita como

$$\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{5}{128} - \dots \right] = (1-x)^{1/2} \Big|_{x=1} = 0, \quad (3.8)$$

Assim, a Eq. (3.6) reduz-se a

$$g_t = g_{t+\tau} - \frac{v^2/2}{g_{t+\tau} - a(t+\tau)} + a(t) - a(t+\tau) + O(v^4). \quad (3.9)$$

Expandindo $g_{t+\tau}$ e $a(t+\tau)$ até primeira ordem em τ , vide Eq (2.17), dividindo por τ e rearrumando os termos, encontramos

$$\dot{g}_t(z) = \frac{v^2/2\tau}{g_t(z) - a(t)} + \dot{a}(t) + \frac{O(v^4)}{\tau}. \quad (3.10)$$

Tomando agora o limite $\tau \rightarrow 0$, vemos que v^2 deve ir a zero linearmente com τ . Vamos definir o fator de crescimento

$$d(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v^2}{2\tau}, \quad (3.11)$$

de modo que no limite $\tau \rightarrow 0$ a Eq. (3.10) resulta na equação de Loewner

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)}, \quad (3.12)$$

onde foi utilizada a condição hidrodinâmica (2.21) na Eq. (3.10) para gerar a equação da dinâmica das singularidades

$$\dot{a}(t) = 0. \quad (3.13)$$

Note que após a divisão por τ em (3.10), os termos de ordem v^4 e superior vão gerar termos de ordem τ ou superior, que vão a zero no limite $\tau \rightarrow 0$. Isso mostra, como antecipado, que os termos de ordem superior a v^2 podem ser desprezados em (3.6).

Como visto, as expansões utilizadas na integral de Schwarz-Christoffel mostrada na Eq. (3.1), conduzem à equação de Loewner (3.12), e ao mesmo tempo, permitem encontrar a equação que descreve a dinâmica das singularidades $a(t)$, Eq. (3.13), junto com a taxa de crescimento $d(t)$, Eq. (3.11), para curvas simples que crescem no semiplano superior z , reproduzindo assim os resultados obtidos na seção 2.1. A vantagem do nosso procedimento é que o mesmo pode ser generalizado para casos em que o mapa $F(g_{t+\tau})$ não pode ser obtido em forma fechada, como por exemplo o caso de múltiplas curvas considerado a seguir.

3.2 Equação de Loewner para múltiplas curvas

Já mostramos na seção anterior que, fazendo as expansões apropriadas na fórmula de Schwarz-Christoffel, podemos encontrar uma equação diferencial para o mapa $g_t(z)$, no caso de uma curva no semiplano superior, cujo crescimento se dá ao longo de linhas de gradiente. Vamos agora estender nosso formalismo para tratar uma situação mais geral, onde em lugar de somente uma curva crescendo no semiplano temos uma família de curvas Γ_i , $i = 1, \dots, n$, crescendo a partir do eixo real para o interior do semiplano superior \mathbb{H} , como ilustrado na Fig. 3.2.

3.2.1 Dedução da Equação de Loewner para Múltiplas Curvas

Para múltiplas curvas crescendo no semiplano superior, o domínio físico, \mathcal{D}_t , definido como o semiplano superior \mathbb{H} sem as curvas, Γ_i , deve ser redefinido. Assim \mathcal{D}_t fica como

$$\mathcal{D}_t = \mathbb{H} \setminus [\Gamma_t^1 \cup \Gamma_t^i \cup \dots \cup \Gamma_t^n]. \quad (3.14)$$

Novamente, vamos construir o mapa, $g_t(z)$, que leva o domínio \mathcal{D}_t no semiplano superior \mathbb{H} do plano w , ou seja

$$g_t : \mathcal{D}_t \rightarrow \mathbb{H}. \quad (3.15)$$

Na Fig. 3.2, mostra-se como atua o mapa $g_t(z)$.

A função $g_t(z)$ leva o ponto extremo, $\gamma(t)$, da i -ésima curva para o ponto $a_i(t)$ no eixo real do plano w . Depois de um tempo infinitesimal τ , a extremidade da curva avança para o ponto

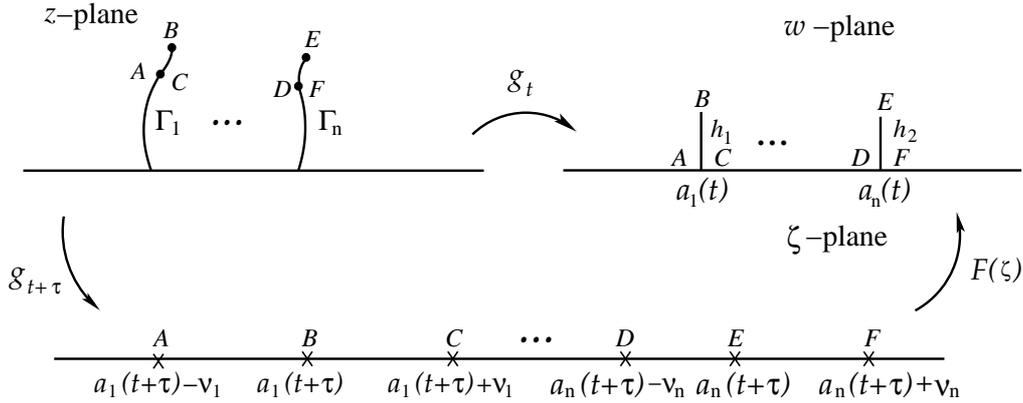


Figura 3.2 Transformação conforme utilizado na transformação do plano z com n curvas de largura infinitesimal, no semiplano complexo w , onde os incrementos das curvas $ABC \cdots DEF$ correspondem aos segmentos de reta $\overline{ABC} \cdots \overline{DEF}$.

$\gamma_i(t + \tau)$ no plano z , sendo que o mapa g_t levará $\gamma_i(t + \tau)$, no ponto $a_i(t) + ih_i$ de forma que o efeito de aplicar o mapa $g_t(z)$ é transformar os incrementos (ABC, \cdots, DEF) do plano z em segmentos verticais $(\overline{ABC}, \cdots, \overline{DEF})$ no plano w ; ver Fig. 3.2. O modelo de crescimento assim definido pela ação do mapa $g_t(z)$ determina que as curvas Γ_i cresçam ao longo das linhas de gradiente do potencial ϕ . Como visto na Fig. 3.2, o mapa $g_{t+\tau}$ leva os incrementos infinitesimais (ABC, \cdots, DEF) das curvas Γ_i em segmentos sobre o eixo real $(\overline{ABC}, \cdots, \overline{DEF})$ no plano ζ .

Já que no plano w , o domínio relevante corresponde a um polígono degenerado, podemos utilizar mais uma vez a transformação de Schwarz-Christoffel $w = F(\zeta)$, que leva o semiplano superior do plano ζ , no semiplano superior do plano w com os cortes verticais $\overline{ABC}, \cdots, \overline{DEF}$. Vale notar que no limite $\tau \rightarrow 0$, podemos definir os segmento $\overline{ABC}, \cdots, \overline{DEF}$ simetricamente com respecto do ponto $a_i(t + \tau)$, como mostrado na Fig. 3.2. Da definição da transformação $F(\zeta)$, vide Fig. 3.2, segue que

$$g_t = F(g_{t+\tau}). \quad (3.16)$$

Explicitamente, a transformação $F(g_{t+\tau})$ é da forma

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{a_j(t+\tau)-v_j}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^n \frac{\zeta - a_i(t + \tau)}{\sqrt{[\zeta - a_i(t + \tau)]^2 - v_i^2}} d\zeta + a_j(t), \quad j = 1, \cdots, n \quad (3.17)$$

onde o número de termos no integrando é igual à quantidade de curvas, e o índice j especifica que o limite inferior de integração corresponde à j -ésima curva. Colocando em evidência os

termos $[\zeta - a_i(t + \tau)]^2$ podemos escrever

$$g_t = \int_{a_j(t+\tau)+v_j}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{[\zeta - a_i(t+\tau)]^2}}} d\zeta + a_j(t), \quad (3.18)$$

Note que no limite inferior da integral acima escolhemos um ponto $a_j(t + \tau) + v_j$ para uma curva arbitrária j . Como veremos adiante isso permitirá obter a dinâmica das funções $a_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$. A integral acima não pode ser feita exatamente para n arbitrário. Então, a fim de obter a equação de Loewner para este caso precisamos, como demonstrado anteriormente, primeiro expandir o integrando em potências dos parâmetros infinitesimais v_i e depois proceder com a integração. Vale notar, entretanto, que cada termo em (3.18) é da mesma forma que o termo que aparece no integrando da expressão (3.2), de maneira que vamos seguir um procedimento similar ao utilizado no caso de uma curva.

Expandindo cada termo da produtória no integrando da Eq. (3.18) temos

$$g_t \cong \int_{a_j(t+\tau)-v_j}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^2} + \frac{3}{8} \frac{v_i^4}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^4} + \frac{5}{16} \frac{v_i^6}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^6} + \frac{35}{128} \frac{v_i^8}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^8} \right\} d\zeta + a_j(t). \quad (3.19)$$

Fazendo o produtório e desconsiderando todos os termos cruzados do tipo $v_i^{2n} v_j^{2m}$, com $i \neq j$, temos

$$g_t \cong \int_{a_j(t+\tau)-v_j}^{g_{t+\tau}} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^2} + \frac{3}{8} \frac{v_i^4}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^4} + \frac{5}{16} \frac{v_i^6}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^6} + \frac{35}{128} \frac{v_i^8}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^8} + \dots \right] d\zeta + a_j(t). \quad (3.20)$$

A expansão acima é semelhante à encontrada para o caso de um única curva, a diferença é que temos um somatório de termos, como o encontrado na Eq. (3.3). Integrando a Eq. (3.20) temos

$$g_t = \mathfrak{F}(g_{t+\tau}) - \mathfrak{F}(a_j(t + \tau) - v_j) + a_j(t) \quad (3.21)$$

onde $\mathfrak{F}(\zeta)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\zeta) = \zeta - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{[\zeta - a_i(t + \tau)]} + \frac{1}{8} \frac{v_i^4}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \frac{v_i^6}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^5} + \frac{5}{128} \frac{v_i^8}{[\zeta - a_i(t + \tau)]^7} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Veremos com mais cuidado o que acontece com a expressão acima quando é avaliada no limite inferior. Escrevendo $a_i(t + \tau) = a_i$ nos denominadores por economia de notação, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(a_j(t + \tau) - v_j) = a_j(t + \tau) + v_j \left[-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{128} + \dots \right] \\ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{(a_j - a_i)} + \frac{1}{8} \frac{v_i^4}{(a_j - a_i)^3} + \frac{1}{16} \frac{v_i^6}{(a_j - a_i)^5} \right. \\ \left. + \frac{5}{128} \frac{v_i^8}{(a_j - a_i)^7} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O termo entre colchetes na equação anterior zera da mesma forma que no caso de um dedo, visto na seção anterior, ou seja

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{128} + \dots \right) &= 1 - \left[1 - (1-x)^{1/2} \right]_{x=1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, em segunda ordem em v_i , obtemos

$$g_t = g_{t+\tau} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g_{t+\tau} - a_i(t + \tau)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{a_j(t + \tau) - a_i(t + \tau)} + a_j(t) - a_j(t + \tau).$$

Expandindo $g_{t+\tau}$ e $a(t + \tau)$ em primeira ordem em τ na expressão acima, dividindo por τ e fazendo o limite $\tau \rightarrow 0$, encontramos

$$\dot{g}_t = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t - a_i(t)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_i(t)}{a_j(t) - a_i(t)} + \dot{a}_j(t), \quad (3.25)$$

onde

$$d_i(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v_i^2}{2\tau}. \quad (3.26)$$

Utilizando a condição de normalização hidrodinâmica (2.21), na Eq.(3.25), ou seja, igualando a zero os termos que não dependem de g_t na Eq.(3.25), temos que a dinâmica das singularidades, $a_i(t)$, pode ser determinada pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{d_j(t)}{a_i(t) - a_j(t)}. \quad (3.27)$$

Note que, se fixarmos os fatores de crescimento de todas as curvas como constante $d_i(t) = d_0 = 1$, o sistema de n equações (3.27) corresponde ao sistema de n partículas que se deslocam em uma direção (eixo real), com o potencial de interação $1/x^2$. Este sistema é conhecido como o sistema da Calogero [28], que posteriormente Moser mostraria ser completamente integrável [29].

Com a solução de Eq. (3.27) podemos resolver a equação de Loewner para múltiplas curvas, que é dada por

$$\dot{g}_t = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t - a_i(t)}. \quad (3.28)$$

Se os fatores de crescimento $d_i(t)$ são todos os mesmos, podemos re-escalar a variável temporal tal que $d_i = 1$. Em particular, no caso de dois dedos simétricos (i.e., $d_1 = d_2 = 1$), a equação (3.28) pode ser integrada exatamente para obter o mapa $g_t(z)$, do qual o formato dos dedos pode ser calculado analiticamente [26], como veremos a seguir. Encontramos também uma nova solução exata para o caso de três dedos simétricos, como veremos adiante.

3.2.2 Soluções exatas da equação de Loewner para dois dedos simétricos

Nesta seção estudamos soluções exatas da equação de Loewner para dois dedos, considerando diferentes dinâmicas para as funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$, como visto nas referências [27] e [26]. No primeiro modelo considera-se a evolução de Loewner em que a dinâmica das singularidades $a_1(t)$ e $a_2(t)$ é determinada pela Eq. (3.27), enquanto que no segundo caso considera-se que as funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são constantes, ou mais especificamente $a_2(t) = -a_1(t) = 1$.

Para duas curvas que crescem a partir de posições iniciais simétricas, o sistema de equações

dado em (3.28) fica da forma

$$\begin{aligned}\dot{a}_1(t) &= \frac{d_2}{a_1(t) - a_2(t)}, \\ \dot{a}_2(t) &= \frac{d_1}{a_2(t) - a_1(t)}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Consideramos que os dedos crescem a partir de $a_1(0) = -a_0$ e $a_2(0) = a_0$, e que os dois dedos possuem o mesmo fator de crescimento: $d_1 = d_2 = 1$. Nesse caso a simetria é preservada para todos os tempos, de modo que temos $a_2(t) = -a_1(t) = a(t)$. Substituindo essas condições no sistema de equações para as singularidades $a_{1,2}(t)$, obtemos

$$\dot{a}_{1,2}(t) = \frac{1}{\pm 2a_{1,2}(t)}.\quad (3.30)$$

Integrando, podemos escrever

$$a_{1,2}(t) = \mp a(t),\quad (3.31)$$

$a(t) = \sqrt{a_0^2 + t}$. Considerando $a_0 = 1$ tem-se $a(t) = \sqrt{1+t}$ e substituindo (3.31) na Eq. (3.27), temos

$$\dot{g}_t = \frac{1}{g_t - a(t)} + \frac{1}{g_t + a(t)},\quad (3.32)$$

ou seja,

$$\dot{g}_t = \frac{2g_t}{g_t^2 - a^2(t)}.\quad (3.33)$$

Para resolver a equação de Loewner introduzimos uma nova variável, $f = g_t^2/a^2$. Derivando f em relação ao tempo temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{2}{a^2} \left(\frac{\dot{g}_t}{g_t} - g_t^2 \frac{\dot{a}}{a} \right).\quad (3.34)$$

Utilizando $\dot{a}(t) = 1/2a(t)$ e substituindo \dot{g}_t , temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{2}{a^2} \left(\frac{2g_t^2}{g_t^2 - a^2} - \frac{1}{2} \frac{g_t^2}{a^2} \right)\quad (3.35)$$

ou em termos de f ,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{4f}{f-1} - f \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{5f - f^2}{f-1}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Fazendo separação de variáveis temos

$$\frac{(f-1)}{f(f-5)}df = -\frac{dt}{1+t}, \quad (3.37)$$

e utilizando frações parciais, podemos escrever

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{f} + \frac{4}{f-5} \right) df = -\frac{dt}{1+t}. \quad (3.38)$$

Integrando, a equação anterior fica da forma

$$\ln \left(\frac{f}{f_0} \right) + 4 \ln \left(\frac{f-5}{f_0-5} \right) = -5 \ln(1+t), \quad (3.39)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{f}{f_0} \left(\frac{f-5}{f_0-5} \right)^4 \right] &= \ln \left[\frac{1}{(1+t)^5} \right] \\ \frac{f}{f_0} \left(\frac{f-5}{f_0-5} \right)^4 &= \frac{1}{(1+t)^5}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Lembrando que $f = g_t^2/a^2$, e $f_0 = g_0^2 = z^2$, podemos expressar a equação anterior como

$$\frac{g_t^2}{(1+t)z^2} \left(\frac{\frac{g_t^2}{1+t} - 5}{z^2 - 5} \right)^4 = \frac{1}{(1+t)^5}. \quad (3.41)$$

Para obter as trajetórias $\gamma_{1,2}(t)$ descritas pelas extremidades das curvas observe que no instante t

$$g_t[\gamma_{1,2}(t)] = a(t) \quad (3.42)$$

de maneira que

$$\frac{g_t^2[\gamma_{1,2}(t)]}{1+t} = \frac{a^2(t)}{1+t} = 1,$$

assim, podemos escrever

$$\frac{(-4)^4}{\gamma_{1,2}^2(\gamma_{1,2}^2 - 5)} = \frac{1}{(1+t)^5},$$

ou

$$\gamma_{1,2}^2(\gamma_{1,2}^2 - 5)^4 = 2^8(1+t)^5. \quad (3.43)$$

Logo obtemos para as trajetórias das singularidades

$$\gamma_{1,2}(t)(\gamma_{1,2}^2(t) - 5)^2 = \pm 16(1+t)^{5/2}. \quad (3.44)$$

onde são consideradas somente as raízes sobre o semiplano superior que satisfazem a condição inicial $\gamma_{1,2}(0) = a_{1,2}(0) = \mp 1$.

Uma solução típica é mostrada na Fig. 3.3, onde foi utilizado um tempo de integração longo, $t = 200$. No limite assintótico, $t \rightarrow \infty$, os dois dedos convergem para duas retas que se afastam uma da outra, fazendo um ângulo φ constante com a horizontal. Para encontrar o valor desses ângulos fazemos o limite $t \rightarrow \infty$ na expressão (3.44), obtendo

$$\gamma_{1,2}^5(t) = \pm 16t^{5/2}. \quad (3.45)$$

Fazendo $\gamma_{1,2}(t) = r_t e^{i\varphi_{1,2}}$, temos para o argumento de γ_2

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{5}$$

e para o argumento da reta da esquerda γ_1

$$\varphi_1 = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}, \quad (3.46)$$

resultando no ângulo $\frac{\pi}{5}$ entre as retas γ_1 e γ_2 .

Na Fig. 3.4, mostramos o comportamento de dois dedos, considerando diferentes fatores de crescimento, $d_1 = 0,8$ e $d_2 = 0,5$, para cada dedo. Nessa figura, vemos que a curva da direita avança mais lentamente em relação à curva da esquerda. Esse comportamento é similar ao que se encontra na literatura, conhecido como efeito de blindagem [26], e é tal que o dedo com o maior fator de crescimento evolue com maior rapidez, enquanto que o dedo mais lento vai ficando para trás. A blindagem nesse caso é parcial, no sentido de que a razão das velocidades dos dois dedos se aproxima de um valor constante (diferente de 1). O comportamento assintótico do modelo de crescimento de múltiplas curvas no semiplano superior descrito pelas Eqs. (3.27) e (3.28) foi estudado por Selander em sua tese de doutorado [30]. Em particular, ele mostrou que as curvas convergem, no limite $\tau \rightarrow 0$, para retas cujos ângulos são dados em termos das raízes de certos polinômios associados de Hermite [30]. Esses ângulos assintóticos são os mesmos (para um dado número n de curvas) independentemente dos fatores de crescimento. Entretanto, se os fatores de crescimento são idênticos as curvas crescem com a mesma velocidade, no passo que ao contrário estarão em proporção dos respectivos fatores de cresci-

mento. Esse comportamento pode ser visto nas Figs. 3.3 e 3.4. É relevante mencionar ainda que a solução exata para duas curvas descrita acima foi obtida pela primeira vez por obtida pela primeira vez por Gubiec e Szymczak [26]. Na próxima seção obteremos também uma nova solução exata para o caso de três curvas.

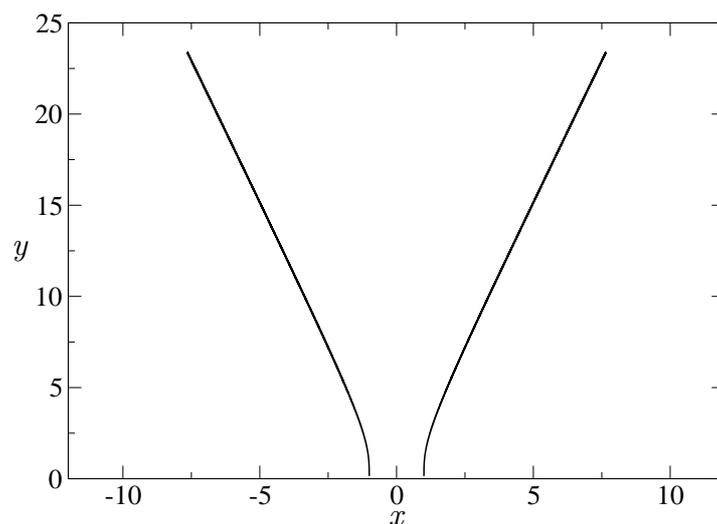


Figura 3.3 Dois dedos simétricos crescendo no semiplano com iguais taxas $d_1 = d_2 = 1$, com posições iniciais em $a_1(0) = -a_2(0) = 1$ [26].

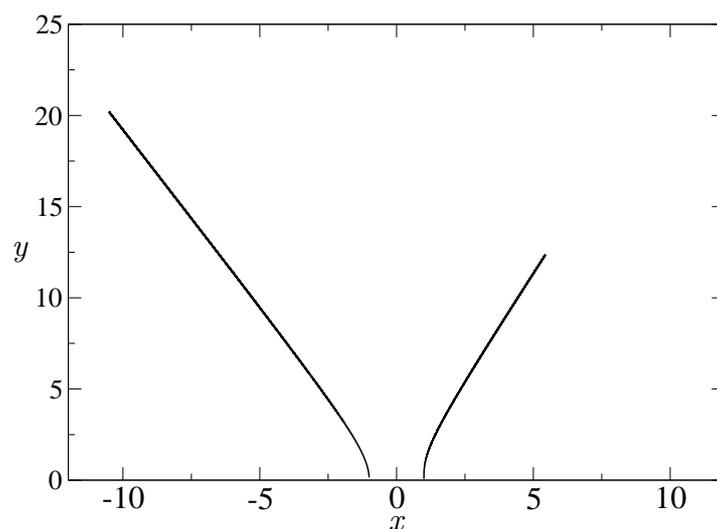


Figura 3.4 Dois dedos com os fatores de crescimento $d_1 = 0,8$ e $d_2 = 0,5$, e condições iniciais $a_1(0) = -a_2(0) = 1$ [26].

Para produzir as Figuras 3.3 e 3.4, utilizamos o procedimento numérico correspondendo à generalização do método descrito na seção 2.2 para um dedo. Mais especificamente, utilizando a Eq. (2.29), podemos escrever

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \left[\frac{d_1}{g_{t-\tau} - a_1(t-\tau)} + \frac{d_2}{g_{t-\tau} - a_2(t-\tau)} \right], \quad (3.47)$$

de onde encontramos um polinômio cúbico em $g_{t-\tau}$

$$g_{t-\tau}^3 + \mathfrak{b}g_{t-\tau}^2 + \mathfrak{c}g_{t-\tau} + \mathfrak{d} = 0. \quad (3.48)$$

A forma explícita dos coeficientes é dada no Apêndice B.1. Fazendo $g_t = a_i(t)$ em (3.48) encontramos três raízes, sendo uma real e duas complexas conjugadas. Tomando então uma das raízes complexas para integrar a equação de Loewner (3.28) para trás no tempo até $t = 0$, encontrando assim g_0 , a partir do qual obtemos a posição da extremidade da curva no instante t , dada por $\gamma(t) = g_0$.

É possível obter outra solução exata para dois dedos simétricos no caso particular em que tomamos as funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$ constantes, a saber $a_2(t) = -a_1(t) = 1$. [24]. Além disso, vamos supor que $d_1 + d_2 = 1$, de modo que a equação de Loewner (3.28) reduz-se a

$$\dot{g}_t = \frac{2g_t}{g_t^2 - 1}. \quad (3.49)$$

Integrando temos

$$\left[\frac{g_t^2}{2} - \ln g_t \right]_{g_0=z}^{g_t} = 2t \Big|_0^t, \quad (3.50)$$

que resulta

$$\frac{g_t^2}{2} - \ln g_t = 2t + \frac{z^2}{2} - \ln z. \quad (3.51)$$

A equação acima representa dois dedos evoluindo respectivamente desde o eixo real em $z = \pm 1$ e crescendo indefinidamente no semiplano. As trajetórias, $\gamma(t)$, podem ser encontradas fazendo g_t igual a uma das funções $a_i(t)$. Para $g_t = a_2(t)$, temos

$$\gamma^2(t) - 2 \ln[\gamma(t)] = 1 - 4t. \quad (3.52)$$

Uma expressão explícita da trajetória pode ser encontrada depois de substituir $\gamma(t) = r_t e^{i\varphi_t}$ na equação acima, ou seja

$$r_t^2 e^{2i\varphi_t} - 2 \ln r_t - 2i\varphi_t = 1 - 4t, \quad (3.53)$$

utilizando a forma polar $e^{2i\varphi_t} = \cos(2\varphi_t) + i \sin(2\varphi_t)$, podemos separar a expressão anterior em suas partes real e imaginária

$$r_t^2 \cos(2\varphi_t) - 2 \ln r_t = 1 - 4t, \quad (3.54)$$

$$r_t^2 \sin(2\varphi_t) - 2\varphi_t = 0. \quad (3.55)$$

Resolvendo para r_t na segunda expressão, encontramos a magnitude de $\gamma(t)$ como função de φ_t

$$r_t = \sqrt{\frac{2\varphi_t}{\sin(2\varphi_t)}}, \quad (3.56)$$

onde φ_t é obtido substituindo Eq. (3.56) em Eq. (3.54). Substituindo r_t em $\gamma(t)$, encontramos que a trajetória para os dois dedos que crescem a partir de duas posições simétricas é da seguinte forma

$$\gamma_{\pm}(t) = \sqrt{\frac{2\varphi_t}{\sin(2\varphi_t)}} [\pm \cos(\varphi_t) + i \sin(\varphi_t)]. \quad (3.57)$$

Da Eq. (3.57) pode-se encontrar o valor assintótico de $\gamma(t)$ quando t tende para infinito, este deve ser puramente imaginário, tal que o argumento de $\gamma(t)$, φ_t , é um múltiplo inteiro de $\frac{\pi}{2}$, ou seja

$$\arg[\gamma(t)] = \varphi_t = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

assim, $\varphi_0 = 0$, em $t = 0$, e quando $t \rightarrow \infty$, $\varphi_{\infty} = \pi/2$. Na Fig. 3.5 mostramos soluções para o caso em que $d_1 = d_2 = 0.5$. Como podemos ver nessa figura, as duas curvas se aproximam uma da outra com o passar do tempo. O tempo de integração foi $t = 10$. Vale notar, que os dedos não crescem ao longo das linhas de gradiente, devido ao fato de que a dinâmica das singularidades é dada por uma regra diferente da definida pela Eq. (3.27). Lembre-se que neste caso fizemos $a_2(t) = -a_1(t) = 1$. Solucionando agora a Eq. (3.57) com os valores $d_1 = 0,8$ e $d_2 = 0,2$ para os dedos da esquerda e da direita, respectivamente, estudamos o comportamento de dois dedos simétricos em $a_1(t) = -1$ e $a_2(t) = 1$, e com o tempo de integração $t = 10$ como mostrado na Fig. 3.6. Dessa figura, vemos que a curva da direita, com $d_j = 0,2$, cresce mais lentamente, por isso fica atrasada em relação à curva da esquerda, que avança um pouco mais longe.

3.2.3 Solução exata da equação de Loewner para três dedos

Uma solução exata da equação de Loewner também pode ser encontrada para uma situação simétrica com três dedos, onde o dedo do meio cresce verticalmente ao longo do eixo y , e os de-

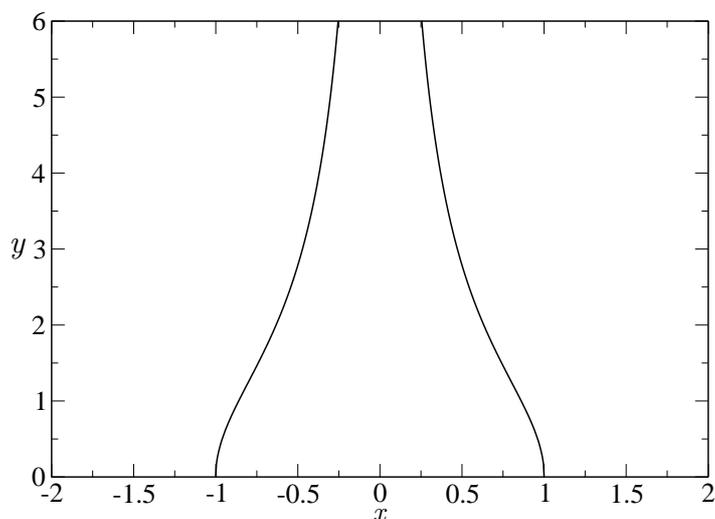


Figura 3.5 Evolução de dois dedos simétricos, com fatores de crescimento $d_1 = d_2 = 0,5$, as “funções forçantes” são simétricas e constantes: $a_1(t) = -a_2(t) = 1$ [24].

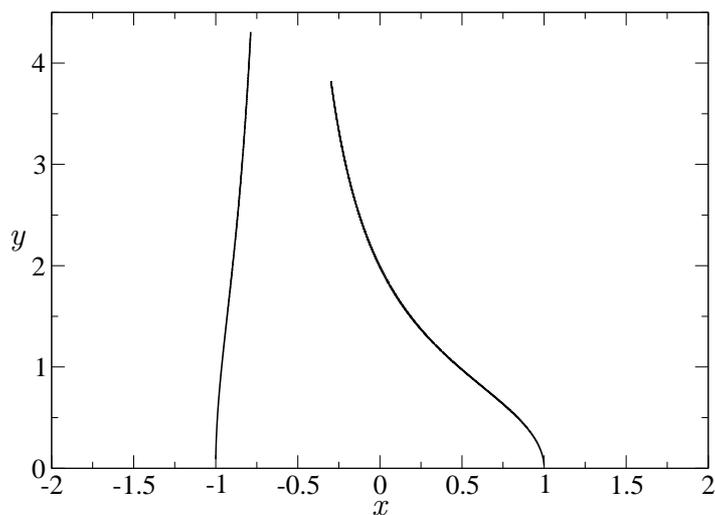


Figura 3.6 Evolução de dois dedos com fatores de crescimento $d_1 = 0,8$ e $d_2 = 0,2$, e “funções forçantes” simétricas e constantes: $a_1(t) = -a_2(t) = 1$ [24].

dos laterais estão localizados simetricamente com respeito ao eixo y . Nesse caso, consideramos que os três dedos tem as mesmas taxas de crescimento,

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_0, \quad (3.59)$$

e condições iniciais simétricas $a_3(0) = -a_1(0) = a_0$, e $a_2(0) = 0$. Como veremos, essa simetria inicial é preservada pela dinâmica, assim temos $a_2(t) = 0$ e

$$a_3(t) = -a_1(t) = a(t), \quad (3.60)$$

para $t \geq 0$. O sistema de equações (3.27) para três dedos fica da forma

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= \frac{d_2}{a_1(t) - a_2(t)} + \frac{d_3}{a_1(t) - a_3(t)}, \\ \dot{a}_2(t) &= \frac{d_1}{a_2(t) - a_1(t)} + \frac{d_3}{a_2(t) - a_3(t)}, \\ \dot{a}_3(t) &= \frac{d_1}{a_3(t) - a_1(t)} + \frac{d_2}{a_3(t) - a_2(t)}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Usando agora as condições (3.59) e (3.60), as equações acima reduzem-se a

$$\dot{a}(t) = \frac{d_0}{2a(t)} + \frac{d_0}{a(t)} = \frac{3d_0}{2} \frac{1}{a(t)}. \quad (3.62)$$

Resolvendo para $a(t)$ obtemos

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + 3t}, \quad (3.63)$$

e considerando $a_0 = 1$, tem-se $a(t) = \sqrt{1 + 3t}$.

A dinâmica das singularidades deve ser substituída na Eq. (3.28), assim, a equação de Loewner para três dedos simétricos fica na forma

$$\begin{aligned} \dot{g}_t &= \frac{1}{g_t - a} + \frac{1}{g_t + a} + \frac{1}{g_t} \\ &= \frac{2g_t}{g_t^2 - a^2} + \frac{1}{g_t}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} g_t \dot{g}_t &= 2 \frac{g_t^2}{g_t^2 - a^2} + 1 \\ &= 2 \frac{g_t^2/a^2}{g_t^2/a^2 - 1} + 1. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Construimos uma equação diferencial para a nova variável $f = \frac{g_t^2}{a^2}$:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= 2 \left(\frac{g_t}{a} \right) \left(\frac{\dot{g}_t}{a} - \frac{\dot{a} g_t}{a^2} \right) \\ &= \frac{2}{a^2} \left(g_t \dot{g}_t - \frac{\dot{a}}{a} g_t^2 \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Usando (3.62) e (3.66), podemos escrever \dot{f} como

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{2}{a^2} \left(\frac{2f}{f-1} + 1 - \frac{3}{2}f \right) \\ &= \frac{-3}{a^2} \left(\frac{3f - f^2 - 2/3}{f-1} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Fatorando o numerador da última expressão e separando as variáveis, temos

$$\frac{f-1}{(f-f_1)(f-f_2)} df = -\frac{3}{a^2} dt \quad (3.68)$$

onde

$$f_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6} \quad (3.69)$$

Depois de separar em frações parciais a Eq. (3.68) podemos escrever

$$\left(\frac{c_1}{f-f_1} + \frac{c_2}{f-f_2} \right) df = -\frac{3}{a^2} dt \quad (3.70)$$

onde

$$c_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{19}} \right). \quad (3.71)$$

Substituindo $a(t) = \sqrt{1+3t}$, e integrando a equação em f , temos

$$\begin{aligned} c_1 \ln \left(\frac{f-f_1}{f_0-f_1} \right) + c_2 \ln \left(\frac{f-f_2}{f_0-f_2} \right) &= -\ln(1+3t) \\ \ln \left[\left(\frac{f-f_1}{f_0-f_1} \right)^{c_1} \left(\frac{f-f_2}{f_0-f_2} \right)^{c_2} \right] &= \ln \left(\frac{1}{1+3t} \right), \end{aligned}$$

que finalmente resulta para f :

$$\left(\frac{f-f_1}{f_0-f_1}\right)^{c_1} \left(\frac{f-f_2}{f_0-f_2}\right)^{c_2} = \frac{1}{1+3t}. \quad (3.72)$$

Lembramos agora que

$$f = \frac{g_t^2[\gamma(t)]}{a^2(t)} = 1, \quad (3.73)$$

devido a que $g_t[\gamma(t)] = a(t)$. Além disso, $g_0/a(0) = z$, já que $g_0 = z$ e $a(0) = 1$, ou seja, $f_0 = z^2$. Com as variáveis originais, a Eq. (3.72) fica da forma

$$\left(\frac{1-f_1}{z^2-f_1}\right)^{c_1} \left(\frac{1-f_2}{z^2-f_2}\right)^{c_2} = \frac{1}{1+3t}. \quad (3.74)$$

Reescrevendo, teremos para a trajetória das singularidades, $\gamma_{1,3}$, dos dedos laterais

$$(\gamma_{1,3}^2 - f_1)^{c_1} (\gamma_{1,3}^2 - f_2)^{c_2} = (1+3t)(1-f_1)^{c_1}(1-f_2)^{c_2} \quad (3.75)$$

A Eq. (3.75) corresponde à trajetória dos dedos laterais em qualquer instante t . Desta equação podemos encontrar o ângulo que os dedos simétricos dos flancos fazem com o eixo x no limite assintótico $t \rightarrow \infty$. Nesse limite, temos $\gamma_{1,3} \gg f_1$, $\gamma_{1,3} \gg f_2$ e $3t \gg 1$, assim

$$\gamma_{1,3}^{2(c_1+c_2)} = 3t(1-f_1)^{c_1}(1-f_2)^{c_2}, \quad (3.76)$$

onde pode ser verificado que $c_1 + c_2 = 1$. Podemos observar também que a quantidade $(1-f_1)^{c_1}$ gera um termo complexo, ou seja

$$\begin{aligned} (1-f_1)^{c_1} &= (-1)^{c_1} |1-f_1|^{c_1} \\ &= (-1)^{1/2(1+\sqrt{3/19})} |1-f_1|^{c_1} \\ &= i^{(1+\sqrt{3/19})} |1-f_1|^{c_1}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Desta maneira podemos reescrever a Eq. (3.76), com os termos complexos do lado esquerdo, e assim encontrar o ângulo que fazem as trajetórias γ_1 e γ_3 entre si. Definindo o número complexo

$z = \frac{\gamma_{1,3}^2}{i^{(1+\sqrt{3/19})}}$ temos

$$\begin{aligned} \ln z &= 2 \ln \gamma_{1,3} - (1 + \sqrt{3/19}) \ln i \\ \ln z + in\pi &= 2 \ln |\gamma_{1,3}| + 2i \arg(\gamma_{1,3}) - i \frac{\pi}{2} (2m+1)(1 + \sqrt{3/19}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde $n = m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Igualando as fases na Eq. (3.78), e resolvendo para $\arg(\gamma_{1,3})$, temos

$$\arg(\gamma_{1,3}) = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(2m+1)(1 + \sqrt{3/19}). \quad (3.79)$$

Para a fase do dedo da direita no limite $t \rightarrow \infty$, fazemos $n = 0$, assim

$$\arg(\gamma_1) = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{3/19}). \quad (3.80)$$

O ângulo de γ_3 , $\arg(\gamma_3)$, é encontrado por simetria, fazendo $\arg(\gamma_1) = \pi - \arg(\gamma_3)$, ou fazendo $n = 2$ e $m = -1$, assim encontra-se

$$\arg(\gamma_3) = \frac{\pi}{4}(3 - \sqrt{3/19}). \quad (3.81)$$

Na Fig. 3.7 ilustramos a solução com condições iniciais $a_3(0) = -a_1(0) = 1$ e $a_2(0) = 0$, e com os fatores de crescimento $d_i = 1$. Da figura pode ser visto que os dedos laterais são repelidos pelo dedo do meio (que cresce ao longo do eixo vertical). Isso implica, como vimos acima, que no limite $t \rightarrow \infty$ os dedos dos flancos crescem ao longo de linhas retas, que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{3/19})$ entre elas.

Se os fatores de crescimento são iguais, mas as condições iniciais não são mais simétricas, então, o dedo do meio inicialmente será mais repelido pelo dedo mais próximo, convergindo para uma situação simétrica no limite $t \rightarrow \infty$, onde a posição (vertical) assintótica do dedo do médio depende da condição inicial. De outro modo, se os fatores de crescimento não são iguais, então o dedo com a maior fator d_i crescerá mais rápido e causará uma espécie de “blindagem” dos demais, que passarão a crescer mais lentamente. Contudo, a blindagem é parcial, no sentido de que a razão entre as velocidades do dedo mais rápido e de um dedo mais lento tende para uma constante positiva (diferente de um). Note, entretanto, que os valores dos ângulos formados pelas respectivas retas assintóticas é o mesmo que no caso em que os fatores de crescimento são idênticos, como mostrado para soluções exatas no limite assintótico no trabalho de Selander [30].

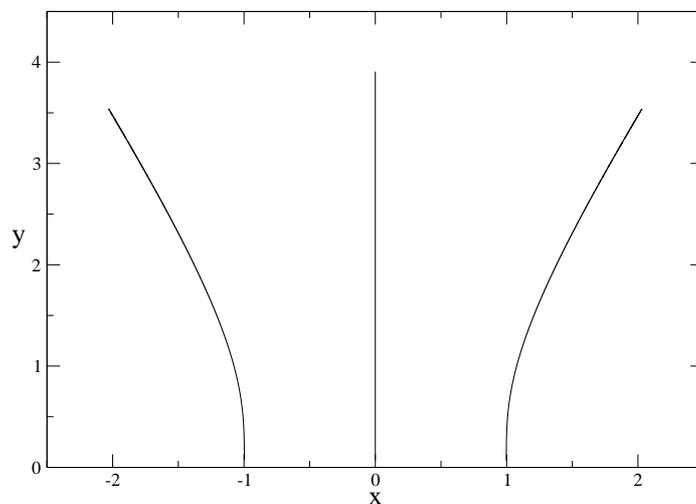


Figura 3.7 Três dedos crescendo no semiplano superior. As taxas de crescimento dos dedos são iguais, $d_i = 1$. A configuração dos dedos é simétrica com condições iniciais $a_3(0) = -a_1(0) = 1$ e $a_2(0) = 0$ [30, 31].

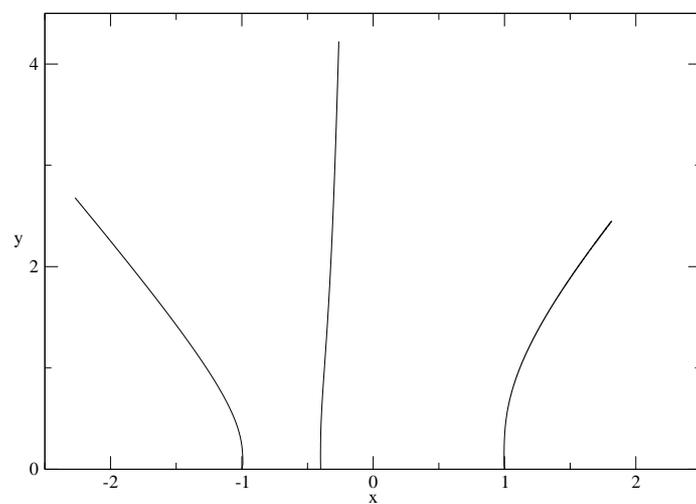


Figura 3.8 Três dedos crescendo no semiplano superior. As taxas de crescimento dos dedos são $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 0,9$. A configuração inicial dos dedos tem as condições iniciais $a_3(0) = -a_1(0) = 1$ e $a_2(0) = -0,4$; o tempo de integração $t = 1,5$ [30, 31].

Para gerar as soluções com três dedos mostradas acima, utilizamos o mesmo procedimento seguido nos casos de um e dois dedos. Ou seja, para evitar as singularidades na equação de

Loewner utilizamos as Eqs. (2.29) e (3.28) com $n = 3$, assim podemos escrever

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \left[\frac{d_1}{g_{t-\tau} - a_1(t-\tau)} + \frac{d_2}{g_{t-\tau} - a_2(t-\tau)} + \frac{d_3}{g_{t-\tau} - a_3(t-\tau)} \right], \quad (3.82)$$

de onde podemos encontrar um polinômio de quarta ordem para $g_{t-\tau}$

$$g_{t-\tau}^4 + \mathfrak{b}g_{t-\tau}^3 + \mathfrak{c}g_{t-\tau}^2 + \mathfrak{d}g_{t-\tau} + \mathfrak{e} = 0. \quad (3.83)$$

Os coeficientes do polinômio acima são dados explicitamente no Apêndice 1. No polinômio da Eq. 3.83, substituímos $g_t = a_i(t)$ e encontramos as raízes (sendo na maioria dos casos, duas reais e duas complexas conjugadas), sendo que utilizamos uma das raízes complexas como condição inicial de integração na Eq. (3.28), a partir da qual integramos para trás no tempo até $t = 0$, para encontrar a posição da extremidade da curva em $z = g_0$.

Vale notar que as curvas mostradas na Fig. 3.8 são semelhantes, para tempos curtos, aos padrões encontrados em experimentos de combustão vistos em [32], apesar de que os resultados acima serem válidos no semiplano (e as taxas de crescimento serem constantes), enquanto que os experimentos em [32] foram feitos na geometria do canal.

A equação de Loewner para uma interface crescendo no semiplano

Neste capítulo, estenderemos o método da transformação de Schwarz-Christoffel para estudar a evolução de uma ou múltiplas interfaces crescendo no semiplano superior. Deduziremos a equação de Loewner para esse caso, assim como as equações que descrevem a dinâmica das singularidades da função $g_t(z)$.

4.1 Interface crescendo no semiplano superior

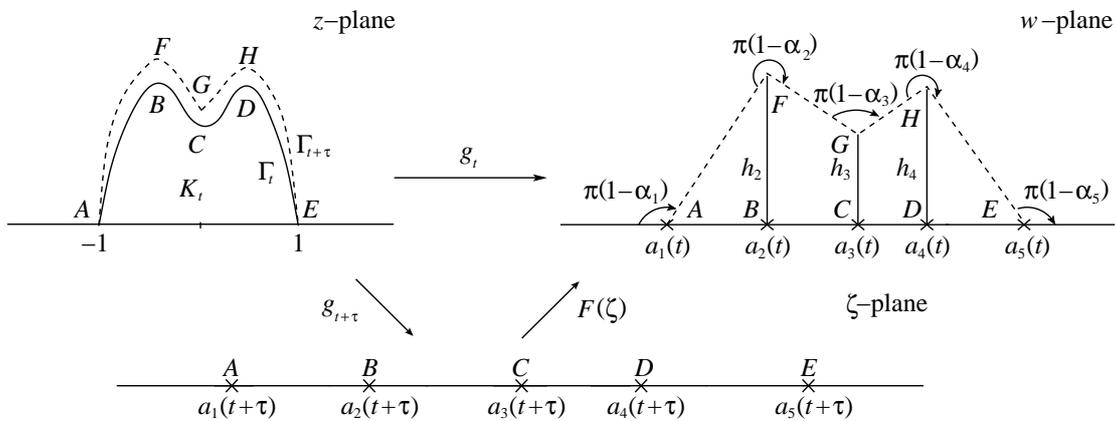


Figura 4.1 Planos físico e matemático para uma interface crescendo no semiplano. O mapa g_t leva a interface Γ_t para um segmento de reta no eixo real, enquanto que a interface $\Gamma_{t+\tau}$ é levada em uma forma poligonal.

Consideramos aqui o problema de uma interface que cresce a partir de um segmento, ao longo do eixo real, e avança no semiplano superior como indicado na Fig. 4.1. No modelo proposto, definimos um fator de crescimento em certos pontos especiais da interface, chamados de cristas e vales, onde o fator de crescimento é máximo (pontos B e D) ou mínimo (ponto C), respectivamente, enquanto que as extremidades da interface (pontos A e E), permanecem

fixas como mostrado na Fig. 4.1. Definindo os fatores de crescimento nas cristas e nos vales, determinamos o crescimento dos outros pontos na interface de acordo com uma regra específica de crescimento que é formulada com uma curva poligonal no plano matemático, vide Fig. 4.1.

Vamos denotar por Γ_t a interface no instante t , e por K_t a região delimitada pela curva Γ_t e o eixo real. No que segue, vamos considerar que a curva Γ_t é tal que o domínio $\mathfrak{D}_t = \mathbb{H} \setminus K_t$, é simplesmente conexo ($\setminus K_t$ é chamado tecnicamente como “casco”, do inglês “hull”, correspondendo à região do semiplano superior \mathbb{H} excluindo-se a região K_t ; ver [11]).

Seguiremos aqui um procedimento similar ao que foi feito para o caso de crescimento de dedos de largura infinitesimal no semiplano. Vamos então considerar a transformação $w = g_t(z)$, que leva o domínio físico \mathfrak{D}_t no plano z para o semiplano superior \mathbb{H} no plano w , ou seja,

$$g_t : \mathbb{H} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{H}. \quad (4.1)$$

Como vimos anteriormente, o mapa $g_t(z)$ deve satisfazer a condição de normalização hidrodinâmica

$$g_t(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

juntamente com a condição inicial

$$g_0(z) = z. \quad (4.3)$$

A dinâmica de crescimento é definida de tal forma que as cristas e vales avancem ao longo de linhas de gradiente, sendo o fator de crescimento máximo nas cristas (pontos B e D), mínimo nos vales (ponto C) e nulo nos dois “pontos de contato” com o eixo real (pontos A e E), de tal modo que a interface no instante $t + \tau$, sob a ação do mapa g_t , é levada em uma curva poligonal no plano w , como mostrado na Fig. 4.1. Assim, o domínio físico $\mathfrak{D}_{t+\tau} = \mathbb{H} \setminus K_{t+\tau}$, será transformado em uma região poligonal no plano w , onde o ângulo interior do i -ésimo vértice é denotado por $\pi(1 - \alpha_i)$, sendo α_i uma quantidade infinitesimal. Além disso, adotamos a seguinte convenção: para ângulos maiores que π o parâmetro correspondente α_i é negativo, caso contrário, é positivo.

Vamos deduzir agora dois resultados envolvendo os parâmetros α_i que serão utilizados mais adiante. Para obter o primeiro deles, vamos utilizar um teorema da geometria plana que diz que a soma da medida dos ângulos internos de um polígono fechado satisfaz a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^N \theta_i = (N - 2)\pi, \quad (4.4)$$

onde N é o número lados do polígono. Na figura 4.2 mostra-se um polígono com N lados.

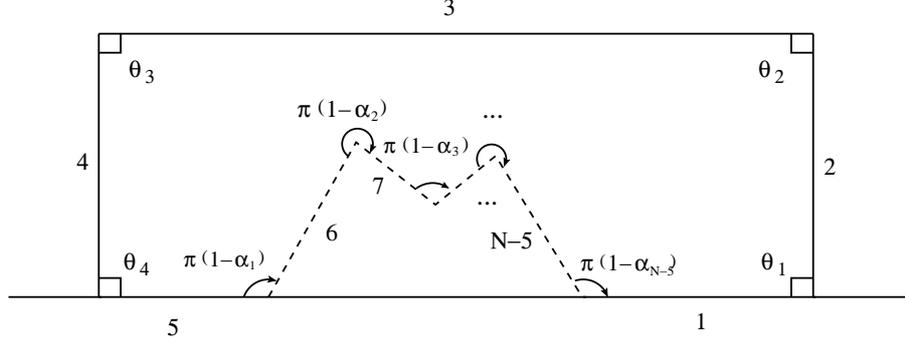


Figura 4.2 Domínio poligonal $\mathbb{H} \setminus K_{t+\tau}$.

Observe que os lados 1, 2, 3, 4 e 5 são prolongações no infinito, de maneira que eles formam 4 ângulos de $\pi/2$. Os $N - 4$ ângulos restantes são formados pelas linhas tracejadas, que correspondem à curva poligonal, somando os quatro ângulos formados pelas prolongações no infinito temos

$$4\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^n \pi(1 - \alpha_i) = (N - 2)\pi \quad (4.5)$$

onde o limite da soma $n = N - 4$, corresponde agora à soma dos ângulos da curva poligonal, então

$$2\pi + (N - 4)\pi - \pi \sum_{i=1}^n \alpha_i = N\pi - 2\pi, \quad (4.6)$$

de onde resulta que a soma dos parâmetros α_i , que definem os ângulos na curva poligonal no plano w , é zero, ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad (4.7)$$

onde N corresponde ao número de vértices do domínio poligonal. Além disso, outra relação importante pode ser encontrada para as alturas dos vértices. Se chamarmos de h_i , a altura do i -ésimo vértice medida a partir do eixo real, como indicado na Fig. 4.3, podemos ver que h_i e, portanto, os parâmetros α_i , vão para zero no limite $\tau \rightarrow 0$. Logo, para tempos infinitesimais podemos utilizar a aproximação $\tan(\alpha) \approx \alpha$. A relação que estamos interessados em mostrar pode ser deduzida mediante um caso particular, mostrado na Fig. 4.3, mas que posteriormente pode ser generalizada.

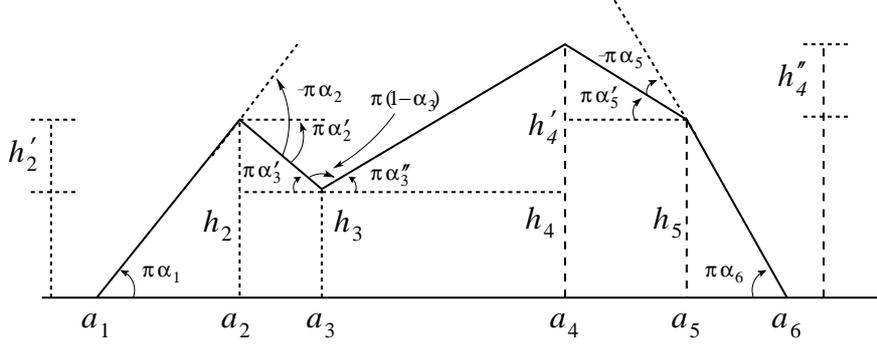


Figura 4.3 Domínio poligonal utilizado na dedução da Eq. (4.21).

Da figura 4.3 podem ser extraídas as seguintes relações entre os parâmetros

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha'_2 \quad (4.8)$$

$$\alpha_3 = \alpha'_3 + \alpha''_3 \quad (4.9)$$

$$\alpha_6 = -\alpha_5 + \alpha'_5, \quad (4.10)$$

onde também temos $\alpha'_2 = \alpha'_3$. Para as alturas h_i , teremos as seguintes relações

$$h_3 = h_2 - h'_2 \quad (4.11)$$

$$h_3 = h_4 - h'_4 \quad (4.12)$$

$$h_5 = h_4 - h''_4. \quad (4.13)$$

Combinando as equações para h_3 e substituindo h_4 da última equação acima, temos

$$h_2 - h'_2 - h_4 - h''_4 - h'_4 = 0. \quad (4.14)$$

As alturas h_i , por sua vez, podem ser determinadas das tangentes dos ângulos apropriados, então, no limite $\tau \rightarrow 0$, a equação acima torna-se

$$\alpha_1(a_2 - a_1) - \alpha_2(a_3 - a_2) - \alpha_6(a_6 - a_5) - \alpha'_5(a_5 - a_4) + \alpha''_3(a_4 - a_3) = 0. \quad (4.15)$$

Das relações entre os ângulos, substituímos $\alpha'_5 = \alpha_6 + \alpha_5$, $\alpha''_3 = \alpha_3 + \alpha'_3$ e $\alpha'_3 = \alpha'_2$ na última equação, obtendo

$$\alpha_1(a_2 - a_1) - \alpha'_2(a_4 - a_2) + \alpha_3(a_4 - a_3) - \alpha_6(a_6 - a_4) - \alpha_5(a_5 - a_4) = 0, \quad (4.16)$$

que após utilizarmos a relação $-\alpha'_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, torna-se

$$\alpha_1(a_1 - a_4) + \alpha_2(a_2 - a_4) + \alpha_3(a_3 - a_4) + \alpha_5(a_5 - a_4) + \alpha_6(a_6 - a_4) = 0, \quad (4.17)$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^6 (a_i \alpha_i - a_4 \alpha_i) = 0. \quad (4.18)$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $a_4 \alpha_4$ podemos reescrever o somatório acima sem nenhuma restrição :

$$\sum_{i=1}^6 a_i \alpha_i - a_4 \sum_{i=1}^6 \alpha_i = 0. \quad (4.19)$$

No caso geral de N vértices, pode-se mostrar que a relação (4.19) torna-se

$$\sum_{i=1}^N a_i \alpha_i - a_M \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad (4.20)$$

onde $M = 1 + \text{int}(N/2)$ denota o índice do “vértice central”.

Como o segundo termo na última equação zera, em virtude da Eq. (4.7), temos que α_i e $a_i(t)$ satisfazem a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i = 0. \quad (4.21)$$

A Eq. (4.21) é válida para qualquer domínio poligonal no plano, com um número arbitrário N de vértices.

Voltando agora para a dinâmica do mapa $g_t(z)$, vale notar que o domínio no plano w tem forma poligonal, como visto na Fig. 4.3. Isso implica que o mapa $w = F(\zeta)$ pode ser obtido da transformação de Schwarz-Christoffel. Nesse caso, temos

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^N [\zeta - a_i(t + \tau)]^{-\alpha_i} d\zeta + F(\zeta_0), \quad (4.22)$$

onde usamos a condição hidrodinâmica para determinar o prefator 1 na frente da integral. A constante ζ_0 em (4.22) em princípio é arbitrária. Entretanto, faremos ζ_0 igual a um dos pontos $a_i(t + \tau)$, ou seja, $\zeta_0 = a_i(t + \tau)$, para $i = 1, \dots, N$. Nesse caso $F(\zeta_0)$ é a respectiva imagem do ponto $a_i(t + \tau)$ no plano w , ou seja,

$$F[a_i(t + \tau)] = a_i(t) + ih_i, \quad (4.23)$$

Para os pontos extremos $a_1(t)$ e $a_N(t)$ da linha poligonal, tem-se que as respectivas alturas são zero, $h_1 = h_N = 0$.

A integral na Eq. (4.22) não pode ser feita exatamente para α_i 's arbitrários, então, para obter a equação de Loewner neste caso, expandimos mais uma vez o integrando na transformação de Schwarz-Christoffel nos parâmetros infinitesimais, nesse caso α_i . Assim, cada termo no produto pode ser expandido em α_i , até primeira ordem, da seguinte forma

$$[\zeta - a_i(t + \tau)]^{-\alpha_i} = e^{-\alpha_i \ln[\zeta - a_i(t + \tau)]} \simeq 1 - \alpha_i \ln[\zeta - a_i(t + \tau)]. \quad (4.24)$$

Com a expansão acima, podemos escrever até primeira ordem em α_i , para a transformação na Eq. (4.22)

$$g_t \approx \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i \ln[\zeta - a_i(t + \tau)] \right\} d\zeta + F(\zeta_0). \quad (4.25)$$

Integrando a equação acima, temos

$$g_t = g_{t+\tau} - \zeta_0 - G(g_{t+\tau}) + G(\zeta_0) + F(\zeta_0), \quad (4.26)$$

onde a função $G(\zeta)$ foi definida como

$$G(\zeta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \{ [\zeta - a_i(t + \tau)] \ln[\zeta - a_i(t + \tau)] - \zeta \}. \quad (4.27)$$

Entretanto, o último termo entre colchetes se anula em virtude de Eq. (4.7), de modo que obtemos

$$G(\zeta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) [\zeta - a_i(t + \tau)] \ln[\zeta - a_i(t + \tau)]. \quad (4.28)$$

Fazendo $g_{t+\tau} = g_t + \tau \dot{g}_t$, dividindo por τ e fazendo o limite $\tau \rightarrow 0$ na Eq. (4.26), obtem-se

$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^N d_i(t) [g_t - a_i(t)] \ln[g_t - a_i(t)] + \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\zeta_0 - G(\zeta_0) - F(\zeta_0)}{\tau} \quad (4.29)$$

onde foram definidos os fatores de crescimento

$$d_i(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha_i}{\tau}. \quad (4.30)$$

Utilizando a condição de contorno $\lim_{g_t \rightarrow \infty} \dot{g}_t = 0$, na Eq. (4.29), encontramos que os termos

independentes de g_t devem satisfazer a seguinte condição

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\zeta_0 - G(\zeta_0) - F(\zeta_0)}{\tau} = 0. \quad (4.31)$$

Fazendo $\zeta_0 = a_i(t + \tau)$ e $F(\zeta_0) = a_i(t) + ih$ na Eq. (4.31), obtemos a equação que governa a dinâmica das funções $a_i(t)$

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_j(t)(a_i - a_j) \ln |a_i - a_j|. \quad (4.32)$$

Desta forma podemos escrever a equação de Loewner generalizada para uma interface como

$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^N d_i(t)[g_t - a_i(t)] \ln[g_t - a_i(t)]. \quad (4.33)$$

Note que, utilizando as equações (4.7) e (4.21) para os parâmetros α_i , podemos escrever equações similares para os parâmetros d_i .

$$\sum_{i=1}^n d_i = 0 \quad (4.34)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i d_i = 0. \quad (4.35)$$

A partir das expressões (4.34) e (4.35) podemos escrever d_1 e d_N em termos dos outros fatores de crescimento, de maneira que o modelo de crescimento descrito pela equação de Loewner (4.33) fica definido prescrevendo-se os fatores de crescimento $d_i(t)$ nas cristas e nos vales da interface. A seguir, vamos a discutir algumas soluções particulares da Eq. (4.33).

4.1.1 Interface com uma crista

Consideramos inicialmente o caso de uma interface que tem somente uma crista (ou “tip”), ou seja, como mostrado na Fig. 4.4. Neste caso, o número de vértices é $N = 3$, de maneira que podemos expressar os fatores de crescimento para os pontos extremos A e C , dados por $d_1(t)$ e $d_3(t)$, como função do fator de crescimento $d_2(t)$ da crista. Das relações (4.34) e (4.35), para o

caso $N = 3$, temos

$$d_1 + d_2 + d_3 = 0, \quad (4.36)$$

$$d_1(a_1 - a_2) + d_3(a_3 - a_2) = 0. \quad (4.37)$$

Resolvendo para d_1 e d_3 em função de d_2 , e definindo $d(t) = -d_2(t) = |d_2(t)|$, obtemos

$$d_1(t) = -\frac{a_3(t) - a_2(t)}{a_3(t) - a_1(t)}d(t), \quad d_3(t) = -\frac{a_2(t) - a_1(t)}{a_3(t) - a_1(t)}d(t). \quad (4.38)$$

Agora, podemos escrever explicitamente a equação de Loewner para uma interface simples crescendo no semiplano, de (4.33)

$$\dot{g}_t = -d(t) \left[\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} (g_t - a_1) \ln(g_t - a_1) + \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} (g_t - a_3) \ln(g_t - a_3) - (g_t - a_2) \ln(g_t - a_2) \right] \quad (4.39)$$

onde, por economia de notação, omitimos a dependência em t das funções $a_i(t)$. Por completudeza, escrevemos explicitamente o sistema de equações que determina a dinâmica das funções $a_i(t)$. Temos então da Eq. (4.32)

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -d(t) \left[-(a_1 - a_2) \ln |a_1 - a_2| + \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} (a_1 - a_3) \ln |a_1 - a_3| \right] \\ \dot{a}_2 &= -d(t) \left[-\frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_3} (a_2 - a_1) \ln |a_2 - a_1| - \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_3} (a_2 - a_3) \ln |a_2 - a_3| \right] \\ \dot{a}_3 &= -d(t) \left[-(a_3 - a_2) \ln |a_3 - a_2| + \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} (a_3 - a_1) \ln |a_3 - a_1| \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

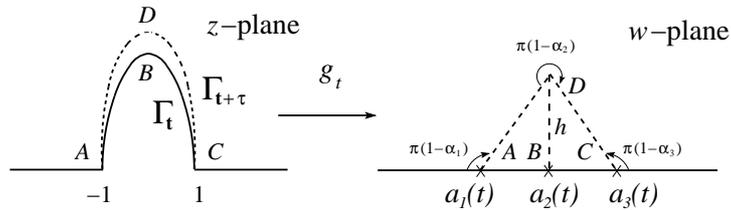


Figura 4.4 Domínio poligonal utilizado para uma interface com somente uma crista.

A forma específica do fator de crescimento $d(t)$ não é importante para a evolução da interface, porque este define somente a escala de tempo do problema. Neste caso definimos $|d_2(t)| = 2$, com o que reescalamos a coordenada temporal.

Já que temos as condições iniciais $a_1(0) = -1$ e $a_3(0) = 1$, uma vez que os pontos extremos da interface foram fixados em $z = \pm 1$, devemos especificar agora somente a condição inicial da crista, $a_2(0)$. Dependendo da condição inicial de $a_2(0)$, podemos considerar dois casos: i) interface simétrica e ii) interface assimétrica.

No caso de uma interface *simétrica*, temos $a_2(0) = 0$. Isso implica $a_2(t) = 0$, ou seja, a crista da interface avança ao longo do eixo imaginário, e pela simetria $a_3(t) = -a_1(t) = a(t)$, para todo t . Nesse caso a equação de Loewner reduz-se a

$$\dot{g}_t(z) = [g_t + a(t)] \ln[g_t + a(t)] + [g_t - a(t)] \ln[g_t - a(t)] - 2g_t \ln(g_t) \quad (4.41)$$

com a evolução temporal dada por

$$\dot{a}(t) = (2 \ln 2) a(t), \quad (4.42)$$

integrando a Eq. (4.42) temos $a(t) = 4^t$.

Na figura 4.5, mostramos algumas soluções numéricas da Eq. (4.41) para vários valores de t , a partir de $t = 0.3$, até $t = 2.1$, com um intervalo temporal $\Delta t = 0.3$ entre interfaces consecutivas. Para gerar as curvas mostradas na Fig. 4.5, utilizamos um método similar ao empregado para resolver numericamente a equação de Loewner para um dedo de largura infinitesimal. No caso específico da Fig. 4.5, começamos com a condição $g_t = w$, para $w \in [-a(t), a(t)]$, e integramos a equação de Loewner para trás no tempo, utilizando um método de Runge-Kutta de segunda ordem, para obter o valor $z = g_0$ que corresponde a um ponto da interface. Da Fig. 4.5 podemos ver que inicialmente as interfaces avançam mais lentamente, mas depois aceleram e se expandem de maneira a ocupar todo o semiplano superior.

Para a interface *assimétrica*, consideramos o máximo local inicialmente fora do centro, ou seja $a_2(0) \neq 0$, então tem-se um crescimento assimétrico. Nesse caso, deve-se resolver a Eq. (4.40) e o sistema de equações (4.41) para encontrar a dinâmica das funções $a_i(t)$. Um exemplo desse caso é mostrado na Fig. 4.6. Nela, as curvas contínuas mostram as interfaces para vários valores de t , a partir de $t = 0.5$, até $t = 2.0$, com uma separação temporal $\Delta t = 0.3$ entre curvas sucessivas, enquanto que a curva tracejada representa a trajetória do ponto de máximo crescimento $\gamma_t = g_t^{-1}[a_2(t)]$. Da Fig. 4.6, pode-se ver que para tempos longos o máximo avança ao longo de uma linha reta, indicando que a assimetria persiste para todo valor de t .

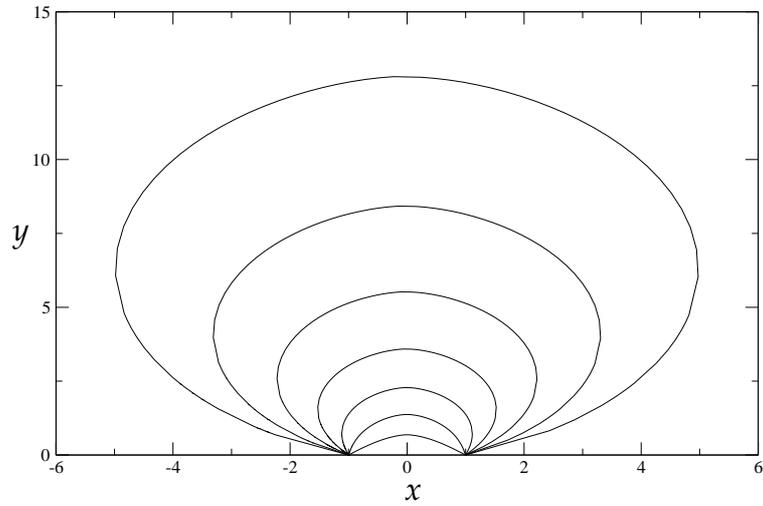


Figura 4.5 Evolução de Loewner para uma interface simétrica crescendo no semiplano superior para $|d_2(t)| = 2$. Inicialmente, a interface corresponde ao segmento $[-1,1]$ no eixo real. As curvas correspondem a interfaces separadas por um intervalo temporal $\Delta t = 0,3$ [33].

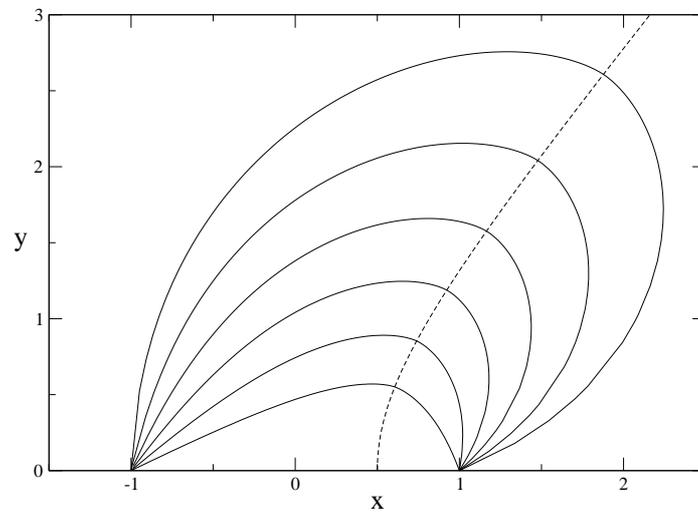


Figura 4.6 Evolução de Loewner para uma interface assimétrica crescendo no semiplano superior para $|d_2(t)| = 2$. As curvas contínuas mostram a interface para vários valores de t , a partir de $t = 0,5$ até $t = 2,0$ com uma separação temporal $\Delta t = 0,3$ entre curvas sucessivas. A linha tracejada indica a trajetória da crista da interface [31].

4.1.2 Interface com duas cristas

Agora vamos considerar uma interface com duas cristas e um vale, como mostrado na Fig 4.7. A equação de Loewner para uma interface com duas cristas pode ser escrita a partir da Eq. (4.33). Assim, fazendo $N = 5$ temos

$$\begin{aligned} \dot{g}_t = & d_1(g_t - a_1) \ln(g_t - a_1) + d_2(g_t - a_2) \ln(g_t - a_2) \\ & + d_3(g_t - a_3) \ln(g_t - a_3) + d_4(g_t - a_4) \ln(g_t - a_4) \\ & + d_5(g_t - a_5) \ln(g_t - a_5). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Os fatores de crescimento d_1 e d_5 dos extremos da interface podem ser expressados utilizando as equações (4.7) e (4.21), em termos dos fatores de crescimento d_2 e d_4 dos dois máximos, e d_3 do mínimo local. Nesse caso obtemos

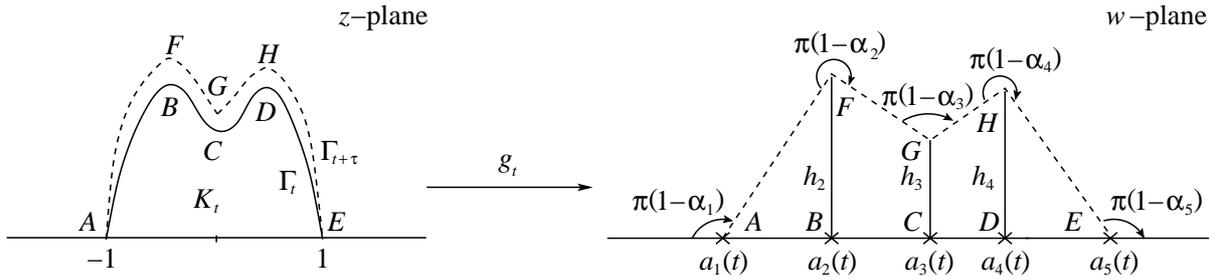


Figura 4.7 Domínio poligonal para uma interface com duas cristas.

$$d_1 = \frac{d_2(a_2 - a_5) + d_3(a_3 - a_5) + d_4(a_4 - a_5)}{a_5 - a_1} \quad (4.44)$$

$$d_5 = \frac{d_2(a_2 - a_1) + d_3(a_3 - a_1) + d_4(a_4 - a_1)}{a_1 - a_5} \quad (4.45)$$

Por completeza, vamos escrever explicitamente, a partir da Eq. (4.32), as equações que governam a dinâmica das funções $a_i(t)$, assim temos

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 = & d_2(a_1 - a_2) \ln(a_1 - a_2) + d_3(a_1 - a_3) \ln(|a_1 - a_3|) \\ & + d_4(a_1 - a_4) \ln(|a_1 - a_4|) + d_5(a_1 - a_5) \ln(|a_1 - a_5|), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 = & d_1(a_2 - a_1) \ln(a_2 - a_1) + d_3(a_2 - a_3) \ln(|a_2 - a_3|) \\ & + d_4(a_2 - a_4) \ln(|a_2 - a_4|) + d_5(a_2 - a_5) \ln(|a_2 - a_5|), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_3 = & d_1(a_3 - a_1) \ln(a_3 - a_1) + d_2(a_3 - a_2) \ln(a_3 - a_2) \\ & + d_4(a_3 - a_4) \ln(|a_3 - a_4|) + d_5(a_3 - a_5) \ln(|a_3 - a_5|), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_4 = & d_1(a_4 - a_1) \ln(a_4 - a_1) + d_2(a_4 - a_2) \ln(a_4 - a_2) \\ & + d_3(a_4 - a_3) \ln(a_4 - a_3) + d_5(a_4 - a_5) \ln(|a_4 - a_5|), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_5 = & d_1(a_5 - a_1) \ln(a_5 - a_1) + d_2(a_5 - a_2) \ln(a_5 - a_2) \\ & + d_3(a_5 - a_3) \ln(a_5 - a_3) + d_4(a_5 - a_4) \ln(a_5 - a_4). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Vale lembrar ainda que no sistema de equações (4.46)-(4.50), as taxas de crescimento d_1 e d_5 devem ser expressadas como função de d_2 , d_3 e d_4 , como mostrado em (4.45).

Como primeiro exemplo vamos discutir o caso de uma interface simétrica com duas cristas. Na figura 4.8, mostra-se a solução da Eq. (4.43) com a dinâmica das singularidades dada pelo sistema de equações (4.46)-(4.50). As curvas contínuas correspondem às interfaces crescendo a partir de $t = 0,5$ até $t = 1,7$, enquanto que as linhas tracejadas representam as trajetórias das duas cristas e do vale. Na Fig. 4.8 utilizamos os fatores de crescimento $d_1 = 1,0$, $d_2 = 0,5$ e $d_3 = 1,0$. Vemos que o vale da interface, cresce ao longo do eixo vertical, enquanto que as cristas, inicialmente em $a_4(0) = a_2(0) = 0,5$, se afastam entre si de forma simétrica. Note que os fatores de crescimento das duas cristas, são iguais, $d_2 = d_4 = 1$ de maneira que eles avançam com a mesma rapidez. Isso fica claro quando observamos a evolução temporal das singularidades na Fig. 4.9. Nesse caso, as singularidades $a_i(t)$ se afastam uma da outra, o que sugere que a interface tenderá a ocupar o semiplano completo.

Na figura 4.10, mostramos, para comparar, um caso no qual uma das cristas avança mais rapidamente que a outra. Nesse caso, as duas cristas começam nas mesmas posições adotadas no caso simétrico, mas agora consideramos os fatores de crescimento diferentes $d_2 = 1$, $d_3 = 0,5$ e $d_4 = 0,5$. As singularidades $a_i(t)$ para o caso da Fig. 4.10 são mostradas na Fig. 4.11. Pode-se ver que as funções $a_3(t)$ e $a_4(t)$ são numericamente iguais após $t \sim 1,8$, fato esse que dificulta a integração da equação de Loewner para tempos maiores. A evolução vista na Fig. 4.10 pode ser interpretada como um tipo de competição entre as cristas, de tal forma que

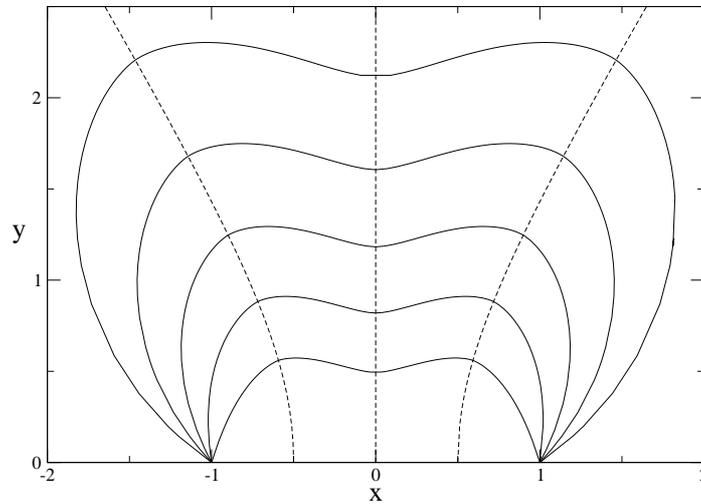


Figura 4.8 Crescimento simétrico de uma interface com duas cristas e um vale [31].

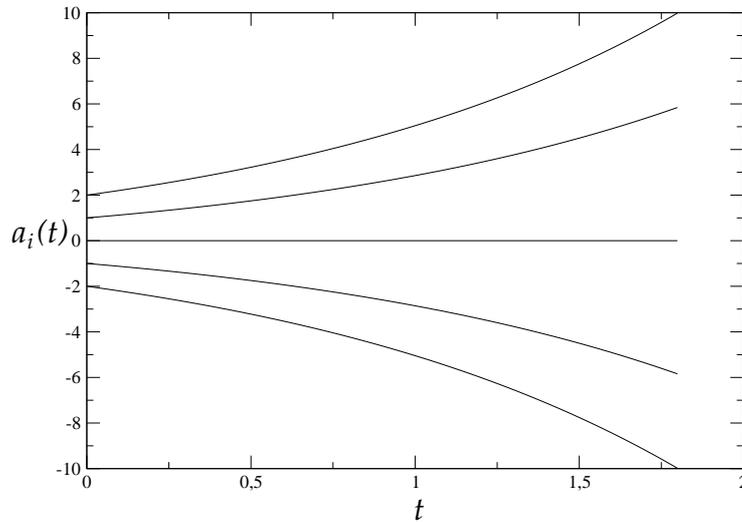


Figura 4.9 Evolução temporal das singularidades $a_i(t)$ para uma interface simétrica com duas cristas e um vale.

a crista com maior fator de crescimento superará à mais lenta. Também podemos ver que a crista com menor fator de crescimento $d_3 = 0,5$, e o vale com $d_2 = 0,5$, tenderão a juntar-se e posteriormente desaparecer; ver curvas $a_3(t)$ e $a_4(t)$ na Fig. 4.11. Isso nos permite concluir que no caso da competição entre as cristas de uma interface no semiplano superior, prevalecerá

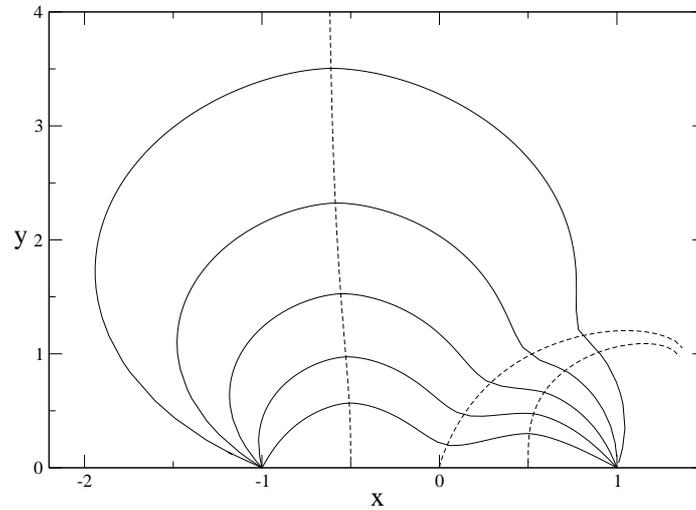


Figura 4.10 Crescimento assimétrico de uma interface com duas cristas “Blindagem total” [31].

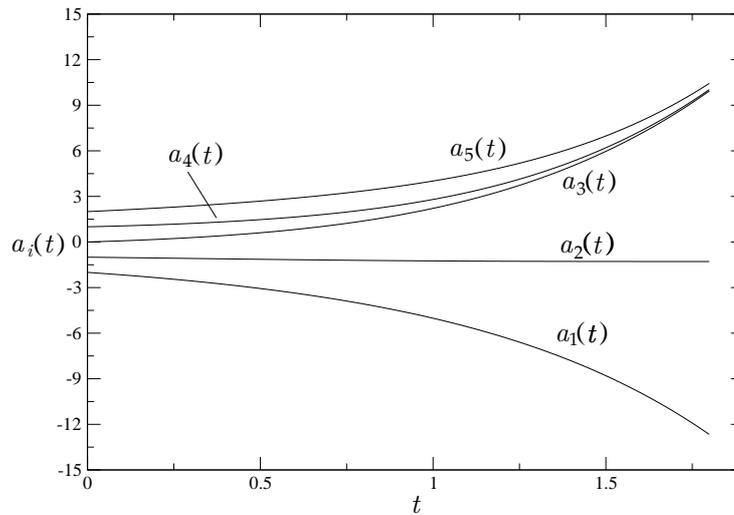


Figura 4.11 Evolução temporal das singularidades $a_i(t)$ para a interface assimétrica onde as duas cristas avançam com diferentes fatores de crescimento.

a crista com o maior fator de crescimento, de forma que para tempos longos observaremos um dedo simétrico com uma única crista. Temos nesse caso, uma forma de blindagem ‘total’, no sentido de que a crista mais lenta eventualmente vai parar de crescer, sobrando assim apenas a crista mais rápida; vide Fig.4.11. Por outro lado, se os fatores de crescimento das cristas

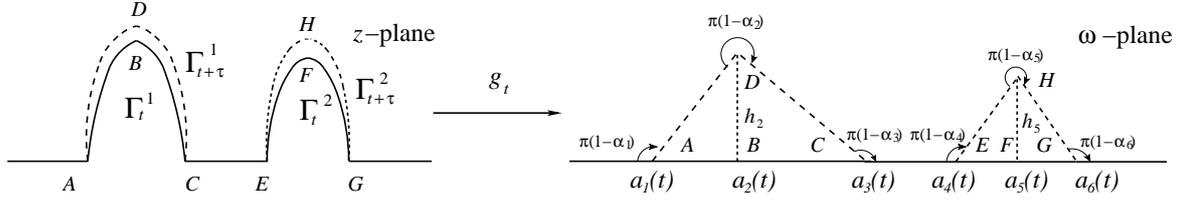


Figura 4.12 Domínio físico e matemático para duas interfaces crescendo no semiplano superior.

forem diferentes mas suficientemente próximos um do outro, teremos o caso de uma blindagem ‘parcial’, no sentido de que a crista com fator de crescimento menor não parará de crescer, ou seja, as duas cristas vão continuar crescendo no semiplano.

4.1.3 Múltiplas interfaces crescendo no semiplano

Outro problema que pode ser abordado com a equação de Loewner (4.33) é o caso de múltiplas interfaces, como mostrado na Fig. 4.12. As curvas ABC e EFG correspondem às interfaces Γ_t^1 e Γ_t^2 no instante t , e são levadas sob a transformação $w = g_t(z)$ nos segmentos de reta \overline{ABC} e \overline{EFG} no plano w . As linhas tracejadas na Fig. 4.12 correspondem às interfaces $\Gamma_{t+\tau}^1$ e $\Gamma_{t+\tau}^2$ no instante $t + \tau$. Pode-se ver da Figura 4.12 que o domínio poligonal, no plano w , nos permite utilizar os resultados mostrados nas equações (4.32) e (4.33), de maneira que podemos escrever explicitamente a equação de Loewner para múltiplas interfaces como

$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^n d_i(t) [g_t - a_i(t)] \ln [g_t - a_i(t)], \tag{4.51}$$

onde n agora é o número total de vértices correspondendo à soma do número de vértices de cada interface. Da mesma forma, para a dinâmica das singularidades $a_i(t)$ temos

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j(t) (a_i - a_j) \ln |a_i - a_j|. \tag{4.52}$$

Note ainda que para cada interface valem as relações (4.7) e (4.21) que implicam

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_i} d_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n_i} a_i(t) d_i &= 0,\end{aligned}\tag{4.53}$$

onde n_i é o número de vértices da i -ésima interface. Para ilustrar o caso de múltiplas interfaces, vamos considerar o caso mais simples em que temos apenas duas interfaces presentes, cada uma com uma crista apenas. Nesse caso, utilizando a Eq. (4.53) para cada interface, encontramos d_1 e d_3 como função de d_2 para a primeira interface, e também d_4 e d_6 como função de d_5 para a segunda, ou seja

$$\begin{aligned}d_1(t) &= -\frac{a_3(t) - a_2(t)}{a_3(t) - a_1(t)} d_2(t), & d_3(t) &= -\frac{a_2(t) - a_1(t)}{a_3(t) - a_1(t)} d_2(t) \\ d_4(t) &= -\frac{a_6(t) - a_5(t)}{a_6(t) - a_4(t)} d_5(t), & d_6(t) &= -\frac{a_5(t) - a_4(t)}{a_6(t) - a_4(t)} d_5(t).\end{aligned}\tag{4.54}$$

Usando os fatores de crescimento encontrados na Eq. (4.54), a equação de Loewner para duas interfaces fica explicitamente como

$$\begin{aligned}\dot{g}_t &= d_2 \left[\frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_3} (g_t - a_1) \ln(g_t - a_1) + (g_t - a_2) \ln(g_t - a_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_3} (g_t - a_3) \ln(g_t - a_3) \right] \\ &\quad + d_5 \left[\frac{a_6 - a_5}{a_4 - a_6} (g_t - a_4) \ln(g_t - a_4) + (g_t - a_5) \ln(g_t - a_5) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_5 - a_4}{a_4 - a_6} (g_t - a_6) \ln(g_t - a_6) \right].\end{aligned}\tag{4.55}$$

A partir da Eq. (4.52), e com os valores de d_i dados na Eq. (4.54), podemos escrever o sistema de equações para as singularidades $a_i(t)$, da mesma forma que foi feito para o caso de uma interface com duas cristas na seção anterior.

Para ilustrar o comportamento das duas interfaces, na Fig. 4.13 mostramos soluções numéricas para duas interfaces simétricas com uma crista cada uma. Na figura, cada interface, é a imagem espelhada da outra com relação ao eixo vertical. As interfaces começam a crescer a partir dos intervalos $[-3, -1]$ e $[1, 3]$, respectivamente, com as cristas localizadas inicial-

mente em $a_4(0) = -a_2(0) = 2$. Cada interface tem o mesmo fator de crescimento, ou seja, $d_2 = d_5 = -1$. As curvas mostradas na Fig. 4.12, foram calculadas para tempos a partir de $t = 0,5$, até $t = 1,4$, com um intervalo temporal $\Delta t = 0,3$. Note que, com o passar do tempo, os lados mais próximos das interfaces aproximam-se um do outro, formando um canal estreito entre eles. Para tempos suficientemente longos, a largura do referido canal fica infinitesimalmente

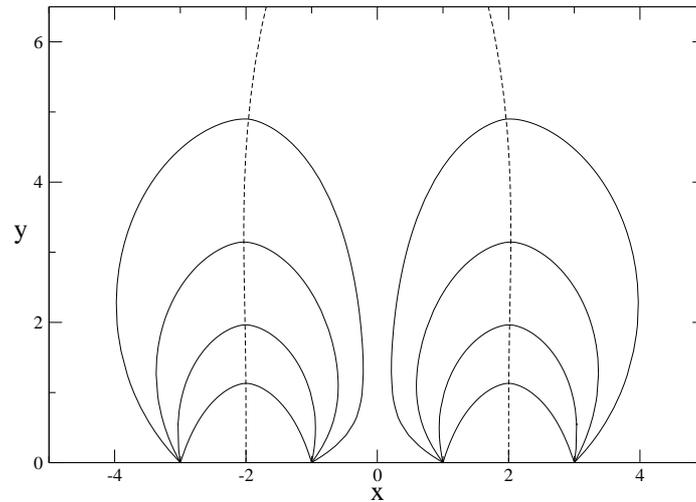


Figura 4.13 Evolução de Loewner para duas interfaces simétricas crescendo no semiplano superior fazendo $d(t) = 1$, para cada interface. As interfaces iniciam respectivamente de $[-3, -1]$ e $[1, 3]$. As linhas tracejadas correspondem às trajetórias das cristas [31].

pequena, tal que, na prática, a evolução resultante corresponderá à de somente uma interface simétrica. Contudo, a equação de Loewner é difícil de integrar para tempos maiores que o maior tempo $t = 1,4$ mostrado na Fig. 4.13. Nessa situação, as funções $a_3(t)$ e $a_4(t)$ ficam quase idênticas, como mostrado na Fig. 4.14.

Vemos agora, na figura 4.15, mostrar a evolução de duas interfaces, em que inicialmente elas possuem a mesma largura, tal como na Fig. 4.13 mas onde agora o máximo de uma interface avança mais rapidamente que a crista da outra. Nesse caso, os fatores de crescimento para as interfaces da esquerda e da direita são $d_2 = 1$ e $d_5 = 0,5$ respectivamente. Neste caso, vemos um efeito de blindagem similar ao visto para dedos de largura infinitesimal no capítulo anterior, ou seja, a interface maior impede o crescimento da menor. Vale notar, que esse efeito é determinado pelo modelo através dos fatores de crescimento $d_i(t)$, mas é um efeito que corresponde a um comportamento observado em experimentos sobre competição de dedos, como mostrado na referência [32]. Note-se que a trajetória do máximo da interface da direita (linha tracejada) é forçada a se deslocar para o lado direito devido à aproximação da interface maior.

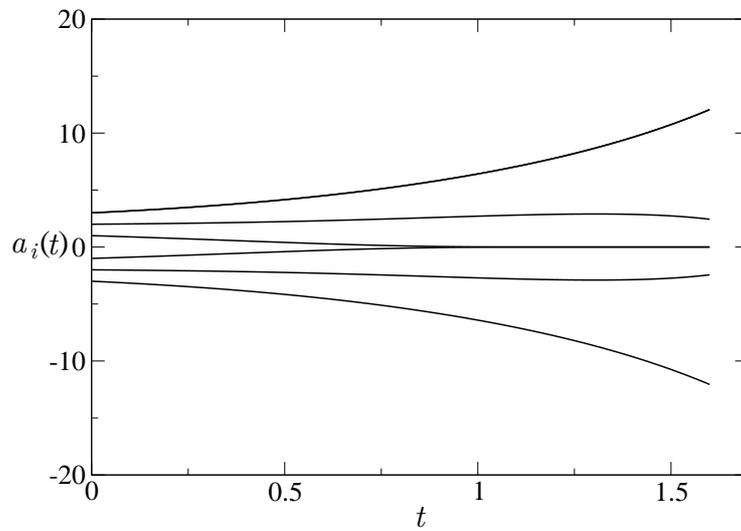


Figura 4.14 Evolução temporal das singularidades $a_i(t)$ para o caso de duas interfaces com apenas uma crista cada uma delas. Depois de $t = 1,4$, as funções $a_3(t)$ a $a_4(t)$ são numericamente iguais.

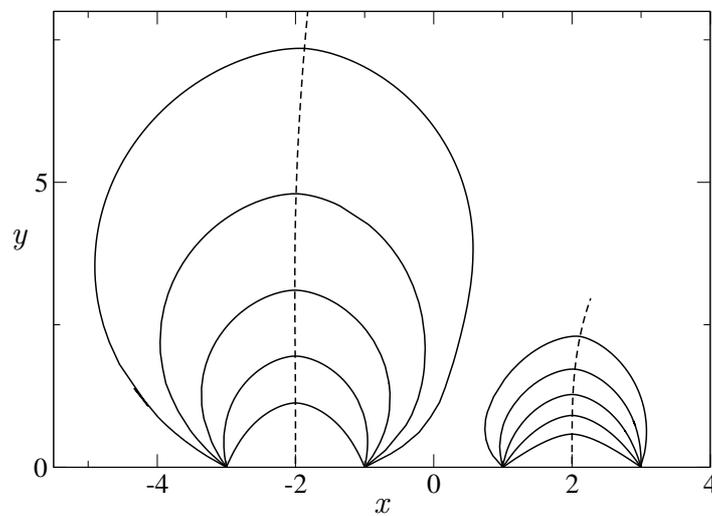


Figura 4.15 Evolução de Loewner para duas interfaces assimétricas. A condição inicial é a mesma que na Fig. 4.12, mas com $d_2(t) = 1$ e $d_5(t) = 0,5$ para as interfaces da esquerda e da direita respectivamente. As curvas estão separadas por um intervalo $\Delta t = 0,3$ e as linhas tracejadas correspondem às trajetórias das cristas [31].

Outro parâmetro que pode ser levado em consideração, e que influencia o crescimento das interfaces, é a largura das mesmas. Na Fig. 4.16, verificamos o efeito da largura no crescimento

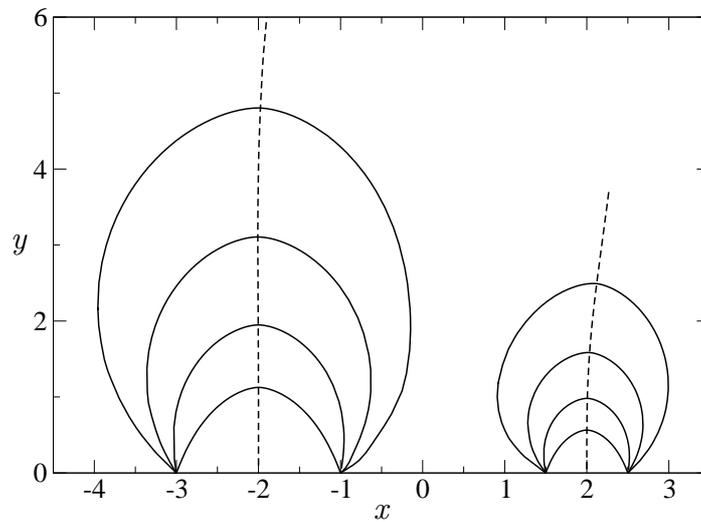


Figura 4.16 Evolução de Loewner para duas interfaces com larguras diferentes. As condições iniciais para a curva da esquerda são as mesmas que na Fig. 4.12, mas para a curva da direita temos $a_4(0) = 1,5$, $a_5(0) = 2,0$ e $a_5(0) = 2,5$. Os fatores de crescimento para as duas interfaces são os mesmos $d(t) = 1$. Novamente, as linhas tracejadas correspondem às trajetórias das cristas.

das interfaces quando elas tem o mesmo fator de crescimento. Como visto na figura, a interface da esquerda tem inicialmente uma largura maior que a interface da direita. Apesar de terem o mesmo fator de crescimento, a interface com largura maior avança mais rápido, produzindo um efeito similar ao de blindagem visto na Fig. 4.15, para interfaces inicialmente simétricas, mas com fatores de crescimento diferentes. As curvas da Fig. 4.16, foram produzidas para os mesmos tempos e com o mesmo intervalo temporal Δt do que os utilizados na Fig. 4.15.

A equação de Loewner no semiplano para múltiplas curvas, e para uma interface simétrica foram publicadas em [31]. Por outro lado, a solução exata para as trajetórias de três curvas crescendo no semiplano, suas respectivas soluções numéricas e a equação de Loewner generalizada para uma interface com múltiplas cristas, assim como para múltiplas interfaces e suas respectivas soluções numéricas, foram publicadas em [31].

Equação de Loewner para um dedo de largura infinitesimal na geometria do canal

Uma extensão natural do problema é feita considerando o crescimento dos dedos de largura infinitesimal e de interfaces, em uma geometria limitada. Neste capítulo, vamos deduzir (via transformação de Schwarz-Christoffel) a equação de Loewner que governa o crescimento de uma curva que cresce dentro de um canal de paredes infinitas e mostramos soluções numéricas para vários dedos crescendo dentro do canal.

5.1 Equação de Loewner na geometria do canal

Agora consideramos o problema de um dedo de largura infinitesimal crescendo a partir do eixo real em um canal semi-infinito, cujas paredes laterais estão em $x = \pm 1$, e a parede inferior em $y = 0$, como mostrado na Fig. 5.1, de maneira que o domínio do canal \mathbb{P} relevante no plano z é descrito por

$$\mathbb{P} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0, x \in]-1, 1[\} \quad (5.1)$$

Como antes, consideramos a transformação $w = g_t(z)$ que leva o domínio físico z no domínio matemático no plano w :

$$g_t : \mathbb{P} \setminus \Gamma_t \rightarrow \mathbb{P}, \quad (5.2)$$

com a extremidade (“tip”) do dedo $\gamma(t)$ sendo levada no ponto $a(t)$ no eixo real do plano w ; ver Fig. 5.1. g_t corresponde inicialmente ao mapa identidade

$$g_0 = z, \quad (5.3)$$

e além disso impomos a condição de normalização hidrodinâmica, que para a geometria do canal escreve-se na forma

$$g_t(z) = iC(t) + z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{Im}(z) \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

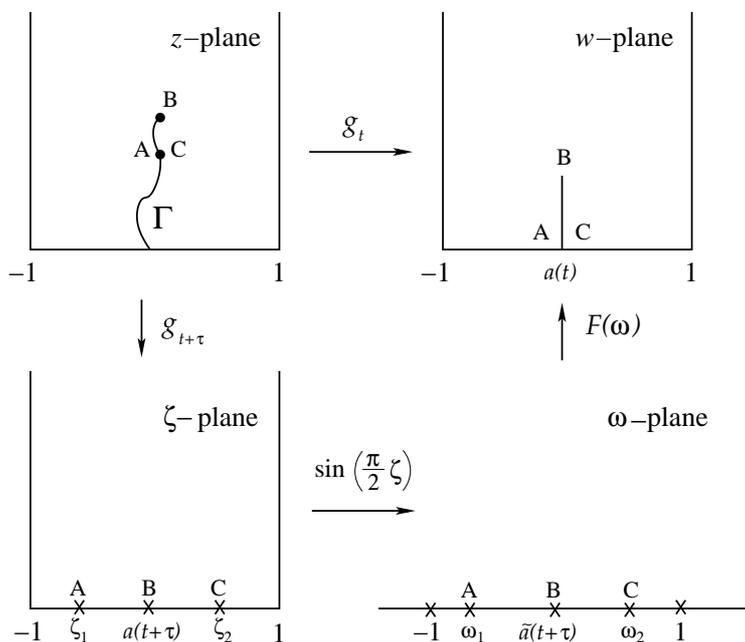


Figura 5.1 Sequência de mapas utilizados para mapear um dedo de largura infinitesimal na geometria do canal.

onde $C(t)$ é uma função de t que pode ser especificada posteriormente. Vale notar que no caso da geometria do semiplano superior nos Caps. 3 e 4, pudemos fazer $C(t) = 0$, sem perda de generalidade. Na geometria do canal, contudo, isso não pode ser mais feito em face da condição de contorno $\psi = \pm 1$ nas paredes laterais, que se prolongam até o infinito.

A dinâmica de crescimento do dedo no canal é a mesma que a do caso de dedos no semiplano superior, ou seja, a ponta do dedo cresce ao longo de linhas de gradiente, o que implica que a interface no plano w cresce ao longo de segmentos de reta verticais; ver o traço vertical no plano w mostrado na Fig. 5.1. Lembremos que, por definição, a função $g_{t+\tau}(z)$ transforma o plano físico no tempo $t + \tau$ no canal \mathbb{P} , com a nova ponta do dedo (ponto B na Fig. 5.1) sendo levada em $a(t + \tau)$, enquanto que os pontos C e A , correspondentes à posição anterior do dedo, são mapeados nos pontos $\zeta_{1,2} = a(t + \tau) \pm v$, respectivamente, onde v é uma quantidade infinitesimal relacionada com τ . A fim de deduzir a equação de Loewner para este caso precisamos de escrever $g_{t+\tau}$ em termos de g_t . Isto é feito em dois passos.

Primeiramente, aplicamos a seguinte transformação

$$\tilde{g}_{t+\tau} = \sin \frac{\pi}{2} g_{t+\tau}, \tag{5.5}$$

tal que o plano matemático no instante $t + \tau$ fica mapeado no semiplano superior em um plano complexo auxiliar ω como mostrado em Fig. 5.1. Em particular, nota-se que o ponto $a(t + \tau)$ no plano ω não está mais localizado simetricamente com respeito às imagens dos pontos ζ_1 e ζ_2 . Em outras palavras, sob a transformação (5.5) o ponto $a(t + \tau)$ é levado em

$$\tilde{a}(t + \tau) = \sin \frac{\pi}{2} a(t + \tau), \quad (5.6)$$

enquanto que os pontos ζ_1 e ζ_2 são levados nos pontos ω_1 e ω_2 respectivamente, dados por

$$\omega_{1,2} = \sin \frac{\pi}{2} [a(t + \tau) \mp v]. \quad (5.7)$$

O segundo passo consiste em introduzir a transformação $w = F(\omega)$, que leva o semiplano superior (plano w), no canal (plano ω) com um segmento de reta vertical; vide Fig.5.1. Nesse caso podemos escrever

$$g_t = F(\tilde{g}_{t+\tau}). \quad (5.8)$$

Como o domínio no plano w é um polígono degenerado, a função $F(\tilde{g}_{t+\tau})$ pode ser obtida a partir da transformação de Schwarz-Cristoffel. Nesse caso obtemos

$$g_t = F(\tilde{g}_{t+\tau}) = K \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{\omega - \tilde{a}(t + \tau)}{\sqrt{(\omega^2 - 1)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}} d\omega + a(t), \quad (5.9)$$

onde K é constante a ser determinada.

O valor de K é encontrado fazendo o limite $g_{t+\tau} \rightarrow i\infty$ no plano ζ , que implica $\tilde{g}_{t+\tau} \rightarrow \infty$ no plano ω , e usando a condição de que $g_t \approx g_{t+\tau}$. Para avaliar o limite $\tilde{g}_{t+\tau} \rightarrow \infty$ fazemos $\omega \rightarrow \infty$ na integral da Eq. (5.9), assim temos

$$g_t = K \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\omega} d\omega. \quad (5.10)$$

Integrando obtemos

$$g_t = K \ln \omega \Big|_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}}. \quad (5.11)$$

Substituindo $\tilde{g}_{t+\tau} = \sin \left(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau} \right)$ e tomando o limite $g_{t+\tau} \rightarrow i\infty$, temos

$$g_t = \lim_{g_{t+\tau} \rightarrow i\infty} K \ln \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Utilizando $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, na expressão acima, podemos escrever

$$g_t = \lim_{g_{t+\tau} \rightarrow i\infty} K \ln \left[\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}g_{t+\tau})} - e^{-i(\frac{\pi}{2}g_{t+\tau})}}{2i} \right], \quad (5.13)$$

ou seja

$$\begin{aligned} g_t &= \lim_{g_{t+\tau} \rightarrow i\infty} K \ln \left[e^{i(\frac{\pi}{2}g_{t+\tau})} \right], \\ &= -iK \frac{\pi}{2} g_{t+\tau}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

de onde encontramos

$$K = i \frac{2}{\pi}. \quad (5.15)$$

Para fazer as expansões necessárias para encontrar a equação de Loewner, re-escrevemos os últimos dois termos dentro do radical em (5.9) de forma mais conveniente

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = (\omega - \tilde{a})^2 + 4\varepsilon^2 [\tilde{a}\omega - 1 + \varepsilon^2], \quad (5.16)$$

onde

$$\varepsilon^2 = \sin^2 \left(\frac{\pi v}{4} \right). \quad (5.17)$$

Na expressão (5.16) omitimos o argumento de $\tilde{a}(t + \tau)$ por economia de notação, (para a dedução de (5.16), ver Apêndice C). Usando (5.15) e (5.9), podemos escrever a transformação de Schwarz-Christoffel dada na Eq. (5.9) como

$$g_t = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{\omega - \tilde{a}}{\sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{(\omega - \tilde{a})^2 + 4\varepsilon^2 [\tilde{a}\omega - 1 + \varepsilon^2]}} d\omega + a(t), \quad (5.18)$$

colocando em evidência $(\omega - \tilde{a})^2$ podemos escrever

$$g_t = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2 [\tilde{a}\omega - 1 + \varepsilon^2]}{(\omega - \tilde{a})^2}}} d\omega + a(t). \quad (5.19)$$

Definindo a quantidade x como

$$x = \frac{4\varepsilon^2 (\tilde{a}\omega - 1)}{(\omega - \tilde{a})^2}, \quad (5.20)$$

o integrando em (5.19) pode ser escrito como

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)}\sqrt{1+\frac{4\varepsilon^2\tilde{a}(\omega-1)}{(\omega-\tilde{a})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)}\sqrt{1+x}}. \quad (5.21)$$

Utilizando agora a expansão

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots \quad (5.22)$$

a integral em (5.19) fica como

$$g_t = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots \right) d\omega + a(t). \quad (5.23)$$

A expressão acima pode ser escrita como

$$g_t = \frac{2}{\pi} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3) + \tilde{a}(t), \quad (5.24)$$

onde

$$I_0 = J_0, \quad I_1 = -\frac{1}{2}J_1, \quad I_2 = \frac{3}{8}J_2, \quad I_3 = -\frac{15}{48}J_3 \quad (5.25)$$

e

$$J_n = (4\varepsilon^2)^n \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} \left[\frac{\tilde{a}\omega - 1}{(\omega - \tilde{a})^2} \right]^n d\omega. \quad (5.26)$$

As quatro integrais na Eq. (5.24), I_0 , I_1 , I_2 e I_3 , são mostradas explicitamente e resolvidas no Apêndice (C). Utilizando os resultados para $I_n; n = 0, 1, 2, 3$ encontrados no apêndice, podemos escrever para cada uma das integrais

$$I_0 = \frac{\pi}{2} g_{t+\tau} - \frac{\pi}{2} a(t+\tau) + 2\varepsilon, \quad (5.27)$$

$$I_1 = -2\varepsilon^2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)\right]} + \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)\right]} \varepsilon \right\}, \quad (5.28)$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5.29)$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{8}. \quad (5.30)$$

Substituindo os resultados das integrais mostradas em (5.30) temos para g_t

$$g_t = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} g_{t+\tau} - \frac{\pi}{2} a(t+\tau) - 2\varepsilon^2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau})}{\sin(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}) - \sin[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]} \right. \\ \left. + 2\varepsilon - \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\sin[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]}{\cos[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]} \varepsilon \right\} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} - \dots \right\} + a(t). \quad (5.31)$$

Colocando em evidência os termos em ε^2 e em ε , a equação acima torna-se

$$g_t = g_{t+\tau} - \frac{2}{\pi} (2\varepsilon^2) \left\{ \frac{\cos(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau})}{\sin(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}) - \sin[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]} + \frac{1 \sin[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]}{2 \cos[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]} \right\} \\ - \frac{2}{\pi} \varepsilon \left(2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots \right) + a(t) - a(t+\tau), \quad (5.32)$$

A série entre parênteses é da mesma forma que a encontrada para dedos de largura infinitesimal no semiplano, então podemos escrever

$$\left(2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots \right) = 2\sqrt{1-x} \Big|_{x=1}, \\ = 0. \quad (5.33)$$

Assim, a equação (5.32) reduz-se a

$$g_t = g_{t+\tau} + \frac{4\varepsilon^2}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau})}{\sin(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}) - \sin[\frac{\pi}{2} a(t+\tau)]} \\ - \frac{2\varepsilon^2}{\pi} \tan \left[\frac{\pi}{2} a(t+\tau) \right] - a(t+\tau) + a(t). \quad (5.34)$$

Analisando o mapa $F(w)$ próximo do ponto $\tilde{a}(t+\tau)$ podemos verificar que a altura h do corte vertical no plano w está relacionada ao parâmetro ε , através da relação

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} h, \quad (5.35)$$

de modo que tanto h quanto ε vão a zero quando $\tau \rightarrow 0$. Expandindo (5.34) até primeira ordem

em τ e fazendo o limite $\tau \rightarrow 0$, obtemos

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2} d(t) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} g_t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} g_t\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} a(t)\right]} + \dot{a} + \frac{\pi}{4} d(t) \tan \frac{\pi}{2} a(t), \quad (5.36)$$

onde

$$d(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h^2}{2\tau}. \quad (5.37)$$

Utilizando a condição de normalização hidrodinâmica, Eq. (5.4), segue que $Re[\dot{g}_t] \rightarrow 0$ quando $g_t \rightarrow \infty$. Usando essa condição e (5.36) encontramos para a dinâmica das singularidades $a(t)$ uma equação da forma

$$\dot{a} = -\frac{\pi}{4} d(t) \tan \frac{\pi}{2} a(t). \quad (5.38)$$

Isso implica que a equação de Loewner para uma curva crescendo na geometria do canal fica dada por

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2} d(t) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} g_t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} g_t\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} a(t)\right]}. \quad (5.39)$$

Seguindo os mesmos passos feitos acima, pode-se mostrar que a equação de Loewner para o caso de múltiplos dedos no canal é da forma

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} g_t\right) \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} g_t\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} a_i(t)\right]}, \quad (5.40)$$

onde n corresponde ao número de dedos, e as singularidades são dadas por

$$\dot{a}_j(t) = -\frac{\pi}{4} d_j \tan\left(\frac{\pi}{2} a_j\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} a_j(t)\right] \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_i(t)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} a_j(t)\right] - \sin\left[\frac{\pi}{2} a_i(t)\right]}, \quad (5.41)$$

Uma dedução da Eq. (5.39) foi feita em [26], via mapas iterados. Vale notar, que esse método não dá diretamente a equação para $\dot{a}(t)$, a qual tem de ser obtida fazendo os limites apropriados da equação de Loewner. A aproximação de Schwarz-Christoffel apresentada acima é mais direta, já que ela dá automaticamente a equação da evolução temporal para $a(t)$ sem necessidade de considerações adicionais.

Uma forma mais conveniente de escrever a equação de Loewner no canal, é dada em termos das variáveis transformadas

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t &= \sin\left(\frac{\pi}{2} g_t\right), \\ \tilde{a}_i(t) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} a_i(t)\right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

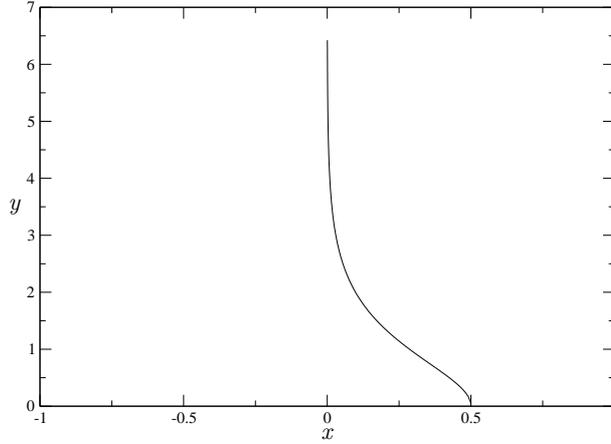


Figura 5.2 Dedo crescendo dentro da geometria do canal no plano físico z .

multiplicando aos dois lados de (5.39) por $\cos(\frac{\pi}{2}g_t)$, e substituindo $\cos^2(\frac{\pi}{2}g_t) = 1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}g_t)$ do lado direito, temos

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2}(1 - \tilde{g}_t^2) \frac{d(t)}{\tilde{g}_t - \tilde{a}}. \quad (5.43)$$

então para n curvas teremos

$$\dot{\tilde{g}}_t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \tilde{g}_t^2) \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{\tilde{g}_t - \tilde{a}_i}. \quad (5.44)$$

Para encontrar a evolução das singularidades em termos de $\tilde{a}_i(t)$, multiplicamos aos dois lados de (5.41) por $\cos[\frac{\pi}{2}a_i(t)]$, temos então

$$\dot{\tilde{a}}_i(t) = -\frac{\pi^2}{8} d_i \tilde{a}_i + \frac{\pi^2}{4} (1 - \tilde{a}_i^2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{d_j(t)}{\tilde{a}_i(t) - \tilde{a}_j(t)}, \quad (5.45)$$

5.2 Soluções Numéricas

Vamos mostrar a seguir soluções numéricas da equação de Loewner para o caso em que um, ou vários dedos crescem no canal.

5.2.1 Um dedo

A solução numérica da equação de Loewner para um dedo crescendo no canal é feita utilizando o mesmo procedimento descrito no Capítulo 2. Ou seja, vamos integrar a equação (5.39) para trás (no tempo) a partir da condição terminal $\tilde{g}_t = \tilde{a}(t)$. Para evitar a singularidade da eq. (5.39) na condição terminal, utilizamos a seguinte aproximação de primeira ordem

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \dot{\tilde{g}}_{t-\tau}, \quad (5.46)$$

de forma explícita, utilizando (5.39) temos

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 d(t) \frac{(1 - \tilde{g}_{t-\tau}^2)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}(t - \tau)} \quad (5.47)$$

de onde encontramos um polinômio quadrático em $\tilde{g}_{t-\tau}$, cuja raiz relevante é

$$g_{t-\tau} = -\frac{\tilde{a}(t - \tau) + \tilde{a}(t) + \sqrt{[\tilde{a}(t - \tau) + \tilde{a}(t)]^2 + 4c[\tilde{a}(t)\tilde{a}(t - \tau) + \frac{\pi^2}{4}\tau]}}{2c}, \quad (5.48)$$

onde

$$c = \frac{\pi^2}{4} d\tau - 1. \quad (5.49)$$

O valor encontrado na Eq. (5.48) corresponde à condição terminal de integração no instante t . Com essa condição, a equação de Loewner pode ser integrada para trás até o instante $t = 0$, obtendo-se assim o valor de g_0 , de onde obtemos a posição da extremidade do dedo no plano z : $\gamma(t) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(g_0)$.

O comportamento do dedo é de acordo com o visto em [26]. Este é repelido pelas paredes do canal, de maneira, que se ele inicia sua evolução desde a posição não simétrica $a(0) = -0,5$, o mesmo vai avançar em direção do centro do canal, como visto na solução numérica apresentada na Fig. 5.2. Depois de atingir $x = 0$ o dedo continua avançando verticalmente por conta da influência das paredes do canal.

5.2.2 Dois dedos

No procedimento mostrado a seguir, a raiz apropriada para integrar a equação de Loewner e produzir a trajetória do i -ésimo dedo, é encontrada fazendo $g_t = a_i(t)$ no polinômio de terceiro grau em $g_{t-\tau}$. Para obter o valor de $g_{t-\tau}$, a partir do qual podemos integrar para trás a equação

de Loewner no caso de dois dedos, utilizamos (5.40) e (5.46) com $n = 2$, assim temos

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \tilde{g}_{t-\tau}^2) \left[\frac{d_1(t)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_1(t-\tau)} + \frac{d_2(t)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_2(t-\tau)} \right], \quad (5.50)$$

de onde encontramos o seguinte polinômio cúbico em $\tilde{g}_{t-\tau}$,

$$\tilde{g}_{t-\tau}^3 + \mathfrak{b}(t)\tilde{g}_{t-\tau}^2 + \mathfrak{c}(t)\tilde{g}_{t-\tau} + \mathfrak{d}(t) = 0, \quad (5.51)$$

os coeficientes do polinômio são dados explicitamente no Apêndice 1. Utilizamos uma das raízes complexas do polinômio como condição terminal para integrar a equação de Loewner (5.40) até $t = 0$, para obter a posição da extremidade da curva $\gamma_i(t) = \frac{2}{\pi}\tilde{g}_0$.

No caso de dois dedos com fatores de crescimento iguais $d_1 = d_2 = 1,0$, observamos que os dedos crescem tendendo para posições simétricas dentro das metades esquerda e direita do canal. Ou seja, independentemente de suas posições iniciais, os dedos tenderão para as retas $x = \pm 0,5$, como visto nas Figuras 5.3 e 5.4. O efeito de blindagem que vimos nos capítulos 2 e 3 para o caso de dedos no semiplano, também pode ser observado quando os dedos crescem na geometria do canal com fatores de crescimento diferentes. Na Fig. 5.5, fizemos $d_1 = 1,0$ e $d_2 = 0,5$ para os dedos da esquerda e da direita, respectivamente. Contudo, o efeito de blindagem não é tão forte porque as paredes do canal “empurram” o dedo da direita, compensando de alguma forma o fato de que o dedo da esquerda cresça com maior rapidez.

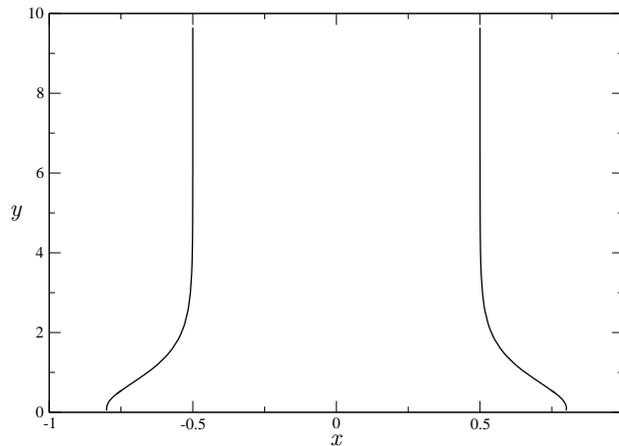


Figura 5.3 Dois dedos crescendo dentro da geometria do canal no plano físico z com os mesmos fatores de crescimento $d(t) = 1,0$. As condições iniciais das singularidades correspondem a $a_1(0) = -0,8$ e $a_2(0) = 0,8$.

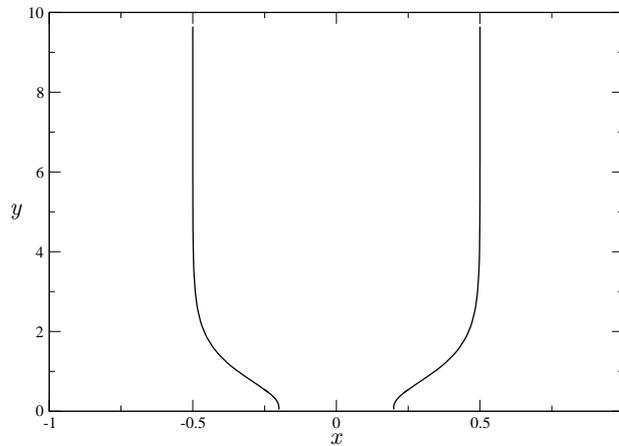


Figura 5.4 Dois dedos crescendo dentro da geometria do canal no plano físico z com os mesmos fatores de crescimento $d(t) = 1,0$. As condições iniciais das singularidades correspondem a $a_1(0) = -0,2$ e $a_2(0) = 0,2$.

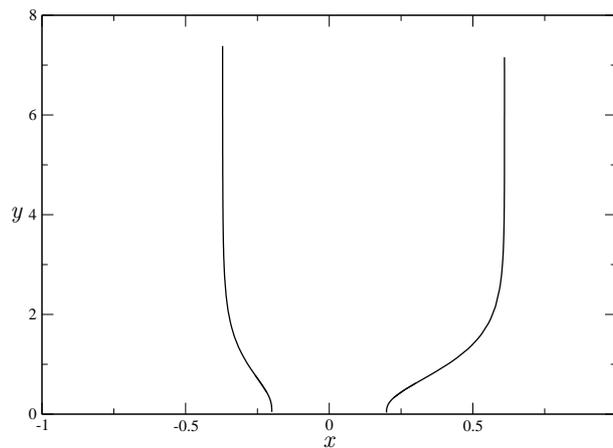


Figura 5.5 Dois dedos com fatores de crescimento diferentes $d_1 = 1,0$ e $d_2 = 0,5$. As condições iniciais das singularidades correspondem a $a_1(0) = -0,2$ e $a_2(0) = 0,2$. Tempo de integração $t = 3,0$

5.2.3 Três dedos

De forma similar ao caso de dois dedos, a raiz apropriada para integrar a equação de Loewner e produzir a trajetória do i -ésimo dedo, é encontrada fazendo $g_t = a_i(t)$ no polinômio de quarto grau em $g_{t-\tau}$. Assim, para resolver numericamente a equação de Loewner no caso de três dedos, substituímos a Eq. (5.40) (com $n = 3$ e avaliando \dot{g}_t em $t - \tau$) na Eq. (5.46) para

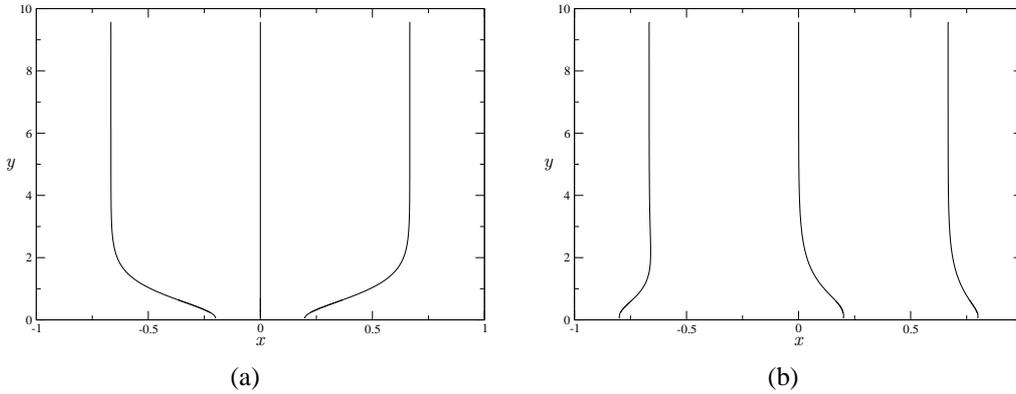


Figura 5.6 Três dedos crescendo na geometria do canal no plano físico z , com os mesmos fatores de crescimento $d(t) = 1, 0$. (a) $a_1(0) = -0,2$, $a_2(0) = 0,0$ e $a_3(0) = 0,2$. (b) $a_1(0) = -0,8$, $a_2(0) = 0,2$ e $a_3(0) = 0,8$. A equação de Loewner foi integrada até $t = 2,0$.

obter explicitamente

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (1 - \tilde{g}_{t-\tau}^2) \left[\frac{d_1(t)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_1(t-\tau)} + \frac{d_2(t)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_2(t-\tau)} + \frac{d_3(t)}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_3(t-\tau)} \right], \quad (5.52)$$

de onde é fácil encontrar o seguinte polinômio de quarto grau em $\tilde{g}_{t-\tau}$

$$\tilde{g}_{t-\tau}^4 + \mathfrak{b}(t)\tilde{g}_{t-\tau}^3 + \mathfrak{c}(t)\tilde{g}_{t-\tau}^2 + \mathfrak{d}(t)\tilde{g}_{t-\tau} + \mathfrak{e}(t) = 0, \quad (5.53)$$

cujos coeficientes de forma explícita são dados no Apêndice B.1. Tipicamente, esse polinômio gera duas raízes reais e duas complexas conjugadas. Utilizamos uma das raízes complexas como condição terminal de integração na equação de Loewner e seguimos o mesmo procedimento que foi feito anteriormente para encontrar a trajetória dos dedos. A seguir, mostramos alguns exemplos para esse caso. Iniciamos com a situação mais simples: os dedos possuem condições iniciais simétricas e fatores de crescimento iguais $d_i = d = 1, 0$. Nas Figuras 5.6a e 5.6b, as condições iniciais são $a_1(0) = -0,2$, $a_2(0) = 0,0$, $a_3(0) = 0,2$ e $a_1(0) = -0,8$, $a_2(0) = 0,2$, $a_3(0) = 0,8$ respectivamente. O tempo de integração foi $t = 2,0$. Podemos observar que o dedo do meio, independentemente de sua posição inicial ocupará o centro do canal para tempos longos. O mesmo ocorre com os dedos dos flancos, eles crescerão ao longo das linhas assintóticas localizadas em $x = \mp 0,66$, paralelas às paredes do canal, tal que a posição das retas assintóticas não depende das condições iniciais das funções $a_i(t)$, mas sim dos fatores de crescimento $d_i(t)$ de cada dedo.

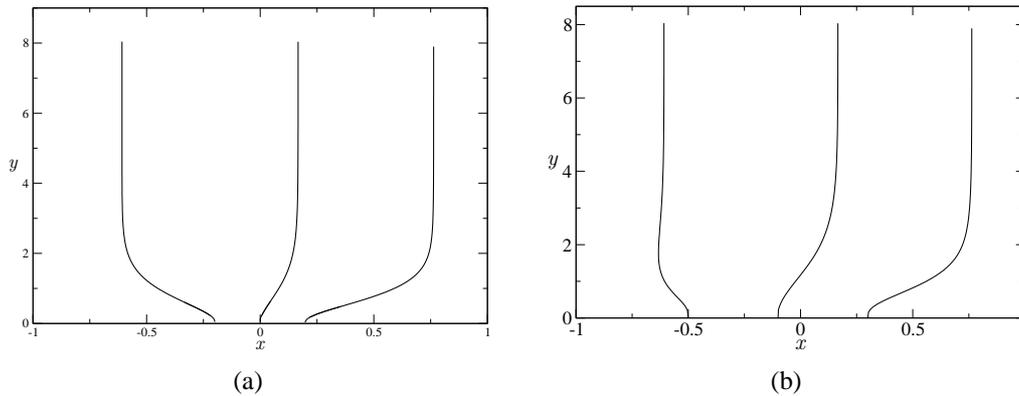


Figura 5.7 a) Três dedos crescendo na geometria do canal no plano físico z , com fatores de crescimento diferentes $d_1 = 1,0$, $d_2 = 1,0$ e $d_3 = 0,5$. As condições iniciais das singularidades correspondem a $a_1(0) = -0,2$, $a_2(0) = 0,0$ e $a_3(0) = 0,2$. b) Três dedos com os mesmos fatores de crescimento da figura em (a), mas com condições iniciais diferentes em $a_1(0) = -0,5$, $a_2(0) = -0,1$ e $a_3(0) = 0,3$.

Também podemos ver que o efeito de blindagem está presente quando temos três dedos no canal com fatores de crescimento distintos. Na Fig. 5.7(a) utilizamos $a_1(0) = -0,2$, $a_2(0) = 0,0$ e $a_3(0) = 0,2$ e $d_1 = 1,0$, $d_2 = 1,0$ e $d_3 = 0,5$. Devido ao fato de que o dedo da direita tem o menor fator de crescimento, ele fica um pouco recuado para tempos longos em relação aos demais. Vale notar que os dedos convergem para linhas retas, cujas posições determinadas unicamente pelos fatores de crescimento, ou seja que para quaisquer condições iniciais os dedos convergiram para as mesmas retas, como mostrado na Fig. 5.7(b).

Crescimento de uma interface no canal

Neste capítulo faremos uma extensão da equação de Loewner para estudar o crescimento de interfaces na geometria do canal e deduziremos uma equação para a evolução temporal da função g_t , de forma similar ao que foi feito para o caso de interfaces no semiplano superior. Veremos que o crescimento das interfaces naturalmente será influenciado pela geometria do canal.

6.1 Equação de Loewner para uma interface no canal

Nesta seção vamos considerar o problema de uma interface com uma única crista crescendo na geometria do canal. Nas seções seguintes veremos o caso generalizado de uma interface com mais de uma crista, bem como o caso de múltiplas interfaces no canal.

6.1.1 Dedução da equação de Loewner

Consideramos uma interface que cresce a partir do segmento $[z_1, z_2] \subset (-1, 1)$ no eixo real no plano z , e avança na região superior do canal, como ilustrado na Fig. 6.1. O domínio definido pela geometria do canal é dado por

$$\mathbb{P} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0, x \in]-1, 1[\}. \quad (6.1)$$

Supomos que a interface tem um ponto especial, a crista (ou “tip”), onde a taxa de crescimento é máxima, enquanto que os pontos em que a interface faz contato com o eixo real, z_1 e z_2 , permanecem fixos. A interface descrita acima é da forma mostrada na Fig. 6.1. Utilizamos Γ_t para denotar a interface no instante t e K_t para a região delimitada por Γ_t e o eixo real. Consideramos que Γ_t é tal que o domínio $D_t = \mathbb{P} \setminus K_t$ seja simplesmente conexo.

As condições de contorno para a interface em termos do potencial ϕ são: $\phi = 0$ na parede de baixo do canal $y = 0$ e ao longo da interface Γ_t ; $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ nas paredes laterais $x = \pm 1$, e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$ no infinito, correspondendo ao campo uniforme no infinito; ver Fig. 6.1. Note que a condição

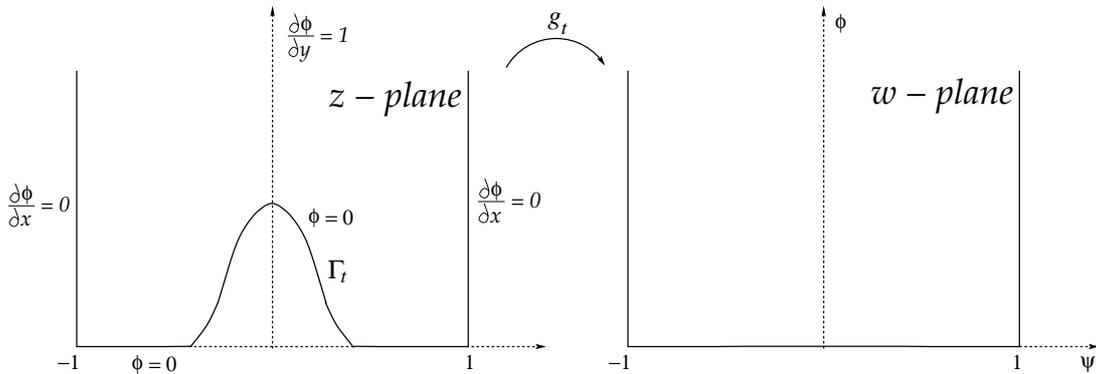


Figura 6.1 Condições de contorno e ação da transformação g_t para uma interface no canal.

de contorno nas paredes do canal pode ser mais convenientemente escrita em termos da função de corrente ψ , a saber: $\psi = \pm 1$ em $x = \pm 1$, implicando naturalmente que as paredes são linhas de corrente. Isso significa que se considerarmos o potencial complexo $w = \psi + i\phi$, então o domínio de interesse no plano w é exatamente a região \mathbb{P} correspondendo à parte superior do canal (no plano w).

Vamos considerar portanto a transformação conforme, $w = g_t(z)$, que leva o domínio do canal, no plano z , sem a região entre a curva Γ_t e o eixo real, no domínio do canal \mathbb{P} no plano w , ou seja

$$g_t : \mathbb{P} \setminus \Gamma(t) \longrightarrow \mathbb{P}. \quad (6.2)$$

De forma similar ao caso da interface no semiplano, os pontos $x = \pm 1$ devem permanecer fixos, ou em termos do mapa g_t fica

$$\lim_{z \rightarrow -1} [g_t(z) + 1] = \lim_{z \rightarrow 1} [g_t(z) - 1] = 0. \quad (6.3)$$

Além disso, considera-se que g_t mantém fixo o ponto no infinito, exceto por uma constante aditiva, ou seja

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) = z + iC(t), \quad (6.4)$$

onde C_t é uma função do tempo a ser determinada posteriormente. As condições acima definem a transformação conforme $w = g_t$ entre os planos z e w ; vide Fig. 6.2.

A dedução da equação de Loewner será análoga à do caso da interface no semiplano. O plano físico z e os planos matemáticos w e ζ nos instantes t e $t + \tau$, respectivamente são mostrados na parte superior da Fig. 6.2. Da Fig. 6.2 vemos que o mapa g_t transforma o domínio \mathbb{P} no domínio w como segue. Sob a aplicação de g_t a interface no instante t , denotada por Γ_t e

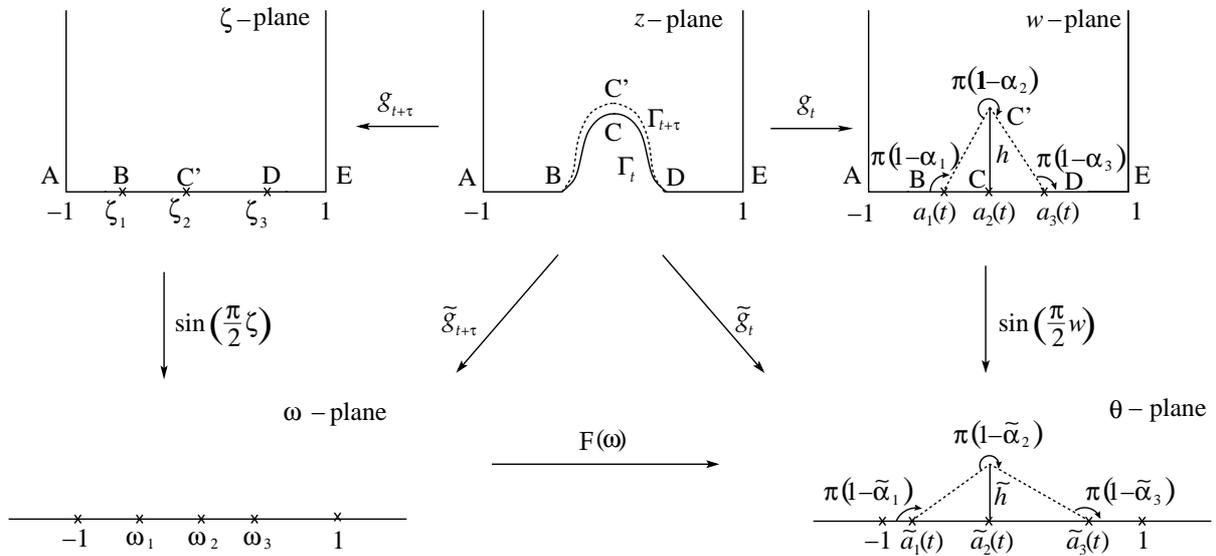


Figura 6.2 Planos físico e matemático para uma interface crescendo na geometria do canal. A função $g_t(z)$ leva a interface Γ_t para um segmento no eixo real, enquanto que a interface $\Gamma_{t+\tau}$ é levada no triângulo (linha tracejada).

representada pela curva BCD , é levada no segmento de reta \overline{BCD} sobre o eixo real, no intervalo $[a_1(t), a_3(t)]$. Os pontos $z = -1$ e $z = 1$ permanecem fixos, ou seja, são levados em $w = -1$ e $w = 1$, respectivamente. A dinâmica de crescimento é definida especificando que a crista da interface cresça ao longo de linhas de gradiente, enquanto que os pontos $z = \pm 1$ permanecem fixos. De forma similar, a aplicação de $g_{t+\tau}$ no instante $t + \tau$ leva a interface $\Gamma_{t+\tau}$, no plano z , na curva poligonal (linha tracejada) no plano matemático w .

Os ângulos externos de cada vértice da curva poligonal no plano w são denotados por $\pi(1 - \alpha_i)$, com a convenção de que se o ângulo for maior que π , então o correspondente parâmetro α_i é negativo. Os parâmetros do polígono satisfazem as mesmas relações (4.7) e (4.21) válidas para curvas poligonais no semiplano, ou seja,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad (6.5)$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0. \quad (6.6)$$

Utilizando as equações (6.5) e (6.6), podemos, tal como antes, exprimir α_1 e α_3 em termos de α_2 :

$$\alpha_1 = -\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \alpha_2, \quad \alpha_3 = -\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \alpha_2. \quad (6.7)$$

Agora, como feito para o caso de dedos de largura infinitesimal no canal, aplicamos a transformação $w = \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)$ para levar o canal, no plano matemático ζ , no semiplano superior do plano complexo auxiliar ω , tal que os pontos $a_i(t + \tau)$ são levados em

$$\tilde{a}_i(t + \tau) = \sin\left[\frac{\pi}{2}a_i(t + \tau)\right], \quad (6.8)$$

como mostrado na Fig. 6.2. Neste ponto, é conveniente também fazer a transformação do plano matemático w no semiplano superior, de um plano auxiliar θ , através da seguinte transformação

$$\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}w\right), \quad (6.9)$$

como ilustrado na Fig. 6.2. Com essa transformação os pontos $a_i(t)$ são levados em

$$\tilde{a}_i(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}a_i(t)\right], \quad (6.10)$$

e o triângulo é transformado (no limite $\tau \rightarrow 0$) em um triângulo no plano θ , cuja altura \tilde{h} , infinitesimal é encontrada a partir de

$$\tilde{a}_i + i\tilde{h} = \sin\left[\frac{\pi}{2}(a_2(t) + ih)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}a_2(t)\right] + i\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}a_2(t)\right]h, \quad (6.11)$$

de maneira que \tilde{h} é dado por

$$\tilde{h} = \frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}a_2(t)\right]h. \quad (6.12)$$

Vamos denotar os ângulos externos do triângulo no plano θ por $\pi(1 - \tilde{\alpha}_i)$; ver Fig. 6.2. Os parâmetros $\tilde{\alpha}_i$ satisfazem as mesmas relações válidas para os parâmetros α_i no plano w , ou seja,

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i = 0, \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{a}_i \tilde{\alpha}_i = 0. \quad (6.14)$$

A seguir, consideramos a transformação, $\theta = F(w)$, que leva o semiplano superior do plano w no semiplano superior do plano θ sem a região delimitada pelo triângulo, como mostrado na Fig. 6.2. Se introduzirmos a seguinte notação

$$\tilde{g}_t(z) = \sin\left[\frac{\pi}{2}g_t(z)\right], \quad (6.15)$$

$$\tilde{g}_{t+\tau}(z) = \sin \left[\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}(z) \right], \quad (6.16)$$

então temos que é possível relacionar as funções \tilde{g}_t e $\tilde{g}_{t+\tau}$ através da transformação F , ou seja,

$$\tilde{g}_t = F(\tilde{g}_{t+\tau}). \quad (6.17)$$

Já que o domínio no plano θ tem uma forma poligonal, o mapa $F(w)$ pode ser obtido através da transformação de Schwarz-Christoffel. Nesse caso obtemos

$$\tilde{g}_t = F(\tilde{g}_{t+\tau}) = K \int^{\tilde{g}_{t+\tau}} \prod_{i=1}^3 [\zeta - \tilde{a}_i(t + \tau)]^{-\tilde{\alpha}_i} d\zeta + C, \quad (6.18)$$

onde as constantes K e C são determinadas para garantir que $F(\pm 1) = \pm 1$. A integral em (6.18) representa a respectiva integral indefinida expressa em termos da variável $\tilde{g}_{t+\tau}$. Se introduzimos a notação

$$\varphi(\zeta) = \int^{\zeta} \prod_{i=1}^3 [\zeta - \tilde{a}_i(t + \tau)]^{-\tilde{\alpha}_i} d\zeta, \quad (6.19)$$

para denotar essa integral indefinida temos então

$$\tilde{g}_t = K\varphi(\tilde{g}_{t+\tau}) + C, \quad (6.20)$$

onde as constantes K e C são dadas por

$$K = \frac{2}{\varphi(1) - \varphi(-1)}, \quad C = -\frac{\varphi(1) + \varphi(-1)}{\varphi(1) - \varphi(-1)}. \quad (6.21)$$

A integral em (6.19) pode ser calculada explicitamente em termos das funções hipergeométricas. Entretanto, para nossos propósitos é mais conveniente expandir o integrando na Eq. (6.19) em potências das quantidades infinitesimais $\tilde{\alpha}_i$ e depois fazer as respectivas integrações. Para expandir o integrando na Eq. (6.19) até primeira ordem em $\tilde{\alpha}_i$ fazemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 [\zeta - \tilde{a}_i(t + \tau)]^{-\tilde{\alpha}_i} &= \prod_{i=1}^3 e^{-\tilde{\alpha}_i \ln[\zeta - \tilde{a}_i(t + \tau)]} \\ &= \prod_{i=1}^3 \{1 - \tilde{\alpha}_i \ln[\zeta - \tilde{a}_i(t + \tau)] + O(\tilde{\alpha}_i^2)\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Fazendo o produtório para os três termos e substituindo a expansão acima na integral (6.19)

temos

$$\varphi(\zeta) = \int^{\zeta} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \ln[\zeta - \tilde{\alpha}_i(t + \tau)] + O(\tilde{\alpha}^2) \right\} d\zeta, \quad (6.23)$$

que depois de integrar torna-se

$$\varphi(\zeta) = \zeta - \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \{ [\zeta - \tilde{\alpha}_i(t + \tau)] \ln[\zeta - \tilde{\alpha}_i(t + \tau)] - \zeta \}. \quad (6.24)$$

Utilizando (6.14), vemos que zera o último termo da expressão entre colchetes, resultando

$$\varphi(\zeta) = \zeta - \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i [\zeta - \tilde{\alpha}_i(t + \tau)] \ln[\zeta - \tilde{\alpha}_i(t + \tau)]. \quad (6.25)$$

Para encontrar o mapa \tilde{g}_t substituímos as equações (6.25) e (6.21) em (6.20), assim temos

$$\tilde{g}_t = \frac{2\varphi(\tilde{g}_{t+\tau}) - [\varphi(1) + \varphi(-1)]}{\varphi(1) - \varphi(-1)}, \quad (6.26)$$

onde

$$\varphi(1) = 1 - \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i(t) [1 - \tilde{a}_i(t + \tau)] \ln[1 - \tilde{a}_i(t + \tau)], \quad (6.27)$$

$$\varphi(-1) = -1 + \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i(t) [1 + \tilde{a}_i(t + \tau)] \ln[1 + \tilde{a}_i(t + \tau)], \quad (6.28)$$

sendo que para obter (6.28) utilizamos (6.14) para cancelar os termos imaginários. Reescrevendo (6.26), temos

$$\varphi(g_{t+\tau}) = \frac{1}{2} \tilde{g}_t [\varphi(1) - \varphi(-1)] + \frac{1}{2} [\varphi(1) + \varphi(-1)], \quad (6.29)$$

agora, expandindo $\tilde{g}_{t+\tau}$ até primeira ordem em τ , $\tilde{g}_{t+\tau} + \tau \dot{\tilde{g}}_t$, e mantendo no lado esquerdo de (6.29) apenas termos em primeira ordem nas quantidades τ e α_i , obtemos, após algumas simplificações, a seguinte equação de Loewner generalizada para a geometria do canal

$$\dot{\tilde{g}}_t(z) = \sum_{i=1}^3 \tilde{d}_i(t) \{ [\tilde{g}_t - \tilde{a}_i(t)] \ln[\tilde{g}_t - \tilde{a}_i(t)] - A_i(t) \tilde{g}_t + B_i(t) \}, \quad (6.30)$$

onde as funções $A_i(t)$ e $B_i(t)$ são definidas como

$$A_i(t) = \frac{1}{2} \{ [1 + \tilde{a}_i(t)] \ln[1 + \tilde{a}_i(t)] + [1 - \tilde{a}_i(t)] \ln[1 - \tilde{a}_i(t)] \}, \quad (6.31)$$

$$B_i(t) = \frac{1}{2} \{ [1 + \tilde{a}_i(t)] \ln[1 + \tilde{a}_i(t)] - [1 - \tilde{a}_i(t)] \ln[1 - \tilde{a}_i(t)] \}, \quad (6.32)$$

e os fatores de crescimento no plano auxiliar θ são dados por

$$\tilde{d}_i(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tau}. \quad (6.33)$$

Para especificar completamente a dinâmica de Loewner precisamos determinar a evolução temporal das funções $\tilde{a}_i(t)$. Para isso, fazemos que os pontos $\tilde{a}_i(t + \tau)$, sejam levados nos pontos $\tilde{a}_i(t)$ sob a ação do mapa $\tilde{g}_t = F(\tilde{g}_{t+\tau})$, ou seja

$$\tilde{a}_i(t) = K\varphi[\tilde{a}_i(t + \tau)] + C. \quad (6.34)$$

Comparando a equação acima com a Eq. (6.20), vemos que, seguindo o mesmo procedimento mostrado acima, as equações que governam a dinâmica das funções $\tilde{a}_i(t)$ podem ser obtidas simplesmente fazendo-se $\tilde{g}_t = \tilde{a}_i(t)$ na equação de Loewner (6.30). Temos então

$$\dot{\tilde{a}}_i = \sum_{j=1}^3 \tilde{d}_j(t) \{ [\tilde{a}_i(t) - \tilde{a}_j(t)] \ln |\tilde{a}_i(t) - \tilde{a}_j(t)| - A_j(t) \tilde{a}_i + B_j(t) \}. \quad (6.35)$$

Utilizando a transformação (6.15) é fácil converter a equação de Loewner dada em (6.30), em termos de \tilde{g}_t , para a equação de Loewner em termos da função g_t . De forma similar, da Eq. (6.35) obtem-se a evolução das funções $a_i(t)$. Entretanto, não daremos essas expressões aqui, uma vez que, como veremos adiante, é preferível integrar a equação de Loewner em termos da função \tilde{g}_t e depois invertermos a transformação para obter $g_t(z)$.

Vamos definir agora os fatores de crescimento no plano matemático original w :

$$d_i(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha_i}{\tau}. \quad (6.36)$$

Utilizando a forma de \tilde{h} mostrada em (6.12) podemos relacionar os fatores de crescimento $\tilde{d}_i(t)$ e $d_i(t)$ da seguinte forma

$$\tilde{d}_1 = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_2\right) \frac{a_2 - a_1}{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1} d_1, \quad (6.37)$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_2\right) \frac{(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}{(a_3 - a_1)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2)} d_2, \quad (6.38)$$

$$\tilde{d}_3 = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_2\right) \frac{a_3 - a_2}{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2} d_3, \quad (6.39)$$

onde os fatores de crescimento d_1 e d_3 podem ser expressos em função de d_2 a partir da

Eq. (6.7), resultando

$$d_1(t) = -\frac{a_3(t) - a_2(t)}{a_3(t) - a_1(t)}d_2(t), \quad d_3(t) = -\frac{a_2(t) - a_1(t)}{a_3(t) - a_1(t)}d_2(t). \quad (6.40)$$

Vê-se assim que a evolução de Loewner descrita por (6.30) e (6.35) é completamente especificada dando-se as condições iniciais $a_i(0)$ e o fator de crescimento $d_2(t)$, da crista. Para uma interface com somente uma crista, podemos fazer $d_2(t) = -1$ sem perda de generalidade, porque essa quantidade está relacionada unicamente com um reescalamiento do tempo sem alterar de nenhuma maneira sua dinâmica. Vale lembrar que de acordo com nossa convenção os fatores de crescimento das cristas são negativos. A seguir, estudaremos soluções da equação de Loewner para alguns casos específicos utilizando as Equações (6.30) e (6.35).

6.1.2 Interface simétrica

Nesta subseção consideramos uma interface simétrica com respeito à linha vertical no centro do canal. Nesse caso, tem-se $a_2(t) = 0$ e $a_3(t) = -a_1(t) = a(t)$, com equações similares para as quantidades com: $\tilde{a}_2(t) = 0$ e $\tilde{a}_3(t) = -\tilde{a}_1(t) = \tilde{a}(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}a(t)\right]$. Em face dessa simetria temos ainda $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_3 = -\tilde{d}_2/2$. Denotando o fator de crescimento por $d(t) = |\tilde{d}_2(t)|$, a equação de Loewner (6.30) fica da forma

$$\dot{\tilde{g}}_t = \frac{1}{2}\tilde{d}(t)\{[\tilde{g}_t - \tilde{a}(t)]\ln[\tilde{g}_t - \tilde{a}(t)] + [\tilde{g}_t + \tilde{a}(t)]\ln[\tilde{g}_t + \tilde{a}(t)] - 2\tilde{g}_t \ln \tilde{g}_t - A_s(t)\tilde{g}_t\}, \quad (6.41)$$

onde

$$A_s(t) = [1 + \tilde{a}(t)]\ln[1 + \tilde{a}(t)] + [1 - \tilde{a}(t)]\ln[1 - \tilde{a}(t)], \quad (6.42)$$

com a dinâmica de $\tilde{a}(t)$ dada por

$$\dot{\tilde{a}}(t) = \tilde{d}(t)[2\ln(2)\tilde{a} - A_s\tilde{a}]. \quad (6.43)$$

Nesse caso, o parâmetro \tilde{d} é dado em termos do fator $d = |d_2|$ por

$$\tilde{d}(t) = \frac{\pi}{2} \tan\left[\frac{\pi}{2}a(t)\right]d(t), \quad (6.44)$$

como se segue da Eq. (6.38).

Um exemplo de uma interface simétrica no canal é mostrada na Fig. 6.3a. Nessa figura, as curvas mostram as interfaces para vários valores de t , a partir de $t = 0,5$ até $t = 1,7$ com uma separação de $\Delta t = 0,3$ entre curvas consecutivas. Para gerar as curvas na Fig. 6.3a in-

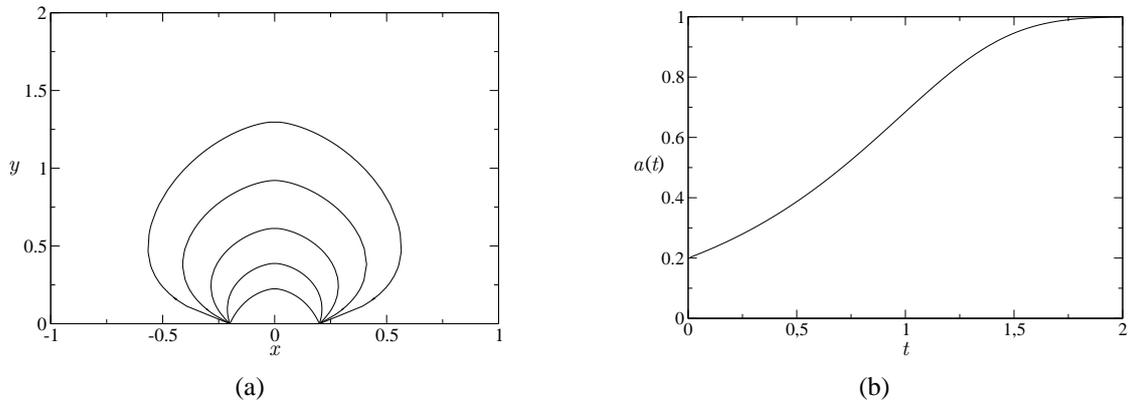


Figura 6.3 (a) Evolução de Loewner para uma interface simétrica crescendo na geometria do canal. As linhas mostram a interface para vários instantes de t a partir de $t = 0,5$ até $t = 2,0$ com uma separação temporal $\Delta t = 0,3$ entre interfaces sucessivas. (b) Evolução temporal da função $a(t)$ correspondendo à situação mostrada em (a).

tegramos a equação de Loewner (6.41) para trás no tempo a partir da condição $\tilde{g}_t = \tilde{w}$, para $\tilde{w} \in [-a(t), a(t)]$, a fim de obter os valores iniciais \tilde{g}_0 dos quais determinamos os pontos z , que correspondem à interface: $z = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\tilde{g}_0)$. Da figura, vemos que com o passar do tempo a interface se expande e tende a ocupar o canal completo. Vale a pena mencionar que a integração da equação de Loewner para além do último instante de tempo mostrado na Fig. 6.3(a), é muito difícil porque a função $a(t)$ toma valores muito próximos da unidade como se pode ver da Fig. 6.3b, criando uma divergência no termo $A_i(t)$ mostrado em (6.42).

6.1.3 Interface assimétrica

Agora estudamos uma situação na qual partimos de uma condição inicial assimétrica. Nesse caso fixamos $a_1(0)$ e $a_3(0)$ em posições simétricas, mas deslocamos a crista da interface do centro do canal, ou seja $a_2(0) \neq 0$. Na Fig. 6.4a mostramos um exemplo dessa situação com $a_3(0) = -a_1(0) = 0,2$ e $a_2(0) = -0,1$. Como visto na Fig. 6.4a a crista interface dirige-se inicialmente para a parede esquerda do canal, dando a impressão de que a assimetria inicial persistirá para qualquer tempo. Entretanto, para tempos muito longos é de se esperar que a crista tenda para o eixo y , resultando em uma interface assintoticamente simétrica. Contudo, é muito difícil prosseguir com a integração numérica da equação de Loewner para tempos maiores que os mostrados na Fig. 6.4a, uma vez que para os tempos finais mostrados nessa figura a função $a_1(t)$ já se torna muito próxima de -1 , como pode ser visto na Fig. 6.4b. Outra

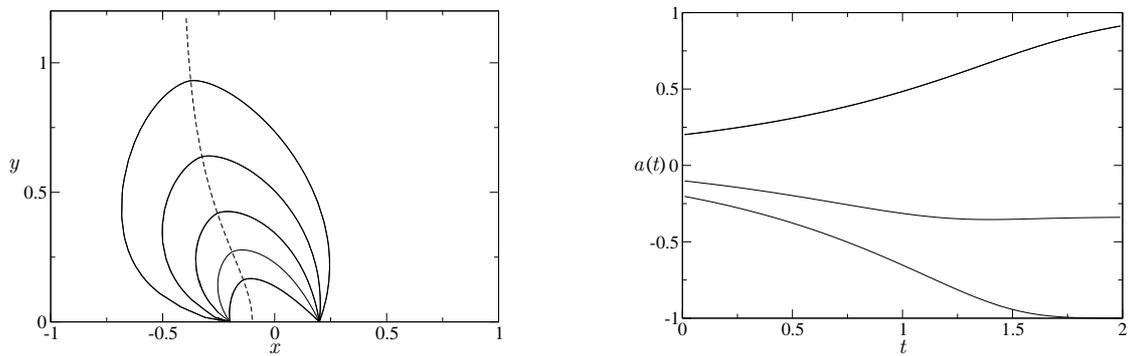


Figura 6.4 (a) Evolução de Loewner para uma interface assimétrica na geometria do canal para vários valores de t , a partir de $t = 0,5$ até $t = 1,7$ com um intervalo de $\Delta t = 0,3$ entre curvas consecutivas. A linha tracejada corresponde à trajetória da crista da interface. (b) Evolução temporal das funções $a_1(t)$, $a_2(t)$ e $a_3(t)$ correspondentes à situação mostrada em (a).

maneira de gerar uma interface assimétrica é mostrada na Fig. 6.5a, onde a posição inicial da interface foi deslocada para o lado direito do canal, correspondendo a $a_1(0) = 0,3$, $a_2(0) = 0,5$ e $a_3(0) = 0,7$, de maneira que a crista está inicialmente em uma posição simétrica com respeito a $a_1(0)$ e $a_3(0)$. Observe na Fig. 6.3a a tendência da crista a convergir para o eixo central do canal, indicando que para tempos longos devemos ter uma interface assintoticamente simétrica como no caso anterior. Contudo, pela mesma razão discutida acima é difícil integrar a equação

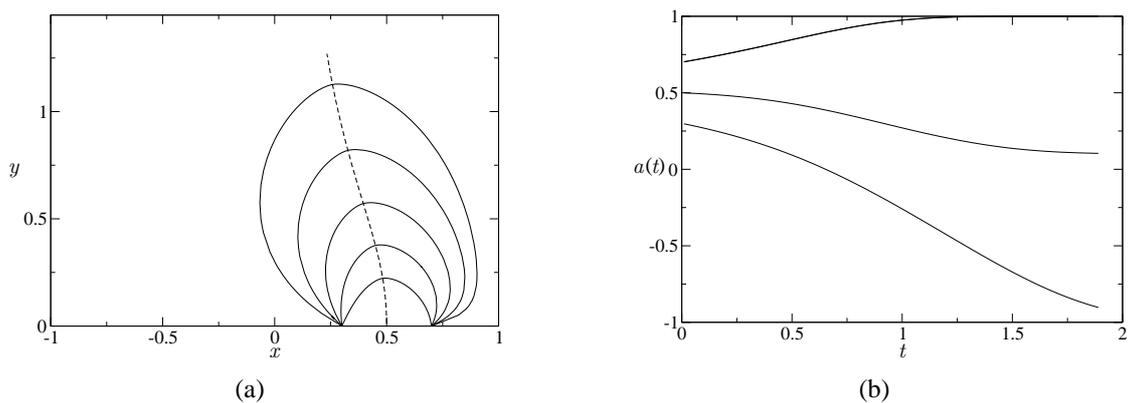


Figura 6.5 (a) Evolução de Loewner para uma interface assimétrica na geometria do canal. As curvas mostram a interface para vários valores de t , a partir de $t = 0,5$ até $t = 1,7$ com um intervalo de $\Delta t = 0,3$ entre curvas consecutivas. A linha tracejada mostra a trajetória da crista da interface. (b) Evolução temporal das funções $a_1(t)$, $a_2(t)$ e $a_3(t)$ correspondentes à situação mostrada em (a).

de Loewner para tempos longos; vide Fig. 6.5b.

6.2 Interface com múltiplas cristas

6.2.1 Formulação do problema

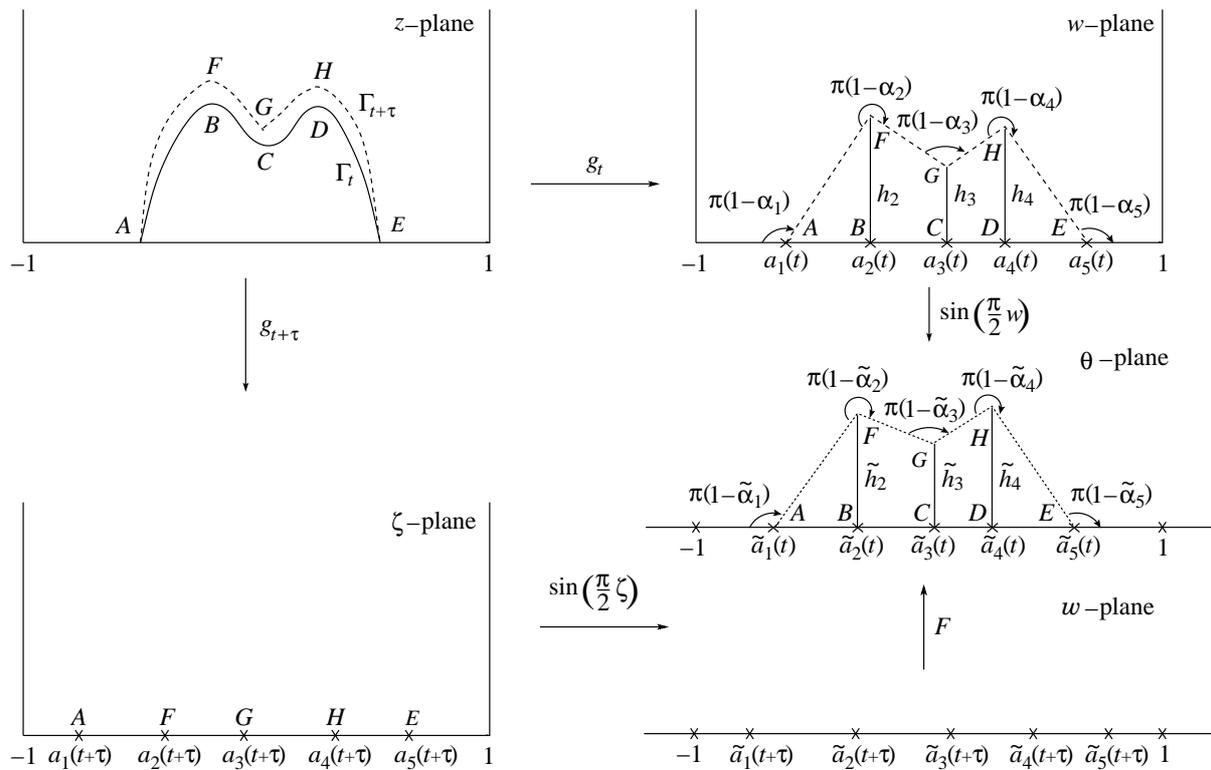


Figura 6.6 Planos físico e matemático para uma interface com múltiplas cristas na geometria do canal, ver o texto para detalhes.

O formalismo desenvolvido na seção anterior para o caso de uma interface com somente uma crista, pode ser facilmente estendido para uma situação mais geral, na qual a interface tem múltiplas cristas, como ilustrado na Fig 6.6. Nesse caso consideramos que o fator de crescimento é um máximo local nas cristas (pontos B e D na Fig. 6.6), e um mínimo local em certos pontos, chamados *vales*, entre duas cristas consecutivas (veja por exemplo o ponto C na Fig. 6.6). Como antes, os pontos extremos da interface $z = \pm 1$ permanecem fixos, e as imagens das cristas sob a transformação $w = g_t(z)$ são denotadas por $a_i(t)$, com $i = 1, 2, \dots, N$, onde N

é o número total de cristas, vales e pontos extremos.

A dinâmica de crescimento é especificada requerendo que as cristas e os vales cresçam ao longo de linhas de gradiente, de tal forma que a interface $\Gamma_{t+\tau}$ no tempo $t + \tau$, para um instante infinitesimal τ , seja levada sob a ação de $g_t(z)$ em uma curva poligonal no plano w , como mostrado na Fig. 6.6. Da mesma forma que na seção anterior, o ângulo externo do i -ésimo vértice da curva poligonal é denotado por $\pi(1 - \alpha_i)$, com a convenção de que para ângulos maiores que π , o correspondente parâmetro α_i seja negativo. Ou, de forma mais específica, os parâmetros α_i são negativos para cristas e positivos para os vales.

Os parâmetros α_i satisfazem relações similares às das Equações (6.13) e (6.14), para um número N de vértices, ou seja

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad (6.45)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i \alpha_i = 0. \quad (6.46)$$

Relações análogas a (6.45) e (6.46) também são válidas para os parâmetros $\tilde{\alpha}_i$ e \tilde{a}_i definidos para o polígono no plano auxiliar θ ; vide Fig 6.6.

Além disso, podemos relacionar os parâmetros $\tilde{\alpha}_i$ com os parâmetros originais α_i através das seguintes relações

$$\pi \tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{h}_{i-1} - \tilde{h}_i}{\tilde{a}_i - \tilde{a}_{i-1}} + \frac{\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_i}{\tilde{a}_{i+1} - \tilde{a}_i}, \quad (6.47)$$

onde \tilde{h}_i representa a altura dos vértices da curva poligonal no plano θ , as quais são dadas em termos das alturas dos vértices, h_i no plano w , por

$$\tilde{h}_i = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_i\right) h_i, \quad (6.48)$$

como pode ser verificado da mesma forma que foi feito para a Eq. (6.12). Por outro lado, as alturas h_i estão relacionadas aos ângulos α_i pelas seguintes equações

$$h_i = \pi \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i-j} (a_i - a_{i-j}), \quad 2 \leq i \leq N-1. \quad (6.49)$$

As alturas associadas aos dois pontos extremos da interface, em $z = \pm 1$, são nulas, ou seja, $h_1 = h_N = 0$.

Seguindo os passos da seção anterior, podemos verificar que a equação de Loewner (6.30) também é válida para uma interface com múltiplas cristas, a única diferença está em que o somatório vai até o número N de vértices da curva poligonal no plano w (incluindo os pontos

extremos da interface). A dinâmica das funções $a_i(t)$, para $i = 1, 2, \dots, N$, permanece dada por Eq. (6.35), sendo que neste caso o limite superior do somatório é igual a N . Novamente, as quantidades $\tilde{d}_i(t)$ definidas em (6.33) podem ser expressas em termos dos fatores de crescimento $d_i(t)$ definidos em (6.36), utilizando as Eqs. (6.47)-(6.49). Além disso, das Eqs. (6.45) e (6.46) segue-se que os fatores de crescimento d_i satisfazem as relações

$$\sum_{i=1}^N d_i = 0, \quad (6.50)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0. \quad (6.51)$$

Relações semelhantes a (6.50) e (6.51) são válidas para os parâmetros $\tilde{\alpha}_i$ e $\tilde{a}_i(t)$.

Utilizando as relações acima podemos expressar os fatores de crescimento de d_1 e d_N em termos dos fatores de crescimento das cristas e dos vales $d_i(t)$. Dessa forma, nosso modelo de crescimento é determinado completamente especificando-se as funções $d_i(t)$ para as cristas e vales da interface. Nos exemplos discutidos a seguir, consideraremos apenas casos em que $d_i(t) = d_i = cte$, ainda que os fatores d_i não sejam necessariamente iguais. Serão ilustrados alguns padrões que surgem do nosso modelo de crescimento para interfaces com duas cristas e um vale, para os quais temos $N = 5$. Então, das equações (6.50) e (6.51) podemos escrever, os parâmetros d_1 e d_5 , em termos dos fatores de crescimento d_2 e d_4 , para as cristas, e d_3 para o vale.

6.2.2 Interfaces simétricas

Vamos considerar inicialmente o caso de uma interface simétrica com duas cristas. Nesse caso temos $a_5(t) = -a_1(t)$, $a_3(t) = 0$ e $a_4(t) = -a_2(t)$. Além disso devemos fazer $d_4 = d_2$ para preservar a simetria.

Na Fig. 6.7a, mostramos um exemplo de uma interface simétrica. As interfaces correspondem às linhas contínuas, integradas para tempos de $t = 0,5$ até $t = 1,7$, com um intervalo $\Delta t = 0,3$ entre curvas sucessivas, e as linhas tracejadas correspondem às trajetórias das cristas e do vale. Nessa figura, iniciamos com as condições simétricas, ou seja, $a_5(0) = -a_1(0) = 0,3$, $a_4(0) = -a_2(0) = 0,2$, e $a_3(0) = 0$, e além disso os fatores de crescimento das cristas preservam a simetria, ou seja $d_2 = d_4 = -2$, enquanto que o fator de crescimento do vale é $d_3 = 1,5$. Vale notar, que as trajetórias seguidas pelas cristas e o vale, são similares às seguidas pelos dedos de largura infinitesimal na geometria do canal, vistos no capítulo anterior. Da Fig. 6.7a vemos que a interface se expande e tende a ocupar o canal completamente para tempos longos.

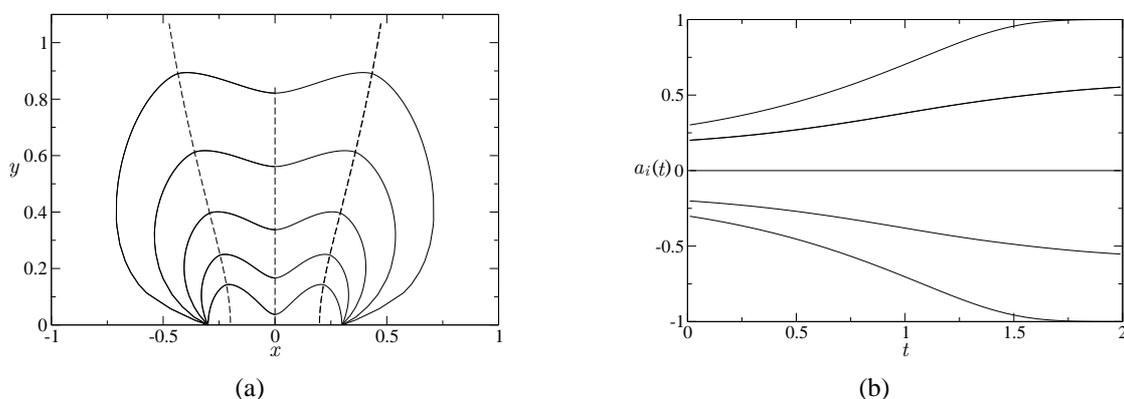


Figura 6.7 (a) Interface simétrica com duas cristas no canal. Os fatores de crescimento utilizados foram $d_2 = d_4 = -2$ e $d_3 = 1,5$. As curvas sólidas representam as interfaces a partir de $t = 0,5$ até $t = 1,7$, com $\Delta t = 0.3$ entre curvas sucessivas. As linhas tracejadas mostram as trajetórias das cristas e do vale. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_5(t)$.

Na Fig. 6.7b mostramos as soluções das funções $a_i(t)$, sendo que as funções estão dispostas em ordem crescente, ou seja, $a_1(t), \dots, a_5(t)$. Vemos de 6.7b que as funções $a_1(t)$ e $a_5(t)$ atingem as paredes do canal em $t = 1,7$, sendo difícil a integração da equação de Loewner para valores de tempo maiores que esse.

6.2.3 Interfaces Assimétricas

Se quebrarmos a simetria inicial alguma forma, observa-se então o efeito de blindagem, visto tanto para dedos de largura infinitesimal quanto para interfaces no semiplano. Na Fig. 6.8 ilustramos um exemplo de uma interface assimétrica. Nesse caso temos as mesmas condições iniciais simétricas para as funções $a_i(t)$ da seção anterior, mas dessa vez, a crista da direita tem fator de crescimento diferente daquele da crista da esquerda a saber, $d_2 = -2,0$ e $d_4 = -2,5$, sendo mantido $d_3 = 1,5$ para o vale. Nesse caso, a crista mais rápida avança na frente, blindando o crescimento da outra crista, ou seja a outra crista e o vale ficam para trás. Contudo, o efeito de blindagem é parcial, no sentido de que a crista mais lenta continuará crescendo, mas com uma velocidade que é uma fração da velocidade da crista mais rápida. Se por outro lado, o fator de crescimento de uma das cristas for suficientemente grande, é possível que uma das cristas blinde totalmente o crescimento da outra, ou seja, que a outra crista pare totalmente de crescer. Em tais casos, a crista mais lenta e o vale se fundirão com um dos pontos extremos da interface, resultando em uma interface que cresce assintoticamente com somente uma crista.

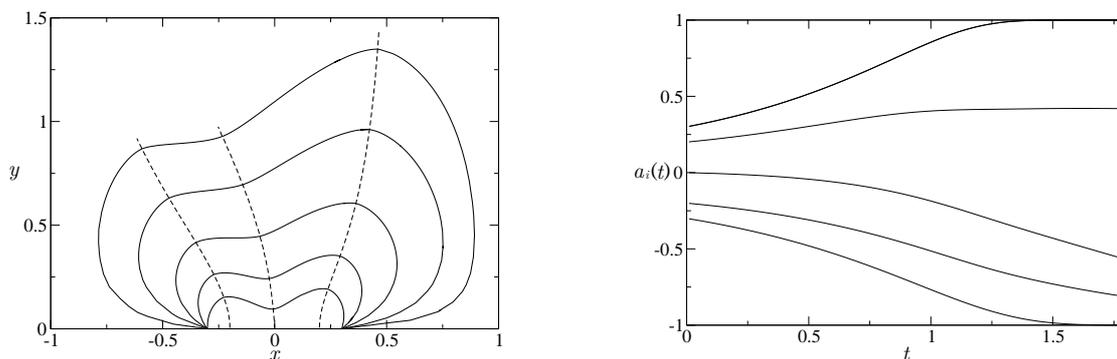


Figura 6.8 (a) Interface assimétrica com duas cristas onde se observa o efeito de “blindagem parcial” de uma das cristas. Os fatores de crescimento utilizados foram $d_2 = -2, 0, d_4 = -2, 5$ e $d_3 = 1, 5$. As curvas contínuas representam as interfaces a partir de $t = 0.5$ até $t = 1.7$, com $\Delta t = 0.3$ entre curvas sucessivas. As linhas tracejadas mostram as trajetórias das cristas e do vale. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_5(t)$.

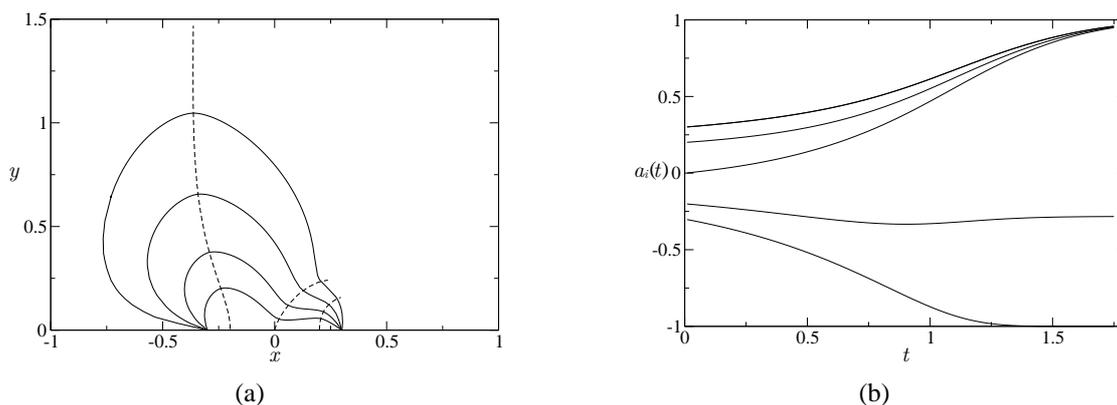


Figura 6.9 (a) Interface assimétrica com duas cristas onde se observa o efeito de “blindagem total”. Os fatores de crescimento utilizados foram $d_2 = -2, 0, d_4 = -2, 5$ e $d_3 = 1, 5$. As linhas tracejadas mostram as trajetórias das cristas e do vale. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_5(t)$.

Uma situação como essa esta ilustrada na Fig. 6.9a, para as mesmas condições iniciais que foram utilizadas na Fig. 6.7a mas com os seguintes fatores de crescimento ($d_2 = -2, 6, d_3 = 1, 5$ e $d_4 = -0, 6$ onde observamos que o vale e a crista da direita apresentam uma clara tendência de se fundirem com o ponto extremo da direita. Essa tendência também pode ser observada na Fig. 6.9b onde se vê que as funções $a_3(t), a_4(t)$ e $a_5(t)$ aproximam-se entre si.

Outra forma de quebrar a simetria e induzir a competição entre cristas se consegue deslo-

cando a posição inicial da interface e mantendo fatores de crescimento simétricos. Na Fig. 6.10a, os fatores de crescimento e a largura da interface foram os mesmos que os utilizados na Fig. 6.7a, mas a posição inicial da interface foi deslocada para o lado direito do canal. Podemos ver que a crista mais próxima da parede do canal fica atrasada em relação à outra crista, ou seja, vê-se aqui um efeito de blindagem similar ao visto nas Figs. 6.8 e 6.9, sendo que a blindagem é parcial. Vale notar que a competição mostrada nas Figs. 6.8-6.10 imita o comportamento inicial das protuberâncias observadas em alguns processos de formação de dedos [34].

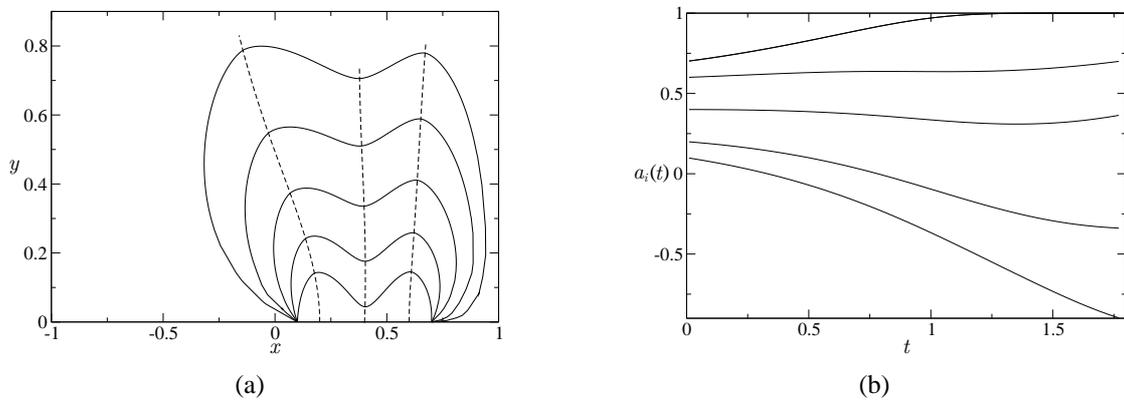


Figura 6.10 (a) Interface assimétrica no lado direito do canal com duas cristas. Os fatores de crescimento utilizados foram $d_2 = -2, 0, d_4 = 2, 5$ e $d_3 = 1, 5$. As linhas tracejadas mostram as trajetórias das cristas e do vale. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_5(t)$.

6.2.4 Múltiplas Interfaces

A equação de Loewner (6.30) também pode descrever o problema de múltiplas interfaces crescendo no canal. Nesse caso, cada interface Γ_t^i , para $i = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número de interfaces, será levada pela função $g_t(z)$ para seu correspondente intervalo sobre eixo real do plano w ; vide Fig. 6.11. Cada interface $\Gamma_{t+\tau}$ em um tempo posterior $t + \tau$ será transformada sob a ação de $g_t(z)$ em uma curva poligonal no plano w , ver Fig. 6.11. Repetindo-se o procedimento das seções anteriores, é fácil verificar que para múltiplas interfaces no canal a transformação $g_t(z)$ e as funções $a_i(t)$ satisfazem equações da forma (6.30) e (6.35) respectivamente, sendo que nesse caso o somatório será de N termos, onde N é o número total de vértices, correspondendo à soma do número de vértices de cada uma das interfaces. Note ainda que cada interface terá condições análogas a (6.50) e (6.51), mas envolvendo unicamente os fatores de

crescimento d_i da respectiva interface. A seguir, discutiremos alguns exemplos para o caso em que há duas interfaces, cada uma com uma crista apenas. Na Fig 6.12a, mostramos soluções numéricas para duas interfaces simétricas, onde podemos considerar que uma das interfaces é a imagem especular da outra em relação ao eixo y . Nesse caso, as interfaces começam a crescer a partir dos segmentos $[-0,5, -0,1]$ e $[0,1,0,5]$, respectivamente, com as posições iniciais do tip em $a_4(t) = -a_2(t) = 0,2$. As duas interfaces tem os mesmos fatores de crescimento, ou seja, $d_2 = d_4 = -1$. Vale observar na Fig. 6.12a, que com o passar do tempo os lados internos das interfaces se aproximam um do outro, formando um estreito canal entres eles. Para tempos suficientemente longos, a largura desse canal será infinitesimalmente pequena, de maneira que para efeitos práticos a evolução assintótica corresponderá uma única interface com uma crista apenas. Uma evidência desse fato pode ser vista na Fig.6.12a, onde as duas cristas (linhas tracejadas) se “atraem” mutuamente e eventualmente fundir-se-ão. Contudo, a equação de Loewner é difícil de integrar para tempos maiores que o último tempo mostrado na Fig. 6.12a, porque as funções $a_5(t)$ e $a_1(t)$ ficam aproximadamente idênticas a ± 1 , como mostrado na Fig.6.12b, tornando difícil a integração numérica depois desse ponto.

Se quebrarmos a simetria entre as duas interfaces de alguma forma, vê-se então um efeito de competição entre as interfaces, ou seja, uma delas avançará na frente da outra. Na Fig. 6.13 mostramos um exemplo de interfaces assimétricas, em que os fatores de crescimento são os mesmos, mas as posições iniciais das interfaces não são mais simétricas com respeito do eixo imaginário y . Nesse caso, deslocamos as duas interfaces para o lado direito do canal. Observe-se na Fig. 6.13 que a interface mais próxima da linha central do canal crescerá na frente da outra. Aqui também pode ser observada a formação de um canal estreito entre as interfaces que eventualmente desaparecerá, acarretando para efeitos práticos, a fusão das duas interfaces.

Outra forma de quebrar a simetria entre as interfaces é mostrada na Fig. 6.14a. Nesse caso, utilizamos os mesmos fatores de crescimento do caso simétrico, mas diminuimos a largura da interface da direita pela metade, ou seja, as interfaces crescem a partir dos intervalos iniciais

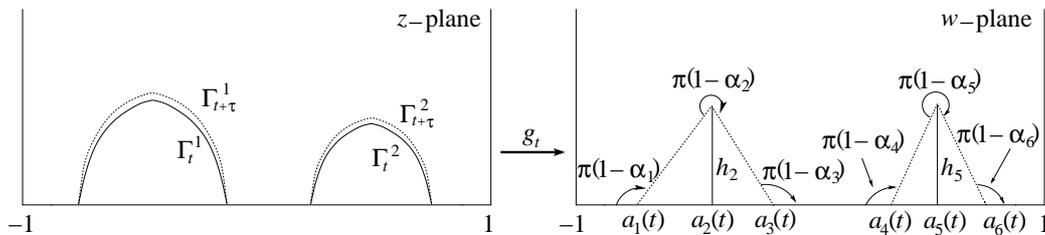


Figura 6.11 Planos físico e matemático para múltiplas interfaces crescendo no canal, ver texto para detalhes.

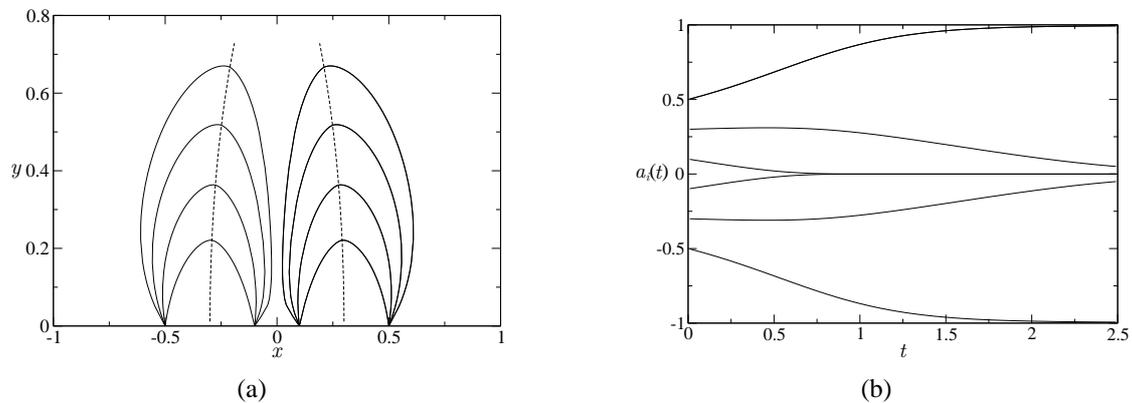


Figura 6.12 (a) Evolução de Loewner para duas interfaces simétricas crescendo na geometria do canal com $d(t) = 1$. As interfaces começam a crescer a partir dos intervalos $[-0,5, -0,1]$ e $[0,1,0,5]$. As curvas correspondem a instantes de tempo variando de $\Delta t = 0,3$. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t), i = 1, \dots, 6$.

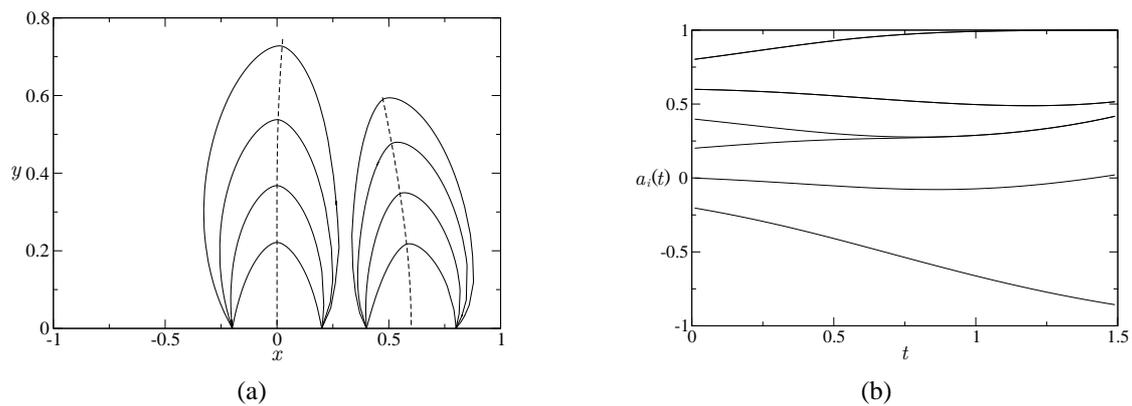


Figura 6.13 (a) Evolução de Loewner para duas interfaces assimétricas crescendo na geometria do canal para $d(t) = 1$. As interfaces começam a crescer a partir dos intervalos $[-0,2,0,2]$ e $[0,4,0,8]$ respectivamente. As curvas correspondem a instantes de tempo variando de $\Delta t = 0,3$. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_6(t)$.

$[-0,5, -0,1]$ e $[0,1,0,3]$. Novamente, vemos o efeito de blindagem e a formação de um canal entre os dois dedos. Na Fig.6.14b mostramos que a evolução temporal das funções $a_3(t)$ e $a_4(t)$ ficam idênticas, tornando a integração difícil para valores de t superiores de $t = 1,59$.

Na Fig. 6.15, mostramos outro exemplo de crescimento assimétrico em que aparece mais uma vez o efeito de blindagem. Utilizamos agora fatores de crescimento diferentes para as duas

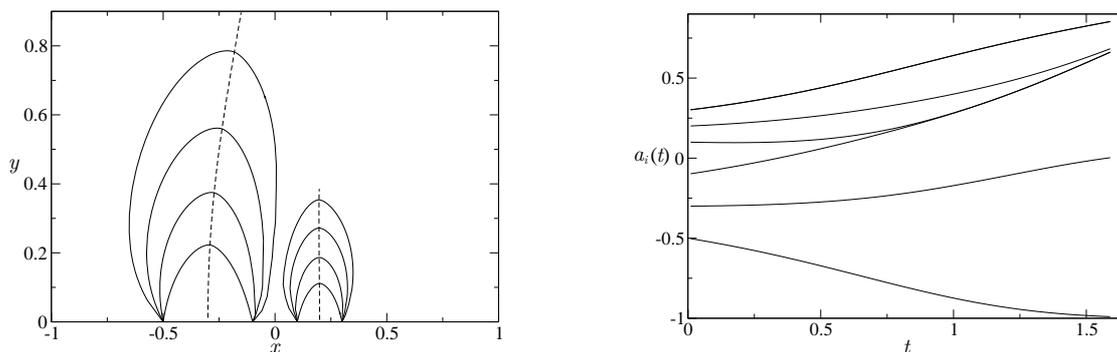


Figura 6.14 (a) Evolução de Loewner para duas interfaces de larguras diferentes para $d(t) = 1$. As interfaces da esquerda e da direita começam a crescer a partir dos intervalos $[-0,5, -0, 1]$ e $[0, 1, 0, 3]$ respectivamente. As curvas correspondem a instantes de tempo variando de $\Delta t = 0,3$. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_6(t)$.

interfaces, $d_1 = -1$ e $d_2 = -0,5$ para as interfaces da esquerda e da direita respectivamente. Novamente vemos o efeito de blindagem, ou seja, a interface com o maior fator de crescimento parte na frente, blindando o crescimento da outra. Na Fig. 6.15b, mostramos a evolução das funções $a_i(t)$ em ordem crescente de baixo para cima. Claramente vemos que as funções $a_i(t)$ mostram o efeito de blindagem, como a aproximação entre as funções $a_3(t)$, $a_4(t)$ e $a_5(t)$, que resultará na ‘fusão’ da interface menor com a maior, de modo que assintoticamente teremos uma única interface com apenas uma crista.

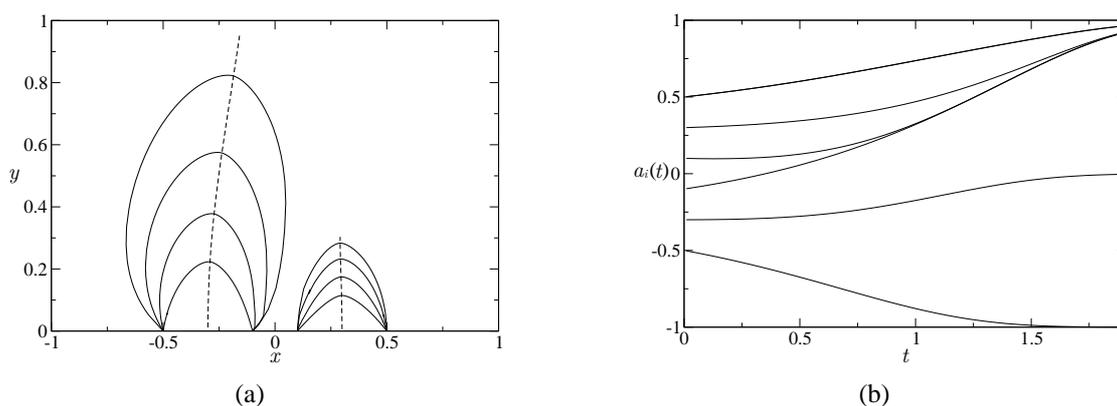


Figura 6.15 (a) Evolução de Loewner para duas interfaces com fatores de crescimento diferentes $d_1 = -1$ e $d_2 = -0,5$. As curvas correspondem a instantes de tempo variando de $\Delta t = 0,3$. (b) Evolução temporal das funções $a_i(t)$ ordenadas de forma crescente, de baixo para cima: $a_1(t), \dots, a_6(t)$.

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese aplicamos o formalismo da equação de Loewner para estudar problemas de crescimento laplaciano em duas dimensões. Inicialmente, apresentamos uma dedução alternativa da equação de Loewner para uma curva no semiplano superior utilizando a transformação de Schwarz-Christoffel. Mostramos que fazendo as expansões apropriadas na integral de Schwarz-Christoffel encontramos o resultado conhecido na literatura para a equação de Loewner cordal. Como mostrado no Capítulo 3, estendemos nosso formalismo para encontrar a equação de Loewner para o caso de múltiplos dedos crescendo no semiplano. Das soluções numéricas podemos afirmar que quando definimos diferentes fatores de crescimento para cada dedo, o dedo com o maior fator avança mais rápido em relação ao dedo que tenha um fator de crescimento menor, de maneira que o dedo mais rápido avançará na frente blindando o crescimento dos outros dedos. Essa blindagem pode ser de duas classes, a saber:

- a) Blindagem total, quando a razão das velocidades entre os dois dedos tende a zero, ou seja, um dos dedos fica parado em relação ao dedo que tem o fator de crescimento maior.
- b) Blindagem parcial, quando a razão das velocidades tende para uma constante diferente de 1, ou seja, os dois dedos avançam no semiplano, mas sempre um na frente do outro. Esse comportamento também foi observado em experimentos de combustão feitos por Zik e Moses [32].

Além disso, no Capítulo 5, estendimos nosso formalismo para encontrar a equação de Loewner que descreve a evolução de dedos de largura infinitesimal no canal e observamos, a partir das soluções numéricas, que no caso de vários dedos crescendo no canal, eles tendem assintoticamente para retas cuja posição depende unicamente dos fatores de crescimento definidos para cada dedo, e não de suas posições iniciais.

Nos Capítulos 4 e 6, utilizamos a transformação de Schwarz-Christoffel para deduzir uma equação de Loewner generalizada, que descreve a dinâmica de crescimento de interfaces em duas geometrias específicas, a saber: a geometria do semiplano superior e do canal. Vale notar que no modelo de crescimento considerado nesta tese, o fator de crescimento foi definido nos pontos especiais da interface que denominamos de cristas e vales, nesses pontos, o crescimento acontece ao longo das linhas de gradiente da função potencial ϕ . Desse modelo se desprendem

casos particulares como o de uma interface com uma ou duas cristas, e o de múltiplas interfaces. Vimos que para uma interface com duas cristas, o efeito de blindagem é controlado pelo fator de crescimento d , tal que a crista que tenha o fator de crescimento maior, avançará com maior rapidez. Naturalmente, isso implica que a crista com menor fator de crescimento ficará para trás em relação à crista com d maior, mostrando assim o mesmo efeito de blindagem que surge quando vários dedos de largura infinitesimal crescem simultaneamente. Mostramos também que o efeito de blindagem para uma interface no semiplano apresenta os dois tipos de blindagem presentes no caso de dedos, a saber: a) blindagem total, quando predomina o crescimento de uma das cristas e b) blindagem parcial, onde as duas cristas avançaram continuamente, sendo a velocidade da mais lenta uma fração da velocidade da mais rápida.

Vale lembrar que nesta tese utilizamos o semiplano superior como domínio de referência para a construção do mapa g_t . Isso sugere a possibilidade de fazer uma análise similar à mostrada aqui, mas utilizando como domínio de referência o disco unitário. Para isso, devemos encontrar a equação de Loewner radial, cuja forma específica depende, como mostrado, do processo de crescimento, seja para dedos de largura infinitesimal, ou interfaces que crescem com simetria radial.

Como mencionado na introdução, utilizando como função forçante na equação de Loewner cordal um movimento browniano unidimensional, podemos estudar a equação de Loewner estocástica, cujos desdobramentos podem ser utilizados para encontrar expoentes críticos, e a formação de aglomerados em modelos de rede em duas dimensões.

Transformação de Schwarz-Christoffel

Considere um polígono de N lados no plano complexo z cujos vértices são os pontos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$ (ver figura da esquerda na Fig. A.1). Denotemos por $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_N$, onde $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \dots < \zeta_N$, as respectivas imagens dos pontos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$ no eixo real de um plano ζ (figura da direita em Fig. A.1). Denotamos os ângulos internos por α_i , onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, como mostrado na Fig. A.1.

Estamos interessados na transformação conforme $z = F(\zeta)$, que leva os pontos ζ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) nos vértices z_i da região poligonal. Sendo levados do semiplano superior do plano ζ no interior do polígono no plano z . A função $F(\zeta)$ que realiza essa transformação é dada pela expressão

$$\frac{dF}{d\zeta} = K(\zeta - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1}(\zeta - \zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1}(\zeta - \zeta_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (\zeta - \zeta_N)^{\frac{\alpha_N}{\pi} - 1}, \quad (\text{A.1})$$

onde K é uma constante a ser determinada posteriormente. Integrando (A.1) obtemos

$$F(\zeta) = K \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\zeta - \zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (\zeta - \zeta_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (\zeta - \zeta_N)^{\frac{\alpha_N}{\pi} - 1} d\zeta + C. \quad (\text{A.2})$$

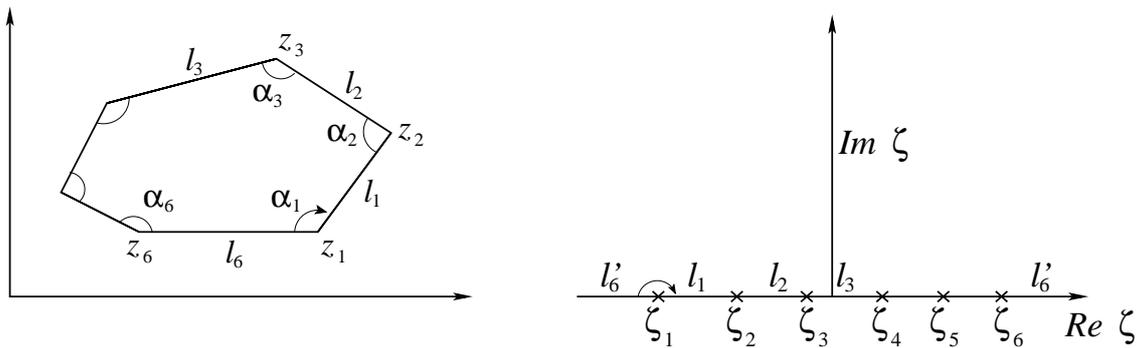


Figura A.1 .

A equação (A.2) é a transformação de Schwarz-Christoffel. O limite inferior da integral, ζ_0 , pode ser escolhido arbitrariamente. As constantes K e C são determinadas a partir das

condições de contorno do problema. A constante C está relacionada com a posição do polígono no plano z , enquanto que a constante K fixa a escala e a orientação do polígono. Ademais, o teorema de Riemman nos permite escolher arbitrariamente três dos números reais ζ_i em (A.2). Por exemplo, podemos escolher levar 3 vértices arbitrários, z_m, z_n e z_p , em $\zeta_m = 1, \zeta_n = -1$ e $\zeta_p = \infty$. Geralmente a escolha desses três *graus de liberdade* dependerá da geometria do problema.

A transformação de Schwarz-Christoffel permanece válida ainda no caso de polígonos degenerados, ou seja, polígonos tais que um dos vértices está em $z = \infty$. Além disso, se algum dos vértices do polígono (e.g., o j -ésimo) é mapeado no eixo real do plano ζ em $\zeta_i = \pm\infty$, pode-se omitir o fator correspondente $(\zeta - \zeta_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}$ na expressão (A.2), de forma que esta expressão não dependerá do ângulo α_j . Para mais informações sobre a transformação de Schwarz-Christoffel pode-se consultar a referência ([25, 35])

Método Numérico

B.1 Integração da Equação de Loewner no semiplano

Como vimos no Capítulo 3, a equação de Loewner para múltiplos dedos de largura infinitesimal que crescem no semiplano é da forma

$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t(z) - a_i(t)}. \quad (\text{B.1})$$

Como $g_t[\gamma_i(t)] = a_i(t)$, a idéia do método numérico para calcular as trajetórias $\gamma_i(t)$ dos respectivos dedos é integrar a equação de Loewner para trás no tempo, a partir da condição inicial $g_t = a_i(t)$ até obter o valor de g_0 em $t = 0$. Por outro lado, como em $t = 0$ temos $g_0(z) = z$, segue então que $\gamma_i(t) = g_0$.

Entretanto, não é possível integrar a equação (B.1) a partir da condição $g_t = a_i(t)$ em vista da singularidade nesse ponto. Essa singularidade pode ser evitada utilizando a seguinte aproximação de primeira ordem [24]:

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \dot{g}_{t-\tau}, \quad (\text{B.2})$$

com a qual podemos encontrar uma condição terminal $g_{t-\tau}$, próxima de $a(t)$, a partir da qual podemos integrar a Eq. (B.1) para trás no tempo até $t = 0$. Mostramos a seguir as expressões dos coeficientes dos polinômios, que resultam para $g_{t-\tau}$ no caso de dois e três dedos no semiplano.

B.1.1 Dois dedos

Utilizando (B.1) em (B.2) com $n = 2$, podemos escrever:

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \left[\frac{d_1}{g_{t-\tau} - a_1(t-\tau)} + \frac{d_2}{g_{t-\tau} - a_2(t-\tau)} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Fazendo $g_t = a_i(t)$, encontramos um polinômio cúbico em $g_{t-\tau}$:

$$g_{t-\tau}^3 + \mathfrak{b}g_{t-\tau}^2 + \mathfrak{c}g_{t-\tau} + \mathfrak{d} = 0, \quad (\text{B.4})$$

cujos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= -\{1 + [a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)]a_i(t)\} \\ \mathfrak{c} &= a_1(t - \tau)a_2(t - \tau) - [a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)]a_i(t) + \tau(d_1 + d_2) \\ \mathfrak{d} &= -a_1(t - \tau)a_2(t - \tau)a_i(t) - \tau[d_1a_2(t - \tau) + d_2a_1(t - \tau)] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.1.2 Três dedos

Utilizando (B.1) em (B.2) com $n = 3$, temos

$$g_t = g_{t-\tau} + \tau \left[\frac{d_1}{g_{t-\tau} - a_1(t - \tau)} + \frac{d_2}{g_{t-\tau} - a_2(t - \tau)} + \frac{d_3}{g_{t-\tau} - a_3(t - \tau)} \right], \quad (\text{B.6})$$

Fazendo novamente $g_t = a_i(t)$, podemos encontrar um polinômio de quarto grau para $g_{t-\tau}$:

$$g_{t-\tau}^4 + \mathfrak{b}g_{t-\tau}^3 + \mathfrak{c}g_{t-\tau}^2 + \mathfrak{d}g_{t-\tau} + \mathfrak{e} = 0, \quad (\text{B.7})$$

cujos coeficientes são da forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= -a_i(t) + \sum_{j=1}^3 b_j, \\ \mathfrak{c} &= a_i(t) \sum_{j=1}^3 b_j + \tau \left[\sum_{j=1}^3 d_j + b_2b_3 + a_1(b_2 + b_3) \right], \\ \mathfrak{d} &= -(a_i(t)[b_2b_3 + b_1(b_2 + b_3)] + \tau \left[d_1(b_2 + b_3) \right. \\ &\quad \left. + d_2(b_1 + b_3) + d_3(b_1 + b_2) + \prod_{j=1}^3 b_j \right], \\ \mathfrak{e} &= a_i(t) \prod_{j=1}^3 b_j + \tau (d_1b_2b_3 + d_2b_1b_3 + d_3b_2b_1), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde as variáveis b_i representam as funções $a_i(t)$ avaliadas no instante $t - \tau$, ou seja

$$b_i = a_i(t - \tau). \quad (\text{B.9})$$

B.2 Integração da Equação de Loewner na geometria do canal

Lembrando que a equação de Loewner na geometria do canal é dada por

$$\dot{\tilde{g}}_t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \tilde{g}_t^2) \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{\tilde{g}_t - \tilde{a}_i(t)}, \quad (\text{B.10})$$

onde as variáveis \tilde{g}_t e $\tilde{a}(t)$ correspondem a

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t &= \sin\left(\frac{\pi}{2}g_t\right), \\ \tilde{a}(t) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}a_i(t)\right], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

podemos ver que a Eq. (B.10) tem singularidades na condição terminal de integração quando $\tilde{g}_t = \tilde{a}_i(t)$. Como discutido na seção anterior, uma aproximação de primeira ordem para evitar essa singularidade é dada por

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \dot{\tilde{g}}_{t-\tau}, \quad (\text{B.12})$$

onde $\dot{\tilde{g}}_{t-\tau}$ corresponde à Eq. (B.10) avaliada no instante $t - \tau$. Utilizando essa aproximação, mostramos a seguir os coeficientes dos polinômios de terceira e quarta ordens, que surgem a partir da Eq. (B.12) para o caso de dois e três dedos, respectivamente. As raízes desses polinômios serão utilizadas como condições terminais de integração da equação de Loewner para trás no tempo.

B.2.1 Dois dedos

Para resolver numericamente a equação de Loewner no caso de dois dedos, utilizamos (B.12) e (B.10) com $n = 2$, assim temos

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \tilde{g}_{t-\tau}^2) \left[\frac{d_1}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_1(t-\tau)} + \frac{d_2}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_2(t-\tau)} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Fazendo $\tilde{g}_t = \tilde{a}_i(t)$ encontramos o seguinte polinômio cúbico em $\tilde{g}_{t-\tau}$:

$$\tilde{g}_{t-\tau}^3 + \mathfrak{b}(t)\tilde{g}_{t-\tau}^2 + \mathfrak{c}(t)\tilde{g}_{t-\tau} + \mathfrak{d}(t) = 0, \quad (\text{B.14})$$

onde os coeficientes do polinômio acima são dados por

$$\begin{aligned}
c' \mathbf{b}(t) &= -\tilde{a}_1(t-\tau) - \tilde{a}_2(t-\tau) + \tau \frac{\pi^2}{4} [d_1 \tilde{a}_2(t-\tau) + d_2 \tilde{a}_1(t-\tau)] - \tilde{a}_i(t), \\
c' \mathbf{c}(t) &= \tilde{a}_2(t-\tau) \tilde{a}_1(t-\tau) + \tau \frac{\pi^2}{4} (d_1 + d_2) + \tilde{a}_i(t) [\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_2(t-\tau)], \\
c' \mathbf{d}(t) &= -\tau \frac{\pi^2}{4} [d_1 \tilde{a}_2(t-\tau) + d_2 \tilde{a}_1(t-\tau)] - \tilde{a}_2(t-\tau) \tilde{a}_1(t-\tau) \tilde{a}_i(t), \tag{B.15}
\end{aligned}$$

sendo

$$c' = 1 - \tau \frac{\pi^2}{4} (d_1 + d_2). \tag{B.16}$$

B.2.2 Três dedos

Para resolver numericamente a equação de Loewner na geometria do canal para o caso de três dedos utilizamos novamente as Eqs. (B.12) e (B.10) com $n = 3$. Explicitamente temos

$$\tilde{g}_t = \tilde{g}_{t-\tau} + \tau \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (1 - \tilde{g}_{t-\tau}^2) \left[\frac{d_1}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_1(t-\tau)} + \frac{d_2}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_2(t-\tau)} + \frac{d_3}{\tilde{g}_{t-\tau} - \tilde{a}_3(t-\tau)} \right], \tag{B.17}$$

de onde é fácil encontrar o seguinte polinômio de quarto grau em $\tilde{g}_{t-\tau}$:

$$\tilde{g}_{t-\tau}^4 + \mathbf{b}(t) \tilde{g}_{t-\tau}^3 + \mathbf{c}(t) \tilde{g}_{t-\tau}^2 + \mathbf{d}(t) \tilde{g}_{t-\tau} + \mathbf{e}(t) = 0, \tag{B.18}$$

cujos coeficientes são da forma

$$\begin{aligned}
c' \mathbf{b}(t) &= -[\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_2(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)] + \tau \frac{\pi^2}{4} \left\{ d_1 [\tilde{a}_2(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)] \right. \\
&\quad \left. + d_2 [\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)] + d_3 [\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_2(t-\tau)] \right\} - \tilde{a}_i(t), \\
c' \mathbf{c}(t) &= \tau \frac{\pi^2}{4} \left[d_1 + d_2 + d_3 - d_1 \tilde{a}_2(t-\tau) \tilde{a}_3(t-\tau) - d_2 \tilde{a}_1(t-\tau) \tilde{a}_3(t-\tau) \right. \\
&\quad \left. - d_3 \tilde{a}_1(t-\tau) \tilde{a}_2(t-\tau) \right] + \tilde{a}_2(t-\tau) \tilde{a}_3(t-\tau) + \tilde{a}_1(t-\tau) [\tilde{a}_2(t-\tau) \\
&\quad + \tilde{a}_3(t-\tau)] + \tilde{a}_1(t-\tau) [\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_2(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)], \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'\mathfrak{d}(t) = & -\tilde{a}_1(t-\tau)\tilde{a}_2(t-\tau)\tilde{a}_3(t-\tau) - \tilde{a}_i(t)\left\{\tilde{a}_2(t-\tau)\tilde{a}_3(t-\tau) + \tilde{a}_1(t-\tau)[\tilde{a}_2(t-\tau) \right. \\
& \left. + \tilde{a}_3(t-\tau)]\right\} - \tau\frac{\pi^2}{4}\left\{d_1[\tilde{a}_2(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)] + d_2[\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_3(t-\tau)] \right. \\
& \left. + d_3[\tilde{a}_1(t-\tau) + \tilde{a}_2(t-\tau)]\right\}, \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'\mathfrak{e}(t) = & \tilde{a}_i(t)\tilde{a}_1(t-\tau)\tilde{a}_2(t-\tau)\tilde{a}_3(t-\tau) + \tau\frac{\pi^2}{4}\left[d_1\tilde{a}_2(t-\tau)\tilde{a}_3(t-\tau) \right. \\
& \left. + d_2\tilde{a}_1(t-\tau)\tilde{a}_3(t-\tau) + d_3\tilde{a}_1(t-\tau)\tilde{a}_2(t-\tau)\right], \tag{B.21}
\end{aligned}$$

onde a constante c' é dada por

$$c' = 1 - \tau\frac{\pi^2}{4}(d_1 + d_2 + d_3). \tag{B.22}$$

B.3 Raízes de um polinômio cúbico

A seguir mostramos os algoritmos utilizados para encontrar as raízes dos polinômios de terceira e quarta ordens na variável $x = g_{t-\tau}$.

Para encontrar a raízes de um polinômio cúbico da forma

$$x^3 + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d} = 0, \tag{B.23}$$

A substituição $x = t - \frac{\mathfrak{b}}{3}$, elimina o termo quadrático e, a Eq. (B.23) fica da forma

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{B.24}$$

onde, explicitamente, os parâmetros p e q em Eq. (B.24) são

$$b = \mathfrak{b}, \tag{B.25}$$

$$p = \mathfrak{c} - \frac{\mathfrak{b}^2}{3}, \tag{B.26}$$

$$q = \mathfrak{d} - \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{3} + \frac{2}{27}\mathfrak{b}^3. \tag{B.27}$$

Introduzindo na Eq. (B.24) as variáveis u e v , ligadas pela condição

$$u + v = t, \tag{B.28}$$

temos

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0, \quad (\text{B.29})$$

na Eq. (B.29) Cardano impus a condição $3uv + p = 0$, com isso, o terceiro termo em (B.29) zera, então $u^3 + v^3 = -q$, e além disso $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Note que u^3 e v^3 são números dos quais conhecemos a soma e o produto e este é um problema classico de equação de 2º grau, a saber

$$\zeta^2 + q\zeta - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (\text{B.30})$$

Neste ponto, Cardano não conhecia os números complexos, e assumiu que os zeros do polinômio acima eram reais na sua demonstração. No que segue, assumimos que as raízes do polinômio na Eq. (B.30) podem ser complexas.

Assim, defina-se agora as seguintes quantidades, em termos de q e p

$$\begin{aligned} \Delta &= q^2 + \frac{4}{27}p^3, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}(-q + \sqrt{\Delta}), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(q + \sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

e ainda as quantidades α e β como

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma_1}{|\gamma_1|} |\gamma_1|^{1/3}, \\ \beta &= \frac{\gamma_2}{|\gamma_2|} |\gamma_2|^{1/3}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Definindo o número complexo

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\text{B.33})$$

as raízes do polinômio serão dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - \beta - b/3, \\ x_2 &= \alpha z - \beta z^2 - \frac{b}{3}, \\ x_3 &= \alpha z^2 - \beta z - \frac{b}{3}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

B.4 Raízes de um polinômio de quarto grau

A seguir descrevemos o procedimento utilizado para encontrar as raízes do de um polinômio de quarto grau da forma

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (\text{B.35})$$

definem-se inicialmente os parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3}{8}b^2 + c, \\ \beta &= \frac{1}{8}b^3 - \frac{1}{2}bc + d, \\ \gamma &= -\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{16}cb^2 - \frac{1}{4}bd + e \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

com os quais definimos

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{12}\alpha^2 - \gamma, \\ Q &= -\frac{1}{108}\alpha^3 + \frac{1}{3}\alpha\gamma - \frac{1}{8}\beta^2, \\ R &= -\frac{1}{2}Q + \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}P^3} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

e

$$U = R^{1/3}. \quad (\text{B.38})$$

A partir de U , definimos,

$$\begin{aligned} U \neq 0 &\Rightarrow y = -\frac{5}{6}\alpha + U - \frac{P}{3U}, \\ U = 0 &\Rightarrow y = -\frac{5}{6}\alpha + U - Q^{1/3}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Com isso pode-se definir

$$W = \sqrt{\alpha + 2y}, \quad (\text{B.40})$$

com o que podemos escrever as raízes do polinômio de quarto grau como

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{4}b + \frac{1}{2} \left[W - \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + 2\frac{\beta}{W}\right)} \right], \\x_2 &= -\frac{1}{4}b + \frac{1}{2} \left[W + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + 2\frac{\beta}{W}\right)} \right],\end{aligned}\tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{1}{4}b - \frac{1}{2} \left[W + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - 2\frac{\beta}{W}\right)} \right], \\x_4 &= -\frac{1}{4}b - \frac{1}{2} \left[W + \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - 2\frac{\beta}{W}\right)} \right].\end{aligned}\tag{B.42}$$

Integrais para o dedo de Largura infinitesimal no Canal

Como vimos no Capítulo 5 a transformação de Schwarz-Christoffel na geometria do canal é da forma:

$$g_t = F(\tilde{g}_{t+\tau}) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{\omega - \tilde{a}(t + \tau)}{\sqrt{(1 - \omega^2)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}} d\omega + a(t). \quad (\text{C.1})$$

Vamos adotar a seguinte notação para reescrever o integrando da Eq. (C.1)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{t+\tau} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} g_{t+\tau}\right); & \omega_2 &= \sin\left\{\frac{\pi}{2} [a(t + \tau) + v]\right\} \\ \tilde{a}(t + \tau) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} a(t + \tau)\right]; & \omega_1 &= \sin\left\{\frac{\pi}{2} [a(t + \tau) - v]\right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Por conveniência, no que se segue vamos omitir o argumento das funções $a(t + \tau)$ e $\tilde{a}(t + \tau)$. Então, podemos reescrevermos ω_2 da seguinte forma

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \sin\left[\frac{\pi}{2}(a + v)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) \\ &= \tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) + \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde

$$\tilde{b} = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right). \quad (\text{C.4})$$

Utilizando a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}v\right), \quad (\text{C.5})$$

podemos escrever para ω_2

$$\omega_2 = \tilde{a} + \tilde{v}_2 \quad (\text{C.6})$$

onde introduzimos a quantidade \tilde{v}_2

$$\tilde{v}_2 = \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) - 2\tilde{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}v\right). \quad (\text{C.7})$$

Por outro lado, temos $\sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}v\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}v\right)$, logo

$$\tilde{v}_2 = 2\tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{4}v\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}v\right) - 2\tilde{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}v\right). \quad (\text{C.8})$$

Substituindo (C.8) em (C.6), obtemos então

$$\omega_2 = \tilde{a} + 2\tilde{b}\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} - 2\tilde{a}\varepsilon^2, \quad (\text{C.9})$$

onde

$$\varepsilon = \sin\left(\frac{\pi}{4}v\right) \quad (\text{C.10})$$

Fazendo um procedimento similar para $\omega_1 = \sin\left[\frac{\pi}{2}(a - v)\right]$ obtemos

$$\omega_1 = \tilde{a} - 2\tilde{b}\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} - 2\tilde{a}\varepsilon^2, \quad (\text{C.11})$$

De (C.9) e (C.11) segue que

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\tilde{a}(1 - 2\varepsilon^2) \quad (\text{C.12})$$

e

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= \tilde{a}^2(1 - 2\varepsilon^2)^2 - 4\tilde{b}^2\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2) \\ &= \tilde{a}^2 - 4\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

onde usamos que

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}a\right) = 1. \quad (\text{C.14})$$

Agora, utilizando (C.12) e (C.13) temos

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) &= \omega^2 - [2\tilde{a}(1 - 2\varepsilon^2)]\omega + \tilde{a}^2 - 4\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon^2) \\ &= (\omega - \tilde{a})^2 + 4\varepsilon^2(\tilde{a}\omega - 1 + \varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Utilizando (C.16) podemos reescrever o integrando em (C.1) na forma

$$\frac{\omega - \tilde{a}}{\sqrt{(1 - \omega^2)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)}\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2(\tilde{a}\omega - 1) + 4\varepsilon^4}{(\omega - \tilde{a})^2}}}. \quad (\text{C.16})$$

Usando a série de Taylor $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots$, podemos expandir a expressão acima da seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots \right) \quad (\text{C.17})$$

onde definimos

$$x = \frac{4\varepsilon^2(\tilde{a}\omega - 1) + 4\varepsilon^4}{(\omega - \tilde{a})^2} \simeq \frac{4\varepsilon^2(\tilde{a}\omega - 1)}{(\omega - \tilde{a})^2} + O(\varepsilon^4). \quad (\text{C.18})$$

Utilizando as expansões acima, a transformação dada na Eq. (C.1) pode ser escrita como

$$g_t = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)}} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots \right) d\omega + a(t). \quad (\text{C.19})$$

Os quatro termos incluídos dão termos da ordem ε^2 , então

$$g_t = \frac{2}{\pi} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3) + a(t). \quad (\text{C.20})$$

Vamos ver de maneira explícita cada uma das integrais acima. Para I_0 tem-se

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} d\omega \\ &= [\sin^{-1}(x)]_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \\ &= \sin^{-1}(\tilde{g}_{t+\tau}) - \sin^{-1}(\omega_1). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Substituindo (C.11) e as formas explícitas de $\tilde{g}_{t+\tau}$ e \tilde{a} definidas em Eq. (C.2), temos para I_0 , no limite inferior

$$\sin^{-1}(\omega_1) = \sin^{-1} \left[\tilde{a} - \overbrace{2(\tilde{b} + \tilde{a}\varepsilon)}^{=y} \right]. \quad (\text{C.22})$$

Para considerar todos os termos que dão uma contribuição até primeira ordem em ε , expandi-

mos em y a expressão acima

$$\begin{aligned}
 \sin^{-1}(\omega_1) &= \sin^{-1}(\tilde{a}) + \frac{d \sin^{-1}(y)}{dy} \Big|_{\tilde{a}} [-2\varepsilon(\tilde{b} + \tilde{a}\varepsilon)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2 \sin^{-1}(y)}{dy^2} \Big|_{\tilde{a}} [-2\varepsilon(\tilde{b} + \tilde{a}\varepsilon)]^2 + \dots \\
 &= \frac{\pi}{2} a + \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{a}^2}} [-2\varepsilon(\tilde{b} + \tilde{a}\varepsilon)] + \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}}{(1-\tilde{a}^2)^{3/2}} [-2\varepsilon(\tilde{b} + \tilde{a}\varepsilon)]^2 \dots \\
 &= \frac{\pi}{2} a - 2\varepsilon - 2\frac{\tilde{a}}{b}\varepsilon^2 + 2\frac{\tilde{a}}{b}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{C.23}
 \end{aligned}$$

onde usamos que $\sqrt{1-\tilde{a}^2} = \tilde{b}$. Substituindo (C.23) em (C.21) tem-se finalmente

$$I_0 = g_{t+\tau} - \frac{\pi}{2} a(t + \tau) + 2\varepsilon + O(\varepsilon^3). \tag{C.24}$$

Para I_1 temos

$$I_1 = -\frac{1}{2}(4\varepsilon^2) \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{\tilde{a}\omega - 1}{\sqrt{1-\omega^2}(\omega - \tilde{a})^2} d\omega, \tag{C.25}$$

$$= [f_1(g_{t+\tau}) - f_1(\omega_1)], \tag{C.26}$$

onde

$$f_1(\omega) = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega - \tilde{a}}. \tag{C.27}$$

No limite superior temos

$$f_1(g_{t+\tau}) = -2\varepsilon^2 \frac{\sqrt{1-\tilde{g}_{t+\tau}^2}}{\tilde{g}_{t+\tau} - \tilde{a}(t + \tau)}, \tag{C.28}$$

e no limite inferior

$$f_1(\omega_1) = \varepsilon \left(1 + \frac{\tilde{a}}{b}\varepsilon \right) + O(\varepsilon^3). \tag{C.29}$$

Logo para I_1 obtemos

$$I_1 = -2\varepsilon^2 \frac{\sqrt{1-\tilde{g}_{t+\tau}^2}}{\tilde{g}_{t+\tau} - \tilde{a}(t + \tau)} + \varepsilon \left(1 + \frac{\tilde{a}}{b}\varepsilon \right) + O(\varepsilon^3). \tag{C.30}$$

Para I_2 podemos escrever

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3}{8}(4\varepsilon^2)^2 \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{(\tilde{a}\omega - 1)^2}{\sqrt{1-\omega^2}(\omega - \tilde{a})^4} d\omega, \\ &= [f_2(g_{t+\tau}) - f_2(\omega_1)], \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

onde

$$f_2(\omega_1) = 6\varepsilon^4 \left[\frac{1}{6} \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{(\tilde{a}^2 - 1)(\omega - \tilde{a})^3} (3\omega\tilde{a}^3 - (\omega^2 - 1)\tilde{a}^2 - 9\tilde{a}\omega + 4\omega^2 + 2) \right] \quad (\text{C.32})$$

A função f_2 avaliada no limite superior vai dar um termo da ordem $O(\varepsilon^4)$, que pode ser desconsiderado. Assim temos

$$I_2 = -f_2(\omega_1) = \varepsilon^4 \frac{\sqrt{1-\omega_1^2}}{(\tilde{a}^2 - 1)(\omega_1 - \tilde{a})^3} [3\omega_1\tilde{a}^3 - (\omega_1^2 - 1)\tilde{a}^2 - 9\tilde{a}\omega_1 + 4\omega_1^2 + 2] \quad (\text{C.33})$$

Substituindo (C.11) na expressão entre colchetes, obtemos

$$[3\omega_1\tilde{a}^3 - (\omega_1^2 - 1)\tilde{a}^2 - 9\tilde{a}\omega_1 + 4\omega_1^2 + 2] = 2\tilde{b}^4 \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right). \quad (\text{C.34})$$

Os outros termos que aparecem em (C.33) também devem ser escritos como função de ε . Explicitamente temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\omega_1^2} &\simeq \omega_1 + 2\tilde{a}\varepsilon \\ (\tilde{a} - \omega_1)^3 &\simeq (2\tilde{b}\varepsilon)^3 \left(1 + 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right), \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Substituindo as expressões acima em I_2 e expandindo até primeira ordem em ε temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\varepsilon}{4} \left(1 + 2\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right) \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right) \left(1 - 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \left(1 + 2\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon - 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Para I_3 temos

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{15}{48}(4\varepsilon^2)^3 \int_{\omega_1}^{\tilde{g}_{t+\tau}} \frac{(\tilde{a}\omega - 1)^3}{\sqrt{1 - \omega^2}(\omega - \tilde{a})^6} d\omega \\ &= [f_3(g_{t+\tau}) - f_3(\omega_1)], \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde

$$\begin{aligned} f_3 &= -20\varepsilon^6 \left\{ \frac{1}{60} \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{(\omega - \tilde{a})^5} \left[\frac{\tilde{a}(2\tilde{a}^2 + 13)(\tilde{a} - \omega)^3}{(\tilde{a}^2 - 1)} + 2(\tilde{a}^2 + 8)(\tilde{a} - \omega)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 18\tilde{a}(\tilde{a}^2 - 1)(\omega - \tilde{a}) + 12(\tilde{a}^2 - 1)^2 + \frac{(2\tilde{a}^4 + 11\tilde{a}^2 + 32)(\tilde{a} - \omega)^4}{(\tilde{a}^2 - 1)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Novamente, a função f_3 calculada no limite superior produz termos de ordem $O(\varepsilon^2)$, e estes não são levados em consideração. Avaliando f_3 em ω_1 temos

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\varepsilon^6}{3} \frac{\sqrt{1 - \omega_1^2}}{(\omega_1 - \tilde{a})^5} \left[\frac{\tilde{a}(2\tilde{a}^2 + 13)(\tilde{a} - \omega_1)^3}{(\tilde{a}^2 - 1)} + 2(\tilde{a}^2 + 8)(\tilde{a} - \omega_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + 18\tilde{a}(\tilde{a}^2 - 1)(\omega_1 - \tilde{a}) + 12(\tilde{a}^2 - 1)^2 + \frac{(2\tilde{a}^4 + 11\tilde{a}^2 + 32)(\tilde{a} - \omega_1)^4}{(\tilde{a}^2 - 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Para termos do tipo $(\tilde{a} - \omega_1)$ pode-se escrever

$$\tilde{a} - \omega_1 = 2\tilde{b}\varepsilon \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right),$$

o que implica para os termos dentro do colchete que são multiplicados por fatores de $(\tilde{a} - \omega_1)$ com potências maiores do que um, vão ser de ordem maior $O(\varepsilon^2)$, e por isso esses termos não contribuem para a integral. Assim, para o termo entre colchetes temos

$$\begin{aligned} 18\tilde{a}(\tilde{a}^2 - 1)(\omega_1 - \tilde{a}) + 12(\tilde{a}^2 - 1)^2 &= 18\tilde{a}\tilde{b}^2(2\tilde{b}\varepsilon) + 12\tilde{b}^4 \\ &= 12\tilde{b}^4 \left(1 + 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Por outro lado

$$\frac{\sqrt{1 - \omega_1^2}}{(\omega_1 - \tilde{a})^5} = \frac{\tilde{b} \left(1 + 2\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right)}{(-2\tilde{b}\varepsilon)^5 \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\varepsilon \right)^5} \quad (\text{C.41})$$

Explicitamente para I_3 temos:

$$I_3 = \frac{1}{3} \varepsilon^6 \frac{\tilde{b} \left(1 + 2\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \varepsilon\right)}{(-2\tilde{b}\varepsilon)^5 \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \varepsilon\right)^5} 12\tilde{b}^4 \left(1 + 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} \varepsilon\right) \quad (\text{C.42})$$

expandindo até primeira ordem em ε , I_3 fica como

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\varepsilon}{8} \left(1 + 2\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \varepsilon + 3\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \varepsilon - 5\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{8} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

As equações (C.24), (C.30), (C.36) e (C.43), correspondem após uma mudança trivial de variáveis, às Eqs. (5.27-5.30), como desejavamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Saffman, “Viscous fingering in the Hele-Shaw cells,” *J. Fluid. Mech.*, vol. 173, pp. 73–94, 1986.
- [2] T. A. Witten and L. M. Sander, “Diffusion-limited aggregation: A kinetic critical phenomena,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 47, pp. 1400–1403, 1981.
- [3] S. R. Forrest and T. A. Witten *J. Phys. A*, vol. 12, p. 109, 1979.
- [4] M. B. Hastings and L. S. Levitov, “Laplacian growth as one-dimensional turbulence,” *Physica D*, vol. 116, p. 224, 1998.
- [5] D. Benny, M. J. Feigenbaum, H. G. Hentschel, and I. Procaccia, “Conformal dynamics of fractal growth patterns without randomness,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 1706–1714, 2000.
- [6] F. Barra, D. Benny, L. Anders, and I. Procaccia, “Diffusion Limited Aggregation and Conformal Maps,” *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 1368–1378, 1999.
- [7] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [8] O. Schramm, “Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees,” *Isr. J. Math.*, vol. 118, pp. 221–228, 2000.
- [9] H. C. Fogedby, “Stochastic Loewner Evolution,” *arXiv:0706.1177v1*, vol. cond-mat.stat-mech, 2007.
- [10] F. G. Lawler, “Conformal invariance and 2D statistical physics,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 46, pp. 35–54, 2009.
- [11] M. Bauer and D. Bernard, “2D growth processes: SLE and Loewner Chains,” *Physics Reports*, vol. 432, pp. 115–221, 2006.
- [12] G. F. Lawler, “An introduction to the Stochastic Loewner Evolution,” disponível online <http://www.math.duke.edu/jose/papers.html>.

- [13] J. Cardy, “SLE for theoretical physicist,” *Annals of Physics*, vol. 318, pp. 81–118, 2005.
- [14] O. Schramm and S. Rohde, “Basic properties of SLE,” *Annals of Mathematics*, vol. 161, pp. 833–924, 2005.
- [15] L. P. Duren, *Univalent Functions*. Springer, New York, 1983.
- [16] W. Kager and B. Nienhuis, “A guide to stochastic Loewner evolution and its applications,” *J. of Stat. Phys.*, vol. 115, pp. 1149–1229, 2004.
- [17] L. de Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture,” *Act. Math.*, vol. 154, pp. 137–152, 1985.
- [18] D. E. Marshall and S. Rohde, “The Loewner differential equations and slit mappings.” disponível online <http://www.math.washington.edu/rohde/>.
- [19] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, “On de scaling limit of planar sel-avoiding walk, in Fractal geometry and applications,” *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 72, pp. 339–364, 2004.
- [20] D. Bauer, M. Bernard and J. Houdayer, “Dipolar SLEs,” *J. Stat. Mech.*, 2005.
- [21] O. Schramm and S. Sheffield, “The harmonic explorer and its convergence to SLE(4),” *Ann. Probab.* 33, p. 2127–2148, 2005.
- [22] O. Schramm, “Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees,” *Israel J. Math.*, vol. 118, pp. 221–288, 2000.
- [23] J. Cardy, “Lectures on stochastic Loewner evolution and other growth processes in two dimensions,” *Lectures given at the school on Non-Equilibrium Dynamics of Interacting Particle Systems*, 2006.
- [24] I. A. Gruzberg and L. P. Kadanoff, “Exact solutions for Loewner evolutions,” *J. Stat. Phys.*, vol. 114, p. 1183, 2004.
- [25] G. F. Carrier, M. Krook, and C. E. Pearson, *Functions of a complex variable: theory and technique*. Hod Books, Ithaca, 1983.
- [26] T. Gubiec and P. Szymczak, “Fingered growth in the channel geometry: A Loewner equation approach,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, p. 041602, 2008.

- [27] W. Kager, B. Nienhuis, and L. P. Kadanoff, “Clustering data by inhomogeneous chaotic map lattices,” *J. Stat. Phys.*, vol. 115, p. 805, 2004.
- [28] F. Calogero, “Solution of the one dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 419–436, 1971.
- [29] J. Moser, “Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations,” *Adv. Math.*, vol. 16, pp. 197–220, 1975.
- [30] G. Selander, *Two deterministic growth models related to diffusion-limited aggregation*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999. (in English).
- [31] M. Durán and G. L. Vasconcelos, “Interface growth in two dimensions: A Loewner-equation approach,” *Phys. Rev. E*, vol. 246, p. 012023, 2010.
- [32] O. Zik and E. Moses *Phys. Rev. E*, vol. 60, p. 518, 1999.
- [33] M. Durán and G. L. Vasconcelos, “Loewner equation for Laplacian growth: A Schwarz-Christoffel-transformation approach,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 82, p. 031602, 2010.
- [34] P. Pelce, “Dynamics of curved fronts,” *Perspectives in Physics*, vol. 118, pp. 221–228, 1988.
- [35] M. Antônio, *Soluções Exatas para Arranjos Periódicos de Bolhas na Célula de Hele-Shaw*. MSc. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Física, 2008.

APÊNDICE D

Trabalhos publicados

Loewner equation for Laplacian growth: A Schwarz-Christoffel-transformation approach

M. Durán and G. L. Vasconcelos

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife, Brazil.

E-mail: giovani@df.ufpe.br

Abstract. The problem of Laplacian growth is considered within the Loewner-equation framework. A new method of deriving the Loewner equation for a large class of growth problems in the half-plane is presented. The method is based on the Schwarz-Christoffel transformation between the so-called ‘mathematical planes’ at two infinitesimally separated times. Our method not only reproduces the correct Loewner evolution for the case of slit-like fingers but also can be extended to treat more general growth problems. In particular, the Loewner equation for the case of a bubble growing into the half-plane is presented.

1. Introduction

The Loewner equation [1] is an important result in the theory of univalent functions [2] that has found important applications in nonlinear dynamics, statistical physics, and conformal field theory [3, 4]. In its most basic formulation, the Loewner equation is a first-order differential equation for the conformal mapping $g_t(z)$ from a given ‘physical domain,’ consisting of a complex region \mathbb{P} minus a curve Γ_t emanating from its boundary, onto a ‘mathematical domain’ represented by \mathbb{P} itself. Usually, \mathbb{P} is either the upper half-plane or the exterior of the unit circle, but recently the Loewner equation for the channel geometry was also considered [5]. The Loewner equation depends on a driving function, here called $a(t)$, that is the image of the growing tip under the mapping $g_t(z)$. An important development on the theory of the Loewner equation was the discovery by Schramm [6] that when the driving function $a(t)$ is a Brownian motion the resulting Loewner evolution describes the scaling limit of certain statistical mechanics models. This result spurred great interest in the so-called stochastic Loewner equation [4].

Recently, the deterministic Loewner equation was also used to study the problem of Laplacian fingered growth in both the half-plane and radial geometries [7, 8] as well as in the channel geometry [5]. In this case, the driving function $a(t)$ has to follow a specific time evolution in order to ensure that the finger tip grows along the gradient lines of the corresponding Laplacian field. The idea of using iterated conformal maps to generate aggregates was first deployed by Hastings and Levitov [9] in the context of stochastic growth models, such as diffusion limited aggregation; see, e.g., [10] for further developments along those lines. A deterministic version of the Hastings-Levitov model that is closely related to the Loewner-equation approach—albeit not using explicitly such a formalism—was studied in [11].

In this paper we consider the problem of Laplacian growth within the context of the Loewner evolution, and present a new method of deriving the corresponding Loewner equation for a broad

class of growth models in the half-plane. Our method is based on the Schwarz-Christoffel (SC) transformation between the mathematical planes g_t and $g_{t+\tau}$, where τ is an infinitesimal time interval. More specifically, the method consists of expanding the integrand of the SC formula in powers of the appropriate infinitesimal quantity (related to τ) and then performing the integrals up to the leading-order term. Our method correctly yields the Loewner evolution for the case of slit-like fingers studied before [5, 8]. More importantly, the method is able to handle more general growth problems, so long as the growth rule can be specified (in the mathematical plane) in terms of a polygonal curve, in which case the Schwarz-Christoffel transformation can be used. An example is given for the case of a bubble growing from the real axis into the upper half-plane.

2. Loewner Equation for Slit-like Fingers

2.1. The Case of a Single Finger

In order to set the stage for the remainder of the paper, we wish to begin our discussion by considering the simplest Loewner evolution, namely, that in which a curve starts from the real axis at $t = 0$ and then grows into the upper half- z -plane \mathbb{H} , where

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

The curve at time t is denoted by Γ_t and its growing tip is labeled by $\gamma(t)$. Now let $g_t(z)$ be the conformal mapping that maps the ‘physical domain,’ corresponding to the upper half- z -plane minus the curve Γ_t , onto the upper half-plane of an auxiliary complex w -plane, called the ‘mathematical plane,’ i.e., we have $w = g_t(z)$, where

$$g_t : \mathbb{H} \setminus \Gamma_t \rightarrow \mathbb{H}, \quad (1)$$

with the curve tip $\gamma(t)$ being mapped to a point $a(t)$ on the real axis in the w -plane; see Fig. 1. Furthermore, we consider the growth process to be such that the accrued portion of the curve from t to $t + \tau$, where τ is an infinitesimal time interval, is mapped under $g_t(z)$ to a vertical slit in the mathematical w -plane; see Fig. 1. The mapping function $g_t(z)$ must also satisfy the initial condition

$$g_0(z) = z, \quad (2)$$

since we start with an empty upper half-plane. We also impose the so-called hydrodynamic normalization condition at infinity:

$$g_t(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

These conditions specify uniquely the mapping function $g_t(z)$.

From a more physical viewpoint, the problem formulated above belong to the class of Laplacian growth models where an interface evolves between two phases driven by a scalar field $\phi(x, y; t)$, representing, for example, temperature, pressure, or concentration, depending on the physical problem at hand. In one phase, initially occupying the entire upper half-plane, the scalar field ϕ satisfies the Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4)$$

whereas in the other phase one considers $\phi = \text{const.}$, say $\phi = 0$, with the curve Γ_t representing a finger-like advancing interface between the two phases. (Here the finger is assumed to be infinitesimally thin.) The complex potential for the problem can then be defined as $w(z, t) = \psi(x, y; t) + i\phi(x, y; t)$, where ψ is the function harmonically conjugated to ϕ . On the boundary of the physical domain, consisting here of the real axis together with the curve Γ_t ,

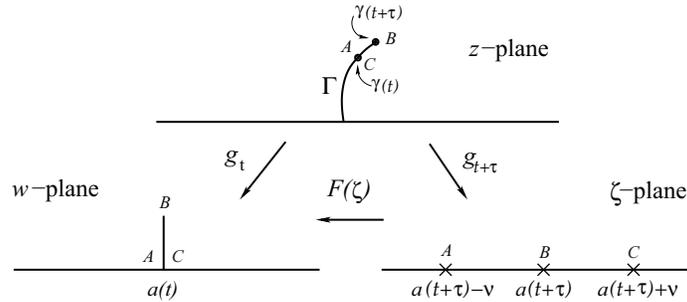


Figure 1. The physical z -plane and the mathematical w - and ζ -planes at times t and $t + \tau$, respectively, for a single finger in the upper half-plane. The mapping g_t maps the curve Γ (at time t) onto a segment of the real axis on the w -plane, whereas the accrued portion of the curve (during time interval τ) is mapped to a vertical slit. The mapping g_t is obtained as the composition of $g_{t+\tau}$ and the slit mapping F ; see text.

we impose the condition $\phi = 0$, whereas at infinity we assume a uniform gradient field, $\vec{\nabla}\phi \approx \hat{y}$, or alternatively,

$$w(z, t) \approx z, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

From this point of view, the mapping function $g_t(z)$ introduced above corresponds precisely to the complex potential $w(z, t)$ of the problem. In particular, the fact that in the w -plane the curve grows along a vertical line implies that the finger tip grows along gradient lines in the z -plane. To specify completely a given physical model, one has also to prescribe the interface velocity, which is usually taken to be proportional to some power η of the gradient field: $v \sim |\vec{\nabla}\phi|^\eta$. For most of the problems considered here the specific velocity model is not relevant, in the sense that the finger shapes will be independent of the exponent η , which only affects the time scale of the problem. (However, there are situations, such as the case of competing asymmetrical fingers [5], where different η 's may yield different patterns.)

For convenience of notation, we shall represent the mathematical plane at time $t + \tau$ as the complex ζ -plane and so we write $\zeta = g_{t+\tau}(z)$. Now consider the mapping $w = F(\zeta)$, from the upper half- ζ -plane onto the mathematical domain in the w -plane; see Fig. 1. The mapping function $g_{t+\tau}(z)$ can then be given in terms of $g_t(z)$ as

$$g_{t+\tau} = F^{-1} \circ g_t, \quad (6)$$

where F^{-1} is the inverse of $F(\zeta)$. The above relation governs the time evolution of the function $g_t(z)$ and naturally leads to the Loewner equation. A standard way of showing this is to construct the slit mapping $F(\zeta)$ explicitly, substitute its inverse in (6), and then take the limit $\tau \rightarrow 0$. One then finds the Loewner equation

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)}, \quad (7)$$

where $d(t)$ is the so-called growth factor which is related to the tip velocity. One can show [5] that $d(t) = |f_t''(a(t))|^{-\eta/2-1}$, where $f_t(z)$ is the inverse of $g_t(z)$. Here, however, the specific form of $d(t)$ is not relevant since we can always rescale the time coordinate in (7) so as to set $d(t) = 1$. From symmetry, one also gets

$$\dot{a}(t) = 0, \quad (8)$$

so that $a(t) = a_0 = \text{const.}$, which implies that the tip $\gamma(t)$ simply traces out a vertical line in the z -plane.

In more general situations, such as the case of multiple fingers, the function $F(\zeta)$ can no longer be obtained in closed form and so one has to resort to alternative approaches to derive the Loewner evolution. Previous methods [5, 8] consider a series of compositions of the basic one-slit mapping. Here, however, we will apply a more direct method based on the Schwarz-Christoffel transformation to obtain the Loewner equation for slit-like fingers in the half-plane. In the next section, our method will be extended to treat the case of a growing bubble in the upper half-plane. To illustrate how the method works, let us first use it to derive the Loewner equation (7) for a single finger.

We begin by inverting (6) so as to write

$$g_t = F \circ g_{t+\tau}. \quad (9)$$

The mapping $F(\zeta)$ from the upper half- ζ -plane onto the upper half- w -plane with a vertical slit (see Fig. 1) is easily found by a direct application of the Schwarz-Christoffel formula [12]. One then finds

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \frac{\zeta - a(t + \tau)}{\sqrt{(\zeta - a(t + \tau))^2 - \nu^2}} d\zeta + a(t), \quad (10)$$

where $\zeta_0 = a(t + \tau) + \nu$. Note from Fig. 1 that the parameter ν is related to the (infinitesimal) height of the slit in the w -plane. The above integral can be performed exactly, as already mentioned, but here we take an alternative approach, namely, we first expand the integrand in (10) in powers of ν and then compute the relevant integrals afterwards. To do that we first rewrite (10) in the form

$$g_t = \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \nu^2[\zeta - a(t + \tau)]^{-2}}} + a(t). \quad (11)$$

After expanding the integrand in powers of ν^2 and performing the relevant integrals, one obtains that, up to order ν^2 , equation (11) becomes

$$g_{t+\tau} - g_t = \frac{\nu^2/2}{g_{t+\tau} - a(t + \tau)} + a(t + \tau) - a(t). \quad (12)$$

Now expanding this equation up to the first order in τ , dividing by τ , and then taking $\tau \rightarrow 0$, one gets

$$\dot{g}_t = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)} + \dot{a}, \quad (13)$$

where

$$d(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\nu^2}{2\tau}. \quad (14)$$

Using the boundary condition $\lim_{g_t \rightarrow \infty} \dot{g}_t = 0$, which follows from (3), yields precisely the Loewner equation (7) together with the condition (8).

2.2. The Multifinger Case

Here we consider the case of multiples fingers Γ_i , $i = 1, \dots, n$, growing from the real axis into the upper half- z -plane, as shown in Fig. 2. As before, the map $g_t(z)$ maps the physical domain in the z -plane onto the upper half- w -plane and the tips are required to grow along gradient lines, so that the accrued portions of the curves Γ_i during an infinitesimal time τ are mapped under $g_t(z)$ to vertical slits emanating from the real axis; see Fig 2.

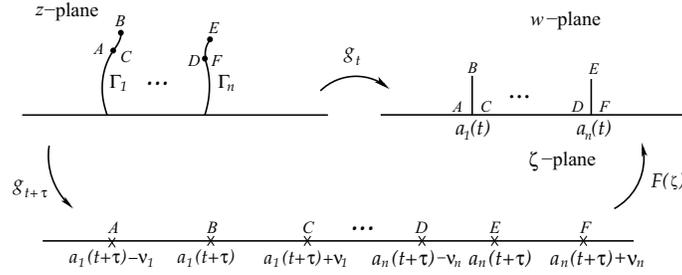


Figure 2. The physical and mathematical planes for the case of multiple fingers in the upper half-plane.

The mapping $w = F(\zeta)$, from the upper half- ζ -plane to the upper half- w -plane with n vertical slits, can again be easily obtained from the Schwarz-Christoffel transformation [12]:

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^n \frac{\zeta - a_i(t + \tau)}{\sqrt{(\zeta - a_i(t + \tau))^2 - \nu_i^2}} d\zeta + a_j(t), \quad (15)$$

where $\zeta_0 = a_j(t + \tau) + \nu_j$ for a given j . [We remark parenthetically that in writing (15) we have assumed, for simplicity, that the slits in the w -plane are mapped under $F^{-1}(w)$ onto symmetrical segments on the real ζ -axis; see Fig 2. Rigorously speaking, this is valid only in the limit that the slit heights become vanishingly small, that is, when $\tau \rightarrow 0$, which is the relevant limit for us here.]

The integral in (15) cannot be performed exactly for arbitrary n , hence in order to obtain the Loewner equation for this case we first need to expand the integrand in powers of the infinitesimal parameters ν_i and then proceed with the integration. Note, however, that each term in (15) is of the same form as that appearing in (10) for the case of a single finger. We can thus build upon our experience with that case to treat the present situation. In particular, we notice that the mixed terms involving different ν_i 's in the expansion of the integrand in (15) are all of orders higher than ν^2 and hence need not be considered, for they do not contribute to the final result in the limit $\tau \rightarrow 0$. Thus, to the extent that the mixed terms can be neglected, we can rewrite (15) as

$$g_t \approx \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \nu_i^2 [\zeta - a_i(t + \tau)]^2}} + a_j(t). \quad (16)$$

Now repeating the exactly same procedure used for the single finger case, see Eqs. (11)-(13), one readily obtains

$$\dot{g}_t = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t - a_i(t)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_i(t)}{a_j(t) - a_i(t)} + \dot{a}_j(t), \quad (17)$$

where

$$d_i(t) = \frac{\nu_i^2}{2\tau}. \quad (18)$$

After using the condition $\lim_{g_t \rightarrow \infty} \dot{g}_t = 0$ in (17), we get the Loewner equation for multiple curves

$$\dot{g}_t = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t - a_i(t)}, \quad (19)$$

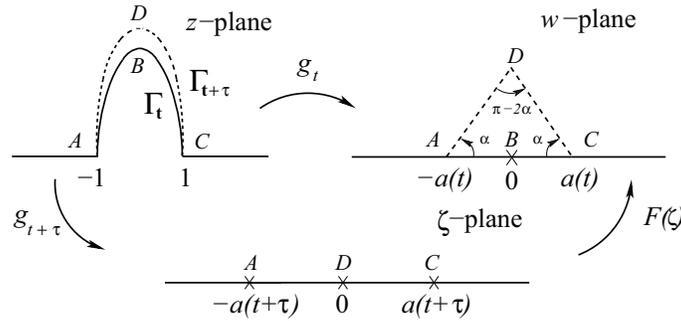


Figure 3. The physical and mathematical planes for the case of a growing bubble in the upper half-plane. Here the new interface at time $t + \tau$ is mapped under g_t to a tent-like shape; see text for details.

with the time evolution of the points $a_i(t)$ being given by the following system of ordinary differential equations

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{d_j(t)}{a_i(t) - a_j(t)}. \quad (20)$$

If the growth factors $d_i(t)$ are all the same, we can again rescale the time variable so as to set $d_i = 1$. In particular, in the case of two symmetrical fingers (i.e., $d_1 = d_2 = 1$), equation (19) can be integrated exactly to yield the mapping function $g_t(z)$, from which the finger shapes can be computed analytically [5]. A related exact solution for two fingers was obtained in [13]. An alternative derivation of (19) was given elsewhere [8] using a composition of n single-slit mappings. Our method, however, is somewhat more direct in the sense that it considers a single mapping with n slits as shown in Fig 2. In the next section we will extend our method to include the case of a growing bubble in the half-plane.

3. Loewner Equation for a Bubble in the Half-Plane

Here we consider the problem of an interface starting initially from a segment, say, $[-1, 1]$, along the real axis and then growing into the upper half- z -plane, as indicated in Fig. 3. As before, we denote the interface at time t by Γ_t and consider the mapping $g_t(z)$ from the physical domain in the z -plane to the mathematical w -plane:

$$g_t : \mathbb{H} \setminus \Gamma_t \rightarrow \mathbb{H}.$$

The mapping function $g_t(z)$ must also satisfy the hydrodynamic normalization condition (3). The growth dynamics is specified by requiring that each point on the interface grow along gradient lines, but with a growth rate that is maximum at the center (i.e., at the bubble tip) and zero at both ‘contact points,’ $z = \pm 1$, in such a way that the interface at time $t + \tau$ is mapped under $g_t(z)$ to a tent-like shape, as shown in Fig. 3. The height of this tent, or alternatively, the angle α formed with the real axis, is linearly related to τ in the limit $\tau \rightarrow 0$, as we will see below. Here we consider only the case of symmetric bubbles, where the contact points, $z = \pm 1$, are mapped by $g_t(z)$ to the points $w = \pm a(t)$, respectively, and the tip (point B in Fig. 3) is mapped to the origin.

Since the domain in the w -plane has a polygonal shape, the mapping $w = F(\zeta)$ can once again be obtained from the Schwarz-Christoffel transformation. In this case we have

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{a(t+\tau)}^{g_{t+\tau}} \frac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{[\zeta^2 - a^2(t+\tau)]^{\alpha/\pi}} d\zeta + a(t), \quad (21)$$

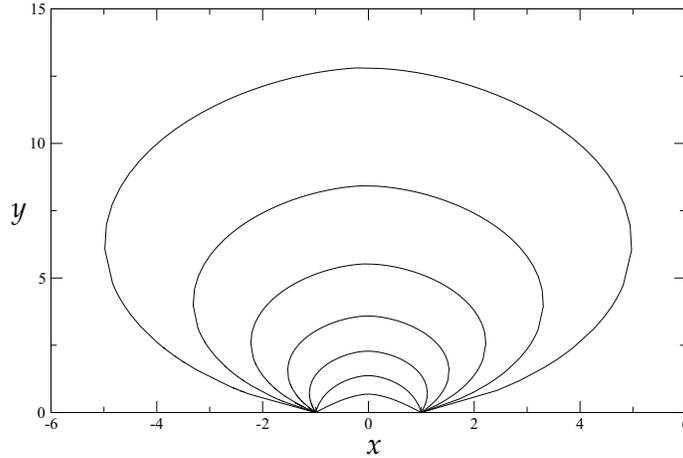


Figure 4. Loewner evolution for a bubble growing in the upper half-plane for $d(t) = 1$. The bubble starts at $t = 0$ from the interval $[-1, 1]$ on the real axis. The different curves represent the interface at time intervals of $\Delta t = 0.3$.

which up to the first order in the parameter α becomes

$$g_t \approx \int_{a(t+\tau)}^{g_{t+\tau}} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} [2 \ln \zeta - \ln(\zeta^2 - a^2(t + \tau))] \right\} d\zeta + a(t), \quad (22)$$

After performing the integral above and taking the limit $\tau \rightarrow 0$, one readily obtains the following generalized Loewner equation:

$$\dot{g}_t(z) = d(t) \{ [g_t + a(t)] \ln [g_t + a(t)] + [g_t - a(t)] \ln [g_t - a(t)] - 2g_t \ln g_t \}, \quad (23)$$

together with the governing equation for the logarithmic singularity $a(t)$

$$\dot{a}(t) = (\ln 4)d(t)a(t), \quad (24)$$

where the growth factor $d(t)$ is now given by

$$d(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi \tau}. \quad (25)$$

Equation (24) can be solved exactly to yield $a(t) = a_0 4^{\int_0^t d(t') dt'}$. As explained before, we can set $d(t) = 1$ by rescaling the time coordinate, in which case we have $a(t) = a_0 4^t$. Recall also that the Loewner equation (23) must be supplemented with the initial condition $g_0(z) = z$.

In Fig. 4 we show numerical solutions of (23) with $a_0 = 1$ for various final times t , starting from $t = 0.3$ up to $t = 2.1$ with a time separation of $\Delta t = 0.3$ between successive curves. To generate the curves shown in Fig. 4 we used the numerical scheme described in [13]. More specifically, we start with a ‘terminal condition’ $g_t = w$, for $w \in [-a(t), a(t)]$, and integrate the Loewner equation (23) backwards in time, using a Runge-Kutta method of second order, to get the corresponding point g_0 on the interface. (See also [14] for a recent review on numerical integration of the Loewner equation.) From Fig. 4 one sees that the bubble initially grows somewhat slowly and then rapidly expands and tends to occupy the whole plane for large times. In fact, one can show that (for $d = 1$) the tip velocity grows exponentially with time as $t \rightarrow \infty$. It is possible to modify the growth factor $d(t)$ so to have the tip velocity related to the gradient of the field $\phi(x, y)$, as discussed in Sec. 2, but this does not change the interface shapes and only alters the time scale of the bubble evolution.

4. Conclusions

We have presented a novel method to derive the Loewner equation for Laplacian growth problems. The method is based on the Schwarz-Christoffel (SC) transformation and consists of expanding the integrand of the SC formula in the appropriate infinitesimal parameter, performing the relevant integrals, and then taking the limit in which the infinitesimal parameter goes to zero. Our method is able to reproduce the Loewner evolution for the problem of slit-like fingers in both the half-plane (Sec. 2) and the channel geometry (not shown here). Furthermore, the method can be extended to treat more complicated growth problems, so long as the growth dynamics in the complex-potential plane can be specified in terms of a polygonal boundary, in which case the Schwarz-Christoffel transformation can be used. We note however that the requirement that the growth rule be formulated in terms of a polygonal curve is not as restrictive as it seems, for any simple curve can in principle be approximated by a piecewise linear function. [Such more general growth models are currently under investigation.] In particular, we obtained the Loewner equation for a novel situation in which a bubble grows from a segment of the real line into the upper half-plane. Although in this case we refer to the evolving interface as a growing ‘bubble,’ in contrast to the slit-like ‘fingers’ of Sec. 2, this terminology should not be taken literally. Depending on the physical problem at hand, such growing interface may represent, say, an expanding front in combustion experiments or in electrochemical deposition [5]. Of course, further work is necessary to relate more directly the growth models discussed here to experiments.

Acknowledgments

This work was supported in part by the Brazilian agencies FINEP, CNPq, and FACEPE and by the special programs PRONEX and CT-PETRO.

References

- [1] Löwner K 1923 *Math. Ann.* **89** 103.
- [2] Duren P L 1983 *Univalent Functions* (Springer, New York.)
- [3] Gruzberg I A and Kadanoff L P 2004 *J. Stat. Phys.* **114** 1183.
- [4] Bauer M and Bernard D 2006 *Phys. Rep.* **432** 115.
- [5] Gubiec T and Szymczak P 2008 *Phys. Rev. E* **77** 041602.
- [6] Schramm O 2000 *Israel J. Math.* **118** 221.
- [7] Carleson L and Makarov N 2002 *J. Anal. Math.* **87**, 103.
- [8] Selander G 1999 *Ph.D. thesis* (Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden) (unpublished).
- [9] Hastings M B and Levitov L S 1998 *Physica D* **116** 244.
- [10] Davidovitch B, Feigenbaum M J, Hentschel H G E, and Procaccia I 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1706 (2000);
- [11] Hastings M B 2001 *Phys. Rev. E* **64** 046104.
- [12] Carrier G F, Krook M and Pearson C E 1983 *Functions of a complex variable: theory and technique* (Hod Books, Ithaca.)
- [13] Kager W, Nienhuis B and Kadanoff L P 2004 *J. Stat. Phys.* **115** 805.
- [14] Kennedy T 2009 *J. Stat. Phys.* **137** 839.

Interface growth in two dimensions: A Loewner-equation approach

Miguel A. Durán and Giovani L. Vasconcelos*

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife, PE, Brazil

(Received 3 March 2010; revised manuscript received 8 June 2010; published 1 September 2010)

The problem of Laplacian growth in two dimensions is considered within the Loewner-equation framework. Initially the problem of fingered growth is revisited and an exact solution for a three-finger configuration is reported. Then a general class of growth models for an interface growing in the upper half-plane is introduced and the corresponding Loewner equation for the problem is derived. Several examples are given including interfaces with one or more tips as well as multiple growing interfaces. A generalization of our interface growth model in terms of “Loewner domains,” where the growth rule is specified by a time evolving measure, is briefly discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevE.82.031601](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.031601)

PACS number(s): 68.70.+w, 05.65.+b, 61.43.Hv, 47.54.-r

I. INTRODUCTION

The Loewner equation [1] is an important result in the theory of univalent functions [2] that has found important applications in nonlinear dynamics, statistical physics, and conformal field theory [3–6]. In its most basic formulation, the Loewner equation is a first-order differential equation for the conformal mapping $g_t(z)$ from a given “physical domain,” consisting of a complex region \mathbb{P} minus a curve Γ_t emanating from its boundary, onto a “mathematical domain” represented by \mathbb{P} itself. Usually, \mathbb{P} is either the upper half-plane or the exterior of the unit circle, but recently the Loewner equation for the channel geometry was also considered [7]. The Loewner equation depends on a driving function, here called $a(t)$, that is the image of the growing tip under the mapping $g_t(z)$. An important development on the theory of the Loewner equation was the discovery by Schramm [8] that when the driving function $a(t)$ is a Brownian motion the resulting Loewner evolution describes the scaling limit of certain statistical mechanics models. This result spurred great interest in the so-called stochastic Loewner equation [4–6].

Recently, the deterministic Loewner equation was used to study the problem of Laplacian fingered growth in both the half-plane and radial geometries [9,10] as well as in the channel geometry [7]. In this class of models the growth takes place only at the tips of slit-like fingers and the driving function $a(t)$ has to follow a specific time evolution in order to ensure that the tip grows along gradient lines of the corresponding Laplacian field. In spite of its simplicity, the model was able to reproduce some of the qualitative behavior seen in experiments on fingered growth [7,11]. Nevertheless, treating the fingers as infinitesimally thin is a rather severe approximation and so this “thin” finger model is applicable only if the width of the fingers is much smaller than the separation between fingers. On the other hand, there are other instances of Laplacian growth where “extended fingers” (i.e., fingers with a finite, non-negligible width) are observed [12] and for such cases a description in terms of Loewner evolutions is still lacking.

One of the main motivations of this paper is to seek to develop a framework based on the Loewner equation in which one can study more general growth problems in two dimensions. We start our analysis by first revisiting the problem of fingered growth discussed in [7] and report an exact solution for the case of a symmetrical configuration with three fingers. We then move on to discuss a general class of growth models where an interface grows into the upper half-plane starting from a segment on the real axis. In our model, the growth rate is specified at a certain number of special points along the interface, referred to as “tips” and “troughs,” which then determine the growth rate at the other points of the interface according to a specific growth rule (formulated in terms of a polygonal curve in the mathematical plane). By making appropriate use of the Schwarz-Christoffel transformation, we are then able to derive the Loewner equation for the problem. Several examples are given in which the interface evolution is numerically computed by a direct integration of the Loewner equation. We also briefly discuss a more general formulation of the Loewner equation for interface growth in the upper half-plane where the growth rule is given in terms of a time evolving measure. This approach may open up the possibility for studying other interesting growth problems, such as the growth of fractal interfaces [13], within the context of stochastic Loewner evolutions.

The paper is organized as follows. In Sec. II we briefly review the problem of fingered growth in the upper half-plane in the context of the chordal Loewner equation and report a solution for a symmetrical configuration with three fingers. In Sec. III we discuss a general class of growth models in which the growing domain is delimited by an interface in the upper half-plane. Here we derive in Sec. III A a Loewner equation for the case in which the growth rule is specified in terms of a polygonal curve in the mathematical plane. Several examples are given in Sec. III B, including the cases of interfaces with one or more tips as well as the case of multiple growing interfaces. We then briefly discuss in Sec. III C a more general formulation for interface growth in

*giovani@df.ufpe.br

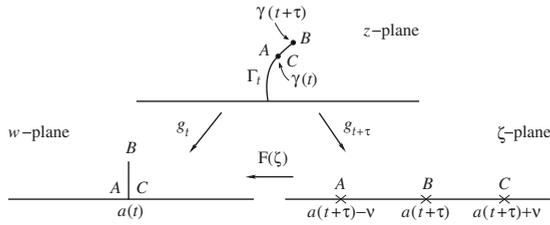


FIG. 1. The physical z -plane and the mathematical w - and ζ -planes at times t and $t + \tau$, respectively, for a single finger in the upper half-plane. The mapping g_t maps the curve Γ (at time t) onto a segment of the real axis on the w -plane, whereas the accrued portion of the curve (during time interval τ) is mapped to a vertical slit. The mapping g_t is obtained as the composition of $g_{t+\tau}$ and the slit mapping F ; see text.

the upper half-plane in terms of “Loewner domains.” Our main results and conclusions are summarized in Sec. IV.

II. FINGERED GROWTH AND THE CHORDAL LOEWNER EQUATION

In order to set the stage for the remainder of the paper and to establish the relevant notation, we begin our discussion by briefly reviewing the problem of fingered growth in the context of the chordal Loewner equation. To this end we consider first the simplest Loewner evolution, namely, that in which a curve starts from the real axis at $t=0$ and then grows into the upper half- z -plane \mathbb{H} , where

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

The curve at time t is denoted by Γ_t and its growing tip is labeled by $\gamma(t)$. Now let $g_t(z)$ be the conformal mapping that maps the “physical domain,” corresponding to the upper half- z -plane minus the curve Γ_t , onto the upper half-plane of an auxiliary complex w -plane, called the “mathematical plane,” i.e., we have $w = g_t(z)$, where

$$g_t : \mathbb{H} \setminus \Gamma_t \rightarrow \mathbb{H}, \tag{1}$$

with the curve tip $\gamma(t)$ being mapped to a point $a(t)$ on the real axis in the w -plane, as shown in Fig. 1. Furthermore, we consider the growth process to be such that the accrued portion of the curve from t to $t + \tau$, where τ is an infinitesimal time interval, is mapped under $g_t(z)$ to a vertical slit in the mathematical w -plane; see Fig. 1. The mapping function $g_t(z)$ must also satisfy the initial condition

$$g_0(z) = z, \tag{2}$$

since we start with an empty upper half-plane. We also impose the so-called hydrodynamic normalization condition at infinity,

$$g_t(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty. \tag{3}$$

These conditions specify uniquely the mapping function $g_t(z)$.

From a more physical viewpoint, the problem formulated above belong to the class of Laplacian growth models where

an interface evolves between two phases driven by a scalar field $\phi(x, y; t)$, representing, for example, temperature, pressure, or concentration, depending on the physical problem at hand. In one phase, initially occupying the entire upper half-plane, the scalar field ϕ satisfies the Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = 0, \tag{4}$$

whereas in the other phase one considers $\phi = \text{const.}$, say $\phi = 0$, with the curve Γ_t representing a finger-like advancing interface between the two phases. (Here the finger is assumed to be infinitesimally thin.) The complex potential for the problem can then be defined as $w(z, t) = \psi(x, y; t) + i\phi(x, y; t)$, where ψ is the function harmonically conjugated to ϕ . On the boundary of the physical domain, consisting here of the real axis together with the curve Γ_t , we impose the condition $\phi = 0$, whereas at infinity we assume a uniform gradient field, $\vec{\nabla} \phi \approx \hat{y}$, or alternatively,

$$w(z, t) \approx z, \quad z \rightarrow \infty. \tag{5}$$

From this point of view, the mapping function $g_t(z)$ introduced above corresponds precisely to the complex potential $w(z, t)$ of the problem. In particular, the fact that in the w -plane the curve grows along a vertical line implies that the finger tip grows along gradient lines in the z plane. To specify completely a given physical model, one has also to prescribe the interface velocity, which is usually taken to be proportional to some power η of the gradient field,

$$v_n \sim |\vec{\nabla} \phi|^\eta. \tag{6}$$

We anticipate that for a single growing finger the specific velocity model is not relevant in the sense that the finger shape will be independent of the exponent η , which only affects the time scale of the problem. (For multifingers, however, different η 's may yield different patterns [7].)

For convenience of notation, we shall represent the mathematical plane at time $t + \tau$ as the complex ζ -plane and so we write $\zeta = g_{t+\tau}(z)$. Now consider the mapping $w = F(\zeta)$, from the upper half- ζ -plane onto the mathematical domain in the w -plane; see Fig. 1. The mapping function $g_{t+\tau}(z)$ can then be given in terms of $g_t(z)$ as

$$g_{t+\tau} = F^{-1} \circ g_t, \tag{7}$$

where F^{-1} is the inverse of $F(\zeta)$. The above relation governs the time evolution of the function $g_t(z)$ and naturally leads to the Loewner equation. A standard way of showing this is to construct the slit mapping $F(\zeta)$ explicitly, substitute its inverse in (7), and then take the limit $\tau \rightarrow 0$. One then finds the so-called *chordal Loewner equation*:

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)}, \tag{8}$$

together with the condition

$$\dot{a}(t) = 0, \tag{9}$$

so that $a(t) = a_0 = \text{const.}$, which implies that the tip $\gamma(t) = g_t^{-1}[a(t)]$ simply traces out a vertical line in the z plane. The growth factor $d(t)$ is related to the tip velocity by [7]

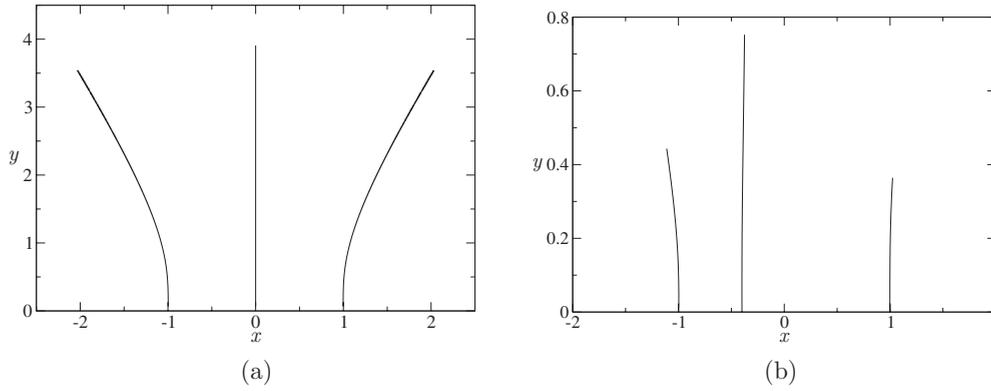


FIG. 2. Three fingers growing in the upper half-plane. In (a) we have a symmetrical configuration with $d_1=d_2=d_3=1$ and initial positions of the fingers at $a_3(0)=-a_1(0)=1$ and $a_2(0)=0$; in (b) we have $d_1=1, d_2=5, d_3=0.9$, while the initial positions are $a_3(0)=-a_1(0)=1$ and $a_2(0)=-0.4$.

$$d(t) = |f_t''(a(t))|^{-\eta/2-1}, \tag{10}$$

where $f_t(w)$ is the inverse of $g_t(z)$. As already anticipated, we can take $d(t)=d_0$ (which corresponds to $\eta=-2$) by reparametrizing the time coordinate.

In the case of multiple growing fingers [7], the chordal Loewner equation becomes

$$\dot{g}_t = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t - a_i(t)}, \tag{11}$$

with the time evolution of the singularities $a_i(t)$ given by

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{d_j(t)}{a_i(t) - a_j(t)}. \tag{12}$$

We recall that conditions (12) ensure that the fingers grow along gradient lines, meaning that the path traced by each finger tip $\gamma_i(t)$ from time t to $t+\tau$ is mapped by $g_t(z)$ onto a vertical slit. Notice also that if the growth factors $d_i(t)$ are all the same they can be assumed to be constant, say, $d_i(t)=1$ (which corresponds to $\eta=-2$), since this amounts to a mere rescaling of the time variable. For two symmetrical fingers, i.e., $d_1=d_2$, Eq. (11) can be integrated exactly to yield the mapping function $g_t(z)$, from which the finger shapes can be computed analytically [7]. A related exact solution for two fingers was reported in [14].

An exact solution for $g_t(z)$ can also be obtained for a symmetrical configuration with three fingers where the middle finger grows vertically, say, along the y axis, and the two flanking fingers are the mirror images of one another with respect to the y axis. This situation is attained by choosing identical growth factors, $d_1=d_2=d_3=d_0$, and symmetrical initial conditions, $a_3(0)=-a_1(0)=a_0$ and $a_2(0)=0$. This initial symmetry is, of course, preserved by the dynamics and so we have $a_2(t)=0$ and $a_3(t)=-a_1(t)=a(t)$ for all $t \geq 0$, which implies from Eq. (12) that

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + 3d_0t}. \tag{13}$$

Using this result one can integrate exactly the Loewner equation and obtain, after a straightforward calculation, the posi-

tions $\gamma_{1,3}(t)$ of the tips of the flanking fingers in terms of the following implicit equation

$$[\gamma_{1,3}(t)^2 - \beta_+]^{1+\alpha} [\gamma_{1,3}(t)^2 - \beta_-]^{1-\alpha} = (1 - \beta_+)^{1+\alpha} (1 - \beta_-)^{1-\alpha} (a_0^2 + 3d_0t)^2, \tag{14}$$

where $\alpha = \sqrt{3/19}$ and $\beta_{\pm} = (9 \pm \sqrt{57})/6$. In Eq. (14) one considers only the roots that lie in the upper half-plane and satisfy the initial condition $\gamma_{1,3} = \mp a_0$. In Fig. 2(a) we plot this solution for $a_0=1$ and $d_0=1$. From this figure one can see that the side fingers are “repelled” by the middle finger and tend to straight lines for sufficiently large times. In fact, one can verify from Eq. (14) that in the asymptotic limit $t \rightarrow \infty$ the flanking fingers approach the straight lines $\arg(z) = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{3/19})$ and $\arg(z) = \frac{\pi}{4}(3 - \sqrt{3/19})$.

If the growth factors are kept all equal but the initial condition is no longer symmetric, then the middle finger will initially be more repelled by the closest finger, thus leading to a symmetrical configuration in the limit $t \rightarrow \infty$ where the asymptotic (vertical) position of the middle finger now depends on the initial condition. On the other hand, if the growth factors are not all the same then the finger with greatest d_i will grow faster and screen the others. Here, however, the screening is partial in the sense that the ratio between the velocity of a slower finger and that of the fastest finger reaches a positive constant (different from unity). An example of this case is shown in Fig. 2(b) for the early stages of a three-finger evolution. In order to generate the curves shown in this figure we used the numerical scheme described in [14]. More specifically, we start with the “terminal condition” $g_t = a_i(t)$ and integrate the Loewner equation backward in time, using a Runge-Kutta method of second order, to get the position of the respective tip $\gamma_i(t) = g_0$. We dealt with the pole singularities in Eq. (11) in a manner similar to that used in [14], which in our case meant finding the appropriate root of a fourth-degree polynomial that gives the value of g at time $t-dt$, from where the Loewner equation can be integrated backward to yield g_0 . It is interesting to notice that the curves in Fig. 2(b) resemble certain fingering patterns seen in combustion experiments, see, e.g., Fig. 1e of Ref. [11], even though the solutions above are valid for the upper half-plane,

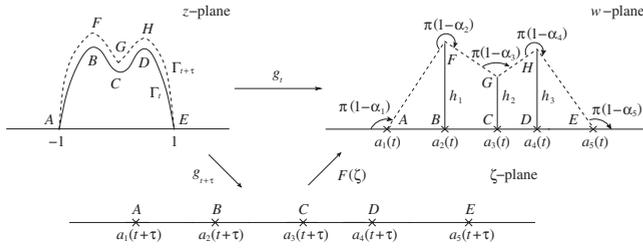


FIG. 3. The physical and mathematical planes for a growing interface. The mapping $g_t(z)$ maps the interface Γ_t to a segment on the real axis, while the interface $\Gamma_{t+\tau}$ is mapped to a polygonal curve; see text for details.

whereas the experiments take place in a channel geometry, and we have used constant growth factors (although with different values for each finger) rather than Eq. (10).

Before leaving this section we wish to recall here that the evolution entailed by the chordal Loewner equation, as given by Eqs. (8) or (11), describes a rather general class of “local growth” processes [5] in which there is one curve or a set of curves growing from the real axis into the upper half-plane \mathbb{H} . Indeed, it is a theorem [5,6] that if $\Gamma_{[0,\infty]}$ is a simple curve from the origin to ∞ in the upper half-plane \mathbb{H} , then there exists a function $a(t)$ such that the curve is generated by a Loewner evolution. Conversely, if $a(t)$ is a sufficiently well-behaved function (more specifically, Hölder continuous with exponent $>1/2$), then $\gamma_t = g_t^{-1}(a(t))$ is a growing curve in \mathbb{H} . More general growth processes not restricted to growing curves can be generated by the so-called “Loewner chains” [5],

$$\dot{g}_t(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(x)dx}{g_t(z) - x}, \quad (15)$$

where the density of singularities $\rho(x)$ can be viewed as a measure of the growth rate at a point z at the boundary of the growing set that is the preimage of x under $g_t(z)$. Since the shape of the growing domain is fully encoded in the map $g_t(z)$, Eq. (15) specifies the growth model once the density $\rho(x)$ is known. Although the formalism of Loewner chains is rather general, its practical usefulness is somewhat limited by the requirement that the relevant density $\rho(x)$ must be specified *a priori*. In this context, it should be noted that the only specific Loewner evolution that has been studied in detail concerns the local growth models mentioned above where the density is a sum of Dirac δ functions [5]. In the next section, we will study a class of interface growth models where the growth velocity is specified at certain points of the interface, which then determine the growth rate at all the other points according to a specific rule.

III. INTERFACE GROWTH IN THE HALF-PLANE

A. Generalized Loewner equation for a growing interface

Here we consider the problem of an interface starting initially from a segment, say, $[-1, 1]$, along the real axis and growing into the upper half- z -plane, as indicated in Fig. 3. We suppose that the growing interface has a certain number

of special points, referred to as *tips* or *troughs*, where the growth rate is a local maximum or a local minimum, respectively, while the interface end points remain fixed, as illustrated in Fig. 3 for the case of an interface with two tips (points B and D) and one trough (point C). Let us now denote by Γ_t the interface at time t and by K_t the growing region delimited by Γ_t and the real axis. Here we assume that the curve Γ_t is simple so that the domain $D_t = \mathbb{H} \setminus K_t$ is simply connected. (In more technical terms, K_t is a hull [5].) We then consider the mapping $w = g_t(z)$ from the physical domain D_t in the z -plane to the upper half-plane \mathbb{H} in the mathematical w -plane:

$$g_t : D_t \rightarrow \mathbb{H},$$

where the mapping function $g_t(z)$ is required to satisfy the hydrodynamic normalization condition

$$g_t(z) = z + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (16)$$

together with the initial condition

$$g_0(z) = z. \quad (17)$$

By definition, the interface Γ_t is mapped under $g_t(z)$ to an interval $[a_1(t), a_N(t)]$ on the real axis of the w -plane, where $a_1(t)$ and $a_N(t)$ are the images of the end points $z = \pm 1$, while the tips and troughs are mapped to the points $a_i(t)$, $i = 2, \dots, N-1$, with N being the total number of special points (i.e., tips, troughs and end points) of the interface. For instance, in Fig. 3 we have $N=5$.

The growth dynamics is specified by requiring that the tips and troughs of the interface grow along gradient lines, while the interface end points remain “pinned” at $z = \pm 1$, in such a way that the interface $\Gamma_{t+\tau}$ at time $t+\tau$, for infinitesimal τ , is mapped under $g_t(z)$ to a polygonal curve in the w -plane, as shown in Fig. 3. The domain $D_{t+\tau} = \mathbb{H} \setminus K_{t+\tau}$ is mapped under $g_t(z)$ to a degenerate polygon whose interior angle at the i th vertex is denoted by $\pi(1-\alpha_i)$, with the convention that if the angle is greater than π the corresponding parameter α_i is negative. It is easy to verify that the parameters α_i ’s satisfy the following relation:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad (18)$$

where we recall N is the number of vertices of the polygonal curve in the w -plane. If we now denote by h_i the height of the i th vertex as measured from the real axis (see Fig. 3), it is clear that h_i and hence the angle parameters α_i all go to zero as $\tau \rightarrow 0$. In this limit one obtains another relation among the α_i ’s,

$$\sum_{i=1}^N a_i \alpha_i = 0. \quad (19)$$

Let us now derive the Loewner evolution for the growth process described above. Since the domain in the w -plane has a polygonal shape, the mapping $w = F(\zeta)$ can be obtained from the Schwarz-Christoffel transformation [15],

$$g_t = F(g_{t+\tau}) = \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \prod_{i=1}^N [\zeta - a_i(t + \tau)]^{-\alpha_i} d\zeta + F(\zeta_0), \quad (20)$$

where ζ_0 is a point to be chosen appropriately; see below. The integral in Eq. (20) cannot be performed exactly for arbitrary α_i 's, and so in order to obtain the Loewner equation for this case we need an alternative approach. First we expand the integrand in Eq. (20) up to first order in the infinitesimal parameters α_i 's, thus getting

$$g_t \approx \int_{\zeta_0}^{g_{t+\tau}} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i \ln[\zeta - a_i(t + \tau)] \right\} d\zeta + F(\zeta_0), \quad (21)$$

which after integration becomes

$$g_t = g_{t+\tau} - \zeta_0 - G(g_{t+\tau}) + G(\zeta_0) + F(\zeta_0), \quad (22)$$

where

$$G(\zeta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i [\zeta - a_i(t + \tau)] \ln[\zeta - a_i(t + \tau)] \quad (23)$$

Now expanding Eq. (22) up to first order in τ , taking $\tau \rightarrow 0$, and using the boundary condition $\lim_{g_t \rightarrow \infty} \dot{g}_t = 0$, which follows from Eq. (3), one then obtains the following generalized Loewner equation

$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^N d_i(t) [g_t - a_i(t)] \ln[g_t - a_i(t)], \quad (24)$$

together with the generic condition

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\zeta_0 - F(\zeta_0) - G(\zeta_0)}{\tau} = 0, \quad (25)$$

where the growth factors $d_i(t)$ appearing in Eq. (24) are defined by

$$d_i(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha_i}{\tau}. \quad (26)$$

The equations governing the time evolution for the functions $a_i(t)$ can now be obtained by considering $\zeta_0 = a_i(t + \tau)$ in Eq. (25), for $i = 1, \dots, N$, with $F(\zeta_0)$ then being the respective image of $a_i(t + \tau)$ in the w plane,

$$F(a_i(t + \tau)) = a_i(t) + ih_i, \quad (27)$$

where for the end points we have $h_1 = h_N = 0$. Using Eq. (27) in Eq. (25) and performing a straightforward calculation, one finds

$$\dot{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_j(t) (a_i - a_j) \ln|a_i - a_j|. \quad (28)$$

In view of Eq. (26), Eqs. (18) and (19) for the parameters α_i imply equivalent relations for the growth factors $d_i(t)$,

$$\sum_{i=1}^N d_i = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0. \quad (30)$$

From these equations we can then express the parameter functions, $d_1(t)$ and $d_N(t)$, of the end points in terms of the other functions $d_i(t)$, so that the growth model described by the Loewner evolution Eqs. (24) and (28) is completely specified by prescribing the growth factors $d_i(t)$ for the tips and troughs of the interface. (We remark parenthetically that although our growth model naturally allows for vertices that correspond to neither tips nor troughs we shall not consider such cases here; see however Sec. III C for a discussion about more general growth rules.) The parameter functions $d_i(t)$ could in principle be related to the velocities of the corresponding points on the interface by equations analogous to Eq. (10). For instance, in the simplest case $\eta = -2$ we have $d_i(t) = d_0$. For general η , however, the function $d_i(t)$ has a complicated implicit dependence on the function $g_t(z)$ involving the second derivative of its inverse, which renders the numerical integration of the Loewner equation very difficult (if possible at all). On the same token, the alternative approach for computing Loewner evolutions based on direct iteration of slit mappings [7,16] is unlikely to result very useful in the case of growing interfaces, because the relevant mapping to be iterated is not known in closed form; see Eq. (20). For these reasons, we shall consider in the examples below only the case $d_i(t) = d_i = \text{const.}$ (although not all d_i 's need be the same), for which the Loewner equation can be easily integrated.

B. Examples

We start by considering the case in which the interface has only one tip so that the number of vertices is obviously $N=3$. We can then solve Eqs. (29) and (30) to obtain the growth factors $d_1(t)$ and $d_3(t)$ as a function of $d_2(t)$,

$$d_1(t) = -\frac{a_3(t) - a_2(t)}{a_3(t) - a_1(t)} d_2(t), \quad d_3(t) = -\frac{a_2(t) - a_1(t)}{a_3(t) - a_1(t)} d_2(t). \quad (31)$$

As mentioned above, the growth factor $d_2(t)$ can in principle be related to the tip velocity but here the specific form of $d_2(t)$ is not relevant for the shape evolution, for it only defines the time parameter, and so we set $d_2(t) = -1$. (Recall that according to our convention the growth factors for tips are negative while those for troughs are positive.) As for the initial conditions, we have $a_1(0) = -1$ and $a_3(0) = 1$, corresponding to end points $z = \pm 1$, so that we have to specify only the initial location, $a_2(0)$, of the tip. If we start with the tip at the center, i.e., $a_2(0) = 0$, we obtain a symmetrically growing interface [17], since in this case Eqs. (28) imply that $a_2(t) = 0$ and $a_1(t) = -a_3(t)$ for all t . If, on the other hand, we start with the tip off-center, i.e., $a_2(0) \neq 0$, we then get an asymmetric growing interface (which can be regarded as an "extended finger" in the sense that it encloses a nonzero area). An example of such case for $a_2(0) = 0.5$ is shown in Fig. 4, where the solid curves represent the interface at various times t starting from $t = 0.5$ up to $t = 2.0$ with a time

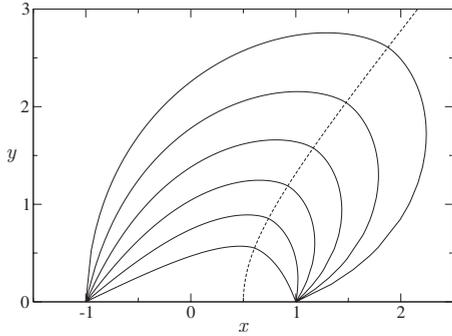


FIG. 4. Loewner evolution for a nonsymmetric interface growing in the upper half-plane. The solid curves show the interface at various times t , starting from $t=0.5$ up to $t=2.0$, with a time separation of $\Delta t=0.3$ between successive curves, whereas the dashed line indicates the tip trajectory.

separation of $\Delta t=0.3$ between successive curves, while the dashed curve represents the path traced by the tip $\gamma_t = g_t^{-1}[a_2(t)]$. As one can see in this figure, for longer times the tip moves along a straight line in the z plane, indicating that the initial asymmetry persists for all times. (In this and subsequent figures the trajectories of the tips and troughs are computed, for clarity, up to a final time that is slightly greater than the final time for the complete interfaces.) To generate the curves shown in Fig. 4 we used a numerical scheme similar to that described in Sec. II for the case of multifingers, namely, we integrate the Loewner equation backward in time with terminal conditions $g_t = w$, for $w \in [a_1(t), a_3(t)]$, to get the corresponding points $z = g_0$ on the interface.

Next we consider the case in which the interface has two tips and one trough. In this case we have $N=5$, and from Eqs. (29) and (30) one can easily write the parameters d_1 and d_5 in terms of the growth factors d_2 and d_4 for the tips and d_3 for the trough. In Fig. 5 we show an example of a symmetrical growing interface (solid curves), where the dashed lines represent the trajectories of the tips and the trough. In this figure, we started with symmetrical initial conditions, namely, $a_5(0) = -a_1(0) = 1$, $a_4(0) = -a_2(0) = 0.5$, and $a_3(0) = 0$, and chose the growth factors of the two tips to be the same, $d_2 = d_4 = -1$, so as to preserve the initial symmetry, with $d_3 = 0.5$.

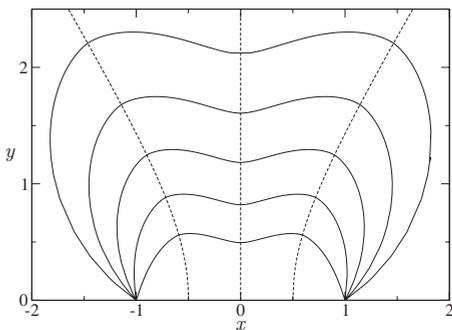


FIG. 5. Symmetric growing interface with two tips. Here $d_2 = d_4 = -1$ and $d_3 = 0.5$. The solid curves represent the interface at times from $t=0.5$ to $t=1.7$, with $\Delta t=0.3$ between successive curves, whereas the dashed lines indicate the trajectories of the tips and the trough.

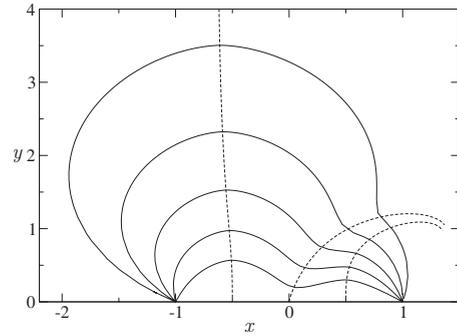


FIG. 6. Asymmetric growing interface with two tips. The initial conditions are the same as in Fig. 5 but here we have $d_2 = -1$, $d_3 = 0.8$, and $d_4 = -0.5$.

$= 0.5$. Note that the paths traced by the two tips and the trough are somewhat reminiscent of the trajectories observed in the case of three symmetrical fingers discussed in Sec. II; see Fig. 2(a). On the other hand, if we start with a symmetric initial condition but one of the tips has a larger growth factor, then the fastest tip will move ahead of the other tip thus breaking the initial symmetry. For $t \rightarrow \infty$ the slower tip and the trough will both tend to merge with the closest end point resulting in a growing interface with only one tip. An example of this case is shown in Fig. 6 where the tendency of the trough and the second tip to merge is clearly evident. The behavior seen in this figure mimics somewhat the competition between initial protuberances in the early stages of the fingering instability [12]. (In our model the competition is of course encoded in the choice of the growth factors.)

The generic Loewner equation given in Eq. (24) can also describe the problem of multiple growing interfaces. In this case each interface Γ_p^i , for $i = 1, \dots, n$, where n is the number of distinct interfaces, will be mapped under $g_t(z)$ to a corresponding interval on the real axis in the w plane. Similarly, each advanced interface $\Gamma_{t+\tau}^i$ is mapped by $g_t(z)$ to a polygonal curve in the w -plane. One can then readily convince oneself that the generic Loewner evolution defined by Eqs. (24) and (28) applies to this case as well, where N is now the total number of vertices corresponding to the sum of the number of vertices of each interface.

In Fig. 7 we show numerical solutions for the case of two symmetrical interfaces with one tip each. Since each interface has three special points (two end points and one tip) we then have $N=6$. Here the interfaces start to grow from the intervals $[-3, -1]$ and $[1, 3]$, respectively, with the corresponding tips starting at symmetrical points $a_4(0) = -a_2(0) = 2$ and having the same growth factors. The curves shown in Fig. 7 were calculated for $d_2 = d_4 = -1$, at times varying from $t=0.5$ up to $t=1.4$ with a time interval $\Delta t=0.3$ between successive curves. Notice that, as time goes by, the inner sides of the two interfaces move toward one another leaving a narrow channel between them. For sufficiently large time, the width of such a channel becomes infinitesimally small so that for all practical purposes the resulting evolution will look like a single symmetrical growing interface. An evidence of this fact is clearly seen in Fig. 7 where the two tips (dashed lines) tend to “attract” each other and will eventually “merge.” It is worth mentioning, however, that it is hard to integrate the

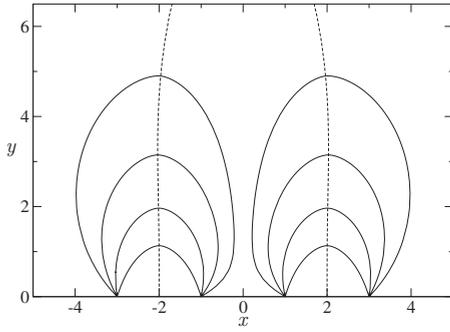


FIG. 7. Loewner evolution for two symmetrical growing interfaces. The interfaces start respectively at $[-3, -1]$ and $[1, 3]$, and the growth factor is $|d|=1$ for each tip. The solid curves represent the interfaces at times varying from $t=0.5$ up to $t=1.4$, with time intervals of $\Delta t=0.3$, whereas the dashed line indicate the trajectories of the tips.

Loewner equation past the latest time shown in Fig. 7, because the functions $a_3(t)$ and $a_4(t)$ become essentially identical (within the computer resolution), rendering the numerical integration very difficult after this point.

In Fig. 8 we show for comparison the case in which the two tips have identical growth factors but where the interfaces now have different initial widths. We can see from this figure that the wider interface grows faster than the narrower one. This competition between the two growing interfaces resembles the so-called “shadowing effect” in fingering phenomena, whereby the longer fingers grow faster and hinder the growth of the shorter fingers in their vicinities [7]. (A similar effect is obtained if we start with interfaces of equal width but with one of the tips having a larger growth factor than the other one.) We have thus seen that in spite of its simplifying assumptions, chiefly among them the unbounded geometry and the polygonal growth rule, our model exhibits certain dynamical features such as finger competition and screening that are qualitatively similar to what is commonly observed in Laplacian growth processes [12]. We will show next that it is possible, in principle, to extend the model to include more general growth rules that may describe more accurately the dynamics of specific growth processes.

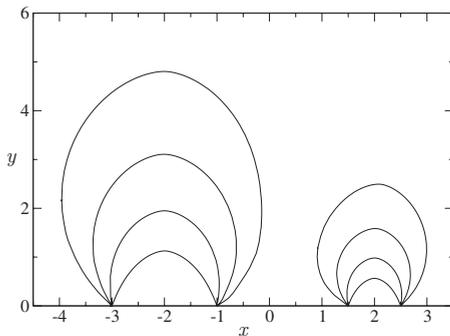


FIG. 8. Loewner evolution for two asymmetric growing surfaces. Here the growth factors and the initial width of first interface are the same as in Fig. 7 but the second interface starts to grow from the narrower interval $[1.5, 2.5]$. The different curves are for the same times as in Fig. 7.

C. Loewner domains

Here we consider from a more formal viewpoint the Loewner evolution of a family of increasing hulls K_t in the upper half-plane \mathbb{H} . We denote by $\Gamma_t = K_t \cap \mathbb{H}$ the growing interface at time t and consider the mapping $g_t: \mathbb{H} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{H}$ that maps Γ_t to the interval $[a(t), b(t)]$ on the real axis. To specify the growth rule let us consider the infinitesimal hull $K_{t,\tau} = g(K_{t+\tau} \setminus K_t)$ in the w plane, where τ is an infinitesimal time step. Note that in the growth models of Sec. III A the hull $K_{t,\tau}$ corresponds to the interior of the polygon defined by $g_t(\Gamma_{t+\tau})$ and the real axis; see Fig. 3. Here we consider more general growth problems in which $K_{t,\tau}$ is not necessarily bounded by a piecewise-linear curve in \mathbb{H} . To be more precise, we consider the infinitesimal hull $K_{t,\tau} = \{w = x + iy, 0 < y < \tau h_t(x)\}$ made of the set of points included between the real axis and the curve $y = \tau h_t(x)$, $\tau \ll 1$, with x real. We assume that $h_t(x)$ is a simple curve that is at least twice differentiable. Let us now denote by $a_\tau^*(t) \leq a(t)$ and $b_\tau^*(t) \geq b(t)$ the end points of the curve $h_t(x)$, that is, $h_t(a_\tau^*(t)) = h_t(b_\tau^*(t)) = 0$, where $\lim_{\tau \rightarrow 0} a_\tau^*(t) = a(t)$ and $\lim_{\tau \rightarrow 0} b_\tau^*(t) = b(t)$. Note that in the general case one has $a_\tau^*(t) \neq a(t)$ and $b_\tau^*(t) \neq b(t)$, which allows for the end points $z_1(t)$ and $z_2(t)$ of the growing interface Γ_t to move as time goes by. Thus, in contrast with the model discussed earlier, here the end points are not necessarily kept fixed.

Let us now introduce a partition of the interval $[a_\tau^*(t), b_\tau^*(t)]: a_\tau^*(t) = a_1(t) < a_2(t) < \dots < a_N(t) = b_\tau^*(t)$, and let $\tilde{h}_t(x)$ the piecewise-linear approximation of $h_t(x)$ defined by this partition: $\tilde{h}_t(a_i) = h(a_i)$, with $\tilde{h}_t(x)$, for $x \in [a_i(t), a_{i+1}(t)]$, being given by a straight line. It is clear that the evolution entailed by the polygonal curve $\tilde{h}_t(x)$ is described in terms of the Loewner equation given in Eq. (24). If we now take the limit $N \rightarrow \infty$, we then get the following evolution equation:

$$\dot{g}_t(z) = \int_{a(t)}^{b(t)} \kappa_t(x) [g_t(z) - x] \ln [g_t(z) - x] dx, \quad (32)$$

where

$$\kappa_t(x) = h_t''(x), \quad (33)$$

with prime denoting derivative with respect to the argument x . Since the shape of the growing domain is fully encoded in the map $g_t(z)$, Eq. (32) specifies the growth model once the density $\kappa_t(x)$ is known. Note that the class of interface growth models described in Sec. III A corresponds to the case when the density is a finite sum of Dirac δ peaks.

More generally, if we introduce a signed measure $\mu_t(x)$ satisfying the conditions

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu_t(x) = 0, \quad (34)$$

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_t(x) = 0, \quad (35)$$

which are the analog of Eqs. (29) and (30), we can then define the Loewner evolution generated by this measure by the following equation:

$$\dot{g}_t(z) = \int_{\mathbb{R}} [g_t(z) - x] \ln[g_t(z) - x] d\mu_t(x). \quad (36)$$

Here the time evolution of the measure $\mu_t(x)$ encodes the growth rule. We refer to Eq. (36) as “Loewner domains” in contrast to the “Loewner chains” discussed in Sec. II. Although Loewner domains can be regarded as equivalent to Loewner chains—indeed, the densities $\rho_t(x)$ and $\kappa_t(x)$ are obviously related to one another—the former description seems to be more convenient for the study of growing interfaces (which encircle domains with nonzero area). From a more practical viewpoint, however, the difficult task that remains in the case of Loewner domains is to find the appropriate measure for physically relevant growth problems. In this context, an interesting open question concerns the possibility of generating rough (i.e., fractal) interfaces by means of a Loewner evolution driven by random measures, in analogy with the stochastic Loewner equation where random curves are produced [4,5].

IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We have considered the problem of two-dimensional Laplacian growth in the context of the Loewner evolutions. We started by revisiting the problem of fingered growth and reported an exact solution of the chordal Loewner equation for the case of a symmetrical three-finger configuration. We then discussed a more general class of growth models in which an

interface grows from the real axis into the upper half-plane. Assuming that the growth rule is specified in terms of a polygonal domain in the complex-potential plane and making appropriate use of the Schwarz-Christoffel transformation, we derived the corresponding Loewner equation for the problem. Several examples were explicitly discussed, such as the case of a single “extended finger,” an interface with two tips, and the case of two competing interfaces. Although our model does not allow for a direct comparison with experiments, we have argued that its dynamics is reminiscent of certain typical behaviors seen in Laplacian growth. We have also briefly discussed a possible extension of our Loewner equation to include the case in which the growth rule is specified in terms of a generic (not necessarily polygonal) curve. More generally, we have introduced the notion of “Loewner domains” in which the growth rule is described in terms of a time evolving signed measure. This opens up the possibility for studying other interesting (and difficult) problems, such as the growth of fractal interfaces, within the context of stochastic Loewner evolutions. The extension to the radial geometry of the class of growth models discussed here is another interesting open problem.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in part by the Brazilian agencies FINEP, CNPq, and FACEPE and by the special programs PRONEX and CTPETRO.

-
- [1] K. Löwner, *Math. Ann.* **89**, 103 (1923).
 - [2] P. L. Duren, *Univalent Functions* (Springer, New York, 1983).
 - [3] I. A. Gruzberg and L. P. Kadanoff, *J. Stat. Phys.* **114**, 1183 (2004).
 - [4] W. Kager and B. Nienhuis, *J. Stat. Phys.* **115**, 1149 (2004).
 - [5] M. Bauer and D. Bernard, *Phys. Rep.* **432**, 115 (2006).
 - [6] G. Lawler, in *Random Walks and Geometry*, edited by V. A. Kaimanovich (Walter de Gruyter, Berlin, 2004), pp. 261–294.
 - [7] T. Gubiec and P. Szymczak, *Phys. Rev. E* **77**, 041602 (2008).
 - [8] O. Schramm, *Isr. J. Math.* **118**, 221 (2000).
 - [9] G. Selander, Ph.D. thesis, Royal Institute of Technology, 1999.
 - [10] L. Carleson and N. Makarov, *J. Anal. Math.* **87**, 103 (2002).
 - [11] O. Zik and E. Moses, *Phys. Rev. E* **60**, 518 (1999).
 - [12] P. Pelcé, *Dynamics of Curved Fronts* (Academic Press, San Diego, 1988).
 - [13] A. L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
 - [14] W. Kager, B. Nienhuis, and L. P. Kadanoff, *J. Stat. Phys.* **115**, 805 (2004).
 - [15] G. F. Carrier, M. Krook, and C. E. Pearson, *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique* (Hod Books, Ithaca, 1983).
 - [16] T. Kennedy, *J. Stat. Phys.* **137**, 839 (2009).
 - [17] M. A. Durán and G. L. Vasconcelos, *J. Phys.: Conf. Ser.* (to be published).