



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTATÍSTICA DE CONTAGEM EM SISTEMAS HÍBRIDOS NORMAL-SUPERCONDUTOR

por

Gerson Cortês Duarte Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Orientador-UFPE)

Prof. José Roberto Rios Leite (DF – UFPE)

Prof. Raúl Oscar Vallejos (CBPF)

Recife - PE, Brasil
Março - 2006

Duarte Filho, Gerson Cortês

**Estatística de contagem em sistemas híbridos
normal-supercondutor / Gerson Cortês Duarte Filho.**

– Recife : O Autor, 2006.

vii, 117 folhas : il., fig.

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2006.**

Inclui bibliografia e apêndice.

**1. Física da matéria condensada – Sistemas
mesoscópicos – Fenômenos de transporte. 2.
Estatística de contagem – Métodos semiclássicos .
3. Sistemas híbridos normal-supercondutor – Efeitos
de proximidade. I. Título.**

**538.935
539.1**

**CDU (2.ed.)
CDD (22.ed.)**

**UFPE
BC2006-152**



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Gerson Cortês Duarte Filho

ESTATÍSTICA DE CONTAGEM EM SISTEMAS HÍBRIDOS NORMAL-SUPERCONDUTOR

A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), José Roberto Rios Leite, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e o Professor Raúl Oscar Vallejos do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, consideram o candidato:

() Aprovado com Distinção

(X) Aprovado

() Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em dez de março de 2006.

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Presidente e Orientador

Prof. José Roberto Rios Leite

Prof. Raúl Oscar Vallejos

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a construção desta dissertação.

Agradeço primeiramente a minha mãe Maria de Fátima por todo o amor, dedicação e esforço na minha criação e pelo apoio incondicional ao caminho que eu escolhi para trilhar.

Agradeço também aos meus irmãos Manuela, Gustavo e meu irmão caçula Guilherme, a minha vó por parte de mãe Berenice, a meu avô por parte de pai Afonso, a meu pai Gerson Cortês, a minhas tias-mães Graça e Glória, aos meus primos Hilton, Glauber, Carolina, Natália, Rubinho, Rejane, Bruno e Otto, a minhas tias Mariinha, Maria, Fafá, Teresa e Lilian, a meus tios Antonio, Abílio, Rogério, Roberto, Dário e Ivanildo e a meu padrinho Getúlio por todo o carinho e apoio a que me foi demonstrado. Agradeço de forma especial também aos meus avós Severino e Lília que não estão mais entre nós.

Um forte abraço em sinal da minha gratidão pela amizade e companheirismo aos meus irmãos que eu fui ganhando durante a minha vida: Antonio Mário (Cioba), Cláudio, Danilo Carvalho, Marcelo Anabuki (Xéu), Luís, Eduardo (Negão), Daniel (Buiú), Danilo, Alexandre (Xandinho), Marcus Vinícius (Bundinha), Gabriel, Tiago, Fredinho, Sandrinha e Carlos Henrique (Mestrinho).

Agradeço aos amigos e colegas físicos do DF pela amizade e força nos momentos difíceis: Tâmara, Fredson, Erms, Vladimir, Antonius, Eroni, Lincoln, Arthur, Alexandre Carvalho, José Augusto, Cleverson, Douglas (Gaúcho), Cinthia, Fernando (Negão), Fernando (Maçã), Augusto (Mindoin), Danievertton, Anderson, Paulo Renato, Edilberto, Leozinho, Karlla, Priscila, Bernardo, Glendo, Maxwell, Valderlan, Pedro Hugo, Alan, Caio, Ferraz, Renê, Luiz Felipe, Dieguito, Barba, Jairo, Miguel, Camis, Clara, Moema, Carlos Eduardo, Bettina, Carlos André, Mathias, Márcio, Luís, Roberto Melo, Roberto (Cubano), Hernesto (Brother), Rafael Menezes, Hermes, Rodrigo (Barba), Juliana (Juju), Sergio (Cubano), Laura, Jorge Gabriel, Sergio (Alvi-rubro), Diego, Luis Umberto, Aldonso e tantos outros que infelizmente neste momento o nome não me vem a cabeça.

Agradeço também aos amigos do Marista, UFPE e de outros lugares pela amizade: Humberto Viglioni, Priscila Catão, Marina, Marília (Lila), Natalia, Rafaelli, Patrícia, Emmanuel (Deco), Rita, Alice, Gabriela, Zilka, Tia Magnólia, Tia Gerusa, Larissa, Rafael Formiga, Renato, Carlos Henrique (Doido), Marcos Antonio, Daniel

Formiga, Prof. Ivan, Adeílson, Flávio, Rafael (Pequeno), Mario Gaiber, alípio, Felipe (Alvi-rubro), Felipe (Rubro-negro), Marcelo (Gordo), Paulinha, Pedro, Euzébio e Ivan Pitta. Um agradecimento especial a Anete pelo companheirismo e carinho que ela sempre me demonstrou como namorada e atualmente como amiga.

Agradecimento em especial a Ailton pela amizade e a ajuda fundamental na realização deste trabalho principalmente na parte computação algébrica. Também agradeço de forma especial aos companheiros de LFTC e finais de semana no DF Antônio Cruz (Toinho) e Vladimir (Cearense) pelo companheirismo e a valiosa ajuda prestada para meu aprendizado de Latex e Free BSD.

Agradeço ao meu orientador Antônio Murilo por sua impecável orientação durante esse período e pela motivação que ele transmite a seus alunos para estudar e fazer física teórica.

Agradeço aos professores do DF pelos os cursos de excelente nível ao qual fui aluno durante a graduação e pós graduação e um agradecimento em especial a dois professores que hoje não fazem parte do DF mas que com certeza fizeram parte importante na minha formação básica que são Cláudio Furtado e Fernando Moraes ambos hoje professores da UFPB. Ao professor José Rios Leite meu profundo agradecimento por me motivar a procurar o melhor entendimento da parte experimental do problema que eu estudei no meu mestrado.

Agradeço aos funcionários e servidores do DF pelo empenho em tornar o DF um local agradável de se trabalhar e a eficiência nos assuntos burocráticos relacionados a um ambiente de pesquisa. Em especial gostaria de agradecer a secretária de graduação Paula pelo carinho a que trata todos os alunos que chegam no DF e ao pessoal que faz parte da secretaria da pós graduação: Ana Maria (quando eu entrei no mestrado) e Sara e Paulo atuais pela eficiência e atenção.

Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos a estatística de contagem de carga através do formalismo de funções de Green de Keldysh para pontos quânticos conectados a guias por barreiras de transparência arbitrária. Este formalismo microscópico serve de base para a construção de duas abordagens semiclássicas complementares: a teoria de circuitos matricial [Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 134 (1994)] e a teoria de circuitos escalar [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)]. Nosso resultado principal consiste da apresentação de fortes evidências em favor da equivalência desta duas teorias de circuitos para cavidades caóticas conectadas a barreiras de transparência arbitrária. Utilizando a estatística de contagem para a teoria de circuitos escalar calculamos analiticamente a condutância de uma junção metal-normal-supercondutor (NS) num regime de interesse físico, no qual o efeito de proximidade é máximo. Nestas condições a condutância NS, que é uma estatística linear dos autovalores de reflexão de Andreev, pode ser escrita em termos dos autovalores de transmissão do lado normal. Identificamos uma transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o regime de tunelamento usual a partir da verificação de um mínimo na resistência NS, confirmando os resultados numéricos obtidos por Apolinário [S. W. S. Apolinário, Tese de Mestrado, UFPE (Março - 2004)]. Concluimos que certos mecanismos presentes em processos de transporte coerente ressonante estão relacionados ao fenômeno de tunelamento sem reflexão.

Abstract

In this thesis we study charge counting statistics using the Keldysh's Green functions approach to quantum dots connected to leads via barriers of arbitrary transparencies. This microscopic formalism is used to construct two complementary semiclassical approaches: the matricial circuit theory [Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 134 (1994)] and the scalar circuit theory [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)]. Our main result consists of the presentation of strong evidences in favor of the equivalence of these circuit theories for chaotic cavities connected to barriers of arbitrary transparencies. Using the counting statistics of the scalar circuit theory we calculate analytically the conductance of the normal-metal-superconductor (NS) junction in a physical regime of interest when the proximity effect is maximum. In this regime, the NS conductance, that is a linear statistics of Andreev reflection eigenvalues, can be written in terms of transmission eigenvalues of the normal side. We identify a gradual transition between the reflectionless tunneling regime and the usual tunneling regime through the observation of an NS resistance minimum, in agreement with numerical results obtained by Apolinário [S. W. S. Apolinário, Tese de Mestrado, UFPE (Março - 2004)]. We conclude that some of the mechanisms present in resonant coherent transport processes are related to the reflectionless tunneling phenomenon.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Física Mesoscópica	1
1.2	Sistemas e Fenômenos Mesoscópicos	2
1.2.1	Sistemas Mesoscópicos	4
1.2.2	Fenômenos Mesoscópicos	6
1.3	O Formalismo de Landauer e Büttiker	9
1.4	Sistemas Híbridos Normal-Supercondutor	13
1.4.1	Equações de Bogoliubov-de Gennes	16
1.4.2	Teoria de Espalhamento em Sistemas NS	20
1.4.3	Espalhamento Andreev na Interface NS	25
1.5	Teoria de Landauer-Büttiker para Sistemas NS	26
1.5.1	Matriz Espalhamento para Multi-Terminais	26
1.5.2	Sistemas NS de Dois Terminais	28
1.6	Abordagem Quase-Clássica	31
1.6.1	A Equação de Gorkov	31
1.6.2	Aproximação Quase-clássica	32
1.7	Teoria de Campos para Sistemas NS	34
2	Estatística de Contagem	36
2.1	Estatística de Contagem de Carga	37
2.2	Estatística de Contagem de Cargas em Circuitos: Casos Simples	39
2.2.1	Gás de Elétrons a Temperatura Nula	39
2.2.2	Gás de Elétrons a Temperatura Finita	40
2.2.3	Generalização para Multi-Canais	40
2.3	Processo de Medição em Sistemas Mesoscópicos	41
2.4	Formalismo de Keldysh para a Estatística de Contagem	43
2.4.1	O Método da Equação de Movimento	46
2.4.2	Corrente Média em Regime Estacionário	48

2.4.3	Densidade Espectral do Ruído de Disparo	51
2.5	Estatística de Contagem em Regime Estacionário	57
2.6	Estatística de Contagem para uma Junção NS	58
3	Teoria de Circuitos Matricial	61
3.1	Formulação Matricial da Teoria de Circuitos	61
3.1.1	Cavidade Caótica Acoplada a Guias Assimétricos por Con- tatos ideais	64
3.1.2	Cavidades Caóticas Acopladas a Guias Assimétricos por Junções de Tunelamento	68
3.1.3	Cavidades Acopladas a Guias Assimétricos por Barreiras de Transparência Arbitrária	69
3.2	Representação Vetorial	72
3.3	Teoria de Circuitos Vetorial Para Cavidades	74
3.3.1	Cavidades Acopladas por Junções de Tunelamento	75
3.3.2	Cavidades Acopladas por Barreiras Simétricas	76
3.3.3	Cavidades Acopladas por Barreiras de Transparência Arbitrária	77
3.4	Teoria de Circuitos Matricial para Sistemas NS	79
4	Teoria de Circuitos Escalar	81
4.1	Conceitos Básicos	81
4.2	A Densidade Média de Autovalores de Transmissão	83
4.3	Momentos dos Autovalores de Transmissão e Autovalores de Reflexão de Andreev	84
4.4	A Pseudocorrente $K(x)$	86
4.5	Conexão com a Estatística de Contagem de Carga	88
4.6	Aplicações Simples da Teoria de Circuitos Escalar	89
4.6.1	Ponto Quântico Caótico Conectado a Guias por Contatos Ideais	89
4.6.2	Ponto Quântico Conectados a Guias Simétricos por Barreiras Idênticas	93
4.7	Teoria de Circuitos Escalar para Barreiras de Transparência Arbitrária	95
4.7.1	Cavidade Acoplada a Guias por Barreiras de Transpa-rência Arbitrária: Caso normal	95
4.7.2	Cavidade Acoplada a Guias por Barreiras de Transpa-rência Arbitrária: Caso NS	99
5	Conclusões e Perspectivas	108
	Apêndices	111

CONTEÚDO	iii
----------	-----

A O Método dos Resolventes de Lagrange	111
Bibliografia	116

Lista de Figuras

1.1	Geometria utilizada por Landauer para o cálculo da resistência da amostra. Figura retirada de [3]	2
1.2	Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópico. Figura retirada de [7].	4
1.3	Condutor em formato de anel feito a partir de um filme policristalino de ouro de 38nm de espessura. Figura tirada de [8].	5
1.4	Um fio de 75nm de largura feito a partir de uma heterojunção GaAs-AlGaAs. Vemos também um aparato de medição Hall de quatro terminais. Cada ponta está a aproximadamente $2\mu\text{m}$ de distância do fio. Figura retirada de [8].	6
1.5	Condutância adimensional (normalizado em termos de G_0) em função do campo magnético aplicado de um ponto quântico de GaAs. O ponto tem livre caminho médio e comprimento de coerência de fase que excede suas dimensões ($1\mu\text{m}$). As duas curvas tracejadas correspondem a dois formatos particulares do ponto e a curva sólida é a média sobre um ensemble formado por 47 formatos diferentes do ponto. Notar o mínimo para campo nulo devido a simetria de reversão temporal. Gráfico retirado de [9].	7
1.6	A figura acima mostra o resultado de uma simulação numérica que ilustra tanto o efeito de localização fraca quanto o efeito de flutuação universal da condutância. Nesta simulação as condutâncias clássica e quântica são calculadas para um condutor com 30 modos e 600 impurezas. A média da condutância quântica é menor que o valor clássico por G_0 , as flutuações da condutância também são dessa ordem [8].	8
1.7	Quantização da condutância em termos de $2G_0$ observada em contatos pontuais a campo magnético nulo e a temperatura de 0,6 K. Ref. [8] .	9

1.8	A figura a esquerda mostra o espalhamento de um elétron em uma interface metal-isolante, já a figura a direita mostra uma visão pictórica do espalhamento de Andreev numa interface NS. Figura retirada de [24].	14
1.9	Condutância diferencial em função da voltagem aplicada numa amostra NS para diferentes teperaturas entre 60mK e 1500mK a campo magnético nulo. Figura retirada de [25].	16
1.10	(a) Magneto-resistência de um fio de ouro conectado a um fio de niobio em função do campo magnético aplicado a uma temperatura de 50 mK. Do lado direito em cima vemos a geometria da amostra. (b) Flutuações da condutância da amostra NS no caso NS ($0.4 < B < 1.9 T$) e no caso normal ($3.1 < B < 9 T$). Figura retirada de [26].	17
1.11	Esta figura mostra um típico par de trajetórias de Feynman que tem contribuição não nula para os efeitos de proximidade. Vale salientar que não há transmissão de momento linear no lado supercondutor como poderia-se imaginar olhando para o lado S da figura. Esta figura foi retirada da ref. [31].	19
1.12	Sistema NS mesoscópico composto por guias de onda I e II perfeitos. O guia I conecta um reservatório de quase-partículas, com potencial químico μ , à esquerda do guia à região metálica desordenada D. O guia II conecta a região D ao supercondutor S que também tem a função de reservatório de quase-partículas. Figura retirada da ref. [32].	21
1.13	Ilustração do n -ésimo modo de propagação de elétrons na região N do sistema NS indicados pelos coeficientes de $\varphi_e^{I,II}$. Figura retirada da ref. [32].	23
1.14	Ilustração do n -ésimo modo de propagação de buracos na região N do sistema NS indicados pelos coeficientes de $\varphi_h^{I,II}$. Figura retirada da ref. [32].	24
2.1	A linha acima do eixo real do tempo representa γ_1 e linha a baixo representa γ_2 . a união de γ_1 e γ_2 forma o contorno de Keldysh.	47
3.1	Cavidade caótica conectada por contatos ideais a guias assimétricos (à esquerda). Circuito que representa um ponto quântico conectado a guias assimétricos (à direita). Figura retirada da ref. [53].	62
3.2	Vemos a representação da teoria de circuitos matricial para um ponto quântico acoplado a guias por barreiras de transparência arbitrária.	77
4.1	Conservação da pseudocorrente $K(x)$ em um circuito arbitrário.	88

4.2	Representação de um ponto quântico ligado a dois guias por barreiras de transparência arbitrária.	90
4.3	Condutância G_{NS} em função de T_2 para alguns valores fixos de T_1 . . .	103
4.4	Mínimo de R_{NS} para $T_1 = 0.1$. Este mínimo sinaliza uma transição gradual entre dois regimes de transporte.	104
4.5	A curva acima representam os mínimos de R_{NS} quando variamos a intensidade das barreiras.	107

Capítulo 1

Introdução

1.1 Física Mesoscópica

Em 1970 R. Landauer [1] calculou a resistência eletrônica de um gás fermiônico numa rede unidimensional completamente desordenada. Neste trabalho Landauer obtém a média da resistividade para um ensemble de redes unidimensionais completamente desordenadas. O método usado na ref. [1] surgiu de conceitos explicados pelo próprio Landauer em 1957 [2], num artigo que tratava do problema da resistividade metálica residual do ponto de vista no qual o fluxo de corrente é considerado como o agente causal e o campo elétrico é criado como uma consequência de um fluxo contínuo de cargas entre centros espalhadores. Assim a dualidade entre correntes e campos passa a ter papel importante na teoria de transporte. No tratamento de Landauer uma corrente constante é injetada na amostra e a questão básica passa a ser qual seria a distribuição não homogênea de campos na amostra como resposta ao fluxo de elétrons. A amostra passa então a ser vista como um centro espalhador e a condutância pode ser interpretada como uma medida do coeficiente de transmissão. A fig.(1.1) mostra o “circuito” utilizado por Landauer para o cálculo da resistência. Os dois reservatórios são mantidos a diferentes potenciais químicos e funcionam como fontes de portadores. Esses reservatórios “alimentam” condutores ideais com portadores e estes são acoplados à amostra que tem o papel de centro “espalhador”. Landauer mostrou que a condutância de um condutor unidimensional é dada por

$$g = \frac{e^2}{h} \frac{T}{R}. \quad (1.1)$$

onde $T = 1 - R$ e R são os coeficientes de transmissão e reflexão respectivamente do condutor, visto como um único centro espalhador e com apenas uma direção de

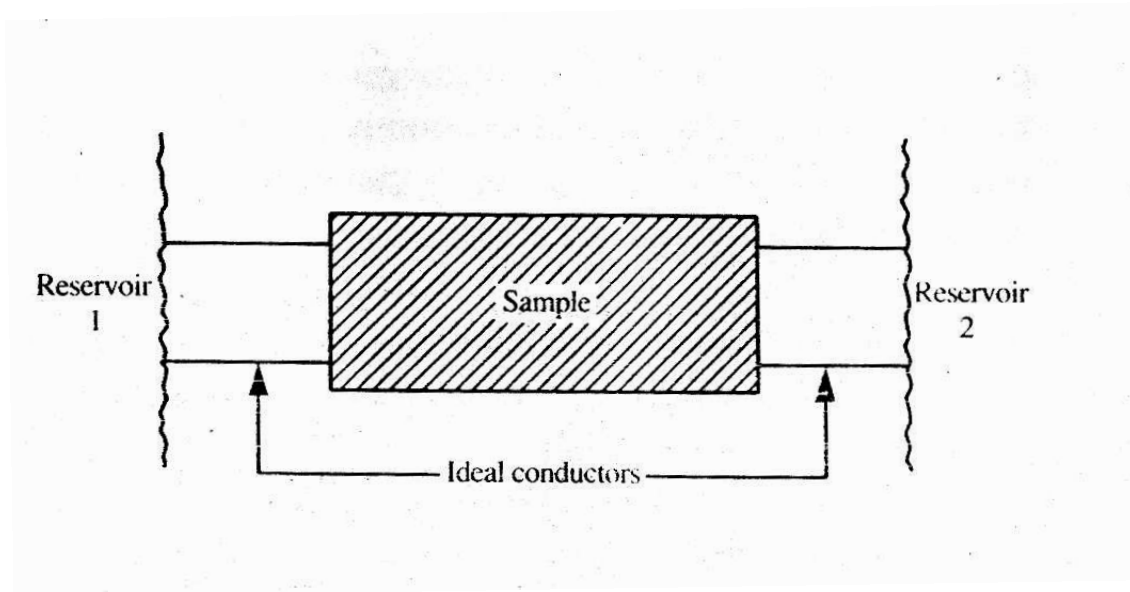


Figura 1.1: Geometria utilizada por Landauer para o cálculo da resistência da amostra. Figura retirada de [3]

spin considerada. Voltaremos a discutir nas próximas seções este redirecionamento do problema de condução em sólidos como um problema de espalhamento que tem grande importância prática no entendimento do transporte quântico em sistemas mesoscópicos.

1.2 Sistemas e Fenômenos Mesoscópicos

A teoria de transporte eletrônico em metais normais macroscópicos é um assunto que se fundamenta na teoria de transporte de Boltzmann e em abordagens semi-clássicas para o cálculo da função distribuição eletrônica no sólido. Nesta teoria sucessivos espalhamentos são tratados como independentes e os observáveis são obtidos através de médias sobre configurações de impurezas. A geometria da amostra não tem grande relevância pois os observáveis de interesse, e.g. a condutividade macroscópica, são grandezas intensivas. Na década de 1980 observou-se que alguns efeitos, tais como a localização fraca em metais [4], ocorrem na escala macroscópica mas em condições de temperaturas tão baixas que não podiam ser abordados quantitativamente assumindo a independência dos espalhamentos. Ficou

claro também que com a descoberta do efeito Aharonov-Bohm em anéis de metal isolados [5] e com a observação de flutuações universais e reprodutíveis na condutância de amostras mesoscópicas [6], que transporte em condutores na escala do micron ou menor exibirá propriedades que a teoria macroscópica não dá conta. Uma lição importante que foi aprendida com essa série de experimentos é que esta nova física não é característica de uma escala de comprimento específico, pois depende do valor relativo de outras grandezas tais como a temperatura T , o comprimento de onda de Fermi λ_F e o grau de desordem do material. Portanto o termo mesoscópico é utilizado para a designação de um regime de transporte e não para uma escala de tamanho. Vamos brevemente discutir os regimes possíveis para o transporte em metais. Para distinguir os diversos regimes de transporte mesoscópico falaremos de comprimentos característicos [7] da amostra, que dependem de T e do grau de desordem do sistema. Os comprimentos estão abaixo relacionados:

Comprimento de onda de Fermi (λ_F). Está relacionado ao nível de Fermi, $\lambda_F = \frac{h}{\sqrt{2m\varepsilon_F}}$. Tipicamente, varia de alguns angstroms em metais a centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras.

Livre caminho médio elástico (L_e). É a distância média que o elétron viaja até sofrer uma colisão elástica. Este comprimento varia de alguns angstroms em ligas amorfas a uma dezena de microns em heteroestruturas semicondutoras.

Comprimento de localização eletrônica (ξ). Mede a extensão espacial das funções de onda eletrônicas. Para condutores, estas funções se estendem sobre toda a amostra, ao passo que para isolantes elas decaem exponencialmente a partir do chamado centro de localização.

Comprimento de coerência de fase (L_ϕ). É o comprimento ao longo do qual a fase da função de onda não relaxa. Está associado a este comprimento o tempo de relaxação de fase τ_ϕ . O valor de L_ϕ cresce com a diminuição da temperatura e é a escala mais importante para o aparecimento de efeitos mesoscópicos.

Em geral para amostras em baixas temperaturas temos, $\lambda_F < L_e < \xi < L_\phi$. Neste caso, existem três regimes de transporte distintos:

regime balístico. Quando L , que é o comprimento da amostra, é menor que o livre caminho médio elástico ($L < L_e$), o sistema se encontra no regime *balístico*, pois o elétron viaja através da estrutura tipicamente sem sofrer colisões. Neste regime o comprimento de coerência de fase é dado por $L_\phi = v_F \tau_\phi$.

regime difusivo Para $L_e < L < \xi$, o sistema está no regime *difusivo*, pois o elétron sofre diversas colisões elásticas antes de “sair” da amostra. Para este regime de transporte $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$, onde D é a constante de difusão.

regime localizado Quando $\xi < L < L_\phi$, o sistema encontra-se no regime *localizado*. A amostra neste regime se comporta como um isolante.

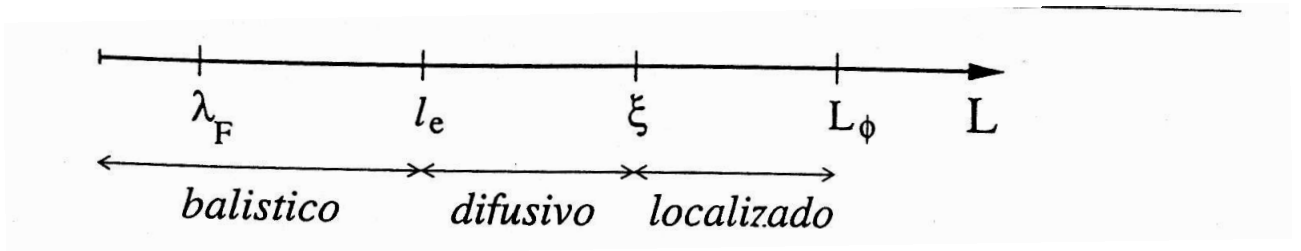


Figura 1.2: Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópicos. Figura retirada de [7].

1.2.1 Sistemas Mesoscópicos

A uma temperatura suficientemente baixa, condutores cujas dimensões são intermediárias entre o microscópico e o macroscópico são chamados de mesoscópicos. Como vimos anteriormente na seção (1.2) as escalas de comprimento relevantes de um condutor variam muito de um para outro e são fortemente afetados pela temperatura, campo magnético etc. Por esta razão, fenômenos mesoscópicos foram observados em condutores cujas dimensões variam de poucos nanômetros a centenas de microns. Condutores mesoscópicos são normalmente fabricados através de condutores planares de dimensões muito pequenas. A figura (1.3) mostra a foto ampliada de um condutor em formato de anel com dimensões aproximadas de 100nm produzido através de um filme policristalino de ouro de espessura aproximada de 40nm. Com esta estrutura foi realizado um dos experimentos fundamentais na física mesoscópica [5]. Mostrou-se que a resistência deste anel oscilava quando o campo magnético que o atravessava variava, pois o campo magnético modificava a interferência entre as funções de onda dos elétrons que atravessavam os dois braços do anel.

Embora os experimentos pioneiros nesta área tenham sido realizados usando condutores metálicos, os mais recentes trabalhos em física mesoscópica vem sendo

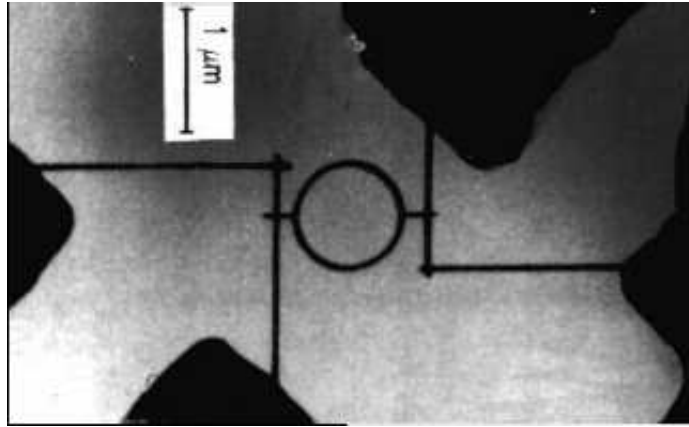


Figura 1.3: Condutor em formato de anel feito a partir de um filme policristalino de ouro de 38nm de espessura. Figura tirada de [8].

realizados em heterojunções de GaAs-AlGaAs onde uma fina lâmina bidimensional é formada na interface entre esses dois semicondutores (para uma discussão bem elementar sobre a formação desta lâmina ver o livro do S. Datta [8]). A densidade eletrônica encontra-se quase completamente confinada na vizinhança da interface GaAs-AlGaAs formando assim uma fina camada de condução que corresponde a um gás bidimensional de elétrons (2-DEG).

Através deste 2-DEG pode-se criar diversos dispositivos, tais como *fiões e pontos quânticos*. Pontos quânticos são dispositivos, que consistem de uma região condutora espacialmente delimitada por regiões isolantes na qual ocorre transporte coerente de elétrons. As modernas técnicas de litografia permitem a construção de pontos quânticos de dimensões menores do que o livre caminho médio para espalhamento elástico, que operam como cavidades balísticas para elétrons. Vários fenômenos observados em pontos quânticos assemelham-se aos observados em átomos e núcleos, tais como níveis de energia quantizados devido ao confinamento eletrônico, estruturas de camadas e caos quântico. De forma simples diz-se que um sistema quântico é caótico quando a dinâmica clássica correspondente é caótica. O interesse no estudo de dispositivos caóticos reside no fato de que suas propriedades físicas são universais, dependendo apenas da existência ou ausência de certas simetrias fundamentais e de certas relações entre as escalas de tempo do dispositivo. A figura (1.4) mostra um fio de 75nm de largura feito a partir de uma heterojunção semicondutora de GaAs-AlGaAs, o fio encontra-se acoplado a um dispositivo de medição Hall de quatro terminais, cada ponta do aparato de medição está a aproximadamente $2\mu\text{m}$

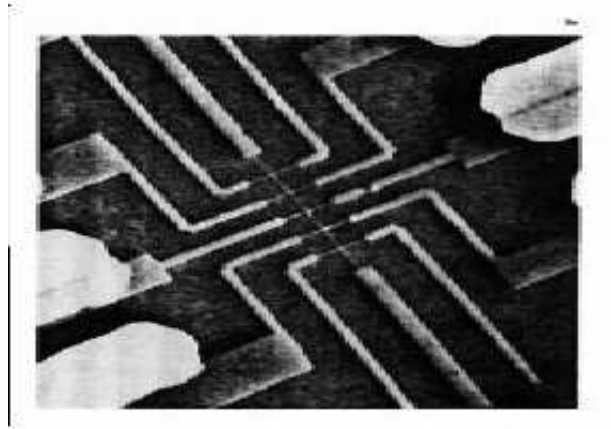


Figura 1.4: Um fio de 75nm de largura feito a partir de um heterojunção GaAs-AlGaAs. Vemos também um aparato de medição Hall de quatro terminais. Cada ponta está a aproximadamente $2\mu\text{m}$ de distância do fio. Figura retirada de [8].

de distância do fio.

1.2.2 Fenômenos Mesoscópicos

Agora discutiremos um pouco dos principais efeitos do transporte eletrônico na escala mesoscópica. Faremos uma breve explanação sobre os fenômenos conhecidos como *localização fraca*, *flutuações universais da condutância* e *quantização da condutância*.

Localização fraca. De acordo com a lei de Ohm, a resistência de uma sequência de centro espalhadores aumenta linearmente com o comprimento da sequência. Transporte eletrônico na presença de coerência de fase pertence ao regime difusivo quântico. Neste regime, a interferência construtiva da função de onda eletrônica devido aos diferentes espalhadores, leva à diminuição da condutância. Para um condutor com condutância total muito maior que o quantum de condutância $G_0 = \frac{e^2}{h}$, o decréscimo na condutância é devido a efeitos de interferência ondulatória e é da ordem de G_0 . Tal condutor é dito estar no regime de *localização fraca*. O regime de localização fraca é caracterizado pela alta sensibilidade ao relaxamento da fase. A condutância quântica é calculada combinando matrizes de espalhamento contendo amplitudes de probabilidade

de seções adjacentes, cada seção contendo impurezas em quantidade pequena suficiente para valer a aproximação de Born. Já a condutância clássica, G_{CL} , é calculada combinando matrizes de probabilidade assumindo incoerência completa. Em ambos os casos a fórmula de Landauer pode ser usada. A média da condutância quântica é menor que o resultado clássico G_{CL} por um valor da ordem de G_0 :

$$\Delta G = \langle G_Q \rangle - G_{CL} = -G_0 \quad (1.2)$$

Esta correção da condutância clássica é devida à interferência construtiva entre pares de trajetórias conjugadas revertidas no tempo. Esse efeito é suprimido com a quebra da simetria de reversão temporal causada pela aplicação de um campo magnético. Na figura (1.5) vemos um gráfico típico de um condutor que está no regime de localização fraca, temos um ponto quântico de aproximadamente $1\mu\text{m}$ de comprimento fabricado através de uma heterojunção de GaAs, é medido a condutância em função do campo magnético para dois formatos específicos de ponto (curvas pontilhadas) e uma média entre 47 tipos diferentes de formatos (curva sólida).

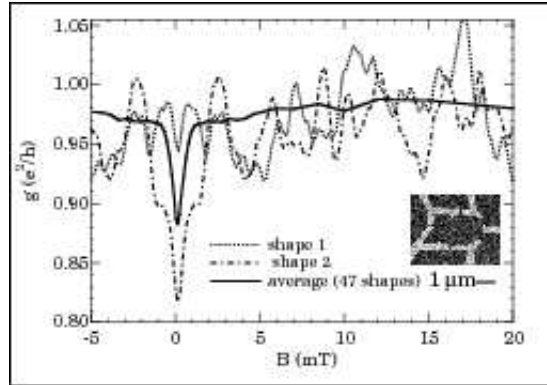


Figura 1.5: Condutância adimensional (normalizado em termos de G_0) em função do campo magnético aplicado de um ponto quântico de GaAs. O ponto tem livre caminho médio e comprimento de coerência de fase que excede suas dimensões ($1\mu\text{m}$). As duas curvas tracejadas correspondem a dois formatos particulares do ponto e a curva sólida é a média sobre um ensemble formado por 47 formatos diferentes do ponto. Notar o mínimo para campo nulo devido a simetria de reversão temporal. Gráfico retirado de [9].

Flutuações Universais da Condutância (FUC). Observa-se experimentalmente que a condutância de sistemas mesoscópicos flutua com amplitude universal de amostra para amostra, em função do campo magnético ou da energia de Fermi. Estas flutuações não são ruído dependente do tempo, mas sim um padrão completamente reprodutível numa mesma amostra. O caráter universal deste efeito consiste no fato da amplitude das oscilações ser sempre da ordem de G_0 , independente da amostra e do valor médio da condutância da mesma [10]. As flutuações da condutância são atenuadas com o aumento da temperatura.

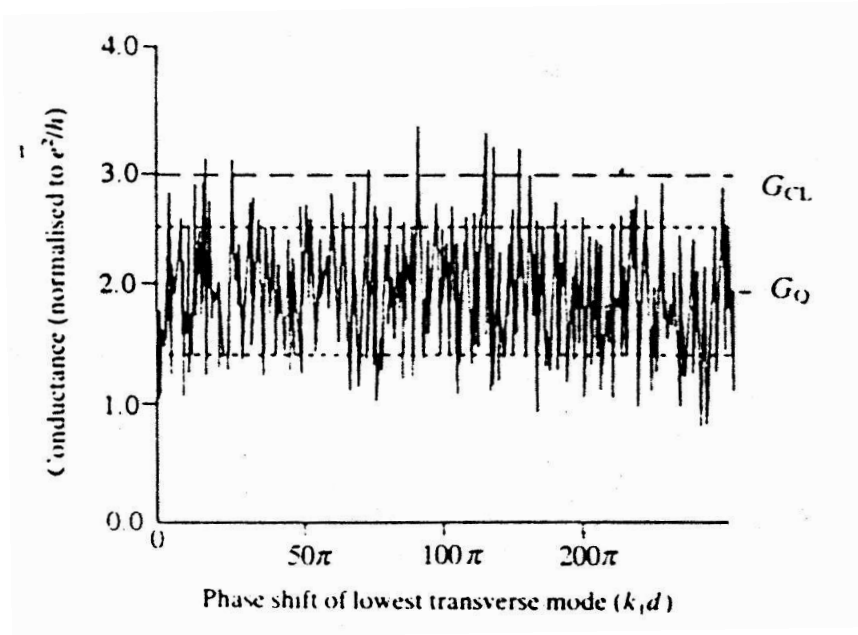


Figura 1.6: A figura acima mostra o resultado de uma simulação numérica que ilustra tanto o efeito de localização fraca quanto o efeito de flutuação universal da condutância. Nesta simulação as condutâncias clássica e quântica são calculadas para um condutor com 30 modos e 600 impurezas. A média da condutância quântica é menor que o valor clássico por G_0 , as flutuações da condutância também são dessa ordem [8].

Quantização da condutância. Em 1988, dois grupos separadamente [11, 12] observaram a *quantização da condutância* em sistemas mesoscópicos. Eles cri-

aram uma constrição de largura D e utilizaram uma montagem tipo *split-gate* na qual uma tensão negativa num par de eletrodos é usada para controlar a largura D da constrição. Eles observaram que à medida que D diminuía a condutância também diminuía na forma de degraus com altura igual ao quantum da condutância, G_0 , como mostra a figura (1.7).

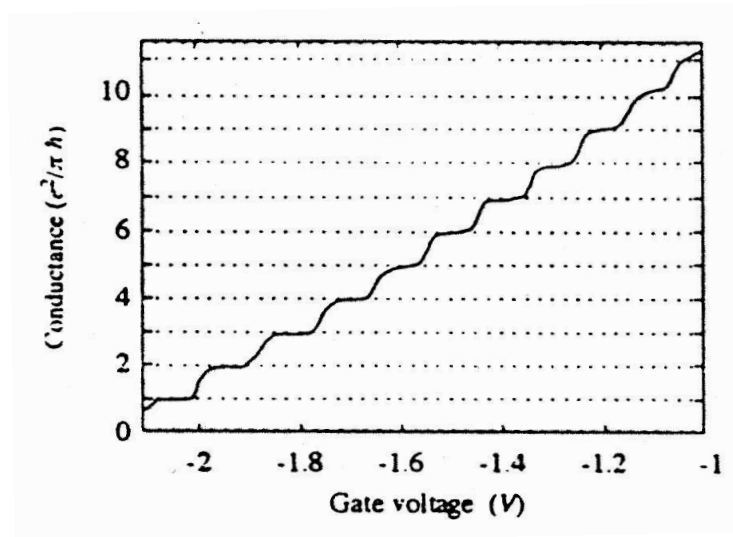


Figura 1.7: Quantização da condutância em termos de $2G_0$ observada em contatos pontuais a campo magnético nulo e a temperatura de 0,6 K. Ref. [8]

1.3 O Formalismo de Landauer e Büttiker

Nesta seção, discutiremos do ponto de vista histórico um dos primeiros formalismos desenvolvidos para explicar alguns dos novos efeitos surgidos com o estudo dos sistemas mesoscópicos, tais como quantização da condutância, localização fraca e flutuações universais da condutância. Para mais detalhes ver a revisão [3], que usamos como base para o desenvolvimento desta seção. Em 1980, Anderson et al. [13] reobtiveram a expressão (1.1) e propuseram uma generalização desta fórmula para o caso de multi-canais. O sucesso do método proposto em [13] ficou limitado ao caso unidimensional. A derivação de Landauer [1] da eq. (1.1) apresentada em [1] não é baseada na teoria da resposta linear, mas numa série de argumentos fenomenológicos. Era aparente a dificuldade de se formalizar este método via teoria

da resposta linear, o que de certa forma motivou vários pesquisadores a tentarem obter a expressão (1.1) através desta teoria [3]. Fisher e Lee [14] generalizaram a expressão (1.1) para o caso de N canais, obtendo a relação

$$g = \frac{e^2}{h} \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (1.3)$$

onde t é a matriz de transmissão que é uma submatriz da matriz de espalhamento S (para uma discussão da matriz S , veja a seção (1.5)). A matriz t conecta amplitudes do fluxo incidente nos vários canais do lado esquerdo da região desordenada com as amplitudes do fluxo que sai pelos canais do lado direito. Ainda na equação (1.3) temos a matriz hermitiana conjugada representada por $t^\dagger$ e Tr denota a operação de traço. Outros autores propuseram outras generalizações da equação (1.1) para o caso de multi-canais que em certos limites reduzem à equação (1.3). Existe uma aparente inconsistência entre as equações (1.3) e (1.1) obviamente no caso de um canal, pois quando a matriz de transmissão tende a identidade a condutância tende a NG_0 e não infinito como intuitivamente obtemos da equação (1.1). Para agravar a situação a única aplicação quantitativa relevante de uma fórmula de Landauer para multi-canais no problema de transporte quântico foi realizada por Fisher e Lee [15] utilizando a expressão (1.3). Novamente Anderson volta à cena agora com Engquist [16]. Eles reexaminam a equação (1.1) introduzindo um novo ponto de vista, onde enfatizam a necessidade de considerações físicas consistentes com o processo de medição. Em [16] eles argumentam que devido ao movimento de portadores entre os reservatórios o potencial químico nos mesmos não poderia ser bem definido, o que os levam a propor um sistema de quatro reservatórios ao invés dos dois propostos inicialmente. Dois desses seriam a fonte e o dreno da corrente e os dois restantes definiriam os potenciais químicos de referência para o processo de medição da voltagem. Este aparato de medição tem como idéia básica a observação de que uma vez que a corrente foi imposta podemos “ligar o voltímetro”, ou seja, uma vez que deixamos a corrente estabilizar entre os guias e os reservatórios de medição até que a corrente líquida em cada reservatório seja zero, então o potencial químico nos reservatórios de medição será bem definido. Finalmente, a corrente dos guias de correntes dividido pela diferença de potencial químico induzido nos fornece a condutância da amostra. O ponto crucial assumido em [16] é que os reservatórios de medição são fracamente acoplados aos guias de correntes. Esta e muitas outras hipóteses admitidas, que lembram as do trabalho original de Landauer [1], levaram Anderson e Engquist a reobter a expressão (1.1). Em 1985 Büttiker et al. [17] estenderam os métodos de Anderson e Engquist para o caso de multi-terminais. Büttiker et al. usaram essencialmente o mesmo esquema utilizado em [16], mas enfatizaram que

a diferença de potencial químico local entre as extremidades da amostra não era igual a diferença de potencial químico dos reservatórios de correntes. Na verdade, era menor devido à distribuição de não equilíbrio dos portadores nos guias. Eles definiram este potencial químico local como o potencial químico que corresponderia à densidade de portadores se eles estivessem em equilíbrio e, ainda à luz do trabalho de Anderson e Engquist, sugeriram que este seria o potencial químico observado nos reservatórios de medição. A expressão obtida por Büttiker et al. é a seguinte:

$$g = \left(\frac{e^2}{h} \sum_{ij} T_{ij} \right) \frac{2 \sum_i v_i^{-1}}{\sum_i (1 + \sum_j R_{ij} - \sum_j T_{ij}) v_i^{-1}} \quad (1.4)$$

onde T_{ij} e R_{ij} são respectivamente as probabilidades de transmissão e reflexão do canal i para o j e v_i é a velocidade longitudinal associada com o canal i . Vale a pena notar que (1.4) continua sendo uma fórmula de dois terminais, as propriedades dos reservatórios de medição não aparecem em (1.4). Pouco depois desta dedução surgiram uma série de experimentos fundamentais sobre medidas da condutância de dispositivos metálicos de dimensões muito pequenas os quais confrontavam a validade de (1.4) para a total explicação dos efeitos observados. Salientamos que estes experimentos primeiramente foram feitos em configurações de multi-terminais. Em [5, 18] podemos encontrar uma revisão sobre os detalhes desses experimentos bem como suas motivações.

Lee e Stone [10] consideraram o modelo de dois terminais e a eq. (1.3) para o cálculo da flutuação universal da condutância. Em [10] eles mostraram que a universalidade da variância da condutância, $\text{var}(g)$, só era observado no modelo de dois terminais, quando o livre caminho médio inelástico L_{in} era maior ou igual ao tamanho do dispositivo, o que realça as limitações do modelo de dois terminais as quais não foram percebidas nos artigos anteriores sobre flutuações universais da condutância. A maioria dos experimentos ainda sem explicação eram feitos em configurações de quatro terminais e o comprimento da amostra na teoria de dois terminais era ingenuamente considerado como o espaçamento entre os terminais de voltagem nas medidas de multi-terminais, o que de fato nos experimentos anteriores funcionava muito bem na explicação da magnitude e dos comprimentos de correlação das flutuações da condutância [10]. O único aspecto experimental ainda não explicado era a assimetria das flutuações da condutância em relação ao campo magnético, que era completamente ignorado por qualquer abordagem tipo a de Fisher e Lee [14] que leva a (1.3). O que se precisava naquele momento era de um formalismo que descrevesse flutuações de voltagem de dispositivos com multi-terminais, ou seja, os aparatos de medição deveriam ser partes integrantes do sistema físico.

Büttiker [19] propôs uma extensão da fórmula de Landauer para multi-canais

equação (1.4), para dispositivos de multi-terminais. Em [19] Büttiker considera um dispositivo de quatro terminais conectado a quatro reservatórios de diferentes potenciais químicos e assumiu que não havia diferença qualitativa entre os terminais de corrente e de voltagem. Então a corrente medida entre dois reservatórios com diferença de potencial químico $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ é apenas $i = \frac{e^2}{h} T_{12} \Delta\mu$, onde T_{12} é o coeficiente de transmissão do reservatório 1 para o 2 no caso de um canal. Note que a diferença de voltagem que corresponde a corrente calculada acima é a diferença de potencial químico entre os reservatórios e não um “potencial químico local” nos guias. As expressões abaixo resultam da generalização de (1.3) para o caso de multi-terminais:

$$I_m = \sum_{n=1}^{N_L} g_{mn} V_n \left\{ \begin{array}{l} g_{mn} = \frac{e^2}{h} \text{Tr}(t_{mn} t_{mn}^\dagger), \quad m \neq n, \\ g_{nn} = \frac{e^2}{h} \text{Tr}(r_{nn} r_{nn}^\dagger - 1). \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Büttiker assumiu que esta expressão é válida também na presença de um campo magnético onde seu único efeito seria a supressão da simetria da matriz S devido a quebra da simetria de reversão temporal. Para uma dedução de (1.5) via teoria da resposta linear para campo magnético nulo ver a referência [3]. O formalismo de Landauer-Büttiker(L-B) é uma poderosa descrição de transporte mesoscópico, i. e. quando transporte no condutor é coerente, podendo as funções de transmissão ($\text{Tr}(t_{mn} t_{mn}^\dagger)$) serem em princípio calculadas através da equação de Schrödinger. Mesmo considerando transporte incoerente o formalismo é válido desde que não haja fluxo vertical (transição entre diferentes canais de energia do mesmo guia), nesse caso as funções de transmissão são obtidas via abordagem fenomenológicas. Quando os efeitos de coerência podem ser desprezados completamente então as funções de transmissão podem ser calculadas utilizando métodos semi-clássicos. Mesmo havendo fluxo vertical, este pode ser desprezado caso as funções de transmissão sejam aproximadamente constantes na faixa de energia onde o transporte ocorre.

O formalismo de L-B aplica-se a uma enormidade de efeitos observados em sistemas mesoscópicos tais como, efeito Hall quântico, fenômenos de localização, transporte no regime de localização forte, tunelamento por barreira dupla (neste caso só possível de ser estudado via L-B com um tratamento próprio do fluxo vertical) etc. O grande mérito do formalismo de L-B é o de capacitar-nos a estudar um tópico tão complexo quanto transporte quântico em condutores desordenados e caóticos utilizando apenas mecânica quântica elementar.

1.4 Sistemas Híbridos Normal-Supercondutor

A teoria BCS é um modelo microscópico introduzido por Bardeen, Cooper e Schrieffer em 1957 e que tem como seu grande sucesso a explicação das propriedades dos supercondutores convencionais em termos de um número mínimo de parâmetros experimentais. Nesta teoria mostrou-se que uma interação atrativa entre elétrons, mesmo fraca, causa uma instabilidade no estado fundamental de um gás eletrônico levando à formação de pares de elétrons ligados ocupando estados com momento linear e spins opostos. Esse par de elétrons recebe o nome de *par de Cooper*. A constatação via uma teoria microscópica desta quase-partícula de carga $2e$, como a portadora de carga no supercondutor confirmou as especulações das teorias fenomenológicas predecessoras. Para uma discussão bem abrangente da teoria BCS recomendamos o livro do M. Tinkham [20]. Uma discussão um pouco mais sofisticada pode ser encontrada nos livros sobre muitos corpos de Fetter e Walecka [21] e Mahan [22].

A teoria BCS pode ser estendida para o estudo de transporte através de interfaces entre condutores ref. [20]. Neste caso admite-se uma probabilidade diferente de zero para a transferência de carga por tunelamento eletrônico entre condutores separados por uma fina barreira isolante. Esta probabilidade cai exponencialmente com a distância de separação e depende dos detalhes do material isolante que compõe a barreira. Para uma discussão quantitativa de tunelamento entre condutores normal-normal (NN), normal-supercondutor (NS) e supercondutor-supercondutor (SS), ver e. g. ref. [20]. Nesta tese estudaremos transporte quântico em sistemas híbridos normal-supercondutor. Discutiremos a seguir o principal efeito relacionado a uma interface NS, que é a *reflexão de Andreev*.

Na interface entre um metal normal e um supercondutor, temos a conversão de uma corrente elétrica dissipativa (do lado normal) em supercorrente não dissipativa (no supercondutor). O mecanismo responsável por esta conversão foi descoberto por A. F. Andreev [23]. Formalmente, a reflexão de Andreev consiste da reflexão de uma excitação eletrônica levemente acima do nível de Fermi no metal normal, com componente não nula de momento na direção normal da interface, como uma excitação tipo buraco levemente abaixo do nível de Fermi, ou vice-versa. O buraco (ou elétron) refletido tem (aproximadamente) o mesmo momento do elétron (ou buraco) incidente, sendo exatamente igual apenas na energia de Fermi. Para cada elétron refletido como buraco, excita-se um par de Cooper no meio supercondutor que é absorvido pelo condensado. Essa conversão recebe o nome de *reflexão de Andreev*. A reflexão de Andreev conserva a energia, o momento linear total e o spin total no metal normal, mas introduz um mecanismo de conversão de carga, $e \rightarrow -e$,

quebrando assim a simetria de conservação de carga no metal normal.

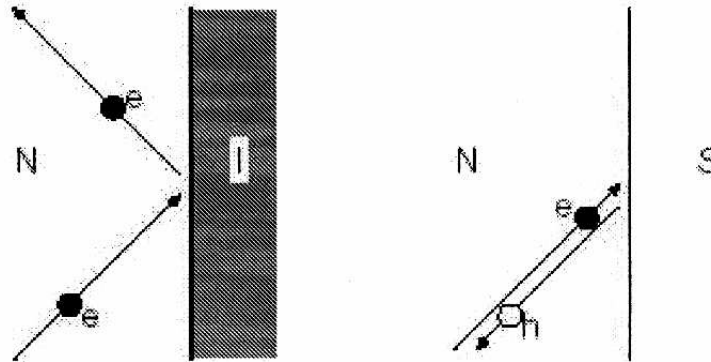


Figura 1.8: A figura a esquerda mostra o espalhamento de um elétron em uma interface metal-isolante, já a figura a direita mostra uma visão pictórica do espalhamento de Andreev numa interface NS. Figura retirada de [24].

No decorrer da década de 1980 vários grupos de pesquisas chegaram à conclusão de que a contribuição do espalhamento de Andreev para a condutância era significativa e desenvolveram uma teoria para interfaces limpas normal-isolante-supercondutor (NIS). Esta teoria mostra que para uma barreira tipo função delta, há uma discordância em relação à formulação usual de hamiltoniano de tunelamento, que só desaparece quando a intensidade da barreira aumenta. Esta nova teoria ficou conhecida como BTK (Blonder-Tinkham-Klapwijk) e é aplicada a sistemas N-I-S unidimensionais ou, somando sobre todos os vetores de ondas transversais, para sistemas de duas ou três dimensões que apresentam invariância translacional no plano da barreira.

Uma das motivações para o estudo das interfaces NS vem do avanço tecnológico na fabricação de contatos altamente transparentes entre filmes supercondutores e o 2-DEG formado na interface de heteroestruturas semicondutoras. Tais sistemas revelam muito sobre a influência mútua entre reflexão de Andreev e os efeitos já observados nas heteroestruturas semicondutoras. A coerência de fase em junções NS tem papel importantíssimo no estudo deste sistema. Considere a resistência de um fio feito de metal normal de comprimento L , pela lei de Ohm sua resistência cresce monotonamente com L . Quando conectamos o fio a um supercondutor através de uma barreira de tunelamento (com coeficiente de transmissão

Γ), a resistência por sua vez passa a exibir um mínimo quando $L \simeq \frac{L_e}{\Gamma}$ onde L_e é o livre caminho médio elástico do fio. Este mínimo é um exemplo do efeito de proximidade da interface NS e desaparece quando a coerência de fase entre elétron e buraco é quebrada, o que pode ser provocado pelo aumento da voltagem ou quando aplicamos um campo magnético. Este mínimo da resistência está associado com a transição entre os regimes Γ^{-1} para Γ^{-2} para a dependência da resistência com a transparência da barreira. A dependência tipo Γ^{-2} é esperada para o tunelamento num supercondutor, que é um processo de duas partículas. Já a dependência tipo Γ^{-1} é surpreendente. É como se o buraco refletido pelo processo de Andreev atravessasse a barreira sem sofrer reflexão. Este fenômeno recebeu o nome de *tunelamento sem reflexão*.

A coerência de fase em junções NS revelam novos paradigmas em transporte quântico, como por exemplo a supressão da condutância eletrônica devido aos efeitos de proximidade com o supercondutor. Em metais normais, efeitos de localização fraca não podem ser detectados via curvas (I-V) características. A razão é que a aplicação de voltagem não quebra a simetria de reversão temporal. Numa junção NS, podemos observar localização fraca em curvas (I-V) características, já que a aplicação de uma voltagem quebra a coerência de fase entre elétrons e buracos. O resultado é um pequeno declive na curva $(\partial I / \partial V - V)$ próximo de $V = 0$ para $\Gamma \simeq 1$. Reduzindo Γ , o declive transforma-se em um pico devido ao tunelamento por reflexão. Na figura (1.9), retirada da ref. [25], mostramos alguns gráficos experimentais da variação da condutância diferencial $\partial I / \partial V$ de um fio de ouro com $1\mu\text{m}$ de comprimento em função da tensão aplicada para diversas temperaturas. O fio se encontra conectado a um contato de ouro (lado normal) e a um contato de nióbio (lado supercondutor) esta estrutura NS tem aproximadamente 400nm de comprimento. Detalhes experimentais deste experimento bem como detalhes sobre o aparato de medição pode ser encontrado em [25, 26].

Outro efeito interessante acontece nas flutuações universais da condutância. No estado normal, a condutância flutua de amostra para amostra com uma variância que independe do tamanho da amostra bem como do grau de desordem da mesma. Quando aplicamos um campo magnético que quebra a simetria de reversão temporal, a variância da condutância cai precisamente por um fator dois. Em interfaces NS também são observadas tais flutuações. Na figura (1.10) temos dois gráficos obtidos experimentalmente por Hecker et al. [26] para um amostra NS que consiste em um fio de ouro em contato com um filme de Nióbio na sua fase supercondutora. A figura (1.10.b) contrasta as amplitudes de oscilação da condutância em função do campo magnético aplicado para duas situações: quando o campo magnético aplicado é inferior ao campo crítico do nióbio (valor onde o nióbio deixa de ser supercondutor),

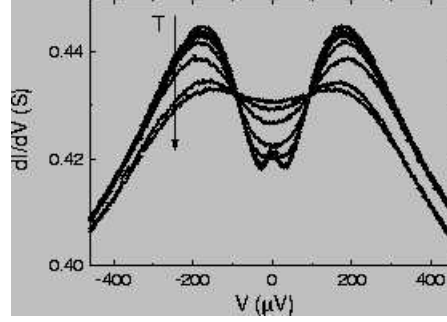


Figura 1.9: Condutância diferencial em função da voltagem aplicada numa amostra NS para diferentes teperaturas entre 60mK e 1500mK a campo magnético nulo. Figura retirada de [25].

mostrando que as amplitudes de oscilação neste regime NS é bem mais acentuadas que no caso normal quando o campo magnético é maior que o campo crítico de niobio.

Os fenômenos mencionados acima são discutidos com maiores detalhes na ref. [24]. Nesta referência o autor descreve uma teoria de espalhamento que relaciona a condutância G_{NS} da interface NS com a matriz de transmissão t do lado normal, para dispositivos de dois terminais. Uma revisão mais abrangente sobre este assunto incluindo múltiplos terminais pode ser encontrada em [27].

1.4.1 Equações de Bogoliubov-de Gennes

Os fenômenos típicos de sistemas híbridos NS mesoscópicos mencionados na seção anterior, ilustram a necessidade de se usar um formalismo que leve em consideração os espalhamentos tais como reflexão de Andreev, espalhamento por impurezas e/ou bordas da amostra. A extensão da teoria BCS que permite descrever estes efeitos foi desenvolvida por Bogoliubov [28] e foi posteriormente aperfeiçoada por de Gennes [29]. Nesta seção apresentaremos brevemente este formalismo seguindo as refs. [30] e [29].

Nosso ponto de partida é o hamiltoniano em segunda quantização para um sistema geral de elétrons interagentes

$$H = H^{(1)} + V^{(2)}, \quad (1.6)$$

onde

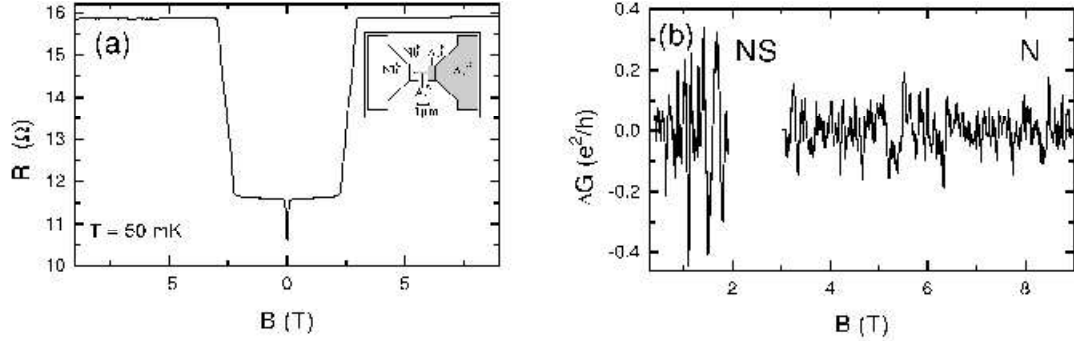


Figura 1.10: (a) Magneto-resistência de um fio de ouro conectado a um fio de nióbio em função do campo magnético aplicado a uma temperatura de 50 mK. Do lado direito em cima vemos a geometria da amostra. (b) Flutuações da condutância da amostra NS no caso NS ($0.4 < B < 1.9 \text{ T}$) e no caso normal ($3.1 < B < 9 \text{ T}$). Figura retirada de [26].

$$H^{(1)} = \sum_{\alpha\beta} \int d^3r \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A})^2 \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}) \right] \psi_{\beta}(\vec{r}), \quad (1.7)$$

é o termo de uma partícula e

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^3r \int d^3r' \psi_{\delta}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\gamma}^{\dagger}(\vec{r}') U_{\delta\gamma,\alpha\beta}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{\alpha}(\vec{r}') \psi_{\beta}(\vec{r}), \quad (1.8)$$

onde $U_{\delta\gamma,\alpha\beta}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ é o potencial de interação elétron-elétron, $\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r})$ e $\psi_{\alpha}(\vec{r})$ são operadores de campos fermiônicos que obedecem às seguintes relações canônicas:

$$\begin{cases} \{\psi_{\alpha}(\vec{r}), \psi_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{r}')\} = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \{\psi_{\alpha}(\vec{r}), \psi_{\alpha'}(\vec{r}')\} = 0 = \{\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}), \psi_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{r}')\}. \end{cases} \quad (1.9)$$

O hamiltoniano descrito por (1.6-1.8) é demasiado geral pois inclui termos que dependem do spin das partículas. Nossos sistemas não apresentam tal complexidade e podemos simplificar:

$$\begin{cases} U_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{r}) = U(\vec{r}) \delta_{\alpha\beta} , \\ U_{\delta\gamma,\alpha\beta}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = U^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} , \end{cases} \quad (1.10)$$

eliminando a dependência em spin. Assumindo também uma interação pontual, temos que:

$$U^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = -V_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.11)$$

Este conjunto de restrições acima é similar ao introduzido na teoria BCS. Fazendo a aproximação de Hartree-Fock usual da teoria BCS obtemos o hamiltoniano efetivo

$$H_{eff} = \int d^3r \left\{ \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) [K + U(\vec{r})] \psi_{\alpha}(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) - \Delta(\vec{r})^* \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \right\}, \quad (1.12)$$

onde

$$\Delta(\vec{r}) \equiv -V_0 \langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle = V_0 \langle \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \rangle, \quad (1.13)$$

e

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A})^2 - \mu. \quad (1.14)$$

Note que os termos que admitem a criação ou destruição de um par de elétrons com spins anti-paralelos com amplitude de probabilidade $\Delta(\vec{r})$, denominada amplitude de emparelhamento, não conservam o número de elétrons no gás justificando a introdução do potencial químico μ . Os efeitos de proximidade que nos referimos no começo desta seção estão relacionados com a média sobre desordem desta amplitude $\langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle$, que permite a destruição de dois elétrons (ou a criação de dois buracos) no mesmo ponto dentro do metal normal. A criação desta amplitude de emparelhamento local está relacionada com o mecanismo de reflexão de Andreev. Considere que inicialmente temos um elétron que se propaga difusivamente no meio normal e eventualmente atinge a interface NS sendo refletido através do mecanismo de reflexão de Andreev como um buraco que agora segue seu próprio caminho no

meio normal. Contudo, uma situação particularmente interessante surge quando o buraco segue a trajetória descrita pelo elétron com sentido oposto voltando assim para o ponto de criação do elétron incidente, sendo assim as fases acumuladas por ambas quase-partículas durante este processo se cancelam quase que completamente. Para uma excitação exatamente em cima do nível de Fermi este cancelamento das fases é total de fato.

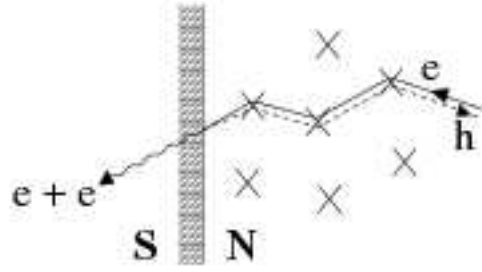


Figura 1.11: Esta figura mostra um típico par de trajetórias de Feynman que tem contribuição não nula para os efeitos de proximidade. Vale salientar que não há transmissão de momento linear no lado supercondutor como poderia-se imaginar olhando para o lado S da figura. Esta figura foi retirada da ref. [31].

A contribuição para esta amplitude $\langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle$ quando elétrons e buracos seguem trajetórias distintas é nula quando é feita a média sobre desordem devido à forte dependência destas trajetórias com a fase acumulada. Alguns aspectos relacionados com este potencial de emparelhamento estão discutidos em [31].

Utilizaremos a seguinte transformação canônica para diagonalizar o hamiltoniano efetivo (1.12):

$$\psi_{\uparrow}(\vec{r}) = \sum_n [u_n(\vec{r}) \gamma_{n,\uparrow} - v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger}]; \quad \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) = \sum_n [u_n^*(\vec{r}) \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} - v_n(\vec{r}) \gamma_{n,\downarrow}], \quad (1.15)$$

$$\psi_{\downarrow}(\vec{r}) = \sum_n [u_n(\vec{r}) \gamma_{n,\downarrow} + v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger}]; \quad \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) = \sum_n [u_n^*(\vec{r}) \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger} + v_n(\vec{r}) \gamma_{n,\uparrow}], \quad (1.16)$$

onde $\{u_n(\vec{r})\}$ e $\{v_n(\vec{r})\}$ são bases ortonormais de autofunções complexas e os campos γ_n e $\gamma_n^{\dagger}$ obedecem relações de anticomutação de férmions. Substituindo (1.15) e (1.16) em (1.12) o hamiltoniano efetivo fica:

$$H_{eff} = E_{GS} + \sum_{n\alpha} \epsilon_n \gamma_{n\alpha}^{\dagger} \gamma_{n\alpha}, \quad (1.17)$$

onde E_{GS} é a energia do estado fundamental e ϵ_n é a energia de excitação do n -ésimo estado do metal normal. Utilizando as regras de anticomutações dos operadores $\gamma_{n\alpha}$ e $\gamma_{n\alpha}^\dagger$ podemos calcular os seguintes comutadores

$$[H_{eff}, \gamma_{n\alpha}^\dagger] = \epsilon_n \gamma_{n\alpha}^\dagger, \quad (1.18)$$

$$[H_{eff}, \gamma_{n\alpha}] = -\epsilon_n \gamma_{n\alpha}. \quad (1.19)$$

Calculando agora os comutadores de H_{eff} com os operadores de campo $\psi_\alpha(\vec{r})$ obtemos

$$[H_{eff}, \psi_\uparrow(\vec{r})] = -(K + U(\vec{r})) \psi_\uparrow(\vec{r}) - \Delta(\vec{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\vec{r}), \quad (1.20)$$

$$[H_{eff}, \psi_\downarrow(\vec{r})] = -(K + U(\vec{r})) \psi_\downarrow(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) \psi_\uparrow^\dagger(\vec{r}). \quad (1.21)$$

Substituindo (1.15) e (1.16) em (1.20) e utilizando as equações (1.18) e (1.19), obtemos:

$$\begin{cases} \epsilon_n u_n(\vec{r}) = (K + U(\vec{r})) u_n(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) v_n(\vec{r}), \\ \epsilon_n v_n^*(\vec{r}) = -(K + U(\vec{r})) v_n^*(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) u_n^*(\vec{r}). \end{cases} \quad (1.22)$$

Tomando o complexo conjugado da segunda equação de (1.22), temos como resultado as equações de Bogoliubov-de Gennes:

$$\begin{cases} \epsilon_n u_n(\vec{r}) = (K + U(\vec{r})) u_n(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) v_n(\vec{r}), \\ \epsilon_n v_n(\vec{r}) = -(K^* + U(\vec{r})) v_n(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) u_n(\vec{r}). \end{cases} \quad (1.23)$$

Escrevendo as equações BdG, (1.23), numa forma matricial obtemos nosso resultado final

$$\begin{pmatrix} K + U(\vec{r}) & \Delta(\vec{r}) \\ \Delta^*(\vec{r}) & -K^* - U(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\vec{r}) \\ v_n(\vec{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_n \begin{pmatrix} u_n(\vec{r}) \\ v_n(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

1.4.2 Teoria de Espalhamento em Sistemas NS

Apresentaremos agora uma pequena revisão sobre a teoria de espalhamento para sistemas mesoscópicos NS seguindo as referências [24] e [32]. A necessidade

de uma teoria específica para sistemas NS surge como consequência da existência de coerência de fase entre partículas e buracos acoplados pela reflexão de Andreev nas interfaces NS. Esta coerência introduz efeitos de proximidade no transporte de quase-partículas nestes sistemas. A teoria de espalhamento nos fornece uma maneira simples de implementar as simetrias de conservação do fluxo e simetria partícula-buraco no formalismo de transporte pois baseia-se em conceitos básicos da física quântica tais como a função de onda em primeira quantização e suas condições de contorno nas interfaces.

A geometria do nosso sistema é basicamente uma região desordenada adjacente a um supercondutor (região à direita fig.(1.12)) e ligado a um reservatório de quase-partículas de potencial químico μ (região à esquerda fig.(1.12)) admitimos

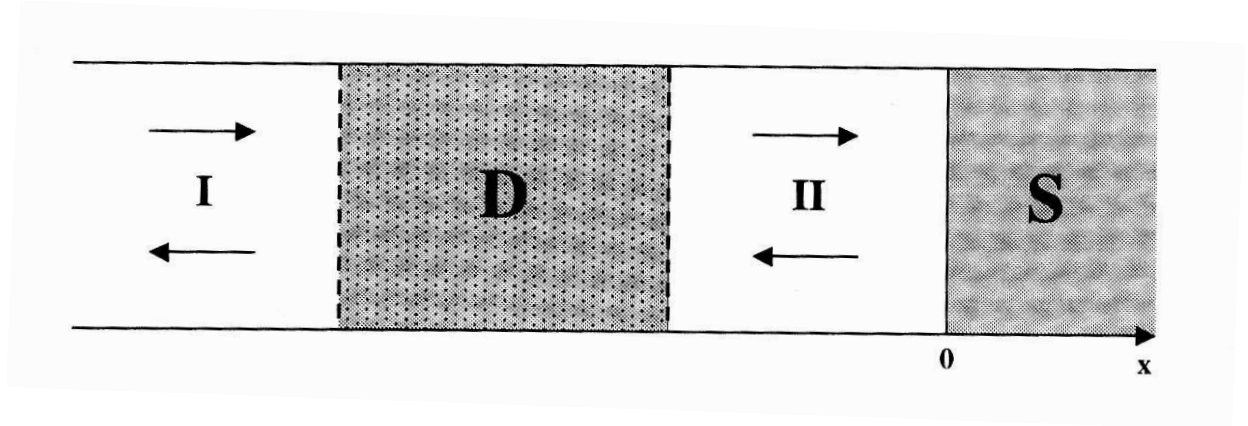


Figura 1.12: Sistema NS mesoscópico composto por guias de onda **I** e **II** perfeitos. O guia **I** conecta um reservatório de quase-partículas, com potencial químico μ , à esquerda do guia à região metálica desordenada **D**. O guia **II** conecta a região **D** ao supercondutor **S** que também tem a função de reservatório de quase-partículas. Figura retirada da ref. [32].

também uma separação espacial entre as interfaces NN e NS via regiões metálicas perfeitas (guias ideais). Esta separação espacial é utilizada para separarmos espacialmente o espalhamento Andreev do espalhamento normal devido a impurezas da região desordenada.

Os estados de espalhamento com energia E são autofunções das equações BdG (1.24):

$$\begin{pmatrix} H_e & \Delta(\vec{r}) \\ \Delta^*(\vec{r}) & H_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

onde definimos $H_e \equiv K + U(\vec{r})$ e $H_h \equiv -H_e^*$ como os hamiltonianos para a partícula e buraco de Bogoliubov, respectivamente. Utilizaremos uma função degrau para modelar nosso potencial de emparelhamento

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\phi} \Theta(\vec{r}). \quad (1.26)$$

No guia normal a equação BdG se reduz à equações de Schrödinger separadas para elétron e buracos nas vizinhanças do nível de Fermi

$$\begin{pmatrix} H_e & 0 \\ 0 & H_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_e(\vec{r}) \\ \varphi_h(\vec{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi_e(\vec{r}) \\ \varphi_h(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Nos guias há forte confinamento nas direções transversais (y, z), os n -ésimos modos de propagação de elétrons e buracos com energia E são respectivamente representados pelas seguintes funções de onda

$$\varphi_{n,e}^{\pm}(\vec{r}) = \chi_n(y, z) \frac{e^{\pm i k_n^e x}}{\sqrt{k_n^e}}, \quad (1.28)$$

$$\varphi_{n,h}^{\pm}(\vec{r}) = \chi_n(y, z) \frac{e^{\pm i k_n^h x}}{\sqrt{k_n^h}}, \quad (1.29)$$

onde

$$k_n^e \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu - \epsilon_n + E)}, \quad (1.30)$$

$$k_n^h \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu - \epsilon_n - E)}, \quad (1.31)$$

e ϵ_n é a energia associada ao modo confinado na direção transversal do guia.

As funções de onda de elétrons e buracos nos guias são

$$\begin{cases} \Phi_e^{I,II} = \left(\varphi_{1,e}^{I,II}, \dots, \varphi_{2N,e}^{I,II} \right)^T, \\ \Phi_h^{I,II} = \left(\varphi_{1,h}^{I,II}, \dots, \varphi_{2N,h}^{I,II} \right)^T, \end{cases} \quad (1.32)$$

onde os modos eletrônicos são dados por

$$\begin{cases} \varphi_{n,e}^I = a_{n,I}^+ \varphi_{n,e}^+ + a_{n,I}^- \varphi_{n,e}^- , \\ \varphi_{n,e}^{II} = a_{n,II}^+ \varphi_{n,e}^+ + a_{n,II}^- \varphi_{n,e}^- , \end{cases} \quad (1.33)$$

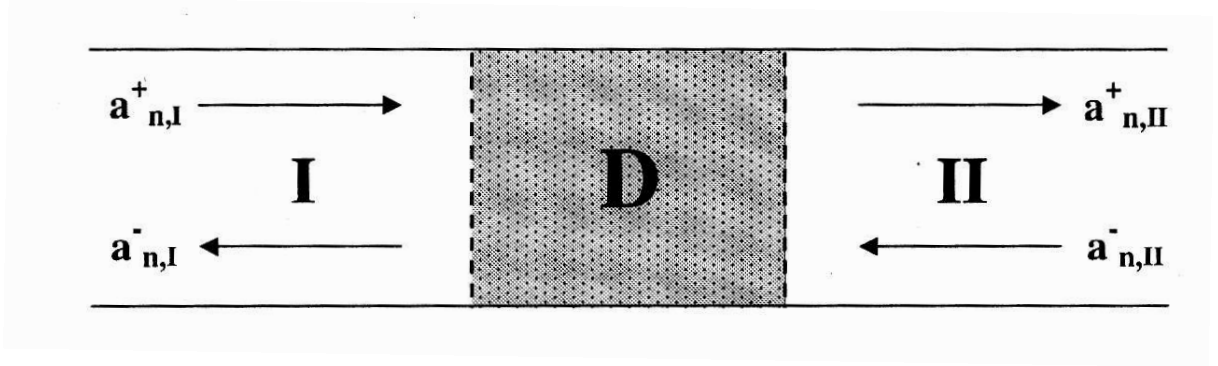


Figura 1.13: Ilustração do n -ésimo modo de propagação de elétrons na região N do sistema NS indicados pelos coeficientes de $\varphi_e^{I,II}$. Figura retirada da ref. [32].

e os modos de buracos são

$$\begin{cases} \varphi_{n,h}^I = b_{n,I}^- \varphi_{n,h}^+ + b_{n,I}^+ \varphi_{n,h}^- , \\ \varphi_{n,h}^{II} = b_{n,II}^- \varphi_{n,h}^+ + b_{n,II}^+ \varphi_{n,h}^- , \end{cases} \quad (1.34)$$

Podemos tratar daqui por diante o problema de espalhamento todo em função destes coeficientes de (1.33) e (1.34), usando as matrizes de espalhamento $4N \times 4N$ que relacionam as amplitudes de fluxo que entram na região desordenada com as que saem da mesma. A matriz de espalhamento que relacionam os coeficientes de (1.33) é definida como

$$S_e \begin{pmatrix} a_I^+ \\ a_{II}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_I^- \\ a_{II}^+ \end{pmatrix} \quad ; \quad S_e = \begin{pmatrix} r_e & t_e' \\ t_e & r_e' \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

A matriz S_e possui as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} S_e^\dagger = S_e^{-1}, \\ S_e = S_e^T, \end{cases} \quad (1.36)$$

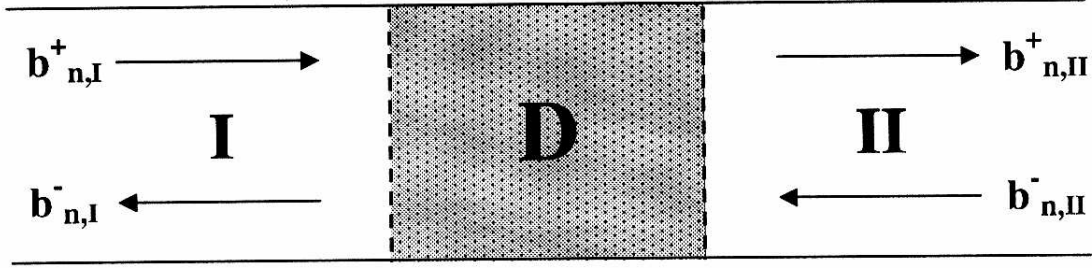


Figura 1.14: Ilustração do n -ésimo modo de propagação de buracos na região N do sistema NS indicados pelos coeficientes de $\varphi_h^{I,II}$. Figura retirada da ref. [32].

onde as equações de (1.36) dizem respeito à conservação de fluxo e à simetria de reversão temporal, respectivamente.

Analogamente, definimos a matriz espalhamento que relaciona os coeficientes de (1.34):

$$S_h \begin{pmatrix} b_I^+ \\ b_{II}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I^- \\ b_{II}^+ \end{pmatrix} \quad ; \quad S_h = \begin{pmatrix} r_h & t'_h \\ t_h & r'_h \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Tomando o complexo conjugado de (1.34) e de (1.37) e posteriormente fazendo as seguintes substituições $E \rightarrow -E$ e $\varphi_h^* \rightarrow \varphi_e$, obtemos de (1.34)

$$\begin{cases} \varphi_{n,e}^I = (b_{n,I}^-)^* \varphi_{n,e}^- + (b_{n,I}^+)^* \varphi_{n,e}^+ , \\ \varphi_{n,e}^{II} = (b_{n,II}^-)^* \varphi_{n,e}^- + (b_{n,II}^+)^* \varphi_{n,e}^+ , \end{cases} \quad (1.38)$$

comparando (1.33) e (1.38) obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$\begin{cases} a_{n,I}^+ = (b_{n,I}^+)^* & a_{n,I}^- = (b_{n,I}^-)^* , \\ a_{n,II}^+ = (b_{n,II}^+)^* & a_{n,II}^- = (b_{n,II}^-)^* . \end{cases} \quad (1.39)$$

De (1.37) obtemos depois de algumas manipulações algébricas:

$$S_h(E) = S_e^*(-E). \quad (1.40)$$

1.4.3 Espalhamento Andreev na Interface NS

Nesta seção vamos abordar alguns detalhes microscópicos da reflexão de Andreev. Vamos considerar que a energia E do elétron incidente na interface NS em relação ao nível de Fermi E_F , está no intervalo $0 < E < \Delta_0$, de modo que não há transmissão de corrente no lado supercondutor, ou seja o par de Cooper é absorvido pelo condensado em repouso. Na aproximação de Andreev, temos que o potencial de emparelhamento é bem menor que a energia de Fermi $E_F \gg \Delta_0$ e portanto o principal efeito da interface é a reflexão do elétron incidente como um buraco no lado normal. Na região normal a representação conjunta partícula-buraco da função de onda é

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \varphi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_{ne}^+ + \begin{pmatrix} 0 \\ r_{he}^A \end{pmatrix} \varphi_{nh}^+; \quad r_{he}^A = ie^{-i\phi} \quad (1.41)$$

A matriz de espalhamento de Andreev é

$$S^A \begin{pmatrix} a_{II}^+ \\ b_{II}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{II}^- \\ b_{II}^- \end{pmatrix} \quad ; \quad S^A = \begin{pmatrix} 0 & r_{eh}^A \\ r_{eh}^A & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

É útil definirmos o vetor $4N$ -dimensional:

$$c_I^\pm = \begin{pmatrix} a_I^\pm \\ b_I^\pm \end{pmatrix} \quad ; \quad c_{II}^\pm = \begin{pmatrix} a_{II}^\pm \\ b_{II}^\pm \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Necessitamos de uma matriz de espalhamento geral, que incorpore a matriz de espalhamento devido à desordem S_D e a matriz espalhamento de Andreev (1.42). A matriz da região I que governa a reflexão de quase-partículas em todo dispositivo é dada por

$$S c_I^+ = c_I^- \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

A matriz de espalhamento devido às impurezas é

$$S_D \begin{pmatrix} c_I^+ \\ c_{II}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I^- \\ c_{II}^- \end{pmatrix} \quad ; \quad S_D = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

com

$$r = \begin{pmatrix} r_e & 0 \\ 0 & r_h \end{pmatrix}; \quad t' = \begin{pmatrix} t'_e & 0 \\ 0 & t'_h \end{pmatrix}; \quad t = \begin{pmatrix} t_e & 0 \\ 0 & t_h \end{pmatrix}; \quad r' = \begin{pmatrix} r'_e & 0 \\ 0 & r'_h \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Como não há reflexão de Andreev na região desordenada, a conservação de carga não é violada localmente, ou seja não há mecanismo de troca da natureza das quase-partículas entre as regiões I e II, por isso as matrizes em (1.46) são diagonais. A relação entre a matriz S da eq. (1.44) e as matrizes S_D da eq. (1.45) e S^A da eq. (1.42) é dada pela expressão abaixo:

$$S = r + t' S^A (1 - r' S^A)^{-1} t. \quad (1.47)$$

Da eq. (1.47) obtemos os coeficientes da matriz de espalhamento de interesse da junção NS através das matrizes de espalhamento da região desordenada. Para obter a relação entre os coeficientes das matrizes e os observáveis de transporte (e.g. condutância NS), devemos utilizar a teoria de Landauer-Büttiker para sistemas NS mesoscópicos.

1.5 Teoria de Landauer-Büttiker para Sistemas NS

Nesta seção faremos a conexão entre a teoria de espalhamento de sistemas NS e os observáveis destes sistemas via uma extensão da teoria de Landauer e Büttiker.

1.5.1 Matriz Espalhamento para Multi-Terminais

Considere os elementos da matriz- S , $S_{pn, qm}^{\alpha\beta}(E)$, com $p, q = 1, 2, \dots, M$ (M é o número de terminais do sistema), $n = 1, \dots, N_p^\alpha(E)$; $n = 1, \dots, N_q^\beta(E)$ (número de modos de quase-partículas de natureza determinada pelo valor de α ou β), se α (ou β) for $+$ estamos tratando de uma partícula, se α (ou β) for $-$ então temos um buraco. As simetrias desses elementos são dadas por (1.36), junto com a simetria partícula-buraco descrita pela equação abaixo

$$S_{pn, qm}^{\alpha\beta}(E) = \alpha\beta [S_{pn, qm}^{-\alpha-\beta}(-E)]^*. \quad (1.48)$$

De (1.36) temos que

$$\sum_{\beta, q, m} (S^\dagger(E))_{pn, qm}^{\alpha\beta} (S(E))_{qm, p'n'}^{\beta\alpha'} = \delta_{pp', nn'}^{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta, q, m} (S(E))_{pn, qm}^{\alpha\beta} (S^\dagger(E))_{qm, p'n'}^{\beta\alpha'}. \quad (1.49)$$

A função de transição de partículas tipo α em tipo β , com energia E , partindo do guia p para o guia q é definida como:

$$T_{pq}^{\alpha\beta}(E) = \sum_{m,n} |S_{pn,qm}^{\alpha\beta}(E)|^2. \quad (1.50)$$

As relações que representam as simetrias de conservação do fluxo, eq. (1.49), e de conversão partícula-buraco, eq. (1.48), podem ser representadas em termos das funções de transmissão, respectivamente por;

$$\sum_{\beta q} T_{pq}^{\alpha\beta}(E) = N_p^\alpha(E) = \sum_{\beta q} T_{pq}^{\beta\alpha}(E) \quad (1.51)$$

e

$$T_{pq}^{\alpha\beta}(E) = T_{pq}^{-\alpha-\beta}(-E) \Rightarrow N_p^\alpha(E) = N_p^{-\alpha}(-E). \quad (1.52)$$

Na presença de espalhamento Andreev, que introduz um mecanismo de quebra da simetria de conservação de carga no lado normal, *transporte de carga* e *difusão de quase-partículas* não são mais equivalentes. Há uma separação entre carga e energia que modifica as relações entre corrente e voltagem no sistema.

Considere M reservatórios com potenciais $V_1, V_2, \dots, V_M$ conectados a uma região desordenada, que por sua vez está conectada a várias regiões supercondutoras mantidas a um potencial químico comum μ . No limite de resposta linear a corrente de quasi-partículas no reservatório p é dada por

$$I_p = \sum_{q=1}^M G_{pq} (V_q - V) \quad V = \frac{-\mu}{e}, V_q = \frac{-\mu_q}{e}. \quad (1.53)$$

Usando o argumento de contagem da teoria de Landauer-Büttiker, obtemos

$$I_p = \frac{-2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{\alpha} \left[\delta_{pq} N_p^\alpha(E) f_p^\alpha(E) - \sum_{\beta} T_{pq}^{\alpha\beta}(E) f_q^\alpha(E) \right], \quad (1.54)$$

onde

$$f_p^\alpha(E) \equiv \frac{1}{e^{\beta(E - \alpha(\mu_p - \mu))} + 1} \quad \text{e} \quad (1.55)$$

e

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta E} + 1}, \quad (1.56)$$

são as distribuições de Fermi Dirac. No limite $V_p \rightarrow V$ (voltagem nula) os coeficientes de condutância são dados por

$$G_{pq} = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) (N_p^+(E) \delta_{pq} - T_{pq}^{++}(E) + T_{pq}^{-+}(E)) , \quad (1.57)$$

ou equivalentemente

$$G_{pq} = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) (N_p^-(E) \delta_{pq} - T_{pq}^{--}(E) + T_{pq}^{+-}(E)) . \quad (1.58)$$

1.5.2 Sistemas NS de Dois Terminais

A matriz- S para um sistema com dois terminais tem a seguinte estrutura:

$$S(E) = \begin{pmatrix} S_{11}(E) & S_{12}(E) \\ S_{21}(E) & S_{22}(E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(E) & t'(E) \\ t(E) & r'(E) \end{pmatrix} , \quad (1.59)$$

onde os elementos de $S_{pq}(E)$ são representados pelos coeficientes $S_{pq}^{\alpha\beta}(E)$

$$S_{11}^{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}(E); \quad S_{12}^{\alpha\beta} = t'_{\alpha\beta}(E); \quad S_{21}^{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}(E); \quad S_{22}^{\alpha\beta} = r'_{\alpha\beta}(E). \quad (1.60)$$

Assim por exemplo:

$$r(E) = \begin{pmatrix} r_{++}(E) & r_{+-}(E) \\ r_{-+}(E) & r_{--}(E) \end{pmatrix} , \quad (1.61)$$

e a relação corrente-voltagem é dada por

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 - V \\ V_2 - V \end{pmatrix} , \quad (1.62)$$

onde os coeficientes G_{pq} são dados por (1.57). Introduzindo coeficientes de condutância adimensionais, g_{pq} , temos

$$g_{pq} = N_p^+(E) \delta_{pq} - T_{pq}^{++}(E) + T_{pq}^{-+}(E) . \quad (1.63)$$

Para $p = q = 1$, obtemos

$$g_{11} = N_1^+(E) - T_{11}^{++}(E) + T_{11}^{-+}(E) . \quad (1.64)$$

onde

$$\begin{cases} T_{11}^{++}(E) = \text{Tr}(r_{++}(E) r_{++}^\dagger(E)), \\ T_{11}^{-+}(E) = \text{Tr}(r_{-+}(E) r_{-+}^\dagger(E)), \end{cases} \quad (1.65)$$

Substituindo (1.65) em (1.64) obtemos

$$g_{11} = N_1^+(E) - \text{Tr}(r_{++}(E) r_{++}^\dagger(E)) + \text{Tr}(r_{-+}(E) r_{-+}^\dagger(E)). \quad (1.66)$$

Condutância de uma junção NS :

Definimos a condutância de uma junção NS, correspondendo a um terminal normal e outro supercondutor como

$$G_{NS} = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) g_{NS}(E), \quad (1.67)$$

onde,

$$g_{NS} = g_{11} = N_1^+(E) - \text{Tr}(r_{++}(E) r_{++}^\dagger(E)) + \text{Tr}(r_{-+}(E) r_{-+}^\dagger(E)) = \text{Tr}(\check{1} - r_{++}(E) r_{++}^\dagger(E) + r_{-+}(E) r_{-+}^\dagger(E)). \quad (1.68)$$

Definimos $\check{1}$ como a matriz unidade de dimensão $4N$. Da simetria de conservação de fluxo, eq. (1.36), temos

$$S^\dagger(E)S(E) = \check{1} = S(E)S^\dagger(E) \quad \text{onde} \quad S(E) = \begin{pmatrix} r_{++}(E) & r_{+-}(E) \\ r_{-+}(E) & r_{--}(E) \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

De (1.69) obtemos,

$$r_{++}^\dagger(E) r_{++}(E) + r_{-+}^\dagger(E) r_{-+}(E) = \check{1}. \quad (1.70)$$

Substituindo (1.70) em (1.68) resulta em

$$g_{NS} = 2 \text{Tr}(r_{-+}^\dagger(E) r_{-+}(E)). \quad (1.71)$$

De (1.47) obtemos (fazendo $+$ = e e $-$ = h),

$$r_{he} = ie^{-i\phi} (t'_e)^* (1 + r'_e (r'_e)^*)^{-1} t_e, \quad (1.72)$$

com $E = 0$. Na presença de reversão temporal temos $r'_e = (r'_e)^T$ e $t'_e = (t'_e)^T$, portanto (1.72) fica,

$$r_{he} = ie^{-i\phi} (t'_e)^\dagger (1 + r'_e (r'_e)^\dagger)^{-1} t_e. \quad (1.73)$$

Substituindo (1.73) em (1.71):

$$g_{NS} = 2 \text{Tr}(ie^{-i\phi} (t'_e)^\dagger (1 + r'_e (r'_e)^\dagger)^{-1} t_e (-ie^{i\phi} (t'_e)^\dagger (1 + r'_e (r'_e)^\dagger)^{-1} t_e)). \quad (1.74)$$

Utilizando a simetria de conservação de fluxo eq. (1.36), temos

$$t_e^\dagger t_e + (r'_e)^\dagger r'_e = 1, \quad (1.75)$$

assim,

$$G_{NS} = G_0 g_{NS} = 2 G_0 \text{Tr} \left\{ \left(\frac{t_e t_e^\dagger}{2 - t_e t_e^\dagger} \right)^2 \right\}. \quad (1.76)$$

Definindo τ_n como n -ésimo autovalor da matriz de transmissão $t_e t_e^\dagger$, obtemos a fórmula de Beenakker [24]

$$G_{NS} = 2 G_0 \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n)^2}. \quad (1.77)$$

Potência do Ruído de Disparo

Utilizando um método análogo ao desenvolvido acima, no limite de baixas temperaturas, $T \rightarrow 0$, e na aproximação de resposta linear [33], podemos obter para a potência do ruído de disparo de uma junção NS a seguinte fórmula

$$P_{NS} = 4 P_0 \text{Tr} \left[r_{he} r_{he}^\dagger \left(1 - r_{he} r_{he}^\dagger \right) \right], \quad (1.78)$$

onde, $P_0 = 2e V G_0$. Reescrevendo a eq. (1.78) em função dos autovalores de transmissão obtemos

$$P_{NS} = 16 P_0 \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^2 (1 - \tau_n)}{(2 - \tau_n)^4}. \quad (1.79)$$

Concluimos observando as expressões, (1.77) e (1.79), que a condutância e a potência do ruído de disparo do sistema NS no regime de transporte considerado aqui, podem

ser obtidos se conhecemos os autovalores de transmissão do meio normal. Isto foi possível pois através do formalismo de matriz de espalhamento, desenvolvido acima, eliminamos todos os graus de liberdade da parte supercondutora.

1.6 Abordagem Quase-Clássica

Na década de 1960 Eilenberger [34] introduziu uma nova abordagem para descrever supercondutores macroscópicos através de um método que mostrou-se bastante útil também na análise de sistemas NS. Esta abordagem, denominada, quase-clássica mostrou ser um procedimento controlável que simplifica drasticamente a equação microscópica de Gorkov para as funções de Green de supercondutores. Estas funções de Green contém toda a informação relevante para a descrição do sistema NS, mas seu cálculo na presença de efeitos de proximidade é em geral muito complicado. Extendendo o trabalho de Eilenberger, Usadel deduziu uma equação tipo difusão para as funções de Green quase-clássicas de metais sujos, que é conhecida como equação de Usadel [35]. Inspirados nos trabalhos pioneiros de Eilenberger e Usadel, vários métodos quase-clássicos têm sido formulados para o estudo das propriedades médias de sistemas NS. Nesta seção discutiremos alguns pontos importantes sobre as diversas abordagens quase-clássicas para sistemas NS.

1.6.1 A Equação de Gorkov

Para introduzir os métodos quase-clássicos, convém apresentarmos a função de Green de Gorkov. A equação de Gorkov é definida como [31]

$$\begin{pmatrix} K_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) & \Delta(\vec{r}_1) \\ -\Delta^*(\vec{r}_1) & K'_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \end{pmatrix} \mathcal{G}^{r,a}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \hat{1} \delta^d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (1.80)$$

onde

$$\mathcal{G}^{r,a}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} G^{r,a} & F^{r,a} \\ F^{\dagger r,a} & G^{\dagger r,a} \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

e

$$\begin{cases} K_1 = \mu + \epsilon_{\pm} - \frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_1))^2, \\ K'_1 = \mu - \epsilon_{\pm} - \frac{1}{2m}(\hat{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_1))^2. \end{cases} \quad (1.82)$$

As funções $G^{r,a}$ e $F^{r,a}$ são respectivamente a função de Green normal e anômala, $\Delta(\vec{r})$ é o potencial de emparelhamento e V é o potencial devido às impurezas.

Esta equação pode ainda ser escrita em uma forma mais elegante utilizando as matrizes de Pauli, operando nas duas componentes (partícula e buraco) do espaço. A equação (1.80) fica,

$$\left[\epsilon_F - \frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_1)\sigma_3)^2 - V(\vec{r}_1) + (\hat{\Delta}(\vec{r}_1) + \epsilon_{\pm})\sigma_3 \right] \mathcal{G}^{r,a}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \delta^d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (1.83)$$

onde $\hat{\Delta} = \sigma_1|\Delta|e^{-i\varphi(\vec{r}_1)\sigma_3}$, $|\Delta|$ é o modulo do potencial de emparelhamento e $\varphi(\vec{r})$ é a sua fase.

A presença do potencial $V(\vec{r})$ devido a impurezas torna a solução da equação (1.83) muito trabalhosa. Vamos agora discutir sob que condições podemos recorrer a uma aproximação quase-clássica para esta equação.

1.6.2 Aproximação Quase-clássica

Uma simplificação crucial para a equação (1.83) acontece quando o comprimento de onda dos elétrons é pequeno comparado com as escalas características sobre as quais o potencial de emparelhamento e o potencial vetor variam. O ponto de partida da aproximação quase-clássica é a observação de que a função de Green é composta por um termo responsável por rápidas oscilações na escala do comprimento de onda de Fermi, modulada por um termo que oscila lentamente em escalas maiores. A abordagem quase-clássica dos efeitos de proximidade é baseada numa média sobre as variações rápidas da função de Green. A vantagem técnica é uma simplificação tremenda das equações cinéticas correspondentes. Para uma discussão mais detalhada das funções de Green quase-clássicas sugerimos o artigo de revisão [27].

A função de Green quase-clássica (ou função de Green de Eilenberger), é obtida da função de Green de Gorkov através de uma transformada de Wigner seguida de uma média sobre impurezas e uma integral sobre a energia cinética.

$$g^{r,a}(\hat{n}, \vec{r}) = \frac{i}{\pi} \int d\xi_p \int d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \mathcal{G}^{r,a}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \exp(-i\vec{p} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)), \quad (1.84)$$

onde, $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ é a coordenada do centro de massa, $\xi_p = v_F(p - p_F)$, $\hat{n} = \vec{p}/p$ e $p_F = mv_F$ é o momento de Fermi. A implementação da aproximação acima descrita na equação de Gorkov (1.83) nos leva a equação de Eilenberger:

$$\vec{v}_F \cdot \nabla_r g^{r,a}(\hat{n}, \vec{r}) = i \left[\sigma_3(\epsilon_{\pm} + \hat{\Delta}(\vec{r})) + \frac{i}{2\tau} \left\langle g^{r,a}(\vec{n}', \vec{r}) \right\rangle_{\hat{n}'} , g^{r,a}(\hat{n}, \vec{r}) \right]. \quad (1.85)$$

A equação acima é similar à equação de Boltzmann e é mais simples que a equação Gorkov, mas ainda é muito trabalhoso resolvê-la em geral. Simplificações desta equação são possíveis no *limite sujo*. O *limite sujo* acontece quando o mecanismo principal de transporte é o difusivo ($L_e \ll \xi$) e as escalas de tempo são bem maiores que o tempo de espalhamento τ . Nestas condições, podemos expandir a função de Green em torno da sua forma isotrópica

$$g^{r,a}(\vec{v}_F, \vec{r}) = g_0^{r,a}(\vec{r}) + \hat{n} \cdot \vec{g}_1^{r,a}(\vec{r}) + \dots, \quad (1.86)$$

onde, $g_0^{r,a}(\vec{r}) \gg \hat{n} \cdot \vec{g}_1^{r,a}(\vec{r})$. Implementando esta expansão na equação de Eilenberger, (1.85), obtemos uma equação não-linear de segunda ordem

$$D \nabla (g_0^{r,a}(\vec{r}) \nabla g_0^{r,a}(\vec{r})) + i \left[\sigma_3(\epsilon_{\pm} + \hat{\Delta}(\vec{r})), g_0^{r,a}(\vec{r}) \right] = 0; (g_0^{r,a})^2(\vec{r}) = \hat{1}, \quad (1.87)$$

conhecida como *equação de Usadel*. Para obtermos a solução de (1.87) precisamos especificar as condições de contorno apropriadas. Soluções da equação de Usadel com suas respectivas condições de contorno foram obtidas para várias geometrias de interesse.

Inspirado na abordagem de Usadel, Nazarov [36], [37], obteve uma relação entre a função distribuição de autovalores de transmissão de condutores difusivos normais e uma corrente fictícia relacionada à função de Green de Keldysh.

$$\rho(T) = \frac{\rho_0(T)}{\pi G} \text{Re} \left(I(\pi + i \text{arccosh}(\frac{1}{\sqrt{T}})) \right), \quad (1.88)$$

onde a corrente fictícia é definida por

$$I(\phi) \equiv G_Q \sin \phi \text{Tr} \left(\frac{t^\dagger t}{1 - \sin^2(\phi/2) t^\dagger t} \right). \quad (1.89)$$

Se determinarmos esta corrente podemos portanto obter a função distribuição de autovalores de transmissão. Para o cálculo desta corrente Nazarov desenvolveu uma teoria de elemento finito, conhecida como *teoria de circuitos*. Nesta abordagem ele separa o condutor em elementos finitos conectados por nós e cada nó tem um certo potencial fictício. A “corrente” que atravessa cada elemento está relacionada à

diferença de “potencial” no elemento através de uma lei de Ohm generalizada. Uma lei de conservação nos nós do circuito nos possibilita o cálculo da corrente total. Em [37] também é discutido a extensão desta abordagem para elementos não difusivos onde a relação entre a corrente e a diferença de potencial não é linear, como por exemplo numa junção de tunelamento e em pontos de contatos ideais. A teoria de circuito de Nazarov não é capaz de estudar flutuações quânticas.

1.7 Teoria de Campos para Sistemas NS

Trabalhos experimentais e teóricos recentes (as referências deste trabalhos podem ser obtidas em [38, 31]) têm mostrado que flutuações quânticas em sistemas NS não somente tendem a ser mais acentuadas que no caso normal como podem ter origem física distintas. Esta tendência dos sistemas NS de apresentar flutuações resulta da combinação dos mecanismos de coerência quântica da física mesoscópica da fase normal com os efeitos de proximidade.

Quando comparada com as propriedades médias dos sistemas NS, a física dos fenômenos de flutuações nestes sistemas é bem menos conhecida. Isso porque abordagens quase-clássicas não são úteis no estudo destas flutuações. A extensão da formulação de espalhamento para transporte de sistemas mesoscópicos normais para sistemas NS, possibilitou o cálculo da contribuição tanto de localização fraca quanto de flutuações para várias propriedades globais de transporte de sistemas NS. Contudo diferentemente de abordagens quase-clássicas o formalismo de matriz de transferência não é microscópico, sendo assim não pode ser usado em problemas que necessitam de uma descrição local verdadeiramente microscópica. Em [31], [38] os autores propõem uma abordagem teórica para o estudo de sistemas NS. Este método é basicamente a unificação de conceitos quase-clássicos com técnicas modernas de teoria de campos aplicada ao estudo de sistemas mesoscópicos normais. O produto final desta junção é uma modelagem de sistemas NS que trata em pé de igualdade as manifestações dos efeitos de proximidade tanto na média como nas flutuações.

Mais especificamente esta abordagem tem como ponto de partida a conexão entre equações quase-clássicas para as funções de Green e o modelo- σ não-linear supersimétrico. O ponto de partida também é a equação de Gorkov de uma sistema NS. Depois é definido um funcional geratriz para a média da desordem do produto de funções de Green avançadas e retardadas. Este funcional é similar a um modelo- σ não linear. A abordagem quase-clássica dos sistemas NS é equivalente ao campo médio desta teoria de campo.

Uma outra abordagem utilizando também modelo- σ não linear supersimétrico,

foi proposta por Macêdo [39]. Neste trabalho o autor mostrou que avanços substanciais no estudo de sistemas de dois terminais, tanto no caso normal como em sistemas NS, podem ser feitos obtendo a corrente fictícia via o modelo- σ não linear, derivando desta forma equações de escala para a média da densidade de autovalores de transmissão. A teoria proposta em [39] tem as vantagens de descrever completamente a transição gradual do regime balístico para o difusivo e de tratar interfaces de transparência arbitrária.

Capítulo 2

Estatística de Contagem

Em 1909 Einstein [40] demonstrou que as flutuações da radiação eletromagnética estão intimamente ligadas à dualidade onda-partícula. Ele mostrou que quando a energia é transmitida por partícula clássicas, a amplitude das flutuações escala com a raiz quadrada da energia média, ao passo que ondas clássicas levam a uma dependência linear com a energia média. Levando-se em conta a natureza dual da luz, essas duas contribuições devem coexistir, podendo-se ter, todavia, a predominância de uma delas para uma determinada faixa de frequência. Na década de 1960 essas flutuações foram utilizadas para distinguir a radiação proveniente de um laser, da radiação do corpo negro. Como o elétron também possui natureza dual, já era esperado que sua discreteza levasse a um tipo específico de ruído. O ruído de disparo foi descrito pela primeira vez por Walter Schottky em experimentos utilizando tubos de raios catódicos. Ao contrário do ruído térmico que é branco e informa apenas a temperatura, o ruído de disparo tem bastante informação, podendo ser usado como ferramenta de estudo de propriedades de transporte dos sistemas que o exibem. Uma breve introdução sobre flutuações em sistema eletrônicos pode ser encontrada em [41].

Um problema muito interessante em sistemas quânticos é o problema de medição de observáveis. Como vemos em cursos básicos de mecânica quântica uma medição pode ser interpretada como um processo instantâneo de natureza estatística. Essa medição instantânea é descrita pela redução do pacote de onda que descreve o sistema, que por sua vez envolve a projeção deste pacote em um autoestado do observável medido, o qual é representado por um operador hermiteano. Um modelo de medição mais realista é a medição estendida no tempo como ocorre por exemplo em fotodetectores. Neste processo de medição pergunta-se quantos fótons atingem o detector em um intervalo de tempo fixo τ . O objetivo desta es-

tatística de contagem de fótons é calcular a probabilidade $P_n(\tau)$ de que n fótons atinjam o detector no intervalo τ . Para um campo de radiação com apenas um modo normal a probabilidade $P_n(\tau)$ é dada pela fórmula de Glauber [42]

$$P_n = \frac{(\eta\tau)^n}{n!} \langle : (a^+ a)^n e^{-\eta\tau a^+ a} : \rangle, \quad (2.1)$$

onde a^+ e a são operadores bosônicos de criação e aniquilação de fótons e η é o parametro de eficiência do detetor. A presença de dois pontos no começo e no final da expressão $: \dots :$ acima corresponde ao ordenamento normal dos operadores na eq. (2.1) e $\langle \dots \rangle$ corresponde à operação de média sobre um estado quântico descrito por uma matriz densidade. Fisicamente (2.1) significa que uma vez que o fóton foi detectado, esse fóton é destruído, ou seja ele é absorvido pelo detetor. Do ponto de vista matemático é conveniente introduzirmos a função geratriz da estatística de contagem de fótons

$$\chi(\lambda) = \sum_n P_n e^{i\lambda n}, \quad (2.2)$$

onde λ é o campo de contagem. Substituindo (2.1) em (2.2) obtemos uma expressão para a função geratriz da detecção de fótons num campo de radiação com um único modo normal:

$$\chi(\lambda) = \langle : \exp \eta\tau (e^{i\lambda} - 1) a^+ a : \rangle. \quad (2.3)$$

Fótons obedecem à estatística de Bose-Einstein e por isso tendem a se agrupar no mesmo estado de uma partícula, já os elétrons obedecem à estatística de Fermi-Dirac, que ao contrário dos bósons tendem a evitarem-se ficando apenas um por estado quântico de uma partícula, resultado conhecido como princípio da exclusão de Pauli. A diferença crucial entre a contagem de fótons e a contagem de elétrons, é que o número de elétrons não muda por causa do processo de medição, pois o número de elétrons no circuito é sempre conservado.

2.1 Estatística de Contagem de Carga

Para lidarmos com cargas é mais conveniente trabalharmos com a função $P_\tau(Q)$, que é a probabilidade de uma carga Q medida em unidades da carga elétrica fundamental ser transmitida no intervalo de tempo τ . Desta forma, seja $Q(\tau)$ uma variável estocástica. A cada valor que $Q(\tau)$ pode assumir associamos uma probabilidade P_n . O conjunto $\{P_n\}$ representa a *distribuição de probabilidade* de $Q(\tau)$

e satisfaz as condições $P_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N P_n = 1$. Definimos também uma *função densidade de probabilidade*:

$$P_\tau(Q) = \sum_{i=1}^N P_n \delta(Q - Q_i). \quad (2.4)$$

O m -ésimo momento de $Q(\tau)$ é definido como:

$$\langle (Q(\tau))^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (Q(\tau))^m P_\tau(Q) dQ(\tau). \quad (2.5)$$

É conveniente definir a *função característica* :

$$\chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda Q} P_\tau(Q) dQ. \quad (2.6)$$

Os momentos de $P_\tau(Q)$ em função de $\chi(\lambda)$ são dados por:

$$\langle Q^m \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-i)^m \frac{\partial^m \chi(\lambda)}{\partial \lambda^m}. \quad (2.7)$$

Os cumulantes são definidos como:

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} Q_k, \quad (2.8)$$

$$Q_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-i)^k \frac{\partial^k \Phi(\lambda)}{\partial \lambda^k}. \quad (2.9)$$

onde $\Phi(\lambda)$ é a *função característica dos cumulantes*. As relações entre os quatro primeiros momentos e os cumulantes de Q são representados abaixo:

$$Q_1 = \langle Q \rangle, \quad (2.10)$$

$$Q_2 = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2, \quad (2.11)$$

$$Q_3 = \langle Q^3 \rangle - 3\langle Q \rangle \langle Q^2 \rangle + 2\langle Q \rangle^3, \quad (2.12)$$

$$Q_4 = \langle Q^4 \rangle - 3\langle Q^2 \rangle^2 - 4\langle Q \rangle \langle Q^3 \rangle + 12\langle Q \rangle^2 \langle Q^2 \rangle - 6\langle Q \rangle^4. \quad (2.13)$$

2.2 Estatística de Contagem de Cargas em Circuitos: Casos Simples

Nesta seção discutiremos casos onde podemos obter a estatística de contagem utilizando argumentos físicos intuitivos e análise combinatória elementar. Seguiremos a descrição da ref. [43].

2.2.1 Gás de Elétrons a Temperatura Nula

Considere elétrons tunelando uma barreira que está entre dois reservatórios a temperatura nula. Temos então reservatórios sem ruído térmico, consequentemente as flutuações de correntes estão relacionadas aos espalhamentos no condutor que conecta os dois reservatórios. Por simplicidade admitiremos que este espalhamento é descrito por uma única probabilidade de transmissão Γ , num intervalo de energia $\delta E = eV$ acima do nível de Fermi. A transferência de partículas nestas condições obedece a um *processo de Bernoulli*: seja $N = \tau eV/h$ o número de partículas que tentam passar a barreira independentemente uma das outras num intervalo de tempo τ com probabilidade de sucesso Γ . O número n de elétrons transmitido para um dado N tem *estatística binomial* com distribuição

$$P(Q) = \binom{N}{n} \Gamma^n (1 - \Gamma)^{N-n}, \quad (2.14)$$

onde $Q = ne$. A *função geratriz dos cumulantes* é

$$\Phi(\lambda) = -N \ln [1 + \Gamma (e^{-i\lambda} - 1)]. \quad (2.15)$$

Se a probabilidade de transmissão for muito pequena $\Gamma \ll 1$, a transferência de partículas através da barreira se torna um evento raro, nesse limite a estatística quântica das partículas passa a ser irrelevante no processo levando a estatística de contagem a seguir uma distribuição Poissoniana,

$$P(Q) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}, \quad (2.16)$$

onde $\langle n \rangle = N\Gamma$ é o número médio de partículas transferidas. A distribuição de Poisson tem a seguinte função geratriz de cumulantes

$$\Phi(\lambda) = -\langle n \rangle (e^{-i\lambda} - 1). \quad (2.17)$$

Todas essas distribuições tendem à distribuição Gaussiana no limite $N \rightarrow \infty$ como consequência do teorema central do limite.

2.2.2 Gás de Elétrons a Temperatura Finita

Neste caso, flutuações de correntes oriundas de ambos reservatórios são “misturadas” via espalhamento na barreira. No limite de junção de tunelamento ($\Gamma \ll 1$) a estatística de transferência de carga fica um pouco mais simplificada. À temperatura finita estados eletrônicos em ambos os lados da barreira podem estar parcialmente preenchidos e portanto, a transferência de carga neste regime consiste em dois processos Poissonianos independentes, sendo um dos dois processos responsável pela transferência de cargas da esquerda para a direita da junção de tunelamento a uma taxa $r_{E \rightarrow D}$ e o outro responsável pelo inverso com taxa de transferência $r_{D \rightarrow E}$. Neste caso a função geratriz de cumulantes é dada por

$$\Phi(\lambda) = -\tau [r_{E \rightarrow D} (e^{-i\varepsilon\lambda} - 1) + r_{D \rightarrow E} (e^{i\varepsilon\lambda} - 1)] , \quad (2.18)$$

onde $\varepsilon \equiv \text{sinal}(\mu_1 - \mu_2)$. As taxas de transferências são dadas por

$$r_{E \rightarrow D} = \Gamma \left(\frac{eV}{h} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{eV}{kT}}} , \quad r_{D \rightarrow E} = e^{-\frac{eV}{kT}} r_{E \rightarrow D} , \quad (2.19)$$

onde $eV = \mu_1 - \mu_2$.

2.2.3 Generalização para Multi-Canais

Numa situação mais geral teremos transmissão via N canais no nosso intervalo de energia e cada canal terá sua própria probabilidade de transmissão Γ_k onde $k = 1, 2, \dots, N$. A generalização para multi-terminais da distribuição binomial a temperatura nula é a distribuição multinomial e sua função geratriz de cumulantes é

$$\Phi(\lambda) = - \left(\frac{eV\tau}{h} \right) \sum_{k=1}^N \ln [1 + \Gamma_k (e^{-i\varepsilon\lambda} - 1)] \quad (2.20)$$

Em [44], Levitov et al. generalizam (2.20) para o caso de temperatura finita, obtendo

$$\Phi(\lambda) = -\tau \sum_{k=1}^N \int \frac{d\epsilon}{h} \ln \{ 1 + \Gamma_k [(e^{-i\lambda} - 1) f_E(1 - f_D) + (e^{i\lambda} - 1) f_D(1 - f_E)] \} , \quad (2.21)$$

onde f_E e f_D são respectivamente as funções distribuição nos reservatórios à esquerda e à direita.

2.3 Processo de Medição em Sistemas Mesoscópicos

A primeira tentativa de se obter a estatística de contagem em sistemas mesoscópicos foi feita por Levitov e Lesovik em 1992 [45]. Neste trabalho eles obtiveram resultados fisicamente inaceitáveis no cálculo dos cumulantes de ordem maior que dois. A estatística de contagem de carga neste artigo para um condutor com elétrons não interagentes levava a concluir que a carga transferida envolvia portadores com uma certa fração da carga elementar do elétron. O problema era que do ponto de vista quântico a corrente elétrica é um operador e portanto correntes em diferentes tempos não comutam entre si, ou seja o operador carga transmitida não tem sentido algum. Esta inconsistência foi sanada quatro anos mais tarde na ref. [44]. Neste trabalho Levitov, Lee e Lesovik propuseram um modelo de galvanômetro, que é baseado na dinâmica de um spin-1/2. O funcionamento deste galvanômetro quântico se realiza da seguinte forma: um spin-1/2 precessiona no campo magnético B criado pela corrente que atravessa o sistema e a frequência de precessão é $\omega = eB/mc$, onde m é a massa do elétron e c é a velocidade da luz. Se este campo magnético é gerado por uma corrente elétrica seu valor é proporcional a ω , que por sua vez é proporcional à corrente I .

Vamos apresentar agora um resumo dos argumentos da ref. [44]. Adicionamos ao hamiltoniano do elétron um potencial vetor devido ao spin:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\lambda\Phi_0}{4\pi}\sigma_z\nabla\theta(f(\vec{r}) - f_0), \quad (2.22)$$

onde σ_z é uma matriz de Pauli, $\Phi_0 = hc/e$ e $\theta(x)$ é a função degrau. A eq. (2.22) descreve uma interação elétron-spin localizada na superfície S definida por $f(\vec{r}) = f_0$, ou seja o spin só responde à presença de um elétron quando o mesmo atravessa tal superfície, o que força o contador de carga a contar apenas valores inteiros de carga. O hamiltoniano de interação obtido da eq. (2.22) tem a forma

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int d\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{A} = -\frac{\lambda\hbar}{2e}\sigma_z I_S, \quad (2.23)$$

onde $I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. O hamiltoniano total é

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \Psi^\dagger(\vec{r}) \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}). \quad (2.24)$$

Suponha que a interação spin-corrente é “ligada” durante um intervalo de tempo $0 < \tau < t$. Em $t = 0$ a matriz densidade descreve o regime desacoplado

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_e \otimes \hat{\rho}_s, \quad (2.25)$$

onde $\hat{\rho}_e$ é a matriz densidade do elétron e $\hat{\rho}_s$ é a matriz densidade do spin. A matriz densidade num tempo t é dada pela fórmula de Heisenberg

$$\hat{\rho}(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{\rho} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}. \quad (2.26)$$

A matriz densidade do spin, logo após ser desconectado do sistema pode ser obtida por

$$\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_e \hat{\rho}(t), \quad (2.27)$$

onde Tr_e representa o traço parcial sobre os estados eletrônicos. Após efetuar o traço parcial utilizando o fato de que $\hat{H}$ é diagonal no espaço de spin, obtemos:

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & \chi(\lambda)\rho_{\uparrow\downarrow} \\ \chi(-\lambda)\rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

onde

$$\chi(\lambda) = \left\langle e^{-\frac{iH\lambda t}{\hbar}} e^{\frac{iH-\lambda}{\hbar}t} \right\rangle_e, \quad (2.29)$$

onde $\langle \dots \rangle_e$ indica a média sobre o estado quântico inicial dos elétrons.

A rotação da matriz densidade $\hat{\rho}_s$ por um ângulo θ em torno do eixo $\hat{z}$ é dada por:

$$\mathfrak{R}_\theta(\hat{\rho}_s) = e^{-i\theta\sigma_z/2} \hat{\rho}_s e^{i\theta\sigma_z/2}. \quad (2.30)$$

Inserindo a eq. (2.28) na eq. (2.30) obtemos:

$$\mathfrak{R}_\theta(\hat{\rho}_s) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & e^{-i\theta}\rho_{\uparrow\downarrow} \\ e^{i\theta}\rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Usando a definição $\chi(\lambda) = \sum_n P_n e^{i\lambda n}$ na eq. (2.28) e usando a eq. (2.31) obtemos

$$\hat{\rho}_s(t) = \sum_n P_n \mathfrak{R}_{\theta=n\lambda}(\hat{\rho}_s). \quad (2.32)$$

Esta fórmula sugere que P_n pode ser interpretado como a probabilidade de que n elétrons tenham atravessado a interface durante o tempo de observação.

2.4 Formalismo de Keldysh para a Estatística de Contagem

Mostraremos agora como o formalismo de Keldysh pode ser usado para obtermos a função geratriz da estatística de contagem de um sistema mesoscópico através do galvanômetro de spin-1/2 descrito na seção anterior. Uma das primeiras utilizações do método de Keldysh para abordar este problema foi apresentado por Nazarov [46], [47]. Uma revisão bem geral sobre a técnica das funções de Green de Keldysh pode ser encontrada em [48].

Seguiremos aqui uma abordagem, diferente da que Nazarov utiliza, desenvolvida por Macêdo [49]. Neste artigo Macêdo formula o problema de transporte em sistemas mesoscópico interagentes na linguagem de física de muitos corpos, descrevendo o sistema juntamente com o aparato de medição. Uma generalização da fórmula de Levitov e Lesovik para a função geratriz da estatística de contagem de carga incluindo interação é obtida [49]. Esta fórmula generalizada traz à tona uma certa dualidade no tratamento do problema de transporte mesoscópico de partículas não interagentes que consiste na existência de duas abordagens equivalentes: o método da matriz- S (abordagem externa do problema), no qual estados assintóticos são definidos nos guias e os detalhes microscópicos da dinâmica dentro da amostra são eliminados pela introdução de matrizes de espalhamento com certas propriedades estocásticas, as quais podem ser justificadas em termos de argumentos de máxima entropia. O segundo método é a técnica das funções de Green (abordagem interna do problema), que satisfazem equações microscópicas de movimento com condições de contorno abertas, derivadas através de uma apropriada eliminação dos graus de liberdade dos guias.

Apresentamos aqui o formalismo de Keldysh através de um modelo extremamente simples que consiste de um único estado quântico acoplado por um termo de tunelamento a dois guias unidimensionais em contato com reservatórios de partículas. Apesar da simplicidade este exercício ilustra as principais características do formalismo. O hamiltoniano do sistema é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{k\alpha} \epsilon_{k\alpha} \hat{a}_{k\alpha}^\dagger \hat{a}_{k\alpha} + E_0 \hat{c}^\dagger \hat{c} + \sum_{k\alpha} \left(V_{k\alpha}(t) \hat{c}^\dagger \hat{a}_{k\alpha} + V_{k\alpha}^*(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger \hat{c} \right), \quad (2.33)$$

onde $\epsilon_{k\alpha}$ é a energia cinética no guia α , $\hat{a}_{k\alpha}^\dagger$ e $\hat{a}_{k\alpha}$ são respectivamente os operadores criação e aniquilação de uma partícula nos guias, E_0 é a energia do estado quântico, $\hat{c}^\dagger$ e $\hat{c}$ são respectivamente os operadores criação e aniquilação de uma partícula no

estado de energia E_0 e finalmente $V_{k\alpha}(t)$ e $V_{k\alpha}^*(t)$ que aparecem no último termo de (2.33) são amplitudes de tunelamento entre os guias e o estado quântico.

O operador corrente é definido como

$$\hat{I}_\alpha(t) = e \frac{d}{dt} \sum_k \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t) \hat{a}_{k\alpha}(t) = \frac{ie}{\hbar} \sum_k \left(V_{k\alpha}(t) \hat{c}^\dagger \hat{a}_{k\alpha} - V_{k\alpha}^*(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger \hat{c} \right). \quad (2.34)$$

Vamos medir flutuações dessa corrente via um galvanômetro de spin-1/2 acoplado ao sistema. O hamiltoniano do acoplamento é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_{acop} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \hat{I}_\alpha(t). \quad (2.35)$$

Defina a função de correlação temporal de n -pontos:

$$K_n(t_1, \dots, t_n) \equiv (i\hbar)^n \frac{\delta^n}{\delta \lambda_\alpha(t_1) \dots \delta \lambda_\alpha(t_n)} \left\langle \hat{T}_{\gamma_t} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int_{\gamma_t} d\tau \sum_\alpha \lambda_\alpha(\tau) \hat{I}_\alpha(\tau) \right) \right. \\ \left. \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int_{\gamma_t} d\tau \sum_\alpha \lambda_\alpha(\tau) \hat{I}_\alpha(\tau) \right) \right\rangle_{p.c.} \Big|_{\lambda=0} \quad (2.36)$$

onde p.c. significa que estamos tomando a média apenas sobre diagramas conectados, γ_t é o contorno temporal de Keldysh e $\hat{T}_{\gamma_t}$ ($\tilde{\hat{T}}_{\gamma_t}$) é o operador de (anti-)ordenamento temporal.

Pela fórmula de Levitov-Lesovik (expressão (11) de ref. [44]), a função característica para a estatística de contagem é dada por

$$\chi(\{\lambda\}; \gamma_t) \equiv \left\langle \hat{T}_{\gamma_t} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int_{\gamma_t} d\tau \sum_\alpha \lambda_\alpha(\tau) \hat{I}_\alpha(\tau) \right) \times \right. \\ \left. \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int_{\gamma_t} d\tau \sum_\alpha \lambda_\alpha(\tau) \hat{I}_\alpha(\tau) \right) \right\rangle. \quad (2.37)$$

A função característica dos cumulantes é

$$S(\{\lambda\}; \gamma_t) \equiv -\ln \chi(\{\lambda\}; \gamma_t). \quad (2.38)$$

Defina a função

$$C_\alpha(\{\lambda\}; \gamma_t) \equiv -i\hbar \frac{\delta}{\delta \lambda_\alpha(t)} S(\{\lambda\}; \gamma_t). \quad (2.39)$$

Substituindo a eq. (2.37) na eq. (2.38), obtemos:

$$C_\alpha(\{\lambda\}; \gamma_t) = \frac{1}{2} \left\langle \hat{T}_{\gamma_t} \left(\hat{I}_\alpha(t) \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t} \left(\hat{I}_\alpha(t) \right) \right\rangle, \quad (2.40)$$

Substituindo o operador corrente, eq. (2.34), em (2.40) resulta em

$$\begin{aligned} C_\alpha(\{\lambda\}; \gamma_t) = & \frac{ie}{2\hbar} \sum_k \left(V_{k\alpha}(t) \left[\left\langle \hat{T}_{\gamma_t}(\hat{c}^\dagger(t) \hat{a}_{k\alpha}(t)) \right\rangle + \left\langle \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t}(\hat{c}^\dagger(t) \hat{a}_{k\alpha}(t)) \right\rangle \right] - \right. \\ & \left. - V_{k\alpha}^*(t) \left[\left\langle \hat{T}_{\gamma_t}(\hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t) \hat{c}(t)) \right\rangle + \left\langle \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t}(\hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t) \hat{c}(t)) \right\rangle \right] \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Através de (2.41) definimos as seguintes funções de Green ordenadas ao longo do contorno de Keldysh

$$\begin{cases} G_{\alpha c}^t(t, t') \equiv -i \left\langle \hat{T}_{\gamma_t}(\hat{a}_{k\alpha}(t) \hat{c}^\dagger(t')) \right\rangle & ; \quad G_{\alpha c}^{\bar{t}}(t, t') \equiv -i \left\langle \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t}(\hat{a}_{k\alpha}(t) \hat{c}^\dagger(t')) \right\rangle, \\ G_{c\alpha}^t(t, t') \equiv -i \left\langle \hat{T}_{\gamma_t}(\hat{c}(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t')) \right\rangle & ; \quad G_{c\alpha}^{\bar{t}}(t, t') \equiv -i \left\langle \tilde{\hat{T}}_{\gamma_t}(\hat{c}(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t')) \right\rangle. \end{cases} \quad (2.42)$$

Definimos agora a função auxiliar $F_\alpha(t, t')$:

$$F_\alpha(t, t') = \sum_k \left[V_{k\alpha}^*(t') \left(G_{c\alpha}^t(t, t') + G_{\alpha c}^{\bar{t}}(t, t') \right) - V_{k\alpha}(t) \left(G_{\alpha c}^t(t, t') + G_{c\alpha}^{\bar{t}}(t, t') \right) \right] \quad (2.43)$$

Definindo a matriz de tempo real:

$$\check{G}_{c\alpha}(t, t') = \begin{pmatrix} G_{c\alpha}^t(t, t') & G_{c\alpha}^{<}(t, t') \\ -G_{c\alpha}^{>}(t, t') & -G_{c\alpha}^{\bar{t}}(t, t') \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

podemos escrever a equação (2.43) da seguinte forma

$$F_\alpha(t, t') = \sum_k \left\{ V_{k\alpha}^*(t') \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{G}_{c\alpha}(t, t') \right) - V_{k\alpha}(t) \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{G}_{c\alpha}(t, t') \right) \right\}, \quad (2.45)$$

onde $\check{\sigma}_3 = \sigma_z$ a terceira matriz de Pauli. A expressão (2.41) em termos da matriz (2.44) fica:

$$C_\alpha(\{\lambda\}; \gamma_t) = -\frac{e}{2\hbar} F_\alpha(t, t) \quad (2.46)$$

2.4.1 O Método da Equação de Movimento

Para calcularmos as funções de Green introduzidas acima, utilizaremos o método da equação de movimento, que consiste em obter as funções de Green através das equações de Heisenberg para operadores de criação e aniquilação

À temperatura nula o contorno de Keldysh é o eixo real, então nossas funções de Green podem ser escritas da forma usual

$$G_{c\alpha}^t(t, t') = -i\theta(t - t') \langle \hat{c}(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t') \rangle + i\theta(t' - t) \langle \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t') \hat{c}(t) \rangle. \quad (2.47)$$

A equação de movimento para (2.47) é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} G_{c\alpha}^t(t, t') = -i \left\langle \hat{T} \left(\hat{c}(t) \left[\hat{a}_{k\alpha}(t'), \hat{\mathcal{H}}_\lambda \right] \right) \right\rangle, \quad (2.48)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_\lambda$ é o Hamiltoniano do sistema incluindo o termo de acoplamento

$$\hat{\mathcal{H}}_\lambda = \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}_{acop}. \quad (2.49)$$

Calculando o comutador de (2.48), obtemos a seguinte expressão:

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \epsilon_{k\alpha} \right) G_{c\alpha}^t(t, t') = \left(1 + \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha \right) V_{k\alpha} G_c^t(t, t'), \quad (2.50)$$

onde

$$G_c^t(t, t') = -i \left\langle \hat{T} \left(\hat{c}(t) \hat{c}^\dagger(t') \right) \right\rangle. \quad (2.51)$$

Para a função de Green do sistema não acoplado, obtemos

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \epsilon_{k\alpha} \right) g_\alpha^t(t, t') = \hbar \delta(t - t'). \quad (2.52)$$

Considerando a eq. (2.52), $G_{c\alpha}^t(t, t')$ pode ser escrita como:

$$G_{c\alpha}^t(t, t') = \int \frac{dt_1}{\hbar} G_c^t(t, t_1) \left(1 + \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha \right) V_{k\alpha} g_\alpha^t(t_1, t'). \quad (2.53)$$

Similarmente para a função de Green anti-ordenada no tempo definida por

$$G_{c\alpha}^{\bar{t}}(t, t') = -i\theta(t' - t) \langle \hat{c}(t) \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t') \rangle + i\theta(t - t') \langle \hat{a}_{k\alpha}^\dagger(t') \hat{c}(t) \rangle. \quad (2.54)$$

Combinando as equações de movimento para $G_{c\alpha}^t$ e $G_{c\alpha}^{\bar{t}}$ podemos escrever uma única equação matricial

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - \epsilon_{k\alpha}\right) \check{G}_{c\alpha}(t, t') = \check{G}_c(t, t') \left(\check{1} + \frac{ie}{2\hbar}\lambda_\alpha\check{\sigma}_3\right) V_{k\alpha}, \quad (2.55)$$

e similarmente para o sistema desacoplado

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - \epsilon_{k\alpha}\right) \check{g}_\alpha(t, t') = \hbar\check{1}\delta(t - t'), \quad (2.56)$$

onde

$$\check{G} = \begin{pmatrix} G^t & 0 \\ 0 & G^{\bar{t}} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Usando a eq. (2.55) na eq. (2.56) obtemos

$$\check{G}_{c\alpha}(t, t') = \int \frac{dt_1}{\hbar} \check{G}_c(t, t_1) \left(\check{1} + \frac{ie}{2\hbar}\lambda_\alpha\check{\sigma}_3\right) V_{k\alpha} \check{g}_\alpha(t_1, t'). \quad (2.58)$$

Aplicando o método de continuação analítica em $G_{c\alpha}^t(t, t')$ e $G_{c\alpha}^{\bar{t}}(t, t')$, obtemos $G_{c\alpha}(\tau, \tau')$, onde τ e τ' são tempos complexos:

$$G_{c\alpha}(\tau, \tau') = \int_{\gamma_k=\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{d\tau_1}{\hbar} G_c(\tau, \tau_1) \left(1 + \frac{ie}{2\hbar}\lambda_\alpha(\tau_1)\right) V_{k\alpha}(\tau_1) g_\alpha(\tau_1, \tau'), \quad (2.59)$$

onde

$$\lambda_\alpha(\tau) = \begin{cases} \lambda_\alpha(t); & \tau \in \gamma_1, \\ -\lambda_\alpha(t); & \tau \in \gamma_2, \end{cases} \quad (2.60)$$

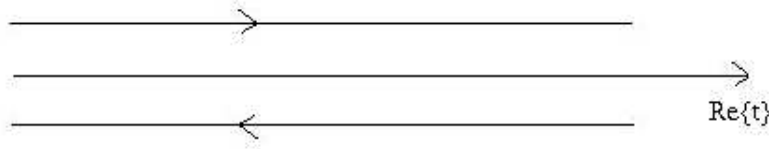


Figura 2.1: A linha acima do eixo real do tempo representa γ_1 e linha a baixo representa γ_2 . a união de γ_1 e γ_2 forma o contorno de Keldysh.

Após a extensão para tempos complexos podemos reconsiderar tempos reais ao longo do contorno de Keldysh, de modo que a função de Green de Keldysh para tempo real pode ser escrita como

$$\check{G}_{c\alpha}(t, t') = \int \frac{dt_1}{\hbar} \check{G}_c(t, t_1) \left(\check{1} + \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha(t_1) \check{\sigma}_3 \right) V_{k\alpha}(t_1) \check{g}_\alpha(t, t'). \quad (2.61)$$

Similarmente, podemos obter expressões para as demais funções de Green de Keldysh $\check{G}_{\alpha,c}(t, t')$ e $\check{G}_c(t, t')$. Em particular obtemos

$$\check{G}_c(t, t') = \check{g}_c(t, t') + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_2}{\hbar} \check{g}_c(t, t_1) \check{\Sigma}(t_1, t_2) \check{G}_c(t_2, t'), \quad (2.62)$$

onde

$$\check{\Sigma}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha\beta} \left(\check{1} + \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha(t_1) \check{\sigma}_3 \right) V_{k\alpha}(t_1) \check{g}_\alpha(t_1, t_2) V_{k\alpha}^*(t_2) \left(\check{1} - \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha(t_2) \check{\sigma}_3 \right). \quad (2.63)$$

Note que o efeito do campo de contagem pode ser absorvido completamente na função

$$\check{g}_\alpha(\{\lambda\}; t, t') \equiv \left(\check{1} + \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha(t) \check{\sigma}_3 \right) \check{g}_\alpha(t, t') \left(\check{1} - \frac{ie}{2\hbar} \lambda_\alpha(t') \check{\sigma}_3 \right). \quad (2.64)$$

Substituindo (2.62) em (2.61) e inserindo posteriormente a nova expressão em (2.45), obtemos:

$$F_\alpha(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{\hbar} \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{G}_c(t, t_1) \check{\Sigma}(t_1, t') - \check{\sigma}_3 \check{\Sigma}_\alpha(t, t_1) \check{G}_c(t_1, t') \right). \quad (2.65)$$

2.4.2 Corrente Média em Regime Estacionário

Vamos agora utilizar a expressão (2.65) para obter a corrente média num regime estacionário. A média da corrente nesse formalismo é o correlator de um tempo definido em (2.36) como

$$\langle I_1 \rangle = K_1(t) = C(\{\lambda\}, t) \Big|_{\lambda=0} = -\frac{e}{2\hbar} F_\alpha(t, t) \Big|_{\lambda=0}. \quad (2.66)$$

Considere a transformada de Fourier de $F_\alpha(t, t)$ no espaço das energias

$$F_\alpha(E) = \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \left[\check{G}_c(E), \check{\Sigma}_\alpha(E) \right] \right) \quad (2.67)$$

Faremos agora uma rotação das funções de Green através da seguinte matriz R

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Assim podemos definimos novas funções de Green de Keldysh

$$\bar{G}_c(E) = R \check{G}_c(E) R^\dagger, \quad (2.69)$$

e

$$\bar{\Sigma}_\alpha(E) = R \check{\Sigma}_\alpha(E) R^\dagger. \quad (2.70)$$

Em termos destas novas funções, $F_\alpha(E)$ pode ser reescrito como vemos abaixo:

$$F_\alpha = \text{Tr} \left(\bar{\sigma}_2 \bar{A}_\alpha(E) \right), \quad (2.71)$$

onde

$$\bar{A}_\alpha(E) \equiv [\bar{G}_c(E), \bar{\Sigma}_\alpha(E)]. \quad (2.72)$$

A matriz $\bar{A}_\alpha(E)$ tem a seguinte forma padrão

$$\bar{A}_\alpha(E) = \begin{pmatrix} A_\alpha^r(E) & A_\alpha^K(E) \\ 0 & A_\alpha^a(E) \end{pmatrix}; \quad (2.73)$$

onde

$$A_\alpha^K(E) = A_\alpha^>(E) + A_\alpha^<(E). \quad (2.74)$$

Substituindo (2.73) em (2.74) em (2.71) obtemos:

$$F_\alpha(E) = A_\alpha^K = G^r \Sigma_\alpha^r + G^K \Sigma_\alpha^K + G^K \Sigma_\alpha^a + G^K \Sigma_\alpha^K - \Sigma_\alpha^r G^K - \Sigma_\alpha^K G^a. \quad (2.75)$$

Em (2.75) suprimimos a dependência com a energia nos termos por questão de conveniência. Também suprimimos o índice “c” nas funções de Green.

Utilizando algumas identidades de funções de Green (ver capítulo 8 do livro do S. Datta [8]) relacionadas abaixo:

$$\begin{cases} G^r - G^a = G^r (\Sigma_\alpha^r - \Sigma_\alpha^a) G^a, \\ \Sigma_\alpha^r - \Sigma_\alpha^a = \Sigma_\alpha^> - \Sigma_\alpha^<, \\ G^K = G^r \Sigma^K G^a; \Sigma^K = \sum_{\beta=1}^2 \Sigma_\beta^K. \end{cases} \quad (2.76)$$

Na eq. (2.75), obtemos:

$$F_\alpha(E) = 2 \sum_{\beta=1}^2 (\Sigma_\alpha^< G^r \Sigma_\beta^> G^a - \Sigma_\alpha^> G^r \Sigma_\beta^< G^a). \quad (2.77)$$

De [8] temos também que

$$\Sigma_\alpha^< = i f_\alpha(E) \Gamma_\alpha(E), \quad (2.78)$$

$$\Sigma_\alpha^> = -i(1 - f_\alpha(E)) \Gamma_\alpha(E), \quad (2.79)$$

onde $\Gamma_\alpha(E)$ descreve o efeito da presença das barreiras e $f_\alpha(E)$ são funções de distribuição nos reservatórios de partículas.

Substituindo as eqs. (2.78) e (2.79) na eq. (2.77) obtemos,

$$F_\alpha(E) = 2 \sum_{\beta=1}^2 (f_\alpha(E) - f_\beta(E)) \Gamma_\alpha(E) G_c^r(E) \Gamma_\beta(E) G_c^a(E). \quad (2.80)$$

Como $G_c^a(E) = (G_c^r(E))^*$ podemos reescrever (2.80) da seguinte forma

$$F_\alpha(E) = 2 \sum_{\beta=1}^2 (f_\alpha(E) - f_\beta(E)) \Gamma_\alpha(E) \Gamma_\beta(E) \left| G_c^r(E) \right|^2. \quad (2.81)$$

Note que $\left| G_c^r(E) \right|^2$ pode ser calculada via a teoria de matriz- S . No caso de um único nível obtemos

$$\left| G_c^r(E) \right|^2 = \frac{1}{(E - E_0)^2 + (\Gamma_1(E) + \Gamma_2(E))^2 / 4}. \quad (2.82)$$

Finalmente substituindo a eq. (2.82) na eq. (2.81) obtemos a corrente média:

$$\langle I_1 \rangle = -\frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{(f_1(E) - f_2(E)) \Gamma_1(E) \Gamma_2(E)}{(E - E_0)^2 + (\Gamma_1(E) + \Gamma_2(E))^2 / 4}, \quad (2.83)$$

que coincide com a fórmula de Landauer se identificamos o coeficiente de transmissão do sistema com

$$T(E) = \frac{\Gamma_1(E)\Gamma_2(E)}{(E - E_0)^2 + (\Gamma_1(E) + \Gamma_2(E))^2/4}. \quad (2.84)$$

Isto corresponde ao modelo de ressonância isolada de Breit-Wigner (uma breve revisão sobre este assunto pode ser encontrada em [61]).

2.4.3 Densidade Espectral do Ruído de Disparo

O correlator de dois tempos da corrente pode ser obtido da eq. (2.36)

$$K_{\alpha\beta}(t, t') = i\hbar \frac{\delta}{\delta\lambda_\beta(t')} C(\{\lambda\}, t) \Big|_{\lambda=0} = -\frac{ie}{2} \frac{\delta}{\delta\lambda_\beta(t')} F_\alpha(\{\lambda\}, t) \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.85)$$

onde $F_\alpha(\{\lambda\}, t)$, em termos da função de Green da eq. (2.69) é dada por

$$F_\alpha(\{\lambda\}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \text{Tr} (\bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(t, \tau) \bar{\Sigma}(\tau, t) - \bar{\sigma}_3 \bar{\Sigma}_\alpha(t, \tau) \bar{G}_c(\tau, t)). \quad (2.86)$$

Substituindo a eq. (2.86) na eq. (2.85) obtemos:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}(t, t') = & -\frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \text{Tr} \left(\bar{\sigma}_2 \left[\frac{\delta \bar{G}_c(t, \tau)}{\delta\lambda_\beta(t')} \bar{\Sigma}_\alpha(\tau, t) + \bar{G}_c(t, \tau) \frac{\delta \bar{\Sigma}_\alpha(\tau, t)}{\delta\lambda_\beta(t')} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\delta \bar{\Sigma}_\alpha(t, \tau)}{\delta\lambda_\beta(t')} \bar{G}_c(\tau, t) - \bar{\Sigma}_\alpha(t, t') \frac{\delta \bar{G}_c(\tau, t)}{\delta\lambda_\beta(t')} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Após calcularmos as derivadas em (2.87), podemos escrever $K_{\alpha\beta}(t, t')$ da seguinte forma:

$$K_{\alpha\beta}(t, t') = \delta_{\alpha\beta} K_A(t, t') + K_B(t, t'). \quad (2.88)$$

onde $K_A(t, t')$ é dado por

$$\begin{aligned} K_A(t, t') = & \left(\frac{e}{2\hbar} \right)^2 \left[\text{Tr} (\bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(t, t') \bar{\sigma}_2 \bar{\Sigma}_\alpha(t', t) + \bar{\sigma}_2 \bar{\Sigma}_\alpha(t, t') \bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(t', t)) - \right. \\ & \left. - \hbar \delta(t - t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \text{Tr} (\bar{G}_c(t, \tau) \bar{\Sigma}_\alpha(\tau, t) + \bar{\Sigma}_\alpha(t, \tau) \bar{G}_c(\tau, t)) \right]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para o regime estacionário podemos introduzir a transformada de Fourier de $K_A(t, t')$

$$K_A(\omega, \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{\hbar} K_A(t, t') e^{\frac{i\omega t}{\hbar} + \frac{i\omega' t'}{\hbar}} = 2\pi\delta(\omega + \omega') K_A(\omega), \quad (2.90)$$

onde

$$K_A(\omega) = \left(\frac{e}{2\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} \left(\bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(E + \omega) \bar{\sigma}_2 \bar{\Sigma}_\alpha(E) + \bar{\sigma}_2 \bar{\Sigma}_\alpha(E + \omega) \bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(E) - \right. \\ \left. - 2\bar{G}_c(E) \bar{\Sigma}_\alpha(E) \right). \quad (2.91)$$

Analisando o caso de frequência nula $K_A \equiv K_A(0)$, a eq. (2.91) fica

$$K_A = 2 \left(\frac{e}{2\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} \left(\bar{\sigma}_2 \bar{G}_c(E) \bar{\sigma}_2 \bar{\Sigma}_\alpha(E) - \bar{G}_c(E) \bar{\Sigma}_\alpha(E) \right). \quad (2.92)$$

Substituindo as relações (2.76), (2.78) e (2.79) em (2.92) obtemos:

$$K_A = \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} (f_\alpha(E)(1 - f_\beta(E)) + f_\beta(E)(1 - f_\alpha(E))) \Gamma_\alpha(E) \Gamma_\beta(E) \left| G_c^r(E) \right|^2. \quad (2.93)$$

O cálculo de K_B de (2.88) é um pouco mais trabalhoso e resulta em

$$K_B(t, t') = -\frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \text{Tr} \left[\bar{\sigma}_2 \left(\bar{B}_\beta(t, \tau; t') \bar{\Sigma}_\alpha(\tau, t) - \bar{\Sigma}_\alpha(t, \tau) \bar{B}_\beta(\tau, t; t') \right) \right]. \quad (2.94)$$

onde

$$\bar{B}_\alpha(\tau_1, \tau_2; t') = \frac{\delta}{\delta \lambda_\alpha(t')} \Big|_{\lambda=0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{\hbar} \bar{g}_c(\tau_1, \tau) \bar{\Sigma}(\tau, \tau') \bar{G}_c(\tau', \tau_2). \quad (2.95)$$

Para o regime estacionário a eq. (2.94) fica,

$$K_B(t, t') = -\frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\hbar} \text{Tr} \left[\bar{\sigma}_2 \left(\bar{B}_\beta(t-t', t'-\tau) \bar{\Sigma}_\alpha(\tau-t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{\Sigma}_\alpha(t-\tau) \bar{B}_\beta(\tau-t', t'-t) \right) \right]. \quad (2.96)$$

Tomando a transformada de Fourier de (2.96), obtemos

$$K_B(\omega, \omega') = 2\pi \delta(\omega + \omega') K_B(\omega), \quad (2.97)$$

onde

$$K_B(\omega) = -\frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} \left[\bar{\sigma}_2 \left(\bar{B}_\beta(E + \omega, E) \bar{\Sigma}_\alpha(E) - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{\Sigma}_\alpha(E + \omega) \bar{B}_\beta(E + \omega, E) \right) \right]. \quad (2.98)$$

Para frequência nula $K_B \equiv K_B(0)$, temos

$$K_B = -\frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} (\bar{J}_\alpha(E) \bar{J}_\beta(E)), \quad (2.99)$$

onde

$$\bar{J}_\alpha(E) \equiv \bar{G}_c(E) [\bar{\sigma}_2, \bar{\Sigma}_\alpha(E)]. \quad (2.100)$$

Escrevendo K_A de (2.92) em função de $\bar{J}_\alpha(E)$ inserindo em (2.88) juntamente com K_B , obtemos

$$K_{\alpha\beta} = \frac{ie}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} \left\{ 2\delta_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_2 \bar{J}_\alpha(E) - \bar{J}_\alpha(E) \bar{J}_\beta(E) \right\}. \quad (2.101)$$

Note que em função de $\bar{J}_\alpha(E)$ a corrente média, eq. (2.83), fica da seguinte forma:

$$K_1 = \frac{e}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \{ \bar{J}_\alpha(E) \}. \quad (2.102)$$

Da expressão para $\bar{J}_\alpha(E)$, obtemos os seguintes traços que serão importantes nos cálculos seguintes.

$$\text{Tr} (\bar{J}_\alpha(E)) = 2 \sum_{\beta=1}^2 (f_\beta(E) - f_\alpha(E)) \Gamma_\alpha(E) \Gamma_\beta(E) |G_c^r(E)|^2, \quad (2.103)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\bar{\sigma}_2 \bar{J}_\alpha(E)) &= 2 \sum_{\beta=1}^2 (f_\alpha(E)(1 - f_\beta(E)) + f_\beta(E)(1 - f_\alpha(E))) \\ &\quad \Gamma_\alpha(E) \Gamma_\beta(E) |G_c^r(E)|^2. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Daqui por diante vamos assumir que os coeficientes de acoplamento, $\Gamma_\alpha(E)$, não dependem da energia.

• Ruído de equilíbrio

Para um sistema em equilíbrio térmico temos que

$$f_1(E) = f_2(E) = f_{eq}(E), \quad (2.105)$$

e

$$f_{eq}(E)(1 - f_{eq}(E)) = -k_B T \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E}, \quad (2.106)$$

onde T é a temperatura do sistema. Utilizando (2.106), obtemos

$$\begin{cases} \text{Tr} (\bar{\sigma}_2 \bar{J}_1(E)) = -4k_B T \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \Gamma_1 (\Gamma_1 + \Gamma_2) |G_c^r(E)|^2, \\ \text{Tr} (\bar{J}_1(E)^2) = -8k_B T \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \Gamma_1^2 |G_c^r(E)|^2. \end{cases} \quad (2.107)$$

Substituindo a eq. (2.107) na eq. (2.101) obtemos

$$K_{11} = \frac{e^2}{\pi \hbar^2} \Gamma_1 \Gamma_2 k_B T \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \right) |G_c^r(E)|^2 \quad (2.108)$$

A média da corrente (2.83) é dada por

$$\langle I_1 \rangle = -\frac{e}{h} \Gamma_1 \Gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} dE (f_1(E) - f_2(E)) |G_c^r(E)|^2 \quad (2.109)$$

Os potenciais eletroquímicos dos reservatórios são dados por $\mu_1 = \mu - eV_1$; $\mu_2 = \mu - eV_2$, logo

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_\alpha)} + 1} = f_{eq}(E) + eV_\alpha \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} + \dots, \quad (2.110)$$

e portanto,

$$f_1(E) - f_2(E) = e \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} (V_1 - V_2) . \quad (2.111)$$

Substituindo a eq. (2.111) na eq. (2.109) obtemos

$$\langle I_1 \rangle = \frac{e^2}{h} \Gamma_1 \Gamma_2 (V_1 - V_2) \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \right) |G_c^r(E)|^2 . \quad (2.112)$$

Pela definição do elemento da matriz de condutância, G_{11} , obtemos

$$G_{11} = \left. \frac{\partial \langle I_1 \rangle}{\partial V_1} \right|_{V_1=0=V_2} = \frac{e^2}{h} \Gamma_1 \Gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \right) |G_c^r(E)|^2 . \quad (2.113)$$

Comparando (2.108) e (2.113) concluimos que

$$K_{11} = \frac{2k_B T}{h} G_{11} . \quad (2.114)$$

O ruído de Nyquist-Johnson (ruído térmico) é definido como:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \hbar K_{\alpha\beta} , \quad (2.115)$$

portanto de (2.114) temos que

$$\mathcal{P}_{11} = 2k_B T G_{11} , \quad (2.116)$$

como esperado pelo teorema *flutuação-dissipação*. Para o caso $\alpha \neq \beta$ temos,

$$\text{Tr} (\bar{J}_1(E) \bar{J}_2(E)) = -8k_B T \frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2 . \quad (2.117)$$

Substituindo (2.117) em (2.101) e resulta em

$$K_{12} = -\frac{e^2}{\pi \hbar^2} \Gamma_1 \Gamma_2 k_B T \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \right) |G_c^r(E)|^2 . \quad (2.118)$$

Calculando o coeficiente G_{12} pela definição, obtemos

$$G_{12} = \left. \frac{\partial \langle I_1 \rangle}{\partial V_2} \right|_{V_1=0=V_2} = -\frac{e^2}{h} \Gamma_1 \Gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_{eq}(E)}{\partial E} \right) |G_c^r(E)|^2 . \quad (2.119)$$

Comparando (2.118) e (2.119) concluimos que

$$K_{12} = \frac{2k_B T}{\hbar} G_{12}, \quad (2.120)$$

que combinado com (2.115) resulta em

$$\mathcal{P}_{12} = 2k_B T G_{12}, \quad (2.121)$$

que mais uma vez concorda com o teorema dissipação-flutuação.

• Potência do Ruído de Disparo

Para temperatura nula a função distribuição de Fermi-Dirac se torna uma função degrau, de modo que

$$f_\alpha(E) = \Theta(\mu_\alpha - E); \alpha = 1, 2. \quad (2.122)$$

Inserindo a eq. (2.122) em (2.104) temos

$$\text{Tr}(\bar{\sigma}_2 \bar{J}_1(E)) = 2[\Theta(E - \mu_1)\Theta(\mu_2 - E) - \Theta(E - \mu_1)\Theta(\mu_1 - E)] \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2. \quad (2.123)$$

Similarmente

$$\text{Tr}(\bar{J}_1(E)^2) = 4[\Theta(E - \mu_1)\Theta(\mu_2 - E) - \Theta(E - \mu_1)\Theta(\mu_1 - E)] \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 |G_c^r(E)|^4. \quad (2.124)$$

Susbtituindo (2.123) e (2.124) em (2.101) obtemos

$$\mathcal{P}_{11} \equiv \hbar K_{11} = \frac{e^2}{\hbar} \int_{\mu_<}^{\mu_>} dE \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2 (1 - \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2), \quad (2.125)$$

onde $\mu_>$ ($\mu_<$) é o maior (menor) potencial químico entre μ_1 e μ_2 . Para $\alpha \neq \beta$ temos:

$$\text{Tr}(\bar{J}_1(E) \bar{J}_2(E)) = 4\Theta(E - \mu_<)\Theta(\mu_> - E) \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2 (1 - \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2). \quad (2.126)$$

Substiuiundo a eq. (2.126) na eq. (2.101) resulta em

$$\mathcal{P}_{12} = -\mathcal{P}_{11} = -\frac{e^2}{\hbar} \int_{\mu_<}^{\mu_>} dE \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2 (1 - \Gamma_1 \Gamma_2 |G_c^r(E)|^2), \quad (2.127)$$

em conformidade com a lei de conservação de corrente.

2.5 Estatística de Contagem em Regime Estacionário

Seja $P(N, T)$ a probabilidade de que durante um intervalo de tempo t , N elétrons tenham sido transportados através da amostra. Então

$$P(N, T) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-S(\lambda, t) - iN\lambda}, \quad (2.128)$$

onde

$$\chi(\lambda, t) = e^{-S(\lambda, t)} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{iN\lambda} P(N, T) \quad (2.129)$$

é a função geratriz. A derivada de $S(\lambda, t)$ em relação a λ é dada por:

$$\frac{\partial S(\lambda, t)}{\partial \lambda} = \frac{t}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} J(E, \lambda), \quad (2.130)$$

onde

$$J(E, \lambda) = \text{Tr} \left(\bar{G}(E, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{\Sigma}_1(E, \lambda) \right), \quad (2.131)$$

e

$$\bar{\Sigma}_1(E, \lambda) = e^{i\lambda\bar{\sigma}_2/2} \bar{\Sigma}_1(E) e^{-i\lambda\bar{\sigma}_2/2}. \quad (2.132)$$

A função de Green $\bar{G}(E, \lambda)$ obedece à equação de Dyson

$$\bar{G}(E, \lambda) = \bar{g}(E) + \bar{g}(E) \bar{\Sigma}(E, \lambda) \bar{G}(E, \lambda), \quad (2.133)$$

onde a autoenergia satisfaz a relação aditiva

$$\bar{\Sigma}(E, \lambda) = \bar{\Sigma}_1(E, \lambda) + \bar{\Sigma}_2(E). \quad (2.134)$$

Calculando a derivada de $\bar{\Sigma}_1(E, \lambda)$, chegamos à importante relação

$$\frac{\partial \bar{G}(E, \lambda)}{\partial \lambda} \bar{G}(E, \lambda)^{-1} = \bar{G}(E, \lambda) \frac{\partial \bar{\Sigma}_1(E, \lambda)}{\partial \lambda}, \quad (2.135)$$

que nos permite escrever $S(\lambda)$ de uma forma bem compacta

$$S(\lambda) = \frac{t}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\bar{G}(E, \lambda)}{\bar{G}(E)} \right) \right]. \quad (2.136)$$

Com a ajuda das eqs. (2.133) e (2.134), podemos reescrever a eq. (2.136) da seguinte forma:

$$S(\lambda) = -\frac{t}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln \left(\frac{(E - E_0)\bar{1} - \bar{\Sigma}(E, \lambda)}{(E - E_0)\bar{1} - \bar{\Sigma}(E)} \right), \quad (2.137)$$

onde usamos a identidade $\bar{g}(E) = (E - E_0)^{-1} \bar{1}$. Usando as expressões explícitas para auto-energia $\bar{\Sigma}_\alpha(E, \lambda)$, obtemos:

$$S(\lambda) = -\frac{t}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \ln \left(1 + T(E) \left[(e^{i\lambda} - 1) f_1 (1 - f_2) - (e^{-i\lambda} - 1) f_2 (1 - f_1) \right] \right). \quad (2.138)$$

Esta expressão coincide com a fórmula de Levitov et al. deduzida em [44]. O coeficiente de transmissão é dado pela lei de Breit-Wigner

$$T(E) = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}; \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2. \quad (2.139)$$

Para temperaturas muito baixas ($T \rightarrow 0$), temos que

$$\begin{aligned} f_1(1 - f_2) &\rightarrow \Theta(E - \mu_2)\Theta(\mu_1 - E), \\ f_2(1 - f_1) &\rightarrow \Theta(E - \mu_1)\Theta(\mu_2 - E). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Considerando (2.140), $S(\lambda)$ fica da seguinte forma:

$$S(\lambda) = -M \ln \left(1 + (e^{i\varepsilon\lambda} - 1) T(E_F) \right); \quad \mu_{>} - \mu_{<} = e|V|. \quad (2.141)$$

onde $\varepsilon = \text{sin}(\mu_1 - \mu_2)$ e $M = \frac{et|V|}{\hbar}$ é o número de tentativas independentes de atravessar a barreira durante um tempo t . A expressão (2.141) coincide com a eq. (2.15).

2.6 Estatística de Contagem para uma Junção NS

Em 1994 Muzykantskii e Khmelnitskii [50], calcularam a distribuição do ruído de corrente de um ponto de contato metal normal-supercondutor, através da função geratriz da estatística de contagem desse sistema. Eles utilizaram o formalismo de matriz- S para sistemas NS visto no capítulo anterior e as idéias desenvolvidas por Levitov e Lesovik para o caso NN. Em [51], Levitov e Lesovik mostram que não apenas o segundo correlator é suprimido, mas toda a função distribuição muda no regime

quântico de poissoniana para binomial. Uma dos primeiros estudos da potencia do ruído de disparo num sistema NS foi feito por Khlus em 1987 [52]. Beenakker [24] estende a análise de Khlus para o caso onde há desordem. Muzykantskii e Khmel'nitskii [50] resolvem a equação de Bogoliubov-de Gennes (1.25) para um ponto de contato NS com um único modo propagante caracterizado pelo seu potencial de emparelhamento $\Delta(x)$ e seu potencial confinador $U(x)$. Eles desprezaram a influência da supercorrente através do contato e consideraram $\Delta(x)$ real, previnindo assim a presença de campo magnético externo. Usando a simetria de conservação de probabilidade ($SS^\dagger = 1$) e a simetria de conjugação complexa ($SS^* = 1$), eles propõem para a matriz S do problema da seguinte forma geral

$$S = \begin{pmatrix} r & r_A & t & t_A \\ r_A & r' & t'_A & t' \\ t & t'_A & r_{<} & r_{A<} \\ t_A & t' & r_{A<} & r'_{A<} \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

Para energias $E < \Delta$, a matriz S descreve de reflexão de Andreev de elétrons em buracos e vice-versa na interface NS. Então, apenas o bloco diagonal superior de (2.142) nos interessa:

$$S = \begin{pmatrix} r & r_A \\ r_A & r' \end{pmatrix}. \quad (2.143)$$

Para o cálculo da função característica do sistema NS, eles utilizaram o mesmo método de Levitov-Lesovik para o caso NN. Obtendo a seguinte função característica

$$S(\lambda) = \left(\frac{t_0}{h} \right) \int dE \ln \left[1 + \sum_{n=-2}^2 A_n (e^{i\lambda n} - 1) \right]. \quad (2.144)$$

A eq. (2.144) mostra que o ruído de disparo neste sistema está associado com a transferência de carga nas unidades $\pm e$ e $\pm 2e$. Os coeficientes A_n no limite de temperatura muito baixas são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_1 = n_1(1 - |r|^2 - |r_A|^2), \\ A_{-1} = n_2(1 - |r|^2 - |r_A|^2), \\ A_2 = n_1(1 - n_2)|r_A|^2, \\ A_{-2} = n_2(1 - n_1)|r_A|^2, \end{cases} \quad (2.145)$$

onde

$$\begin{aligned} n_1 &= n(E - eV), \\ n_1 &= 1 - n(-E - eV), \end{aligned} \quad (2.146)$$

e $n(E)$ é função distribuição de Fermi.

No limite de baixas temperaturas e baixas voltagens $eV \ll \Delta$ a dependência com a energia das amplitudes de espalhamento pode ser desprezada, facilitando a integração de (2.144). Obtemos então

$$S(\lambda) = -e|V|t_0/h \ln [1 + |r_A|^2(\exp(2i\varepsilon\lambda) - 1)]. \quad (2.147)$$

A característica principal de (2.147) corresponde a transferência de duas cargas no supercondutor (dois elétrons para $V > 0$ e dois buracos para $V < 0$). Note também que o coeficiente de reflexão de Andreev faz a probabilidade de sucesso do processo de Bernoulli, similar ao coeficiente de transmissão em sistemas normais.

Generalizando este resultado para o caso de múltiplos canais, obtém-se que

$$S(\lambda) = -e|V|t_0/h \sum_{n=1}^N \ln [1 + r_n(\exp(2i\varepsilon\lambda) - 1)], \quad (2.148)$$

onde

$$r_n = \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n)^2}, \quad (2.149)$$

são os autovalores de $r_h e r_{he}^\dagger$, denominados autovalores de reflexão de Andreev e τ_n são autovalores de transmissão do lado normal.

Capítulo 3

Teoria de Circuitos Matricial

Nos últimos dois capítulos introduziremos um método muito poderoso no estudo de sistemas mesoscópicos, que é a teoria de circuitos, discutiremos duas versões desta teoria. Primeiramente discutiremos a teoria de circuitos matricial de Nazarov [36] e sua conexão com a estatística de contagem de carga. Através da estatística de contagem para a teoria de circuitos de Nazarov calcularemos os observáveis de alguns sistemas mesoscópicos, como pontos quânticos conectados a dois guias por barreiras de transparência arbitrárias. Utilizaremos o método desenvolvido por Bulashenko [53] para guias assimétricos. Posteriormente apresentaremos uma versão escalar da teoria de circuitos, recentemente proposta por Macêdo [39], e sua conexão com a estatística de contagem. Mostraremos que as duas versões são completamente equivalentes para pontos quânticos caóticos na presença de barreiras de transparências de valor arbitrário.

3.1 Formulação Matricial da Teoria de Circuitos

O método de elemento finito conhecido como teoria de circuitos proposto por Nazarov tem como objetivo o estudo de condutores mesoscópicos desordenados de geometria arbitrária no regime semiclássico onde o número de canais $N \gg 1$. Nesta teoria pode-se construir um circuito de múltiplos terminais combinando elementos coerentes denominados conectores com elementos difusivos através de junções denominadas de nós. A teoria representa uma versão finita da equação quase-clássica de Usadel e consiste em resolver um conjunto de equações provenientes de uma lei de conservação nos nós do circuito. A solução destas equações leva à determinação da corrente matricial que atravessa o circuito através da qual calcula-se a densidade média dos autovalores de transmissão ou diretamente os observáveis

de transporte.

Na teoria de circuitos de Nazarov existem três tipos de elementos: terminais, nós e conectores. O circuito formado a partir desses elementos interconecta os reservatórios que podem ser constituídos por metais normais ou supercondutores. É nos terminais que são especificadas as condições de contorno do problema, como voltagens, correntes ou tensões aplicadas. Os conectores por sua vez são os objetos que ligam dois reservatórios ou dois nós ou ainda um reservatório e um nó.

A extensão da teoria de Nazarov para descrever pontos quânticos caóticos ou cavidades balísticas não é imediata. Para começar, o elemento difusivo, que dá origem à equação de Usadel está ausente e portanto não é óbvio como justificar o uso do formalismo neste regime. Apesar de Nazarov ter apresentado argumentos qualitativos em defesa de alguns aspectos da teoria, até o momento não há nenhuma dedução microscópica rigorosa dando suporte a tais argumentos.

Nesta tese usaremos o formalismo matricial apenas como preparação para a descrição mais rigorosa que faz uso da teoria de matrizes aleatórias e do modelo- σ não linear supersimétrico. Nesta nova versão a teoria de circuitos é formalizada em termos de um único campo escalar, em contraste com o campo matricial de Nazarov. Mostraremos que para os problemas abordados nesta tese as duas versões produzem exatamente os mesmos resultados analíticos!

Considere um ponto quântico conectado a duas barreiras de transparência arbitrária como mostrado na figura abaixo.

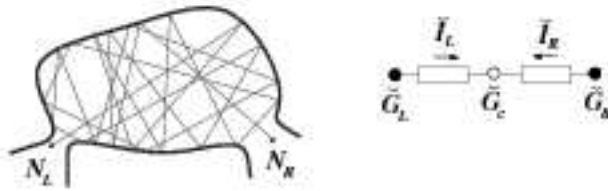


Figura 3.1: Cavidade caótica conectada por contatos ideais a guias assimétricos (à esquerda). Circuito que representa um ponto quântico conectado a guias assimétricos (à direita). Figura retirada da ref. [53].

Sejam f_1 e f_2 as funções distribuição de equilíbrio dos reservatórios, f_c é uma função distribuição de não-equilíbrio que descreve o ponto quântico. Na teoria de circuitos de Nazarov os nós são descritos por funções de Green matriciais promediadas sobre a dinâmica caótica de modo a ficarem completamente isotrópicas. Para cada conector

tem-se uma corrente matricial associada representando uma relação generalizada do tipo tensão-corrente. As funções de Green de equilíbrio nos reservatórios são dadas por:

$$\check{G}_j(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - 2f_j(\varepsilon) & -2f_j(\varepsilon) \\ 2(1 - f_j(\varepsilon)) & 2f_j(\varepsilon) - 1 \end{pmatrix}; \quad \check{G}_j(\varepsilon)^2 = \check{1} \quad (3.1)$$

A presença do campo de contagem, λ , modifica $\check{G}_1(\varepsilon)$ de acordo com a lei de transformação

$$\check{G}_1(\varepsilon, \lambda) = e^{\frac{i\lambda\check{\sigma}_3}{2}} \check{G}_1(\varepsilon) e^{-\frac{i\lambda\check{\sigma}_3}{2}}, \quad (3.2)$$

onde $\check{\sigma}_3$ é uma matriz de Pauli. A principal hipótese (ansatz) da teoria de Nazarov é a de que conectores arbitrários, caracterizados por autovalores de transmissão T_j , são descritos pela corrente matricial

$$\check{I}_j = \frac{N_j T_j [\check{G}_j(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)]}{4 + T_j \left(\left\{ \check{G}_j(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon) \right\} - 2 \right)}, \quad (3.3)$$

onde $\check{G}_c(\varepsilon)$ é a média da função de Green no nó que descreve a cavidade caótica. A equação de movimento quase-clássica é substituída por uma lei de conservação da corrente:

$$\check{I}_1 + \check{I}_2 = 0. \quad (3.4)$$

Vale salientar que a validade desta equação neste regime também necessita de uma justificativa mais rigorosa. A equação (3.4) junto com a normalização das funções de Green dos nós $\check{G}_j(\varepsilon)^2 = \check{1}$ formam as leis básicas da teoria de circuitos matricial.

A conexão entre a teoria de circuitos e a estatística de contagem é dada pela seguinte fórmula [46]:

$$q(\lambda) = i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{t_0}{2h} \int d\varepsilon \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{I}_1(\varepsilon, \lambda) \right). \quad (3.5)$$

Esta é a função geratriz de cumulantes, que contém informação completa sobre todas as flutuações da corrente numa cavidade.

3.1.1 Cavidade Caótica Acoplada a Guias Assimétricos por Contatos ideais

Nesta sub-seção discutiremos a estatística de contagem em cavidades caóticas acopladas a guias assimétricos ($N_1 \neq N_2$), utilizando um método desenvolvido por Bulashenko [53]. Para cavidades acopladas a guias simétricos encontramos em [54] uma série de aplicações da teoria de Nazarov incluindo contatos ideais, junções de tunelamento e conectores difusivos.

Para uma cavidade caótica conectada aos terminais por dois contatos ideais, a corrente matricial, eq. (3.3), é dada por

$$\check{I}_j = N_j \frac{[\check{G}_j(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)]}{2 + \{\check{G}_j(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)\}}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) na lei de conservação de corrente, eq. (3.4):

$$N_1 \frac{[\check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_c(\varepsilon)]}{2 + \{\check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_c(\varepsilon)\}} + N_2 \frac{[\check{G}_2(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)]}{2 + \{\check{G}_2(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)\}} = 0. \quad (3.7)$$

Utilizando a propriedade das funções de Green matriciais deste problema terem traço nulo podemos representá-las usando as matrizes de Pauli, de modo que

$$\begin{cases} \check{G}_j = \vec{v}_j \cdot \check{\vec{\sigma}}, \\ \check{G}_c = \vec{v}_c \cdot \check{\vec{\sigma}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $\vec{v}_j$ e $\vec{v}_c$ são vetores unidades e $\check{\vec{\sigma}} = (\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2, \check{\sigma}_3)$. Com a utilização desta parametrização os anti-comutadores podem ser escritos como um produto escalar

$$\begin{cases} \{\check{G}_j, \check{G}_c\} = 2 \vec{v}_j \cdot \vec{v}_c, \\ \{\check{G}_1, \check{G}_2\} = 2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Seguindo a ref. [53] introduzimos as novas variáveis

$$p_j \equiv \frac{N_j}{2 + \{\check{G}_j, \check{G}_c\}}, \quad (3.10)$$

e

$$\check{G}_\Sigma \equiv p_1 \check{G}_1 + p_2 \check{G}_2. \quad (3.11)$$

Podemos reescrever a eq. (3.7) usando as equações (3.10) e (3.11) da seguinte forma

$$\left[p_1 \check{G}_1 + p_2 \check{G}_2, \check{G}_c \right] = \left[\check{G}_\Sigma, \check{G}_c \right] = 0. \quad (3.12)$$

Da eq. (3.12) concluímos que

$$c \check{G}_c = p_1 \check{G}_1 + p_2 \check{G}_2. \quad (3.13)$$

Substituindo a eq. (3.8) na eq. (3.13) obtemos

$$c \vec{v}_c = p_1 \vec{v}_1 + p_2 \vec{v}_2. \quad (3.14)$$

Calculando o módulo ao quadrado da eq. (3.14) e utilizando a eq. (3.9) vemos que

$$c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}. \quad (3.15)$$

Tomando o produto interno de ambos os lados da eq. (3.14) com $\vec{v}_1$ (e $\vec{v}_2$) obtemos as seguintes expressões:

$$c \left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} = 2 p_1 + p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}, \quad (3.16)$$

e

$$c \left\{ \check{G}_2, \check{G}_c \right\} = 2 p_2 + p_1 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}. \quad (3.17)$$

De (3.10) e (3.15) obtemos:

$$\begin{cases} \left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} = \left(\frac{N_1}{p_1} - 2 \right), \\ p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\} = \frac{c^2 - (p_1^2 + p_2^2)}{p_1}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.16):

$$c \left(\frac{N_1}{p_1} - 2 \right) = 2 (p_1 + p_2) + \frac{(c + p_1 + p_2)(c - (p_1 + p_2))}{p_1}. \quad (3.19)$$

Agora multiplicando a eq. (3.14) por $\vec{v}_c$, obtemos:

$$N_+ - (p_1 + p_2) = c, \quad (3.20)$$

onde

$$N_+ = \frac{N_1 + N_2}{2}. \quad (3.21)$$

Usando (3.20) em (3.19) podemos eliminar a combinação $p_1 + p_2$ e obter

$$2p_1 = N_+ - c \frac{N_2}{N_+}. \quad (3.22)$$

Similarmente ao processo utilizado para a obtenção de eq. (3.22), obtemos:

$$2p_2 = N_+ - c \frac{N_1}{N_+}. \quad (3.23)$$

O conjunto de equações (3.15), (3.22) e (3.23) formam o sistema que devemos resolver.

$$\begin{cases} c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}, \\ 2p_1 = N_+ - c \frac{N_2}{N_+}, \\ 2p_2 = N_+ - c \frac{N_1}{N_+}. \end{cases}$$

Após certa álgebra obtemos deste sistema uma expressão para c :

$$c = N_+ \left(1 + \sqrt{1 - a} \right)^{-1}, \quad (3.24)$$

onde

$$a \equiv 4 \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} \left(1 - \frac{4}{2 + \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}} \right). \quad (3.25)$$

A conexão com a estatística de contagem se faz através da eq. (3.5):

$$q(\lambda) = i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{t_0}{2h} \int d\varepsilon \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{I}_1(\varepsilon, \lambda) \right).$$

Calculando $\check{I}_1(\varepsilon, \lambda)$ obtemos

$$\check{I}_1(\varepsilon, \lambda) = \frac{p_1 p_2}{c} \left[\check{G}_1, \check{G}_2 \right]. \quad (3.26)$$

Substituindo a eq. (3.26) em (3.5) tem-se que

$$q(\lambda) = \frac{t_0}{2h} \int d\varepsilon \frac{p_1 p_2}{c} \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \left[\check{G}_1, \check{G}_2 \right] \right). \quad (3.27)$$

Utilizando as propriedades do traço e dos comutadores, temos:

$$\text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \left[\check{G}_1, \check{G}_2 \right] \right) = -i \text{Tr} \left(\left\{ \frac{i}{2} \left[\check{\sigma}_3, \check{G}_1 \right], \check{G}_2 \right\} \right). \quad (3.28)$$

Da derivada de $\check{G}_1(\varepsilon, \lambda)$ obtemos:

$$\frac{\partial \check{G}_1(\varepsilon, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{i}{2} \left[\check{\sigma}_3, \check{G}_1(\varepsilon, \lambda) \right]. \quad (3.29)$$

Substituindo a eq. (3.29) em (3.28) obtemos $q(\lambda)$ escrito da seguinte forma:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{2h} \int d\varepsilon \frac{p_1 p_2}{c} \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \check{\mathcal{G}}(\varepsilon, \lambda) \right), \quad (3.30)$$

onde $\check{\mathcal{G}}(\varepsilon, \lambda) \equiv \left\{ \check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_2(\varepsilon) \right\}$. O cálculo de $\check{\mathcal{G}}(\varepsilon, \lambda)$ é um pouco trabalhoso, mas envolve apenas multiplicação de matrizes 2×2 . Apresentamos apenas o resultado:

$$\check{\mathcal{G}}(\varepsilon, \lambda) = [2 + 4 J(\varepsilon, \lambda)] \check{1} = \mathcal{G}(\varepsilon, \lambda) \check{1}, \quad (3.31)$$

onde

$$J(\varepsilon, \lambda) = f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon))(e^{i\lambda} - 1) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))(e^{-i\lambda} - 1). \quad (3.32)$$

O termo $\frac{p_1 p_2}{c}$ da eq. (3.30) em função de $\mathcal{G}$ fica

$$\frac{p_1 p_2}{c} = N_+ \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{\mathcal{G} - 2}, \quad (3.33)$$

onde

$$a = 4 F \left(\frac{\mathcal{G} - 2}{\mathcal{G} + 2} \right) \text{ e } F \equiv \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2}. \quad (3.34)$$

A variável F é denominada de fator Fano.

Finalmente após alguma álgebra obtemos a seguinte expressão para a função geratriz dos cumulantes:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} N_+ \int d\varepsilon \frac{\left(\sqrt{1 + J(\varepsilon, \lambda)} - \sqrt{1 + (1 - 4F)J(\varepsilon, \lambda)} \right)}{J(\varepsilon, \lambda) \sqrt{1 + J(\varepsilon, \lambda)}} J'(\varepsilon, \lambda), \quad (3.35)$$

onde

$$J'(\varepsilon, \lambda) = \frac{\partial J(\varepsilon, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.36)$$

Para o caso de guias simétricos ($N_1 = N_2$) a eq. (3.35) fica

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} N \int d\varepsilon \frac{J'(\varepsilon, \lambda)}{\sqrt{1 + J(\varepsilon, \lambda)} (1 + \sqrt{1 + J(\varepsilon, \lambda)})}, \quad (3.37)$$

em concordância com o resultado obtido por Borba [54] utilizando a teoria de circuitos escalar para guias simétricos.

3.1.2 Cavidades Caóticas Acopladas a Guias Assimétricos por Junções de Tunelamento

Neste caso os coeficientes de transmissão das barreiras satisfazem $T_1, T_2 \ll 1$ e a corrente matricial, eq. (3.3), fica dada por

$$\check{I}_j = \frac{N_j T_j}{4} \left[\check{G}_j(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon) \right]. \quad (3.38)$$

Da condição de normalização

$$c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\},$$

temos que

$$c = \pm \left(\frac{G_1^2 + G_2^2}{16} + \frac{G_1 G_2}{16} \mathcal{G} \right)^{1/2}, \quad (3.39)$$

onde $G_j = N_j T_j$. A raiz física da eq. (3.39) é a com sinal “+” e portanto podemos escrever $\frac{p_1 p_2}{c}$ da seguinte forma

$$\frac{p_1 p_2}{c} = \frac{G_1 G_2}{4\sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_1 G_2 \mathcal{G}}}. \quad (3.40)$$

Substituindo a eq. (3.40) em (3.30) obtemos:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} G_1 G_2 \int d\varepsilon \frac{J'(\varepsilon, \lambda)}{\sqrt{(G_1 + G_2)^2 + 4G_1 G_2 J(\varepsilon, \lambda)}}, \quad (3.41)$$

também em concordância com o resultado de Borba [54].

3.1.3 Cavidades Acopladas a Guias Assimétricos por Barreiras de Transparência Arbitrária

Estamos agora interessados em estudar o caso mais geral possível onde o acoplamento entre a cavidade caótica e os guias assimétricos é feito por barreiras cujas transparências variam de 0 a 1, indo do regime de junção de tunelamento ao de contato ideal. Vamos propor aqui uma extensão do método desenvolvido por Bulashenko, que foi descrito nas últimas sub-seções. Para tanto, devemos obter um conjunto de equações similar ao obtido por Bulashenko em [53]. Começamos com a equação de conservação matricial, eq. (3.4), na sua forma mais geral

$$\begin{aligned} \check{I}_1 + \check{I}_2 = 0 = & \frac{N_1 T_1 [\check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_c(\varepsilon)]}{4 + T_1 \left(\left\{ \check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_c(\varepsilon) \right\} - 2 \right)} + \\ & \frac{N_2 T_2 [\check{G}_2(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon)]}{4 + T_2 \left(\left\{ \check{G}_2(\varepsilon), \check{G}_c(\varepsilon) \right\} - 2 \right)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Definindo similarmente aos casos anteriores, as variáveis

$$p_j \equiv \frac{2N_j T_j}{2(2 - T_j) + T_j \left\{ \check{G}_j, \check{G}_c \right\}}, \quad j = 1, 2, \quad (3.43)$$

obtemos novamente a condição de normalização

$$c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}.$$

Da eq. (3.43) obtemos a seguintes equações:

$$p_1 \left(2(2 - T_1) + T_1 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} \right) = 2N_1 T_1, \quad (3.44)$$

$$p_2 \left(2(2 - T_2) + T_2 \left\{ \check{G}_2, \check{G}_c \right\} \right) = 2N_2 T_2. \quad (3.45)$$

Temos ainda as relações

$$\begin{cases} \left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} = 2\frac{p_1}{c} + \frac{p_2}{c}\check{\mathcal{G}}, \\ \left\{ \check{G}_2, \check{G}_c \right\} = 2\frac{p_2}{c} + \frac{p_1}{c}\check{\mathcal{G}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Para o caso de temperatura nula, $T = 0$ ($f_1 = 1$ e $f_2 = 0$), de modo que $\check{\mathcal{G}}$ fica:

$$\check{\mathcal{G}} = 2(2e^{i\lambda} - 1)\check{1}. \quad (3.47)$$

É conveniente neste momento fazer a seguinte mudança de variável

$$e^{i\lambda} = \cosh^2 x. \quad (3.48)$$

Substituindo a eq. (3.48) em (3.47) obtemos

$$\check{\mathcal{G}} = 2 \cosh 2x \check{1}. \quad (3.49)$$

Multiplicando a eq. (3.44) por T_2 e a eq. (3.45) por T_1 e posteriormente somando e subtraindo as mesmas, obtemos as seguintes equações:

$$T_2(2 - T_1)p_1 + T_1(2 - T_2)p_2 = (N_1 + N_2 - c)T_1 T_2, \quad (3.50)$$

e

$$T_2(2 - T_1)p_1 - T_1(2 - T_2)p_2 + \frac{T_1 T_2}{c}(p_1^2 - p_2^2) = T_1 T_2(N_1 - N_2). \quad (3.51)$$

Para podermos comparar os resultados obtidos através deste formalismo com a teoria de circuitos escalar, é conveniente introduzirmos uma pseudo-corrente escalar, que está relacionada com $q(\lambda)$ através da seguinte expressão:

$$K(x) = \frac{\tanh x}{M} q(\lambda) \Big|_{e^{i\lambda} = \cosh^2 x}; \quad M = \frac{eVt_0}{h}. \quad (3.52)$$

Para $T = 0$ temos,

$$q(\lambda) = \frac{M}{2} \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{I}_1 \right), \quad (3.53)$$

de modo que

$$q(\lambda) = \frac{MN_1 T_1}{2 \left(4 + T_1 \left(\left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} - 2 \right) \right)} \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \left[\check{G}_1, \check{G}_c \right] \right). \quad (3.54)$$

Calculando o traço e o anticomutador de $\check{G}_1$ com $\check{G}_c$ obtemos

$$\left\{ \check{G}_1, \check{G}_c \right\} = \frac{2}{c} (p_1 + (2e^{i\lambda} - 1)p_2) \quad (3.55)$$

e

$$\text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \left[\check{G}_1, \check{G}_c \right] \right) = 8e^{i\lambda}. \quad (3.56)$$

Substituindo as equações (3.55) e (3.56) em (3.54) e posteriormente substituindo na expressão da pseudo-corrente, eq. (3.52), obtemos

$$K(x) = \frac{N_1 T_1 p_2 \sinh 2x}{2c + T_1(p_1 - c + p_2 \cosh 2x)}. \quad (3.57)$$

A equação (3.57), juntamente com as equações que formam o sistema abaixo são as equações da teoria de circuitos que devemos resolver.

$$\begin{cases} c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \left\{ \check{G}_1, \check{G}_2 \right\}, \\ T_2(2 - T_1)p_1 + T_1(2 - T_2)p_2 = (N_1 + N_2 - c)T_1 T_2, \\ T_2(2 - T_1)p_1 - T_1(2 - T_2)p_2 + \frac{T_1 T_2}{c}(p_1^2 - p_2^2) = T_1 T_2(N_1 - N_2). \end{cases} \quad (3.58)$$

Resolvendo o conjunto de equações (3.58) para p_1 , p_2 e c , para $x \ll 1$, obtemos a seguinte expansão para $K(x)$:

$$\begin{aligned}
K(x) = & \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} x - \frac{G_1 G_2 (3(G_1^3 T_2 + G_2^3 T_2) - 2(G_1^3 + G_2^3))}{3(G_1 + G_2)^4} x^3 + \frac{G_1 G_2}{15} \\
& \left[2(G_1^6 + G_2^6) - 18(G_1 G_2^5 + G_2 G_1^5) + 15(T_1(1 - T_1)G_2^6 + T_2(1 - T_2)G_1^6) - \right. \\
& - 30(T_1^2 G_1 G_2^5 + T_2^2 G_2 G_1^5) + 40G_1^3 G_2^3 + 45(T_2 G_2 G_1^5 + T_1 G_1 G_2^5) - \\
& \left. - 60(G_1^3 G_2^3 T_2 + G_1^3 G_2^3 T_1) + 90G_1^3 G_2^3 T_2 T_1 \right] / (G_1 + G_2)^7 x^5 + \mathcal{O}(x^7)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Este resultado foi obtido via computação algébrica em colaboração com Ailton Fernandes estudantes de doutorado do orientador desta dissertação professor Antônio Macêdo.

Antes de compararmos este resultado com o da teoria de circuitos escalar vamos apresentar um método alternativo ao desenvolvido nesta seção, onde obtemos um sistema de equação equivalente ao exibido na eq. (3.58). Este novo sistema é ainda mais simples pois conseguimos reduzir o número de parâmetros de três para dois e por consequência o número de equações do sistema também será reduzido.

3.2 Representação Vetorial

O ponto de partida desta representação vetorial da teoria de circuitos de Nazarov é a expansão as funções de Green matriciais utilizando as matrizes de Pauli.

$$\check{\vec{\sigma}} = \check{\sigma}_1 \hat{e}_1 + \check{\sigma}_2 \hat{e}_2 + \check{\sigma}_3 \hat{e}_3. \tag{3.60}$$

Escrevendo as funções de Green do problema utilizando o vetor de Pauli definido acima obtemos

$$\check{G}_1(x) = \vec{g}_1(x) \cdot \check{\vec{\sigma}}. \tag{3.61}$$

Determinamos $\vec{g}_1(x)$ a partir da seguinte expressão para matrizes de traço nulo:

$$\check{A} = \vec{a} \cdot \check{\vec{\sigma}}; \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\check{A} \check{\vec{\sigma}} \right) \tag{3.62}$$

Usando (3.62) obtemos

$$\vec{g}_1(x) = -\cosh^2 x (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) - \hat{e}_3; \quad \vec{g}_1(x) \cdot \vec{g}_1(x) = 1. \tag{3.63}$$

Similarmente para $\check{G}_2$:

$$\check{G}_2 = \vec{g}_2 \cdot \check{\vec{\sigma}}, \quad (3.64)$$

onde

$$\vec{g}_2 = -\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 + \hat{e}_3; \quad \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1. \quad (3.65)$$

Podemos relacionar agora os produtos interno e vetorial dos vetores $\vec{g}_1(x)$, eq. (3.63), e $\vec{g}_2$, eq. (3.65), com o anticomutador e comutador das funções de Green $\check{G}_1(x)$ e $\check{G}_2$. Obtemos

$$\vec{g}_1(x) \cdot \vec{g}_2 = \cosh 2x \quad \text{e portanto} \quad \{\check{G}_1(x), \check{G}_2\} = 2\vec{g}_1(x) \cdot \vec{g}_2 \check{1}. \quad (3.66)$$

A relação entre o produto vetorial e o comutador é um pouco menos direto que a relação da eq. (3.66). Inicialmente note que

$$\vec{g}_1(x) \times \vec{g}_2 = -i \sinh^2 x \hat{e}_1 + (1 + \cosh^2 x) \hat{e}_2 - 2i \cosh^2 x \hat{e}_3. \quad (3.67)$$

Para facilitar nossa comparação, começamos definindo a seguinte matriz de traço nulo auxiliar:

$$\check{A} = \vec{a} \cdot \check{\vec{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\text{sech}^2(x) & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Aplicando a eq. (3.62) em (3.68), obtemos o vetor

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \tanh^2 x \hat{e}_1 + \frac{i}{2} (1 + \text{sech}^2 x) \hat{e}_2 + \hat{e}_3. \quad (3.69)$$

O comutador de $\check{G}_1(x)$ com $\check{G}_2$ em função de $\vec{a}$ fica,

$$[\check{G}_1(x), \check{G}_2] = 4(\cosh^2 x) \vec{a} \cdot \check{\vec{\sigma}}. \quad (3.70)$$

Comparando a eq. (3.67) com (3.70) concluímos que

$$[\check{G}_1(x), \check{G}_2] = 2i(\vec{g}_1(x) \times \vec{g}_2) \cdot \check{\vec{\sigma}}. \quad (3.71)$$

Podemos portanto escrever a corrente matricial usando as equações (3.66) e (3.71):

$$\check{I}_n(x) = \frac{i\tau_n(\vec{g}_1(x) \times \vec{g}_2) \cdot \check{\vec{\sigma}}}{2 + \tau_n(\vec{g}_1(x) \cdot \vec{g}_2 - 1)} \equiv i \vec{I}_n(x) \cdot \check{\vec{\sigma}}, \quad (3.72)$$

onde $\vec{I}_n(x)$ é a corrente vetorial da nova representação e τ_n são autovalores de transmissão. Em resumo

$$\vec{I}_n(x) \equiv \frac{i\tau_n(\vec{g}_1(x) \times \vec{g}_2)}{2 + \tau_n(\vec{g}_1(x) \cdot \vec{g}_2 - 1)}. \quad (3.73)$$

e

$$\vec{I}_n(x) \cdot \hat{e}_3 = -\frac{i}{2} \text{Tr} \left(\check{\sigma}_3 \check{I}_n(x) \right). \quad (3.74)$$

A pseudo-corrente definida em (3.52) está relacionada à $\vec{I}_n(x)$ da seguinte forma

$$K(x) = i \tanh x \sum_n \left\langle \vec{I}_n(x) \cdot \hat{e}_3 \right\rangle, \quad (3.75)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa a média sobre a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão do sistema.

3.3 Teoria de Circuitos Vetorial Para Cavidades

Estamos interessados agora em utilizar as expressões deduzidas na última seção para estudar alguns circuitos formados por uma cavidade caótica conectadas a guias por barreiras de transparência arbitrária. Nesta abordagem vetorial os reservatórios são descritos pelos seguintes “vetores de estado”,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\cosh^2 x (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) - \hat{e}_3; & \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = 1, \\ \vec{r}_2 = -\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 + \hat{e}_3; & \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = 1, \\ \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cosh 2x. \end{cases} \quad (3.76)$$

Os conectores são descritos por correntes vetoriais:

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \frac{N_1 T_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + T_1(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)}, \\ \vec{I}_2 = \frac{N_2 T_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + T_2(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)}, \end{cases} \quad (3.77)$$

onde $\vec{r}_c$ corresponde ao vetor de estado da cavidade. O sistema de equações é obtido a partir da lei de conservação de correntes vetoriais: $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$. A pseudo-corrente pode ser obtida através da relação

$$K(x) = -i \tanh x \vec{I}_2 \cdot \hat{e}_3. \quad (3.78)$$

Note que a média que aparece na eq. (3.75) é substituída pelas regras da teoria de circuitos correspondendo a uma aproximação semi-clássica.

3.3.1 Cavidades Acopladas por Junções de Tunelamento

Para o caso de uma cavidade caótica acoplada a guias por junções de tunelamento ($T_1, T_2 \ll 1$) as correntes vetoriais do circuito, eq. (3.77), são dadas por:

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \frac{N_1 T_1}{2} \vec{r}_1 \times \vec{r}_c, \\ \vec{I}_2 = \frac{N_2 T_2}{2} \vec{r}_2 \times \vec{r}_c. \end{cases} \quad (3.79)$$

Da lei de conservação de corrente:

$$N_1 T_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_c + N_2 T_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_c = 0. \quad (3.80)$$

Considerando por conveniência o caso no qual os guias são simétricos $N_1 = N_2 = N$, propomos o seguinte *ansatz*:

$$\vec{r}_c = A(T_1 \vec{r}_1 + T_2 \vec{r}_2). \quad (3.81)$$

Da condição de normalização do vetor $\vec{r}_c$ obtemos A :

$$A = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cosh 2x}}. \quad (3.82)$$

O vetor de estado da cavidade é portanto:

$$\vec{r}_c = \frac{T_1 \vec{r}_1 + T_2 \vec{r}_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cosh 2x}}. \quad (3.83)$$

Substituindo a eq. (3.83) na expressão da corrente vetorial $\vec{I}_2$, obtemos:

$$\begin{cases} \vec{I}_2 = \frac{N}{2} A T_1 T_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_1, \\ \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 \cdot \hat{e}_3 = 2i \cosh^2 x. \end{cases} \quad (3.84)$$

Substituindo a eq. (3.84) em (3.78) obtemos:

$$K(x) = \frac{NT_1T_2 \sinh 2x}{2\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cosh 2x}}. \quad (3.85)$$

Esta expressão coincide com o resultado da teoria de circuitos escalar [54].

3.3.2 Cavidades Acopladas por Barreiras Simétricas

Para o caso onde a cavidade está acoplada aos guias por barreiras simétricas ($T_1 = T_2 = T$), as corrente vetoriais do circuito são dadas então por:

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \frac{NT \vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + T(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)}, \\ \vec{I}_2 = \frac{NT \vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + T(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)}. \end{cases} \quad (3.86)$$

Da lei de conservação temos:

$$\frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + T(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)} + \frac{\vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + T(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)} = 0. \quad (3.87)$$

Tentamos agora o seguinte *ansatz*:

$$\vec{r}_c = A(\vec{r}_1 + \vec{r}_2). \quad (3.88)$$

Da condição de normalização de $\vec{r}_c$ obtemos:

$$A = \frac{1}{2 \cosh x}. \quad (3.89)$$

Temos então:

$$\begin{cases} \vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2 \cosh x}, \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c = \cosh x; \quad \vec{r}_2 \times \vec{r}_c \cdot \hat{e}_3 = i \cosh x. \end{cases} \quad (3.90)$$

Finalmente de (3.90) podemos calcular a pseudo-corrente:

$$K(x) = \frac{NT \sinh x}{2 + T(\cosh x - 1)}, \quad (3.91)$$

que também coincide com o resultado da teoria de circuitos escalar obtido por Borba [54].

3.3.3 Cavidades Acopladas por Barreiras de Transparência Arbitrária

Após termos atacado casos particulares do nosso problema nas subseções anteriores, vamos agora abordar problema mais geral que é a cavidade caótica acoplada a guias assimétricos por barreiras de transparência arbitrária. Nosso ponto de partida como sempre é escrever as correntes vetórias que representam nossos conectores. A figura (3.2) mostra um esboço deste circuito

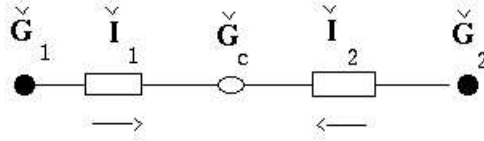


Figura 3.2: Vemos a representação da teoria de circuitos matricial para um ponto quântico acoplado a guias por barreiras de transparência arbitrária.

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \frac{N_1 T_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + T_1(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)}, \\ \vec{I}_2 = \frac{N_2 T_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + T_2(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)}. \end{cases}$$

Pela lei de conservação de corrente no circuito temos que

$$\frac{N_1 T_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + T_1(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)} + \frac{N_2 T_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + T_2(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)} = 0. \quad (3.92)$$

Escrevemos $\vec{r}_c$ da seguinte forma

$$\vec{r}_c = A_1 \vec{r}_1 + A_2 \vec{r}_2. \quad (3.93)$$

Da normalização de (3.93), obtemos

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cosh 2x = 1. \quad (3.94)$$

Calculando produtos internos da equação (3.93) usando o vínculo $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cosh 2x$ obtemos

$$\begin{cases} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c = A_1 + A_2 \cosh 2x, \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c = A_2 + A_1 \cosh 2x. \end{cases} \quad (3.95)$$

Substituindo a eq. (3.95) em (3.92) resulta em

$$\frac{N_1 T_1 A_2}{2 + T_1(A_1 + A_2 \cosh 2x - 1)} = \frac{N_2 T_2 A_1}{2 + T_2(A_2 + A_1 \cosh 2x - 1)}. \quad (3.96)$$

Após algumas manipulações algébricas em (3.96) obtemos a equação

$$\begin{aligned} T_1 T_2 [(N_1 - N_2) A_1 A_2 \cosh 2x + N_1 A_2 (A_2 - 1) + N_2 A_1 (A_1 - 1)] + \\ + 2(N_1 T_1 A_2 - N_2 T_2 A_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Para obter a pseudo-corrente devemos primeiro calcular o seguinte produto misto

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_c \cdot \hat{e}_3 = 2i A_1 \cosh^2 x. \quad (3.98)$$

Temos então, usando (3.78)

$$K(x) = \frac{N_2 T_2 A_1 \sinh 2x}{2 + T_2(A_2 + A_1 \cosh 2x - 1)}. \quad (3.99)$$

Em suma, a equação (3.99) juntamente com o sistema de equações abaixo, são as equações da teoria de circuitos que devemos resolver.

$$\begin{cases} A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cosh 2x = 1, \\ T_1 T_2 [(N_1 - N_2) A_1 A_2 \cosh 2x + N_1 A_2 (A_2 - 1) + N_2 A_1 (A_1 - 1)] + \\ + 2(N_1 T_1 A_2 - N_2 T_2 A_1) = 0. \end{cases} \quad (3.100)$$

Resolvendo a eq. (3.100) para $x \ll 1$, obtemos a seguinte expansão para $K(x)$

$$\begin{aligned} K(x) = & \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} x - \frac{G_1 G_2 (3(G_1^3 T_2 + G_2^3 T_2) - 2(G_1^3 + G_2^3))}{3(G_1 + G_2)^4} x^3 + \frac{G_1 G_2}{15} \\ & \left[2(G_1^6 + G_2^6) - 18(G_1 G_2^5 + G_2 G_1^5) + 15(T_1(1 - T_1)G_2^6 + T_2(1 - T_2)G_1^6) - \right. \\ & - 30(T_1^2 G_1 G_2^5 + T_2^2 G_2 G_1^5) + 40G_1^3 G_2^3 + 45(T_2 G_2 G_1^5 + T_1 G_1 G_2^5) - \\ & \left. - 60(G_1^3 G_2^3 T_2 + G_1^3 G_2^3 T_1) + 90G_1^3 G_2^3 T_2 T_1 \right] / (G_1 + G_2)^7 x^5 + \mathcal{O}(x^7) \end{aligned} \quad (3.101)$$

A expansão (3.101) é idêntica a da eq. (3.59). Fizemos uma verificação usando computação algébrica até termos de ordem 18. No próximo capítulo faremos a comparação entre os resultados obtidos pelas duas formulações da teoria de circuitos de Nazarov com a teoria de circuitos escalar.

3.4 Teoria de Circuitos Matricial para Sistemas NS

Nazarov [55] ainda em 1994 estende sua teoria de circuitos para o cálculo da condutância em uma estrutura híbridas feita de metal-normal em contato com um ou mais condensados supercondutores através das equações quase-clássicas de supercondutividade de não-equilíbrio escritas em termos de funções de Green de Keldysh matriciais. Através da análise destas equações em elementos finitos Nazarov obtém uma série de regras para sua teoria de circuitos estendida para sistemas NS. Após a formulação, Nazarov aplica sua teoria de circuitos em dois casos simples (veja ref. [55]): o primeiro quando uma junção de tunelamento está em série com um condutor e um segundo caso, quando temos duas junções de tunelamento conectadas em série. Após esta aplicação inicial Nazarov discutiu o caso em que um metal normal encontra-se conectado a dois supercondutores com parâmetros de ordem de fases distintas por meio de junções de tunelamento. Neste caso, observa-se uma característica interessante da condutância NS que é uma forte dependência com a diferença das fases dos supercondutores. Isto é consequência do fato de que o elétron da região normal não sofre reflexão apenas por um supercondutor mas por ambos supercondutores. Uma revisão sobre diversas aplicações da teoria de circuitos de Nazarov em sistemas NS pode ser encontrada na ref. [56].

Em 2005 Vanević e Belzig [57] utilizando um método similar ao desenvolvido por Bulashenko [53] para sistemas normais, apresentado nesta dissertação no capítulo 3, calcularam a função geratriz dos cumulantes para uma cavidade caótica normal acoplada a um reservatório normal e a um reservatório supercondutor por guias assimétricos. O acoplamento entre a a cavidade e os guias é feito através de contatos ideais. Obtendo um conjunto de equações mais gerais do que o obtido por Bulashenko [53], Vanević e Belzig, conseguiram encontrar analiticamente a expressão para a função geratriz de cumulantes do problema para temperatura finita e estudaram a partir desta função os três primeiros cumulantes da estatística de contagem. Em particular no limite de baixas temperaturas eles obtém a seguinte expressão para a condutância G_{NS} adimensional

$$G_{NS} = (N_1 + N_2) \left(1 - \frac{N_1 + N_2}{q} \right), \quad (3.102)$$

onde

$$q \equiv \sqrt{(N_1 + N_2)^2 + 4N_1N_2}. \quad (3.103)$$

Vamos obter esta mesma expressão no próximo capítulo utilizando a teoria de circuitos escalar.

Capítulo 4

Teoria de Circuitos Escalar

Apresentamos neste capítulo uma extensão da teoria de circuitos [39] que tem como ponto de partida o modelo- σ não linear supersimétrico. A grande vantagem desta abordagem, denominada teoria de circuitos escalar, em relação ao formalismo de Nazarov, é a possibilidade de tratar sistemas quânticos caóticos abertos com razoável rigor matemático. Em particular a inclusão de barreiras de transparência arbitrária é feita de forma exata através do modelo de Mahaux-Weidenmüller. Um resultado recente particularmente relevante foi a demonstração da equivalência entre os resultados obtidos via teoria de circuitos escalar [58] e o método digramático desenvolvido por Beenakker e Brouwer [59], para o estudo de cavidades caóticas acopladas a guias por barreiras.

Nosso primeiro objetivo neste capítulo é mostrar a equivalência entre a teoria de circuitos fenomenológica do capítulo anterior e a teoria de circuitos para cavidades acopladas a guias por barreiras de transparência arbitrária. Depois utilizaremos a teoria de circuitos escalar para o cálculo da condutância G_{NS} em um sistema NS. Nosso objetivo com este cálculo é observar a transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o regime de tunelamento com reflexão. O regime de tunelamento sem reflexão foi observado por Beenakker et. al. [60].

4.1 Conceitos Básicos

A teoria de circuitos escalar, da mesma forma que a teoria de Nazarov, consiste em dividir a amostra em elementos finitos denominados conectores e nós e representar os caminhos de condução de carga eletrônica através de uma rede interligada na qual as leis básicas de conservação podem ser implementadas localmente de forma muito simples e conveniente. Devido à coerência da função de onda eletrônica

a teoria de circuitos não pode ser formulada em termos de um potencial eletrostático real responsável pela diferença de voltagem no sistema uma vez que estes potenciais não podem ser definidos localmente ao longo do circuito. Por isto a teoria de circuito é formulada em termos de um potencial complexo fictício cujo valor é especificado nos terminais do circuito e gera uma corrente fictícia denominada corrente espectral, que tem a seguinte definição [39]

$$I(\phi) = \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{\tau_n \sin \phi}{1 - \tau_n \sin^2 \phi/2} \right\rangle = \sin \phi F(\phi), \quad (4.1)$$

onde τ_n são os autovalores de transmissão correspondentes aos N canais de propagação da amostra e ϕ é o potencial complexo fictício especificado nos terminais do circuito. Curiosamente esta forma escalar para a corrente espectral aparece também numa das versões da teoria de Nazarov [37]. Na ref. [39] esta expressão é deduzida diretamente do modelo- σ não linear supersimétrico. Seja

$$\rho(\tau) \equiv \sum_{n=1}^N \langle \delta(\tau - \tau_n) \rangle, \quad (4.2)$$

a densidade média de autovalores de transmissão. Podemos relacionar $\rho(\tau)$ com $F(\phi)$ da seguinte forma:

$$F(\phi) = \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - \tau \sin^2 \phi/2}. \quad (4.3)$$

A lei de conservação de corrente espectral que vamos utilizar é o resultado de um teorema enunciado e demonstrado na ref. [39]. (Para uma dedução mais detalhada deste teorema ver refs. [54] e [61]).

Sejam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ os potenciais complexos nos nós de uma rede, então a corrente espectral $I_{ij}(\Delta\theta_{ij})$ descreve a relação corrente-voltagem entre os conectores (i, j) . A lei de conservação de corrente espectral é dada por:

$$I(\phi) = I_{01}(\phi - \theta_1) = I_{12}(\theta_1 - \theta_2) = \dots = I_{MM+1}(\theta_M). \quad (4.4)$$

Nas próximas seções usaremos este resultado para determinar $\rho(\tau)$ em diversas situações.

4.2 A Densidade Média de Autovalores de Transmissão

Nesta seção vamos inverter a relação (4.3) e obter uma expressão para a densidade de autovalores de transmissão em termos da corrente espectral. Considere a seguinte função auxiliar:

$$h(z) \equiv \int_0^1 d\tau' \frac{\tau' \rho(\tau')}{1 - z\tau'}. \quad (4.5)$$

Em termos de $h(z)$, $F(\phi)$ pode ser escrita como

$$F(\phi) = h(\sin^2 \phi/2). \quad (4.6)$$

Fazendo $z = (\tau \pm i\eta)^{-1}$, com $\eta \rightarrow 0^+$, temos:

$$h\left(\frac{1}{\tau \pm i\eta}\right) = \int_0^1 d\tau' \frac{(\tau \pm i\eta)\rho(\tau')}{\tau - \tau' \pm i\eta}. \quad (4.7)$$

Usando a seguinte identidade em (4.7):

$$\frac{1}{\tau - \tau' \pm i0^+} = \wp\left(\frac{1}{\tau - \tau'}\right) \mp i\pi\delta(\tau - \tau'), \quad (4.8)$$

onde $\wp$ indica o valor principal de Cauchy, obtemos então:

$$h\left(\frac{1}{\tau - i0^+}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i0^+}\right) = \int_0^1 d\tau' \tau \tau' \rho(\tau') [2\pi i \delta(\tau - \tau')]. \quad (4.9)$$

Resolvendo a integral obtemos uma expressão para a densidade média de autovalores de transmissão

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi i \tau^2} \left[h\left(\frac{1}{\tau - i0^+}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i0^+}\right) \right], \quad (4.10)$$

ou ainda,

$$\rho(\tau) = -\frac{1}{\pi \tau^2} \text{Im}\{h(z)\} \Big|_{z=\frac{1}{\tau + i0^+}}. \quad (4.11)$$

Quando o condutor mesoscópico é conectado a um supercondutor, as propriedades eletrônicas do condutor são modificadas devido aos efeitos de proximidade. Os efeitos de proximidade nesta escala são resultado da reflexão de Andreev

na interface NS. Em analogia ao condutor normal, as propriedades de transporte no regime mais interessante, que corresponde a energias bem abaixo do potencial de emparelhamento do supercondutor, podem ser representadas de forma simples em termos dos *autovalores de reflexão de Andreev* $\{r_n\}$. Os $\{r_n\}$ são autovalores do produto de matrizes $r_{he}^\dagger r_{he}$, onde r_{he} é a matriz de reflexão de Andreev. Para baixas energias, $E \ll E_{Thouless}$, onde a energia de Thouless é tipicamente o inverso do tempo de escape da partícula, os autovalores de reflexão de Andreev estão relacionados com os autovalores de transmissão do lado normal pela expressão [62]:

$$r_n = \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n)^2}. \quad (4.12)$$

Obtivemos esta fórmula através da teoria de matriz- S no primeiro capítulo desta dissertação (ver por exemplo expressões para a condutância e potência do ruído de disparo NS, eqs. (1.77) e (1.79) respectivamente). A expressão (4.12) nos fornece uma relação direta entre a densidade de autovalores de reflexão de Andreev e a densidade de autovalores de transmissão. Um estudo desse assunto para outras escalas de energia onde a densidade de autovalores de reflexão de Andreev depende da energia foi recentemente feito por Nazarov et al. [63]. Nesta dissertação vamos trabalhar no regime onde a fórmula de Beenakker, eq. (4.12), é válida.

4.3 Momentos dos Autovalores de Transmissão e Autovalores de Reflexão de Andreev

Nesta seção definiremos os momentos da distribuição de autovalores de transmissão em função da corrente espectral, para o caso normal e momentos dos autovalores de reflexão de Andreev para sistemas NS. Estes momentos estão diretamente relacionados com observáveis conforme veremos adiante.

Caso Normal

Neste caso a forma geral dos momentos dos autovalores de transmissão é:

$$g_m \equiv \int_0^1 d\tau \tau^m \rho(\tau). \quad (4.13)$$

De (4.13), temos

$$g_0 = N = \int_0^1 d\tau \rho(\tau), \quad (4.14)$$

onde N é o número de autovalores de transmissão. Para o primeiro momento temos

$$g_1 = \int_0^1 d\tau \tau \rho(\tau) = F(\phi) \Big|_{\phi=0}, \quad (4.15)$$

que coincide com a fórmula de Landauer para a condutância adimensional. Para o segundo momento temos

$$g_2 = \int_0^1 d\tau \tau^2 \rho(\tau) = \left(\frac{2}{\sin \phi} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi=0}. \quad (4.16)$$

As expressões de g_1 e g_2 estão relacionadas com a potência do ruído de disparo adimensional pela relação:

$$P = g_1 - g_2. \quad (4.17)$$

Esta expressão (4.17), foi deduzida primeiramente na ref. [64] utilizando a teoria de matriz- S .

Caso NS

Para sistemas híbridos normal-supercondutor, a expressão geral para os momentos dos autovalores de reflexão de Andreev é dada por:

$$g_{NS}^{(m)} \equiv \int_0^1 dr r^m \rho(r) = \int_0^1 d\tau \left(\frac{\tau^2}{(2-\tau)^2} \right)^m \rho'(\tau). \quad (4.18)$$

O primeiro momento, fica

$$g_{NS}^{(1)} = \int_0^1 d\tau \frac{\tau^2}{(2-\tau)^2} \rho'(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}}. \quad (4.19)$$

Nas refs. [65] e [66] os autores obtêm a relação entre o momento, eq. (4.19), e a condutância G_{NS} :

$$G_{NS} = 2g_{NS}^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}}. \quad (4.20)$$

O segundo momento dos autovalores de reflexão de Andreev é dado por

$$g_{NS}^{(2)} = \int_0^1 d\tau \left(\frac{\tau^2}{(2-\tau)^2} \right)^2 \rho'(\tau) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^3 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} F(\phi). \quad (4.21)$$

Como vimos no capítulo 1, de Jong e Beenakker [33], utilizando a teoria de matriz- S , obtiveram uma expressão para a potência do ruído de disparo, eq. (1.79), para um sistema NS em termos dos autovalores de transmissão do lado normal. A expressão em termos dos momentos dos autovalores de transmissão fica

$$P_{NS} = 4(g_{NS}^{(1)} - g_{NS}^{(2)}) = 2G_{NS} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^3 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} F(\phi). \quad (4.22)$$

4.4 A Pseudocorrente $K(x)$

Em algumas situações será mais conveniente trabalhar com uma pseudocorrente $K(x)$ ao invés da corrente espectral. Efetuando a seguinte mudança de variável, $\tau_n = 1/\cosh^2 x_n$, podemos escrever a corrente espectral, eq. (4.1), da seguinte forma:

$$I(\phi) = \sin \phi \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{1}{\sinh^2 x_n + \cos^2 \phi/2} \right\rangle. \quad (4.23)$$

Seja $\phi = \pi - 2ix$, então

$$J(x) \equiv \frac{i}{2} I(\pi - 2ix) = \frac{1}{2} \sinh 2x \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{1}{\sinh^2 x - \sinh^2 x_n} \right\rangle. \quad (4.24)$$

Definindo a densidade média da variável x como

$$\nu(x) \equiv \sum_{n=1}^N \langle \delta(x - x_n) \rangle, \quad (4.25)$$

podemos escrever a eq. (4.24) da seguinte forma,

$$J(x) = \frac{1}{2} \sinh 2x \int_0^\infty dx' \frac{\nu(x')}{\sinh^2 x - \sinh^2 x'}. \quad (4.26)$$

e portanto

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \{ J(x - i0^+) \}. \quad (4.27)$$

A relação entre $\nu(x)$ e $\rho(\tau)$ é obtida notando que:

$$\rho(\tau) d\tau = \nu(x) dx; \quad \left| \frac{d\tau}{dx} \right| = \frac{2 \sinh x}{\cosh^3 x}, \quad (4.28)$$

e

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{\tau}}; \quad \sinh x = \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}. \quad (4.29)$$

Portanto

$$\rho(\tau) = \frac{\nu(x)}{2\tau\sqrt{1-\tau}} \Big|_{x=\cosh^{-1} 1/\sqrt{\tau}}. \quad (4.30)$$

A pseudocorrente é definida como:

$$K(x) \equiv \frac{i}{2}I(-2ix) = J\left(x - i\frac{\pi}{2}\right), \quad (4.31)$$

logo

$$K(x) = \frac{\sinh 2x}{2} \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{2}{\cosh 2x + \cosh 2x_n} \right\rangle = \frac{\sinh 2x}{2} H(x). \quad (4.32)$$

Em termos de $\nu(x)$ temos,

$$H(x) = 2 \int_0^\infty dy \frac{\nu(y)}{\cosh 2x + \cosh 2y}. \quad (4.33)$$

A densidade $\nu(x)$ pode ser obtida diretamente da pseudocorrente através da seguinte expressão:

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im}\{K(x + i\pi/2 - i0^+)\}. \quad (4.34)$$

A pseudocorrente $K(x)$ satisfaz uma lei de conservação semelhante àquela obedecida por $I(\phi)$:

$$K(x) = K_{01}(x - y_1) = K_{12}(y_1 - y_2) = \dots = K_{M\,M+1}(y_M), \quad (4.35)$$

a eq. (4.35) diz que a pseudocorrente criada devido a queda de tensão nos nós do circuito em cada conector que conecta um reservatório e um nó do circuito ou dois nós do circuito é igual em todos os conectores. A figura (4.1) representa a lei de conservação (4.35).

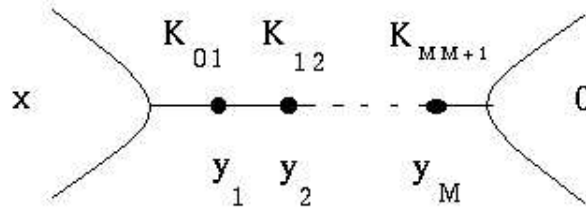


Figura 4.1: Conservação da pseudocorrente $K(x)$ em um circuito arbitrário.

4.5 Conexão com a Estatística de Contagem de Carga

No capítulo 2 obtivemos a função característica da estatística de contagem em termos dos autovalores de transmissão, eq. (2.141). Para temperatura nula temos

$$S(\lambda) = -M \sum_{n=1}^N \ln [1 + \tau_n(e^{i\lambda} - 1)] \quad (4.36)$$

Podemos reescrever esta equação em termos da densidade $\rho(\tau)$

$$S(\lambda) = -M \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \ln [1 + \tau(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (4.37)$$

Os cumulantes da estatística de contagem são definidos por:

$$q_l = (-i)^l \left. \frac{\partial^l S(\lambda)}{\partial \lambda^l} \right|_{\lambda=0}. \quad (4.38)$$

Definindo a função:

$$q(\lambda) \equiv i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda}, \quad (4.39)$$

e substituindo a eq. (4.37) em (4.39), obtemos:

$$q(\lambda) = M \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau) e^{i\lambda}}{1 + \tau(e^{i\lambda} - 1)}. \quad (4.40)$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$e^{i\lambda} = \cosh^2 x, \quad (4.41)$$

e

$$\tau = \frac{1}{\cosh^2 x'}, \quad (4.42)$$

obtemos:

$$q(x) = M \int_0^\infty dx' \frac{\nu(x') \cosh^2 x}{\cosh^2 x' + \sinh^2 x}. \quad (4.43)$$

Multiplicando a última expressão por $\frac{\tanh x}{M}$ ficamos com

$$\frac{\tanh x}{M} q(x) = \sinh 2x \int_0^\infty dx' \frac{\nu(x')}{\cosh 2x' + \cosh 2x}. \quad (4.44)$$

Comparando a eq. (4.44) com (4.32) obtemos a expressão que conecta a teoria de circuitos escalar com a estatística de contagem de carga desenvolvida no capítulo 2:

$$K(x) = \frac{\tanh x}{M} q(\lambda) \Big|_{e^{i\lambda} = \cosh^2 x}. \quad (4.45)$$

4.6 Aplicações Simples da Teoria de Circuitos Escalar

Nesta seção vamos obter a pseudocorrente de alguns sistemas simples. Após este cálculo utilizaremos $K(x)$ para obter alguns observáveis, como por exemplo a condutância normal e NS. A figura (4.2) representa o circuito que corresponde a um ponto quântico conectado a guias por barreiras de transparência arbitrária na teoria de circuitos escalar.

4.6.1 Ponto Quântico Caótico Conectado a Guias por Contatos Ideais

As pseudocorrentes em cada conector desse circuito são dadas por:

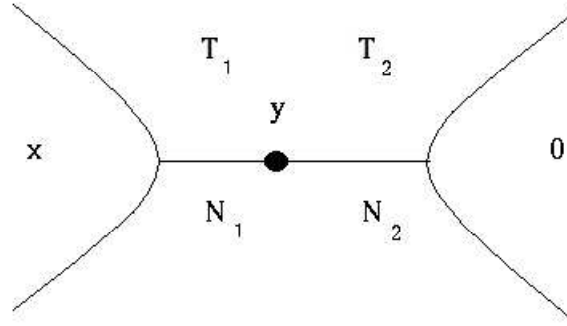


Figura 4.2: Representação de um ponto quântico ligado a dois guias por barreiras de transparência arbitrária.

$$\begin{cases} K_1(x) = N_1 \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + 1} = N_1 \tanh x, \\ K_2(x) = N_2 \tanh x. \end{cases} \quad (4.46)$$

Da lei de conservação da pseudocorrente, eq. (4.35), temos:

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y) \Rightarrow N_1 \tanh(x - y) = N_2 \tanh y. \quad (4.47)$$

Utilizando a identidade abaixo:

$$\tanh(x - y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}, \quad (4.48)$$

introduzindo novas variáveis:

$$\begin{cases} \xi \equiv \tanh y; & 0 \leq \xi < 1, \\ \eta \equiv \tanh x; & 0 \leq \eta < 1, \\ a \equiv N_2/N_1, \end{cases} \quad (4.49)$$

e substituindo as equações (4.48) e (4.49) em (4.47) obtemos

$$\frac{\eta - \xi}{1 - \eta\xi} = a\xi \Rightarrow a\eta\xi^2 - (1 + a)\xi + \eta = 0. \quad (4.50)$$

As raízes de (4.50) são:

$$\xi_{\pm} = \frac{1 + a}{2a\eta} \left[1 \pm \sqrt{\Delta} \right]; \quad \Delta = 1 - \frac{4a\eta^2}{(1 + a)^2}. \quad (4.51)$$

Substituindo a eq. (4.51) em (4.47) obtemos:

$$\begin{cases} K_{\pm}(x) = N_2 \xi_{\pm} = \frac{N_1 + N_2}{2} \coth x \left[1 \pm \sqrt{1 - \tanh^2(x) \tanh^2(x_0)} \right], \\ \tanh^2(x_0) = \frac{4a\eta^2}{(1 + a)^2}. \end{cases} \quad (4.52)$$

O critério para escolher a raiz física do problema, consiste em identificar qual das duas produz a expressão correta para o primeiro cumulante, cuja fórmula pode ser obtida independentemente.

Cálculo de Observáveis

Os momentos dos autovalores de transmissão, em termos de $\nu(x)$, são dados por

$$g_m = \int_0^{\infty} \frac{\nu(x)}{\cosh^{2m} x} dx. \quad (4.53)$$

A função $H(x)$, eq. (4.33), para este exemplo é dada por:

$$H_{\pm}(x) = \frac{N_1 + N_2}{2 \sinh^2 x} \left[1 \pm \sqrt{1 - \tanh^2(x) \tanh^2(x_0)} \right]. \quad (4.54)$$

- a) Em termos dos momentos dos autovalores de transmissão a **condutância normal** adimensional é

$$G = g_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\nu(y) dy}{1 + \cosh 2y}. \quad (4.55)$$

Escrevendo a expressão acima em termos da função $H(x)$, eq. (4.54), temos

$$G = H(0) = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}. \quad (4.56)$$

Note que podemos adicionar as resistências de contato neste regime, ou seja

$$G^{-1} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}. \quad (4.57)$$

A raiz que produziu a expressão correta para a condutância foi a ξ_- e portanto temos $H(x) = H_-(x)$.

b) A **potência do ruído de disparo normal** é dado por

$$P = g_1 - g_2 = H(0) + \left(\frac{1}{\sinh 2x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} H(x). \quad (4.58)$$

Após o cálculo da derivada da expressão acima obtemos:

$$P = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3}. \quad (4.59)$$

c) A **condutância NS** em termos de $H(x)$ é dada por:

$$G_{NS} = 2g_{NS}^{(1)} = 2 \int_0^\infty \frac{\nu(y) dy}{\cosh^2 2y} = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=i\pi/4}. \quad (4.60)$$

O cálculo da expressão nos leva à seguinte fórmula:

$$G_{NS} = (N_1 + N_2) \left[1 - \frac{(N_1 + N_2)}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + 6N_1 N_2}} \right], \quad (4.61)$$

que concorda com a eq. (3.102) obtida através da teoria de circuitos de Nazarov.

d) A **potência do ruído de disparo NS** é dado por

$$P_{NS} = 4(g_{NS_1} - g_{NS_2}) = 2G_{NS} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2 \sinh 2x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \Big|_{x=i\pi/4} H(x). \quad (4.62)$$

Substituindo a eq. (4.61) em (4.62) e calculando as derivadas de $H(x)$ obtemos:

$$P_{NS} = 16 \frac{N_1^2 N_2^2 (N_1 + N_2)^2}{(N_1^2 + N_2^2 + 6N_1 N_2)^{5/2}}. \quad (4.63)$$

que concorda com o resultado de Vanević e Belzig na [57].

4.6.2 Ponto Quântico Conectados a Guias Simétricos por Barreiras Idênticas

Neste caso temos $T_1 = T_2 = T$ e $N_1 = N_2 = N$. A pseudocorrente em qualquer um dos conectores é dada por

$$K_j(x) = N \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2\alpha} = \frac{N}{2} [\tanh(x + \alpha) + \tanh(x - \alpha)], \quad (4.64)$$

onde utilizamos a seguinte parametrização $T = 1/\cosh^2 \alpha$. A lei de conservação de pseudocorrente para este problema fica então:

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y). \quad (4.65)$$

Substituindo a eq. (4.64) em (4.65), obtemos

$$\tanh(x - y + \alpha) + \tanh(x - y - \alpha) = \tanh(x + \alpha) + \tanh(x - \alpha). \quad (4.66)$$

Utilizando a eq. (4.48) e a eq. (4.49) em (4.66) obtemos:

$$(\eta\xi^2 - 2\xi + \eta)(\zeta^2\xi^2 + (1 - \zeta^2)\eta\xi - 1) = 0; \quad \zeta^2 \equiv \tanh^2 \alpha. \quad (4.67)$$

A raiz física sai do primeiro fator da eq. (4.67):

$$\eta\xi^2 - 2\xi + \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{\pm} = \coth x \pm \sinh^{-1} x. \quad (4.68)$$

Para decidirmos qual das duas raízes de (4.68), devemos usar a regra de composição de resistências em série

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{NT_1} + \frac{1}{NT_2} = \frac{2}{N\operatorname{sech}^2 \alpha} = \frac{2}{N(1 - \zeta^2)}. \quad (4.69)$$

Logo, a condutância normal é dada por:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{N}{2}(1 - \zeta^2). \quad (4.70)$$

Com o resultado acima encontramos a raiz física do nosso problema

$$G = H(0) \Rightarrow \xi = \xi_- = \coth x - \sinh^{-1} x. \quad (4.71)$$

Substituindo a raiz (4.71) na expressão da pseudocorrente obtemos:

$$K(x) = \frac{NT \sinh x (\cosh x - 1)}{\sinh^2 x - (1 - T)(\cosh x - 1)^2}. \quad (4.72)$$

Da expressão (4.31) temos que

$$J(x) \equiv K(x + i\pi/2) = N(1 - \zeta^2) \cosh x \frac{[(1 - \zeta^2) \sinh x + i(1 + \zeta^2)]}{4\zeta^2 + (1 - \zeta^2)^2 \cosh^2 x}. \quad (4.73)$$

Substituindo a eq. (4.73) em (4.34) obtemos a densidade

$$\nu(x) = \frac{2N}{\pi} \frac{T(2 - T) \cosh x}{4(1 - T) + T^2 \cosh^2 x}. \quad (4.74)$$

Finalmente, substituindo a eq. (4.74) em (4.30) obtemos a densidade autovalores de transmissão:

$$\rho(\tau) = \frac{N}{\pi \sqrt{\tau(1 - \tau)}} \frac{T(2 - T)}{T^2 + 4(1 - T)\tau}. \quad (4.75)$$

Relação com Observáveis

Apresentamos abaixo uma breve lista de expressões para observáveis de transporte comuns.

a) condutância normal

$$G = H(0) = \frac{N}{2}(1 - \zeta^2). \quad (4.76)$$

b) potência do ruído de disparo normal

$$P = H(0) + \left(\frac{1}{\sinh 2x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} H(x) = \frac{N}{8}(1 - \zeta^4). \quad (4.77)$$

c) condutância NS

$$G_{NS} = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=i\pi/4} = (2 + \sqrt{2})N \frac{(1 - \zeta^2)(3 + 2\sqrt{2} - \zeta^2)}{(3 + 2\sqrt{2} + \zeta^2)^2}. \quad (4.78)$$

d) potência do ruído de disparo NS

$$P_{NS} = 2G_{NS} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2 \sinh 2x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \Big|_{x=i\pi/4} H(x),$$

$$P_{NS} = \frac{N(1 - \zeta^4)}{2\sqrt{2}} \frac{[(17 + 12\sqrt{2} - \zeta^2)^2 - (8 + 6\sqrt{2})^2 \zeta^2]}{(3 + 2\sqrt{2} + \zeta^2)^4}. \quad (4.79)$$

4.7 Teoria de Circuitos Escalar para Barreiras de Transparência Arbitrária

Nesta seção aplicaremos a teoria de circuitos escalar para uma cavidade balística caótica acoplada a guias por barreiras de transparência arbitrária. Esta seção será dividida em duas partes: na primeira estudaremos o caso normal, onde mostraremos a completa equivalência desta teoria com a que foi apresentada no capítulo 3 e na última parte analisaremos o sistema NS, onde utilizaremos a teoria de circuitos escalar para calcular a condutância G_{NS} . Os resultados serão analisados através da interpretação microscópica dos efeitos de proximidade.

4.7.1 Cavidade Acoplada a Guias por Barreiras de Transparência Arbitrária: Caso normal

Utilizando a parametrização $T_i = 1/\cosh^2 \alpha_i$ para a transparência das barreiras, onde $i \in \{1, 2\}$, as pseudocorrentes nos guias são dadas por:

$$\begin{cases} K_1(x) = \frac{N_1}{2} [\tanh(x + \alpha_1) + \tanh(x - \alpha_1)], \\ K_2(x) = \frac{N_2}{2} [\tanh(x + \alpha_2) + \tanh(x - \alpha_2)]. \end{cases} \quad (4.80)$$

Da lei de conservação da pseudocorrente, temos:

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y), \quad (4.81)$$

o que resulta em

$$\tanh(x - y + \alpha_1) + \tanh(x - y - \alpha_1) = \frac{N_2}{N_1} [\tanh(y + \alpha_2) + \tanh(y - \alpha_2)]. \quad (4.82)$$

Utilizando a identidade (4.48) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tanh(x + \alpha_1) - \tanh y}{1 - \tanh(x + \alpha_1) \tanh y} + \frac{\tanh(x - \alpha_1) - \tanh y}{1 - \tanh(x - \alpha_1) \tanh y} = \\ \frac{N_2}{N_1} \left[\frac{\tanh y + \tanh \alpha_2}{1 + \tanh y \tanh \alpha_2} + \frac{\tanh y - \tanh \alpha_2}{1 - \tanh y \tanh \alpha_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Introduzindo as novas variáveis

$$\begin{cases} \xi = \tanh y; & \eta = \tanh x, \\ \zeta_1 = \tanh \alpha_1; & \zeta_2 = \tanh \alpha_2, \\ a = N_2/N_1, \end{cases} \quad (4.84)$$

vemos que

$$\tanh(x + \alpha_1) = \frac{\eta + \zeta_1}{1 + \eta \zeta_1}; \quad \tanh(x - \alpha_1) = \frac{\eta - \zeta_1}{1 - \eta \zeta_1}. \quad (4.85)$$

Substituindo a eq. (4.85) em (4.83), obtemos a seguinte equação quártica:

$$\begin{aligned} T_1(1 - T_2)\eta\xi^4 + \{[aT_2 + T_1(1 - T_2)]\eta^2 + T_2(1 - T_1)aT_1(1 - T_2)\}\xi^3 - \\ - T_1T_2(1 + 2a)\eta\xi^2 + \{[T_1 + aT_2(1 - T_1)]\eta^2 + T_1 + aT_2\}\xi - T_1\eta = 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

A pseudocorrente do sistema em termos das novas variáveis é dada por:

$$K(x) = N_2 \frac{T_2 \xi}{1 + (T_2 - 1)\xi^2}. \quad (4.87)$$

A equação acima para a pseudocorrente $K(x)$ e a equação quártica para ξ , eq. (4.86), formam o conjunto de equações da teoria de circuitos escalar que devemos resolver. Formalmente elas correspondem à equação do ponto de sela do modelo- σ não-linear supersimétrico. A simplicidade desse conjunto de equações deve ser contrastada com os conjuntos de equações acopladas obtidas no capítulo anterior através da teoria de circuitos de Nazarov (ver conjunto de equações (3.58) e (3.100)).

Para $x \ll 1$ obtemos a seguinte expressão para $K(x)$:

$$\begin{aligned}
K(x) = & \frac{N_1 N_2 T_1 T_2}{N_1 T_1 + N_2 T_2} x - \frac{1}{3} N_1 N_2 T_1 T_2 \left[-2(N_1^3 T_1^3 + N_2^3 T_2^3) + \right. \\
& \left. + 3T_1 T_2 (T_1^2 N_1^3 + T_2^2 N_2^3) \right] / (N_1 T_1 + N_2 T_2)^4 x^3 + \mathcal{O}(x^5).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

A expansão (4.88) foi comparada com as expansões obtidas via teoria de circuito de Nazarov, eqs. (3.59) e (3.101), onde observamos uma completa concordância entre as expansões até ordem x^{18} . Podemos portanto concluir que existe uma forte evidência para uma completa equivalência entre as duas teorias de circuitos apresentadas nesta dissertação. A teoria de circuitos escalar tem a vantagem técnica de apresentar uma estrutura escalar nas equações de circuito, enquanto a de Nazarov possui uma estrutura matricial (ou vetorial) irredutível.

Para a função $H(x)$ temos que

$$H(x) = \frac{K(x)}{\sinh x \cosh x} = \frac{N_2 T_2 \xi}{\sinh x \cosh x (1 + (T_2 - 1)\xi^2)}. \tag{4.89}$$

Inserindo a eq. (4.88) em (4.89) obtemos a seguinte expressão para a condutância

$$G = H(0) = N_1 \frac{ab}{a+b} T, \tag{4.90}$$

onde utilizamos a seguinte parametrização para as barreiras: $T_1 = bT$ e $T_2 = T$. A potencia do ruído de disparo é dada pela expressão abaixo:

$$P = G + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} H(x) \right) \Big|_{x=0} = N_1 \frac{abT[(a+b)(a^2+b^2) - b(a^3+b^2)T]}{(a+b)^4}. \tag{4.91}$$

Para o cálculo da densidade de autovalores de transmissão é conveniente trabalhar diretamente com a lei de conservação de corrente espectral:

$$I(\phi) = I_1(\phi - \theta) = I_2(\theta). \tag{4.92}$$

As correntes nos guias são dadas por

$$\begin{cases} I_1(\theta) = \frac{2NT_1 \tan \theta/2}{1 + (1 - T_1) \tan^2 \theta/2}, \\ I_2(\theta) = \frac{2NT_2 \tan \theta/2}{1 + (1 - T_2) \tan^2 \theta/2}. \end{cases} \tag{4.93}$$

A relação entre a corrente espectral e a função $J(x)$ é dada pela seguinte expressão:

$$J(x) = \frac{i}{2} I(\phi) \Big|_{\phi=\pi-2ix}. \quad (4.94)$$

De $J(x)$ obtemos $\nu(x)$ através da relação

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \{ J(x - i0^+) \} \quad (4.95)$$

Para $\phi = \pi - 2ix$ e $\theta = \pi - 2iy$ temos,

$$\tan \phi/2 = -i \coth x; \quad \tan \theta/2 = -i \coth y. \quad (4.96)$$

Substituindo a eq. (4.96) em (4.92) obtemos a seguinte equação quártica:

$$\begin{aligned} T_1(1 - T_2)\eta\beta^4 + \{[2T_2T_1 - T_2 - T_1]\eta^2 + T_2 - T_1 + T_1T_2\}\beta^3 - \\ - 3T_1T_2\eta\beta^2 + \{(T_1 + T_2)\eta^2 + T_1 - T_2 + T_2T_1\}\beta - T_1\eta = 0, \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde $\eta = \tanh x$. A expressão para $J(x)$ é

$$J(x) = \frac{NT_2\beta}{1 - (1 - T_2)\beta^2}. \quad (4.98)$$

Para $T_1, T_2 \ll 1$ a equação (4.97) pode ser fatorada da seguinte forma:

$$(\beta^2 - 1)[\eta T_1\beta^2 + (T_2 - T_1 - (T_2 + T_1)\eta^2)\beta + \eta T_1] = 0. \quad (4.99)$$

Do segundo fator da equação acima, obtemos a raiz desejada. Para $T_1 = T_2 = T$ temos

$$\beta = \eta + i\sqrt{1 - \eta^2} = \tanh x + i \cosh^{-1} x \quad (4.100)$$

Substituindo (4.100) na expressão (4.98) e tomando a parte imaginária deste resultado obtemos:

$$\nu(x) = \frac{NT}{\pi} \cosh x \quad (4.101)$$

Para $T_1 \neq T_2$, obtemos:

$$\nu(x) = \frac{2NT_1T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \frac{\sinh x}{\sqrt{\tanh^2 x - \tanh^2 x_0}}; \quad \tanh^2 x_0 \equiv \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \right)^2. \quad (4.102)$$

Substituindo a expressão acima na eq. (4.11) obtemos a densidade de autovalores de transmissão

$$\rho(\tau) = \frac{2NT_1T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau_0 - \tau}}; \quad \tau_0 = \frac{4T_1T_2}{(T_1 + T_2)^2}. \quad (4.103)$$

4.7.2 Cavity Acoplada a Guias por Barreiras de Transparência Arbitrária: Caso NS

Nosso objetivo nesta seção é calcular via teoria de circuitos escalar a condutância NS de uma cavidade balística caótica conectada a guias por barreiras de transparência arbitrária. Para esse cálculo é conveniente trabalhar com a corrente espectral e sua respectiva lei de conservação. A expressão (4.20) da condutância em função da função $F(\phi)$ é dada por

$$G_{NS} = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi/2}.$$

Implementando a seguinte mudança de variável $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$, a expressão para G_{NS} fica,

$$G_{NS} = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{\phi=0}. \quad (4.104)$$

A lei de conservação de corrente espectral neste caso fica:

$$\begin{aligned} I(\phi + \pi/2) &= \sin(\phi + \pi/2 - \theta)F_1(\phi + \pi/2 - \theta) = \\ &= \sin\theta F_2(\theta) = \sin(\phi + \pi/2)F(\phi + \pi/2 - \theta). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Da eq. (4.105), temos:

$$\frac{N_1T_1 \sin(\phi + \pi/2 - \theta)}{1 - T_1 \sin^2(\phi/2 + \pi/4 - \theta/2)} = \frac{N_2T_2 \sin\theta}{1 - T_2 \sin^2\theta/2}. \quad (4.106)$$

Após algumas manipulações trigonométricas em (4.106), obtemos:

$$\frac{2aT_2 \tan\theta/2}{1 + (1 - T_2) \tan^2\theta/2} = \frac{2T_1 \tan(\phi/2 + \pi/4 - \theta/2)}{1 + (1 - T_1) \tan^2(\phi/2 + \pi/4 - \theta/2)} \quad (4.107)$$

Definindo novas variáveis no problema:

$$\xi = \tan \theta/2; \quad \eta' = \tan (\phi/2 + \pi/4), \quad (4.108)$$

podemos escrever

$$\tan (\phi/2 + \pi/4 - \theta/2) = \frac{\eta' - \xi}{1 + \eta'\xi}. \quad (4.109)$$

Substituindo a eq. (4.108) e a eq. (4.109) na eq. (4.107), obtemos:

$$\frac{aT_2\xi}{1 + (1 - T_2)\xi^2} = \frac{T_1(\eta' - \xi)(1 + \xi\eta')}{(1 + \eta'\xi)^2 + (1 - T_1)(\eta' - \xi)^2}. \quad (4.110)$$

Da eq. (4.110), obtemos a seguinte equação algébrica de quarto grau:

$$\begin{aligned} T_1(1 - T_2)\eta'\xi^4 + [(aT_2 - T_1(1 - T_2))\eta'^2 + aT_2(1 - T_1) + T_1(1 - T_2)]\xi^3 + \\ + (1 + 2a)T_1T_2\eta'\xi^2 + [T_1 + aT_2 + (aT_2(1 - T_1) - T_1)\eta'^2]\xi - T_1\eta' = 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Casos Particulares da Eq. (4.111)

- Para $T_1 = T_2 = T$ temos neste caso que a equação quártica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \zeta^2\eta'\xi^4 + [(a - \zeta^2)\eta'^2 + (1 + a)\zeta^2]\xi^3 + (1 + 2a)(1 - \zeta^2)\eta'\xi^2 + \\ + [(1 + a) + (a\zeta^2 - 1)\eta'^2]\xi - \eta' = 0. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Para guias simétricos ($a = 1$), temos a forma fatorada

$$-(\eta'\xi^2 + 2\xi - \eta')(-\zeta^2\xi^2 + (\zeta^2 - 1)\eta'\xi - 1) = 0. \quad (4.113)$$

- Para $T_1 = 1$ e $T_2 = T$ a eq. (4.111) neste caso pode ser fatorada da seguinte forma:

$$(\eta'\xi + 1)(\zeta^2\xi^3 + \eta'[a(1 - \zeta^2) - \zeta^2]\xi^2 + [a(1 - \zeta^2) + 1]\xi - \eta') = 0. \quad (4.114)$$

Vamos agora expandir a eq. (4.111) para $\phi \rightarrow 0$. As variáveis η' e ξ expandidas em séries de potência de ϕ ficam,

$$\begin{cases} \eta' = 1 + \phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{3}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^4), \\ \xi = A + B\phi + C\phi^2 + D\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^4). \end{cases} \quad (4.115)$$

Substituindo eq. (4.115) em eq. (4.111), obtemos as seguintes equações:

ordem 0: Para o termo independente de ϕ obtemos uma equação de quarto grau no coeficiente A da expansão (4.115):

$$A^4 + \frac{aT_2(2-T_1)}{T_1(1-T_2)}A^3 + \frac{(1+2a)T_2}{1-T_2}A^2 + \frac{aT_2(2-T_1)}{T_1(1-T_2)}A - \frac{1}{1-T_2} = 0. \quad (4.116)$$

Multiplicando por $T_1(1-T_2)$ obtemos uma forma válida também no caso $T_2 = 1$.

$$T_1(1-T_2)A^4 + aT_2(2-T_1)A^3 + (1+2a)T_2T_1A^2 + aT_2(2-T_1)A - T_1 = 0. \quad (4.117)$$

ordem 1: Para o termo linear em ϕ , obtemos uma equação linear para o coeficiente B da expansão (4.115) em termos de A . Isolando B obtemos:

$$B = -\frac{T_1A(-2 - aT_2 + ((2+a)T_2 - 2)A^2)}{4T_1(1-T_2)A^3 + 3aT_2(2-T_1)A^2 + 2T_1T_2(1+2a)A + aT_2(2-T_1)}. \quad (4.118)$$

Expandindo $F(\phi)$, eq. (4.105), para ϕ pequeno, obtemos:

$$F(\phi) = \frac{2N_2T_2}{1 + (1-T_2)A^2} \left[A + \frac{1 - (1-T_2)A^2}{1 + (1-T_2)A^2} B\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \right]. \quad (4.119)$$

Substituindo a eq. (4.119) na eq. (4.104) obtemos a seguinte expressão geral para a condutância G_{NS} :

$$G_{NS} = 2N_2T_2 \frac{1 - (1 - T_2)A^2}{(1 + (1 - T_2)A^2)^2} B, \quad (4.120)$$

que é o principal resultado desta seção.

No caso particular $T_1 = 1 = T_2$ obtemos da eq. (4.117)

$$A^2 + \frac{1+a}{a}A - \frac{1}{a} = 0, \quad (4.121)$$

as raízes desta equação são

$$A_{\pm} = \frac{-(1+a) \pm \sqrt{a^2 + 6a + 1}}{2a}. \quad (4.122)$$

Da eq. (4.118) obtemos

$$B = -\frac{(aA^2 - 1)}{2aA + a + 1}, \quad (4.123)$$

substituindo a eq. (4.123) em (4.120) obtemos

$$G_{NS} = N_2 \frac{(1+a)}{a} \left[1 - \frac{(1+a)}{\sqrt{a^2 + 6a + 1}} \right], \quad (4.124)$$

que concorda com a eq. (4.61).

Para o caso geral analisamos as raízes da equação quártica (4.116) através do método dos resolventes de Lagrange (ver apêndice), que permite escrevermos as raízes numa forma elegante em termos das raízes cúbicas de uma equação de terceiro grau auxiliar. Desta análise obtemos que a raiz física da eq. (4.116) é dada por (eq. (A.12) do apêndice):

$$A_1 = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}), \quad (4.125)$$

onde, t' , t'' e t''' são as raízes da seguinte equação cúbica auxiliar:

$$t^3 - (3m^2 - 8n)t^2 + (3m^4 - 16m^2n + 16n^2 + 16mp - 64q)t - (m^3 - 4mn + 8p)^2 = 0, \quad (4.126)$$

e m , n , p e q são os coeficientes da equação quártica (4.116),

$$\begin{cases} m = \frac{aT_2(2 - T_1)}{T_1(1 - T_2)} = p, \\ n = \frac{(1 + 2a)T_2}{1 - T_2}, \\ q = -\frac{1}{1 - T_2}. \end{cases}$$

Algumas curvas mostrando a dependência da condutância G_{NS} em função da transparência da segunda barreira T_2 , para T_1 fixo são mostradas na fig. (4.3). Estes gráficos foram obtidos analiticamente apartir da eq. (4.120). Mostramos também na fig. (4.4) a resistência ($R_{NS} = 1/G_{NS}$) em função de $1/T_2$ para $T_1 = 0.1$.

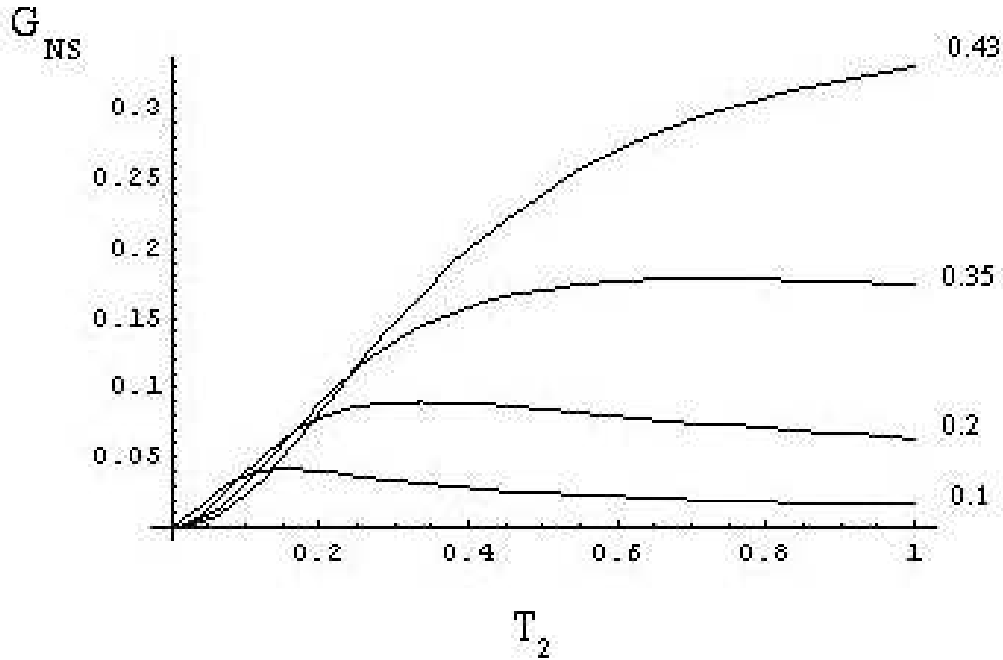


Figura 4.3: Condutância G_{NS} em função de T_2 para alguns valores fixos de T_1 .

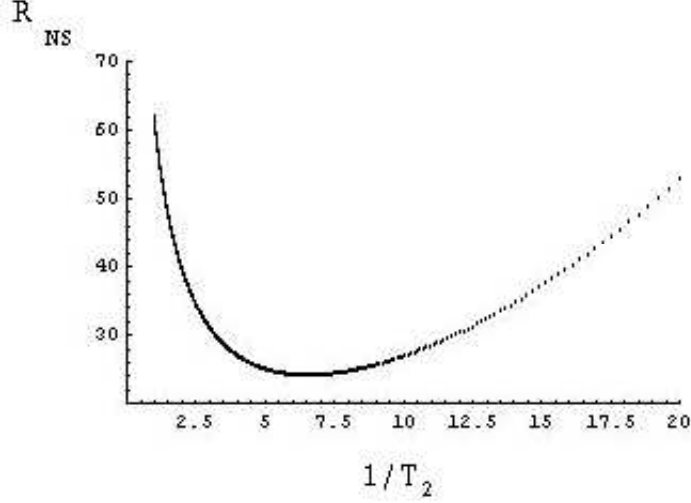


Figura 4.4: Mínimo de R_{NS} para $T_1 = 0.1$. Este mínimo sinaliza uma transição gradual entre dois regimes de transporte.

O mínimo de R_{NS} mostrado na fig. (4.4) sinaliza uma transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o regime de tunelamento com reflexão. Na transmissão sem reflexão uma das quase-partículas tunela a amostra de metal-normal sem sofrer reflexão. Então, um processo de transporte que envolve tipicamente duas partículas como em junções NS passam a ser um processo de apenas uma partícula.

Beenakker et. al. [60] observaram pela primeira vez este fenômeno em junções NS conectadas por uma barreira de tunelamento. Eles observaram que a dependência da resistência R_{NS} com a barreira era da ordem de $1/\Gamma$ e não $1/\Gamma^2$ como esperado num processo de transporte envolvendo duas partículas que é o caso de uma sistema híbrido NS. Através de uma teoria de escala Beenakker et. al. observaram que o aumento da desordem estava relacionado com abertura de canais de tunelamento de autovalores de transmissão próximos de 1. Esta abertura de canais de tunelamento induzida por desordem foi descoberta por Nazarov [36]. Estes canais abertos como Beenakker se refere em [24] são responsáveis pelo regime de tunelamento sem reflexão.

Em cavidades caóticas este regime de tunelamento sem reflexão está relacionado aos estados ressonantes com autovalores de transmissão próximos de 1 de longo tempo de vida dentro da cavidade. A formação de estados ressonantes de longo tempo de vida estão ligados ao fenômeno denominado de aprisionamento de

ressonâncias. Quando a intensidade do acoplamento da cavidade com o exterior aumenta, as ressonâncias dentro da cavidade começam a se sobrepor e começam a interagir fortemente no plano complexo. Para um valor crítico do acoplamento há uma reorganização de todo o espectro da cavidade, dando origem a uma bifurcação no tempo de vida dos estados ressonantes. Alguns desses estados tornam-se instáveis com tempo de vida muito curto, já os estados restantes são estáveis e tem tempo de vida longo.

Outro mecanismo eficiente de transmissão se deve à formação de modos Fabry-Perot entre as barreiras conectadas à cavidade caótica. O aparecimento desses modos é sinalizado pelo aparecimento de uma singularidade do tipo inverso da raiz quadrada na densidade de autovalores de transmissão. Note que a formação de modos de Fabry-Perot entre as barreiras constitui um fenômeno puramente ondulatório não sendo necessário usar a natureza quântica do elétron. Para uma breve introdução a este assunto veja ref. [54] e para uma discussão mais avançada veja ref. [67]. Ambos os fenômenos, aprisionamento de ressonâncias e formação de modos de Fabry-Perot, devem contribuir para o aparecimento do regime de tunelamento sem reflexão na junção NS.

Em 1994 Melsen e Beenakker [68] estudaram este mesmo problema pela primeira vez. O objetivo deste trabalho era descrever a transição gradual entre o regime balístico e o difusivo entre barreiras de transparência arbitrária através de uma fórmula fenomenológica do tipo Fabry-Perot para os autovalores de transmissão, dada por:

$$\tau_n = (a + b \cos \phi_n)^{-1}, \quad (4.127)$$

onde

$$a = 1 + \frac{2 - T_1 - T_2}{T_1 T_2}, \quad (4.128)$$

$$b = 2 \frac{(1 - T_1)^{-1/2} (1 - T_2)^{-1/2}}{T_1 T_2}, \quad (4.129)$$

e ϕ_n é a fase acumulada na viagem de ida e volta entre as barreiras. A expressão para a condutância G_{NS} obtida na ref. [68] é

$$G_{NS} = 2N \frac{\cosh 2\alpha_1 \cosh 2\alpha_2}{(\cosh^2 2\alpha_1 + \cosh^2 2\alpha_2 - 1)^{3/2}}, \quad (4.130)$$

onde $T_i = 1/\cosh^2 \alpha_i$. Esta fórmula deve ser contrastada com a equação (4.120) obtida através da teoria de circuitos escalar. A eq. (4.130) permitiu a Melsen e

Beenakker a observação do mínimo da resistência R_{NS} similar, ao obtido nesta tese através da teoria de circuitos escalar. Para a densidade de autovalores de transmissão a expressão obtida por eles foi a seguinte

$$\rho(\tau) = \frac{N}{\pi\tau} (b^2\tau^2 - (a\tau - 1)^2)^{-1}. \quad (4.131)$$

Esta equação foi utilizada em [68] como condição inicial para obter a densidade de autovalores de transmissão quando é introduzida desordem no sistema através da inserção de um fio metálico difusivo. Para obter tal densidade eles utilizam a equação de escala DMPK que descreve a evolução da densidade de autovalores de transmissão quando um pedaço infinitesimal de material desordenado é adicionado ao sistema. A análise de Melsen e Beenakker só tem sentido quando $T_1, T_2 \ll 1$, que é o regime de validade da eq. (4.127) a despeito do argumento apresentado pelos autores em favor da validade geral de (4.131). Portanto a densidade de autovalores de transmissão, eq. (4.131), utilizada para o estudo da transição gradual é incorreta para outros valores de transparência das barreiras. Utilizando a densidade de autovalores de transmissão correta, obtida através da corrente espectral deduzida por Macêdo em [39], Apolinário [61], via análise numérica da teoria de circuitos escalar fez uma análise completa da transição gradual ponto-fio para barreiras de transparência arbitrária.

Mostramos na figura abaixo as curvas de mínimo de R_{NS} no plano $T_1 \times T_2$ que indicam a transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o de tunelamento com reflexão, obtido através da teoria de circuitos escalar discutida neste capítulo. Os resultados concordam com os obtidos numericamente por Apolinário para fios de comprimento nulo.

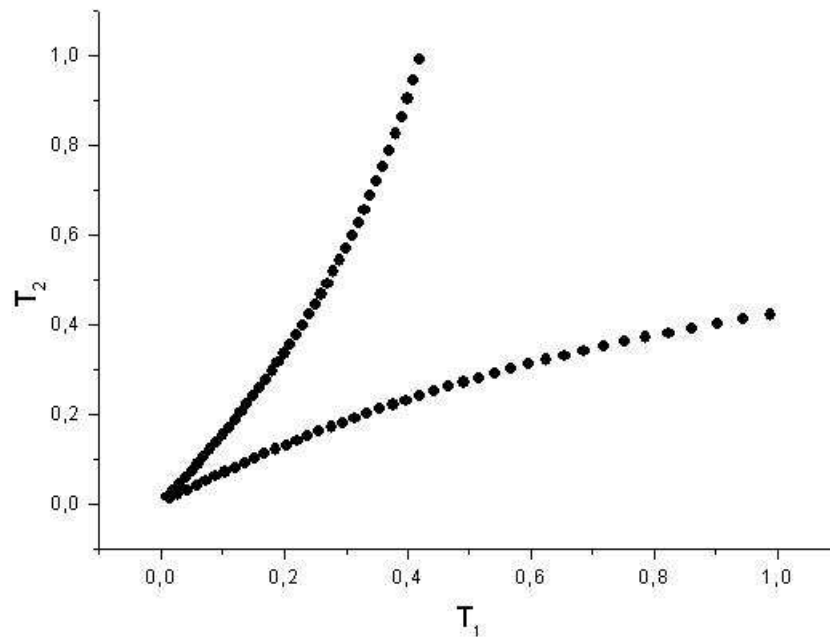


Figura 4.5: A curva acima representam os mínimos de R_{NS} quando variamos a intensidade das barreiras.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese estudamos propriedades de transporte em pontos quânticos conectados a guias por barreiras de transparência arbitrária. Estudamos tanto o caso em que os guias são conectados a reservatórios de partículas no estado normal quanto os sistemas híbridos metal-normal-supercondutor quando substituímos um dos reservatórios no estado normal por um supercondutor.

Começamos no capítulo 1 com uma breve introdução sobre física mesoscópica, discutindo regimes e propriedades de sistemas mesoscópicos normais e os novos paradigmas relacionados com os efeitos de proximidade resultantes da reflexão de Andreev na interface normal-supercondutor. Introduzimos neste capítulo também o formalismo de Landauer-Büttiker para sistemas NS e sua conexão com o formalismo de matriz- S para sistemas normais. Esta conexão levou Beenakker [24] a obter a condutância G_{NS} e posteriormente a potência do ruído de disparo de um sistema híbrido de dois terminais em termos dos autovalores de reflexão de Andreev. Estes autovalores de reflexão por sua vez, no limite onde as energias estão bem a baixo do potencial de emparelhamento do supercondutor, podem ser expressos de maneira simples em termos dos autovalores de transmissão do lado normal. Discutimos também sobre as bases das teorias quase-clássicas que descrevem a física mesoscópica, que diferentemente da formulação de matriz- S possuem um caráter microscópico em sua formulação. Concluimos este capítulo introdutório com um breve comentário sobre formulações baseadas no modelo- σ não linear supersimétrico.

No capítulo 2 tratamos de um tópico crucial para o desenvolvimento desta dissertação que é a estatística de contagem de carga para sistemas mesoscópicos. Começamos este capítulo utilizando argumentos físicos intuitivos e análise combinatória elementar para obter a função geratriz de cumulantes de alguns sistemas

simples. Utilizando o modelo de galvanômetro de spin-1/2 proposto por Levitov, Lee e Lesovik [44] implementamos o formalismo das funções de Green de Keldysh através de um modelo extremamente simples para obter a função geratriz de cumulantes de uma cavidade caótica acoplada a guias em contato com reservatórios de partículas. Obtivemos através deste método a fórmula de Levitov-Lesovik [44].

Começamos no capítulo 3 a utilizar o formalismo microscópico desenvolvido no capítulo 2 para estudar uma abordagem semi-clássica conhecida como teoria de circuitos matricial [36]. Através de uma extensão do método desenvolvido por Bulashenko [53] para o estudo de uma cavidade caótica acoplada a guias assimétricos por barreiras de transparência arbitrária, obtivemos as equações da teoria de circuitos matricial. Vale salientar que a utilização da teoria de Nazarov para o estudo de pontos quânticos caóticos e cavidades balísticas não foi ainda justificada através de uma dedução microscópica rigorosa, sendo portanto neste regime uma teoria puramente fenomenológica. Um método vetorial também foi apresentado como alternativa ao método matricial gerando um conjunto de equações equivalentes. Toda esta discussão preliminar sobre a teoria de circuitos matricial foi feita com o espírito de preparação para o estudo de uma abordagem semi-clássica rigorosa complementar desenvolvida no capítulo 4.

A teoria de circuitos escalar [39] discutida no capítulo 4 tem como ponto de partida o modelo- σ não linear supersimétrico. Esta abordagem possibilita o estudo de sistemas quântico caóticos com rigor matemático muito superior ao formalismo de Nazarov pois fundamenta-se na teoria de matrizes aleatórias e no modelo de Mahaux-Weidenmüller. Mostramos a equivalência entre a teoria fenomenológica do capítulo 3 e a teoria de circuitos escalar [39] para cavidades caóticas acopladas a guias por barreiras de transparência arbitrária. Posteriormente, utilizamos a teoria de circuitos escalar em sistemas híbridos metal-normal-supercondutor. Calculamos a condutância G_{NS} de uma cavidade caótica conectada a dois reservatórios de quase-partículas. Através do mínimo na resistência NS observamos a transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o regime de tunelamento com reflexão, confirmando os resultados numéricos obtidos por Apolinário [61]. Este fenômeno de tunelamento sem reflexão foi observado primeiramente por Beenakker et. al. [60] no estudo de uma junção metal-normal-isolante-supercondutor. Concluímos que certos mecanismos presentes em processos de transporte coerente ressonante estão relacionados ao fenômeno de tunelamento sem reflexão em cavidades caóticas. Apresentamos um diagrama no plano $T_1 \times T_2$ que representa esta transição gradual entre os dois regimes de tunelamento.

Uma perspectiva imediata de nossos trabalhos seria o cálculo dos próximos cumulantes da estatística de contagem num sistema NS, como por exemplo a potência

do ruído de disparo. A extensão destes resultados para temperatura e frequências finitas também é desejável. Pretendemos também estudar efeitos de interação e descoerência em sistemas NS embebidos em um ambiente eletromagnético através da teoria de circuitos escalar.

Apêndice A

O Método dos Resolventes de Lagrange

Na seção (4.7.2) deparamo-nos com uma equação algébrica de quarto grau, eq. (4.116). Neste apêndice mostraremos um método desenvolvido por Lagrange em 1770 para obter as raízes de equações algébricas de quarto grau. O método de Lagrange fundamenta-se na união da teoria dos polinômios simétricos, teoria da permutação e da teoria dos resolventes. Para uma discussão histórica sobre o método de Lagrange ver ref. [69].

Considere a seguinte equação algébrica de quarto grau

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0, \quad (\text{A.1})$$

cujas raízes são

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0, \quad (\text{A.2})$$

das equações (A.1) e (A.2) temos

$$\begin{cases} -m = a + b + c + d, \\ n = ab + ac + bc + bd + cd, \\ -p = abc + abd + acd + bcd, \\ q = abcd, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Considere o seguinte resolvente

$$S_1 = a + b - c - d \quad \Rightarrow \quad S_1 = a + \epsilon c + \epsilon^2 b + \epsilon^3 d, \quad (\text{A.4})$$

onde $\epsilon = -1$ é uma das raízes da unidade ($\epsilon^4 = 1$). Permutando as raízes a, b, c e d entre si obtemos seis resolventes distintos

$$\begin{cases} S_1 = a + b - c - d = \alpha, & S_4 = -a - b + c + d = -\alpha, \\ S_2 = a + c - b - d = \beta, & S_5 = -a - c + b + d = -\beta, \\ S_3 = a + d - b - c = \gamma, & S_6 = -a - d + b + c = -\gamma. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Podemos construir uma equação de sexto grau auxiliar, cujas raízes são os resolventes exibidos em (A.5)

$$(y - \alpha)(y + \alpha)(y - \beta)(y + \beta)(y - \gamma)(y + \gamma) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Expandindo e agrupando obtemos

$$y^6 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)y^4 + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)y^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0. \quad (\text{A.7})$$

Fazendo a substituição, $y^2 = t$, ficamos com a seguinte equação de terceiro grau

$$t^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t^2 + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)t - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Pode-se obter uma relação entre os resolventes e os parâmetros m, n, p, q da eq. (A.1)

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3m^2 - 8n, \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = 3m^4 - 16nm^2 + 16n^2 + 16mp - 64q, \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (m^3 - 4mn + 8p)^2. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a eq. (A.9) em (A.8) obtemos

$$t^3 - (3m^2 - 8n)t^2 + (3m^4 - 16nm^2 + 16n^2 + 16mp - 64q)t - (m^3 - 4mn + 8p)^2 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Escrevendo os resolventes em termos das raízes da eq. (A.10) t', t'' e t''' obtemos

$$\begin{cases} \alpha = a + b - c - d = \sqrt{t'}, \\ \beta = a + c - b - d = \sqrt{t''}, \\ \gamma = a + d - b - c = \sqrt{t'''} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Com a ajuda das equações (A.3) e (A.11) obtemos as raízes da equação quártica (A.1) em função das raízes da equação cúbica auxiliar (A.10)

$$a = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}), \quad (\text{A.12})$$

$$b = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}), \quad (\text{A.13})$$

$$c = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}), \quad (\text{A.14})$$

$$d = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}). \quad (\text{A.15})$$

Portanto, a solução da equação de quarto grau (A.1) é reduzida à solução de uma equação de terceiro grau. Vamos agora utilizar o método de Lagrange para resolver a equação (A.10).

Considere a equação cúbica abaixo

$$x^3 + m'x^2 + n'x + p' = 0, \quad (\text{A.16})$$

cujas raízes são a' , b' e c'

$$(x - a')(x - b')(x - c') = 0, \quad (\text{A.17})$$

Das equações (A.16) e (A.17) temos

$$\begin{cases} m' = -(a' + b' + c'), \\ n' = a'b' + a'c' + b'c', \\ p' = -a'b'c'. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Considere $\epsilon \equiv \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ uma das raízes cúbicas da unidade. Defina os seguintes resolventes

$$\begin{cases} \alpha' = a' + \epsilon b' + \epsilon^2 c', \\ \beta' = a' + \epsilon c' + \epsilon^2 b'. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

A equação de sexto grau auxiliar da equação cúbica (A.16) é dada por

$$(y - \alpha')(y - \epsilon \alpha')(y - \epsilon^2 \alpha')(y - \beta')(y - \epsilon \beta')(y - \epsilon^2 \beta') = 0. \quad (\text{A.20})$$

Expandindo a equação de sexto grau (A.20) obtemos

$$(y^3 - \alpha'^3)(y^3 - \beta'^3) = y^6 - (\alpha'^3 + \beta'^3)y^3 + \alpha'^3\beta'^3. \quad (\text{A.21})$$

Definindo $z \equiv y^3$ a equação (A.21) torna-se uma equação quadrática

$$z^2 - (\alpha'^3 + \beta'^3)z + \alpha'^3\beta'^3 = 0. \quad (\text{A.22})$$

Escrevendo os resolventes em função dos parâmetros m' , n' e p' da equação cúbica (A.16) obtemos

$$\begin{cases} \alpha'^3 + \beta'^3 = -2m'^3 + 9m'n' - 27p', \\ \alpha'^3\beta'^3 = (m'^2 - 3n')^3. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo a eq. (A.23) em (A.22) obtemos

$$z^2 - (-2m'^3 + 9m'n' - 27p')z + (m'^2 - 3n')^3 = 0. \quad (\text{A.24})$$

Temos então

$$\begin{cases} \alpha = a' + \epsilon b' + \epsilon^2 c' = (z_1)^{1/3}, \\ \beta = a' + \epsilon c' + \epsilon^2 b' = (z_2)^{1/3}, \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

onde z_1 e z_2 são as raízes da equação quadrática (A.24).

$$z_{1,2} = \frac{-(-2m'^3 + 9m'n' - 27p') \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\sqrt{\Delta} = 3\sqrt{12m'^3p' - 3m'^2n'^2 - 54m'n'p' + 81p'^2 + 12n'^3}. \quad (\text{A.27})$$

Resolvendo o conjunto de equações (A.25) e usando a identidade $-m' = a' + b' + c'$ para as raízes da equação cúbica, (A.16), obtemos

$$a' = \frac{1}{3}(-m' + (z_1)^{1/3} + (z_2)^{1/3}), \quad (\text{A.28})$$

$$b' = \frac{1}{3}(-m' + \epsilon^2(z_1)^{1/3} + \epsilon(z_2)^{1/3}), \quad (\text{A.29})$$

e

$$c' = \frac{1}{3}(-m' + \epsilon(z_1)^{1/3} + \epsilon^2(z_2)^{1/3}). \quad (\text{A.30})$$

Com a solução da equação de terceiro grau podemos escrever as raízes da equação de quarto grau numa forma fechada fazendo as seguintes identificações

$$t' = a', t'' = b', t''' = c', \quad (\text{A.31})$$

e

$$\begin{cases} m' = -(3m^2 - 8n), \\ n' = 3m^4 - 16nm^2 + 16n^2 + 16mp - 64q, \\ p' = -(m^3 - 4mn + 8p)^2. \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Finalmente podemos escrever as raízes da equação quártica (A.1) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \left[-m + \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}(-m' + (z_1)^{1/3} + (z_2)^{1/3}) \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad + \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}(-m' + \epsilon^2 (z_1)^{1/3} + \epsilon (z_2)^{1/3}) \right)^{1/2} + \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}(-m' + \epsilon (z_1)^{1/3} + \epsilon^2 (z_2)^{1/3}) \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Bibliografia

- [1] R. Landauer. Eletrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Phil. Mag.*, 21:863, (1970).
- [2] R. Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM J. Res. Develop*, 1:233, (1957).
- [3] A. D. Stone and A. Szafer. What is measured when you measure a resistance? Landauer formula revisited. *IBM J. Res. Develop*, 32(3):384, 1988.
- [4] G. Bergamnn. Weak localization in thin films: a time-of-light experiment with conduction electrons. *Phys. Rep.*, 107(1), 1984.
- [5] R. A. Webb S. Washburn. Aharonov-Bohm effect in normal metal quantum coherence and transport. *Adv. Phys.*, 35:375, 1986.
- [6] C. P. Umbach, S. Washburn, R. B. Laibowitz, and R. A. Webb. Magnetoresistance of small, quasi-one-dimensional, normal-metal rings and lines. *Phys. Rev. B*, 30:4048, 1984.
- [7] H. Bouchiat. Experimental signatures of quantum coherent transport. *Lectures at the Les Houches summer school*, LXI, 1994.
- [8] S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, first edition, 1997.
- [9] B. D. Simons and A. Altland. Theories of mesoscopic physics. In *Theoretical Physics at the End of the XXth Century*. Springer-Verlag, 2001. proceedings of the CRM Summer school.
- [10] P. A. Lee and A. D. Stone. Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field. *Phys. Rev. B*, 35:1039, 1987.

- [11] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenaker, J. G. Williamson, P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon. Quantized conductance of points contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 60:848, 1988.
- [12] D. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones. One-dimensional transport and quantisation of the ballistic resistance. *J. Phys. C*, 21:L209, 1988.
- [13] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher. New method for scaling theory of localization. *Phys. Rev. B*, 22:3519, 1980.
- [14] D. S. Fisher and P. A. Lee. Relation between conductivity and transmission matrix. *Phys. Rev. B*, 23:6851, 1981.
- [15] P. A. Lee and D. S. Fisher. Anderson localization in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 47:882, 1981.
- [16] H. L. Engquist and P. W. Anderson. Definition and measurement of the electrical and thermal resistance. *Phys. Rev. B*, 24:1151, 1981.
- [17] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas. Generalized many channel conductance formula with application to small rings. *Phys. Rev. B*, 31:6207, 1985.
- [18] Yu. V. Sharvin A. G. Aronov. Magnetic flux effects in disordered conductors. *Rev. Mod. Phys.*, 59:755, 1987.
- [19] M. Büttiker. Four-Terminal phase coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1761, 1986.
- [20] M. Tinkham. *Intoduction to Superconductivity*. Dover, New York, 2004.
- [21] A. L. Fetter and J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particles Systems*. Dover, 1971.
- [22] G. D. Mahan. *Many Particle Physics*. Plenum Press, New York and London, 2nd edition, 1990.
- [23] A. F. Andreev. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 46:1823, 1964.

- [24] C. W. J. Beenakker. Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunction. *Lectures at the Les Houches summer school*, LXI, 1994. também disponível em cond-mat/9406083.
- [25] T. Kemen, T. Bauch, W. Baer, K. Hecker, A. Marx, and R. Gross. Magnetoconductance fluctuations and re-entrance effect in normal-metal-superconducting nanostructures. *J. Low Temp. Phys.*, 118:679, 2000.
- [26] K. Hecker, H. Hegger, A. Altland, and K. Fiegle. Conductance fluctuations in mesoscopic normal-metal-superconductor samples. *Phys. Rev. Lett.*, 79(8):1547, 1997.
- [27] C. J. Lambert and R. Raimondi. cond-mat/9708056.
- [28] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov. *A New Method in the Theory of Superconductivity*. Consultants Bureau, New York, 1959.
- [29] P. G. de Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Perseus Books, 1999.
- [30] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Superconductivity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [31] A. Altland, B. D. Simons, and D. Taras-Semchuk. Field theory of mesoscopic fluctuations in superconductor/normal-metal systems. *cond-mat/9807371*, 2006.
- [32] M. J. Rufino. Pontos quânticos de classe d com estrutura híbrida metal-normal-supercondutor. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Março 2004.
- [33] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker. Doubled shot noise in disordered normal-metal-superconductor junctions. *Phys. Rev. B*, 49:16070, 1994.
- [34] G. Eilenberger. *Z. Phys. B*, 214:195, 1968.
- [35] K. Usadel. *Phys. Rev. Lett.*, 25:507, 1970.
- [36] Yu. V. Nazarov. Limits of universality in disordered conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 73:134, 1994.
- [37] Yu. V. Nazarov. *cond-mat/9410011*, 1994.

-
- [38] D. Taras-Semchuk and A. Altland. Quantum interference and the formation of the proximity effect in chaotic normal-metal/superconducting structures. *cond-mat/0010413*, 2001.
- [39] A. M. S. Macêdo. Scaling theory of phase-coherent metallic conductors. *Phys. Rev. B*, 66:033306, 2002.
- [40] A. Einstein. *Phys. Zeitschr.*, 10:185, 1909.
- [41] C. W. J. Beenakker and C. Schönenberger. Quantum shot noise. *Physics Today*, page p.37, 2003.
- [42] R. J. Glauber. *Phys. Rev. Lett.*, 10:84, 1963.
- [43] M. Kindermann. *Electron counting statistic in nanostructures*. PhD thesis, Universiteit Leiden, Setembro 2003. Disponível na Web em <http://www.ilorentz.org/beenakker/>.
- [44] L. S. Levitov, H. Lee, and G. B. Lesovik. Electron counting statistic and coherent state of electric current. *J. Math. Phys.*, 37(10):4845, 1996.
- [45] L. S. Levitov and G. B. Lesovik. *JEPT Lett.*, 55:555, 1992.
- [46] Yu. V. Nazarov. *Ann. Phys.*, 8:SI-193, 1999.
- [47] W. Belzig and Yu. V. Nazarov. *Phys. Rev. Lett.*, 87:67006, 2001.
- [48] J. Rammer and H. Smith. *Rev. Mod. Phys.*, 58:206801, 1986.
- [49] A. M. S. Macêdo. Transport theory of interacting mesoscopic systems: A memory-function approach to charge-counting statistics. *Phys. Rev. B*, 69:155309, 2004.
- [50] B. A. Muzykantskii and Khmelnitskii. Quantum shot noise in a normal-metal-superconductor point contact. *Phys. Rev. B*, 50(6):3982, 1994.
- [51] L. S. Levitov and G. B. Lesovik. *JEPT Lett.*, 58:230, 1993.
- [52] V. A. Khlus. *JEPT*, 66:1243, 1987.
- [53] O. M. Bulashenko. Full counting statistics of a chaotic cavity with asymmetric leads. *cond-mat/0403388*, 2004.
-

- [54] H. S. Borba. Teoria de circuitos para a estatística de contagem de carga. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Agosto 2005.
- [55] Yu. V. Nazarov. Circuit theory of Andreev conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1420, 1994.
- [56] W. Belzig. Full counting statistic of superconductor-normal-metal heterostructures. *cond-mat/0210125*, 2002.
- [57] M. Vanević and W. Belzig. Full counting statistic of Andreev scattering in an asymmetric chaotic cavity. *Phys. Rev. B*, 72:134522, 2005. Também disponível em *cond-mat/0412320*.
- [58] A. L. R. Barbosa and A. M. S. Macêdo. Diagrammatic analysis of unitary group for double-barrier ballistic cavities: Equivalence with circuit theory. *Phys. Rev. B*, 71:235307, 2005.
- [59] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker. Diagrammatic method of integration over unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. *J. Math. Phys.*, 37:4904, 1996.
- [60] C. W. J. Beenakker, B. Rejai, and J. A. Melsen. Scaling theory of conduction through a normal-superconductor microbridge. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2470, 1994.
- [61] S. W. S. Apolinário. Teoria quântica de circuitos para a transição balístico-difusivo. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Março 2004.
- [62] C. W. J. Beenakker. Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunctions. *Phys. Rev. B*, 46:12841, 1992.
- [63] P. Samuelson, W. Belzig, and Yu. V. Nazarov. Andreev reflection eigenvalue density in mesoscopic conductors. *cond-mat/0312133*, 2003.
- [64] M. Büttiker. Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2901, 1990.
- [65] C. J. Lambert. Generalized Landauer formula for quasi-particle transport in disordered superconductor. *J. Phys. Condens. Matter*, 3:6579, 1991.
- [66] Y. Takane and H. Ebisawa. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 61:1685, 1992.
- [67] A. M. S. Macêdo and A. M. C. Souza. Formation of Fabry-Perot resonances in double-barrier chaotic billiards. *Phys. Rev. E*, 71:066218, 2005.

-
- [68] J. A. Melsen and C. W. J. Beenakker. Reflectionless tunneling through a double-barrier NS junction. *Physica B*, 203:219–225, 1994.
- [69] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Lavrent'ev. *Mathematics: Its content, methods and meaning*. Dover, New York, 1999.