



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

MODELO SIGMA NÃO-LINEAR SUPERSIMÉTRICO:
APLICAÇÕES EM NANOESTRUTURAS CAÓTICAS

por

Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Orientador-UFPE)
Prof. Marcelo de Moura Leite (DF - UFPE)
Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (DF - UFPE)
Prof. Dionísio Bazeia Filho (DF-UFPA)
Prof. Mahir Saleh Hussein (IF-USP)

Recife - PE, Brasil
Janeiro - 2010

Ramos, Jorge Gabriel Gomes de Souza
Modelo Sigma Não-linear Supersimétrico:
Aplicações em Nanoestruturas Caóticas / Jorge
Gabriel Gomes de Souza Ramos. - Recife : O Autor,
2010.
xi, 175 folhas: il. fig. tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Física do estado sólido. 2. Teoria de campos (física).
3. Estatística quântica. I. Título.

530.41 CDD (22.ed.) FQ 2010-015



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

MODELO SIGMA NÃO-LINEAR SUPERSIMÉTRICO: APLICAÇÕES EM NANOESTRUTURAS CAÓTICAS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), Marcelo de Moura Leite, Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Dionísio Bazeia Filho, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba e Mahir Saleh Hussein, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

☒ Aprovado

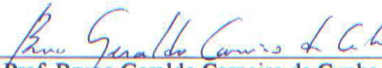
☐ Reprovado

☐ Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e nove de janeiro de dois mil e dez.


Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Presidente e Orientador


Prof. Marcelo de Moura Leite


Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha


Prof. Dionísio Bazeia Filho


Prof. Mahir Saleh Hussein

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a construção desta tese. Em especial, gostaria de manifestar minha gratidão mais enfaticamente

- À minha mãe, Fátima, por ter dedicado uma parcela significativa de sua vida à minha educação e por ter me direcionado tanto afeto;
- Ao meu pai, Inácio, por ter me ensinado a deduzir a fórmula de Bhaskara e por ter me estimulado a estudar matemática;
- Aos meus irmãos, Rafael e Daniel, por terem compartilhado ao meu lado grandes momentos de nossas vidas;
- À minha vó, Severina, pela dedicação sincera e por ser um grande exemplo de pessoa;
- Aos meus amigos, Felipe Lyra, Anand Subramanian, Emerson Magno, Carlos Lyra, Gabriel Moura, Eduardo Medeiros, Angélica de Oliveira e Larissa Avelar, por terem me concedido momentos de muita satisfação através do que têm a dizer;
- Aos meus colegas do departamento de física, Anderson, Fredson, Francisco Assis, Sérgio e Gerson, pelos seminários de grupo e apoio. Em especial, a Anderson, pelos inúmeros momentos de conversas e pela amizade;
- Ao meu orientador, professor Antônio Murilo, por dedicar tantas horas de seu tempo ao ensino de física de sistemas mesoscópicos, pela competência e por ter me apresentado novas formas de enxergar a física;
- Ao professor Dionísio Bazeia, por ter me ensinado muito sobre física e pelo apoio irrestrito.

Resumo

Nesta tese, apresentamos um estudo de propriedades universais de transporte quântico em sistemas mesoscópicos. Em regimes relevantes, os observáveis de transporte podem ser descritos por meio de uma função geratriz de cumulantes e momentos no formalismo de Levitov-Lesovik dentro da abordagem de espalhamento de Landauer-Büttiker. Mostramos que a função geratriz pode ser representada em uma miríade de espaços-alvo e estabelecemos a interconexão entre eles. Nosso ponto de partida foi o modelo sigma não-linear que descreve a dinâmica de campos de Goldstone associados a variedades simétricas homogêneas. Estudamos a versão supersimétrica zero-dimensional para a qual os campos têm variedades quocientes de Efetov como espaço alvo. Este espaço quociente pode descrever não-perturbativamente as propriedades universais de transporte quântico em sistemas mesoscópicos. Nós apresentamos um procedimento geral para obter os cumulantes dentro desse espaço-alvo e exibimos fórmulas exatas com validade no regime quântico extremo (número pequeno de canais de espalhamento abertos) e no regime semiclássico (número grande de canais de espalhamento abertos). Para investigar o aparecimento do regime semiclássico no formalismo supersimétrico, seguimos a literatura recente interpretando o ponto de sela do modelo sigma como uma teoria quântica de circuitos. Numa expansão perturbativa em potências inversas do número de canais abertos, o primeiro termo (limite clássico) e a correção quântica principal (localização fraca) são calculados usando a teoria de circuitos para os três ensembles de Wigner-Dyson e para o regime de crossover na presença de acoplamento spin-órbita e espalhamento magnético. Estudando o termo de localização fraca, verificamos interessantes efeitos de supressão-amplificação na correção quântica da potência do ruído de disparo tanto para os ensembles puros quanto para os ensembles em regime de crossover. A etapa seguinte consistiu em usar de forma indireta a transformação exata tipo “color-flavor” que mapeia o espaço quociente de Efetov no espaço de matrizes aleatórias descritas pelo núcleo de Poisson. A integração no espaço de matrizes aleatórias é feita usando um método diagramático e todos os resultados obtidos via teoria de circuitos foram recuperados. Por último, usamos o modelo de estube resultante da teoria de espalhamento ressonante de Mahaux-Weidenmüller diretamente no espaço de matrizes aleatórias para reobter o regime de crossover no limite semiclássico. A principal vantagem do método de estube é a possibilidade de introduzir de maneira sistemática efeitos específicos de cavidades caóticas fabricadas na interface de heteroestruturas semicondutoras e/ou campos externos arbitrários.

Palavras chaves: Estatística de contagem, Efeitos de interferência, Cavidades caóticas, Modelo σ

Abstract

In this thesis, we present a study of universal properties of quantum transport in mesoscopic systems. In relevant regimes, observables of quantum transport can be described by means of a generating function of cumulants and moments in Levitov-Lesovik formalism inside Landaur-Buttiker's approach of scattering. We show that generating function can be represented in a myriad of target spaces and we establish a inter-connection between such spaces. Our starting point was the non-linear σ model which describes the dynamics of Goldstone fields associated to homogenous symmetric varieties. We study a supersymmetric zero-dimensional version to which the fields have Efetov' coset as target. This quotient space can describe non-perturbatively the universal properties of quantum transport in mesoscopic systems. We present a general procedure to obtain cumulants inside such a target space and exhibit exact formulas with validity in extreme quantum regime (small number of scattering channels) and in semiclassical regime (large number of open scattering channels). To investigate the semiclassical regime from the supersymmetric formalism, we follow the recent literature, interpreting the saddle-point of the σ model as a quantum circuit theory. In a perturbative expansion, in inverses powers of the number of open channels, the first term (classical limit) and the main quantum correction (weak localization) are calculated using the circuit theory for the three Wigner-Dyson's ensembles and for crossover regime in presence of magnetic scattering rate and spin-orbit coupling. Studying the weak localization term, we verify interesting suppression-amplification effects in the quantum correction of shot-noise power for both pure ensembles and ensembles in crossover regime. The following step consists to use, in an indirect form, an exact transformation of "color-flavor" type to map the Efetov quotient space in the space of random unitary matrices described by the Poisson Kernel. Integration in the space of random unitary matrices is done using a diagrammatic method and all the results obtained through circuit theory were recovered. Finally, we use the stub model, which results from Mahaux-Weidenmüller' theory of resonant scattering, directly in the space of random matrices to reobtain the crossover regime in the semiclassical limit. The main advantage of the stub method is the possibility of introducing, in a systematic way, chaotic cavities made in the interface of semiconductors heterostructures and/or arbitrary external fields.

Key words: Full counting statistics, Quantum interference, Chaotic cavities, σ model

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Teoria de Matrizes Aleatórias	7
1.2	Teoria de Landauer-Büttiker	10
1.2.1	Formulação de Matriz de Espalhamento para a Fórmula de Landauer-Büttiker	12
1.3	Teoria de Levitov-Lesovik	17
1.3.1	Potência do Ruído de Disparo	20
1.4	Teoria da Localização	21
1.5	Supersimetria	26
1.6	A Tese	28
2	Modelo Sigma Não-linear Super-Simétrico: Momentos e Cumulantes de um Ponto Quântico	31
2.1	Dedução da Fórmula de Mahaux-Weidenmüller	32
2.2	Parâmetros de Acoplamento e Coeficientes de Transmissão	40
2.3	Cumulantes e Momentos da Estatística de Contagem	44
2.4	Conclusão	57
3	Teoria Semiclássica de Circuitos	60
3.1	Dedução de uma Teoria de Circuitos do Modelo σ Não-linear	60
3.1.1	A Ação e o Modelo σ não-linear	61
3.1.2	Teoria de Circuitos e Pseudo-corrente	64
3.2	Termo Principal Semiclássico	69
3.3	Teoria de Circuitos de Nazarov e Correção de Localização Fraca	71
3.4	Correção de Localização Fraca para o Ponto Quântico com Barreiras Arbitrárias - Ensembles Puros	81
3.5	Efeito Supressão-Amplificação Intrínseco	83

3.6	Crossover entre as Classes de Wigner-Dyson para o Ponto Quântico Caótico Não-Ideal	86
3.7	Efeito Supressão-Amplificação entre Classes de Simetria	88
4	Expansão Semi-clássica e Método Diagramático	93
4.1	Integração no Grupo Unitário: Método Diagramático	95
4.2	Método Diagramático de Integração no Grupo Unitário	98
4.2.1	Integração sobre o COE	102
4.3	Condutância de uma Cavidade Caótica com Contatos Ideais	103
4.4	Potência do Ruído de Disparo de uma Cavidade Caótica com Contatos Ideais	105
4.5	Potência do Ruído de Disparo Média de Cavidade Caótica com Barreiras	108
4.5.1	Termo Semiclássico	110
4.5.2	Correção Quântica Dominante	113
4.6	Sumário e Conclusões	119
5	Crossover entre os Ensembles de Wigner-Dyson	121
5.1	O Hamiltoniano de Dirac e o Acoplamento Spin-Órbita	122
5.2	Spin, SU(2) e Rotações	124
5.3	Operadores Anti-Unitários e a Simetria de Reversão Temporal	127
5.3.1	Degenerescência de Kramers e Matriz de Espalhamento	129
5.3.2	Quatérnions	131
5.4	Formalismo de Matriz de Espalhamento	132
5.4.1	Hamiltoniano Efetivo	136
5.4.2	Média da Condutância	139
5.4.3	Média do Ruído de Disparo	142
5.5	Modelo Anisotrópico de Rashba-Dresselhaus	145
5.6	Conclusão	146
6	Conclusão	149
A	Fórmulas e Identidades Relevantes em Super-simetria	152
A.0.1	Álgebra de Grassman	152
A.0.2	Super-Álgebra	154
A.0.3	Média no Ensemble e Transformação de Hubbard-Stratonovich	156
B	Quadratura Numérica Tridimensional mediante Gauss-Legendre e Trapézios	159

C Diagramas Auxiliares	163
Bibliografia	167

Lista de Figuras

1.1	O painel esquerdo exibe propriedades de um dispositivo difusivo com comprimento L suficientemente grande e o tipo de informação quântica que é perdida. O painel direito exibe um sistema mesoscópico e alguns dos efeitos típicos devido ao tamanho reduzido. A figura foi adaptada da referência [1].	2
1.2	No painel (a), tem-se uma amostra de um sistema mesoscópico no qual existe o acoplamento capacitivo entre um ponto quântico (circulo com bolas) e um ponto quântico de contato (QPC). Ambos os pontos são controlados por portões de tensão. No painel (b), tem-se o esquema de um elétron submetido a uma diferença de potencial suficiente para “entrada” no ponto quântico. No painel (c), tem-se a condutância do QPC como função do número de elétrons no ponto quântico. A figura foi extraída da referência [2].	4
1.3	Bilhar com bolas confinadas e bola externa com grande energia cinética incidente. Figura retirada da referência [3].	5
1.4	Seção de choque em função da energia de nêutrons incidentes em átomos de ^{238}U , levando em conta que todas as ressonâncias têm o mesmo spin e paridade. Figura retirada da referência [3].	6
1.5	Figura com o esquema do modelo de Landauer para transporte quântico.	11
1.6	O gráfico exibe a flutuação universal da condutância como função de um campo magnético perpendicular em um nanofio de ouro, com 310 nm de comprimento e 25 nm de espessura. Figura extraída da referência [4].	15

- 1.7 Os gráficos exibem a distribuição estatística experimental da contagem de n elétrons entrando em um ponto quântico durante um tempo de observação t . Os dois painéis, (a) e (b), diferem por valores de tensão nos “gates” (portões de entrada e saída de elétrons). O tempo t é escolhido de maneira que os dois painéis exibam a mesma média $\langle n \rangle = 3$. As curvas vermelhas são as esperadas pela estatística de contagem de Levitov-Lesovik. A figura foi extraída da referência [2]. 18
- 1.8 Figura exibindo uma distribuição estatística de contagem de elétrons. Os primeiros três cumulantes da fórmula de Levitov-Lesovik representam, respectivamente, a média, a largura e a assimetria da distribuição. A figura foi adaptada da referência [2]. 20
- 1.9 Figura exibindo trajetórias de modos eletrônicos dentro de uma amostra. A (a) exibe duas trajetórias sem interseções (difusons) entre os pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ e a (b) exibe uma trajetória com auto-interseção (cooperon). A figura foi adaptada da referência [5]. 23
- 1.10 Figura exibindo, em (a) e (b), cinco espalhamentos para as probabilidades de trajetórias diretas entre os pontos r e r' . Em (c) e em (d), estão representados infinitos espalhamentos dentro de uma mesma trajetórias. A função Γ_ω representa uma série infinita de espalhamentos. Esses diagramas são chamados de difusons e representam a contribuição clássica para a condutividade. Os difusons, por definição, não são afetados por campos externos. A figura foi adaptada da referência [6]. 24
- 1.11 Figura exibindo em (a) e (b) alguns espalhamentos em trajetórias fechadas com interferência quântica. Os painéis (c) e (d) representam infinitos espalhamentos com interferência quântica em trajetórias fechadas, constituindo os cooperons ou diagramas maximamente cruzados. A função Γ'_ω representa todos os espalhamentos. A figura foi adaptada da referência [6]. 26
- 1.12 Figura exibindo as consequências diretas do modelo de Mahaux-Weindemüller para teorias do espalhamento quântico em sistemas mesoscópicos. . . 29
- 2.1 Espalhamento de modos propagantes em um guia semi-infinito causado na região de interação. 33

- 2.2 Os gráficos do painel superior representam a condutância normalizada em função do número de canais do segundo guia, onde fixamos $T_1 = T_2 = 0,6$. O índice em cada curva indica o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam a condutância em função do valor da barreira T_2 do segundo guia, fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva indicam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes. 52
- 2.3 Os gráficos do painel superior representam $\langle g^2 \rangle$ normalizado em função do número de canais do segundo guia para os quais fixamos $T_1 = T_2 = 0,6$. O índice em cada curva indica o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam $\langle g^2 \rangle$ em função do valor da barreira T_2 do segundo guia para os quais fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva caracterizam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes. 55
- 2.4 Os gráficos do painel superior representam a potência do ruído de disparo normalizado em função do número de canais do segundo guia, para os quais fixamos $T_1 = T_2 = 0,6$. O índice em cada curva caracteriza o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam a potência do ruído de disparo em função do valor da barreira T_2 do segundo guia, dado que fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva caracterizam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes. 58
- 3.1 Figura esquemática de uma cavidade caótica P num pseudo-potencial χ conectada por guias aos reservatórios A (num pseudo-potencial 0) e B (num pseudo-potencial ϕ). 61

- 3.2 Figura esquemática de uma cadeia de cavidades caóticas (retângulos pretos) com índices $i = 1, \dots, N - 1$ em pseudo-potenciais χ_i conectadas umas às outras por guias e aos reservatórios $i = 0$ (num pseudo-potencial 0) e $i = N$ (num pseudo-potencial ϕ). 71
- 3.3 Diagramas mostrando a transição. (1) Nas regiões (0), (I) e (II), p^{WL} têm, respectivamente, zero, uma e duas mudanças de sinais como função de a no intervalo $[0, 1]$; (2) Diagramas (T_1, T_2) separando as regiões positivas (+) e negativas (-) para $a = 3/10$ (linha contínua) e $a = 6/10$ (linha tracejada); (3) Diagrama (a, T_2) separando as regiões (I) e (II), onde p^{WL} tem uma e duas mudanças de sinal, respectivamente, como função de T_1 ; (4) Regiões positivas (+) e negativas (-) no plano (a, T_2) para $T_1 = 3/10$ (linha contínua) e $T_1 = 5/10$ (linha tracejada); (5) Gráfico de p^{WL} mostrando as mudanças de sinal como função de a para pontos interiores a cada uma das regiões do diagrama (1); (6) Gráfico de p^{WL} mostrando as mudanças de sinal como função de T_1 para cada região do diagrama (3). 85
- 3.4 Gráficos exibindo dois tipos de crossovers para a correção de localização fraca da condutância. Em ambos os casos, fixamos $T_1 = 0, 9$, $T_2 = 0, 8$ e $N_2/N_1 = 0, 65$. No gráfico à esquerda, estamos fixando valores de taxas de espalhamento spin-órbita em $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 5$ e $a = \infty$ com os correspondentes gráficos de baixo para cima. No gráfico à direita, variamos a taxa de espalhamento spin-órbita para os valores de espalhamento magnético fixados no retângulo do gráfico. 89
- 3.5 O gráfico esquerdo mostra a correção de localização fraca para a média da potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . O gráfico direito mostra a correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . Para o caso $a = 0$ e $a \rightarrow \infty$, p^{WL} exibe uma transição supressão-amplificação como função de x (crossover GOE-GUE e GSE-GUE, respectivamente). Em ambos os casos, usamos $T_1 = 0.8$, $T_2 = 0.9$ e $N_2/N_1 \approx 0, 67$ 91

3.6	Gráficos mostrando a transição quando $N_2/N_1 \approx 0,67$. (1) Diagrama (x, a) separando as regiões positiva (+) (amplificação) e negativa (−) (supressão) para $T_1 = 1$ com $T_2 = 0,3$ (linhas contínuas) e $T_2 = 0,7$ (linhas descontínuas); (2) Regiões positiva (+) e negativa (−) em (T_1, T_2) para $x = 2$ com $a = 6$ (linhas contínuas) e $a = 10$ (linhas descontínuas); (3) Diagrama no qual $T_1 = T_2 = T$ no limite em que $a \rightarrow 0$; (4) Diagrama no qual $T_1 = T_2 = T$ no limite $a \rightarrow \infty$. As regiões que são positivas (+) no diagrama (3) tornam-se negativas (−) em (4) e as que são negativas em 3 tornam-se positivas em (4); (5) Diagrama no qual tomamos $T_1 = T_2 = T$ e o limite $x \rightarrow 0$	92
4.1	Representação diagramática de (1) matrizes unitárias U_{ab} e $U_{\alpha\beta}^*$, (b) eventual matriz fixa presente no argumento da média no ensemble de matrizes aleatória e (3) as funções δ_{ij} de Kronecker que contraem os índices das matrizes unitárias e fixam os tipos de permutação. Figura retirada da referência [7].	99
4.2	Representação diagramática de duas funções simples usadas para o cálculo de médias no ensemble unitário. Figura retirada da referência [7].	100
4.3	Todas as possíveis contrações de índices de acordo com a equação (4.10) aplicadas à dois tipos especiais de funções de matrizes unitárias. Figura retirada da referência [7].	100
4.4	Representação diagramática do (a) segundo momento, equação (4.31), e (b) a média no ensemble do segundo momento, equação (4.32). Note-se que, na linguagem de ciclos introduzida na referência[7], os dois primeiros diagramas de (b) têm dois ciclos U e três ciclos T , enquanto os dois últimos têm um ciclo U e 4 e 2 ciclos T , respectivamente.	107
4.5	Representação diagramática das matrizes F_L (acima), equação (4.44), e F_R (abaixo), equação (4.45). Elas são séries infinitas de diagramas tipo escada, veja [7].	110
4.6	Os seis conjuntos de diagramas topologicamente distintos que contribuem para o termo semiclássico da média da potência do ruído de disparo.	112
4.7	Representação diagramática das funções f_{TT} (acima), equação (4.54), e f_{UU} (abaixo), equação (4.55). Elas são séries infinitas dos diagramas maximamente cruzados, conhecidos como cooperons, ver a referência [7].	114

- 4.8 Série de diagramas maximamente cruzados representando as funções f_{TU} (acima) e f_{UT} (abaixo), equação (4.56), ver a referência [7]. . . . 115
- 4.9 Primeiro conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos por cruzamentos dos braços do diagrama da figura (4.6.1). 116
- 4.10 Segundo conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos cruzando os braços do diagrama da figura (4.6.2). . . 116
- 4.11 Terceiro conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos cruzando os braços do diagramas da figuras (4.6.3-4.6.6). 117
- 5.1 A figura exhibe uma cavidade caótica não-balística acoplada a dois reservatórios de partículas. Dentro da cavidade, desenhamos duas trajetórias de Feynman que retornam ao local de entrada, uma com sentido normal (a contínua) e outra revertida no tempo (a tracejada), ambas fechando um circuito. Em cada uma das trajetórias, desenhamos uma seta indicando o spin. Deve-se notar que a trajetória normal “gira” o spin em π no sentido horário, enquanto a trajetória revertida no tempo “gira” o spin em π no sentido anti-horário. 126
- 5.2 O diagrama à esquerda representa os modos difusons da cavidade caótica com termo de espalhamento spin-órbita, ou seja, carregando os índices gregos de spin além dos pontos usuais representando índices do espaço de canais. O diagrama difuson contém o termo f_{UU} . O diagrama à direita representa os modos cooperons e também carrega índices de spin e o termo f_{UU} 137
- 5.3 O gráfico superior mostra a média da correção de localização fraca para a condutância como função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores fixos da taxa de espalhamento spin-órbita com parâmetro a . Os gráficos inferiores mostram a média da correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . Note-se que, quando $a = 0$ e $a \rightarrow \infty$, p^{WL} exhibe uma transição supressão-amplificação como função de x (crossover COE-CUE e CSE-CUE, respectivamente). Em ambos os casos, usamos $T_1 = 0.8$, $T_2 = 0.9$ e $N_2/N_1 \approx 0,67$ 144

5.4	A figura exhibe os gráficos da correção de localização fraca para a condutância. Os gráficos com linhas contínuas representam a correção para o modelo isotrópico e os gráficos com linhas descontínuas exibem a correção para o modelo anisotrópico. Ambos os gráficos estão em função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores diferentes do espalhamento spin-órbita	147
5.5	A figura exhibe os gráficos da correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo. Os gráficos com linhas contínuas representam a correção para o modelo isotrópico e os gráficos com linhas descontínuas exibem a correção para o modelo anisotrópico. Ambos os gráficos estão em função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores diferentes do espalhamento spin-órbita	148
B.1	Gráfico de uma função $y = f(x)$ arbitrária e trapézios abaixo do gráfico correspondente. Note que os trapézios têm bases com comprimentos iguais e que as alturas variam de acordo com os valores correspondentes de $f(x)$	160
C.1	Primeiro conjunto de diagramas auxiliares.	165
C.2	Segundo conjunto de diagramas auxiliares.	166

Lista de Tabelas

- 4.1 Expressões algébricas correspondendo aos diagramas da figura(4.6). . 111
- 4.2 Expressões algébricas para os diagramas das figuras (4.9)-(4.11). . . 119

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, investigaremos propriedades e aspectos teórico-descritivos de sistemas mesoscópicas. O prefixo “meso-”, do grego, significa intermediário, indicando que a escala de comprimento de uma estrutura mesoscópica deve estar entre o macroscópico e o microscópico. Portanto, por um lado, atuando no sistema, devido ao seu caráter microscópico, tem-se aspectos relevantes típicos da mecânica quântica. Por outro lado, uma quantidade suficientemente grande de átomos aproxima o sistema do “macro” e torna possível uma descrição estatística do transporte quântico de elétrons em escalas mesoscópicas. Algumas propriedades desses sistemas possuem a interessante característica de não dependerem de maneira essencial de suas estruturas atômicas. Propriedades como essas são genericamente chamadas de *propriedades universais* do transporte quântico. A síntese de amostras mesoscópicas é um grande desafio dos tempos atuais, permitindo a observação de novos efeitos quânticos em física da matéria condensada.

O processo de preparação de amostras mesoscópicas envolve: (a) o crescimento de um cristal específico; (b) epitaxia para adicionar camadas de diferentes materiais; (c) uma peça para a lateral da amostra e (d) o processo de litografia. Com isso, pode-se formar um gás de elétrons bidimensional ao longo da amostra com confinamento transversal. O gás fica restrito a uma “mesa”, com uma geometria específica, conectada a (a) contatos ôhmicos e (b) portões de elétrons. Modernamente, para formar o gás bidimensional, as estruturas são realizadas, experimentalmente, usando-se camadas finas e alternadas de materiais como o GaAs (arseneto de gálio) e o Ga[Al]As (arseneto de gálio dopado com alumínio). Cria-se, na interface, um gás bidimensional altamente confinado. Para detalhes das principais técnicas empregadas, ver a referência [1]. O resultado final é uma amostra que pode manifestar os aspectos mais fundamentais da mecânica quântica: (a) tunelamento, devido aos

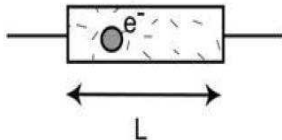
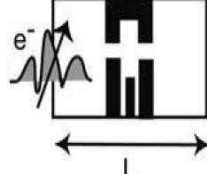
 Dispositivo Convencional	 Dispositivo mesoscópico
$L \gg l_e$ Difusivo	$L \lesssim l_e$ balístico
$L \gg l_\phi$ Incoerência	$L \lesssim l_\phi$ Coerência de fase
$L \gg \lambda_F$ Ausência de quantização em tamanho	$L \lesssim \lambda_F$ Quantização em tamanho
$e^2/C < k_B \Theta$ Ausência de bloqueio coulombiano	$e^2/C \gtrsim k_B \Theta$ Bloqueio coulombiano
$L \gg l_s$ Ausência de efeitos de spin	$L \lesssim l_s$ Efeitos de spin

Figura 1.1: O painel esquerdo exibe propriedades de um dispositivo difusivo com comprimento L suficientemente grande e o tipo de informação quântica que é perdida. O painel direito exibe um sistema mesoscópico e alguns dos efeitos típicos devido ao tamanho reduzido. A figura foi adaptada da referência [1].

portões de tensão e aos contatos ôhmicos; (b) interferência quântica, devido ao confinamento e à quantidade controlada de impurezas na amostra mantendo a coerência de fase; (c) discreteza da corrente, manifesta em cumulantes da estatística de contagem, como veremos adiante; (d) emaranhamento quântico entre o fluxo de corrente dos terminais (fios) ideais. Dessa forma, sistemas mesoscópicos permitem levar os conceitos da mecânica quântica aos seus limites.

A figura (1.1) exibe alguns dos efeitos típicos que caracterizam uma estrutura mesoscópica em comparação com uma estrutura convencional. Em um sistema mesoscópico, pode-se atingir um regime no qual o comprimento L da amostra seja menor que o comprimento médio, l_e , de espalhamento elástico (caminho livre médio). Tal comprimento é característico da amostra e fornece a distância percorrida por um elétron entre dois sucessivos espalhamentos nas impurezas, mantendo constante a energia cinética do elétron. Se as dimensões da amostra são tais que L é menor que l_e , então o sistema é dito estar em regime balístico e as bordas do material passam a ter um papel preponderante para a mobilidade eletrônica. O regime balístico ocorre

quando a dinâmica quântica é dominada por reflexões nas bordas. Os sistemas mesoscópicos podem manter coerência de fase em uma escala l_ϕ , chamada de comprimento de coerência de fase, se a amostra satisfaz $L < l_\phi$. O transporte coerente é importante para gerar os efeitos de interferência que serão estudados mais adiante. Se o comprimento L é menor que o comprimento de onda de Fermi, λ_F , então existe a formação de estados na borda devido ao confinamento, uma situação bem diferente do que ocorre com amostras convencionais com estados “bulk”. Temperaturas baixas e o controle da capacitância C da estrutura, como veremos adiante, permitem observar o efeito da entrada de um único elétron em uma estrutura mesoscópica. Além disso, o campo magnético e o espalhamento spin-órbita serão parâmetros relevantes para modelos de descoerência quântica em sistemas mesoscópicos.

Um exemplo do resultado final da preparação de amostras para experimentos pode ser visto na figura (1.2.(a)). A amostra em questão contém um ponto quântico (circunferência com bolas) e um contato pontual quântico (QPC). Os pontos quânticos podem ser vistos como sistemas mesoscópicos e são efetivamente os “átomos fundamentais” de dispositivos mais complexos. O contato quântico do sistema consiste de uma constrição no fio quântico por onde flui a corrente I_{QPC} . De acordo com a estimativa da referência [2], baseada no espaçamento médio de níveis do ponto quântico e na energia típica para carregá-lo, existem aproximadamente 30 elétrons no ponto. O ponto quântico é conectado a uma fonte (S) e a um dreno (D) de elétrons através de barreiras de tunelamento e o carregamento é feito por um potencial V . As transparências das barreiras são controláveis pelos portões G_1 e G_2 . A diferença de potencial entre S e D pode ser controlada de maneira a ser pequena o suficiente para permitir a passagem aleatória de um único elétron devido ao bloqueio coulombiano. Conforme a figura (1.2.(b)), isso ocorre exatamente quando se atinge uma diferença de potencial $\Delta\mu$. O portão P é usado para tornar máximo o acoplamento capacitivo entre o ponto quântico e o QPC. Com o controle P , a corrente I_{QPC} fica sensível à entrada de um único elétron no ponto quântico.

A figura (1.2.(c)) exibe uma medida de transporte quântico na amostra. Vemos que o QPC oscila entre dois estados: (n) Para o qual existem n elétrons no ponto quântico; (n+1) Para o qual existem $n + 1$ elétrons no ponto quântico. Note-se que o acoplamento capacitivo determina uma diminuição da condutância do QPC cada vez que entra um elétron no ponto quântico, gerando a condutância normalizada n no QPC durante o tempo τ_{in} no qual o elétron fica no ponto quântico. A diminuição de um elétron no ponto quântico no intervalo τ_{out} gera a condutância normalizada $n + 1$ no QPC. Os elétrons entram no ponto quântico de maneira aleatória e permanecem por um tempo também aleatório. Experiências como essa podem ser descritas adequadamente pelo que será visto.

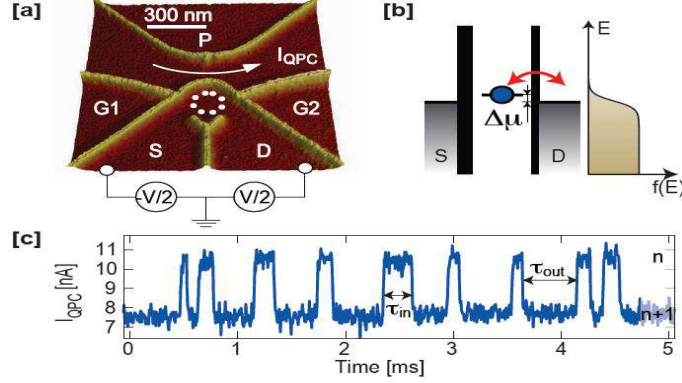


Figura 1.2: No painel (a), tem-se uma amostra de um sistema mesoscópico no qual existe o acoplamento capacitivo entre um ponto quântico (circulo com bolas) e um ponto quântico de contato (QPC). Ambos os pontos são controlados por portões de tensão. No painel (b), tem-se o esquema de um elétron submetido a uma diferença de potencial suficiente para “entrada” no ponto quântico. No painel (c), tem-se a condutância do QPC como função do número de elétrons no ponto quântico. A figura foi extraída da referência [2].

Nesta tese, trataremos essencialmente de transporte quântico em estruturas mesoscópicas como o ponto quântico. Um dos elementos conceituais básicos para uma descrição é a imposição empírica de que existe aleatoriedade no espalhamento quântico de modos eletrônicos no sistema. O conceito de espalhamento caótico surgiu entre as idéias pioneiras dos trabalhos de Niels Bohr sobre a estrutura de núcleos pesados. Nos últimos dias de 1935, ele preparou o caminho para a sua teoria sobre a “Captura de Nêutrons e a Constituição Nuclear”. As idéias iniciais foram publicadas na Royal Danish Academy, em 24 de janeiro de 1936, e a versão final foi publicada em uma *Nature* [3]. Seguindo as palavras de Bohr, “O fenômeno de captura de nêutrons... forçou-nos a assumir que uma colisão entre nêutrons de alta velocidade e núcleos pesados resultarão, em primeiro lugar, na formação de um sistema composto de notável estabilidade” [3]. Esse estado composto intermediário com meta-estabilidade decai, posteriormente, em partículas materiais ou emite radiação. Os eventos de colisão e de emissão são processos estatisticamente independentes. Bohr imaginou um modelo clássico em que o núcleo pesado é visto como um bilhar, com uma cratera de certo formato. Os constituintes do núcleo são vistos como bolas de bilhar e as partículas leves de alta velocidade são vistas como bolas de bilhar externas à cratera até que ocorra a colisão. Isso é ilustrado na figura 1.3.

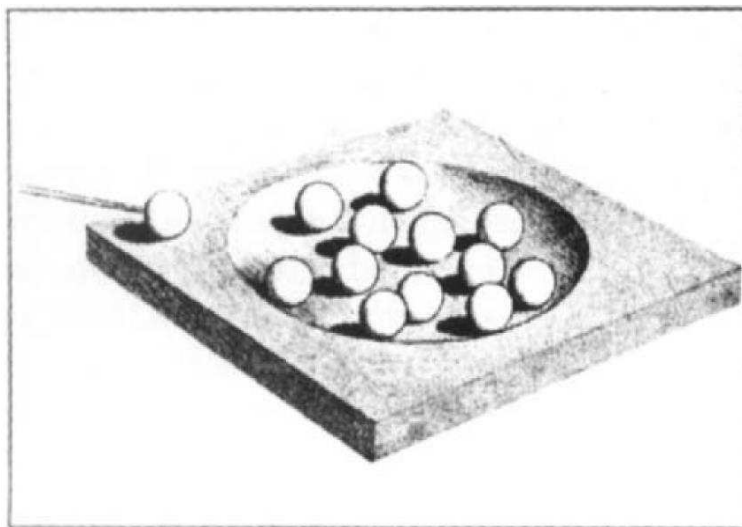


Figura 1.3: Bilhar com bolas confinadas e bola externa com grande energia cinética incidente. Figura retirada da referência [3].

Usando os argumentos de Bohr e seguindo a figura 1.3, em primeiro lugar, imaginemos que o bilhar não tenha bolas. Nesse caso, após incidir na cratera, a bola externa entra por um lado e sai em um ponto diametralmente oposto com a sua velocidade original. Entretanto, na presença de bolas dentro do bilhar a passagem não é direta. A bola externa gera um reparticionamento de sua energia cinética com uma primeira bola do bilhar. As duas, em seu movimento, colidirão com outras duas, causando outro reparticionamento. Com esse mecanismo, a energia cinética inicial será dividida entre todas as bolas do bilhar e a bola incidente. Considerando que o bilhar não oferece atrito e que todas as colisões são elásticas, o processo continua até que ocorra, novamente, a concentração de energia suficiente para que uma bola saia do bilhar. A energia cinética total contida nas bolas que ficam é insuficiente para permitir a saída de uma outra bola.

A motivação inicial de Bohr foi explicar a distribuição das linhas dos níveis de energia para alvos pesados. Tudo isso influenciou os trabalhos de Wigner com apelo estatístico. De fato, o modelo de Bohr pode ser visto como um exemplo de dinâmica caótica clássica, com vínculo direto, após quantização, para a teoria de matrizes aleatórias (TMA). A TMA surgiu com o objetivo de descrever, estatisticamente, propriedades espectrais desses núcleos pesados. Por exemplo, a figura 1.4 exhibe os dados de uma colisão entre um núcleo alvo de ^{238}U e nêutrons. No intervalo entre a



Figura 1.4: Seção de choque em função da energia de nêutrons incidentes em átomos de ^{238}U , levando em conta que todas as ressonâncias têm o mesmo spin e paridade. Figura retirada da referência [3].

energia de excitação do neutron e 2000 eV, o sistema exhibe, claramente, um conjunto de ressonâncias bem separadas. Cada uma delas é vista como um meta-estado do núcleo composto.

Comparando os quadros da figura 1.4, nota-se que a posição das ressonâncias não apresenta regularidade, assim como o espaçamento entre duas ressonâncias consecutivas. Baseado em experimentos como esse, Wigner construiu uma teoria considerando a aleatoriedade dos espectros. Considerando que o espectro de qualquer sistema dinâmico seria determinado de maneira não-ambígua pelo hamiltoniano subjacente, a teoria de Wigner causa perplexidade. Em mecânica estatística usual, considera-se que o hamiltoniano de um sistema em questão é conhecido e que as condições de contorno variam. Médias termodinâmicas são calculadas com cópias iguais do mesmo sistema. Wigner lança a hipótese de que o próprio hamiltoniano é aleatório e que o único elemento comum no ensemble de hamiltonianos é a simetria. No ensemble de sistemas, Wigner coloca como elementos comuns as propriedades determinadas por tais simetrias.

1.1 Teoria de Matrizes Aleatórias

Focando na formulação de Schrödinger da mecânica quântica e usando teoria de grupos, Wigner propõe a existência de três ensembles genéricos de matrizes aleatórias. Todos os ensembles estão sustentados em simetrias comuns do hamiltoniano. De acordo com a análise de Wigner, existem os seguintes tipos de ensembles

- ($\beta = 1$): Sistemas com simetria de reversão temporal e simetria de rotação de spin semi-inteiro. Tais sistemas geram matrizes hamiltonianas $\mathcal{H}$ com entradas $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ reais que satisfazem à propriedade

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \mathcal{H}_{\nu\mu} = \mathcal{H}_{\mu\nu}^*,$$

onde $*$ denota o complexo conjugado e os índices μ, ν caracterizam as entradas da matriz, a qual, para sistemas com simetria de reversão temporal, é simétrica. Nesse caso, cada entrada do hamiltoniano tem um único grau de liberdade, caracterizando os dois vínculos de simetria. O índice desse ensemble é dado por $\beta = 1$, indicando que há apenas um grau de liberdade por entrada independente. Sistemas com simetria de reversão temporal e quebra de rotação de spin inteiro também pertencem a esse ensemble.

- ($\beta = 2$): Sistemas com quebra de simetria de reversão temporal. Como veremos, sistemas na presença de campo magnético externo suficientemente forte têm essa simetria quebrada. A quebra de tal vínculo de simetria gera um novo grau de liberdade para as entradas do hamiltoniano, de maneira que o índice do ensemble caracteriza os dois graus de liberdade das entradas do hamiltoniano (entradas pertencem aos complexos), as quais satisfazem o vínculo

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \mathcal{H}_{\nu\mu}^\dagger,$$

onde $\dagger$ denota o conjugado hermitiano.

- ($\beta = 4$): Sistemas com simetria de reversão temporal e com quebra de simetria de rotação de spin semi-inteiro. Nesse caso, as entradas do hamiltoniano podem ser escritas em termos de uma representação quaterniônica de $SU(2)$, ou seja, existem quatro graus de liberdade e o índice $\beta = 4$. Escrevendo na base de Pauli, as entradas do hamiltoniano podem ser escritas como

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \mathcal{H}_{\mu\nu}^0 \mathbf{1} - i \sum_{j=1}^3 \mathcal{H}_{\mu\nu}^j \sigma_j,$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 , $\mathcal{H}_{\mu\nu}^j$, com $j = 0, \dots, 3$ são coeficientes complexos e σ_j são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

De acordo com a teoria de matrizes aleatórias, a probabilidade diferencial de encontrar uma certa matriz do ensemble num elemento de volume é dada pelo peso $P_{N\beta}$, com $N \times N$ denotando a ordem da matriz $\mathcal{H}$, multiplicado pelos elementos diferenciais de cada entrada independente de $\mathcal{H}$. Wigner e Dyson (referência [8]) focaram no estudo de matrizes $\mathcal{H}$ satisfazendo à densidade de probabilidade

$$P_{N\beta}(\mathcal{H}) = c \exp \left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{Tr} V(\mathcal{H}) \right), \quad (1.2)$$

onde c é uma constante de normalização. Se tomamos $V(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^2$, então o ensemble é chamado de gaussiano. Nas referências [9, 10], Wigner concentrou-se nos ensembles gaussianos, dada a simplicidade de tratamento pelo fato de que $\text{Tr} \mathcal{H}^2 = \text{Tr} \mathcal{H} \mathcal{H}^\dagger = \sum_{\mu\nu} |\mathcal{H}_{\mu\nu}|^2$, ou seja, suas entradas são estatisticamente independentes.

A escolha do ensemble gaussiano de matrizes $\mathcal{H}$ hamiltonianas é suficiente no limite em que $N \rightarrow \infty$, ficando como única restrição a convergência de $P_{N\beta}$ e das correlações locais. Este regime é conhecido como o regime universal das correlações espectrais. Note que a equação (1.2) para o ensemble gaussiano é bastante apropriada, garantindo a convergência no limite universal e fornecendo um significado físico para o parâmetro fenomenológico λ . Em teoria de matrizes aleatórias, a matriz de espalhamento média é a entrada e os cumulantes e correlações são as saídas nos cálculos executados. No capítulo seguinte, no qual colocamos uma cavidade caótica no regime universal, a distribuição gaussiana será escolhida e o parâmetro λ aparecerá explicitamente na caracterização da “transparência” da cavidade.

Um dado interessante que pode ser extraído de $P_{N\beta}$ é a distribuição conjunta de auto-valores de $\mathcal{H}$. Vamos considerar o conjunto completo $\mathcal{C} = \{E_n\}$, com $n = 1, \dots, N$, de auto-valores possíveis de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{U}$ a matriz que diagonaliza $\mathcal{H}$, ou seja, uma matriz contendo os auto-vetores de $\mathcal{H}$ em suas colunas e satisfazendo $\mathcal{H} = \mathcal{U} \text{diag}(E_1, \dots, E_N) \mathcal{U}^\dagger$. Se $\beta = 4$, então a degenerescência de Kramers (veja capítulo 5) impõe que os auto-valores são duplamente degenerados e a decomposição deve ser escrita como $\mathcal{H}_{2N} = \mathcal{U}_{2N} \text{diag}(E_1 \mathbf{1}, \dots, E_N \mathbf{1}) \mathcal{U}_{2N}^\dagger$. Em ambos os casos, expandindo em potências a função $V(\mathcal{H})$ e usando a propriedade cíclica do traço, notamos que a função $\text{Tr} \mathcal{H} = \sum_{n=1}^N V(E_n)$ não depende dos auto-vetores, o que significa que a distribuição é invariante no grupo de transformações associados à matriz unitária

$\mathcal{U}$. O elemento infinitesimal $d\mu(\mathcal{H})$ de volume no espaço de matrizes hermitianas foi calculado na referência [11] e é dado por

$$d\mu(\mathcal{H}) = J(\mathcal{C}) d\mu(\mathcal{U}) \prod_{j=1}^N dE_j, \quad (1.3)$$

onde o jacobiano é um fator geométrico do espaço dependendo unicamente dos auto-valores da seguinte forma

$$J(\mathcal{C}) = \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\beta. \quad (1.4)$$

Substituindo a equação (1.4) na equação (1.2), na base de auto-valores do hamiltoniano, a função peso fica bem definida a menos de uma constante de normalização como

$$P(\mathcal{C}) = c \exp \left[-\beta \left(\sum_{i < j} U(E_i, E_j) + \sum_{i=1}^N V(E_i) \right) \right], \quad (1.5)$$

onde $U(E_i, E_j) \equiv -\ln |E_i - E_j|$. A equação (1.5) representa uma distribuição tipo Gibbs. Se tratamos os níveis de energia como “partículas” carregadas ao longo de uma linha reta com coordenadas E , cada uma em um ponto E_i , com $i = 1, \dots, N$, em ordem crescente do índice i , o potencial U representa uma repulsão que tende a levar as “partículas” ao infinito, e o potencial V representa uma atração entre partículas. Essas “partículas” formam um gás coulombiano por conta da analogia com o potencial de duas linhas paralelas carregadas. Para ensembles gaussianos, o potencial atrativo é parabólico. A competição entre os dois potenciais mantém a estabilidade do sistema e as “partículas” nunca se chocam, nem vão para o infinito. A repulsão é maior à medida que a “temperatura” diminui, ou seja, à medida que β aumenta, as partículas tendem a se afastar mais. A analogia do gás coulombiano foi feita pelos próprios Wigner e Dyson nas referências [9, 10, 8].

O grupo de matrizes $\mathcal{U}$ ortogonais tem índice $\beta = 1$ e corresponde ao ensemble ortogonal (EO), o com índice $\beta = 2$ corresponde ao ensemble unitário (EU) e o grupo com índice $\beta = 4$ corresponde ao ensemble simplético (ES). Pelos motivos mencionados, no regime universal ($N \rightarrow \infty$), a escolha de ensembles gaussianos é bastante eficiente. Caso a distribuição seja gaussiana, chamaremos os ensembles de GEO, GEU e GES, respectivamente. Basicamente, médias e flutuações são os objetos básicos do cálculo em teoria de matrizes aleatórias. Note-se que o peso gaussiano impõe uma severa restrição de aprisionamento de níveis no intervalo $-2\lambda < E < 2\lambda$ e a densidade de níveis tem a forma de um semi-círculo segundo resultados do próprio Wigner. Como veremos, certos sistemas físicos, em regime de espalhamento, não

podem ser descritos por ensembles gaussianos, devido, basicamente, a tal restrição. No caso universal, o ensemble gaussiano funciona adequadamente, considerando que flutuações dos N níveis são inversamente proporcionais a N , ou seja, tendem a se anular e as flutuações passam a ser independentes do espectro global e do peso gaussiano, valendo localmente no espectro. Uma vez fixada a média local no espectro, tem-se o parâmetro λ , ou seja, os ensembles gaussianos geram teorias sem parâmetros livres. O ensemble gaussiano também pode ser justificado por princípios de máxima entropia. Isso foi feito nas referências [12, 13].

Nas próximas seções, trataremos transporte em sistemas mesoscópicos como um problema de espalhamento cujos assintóticos são canais propagantes em guias condutores ideais. Mudando o que tem de ser mudado, o problema é, essencialmente, o mesmo de física nuclear e fornecerá o comportamento de escala do parâmetro λ da distribuição gaussiana, relacionando-o ao espaçamento dos níveis de energia do centro espalhador. Veremos que novas distribuições podem emergir devido a características próprias do problema. Veremos também que a própria estrutura do espaço alvo que modela o problema de transporte quântico pode ser drasticamente diferente da estrutura do espaço de matrizes aleatórias. Em particular, o mapa exato criado por Efetov para reduzir o espaço alvo em sistemas fechados, e depois generalizado por Verbaarschot, Weidenmüller e Zirnbauer para sistemas abertos, pode ser diretamente aplicado no estudo de transporte quântico.

1.2 Teoria de Landauer-Büttiker

Transporte em sistemas mesoscópicos é um problema de mecânica estatística de não-equilíbrio. Nas referências [14, 15, 16], Landauer simplificou significativamente o problema através da substituição conceitual das fontes de elétrons por reservatórios ideais. Por definição, a distribuição de elétrons e o potencial eletroquímico ficam locais, definidos inteiramente nos reservatórios considerados ideais. Os reservatórios são conectados, adiabaticamente, aos guias metálicos ideais. Os guias têm espessura finita, o que leva à quantização em modos propagantes e à presença de canais de propagação. Os elétrons são espalhados em uma região de interação estacionária no tempo acoplada aos guias. Essa separação em guias e em região de espalhamento é muito conveniente, permitindo a definição de uma base apropriada de canais abertos para o espaço de Hilbert associado. Propriedades de transporte são obtidas mediante a matriz de espalhamento correspondente. Uma formulação que leve em conta a teoria de muitos corpos pode ser vista na referência [17].

Para a dedução da fórmula de Landauer, seguiremos a referência [18]. Considere-

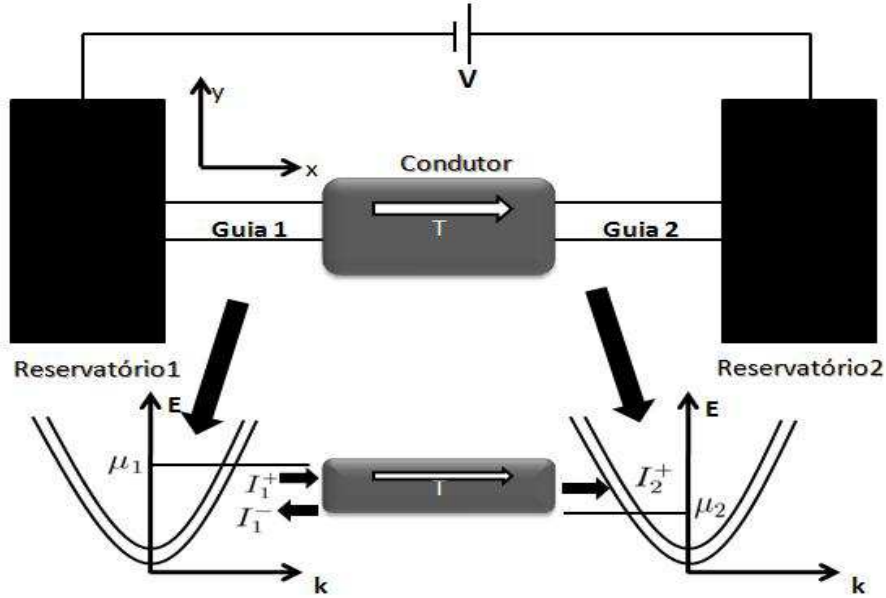


Figura 1.5: Figura com o esquema do modelo de Landauer para transporte quântico.

se a figura 1.5, onde existe um condutor conectado a dois contatos independentes por meio de guias. Os guias são ideais (balísticos) e carregam cada um N canais de propagação transversais (veja o capítulo seguinte para maiores detalhes dessa quantização). Os canais se propagam pelo condutor com uma probabilidade de transmissão T e, por conservação de corrente, probabilidade de reflexão $1 - T$. Os reservatórios não refletem canais de espalhamento, apenas os emitem de acordo com o valor do potencial eletroquímico μ . Dessa forma, supondo que o reservatório 1 tenha potencial eletroquímico μ_1 , que o reservatório 2 tenha potencial eletroquímico μ_2 e que $\mu_1 > \mu_2$, então haverá um fluxo de corrente I_1^+ saindo do reservatório 1.

Esse fluxo de corrente será dado por

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} N (\mu_1 - \mu_2), \quad (1.6)$$

onde o fator dois refere-se à degenerescência de spin. Como não há reflexão nos reservatórios, o único fluxo no guia 2 será o transmitido do condutor que, em termos da probabilidade de transmissão, é dado por

$$I_2^+ = \frac{2e}{h} NT (\mu_1 - \mu_2). \quad (1.7)$$

O guia 1 tem uma parcela do fluxo incidente que é refletida pelo condutor, gerando uma corrente dada por

$$I_1^- = \frac{2e}{h} N(1 - T)(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.8)$$

Portanto, a corrente líquida I que passa através de um ponto arbitrário do circuito da figura 1.5 é dada em termos do número de canais e da probabilidade de transmissão por

$$I = I_1^+ - I_1^- = I_2^+ = \frac{2e}{h} (\mu_1 - \mu_2) NT.$$

A condutância G é obtida dividindo a corrente dada pela equação anterior pela tensão aplicada, de maneira que

$$G = \frac{I |e|}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{2e^2}{h} NT. \quad (1.9)$$

1.2.1 Formulação de Matriz de Espalhamento para a Fórmula de Landauer-Büttiker

A descrição proposta por Landauer, com nítida separação entre os canais propagantes e a região de espalhamento, impõe um número finito de modos transversais nos guias. Por hipótese, os reservatórios estão em equilíbrio termodinâmico e os elétrons que populam os canais propagantes satisfazem à equação de Schrödinger

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right)^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (1.10)$$

onde E denota a energia incidente, $V(\vec{r})$ é o potencial de confinamento no guia e e é a carga fundamental do elétron. Estamos assumindo que o vetor posição está no plano, ou seja, $\vec{r} = (x, y)$, com x denotando a direção de propagação e y a direção transversal de propagação. Admitindo que as paredes dos guias estejam em $y = 0$ e em $y = d$, a solução da equação de Schrödinger é separável em uma porção propagante e uma porção estacionária da seguinte forma

$$\psi(\vec{r}) = c \sqrt{\frac{2}{d}} \sin(k_y y) e^{\pm i k_x x}, \quad (1.11)$$

onde c é uma constante de normalização, $p_x = \hbar k_x$ é o momento na direção de propagação livre x e $p_y = \hbar k_y$ é o momento na direção de propagação transversal. Obtemos a condição de quantização para o confinamento

$$k_{y,n} = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

A energia de Fermi E_F do sistema é a soma das energias longitudinais, $E_x = \frac{p_x^2}{2m}$, e transversais, $E_{y,n} = \frac{p_{y,n}^2}{2m}$. Dessa forma, se $E_{y,n} < E_F$, então $E_x > 0$ e o modo propagante é uma onda livre, chamado de canal aberto. No entanto, se $E_{y,n} > E_F$, então $E_x < 0$, o que implica em momento imaginário e um decaimento exponencial para o modo. Modos evanescentes são chamados de canais fechados. Portanto, os modos de espalhamento (os que incidem nos reservatórios em $x \rightarrow \pm\infty$) tem um valor máximo $n = N_g$, $g = 1, 2$ na equação (1.12), onde g é um índice do guia, conforme a figura (1.5). Assim, a solução da equação de Schrödinger em cada um dos guias é dada em termos das amplitudes e dos modos transversais como

$$\psi_g(x, y) = \sum_{n=1}^{N_g} (a_n^{(g)} \psi_n^{-,(g)} + b_n^{(g)} \psi_n^{+,(g)}); \quad \psi_n^{\pm,(g)} = \sqrt{\frac{2m}{k_{x,n} \hbar d}} \sin(k_{y,n} y) e^{\pm i k_{x,n} x}, \quad (1.13)$$

representando canais propagantes para a direita $(-)$ ou para a esquerda $(+)$ em cada um dos guias. A generalização da equação anterior para o caso de múltiplos guias (terminais), é feita no capítulo seguinte.

A formulação em termos de matrizes de espalhamento consiste em relacionar, por meio de uma matriz S (matriz de espalhamento), as amplitudes de entrada às de saída do condutor. Para isso, vamos definir as matrizes tipo coluna $A^{(g)} = (a_1^{(g)}, a_2^{(g)}, \dots, a_{N_g}^{(g)})^T$ e $B^{(g)} = (b_1^{(g)}, b_2^{(g)}, \dots, b_{N_g}^{(g)})^T$ denotando, respectivamente, as amplitudes de entrada e de saída no condutor de cada canal do guia. Estendendo essas matrizes de maneira a conter todas as amplitudes de entrada ou de saída separadamente, vamos definir as matrizes coluna $A = (A^{(1)} \ A^{(2)})^T$ e $B = (B^{(1)} \ B^{(2)})^T$. A matriz S é definida como a matriz que conecta amplitudes de entrada e de saída, de maneira que podemos escrever

$$B = SA. \quad (1.14)$$

A matriz S tem dimensão $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ e é usualmente decomposta em blocos que são interpretados como matrizes de reflexão, r , e de transmissão, t , de amplitudes de espalhamento. Dessa forma, podemos escrever

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

onde r (r') tem dimensão $N_1 \times N_1$ ($N_2 \times N_2$), representando a reflexão das amplitudes no guia 1 (2), e t (t') tem dimensão $N_1 \times N_2$ ($N_2 \times N_1$), representando a transmissão do guia 1 (2) para o guia 2 (1).

Usando a configuração da figura (1.5), de acordo com a teoria de Landauer, um único canal é transmitido do guia 1 para o guia 2 através do condutor com probabilidade T . Os auto-valores de $tt^\dagger$, $T_1, T_2, \dots, T_N$, representam, de acordo com a generalização para muitos canais de Büttiker, as probabilidades de tunelamento do guia 1 para o guia 2 de cada canal, que, supostamente, são independentes fora da região de espalhamento. Dessa forma, a probabilidade de transmissão dos N_1 canais do guia 1 é dada por $T = \text{Tr}(tt^\dagger)$ e a fórmula para a condutância do sistema pode ser escrita como

$$G = \frac{G_0}{N} \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (1.16)$$

onde $G_0 = 2e^2/h$. Mais adiante, usaremos também $g \equiv G/G_0 = \text{Tr}(tt^\dagger)$, a condutância adimensional. Note-se que estamos admitindo que a diferença de tensão entre os guias tende a zero (regime linear) e que a temperatura é próxima de zero.

De acordo com a equação (1.16), uma vez fixada a matriz de espalhamento e, conseqüentemente, a matriz de transmissão t , obtém-se imediatamente a condutância do sistema. Usualmente, dentro do formalismo de Landauer, ignora-se a origem microscópica da matriz de espalhamento e o hamiltoniano subjacente. Uma maneira de tratar o problema é estabelecer médias em um ensemble de “cópias” do sistema original. Para cada cópia, são estabelecidas entradas aleatórias que representam a matriz S . Por meio da equação (1.16), uma vez gerada a matriz S , extrai-se os auto-valores e a condutância correspondentes. Quando o número de elementos do ensemble fica suficientemente grande, pode-se extrair a média da condutância. Tal procedimento é muito usado, por exemplo, em simulações numéricas, inclusive para o cálculo da distribuição da condutância. Um experimento clássico que exhibe flutuações universais da condutância em sistemas mesoscópicos pode ser encontrado na referência [4], na qual foi investigado, empiricamente, o efeito de um campo magnético perpendicular em uma nanoestrutura de ouro e o resultado pode ser visto na figura (1.6). Em tal figura, é possível notar que existem *flutuações universais* da condutância em função do campo magnético B . Os valores para a condutância para valores diferentes de B são estatisticamente independentes, e, para as flutuações, a largura de um histograma fornece a variância da condutância.

Tomando novamente a definição da matriz de espalhamento mediante a equação (1.14) e considerando a conservação de corrente do formalismo de Landauer, devemos ter $BB^\dagger = AA^\dagger$ e então $\text{Tr}(BB^\dagger) = \text{Tr}((SA)(SA)^\dagger) = \text{Tr}(SAA^\dagger S^\dagger) = \text{Tr}(SBB^\dagger S^\dagger)$. Então, usando a propriedade cíclica do traço, obtemos $\text{Tr}(BB^\dagger(1 - SS^\dagger)) = 0$, ou seja, fica claro que a matriz de espalhamento deve obedecer ao vínculo de unitariedade $SS^\dagger = 1$, e o conjunto $\mathcal{T} = T_1, T_2, \dots, T_N$ de auto-valores de $tt^\dagger$ coincide com o conjunto de auto-valores de $1 - rr^\dagger$. Nas referências [19, 20], mostrou-se que

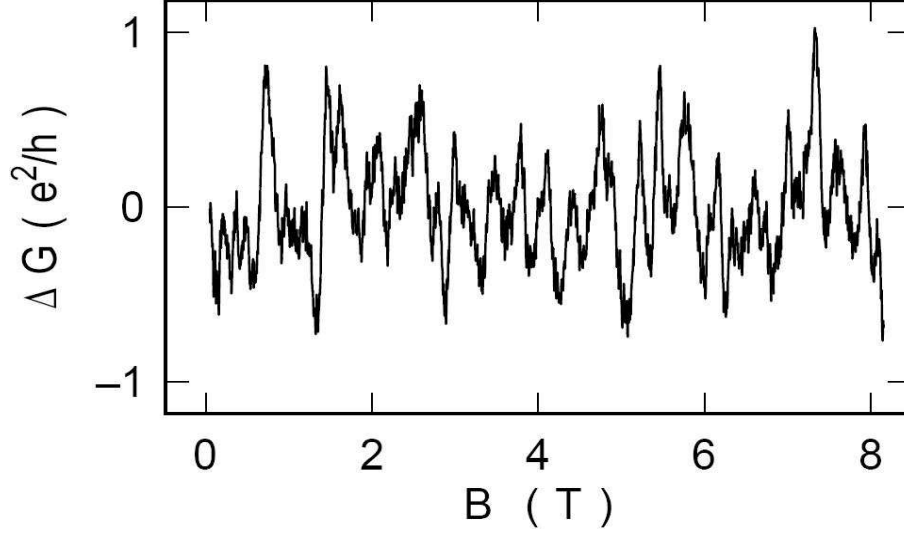


Figura 1.6: O gráfico exibe a flutuação universal da condutância como função de um campo magnético perpendicular em um nanofio de ouro, com 310 nm de comprimento e 25 nm de espessura. Figura extraída da referência [4].

a matriz de espalhamento pode ser parametrizada por meio da decomposição polar

$$S = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-T} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & \sqrt{1-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

onde U_i , $i = 1, \dots, 4$, são matrizes unitárias aleatórias de dimensão $N \times N$ e $T = \text{diag}(T_1, T_2, \dots, T_N)$. Os vínculos de simetria restringem o número de graus de liberdade da matriz: entradas reais para $\beta = 1$ (EO), entradas complexas para $\beta = 2$ (EU) e entradas quaterniônicas para $\beta = 4$ (ES). A decomposição polar será usada no capítulo 4. Outra maneira de decompor a matriz de espalhamento é em termos de auto-valores e auto-vetores da forma

$$S = \Omega \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_{2N}}) \Omega^\dagger, \quad (1.18)$$

onde ϕ_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, são números que caracterizam o deslocamento de fase do espalhamento e Ω contém entradas com o número característico de graus de liberdade do ensemble.

A representação em termos de ângulos de deslocamento foi estabelecida por Dyson, na referência [21], com o intuito de eliminar a restrição no intervalo de energia não-nula imposto pela densidade de níveis semi-circular do ensemble gaussiano.

Ao mesmo tempo, a distribuição correspondente é convergente devido ao grupo ser compacto (auto-valores de $e^{i\phi_n}$). Com o intuito de verificar a distribuição correspondente, vamos supor agora que as matrizes de espalhamento estão distribuídas uniformemente no grupo. Isso significa que a medida $d\mu(S)$ é invariante sob produtos por matrizes na equação $d\mu(S) = d\mu(USV)$, onde USV é uma matriz que tem o mesmo vínculo de simetria de S . A medida invariante $d\mu(S)$ é chamada de medida de Haar e, na representação de ângulos de deslocamento, Dyson mostrou na referência [21] que ela pode ser escrita como

$$d\mu(S) = \prod_{i < j} |\exp(i\phi_n) - \exp(i\phi_m)|^\beta d\mu(U) \prod_i d\phi_i. \quad (1.19)$$

Note-se que, ao contrário do que acontece com os ensembles gaussianos de Wigner, o chamado “ensemble circular (C) de Dyson” fica no regime universal para um número finito de campos ϕ_n . Usando o método de Mehta [22], Dyson fez essa constatação calculando a função de correlação de k níveis e observou que as propriedades de flutuação são as mesmas encontradas pelo próprio Mehta para o ensemble gaussiano. A grande vantagem do ensemble circular é a sua conexão imediata com o formalismo de espalhamento.

O ensemble circular atribui a todas as matrizes S a mesma probabilidade de serem encontradas, dado que $P_C(S) = \text{constante}$ (distribuição uniforme). Nesse sentido, o ensemble circular é o mais aleatório possível. Uma das consequências da uniformidade do ensemble é que a média da matriz S é nula

$$\int d\mu(S) S P_C(S) = 0. \quad (1.20)$$

Por outro lado, de acordo com a formulação de Landauer-Büttiker, vimos que condutores podem transmitir ou refletir o fluxo incidente, ou seja, a média da matriz S não deve ser, em geral, nula para esse tipo particular de espalhamento, no qual os reservatórios não refletem corrente. Associando a noção de “mais aleatório” a uma entropia $\mathcal{S} = - \int d\mu(S) P(S) \ln P(S)$, Mello, Pereyra e Seligman mostraram, na referência [23], que a distribuição que maximiza a entropia para média de matriz S não-nula

$$\int d\mu(S) S P(S) = \langle S \rangle, \quad (1.21)$$

é dada pelo núcleo de Poisson

$$P(S) \propto \left| \text{Det}(1 - \langle S \rangle^\dagger S) \right|^{-\beta(N_1 + N_2 - 1 + 2/\beta)}, \quad (1.22)$$

onde $\langle S \rangle$ é uma matriz sub-unitária ($\langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger < I$, onde I é a matriz identidade de mesma ordem de S), dada em termos de parâmetros fenomenológicos de reflexão das barreiras (1) e (2) por

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & r^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

O núcleo de Poisson será usado nos capítulos 4 e 5 para gerar a média de cumulantes no limite semiclássico em sistemas mesoscópicos com barreiras e na presença de espalhamento magnético e interação spin-órbita.

1.3 Teoria de Levitov-Lesovik

Quando o fluxo de corrente que atravessa a nanoestrutura tem baixa intensidade, um único portador de carga ganha importância experimental. Por outro lado, o processo de espalhamento quântico gera reflexão ou tunelamento, conforme visto na seção anterior. Dessa forma, espera-se que o número finito de modos propagantes em um fluxo de corrente muito baixo imponha um vínculo muito forte sobre o processo de transmissão: existe uma estatística de carga transmitida pelo sistema mesoscópico. A estatística de contagem de elétrons foi desenvolvida por Levitov e Lesovik, na referência [24], por completa analogia com a estatística de contagem de fótons em ótica quântica, como pode ser visto na referência [25]. O método experimental consiste em obter a função distribuição de probabilidade P_n de observação de n elétrons transferidos através do sistema mesoscópico durante um certo tempo de observação t . A função distribuição de probabilidade pode ser escrita em termos de uma função geratriz $\chi(\lambda)$, associada ao processo de medição estendida no tempo. A justificativa microscópica para o parâmetro λ para bósons e para férmions pode ser encontrada nas referências [24, 26]. A relação entre P_n e $\chi(\lambda)$ é

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\lambda} P_n \quad \text{e} \quad P_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda) e^{-in\lambda}. \quad (1.24)$$

Note-se, pela equação (1.24), que a propriedade $\chi(0) = 1$ estabelece a normalização da distribuição de probabilidade, $\sum_n P_n = 1$. A equação (1.24) também permite conexão direta com as características estatísticas da distribuição P_n . Para isso, vamos fazer a seguinte expansão

$$\ln \chi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{(i\lambda)^k}{k!}, \quad (1.25)$$

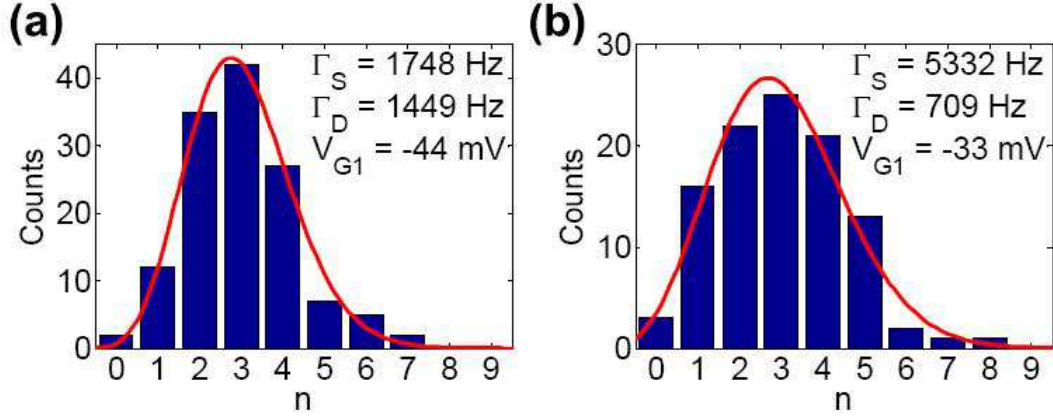


Figura 1.7: Os gráficos exibem a distribuição estatística experimental da contagem de n elétrons entrando em um ponto quântico durante um tempo de observação t . Os dois painéis, (a) e (b), diferem por valores de tensão nos “gates” (portões de entrada e saída de elétrons). O tempo t é escolhido de maneira que os dois painéis exibam a mesma média $\langle n \rangle = 3$. As curvas vermelhas são as esperadas pela estatística de contagem de Levitov-Lesovik. A figura foi extraída da referência [2].

onde $q_k = \langle \langle \delta n^k \rangle \rangle$ denota os cumulantes (ou correlatores irreduzíveis) da estatística e $\langle f(n) \rangle \equiv \sum_n f(n) P_n$. Um experimento típico onde foi detectada a distribuição de contagem de elétrons pode ser visto na referência [2] e a curva experimental é apresentada na figura (1.7).

Os primeiros três cumulantes da estatística de contagem são

$$\begin{aligned} q_1 &= \langle n \rangle, \\ q_2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2, \\ q_3 &= \langle (n - \langle n \rangle)^3 \rangle, \end{aligned} \tag{1.26}$$

e representam a média, a variância e a assimetria da distribuição P_n , conforme pode ser visto na figura (1.8). Vamos considerar o caso interessante de uma distribuição na qual existem M_0 tentativas independentes de transmissão de carga. Cada tentativa tem probabilidade T de sucesso e $R = 1 - T$ de fracasso. Sendo assim, a probabilidade de k tentativas de sucesso é dada por $C_{M_0}^{(k)} = M_0! / [(M_0 - k)! k!]$ e a distribuição de probabilidade é binomial $P_k = C_{M_0}^{(k)} T^k R^{M_0 - k}$. Assim, a função geratriz e a função característica dos cumulantes (o logaritmo da função geratriz), são,

respectivamente,

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= (Te^{i\lambda} + R)^{M_0} \\ \ln\chi(\lambda) &= N\ln(Te^{i\lambda} + R) = TN(i\lambda) + TRN\frac{(i\lambda)^2}{2!} + TR(T-R)N\frac{(i\lambda)^3}{3!} + \dots,\end{aligned}$$

ou seja, $q_1 = TN$, $q_2 = RTN$ e $q_3 = RT(T-R)N$ são os três primeiros cumulantes para a distribuição binomial de um único canal. A distribuição binomial anterior descreve as tentativas de transmissão de um único elétron “monocromático” (um único canal eletrônico) em uma corrente DC a uma temperatura nula. A generalização da distribuição binomial para múltiplos canais seguindo distribuições binomiais independentes é

$$\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^N (T_j e^{i\lambda} + R_j)^{M_0} = \prod_{j=1}^N [1 + T_j (e^{i\lambda} - 1)]^{M_0}, \quad (1.27)$$

onde $M_0 = eVt/h \gg 1$ é o número de tentativas de transmissão de elétrons durante um tempo de observação t , para um sistema em uma diferença de potencial V , e N_c é o número de canais independentes. A função característica $\Phi(\lambda)$ e os cumulantes irreduzíveis são obtidos, imediatamente, da equação (1.27). Podemos escrevê-los, respectivamente, como

$$\Phi(\lambda) = M_0 \sum_{j=1}^N \ln [1 + T_j (e^{i\lambda} - 1)], \quad q_k = \left. \frac{d^k}{d(i\lambda)^k} \Phi(\lambda) \right|_{\lambda=0}. \quad (1.28)$$

O primeiro cumulante q_1 para o sistema do ponto de contato com um fluxo de corrente DC pode ser obtido da equação (1.28), imediatamente, se usarmos a formulação de matrizes aleatórias apresentada anteriormente. Usando o bloco de transmissão da matriz de espalhamento, obtemos

$$q_1 = M_0 \sum_{j=1}^N T_j = M_0 \text{Tr } tt^\dagger, \quad (1.29)$$

ou seja, o primeiro cumulante adimensional $g \equiv q_1/M_0$ é, justamente, a condutância adimensional do formalismo de Landauer-Büttiker. O segundo cumulante, dado por

$$q_2 = M_0 \sum_{j=1}^N T_j R_j = M_0 \sum_{j=1}^N T_j (1 - T_j) = M_0 \text{Tr } [tt^\dagger (1 - tt^\dagger)], \quad (1.30)$$

é uma medida da largura da distribuição. O seu correspondente adimensional $p = q_2/M_0$ é chamado, na literatura, de potência do ruído de disparo e será tratado na subseção seguinte. O terceiro cumulante fica dado por $q_3 = M_0 \text{Tr } [tt^\dagger (1 - tt^\dagger) (1 - 2tt^\dagger)]$.

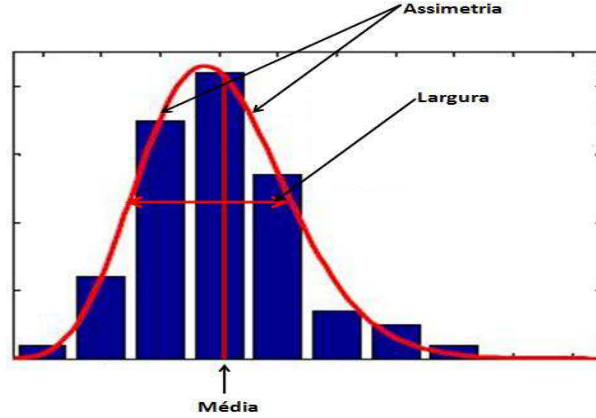


Figura 1.8: Figura exibindo uma distribuição estatística de contagem de elétrons. Os primeiros três cumulantes da fórmula de Levitov-Lesovik representam, respectivamente, a média, a largura e a assimetria da distribuição. A figura foi adaptada da referência [2].

1.3.1 Potência do Ruído de Disparo

O segundo cumulante da estatística de contagem é mais comumente conhecido na literatura como potência do ruído de disparo. Como vimos, esse cumulante fornece a largura da distribuição de transmissão através do sistema. No transporte quântico, existem contribuições de muitas fontes de ruído. A principal delas é o ruído térmico, que causa flutuações na ocupação de níveis de energia. Em equilíbrio termodinâmico, o número médio de ocupação $\langle n \rangle$ é determinado pela distribuição f de Fermi, $f = \langle n \rangle$. Considerando que sistemas fermiônicos satisfazem $n^2 = n$, a flutuação térmica resultante no número de ocupação é

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = f(1 - f). \quad (1.31)$$

A temperaturas finitas, portanto, as flutuações são determinadas pela distribuição de Maxwell-Boltzmann. A temperaturas nulas, a contribuição para a flutuação térmica se anula e a média se estabiliza em relação à essa variável.

A potência do ruído de disparo, por outro lado, está associada a flutuações no transporte quântico de amplitudes de espalhamento e atua mesmo à temperatura nula. Uma medida da largura da distribuição a temperatura nula é o fator Fano,

dado em termos da potência do ruído de disparo por

$$F = \frac{\sum_{n=1}^N T_n(1 - T_n)}{\sum_{n=1}^N T_n}, \quad (1.32)$$

onde $n \in \{1, \dots, N\}$ é um índice que caracteriza o canal. Note que o fator Fano assume valores entre 0 e 1 (ruído tipo Poisson). Se a transparência de todos os canais é nula, o fator Fano é nulo, indicando que a potência do ruído de disparo é nulo e que o transporte quântico se dá unicamente por reflexão. Se todos os canais são equivalentes, então o fator Fano fica dado por $F = 1 - T$, ou seja, para transparências iguais a um, o fator Fano também é nulo, indicando que o transporte se dá unicamente por transmissão. Então, o fator Fano é um forte caracterizador do efeito das barreiras no sistema.

Seguindo a referência [27], percebe-se algo interessante presente na potência do ruído de disparo: o seu valor caracteriza também a interferência entre as amplitudes de espalhamento. Para perceber isso, observe-se que a condutância pode sempre ser escrita em termos dos auto-valores de transmissão, ou seja, a condutância é sempre a soma de probabilidades de transmissão para cada canal separadamente. Por outro lado, a potência do ruído de disparo nunca pode ser escrita em termos unicamente desses auto-valores. Note-se que a potência do ruído de disparo é

$$p = \frac{q_2}{M_0} = \text{Tr} [tt^\dagger(1 - tt^\dagger)] = \text{Tr} (rr^\dagger tt^\dagger) = \sum_{i,j,k,l=1}^N r_{ik} r_{il}^* t_{jl} t_{jk}^*. \quad (1.33)$$

Como, para $m \neq n$, os termos $r_{ik} r_{il}^* t_{jl} t_{jk}^*$ do traço não são reais, é impossível escrever, em alguma base, a potência do ruído de disparo em termos de probabilidades de tunelamento. Essa informação indica que a descrição da estatística de contagem deve ser feita estritamente em termos de amplitudes de tunelamento e que os canais de espalhamento satisfazem um tipo especial de interferência quântica. Esse tipo de interferência pode gerar o fenômeno de localização fraca, como veremos adiante. De acordo com a referência [27], a impossibilidade de representar a potência de ruído de disparo em termos de probabilidades de tunelamentos gera importantes efeitos de interferência, considerando a mistura dos canais propagantes e a geração de indistinguibilidade desses modos.

1.4 Teoria da Localização

A propagação de ondas em meios desordenados pode levar a efeitos quânticos interessantes, devido à aleatoriedade do potencial de desordem, $V(\vec{r})$, com dependência

espacial. Como pode ser visto na referência [6], esses efeitos estão presentes tanto para modelos com modos da equação de Schrödinger, quanto para modos da equação de Helmholtz. Em um cristal ideal, uma onda tem propagação livre e pode-se descrever a sua dinâmica usando-se funções de Bloch. A impureza no cristal causa correções à propagação livre, criando resistência. No limite clássico, o espalhamento de funções de Bloch por impurezas leva à equação cinética de Boltzmann, a qual, para a condutividade, fornece

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (1.34)$$

onde n é a densidade de elétrons na amostra, τ é o tempo livre médio, e é a carga fundamental do elétron e m a sua massa. Note que essa fórmula não é sensível ao campo magnético. Geralmente, em cálculos práticos, assume-se que o potencial é gaussiano, isto é,

$$\begin{aligned} \langle V(\vec{r}) \rangle &= 0, \\ \langle V(\vec{r})V(\vec{r}') \rangle &= \frac{1}{2\pi\nu\tau}\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde $\nu = (V\Delta)^{-1}$ é a densidade de estados de uma partícula, Δ^{-1} , por unidade de volume, V , e τ é o tempo de espalhamento elástico. No limite de desordem suficientemente alta, Anderson, na referência [28], percebeu falhas no esquema perturbativo resultante da distribuição gaussiana da equação (1.35) e que o envelope χ das funções de onda pode localizar exponencialmente, $\chi \propto \exp(-r/\xi)$. Para o envelope, definimos r como a distância ao centro espalhador e ξ como o comprimento de localização. Baseado nas idéias de Anderson, na referência [29], Thouless estudou como as auto-funções de dois condutores com centros espalhadores independentes, cada um com comprimento L , podem mudar quando tais condutores são conectados. Ele percebeu a presença de dois regimes, (a) $L \gg \xi$ para o qual as auto-funções praticamente não são afetadas e (b) $\xi \gg L$ para o qual as auto-funções são grandemente afetadas. No regime $L \gg \xi$, o espalhamento se dá por muitos centros espalhadores e a função de onda atenua fortemente devido à múltiplas interferências, ou seja, o sistema localiza e a condutância decai exponencialmente com o comprimento L . No limite de baixa desordem, como está posto na referência [6], pode-se estabelecer um cálculo perturbativo em potências de $(k_F l)^{-1} \ll 1$ chamado de média em impurezas, no qual os diagramas resultantes são separados em difusons (parte clássica) e em cooperons (parte quântica sensível à interferência quântica). O parâmetro de expansão contempla o momento de Fermi k_F e o comprimento livre elástico l .

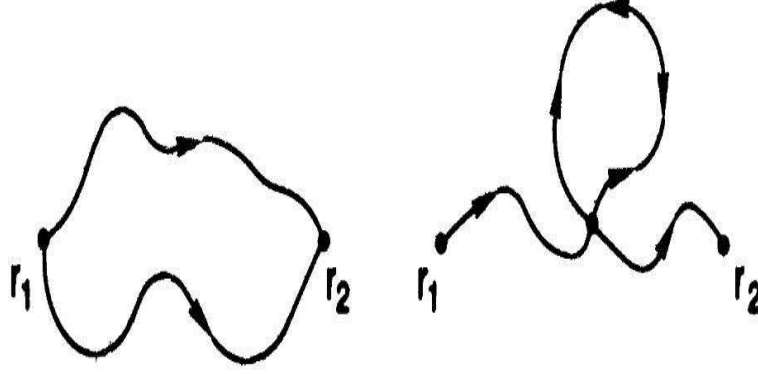


Figura 1.9: Figura exibindo trajetórias de modos eletrônicos dentro de uma amostra. A (a) exibe duas trajetórias sem interseções (difusons) entre os pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ e a (b) exibe uma trajetória com auto-interseção (cooperon). A figura foi adaptada da referência [5].

Dados dois pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ dentro da amostra, conforme a figura (1.9.(a)), a mecânica quântica estabelece que a descrição deve ser feita pela adição de amplitudes complexas A_i de espalhamento nas impurezas e não em termos da adição de probabilidades P_i . Portanto, o espalhamento por impurezas impõe que a probabilidade de propagação entre esses dois pontos é

$$P = \left| \sum_i A_i \right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j^*. \quad (1.36)$$

De acordo com a equação (1.36), a probabilidade total P depende da soma de probabilidades individuais $P_i = |A_i|^2$ e da interferência $A_i A_j^*$ entre diferentes amplitudes de espalhamento. Na figura (1.9.(a)), estão desenhadas duas das múltiplas trajetórias possíveis. As trajetórias têm, em geral, comprimentos e formas muito diferentes entre si, cada uma determinando uma diferença de fase $\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{p} \cdot d\vec{r}$ entre os pontos 1 e 2 e constituindo um ensemble de diferenças de fase com média nula. Entretanto, existem trajetórias especiais como a da figura (1.9.(b)), para as quais existe auto-interseção. Para cada trajetória desse tipo, existem dois tipos especiais de propagação, diferindo apenas pelo sentido do percurso na volta fechada. Uma contribuição (propagação) pode ser levada na outra pela substituição $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ e $d\vec{r} \rightarrow -d\vec{r}$ sem a alteração de $\delta\varphi$. Denotando as amplitudes das duas voltas possíveis

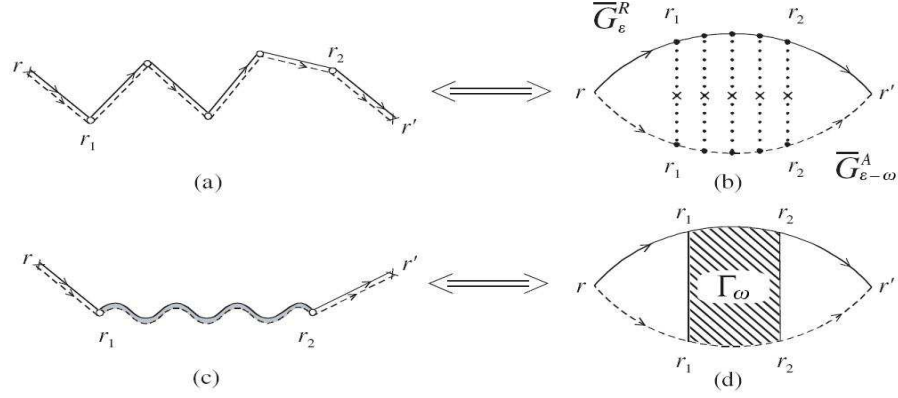


Figura 1.10: Figura exibindo, em (a) e (b), cinco espalhamentos para as probabilidades de trajetórias diretas entre os pontos r e r' . Em (c) e em (d), estão representados infinitos espalhamentos dentro de uma mesma trajetórias. A função Γ_ω representa uma série infinita de espalhamentos. Esses diagramas são chamados de difusons e representam a contribuição clássica para a condutividade. Os difusons, por definição, não são afetados por campos externos. A figura foi adaptada da referência [6].

por A_1 e A_2 , a probabilidade P_i desse tipo de trajetória é

$$P_i = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2 = 4 |A_1|^2, \quad A_1 = A_2, \quad (1.37)$$

ou seja, a probabilidade quântica fica duas vezes maior do que a probabilidade clássica $P_i = |A_1|^2 + |A_2|^2$ (sem os termos de interferência). Isso pode explicar, por exemplo, a diferença na condutância em função da dimensionalidade. Em uma e em duas dimensões, a probabilidade de retorno a um ponto de um caminhante aleatório tem valor um, e em três dimensões tem valor menor que um. Isso significa que o caminhante aleatório volta, necessariamente, para casa em uma e em duas dimensões em um tempo suficientemente alto. O mesmo não acontece em três dimensões. Assim, a contribuição de interferência quântica é menor em três dimensões. A interferência quântica dá origem à localização de estados e essa correção quântica é genericamente chamada de *localização fraca*.

Para obter informações sobre o gás eletrônico bastaria conhecer os estados ϕ_i e as respectivas amplitudes. Isso poderia ser implementado usando-se o hamiltoniano H do sistema fechado e resolvendo-se a equação de Schrödinger dada por

$$H\phi_i = E_i\phi_i, \quad H = H_0 + H_1, \quad (1.38)$$

onde H_0 é o hamiltoniano livre do sistema na ausência de centros espalhadores e H_1 é um potencial aleatório que descreve a aleatoriedade das impurezas. A média do potencial de impurezas é nula, isto é, $\langle H_1 \rangle = 0$, e pode ser simulada por várias realizações possíveis de amostras do sistema. Para um H_1 arbitrário, fica impossível resolver a equação (1.38). Na verdade, a sua solução carrega muita informação irrelevante, considerando que, para extrair as quantidades termodinâmicas relacionadas, é suficiente conhecer a densidade de estados $\rho(E, \vec{r})$ dada por

$$\langle \rho(E, \vec{r}) \rangle = \left\langle \sum_{i, \sigma} \phi_i^*(\vec{r}, \sigma) \phi_i(\vec{r}, \sigma) \delta(E - E_i) \right\rangle, \quad (1.39)$$

onde σ é um índice de spin. Seguindo a referência [5], a densidade local de estados também pode ser escrita em termos de funções de Green como

$$\rho(E, \vec{r}) = \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma} \text{Im} G_E^A(y, y), \quad G_E^{R,A}(y, y') = \sum_i \frac{\phi_i(y) \phi_i^*(y')}{E^{\pm} - H}, \quad (1.40)$$

onde $R(A)$ representa a função de Green retardada (avançada) e $E^{\pm}$ é definida em termos de fases como $E^{\pm} = E \pm i\delta$, com $\delta \rightarrow 0$.

Mesmo com o problema bem formulado, a média dada pela equação (1.39) não pode ser facilmente obtida. Uma possibilidade seria executar imediatamente uma expansão em potências de $(k_F l)^{-1} \ll 1$. Uma forma de obter os termos clássicos e de interferência quântica, é executar uma média, supondo uma distribuição gaussiana conforme a equação (1.35). Esse método é exposto, por exemplo, na referência [6]. A implementação desse cálculo perturbativo chamado de *média em impurezas* parte da solução perturbativa da função de Green que satisfaz a equação diferencial

$$(E - H_0 - H_1(\vec{r})) G_E^{R,A}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.41)$$

e que também pode ser escrita em uma forma integral. O cálculo diagramático consiste em representar as funções de Green não-perturbadas por linhas contínuas e os potenciais de impurezas $H_1(\vec{r})$ por cruces contidas nas linhas contínuas da propagação livre. Linhas tracejadas representam integrais (médias) sobre o potencial de impureza. Os diagramas que contribuem para esse cálculo são os difusons (diagramas escada) e os cooperons (diagramas maximamente cruzados). Os difusons não são suscetíveis a campos externos, ao contrário dos cooperons. Para efeito ilustrativo, colocamos nas figuras (1.10) e (1.11) as representações diagramáticas dos difusons e cooperons, respectivamente, que são as duas primeiras contribuições para a condutividade em sistemas metálicos.

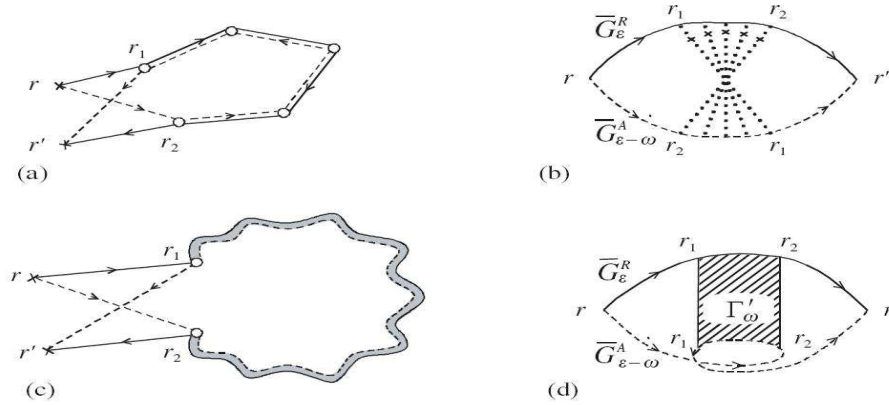


Figura 1.11: Figura exibindo em (a) e (b) alguns espalhamentos em trajetórias fechadas com interferência quântica. Os painéis (c) e (d) representam infinitos espalhamentos com interferência quântica em trajetórias fechadas, constituindo os cooperons ou diagramas maximamente cruzados. A função Γ'_ω representa todos os espalhamentos. A figura foi adaptada da referência [6].

Nos capítulos 4 e 5, veremos maiores detalhes matemáticos e físicos dessas contribuições. O cálculo em média de impurezas leva em conta detalhes microscópicos da amostra e pode se tornar proibitivamente complexo para a obtenção de cumulantes como a potência do ruído de disparo, ou para a obtenção de correções de maior ordem em sistemas tipo heteroestruturas com campos externos de descoerência sofisticados.

1.5 Supersimetria

A média em impurezas pode gerar devidamente a correção quântica para sistemas desordenados. Entretanto, muitos efeitos, típicos de sistemas mesoscópicos a baixas temperaturas, tornam o formalismo de expansão diagramática em cooperons e difusons proibitivamente complexo do ponto de vista técnico. A principal dificuldade está relacionada à proliferação de diagramas para o cálculo de quantidades genéricas como a potência do ruído de disparo. Uma tentativa é abrir mão da descrição perturbativa e tentar integrar diretamente “os graus de liberdade eletrônicos” levando-os a um outro espaço alvo com graus de liberdade efetivos. Esses novos graus de liberdade podem ser, por exemplo, modos de Goldstone, como veremos.

A idéia básica, iniciada nos trabalhos sobre o truque de réplicas, é representar médias de produtos de funções de Green em termos de derivadas de uma função geratriz. Por exemplo, o traço sobre os estados dado pela equação (1.39) pode ser obtido da equação (ver a referência [30])

$$\text{Tr} \frac{1}{E^\pm - H} = \left. \frac{\partial \ln F(J)}{\partial J} \right|_{J=0}, \quad (1.42)$$

onde J é uma fonte, o traço é sobre o espaço de N auto-estados e F é uma função geratriz escrita como

$$F(J) = \int d[S] \exp [\pm i S^\dagger (E^\pm 1_N - H + J 1_N) S]. \quad (1.43)$$

O vetor complexo S tem N componentes e a integral é executada sobre as componentes reais e imaginárias das entradas. Um problema fundamental do uso da função geratriz é a presença de um termo de normalização, dado por

$$F(0) = \frac{1}{\det [\pm 2\pi i (E^\pm - H)]}, \quad (1.44)$$

após a execução das derivadas e a tomada do limite $J \rightarrow 0$. A necessidade de tomar o logaritmo, conforme a equação (1.42), é eliminar este termo no truque de réplicas da referência [31]. Uma maneira de eliminar o logaritmo e resolver o problema da normalização é considerar o uso de *supersimetria*.

Conforme está estabelecido no apêndice (1), o termo de normalização, dado pela equação (1.44), pode ser representado por uma superintegral. As variáveis de Grassmann (fermiônicas) surgem da representação do determinante no denominador e as variáveis bosônicas de determinantes no numerador. Procedendo assim, nas referências [5, 32], Efetov mostrou que a função geratriz do *ponto fechado* pode ser convergente no super-espaço. Efetov também mostrou que, nesse espaço, o conjunto de “graus de liberdade eletrônicos” podem ser representados por meio de matrizes de ordem oito, reduzindo drasticamente o número de graus de liberdade do problema. O espaço alvo contém um modelo σ não-linear supersimétrico descrevendo a dinâmica de campos de Goldstone.

Para um sistema aberto, como o bilhar de Niels Bohr, propriedades resultam do espalhamento de modos externos. As características do sistema são dadas em termos de matrizes aleatórias que, em modelos microscópicos, são determinadas exclusivamente em termos do hamiltoniano e das simetrias do sistema. Esse sistema acoplado a modos externos é usualmente chamado de *sistema aberto*. Como

vimos, o formalismo de Landauer-Büttiker relaciona propriedades de transporte a matrizes de espalhamento. Por vezes, a origem microscópica da matriz de espalhamento é ignorada. Um modelo que incorpora o formalismo de espalhamento para reações nucleares e modelos hamiltonianos para o núcleos pesados foi estabelecido por Mahaux e Weidenmüller na referência [33]. Como veremos no capítulo 2, o modelo nuclear de Mahaux-Weidenmüller pode ser adaptado ao modelo de transporte de modos eletrônicos de Landauer-Büttiker, gerando resultados universais. Usando o método de supersimetria e o modelo de Mahaux-Weidenmüller, na referência [34], em 1985, Verbaarschot, Weidenmüller e Zirnbauer (VWZ) resolveram, não-perturbativamente, o problema da correlação de elementos da matriz de espalhamento em núcleos pesados, ou seja, resolveram, no limite quântico, o problema proposto por Niels Bohr. A adaptação para o problema do transporte quântico em sistemas mesoscópicos, seguindo do modelo de VWZ, será feita no capítulo 2.

1.6 A Tese

No capítulo 2, estudaremos o problema de espalhamento quântico seguindo o modelo de Mahaux-Weidenmüller para o caso de uma cavidade caótica acoplada a múltiplos terminais. Tal modelo fornece uma descrição hamiltoniana e descreve o espalhamento de canais de propagação eletrônicos por um ponto quântico com um número muito grande de ressonâncias. Os canais de espalhamento não têm “reação direta”, o que implicará em certas condições de ortogonalidade sobre o acoplamento entre os canais e os modos ressonantes. Consideraremos o limite universal de uma distribuição aleatória de estados ressonantes. No limite universal, escolheremos, sem perda de generalidade, um ensemble gaussiano para a distribuição. Procedendo de acordo com a formulação supersimétrica para sistemas abertos de VWZ, obtaremos o modelo σ não-linear correspondente para a função geratriz de cumulantes e momentos da estatística de contagem. Cálculos exatos serão executados e os cumulantes e momentos serão escritos em termos de integrais triplas. O procedimento é não-perturbativo e contém toda a informação quântica relevante sobre o sistema.

No capítulo 3, mostraremos uma expansão semiclássica do modelo σ para os três possíveis ensembles de matrizes hamiltonianas da cavidade caótica. Simetrias contínuas da ação do modelo σ determinam uma “lei de conservação” no limite semiclássico. A lei de conservação dá origem a uma *teoria de circuitos*. Procedendo a expansão, obteremos o termo principal da condutância e da potência do ruído de disparo. Seguindo uma referência recente, calcularemos a correção quântica da condutância e da potência do ruído de disparo via teoria de circuitos. A primeira etapa

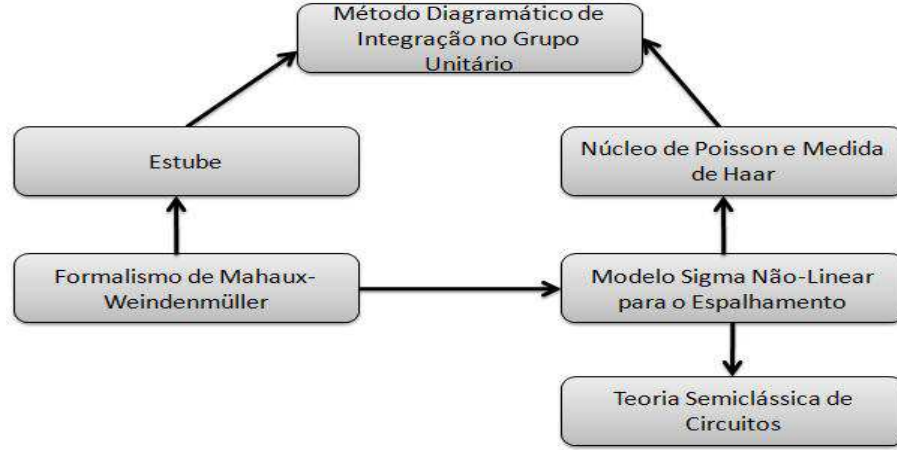


Figura 1.12: Figura exibindo as consequências diretas do modelo de Mahaux-Weidenmüller para teorias do espalhamento quântico em sistemas mesoscópicos.

consiste em obter a correção para os três ensembles puros de Wigner-Dyson. Para ensembles puros, observamos interessantes e inesperados efeitos do tipo supressão-amplificação para condutância e para a potência do ruído de disparo. Dentro do mesmo esquema conceitual, calculamos as correções também para o sistema em regime de crossover, isto é, ligado a campos finitos de quebra de simetria de reversão temporal e a espalhamento spin-órbita. Em regime de crossover, observamos uma miríade de efeitos do tipo supressão-amplificação.

No capítulo 4, apresentaremos uma transformação tipo “color-flavor” indireta que faz o mapa entre o modelo σ e o espaço de matrizes aleatórias descritas pelo núcleo de Poisson. O mapa proposto permite a integração na medida de Haar do espaço de matrizes aleatórias. Efetuaremos uma expansão semiclássica nesse espaço seguindo regras diagramáticas. Confirmando os resultados obtidos via teoria de circuitos, obtemos o termo principal e a primeira correção quântica para a condutância e para a potência do ruído de disparo. A confirmação destes resultados permitiu descobrir quais são os diagramas topologicamente distintos para o caso dos termos da correção quântica da potência do ruído de disparo com barreiras. Os diagramas da expansão mencionada são construídos por analogia com a estrutura dos diagramas da média em impurezas. A construção dos diagramas é feita considerando as estruturas difuson (diagramas escada) e as estruturas cooperons (maximamente cruzados).

No capítulo 5, partiremos do fato de que a fórmula de Mahaux-Weidenmüller

dependente de energia pode ser representada como um “estube”. O estube fornece um meio de perturbar o espectro de níveis de energia da cavidade caótica com campos externos fracos. Usaremos essa característica para perturbar a cavidade caótica de maneira sutil, com hamiltonianos conhecidos, para inserir campos externos e certos efeitos especiais de estruturas cristalinas. O método de estube pode ser inserido em alguma parametrização no espaço das matrizes aleatórias de espalhamento. Usaremos tal fato para integrar na medida de Haar e obter o crossover gerado por dois mecanismos distintos: (a) correção relativística para o acoplamento spin-órbita e (b) correção devido à anisotropias na cavidade caótica.

A figura (1.12) exhibe o arcabouço conceitual desta tese. O ponto de partida é o modelo de Mahaux-Weidenmüller, de onde, usando o formalismo de VWZ, obtemos o modelo σ correspondente. O modelo σ pode gerar resultados diretamente com a integração na super-variedade correspondente. O modelo σ também pode gerar uma teoria de circuitos se houver uma expansão semiclássica direta. Usando uma transformação tipo “color-flavor”, um mapa exato pode ser estabelecido entre o modelo σ e o núcleo de Poisson com medida de Haar. A construção do método diagramático de integração no grupo unitário requer um estube que também pode ser deduzido do modelo de Mahaux-Weidenmüller. As relações entre as teorias e os passos conceituais serão feitos ao longo desta tese.

Capítulo 2

Modelo Sigma Não-linear Super-Simétrico: Momentos e Cumulantes de um Ponto Quântico

Na introdução, vimos que o processo de espalhamento em um meio aleatório é um problema bastante antigo, datando do modelo de bilhar de Niels Bohr para núcleos compostos. Vimos também que o caos quântico pode ser descrito por um hamiltoniano aleatório na região de espalhamento e, nos primórdios da formulação de espalhamento em física nuclear, que Wigner desenvolveu uma teoria de matrizes aleatórias para descrever espalhamento ressonante de neutrons lentos em núcleos pesados. Nesses anos primordiais, alguns problemas foram resolvidos analiticamente, como a distribuição do espaçamento médio de níveis dos auto-valores do hamiltoniano levando em conta argumentos de simetria. Vimos que, em 1983, as funções de correlação da estatística de níveis da cavidade caótica foram calculadas na referência [5] usando formalismo de supersimetria. Nesse trabalho, Efetov descobriu uma importante maneira de diminuir dramaticamente o número de variáveis independentes da descrição estocástica. Para um número arbitrário de canais de espalhamento, usando o formalismo hamiltoniano, e um mapeamento no modelo σ não-linear supersimétrico zero-dimensional, Verbaarchot, Weindenmüller e Zirnbauer [34] obtiveram a função de correlação da matriz de espalhamento e resolveram o problema de Niels Bohr em reações nucleares ressonantes.

Em sistemas mesoscópicos, probabilidades de transmissão são associadas com observáveis de transporte por meio do formalismo de espalhamento de Landauer-

Büttiker e a solução da referência [34] ganha uma importância fundamental. Condutância e potência do ruído de disparo, assim como as suas flutuações universais, são uma fonte de informação quântica para sistemas mesoscópicos. Nesse contexto, algumas outras formulações bastante bem sucedidas ganham importância como: integração na medida de Haar por meio da técnica diagramática (referência [7]), teoria quântica de circuitos (referência [35]) e muitas outras técnicas com as mais diversas estruturas algébricas [27, 36, 37, 38, 39, 40]. Estas técnicas resolvem o problema no limite semiclássico (número suficientemente alto de canais de espalhamento), cada uma com o seu domínio específico de aplicabilidade. Outras técnicas exploram o limite de um número arbitrário de canais de espalhamento abertos, revelando, de maneira não-perturbativa, toda a informação quântica relevante. O acesso a esse regime de um número pequeno de canais é uma tarefa dura, como pode ser observado em alguns trabalhos nessa linha como nas referências [41, 42, 43, 44]. Até o momento, o único formalismo que incorpora barreiras (ou média não-nula da matriz de espalhamento) e número arbitrariamente pequeno de canais em um esquema não-perturbativo é a supersimetria [45].

Neste trabalho, usaremos o formalismo hamiltoniano, seguindo o procedimento da referência [34]. Este procedimento tem a grande vantagem de incorporar toda a informação do fenômeno de ressonância no ponto quântico, que pode ser visto como uma cavidade caótica. Mostraremos uma descrição detalhada da versão multiterminal da formulação padrão de supersimetria para sistemas abertos seguindo a referência [45] e apresentaremos uma fórmula geral para a condutância no caso de contatos não-ideais para sistemas com simetria de reversão temporal e rotação de spin. Completando o estudo, faremos uma análise numérica dos resultados analíticos no limite quântico relevante, apresentando gráficos para um número arbitrariamente pequeno de canais na presença de barreiras. Estudaremos flutuações universais da condutância e potência do ruído de disparo usando o mesmo modelo σ não-linear e mostraremos, numericamente, que esse modelo é suficientemente robusto para incorporar cumulantes e momentos de ordem superior.

2.1 Dedução da Fórmula de Mahaux-Weidenmüller

Um formalismo estocástico para espalhamento quântico caótico foi apresentado no trabalho de Verbaarschot, Weidenmuller e Zirnbauer (VWZ) [34]. Motivados pelo estudo de reações ressonantes em física nuclear, eles conseguiram adaptar, apropriadamente, as idéias de teoria de matrizes aleatórias (TMA) para sistemas abertos de maneira a tornar possível incorporar o limite quântico extremo (número arbitrariamente

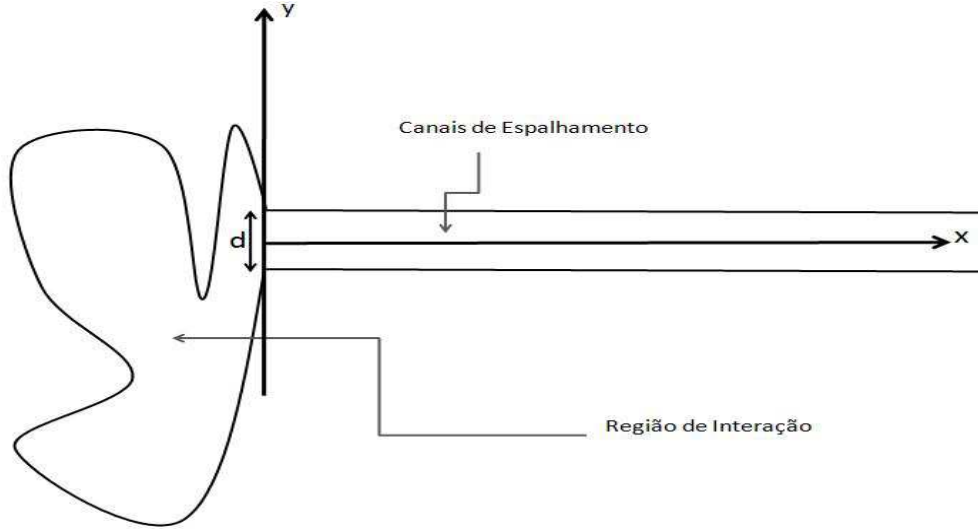


Figura 2.1: Espalhamento de modos propagantes em um guia semi-infinito causado na região de interação.

amento pequeno de canais). Em um fenômeno de espalhamento geral, assume-se que os eventos de espalhamento acontecem em uma região compacta do espaço de configurações, o qual é genericamente chamado de “região de confinamento”. Os subprodutos dessa interação na região compacta são denominados de “modos propagantes”, e são caracterizados por um conjunto enumerável de números quânticos. Esses números quânticos podem indexar os graus de liberdade internos de cada estado assintoticamente livre.

Consideremos, primeiramente, o modelo especificado na figura 2.1, o qual consiste de modos propagantes ao longo de um guia semi-infinito com largura d . Os modos propagantes do guia são quantizados ao longo da direção transversal. Vamos assumir que o guia carregue M canais abertos e independentes, cada um em uma energia E específica. Na região assintótica, existirá, portanto, um conjunto de estados de espalhamento denotados por $|n, E\rangle$; $n = 1..M$ normalizados segundo a prescrição $\langle n, E_1 | m, E_2 \rangle = \delta_{mn} \delta(E_1 - E_2)$. Na região compacta de interação, por outro lado, assume-se a existência de um conjunto discreto de N_c estados ortogonais $|\mu\rangle$; $\mu = 1, \dots, N_c$.

Na ausência de acoplamento entre os diferentes conjuntos de estados, um hamiltoniano pode ser imediatamente escrito. Ignoraremos quaisquer “reações diretas”, ou seja, vamos assumir que os canais de reação estão acoplados apenas através

da região de interação. Nesse caso, a parcela do hamiltoniano que contém os canais de reação deve ser diagonal, de tal forma que o hamiltoniano pode ser decomposto em duas partes independentes da seguinte maneira

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mu\nu} |\mu\rangle (H_{ri})_{\mu\nu} \langle\nu| + \sum_n \int dE |n, E\rangle E \langle n, E|. \quad (2.1)$$

O primeiro termo da equação (2.1) denota a representação em uma base arbitrária do hamiltoniano $\mathcal{H}_{ri}$ da região compacta de interação, a qual contém $N_c \gg 1$ auto-estados de $\mathcal{H}_{ri}$. O segundo termo do hamiltoniano contém os estados da região de canais abertos. O modelo VWZ baseia-se na hipótese de aleatoriedade da matriz H_{ri} que representa o operador $\mathcal{H}_{ri}$, incorporando com isso as propriedades básicas de TMA para matrizes $N_c \times N_c$ de ordem alta. Por outro lado, de acordo com o mesmo modelo, o segundo termo é determinístico e corresponde aos estados assintóticos. Os canais de entrada se acoplam com os auto-estados de $\mathcal{H}_{ri}$, criando canais de espalhamento assintoticamente livres. O termo de acoplamento pode ser escrito na base $\{|\mu\rangle, |n, E\rangle\}$ como

$$\mathcal{V} = \sum_{\mu, n} \left(|\mu\rangle \int dE W_{\mu n} \langle n, E| + \text{h.c.} \right) \quad (2.2)$$

O conjunto de estados de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$ pertence a um espaço de Hilbert H de dimensão infinita. Esse conjunto pode ser visto como um espaço de estados, dotado de um certo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, carregando, de acordo com o teorema da representação de Riesz, um único operador contínuo $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H} : H \rightarrow H$ com a seguinte propriedade

$$\langle \mathcal{H}\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \rangle = \langle \Phi^{(1)}, \mathcal{H}^\dagger \Phi^{(2)} \rangle, \quad \forall \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \in H. \quad (2.3)$$

O operador $\mathcal{H}^\dagger$ é chamado de operador adjunto e é uma generalização do conjugado complexo. Vamos admitir que o hamiltoniano com interação seja hermitiano (ou auto-adjunto), i.e., $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$, e obter os estados, $\Phi^{(1)}$ e $\Phi^{(2)}$, e as correspondentes restrições sobre tais estados diante da hermiticidade. Apresentamos uma maneira de conectar as amplitudes dos canais abertos por meio de uma matriz de espalhamento S que incorpora os vínculos sobre o acoplamento.

Uma vez fixado o hamiltoniano e suas propriedades, podemos imediatamente obter a matriz S de espalhamento correspondente. Para isso, seguiremos as referências [46, 47, 48]. O primeiro passo consiste basicamente em obter os canais

de espalhamento dentro dos guias mediante a formulação canônica da mecânica quântica, ou seja, usando a seguinte equação bidimensional de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(x, y), \quad (2.4)$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar k$ o seu momento. Seguindo a figura (2.1), os estados $\Psi(x, y)$ são quantizados na direção transversal y de largura d e são assintoticamente livres na direção longitudinal x , ou seja, a equação (2.4) satisfaz a condição de contorno $\Psi(x, y = \pm d/2) = 0$. Considerando o vínculo, obtemos uma solução que corresponde a uma parte tipo onda propagante

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^2 k_a/m}} [A_a \exp(-ik_a x) + B_a \exp(ik_a x)] \quad (2.5)$$

normalizada, e a uma parte tipo onda estacionária

$$\phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \left[\left(\frac{n\pi}{d} \right) \left(y + \frac{d}{2} \right) \right] \quad n = 1, \dots, M.$$

As soluções podem ser escritas como um produto $\Psi_n(x, y) = \psi_n(x)\phi_n(y)$. Uma maneira bastante apropriada de denotar todas as soluções é escrever um “vetor solução” cuja entrada n é a solução de rótulo n para a equação de Schrödinger no guia. Sendo assim, a solução pode ser escrita como $\Psi = (\Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y), \dots, \Psi_M(x, y))^T$. Note que existem M canais abertos, i.e., dado que o sistema tem energia $E = \hbar^2 k^2/2m$ e que o vetor de onda $k_n = \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]$ deve ser real para uma onda propagante; então, M deve ser menor ou igual ao maior inteiro menor que kd/π . Os outros canais são fechados (evanescentes) e não contribuem para o transporte quântico.

Exemplo: Podemos extrair a matriz S do sistema para o caso da cavidade caótica (região de interação) estar desacoplada dos guias. Para isso, usamos a seguinte condição de contorno

$$\left. \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.6)$$

representando a ausência de fluxo de probabilidade através da interface em $x = 0$. Diretamente da equação (2.6), podemos concluir que $-ik_n A_n + ik_n B_n = 0$, o que equivale a escrever a relação entre os vetores amplitudes dos canais de “entrada”, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_M)^T$, e dos canais de “saída”, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_M)^T$, como

$B_n = \delta_{nm} A_m$. Então, uma vez fixada a condição de contorno de não-interação, imediatamente, concluímos que a matriz de espalhamento é matriz identidade.

A interação pode ser estabelecida considerando condições de contorno mais gerais que ampliam o espaço de Hilbert dos estados do sistema. Consideremos então N_c estados ortogonais da cavidade caótica e agrupemos todos eles como um vetor de estados escrito como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N_c})^T$. O vetor $\mathbf{u}$ pode ser obtido diretamente da matriz aleatória $\mathcal{H}_{ri}$ da cavidade. Os auto-estados do hamiltoniano, que descreve a interação dos estados ressonantes da cavidade com os canais propagantes no guia, podem ser escritos como $\Phi = (\mathbf{u}, \Psi)^T$ e pertencem ao espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, C^M) \oplus C^N$. Vamos definir o operador hamiltoniano atuando nesse espaço de Hilbert como

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}_{ri} & \hat{\mathcal{W}}^{(1)} \\ \hat{\mathcal{W}}^{(2)} & \hat{\mathcal{H}}_c \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

O operador $\hat{\mathcal{H}}_{ri}$ atua na região de interação e é representado pela matriz hamiltoniana $N_c \times N_c$, cujos auto-estados formam as ressonâncias do sistema aberto. Os operadores $\hat{\mathcal{W}}^{(1)}$ e $\hat{\mathcal{W}}^{(2)}$ descrevem o acoplamento dos canais propagantes com as ressonâncias. O operador $\hat{\mathcal{H}}_c = -\hbar^2/2m \text{diag}(\partial_x^2 + \partial_y^2, \partial_x^2 + \partial_y^2, \dots, \partial_x^2 + \partial_y^2)$ representa o operador energia cinética do guia.

Admitindo que o acoplamento é local, podemos escolher $\hat{\mathcal{W}}^{(2)} = 0$ e $\hat{\mathcal{W}}^{(1)}$, mantendo a hermiticidade, de modo que

$$\hat{\mathcal{W}}^{(1)}\Psi = \int_{-d/2}^{d/2} dy \mathcal{W}(y)\Psi(0, y) = \hat{\omega}\psi(0), \quad (2.8)$$

onde $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_M(0))$ e $\hat{\omega}$ tem entradas $\omega_{\mu n} = \int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{W}_{\mu n} \phi_n(y)$, com $\mu = 1, \dots, N_c$ e $n = 1, \dots, M$. Dessa forma, podemos escrever como o operador hamiltoniano atua nos estados do espaço de Hilbert estendido

$$\mathcal{H}\Phi = (\mathcal{H}_{ri}\mathbf{u} + \hat{\omega}\psi(0), \mathcal{H}_c\Psi)^T \quad (2.9)$$

Definimos o produto escalar nesse espaço de Hilbert como

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = u_1^\dagger u_2 + \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle, \quad \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_0^\infty dx \Psi_1^\dagger \Psi_2, \quad (2.10)$$

onde consideramos que a propagação ocorre no semi-eixo x positivo.

Como mencionamos anteriormente, uma das condições que vamos impor é que o operador hamiltoniano seja auto-adjunto. Para o conjunto completo de estados definidos, $\mathcal{H}$ não é auto-adjunto em geral. Vamos impor condições de contorno e

encontrar um subconjunto de estados para os quais $\mathcal{H}$ satisfaça o requerimento de hermiticidade. Considerando o produto interno definido anteriormente, temos

$$\langle \mathcal{H}\Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \left(\mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H}_{ri}^\dagger + \psi_1^\dagger(0) \hat{\omega}^\dagger \right) \mathbf{u}_2 + \langle \mathcal{H}\Psi_1 | \Psi_2 \rangle, \quad (2.11)$$

$$\langle \Phi_1 | \mathcal{H}\Phi_2 \rangle = \mathbf{u}_1^\dagger (\mathcal{H}_{ri} \mathbf{u}_2 + \hat{\omega} \psi_2(0)) + \langle \Psi_1 | \mathcal{H}\Psi_2 \rangle. \quad (2.12)$$

Subtraindo as equações (2.11) e (2.12), notamos que o termo $\mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H}_{in}^\dagger \mathbf{u}_2$ é cancelado, considerando que $\mathcal{H}_{ri}$ é hermitiana. Integrando por partes em x , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\Phi_1 | \Phi_2 \rangle - \langle \Phi_1 | \mathcal{H}\Phi_2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi_1^\dagger \right) \Big|_{x=0} \psi_2(0) - \mathbf{u}_1^\dagger \hat{\omega} \psi_2(0) \\ &\quad + \psi_1^\dagger(0) \hat{\omega}^\dagger \mathbf{u}_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \psi_1^\dagger(0) \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Claramente, a equação (2.13) nos permite concluir que o operador $\mathcal{H}$ não é, em geral, auto-adjunto. Na referência [47], são estabelecidos vínculos gerais em $x = 0$ para o subconjunto do espaço de Hilbert, que torna $\mathcal{H}$ auto-adjunto. Para as nossas finalidades, basta a seguinte escolha mais restrita:

$$\hat{\omega}^\dagger \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right) \Big|_{x=0}. \quad (2.14)$$

Queremos acoplar os canais propagantes em $x = 0$, o que pode ser feito notando também que o vetor $\mathbf{u}$ está relacionado ao vetor de interação, nesse ponto, mediante a equação de Schrödinger do sistema

$$\mathcal{H}\Phi = (\mathcal{H}_{ri} \mathbf{u} + \hat{\omega} \psi(0), \mathcal{H}_c \Psi)^T = E(\mathbf{u}, \Psi)^T, \quad (2.15)$$

ou seja, a primeira componente da igualdade anterior estabelece que $\mathcal{H}_{ri} \mathbf{u} + \hat{\omega} \psi(0) = E\mathbf{u}$, indicando conservação de energia no ponto de contato. Dessa forma, podemos escrever uma segunda relação entre os canais propagantes e as ressonâncias

$$\mathbf{u} = (E - \mathcal{H}_{in})^{-1} \hat{\omega} \psi(0). \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.16) na equação (2.14) e usando a equação (2.5), obtemos

$$\hat{\omega}^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} \hat{\omega} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} K^{-1/2} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -i \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} K^{1/2} (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (2.17)$$

onde $K \equiv \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_M)$ e os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tem como entradas as amplitudes das auto-funções de $\mathcal{H}$. A equação anterior pode ser mais apropriadamente escrita de maneira a “conectar” as amplitudes de espalhamento. Multiplicamos essa equação por $K^{-1/2}$ pela esquerda, de modo a eliminar $K^{1/2}$ no lado direito. Dessa forma, as amplitudes de espalhamento podem ser relacionadas pela equação $\mathbf{B} = S\mathbf{A}$, onde S é a matriz de espalhamento dada por

$$S = (I - iF)(I + iF)^{-1}; \quad F = \pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W, \quad (2.18)$$

onde $W = \sqrt{2m/\pi\hbar^2} \hat{\omega} \text{diag}(k_1^{-1/2}, k_2^{-1/2}, \dots, k_M^{-1/2})$ e I é a matriz identidade de ordem M . A matriz S pode ser reescrita conforme a referência [34]:

$$\begin{aligned} S &= (I - iF)(I + iF)^{-1} = I - 2iF(I + iF)^{-1} \\ &= I - 2i(\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W) \sum_{l=0}^{\infty} (i\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W)^l \\ &= I - 2 \sum_{l=0}^{\infty} (i\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W)^{l+1} \\ &= I - 2i\pi W^\dagger \left[\sum_{l=0}^{\infty} (i\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W)^l \right] (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W \\ &= I - 2i\pi W^\dagger (I + i\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W)^{-1} (E - \mathcal{H}_{ri})^{-1} W \\ S &= I - 2i\pi W^\dagger (E - \mathcal{H}_{ri} + i\pi W W^\dagger)^{-1} W. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ou ainda, em termos de um hamiltoniano efetivo não hermitiano $\mathcal{H}_{ef} = \mathcal{H}_{ri} - i\mathbf{\Gamma}$,

$$S = I - 2i\pi W^\dagger \frac{1}{E - \mathcal{H}_{ef}} W, \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{\Gamma} = \pi W W^\dagger$ caracteriza o decaimento das ressonâncias. As energias dos estados ressonantes são pólos simples da equação (2.20).

A generalização da fórmula de Mahaux-Weidenmüller (2.20) para incorporar múltiplos terminais segue os mesmos argumentos desta seção. Indexaremos o vetor de amplitudes de cada terminal por $i = 1, \dots, M$, sobrescrito, de maneira que os vetores amplitudes ficam escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{N_1}^{(1)}, \dots, A_1^{(M)}, A_2^{(M)}, \dots, A_{N_M}^{(M)}), \\ \mathbf{B} &= (B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{N_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(M)}, B_2^{(M)}, \dots, B_{N_M}^{(M)}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

O caso multiterminal fica mais apropriadamente descrito com a introdução direta da matriz K , generalizada para M terminais, e que contém os números de onda que aparecem explicitamente na parte livre da função de onda. Podemos escrevê-las, respectivamente, como

$$\begin{aligned} K &= \text{diag}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_{N_1}^{(1)}, \dots, k_1^{(M)}, k_2^{(M)}, \dots, k_{N_M}^{(M)}), \\ \psi(x) &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2 K} \right)^{1/2} [\exp(-iKx)\mathbf{A} + \exp(iKx)\mathbf{B}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde ψ é um vetor cujas entradas são as funções de onda de cada modo propagante. Usando a matriz K , a função de onda livre generalizada dada pela equação (2.22) e as mesmas condições de contorno usadas para um único guia, obtemos a mesma fórmula de Mahaux-Weidenmüller anterior com a matriz de acoplamento W modificada para

$$W = \hat{w} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2 K} \right)^{1/2},$$

onde $\hat{w} \equiv (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_M)$ caracteriza o acoplamento, incluindo todos terminais. A matriz S correspondente pode ser decomposta em blocos de “reflexão”, r , e em blocos de “transmissão”, t , de modo que podemos escrevê-la como

$$S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1M} \\ t_{21} & r_{22} & \cdots & t_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M1} & t_{M2} & \cdots & r_{MM} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Os blocos $r_{l,l}$, de ordem $N_l \times N_l$, da matriz S , dada pela equação (2.23), caracterizam amplitudes de reflexão do terminal l . Por outro lado, os blocos $t_{l,l'}$ de ordem $N_l \times N_{l'}$ caracterizam amplitudes de transmissão do guia l para o guia l' .

Uma decomposição similar pode ser executada na matriz diagonal W por blocos de $\hat{w}$ e de $K^{-1/2}$ de maneira que a matriz W fica escrita por porções correspondentes a cada terminal. Podemos, então, escrever tal matriz de acoplamento de ordem $N_c \times M$ como

$$W_{\mu n} = \begin{cases} (W_1)_{\mu n}; & n = 1, \dots, N_1 \\ (W_2)_{\mu, n-N_1}; & n = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 \\ \vdots & \\ (W_M)_{\mu, n-N_{(M-1)}}; & n = N_{(M-1)}, \dots, N \end{cases}, \quad (2.24)$$

com $\mu = 1, 2, \dots, M$. Definindo a matriz W dessa forma, podemos reescrever a matriz S de uma maneira bastante apropriada, fornecendo, diretamente, as matrizes de reflexão e de transmissão em termos dos propagadores e do acoplamento:

$$S = \begin{pmatrix} 1 - 2\pi i W_1^\dagger D^{-1} W_1 & -2\pi i W_1^\dagger D^{-1} W_2 & \cdots \\ -2\pi i W_2^\dagger D^{-1} W_1 & 1 - 2\pi i W_2^\dagger D^{-1} W_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde $D = E - H_{ri} - i\Gamma$ e $\Gamma = \sum_{l=1}^M W_l W_l^\dagger$. Comparando as equações (2.23) e (2.25), vemos que $r_{ll} = 1 - 2\pi i W_l^\dagger D^{-1} W_l$ e $t_{ll'} = -2\pi i W_{l'}^\dagger D^{-1} W_l$. Novamente, assumiremos a condição de ortogonalidade ou, equivalentemente, que não há reações diretas, portanto

$$W_l^\dagger W_{l'} = \frac{N_C \Delta}{\pi^2} \hat{w}^{(l)} \delta_{l,l'}; \quad \hat{w}^{(l)} \equiv \text{diag}(w_1^{(l)}, w_2^{(l)}, \dots, w_{N_l}^{(l)}), \quad (2.26)$$

onde Δ é a espaçamento médio de níveis de energia dentro da cavidade.

2.2 Parâmetros de Acoplamento e Coeficientes de Transmissão

Seguindo as hipóteses básicas de teoria de matrizes aleatórias, podemos modelar o hamiltoniano dos modos ressonantes da região de interação por meio de uma distribuição de probabilidade. Doravante, escolheremos que o hamiltoniano é um membro do GOE, ou seja, estudaremos uma cavidade caótica com simetria de reversão temporal. Os efeitos da dinâmica caótica dentro da cavidade podem ser incorporados através dos dois momentos relevantes para o GOE:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\mu'\nu'} \rangle &= \frac{\lambda^2}{N_c} (\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'}) \\ \langle \mathcal{H}_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\mu'\nu'} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde N_c é o número de estados ressonantes na cavidade.

Considerando que o acoplamento é determinístico e que a aleatoriedade ocorre apenas na cavidade, podemos escrever a média da matriz S em termos da média do propagador. Mais explicitamente, queremos encontrar

$$\langle S \rangle = 1 - 2\pi i W^\dagger \langle G^R \rangle W, \quad (2.28)$$

com $\langle G^R \rangle$ denotando a média da função de Green retardada do hamiltoniano não-hermitiano. A matriz fenomenológica W é determinística e toda a parcela aleatória está na função de Green que contém os graus de liberdade “rápidos”. Um método de calcular tal média é definir uma função geratriz de modo que

$$\langle G_{\mu\nu}^R \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial J_{\nu\mu}} \bigg|_{J=0} \langle \mathcal{Z}(J) \rangle, \quad (2.29)$$

onde a função geratriz $\mathcal{Z}(J)$ pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}(J) = \det \left(\frac{1 - JG^R}{1 + JG^R} \right). \quad (2.30)$$

Vamos definir a inversa da função de Green retardada $D^{-1} \equiv G^R$. A matriz $\mathcal{H}$ é simétrica por pertencer ao GOE e a auto-energia $\Sigma^R = -i\pi WW^\dagger$ também o é, ou seja, $D = D^T$, com T denotando a operação de transposição. Para incorporar a simetria de conjugação de carga do GOE, vamos introduzir dois novos índices $\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}$ e, então, escrever uma matriz $\mathbf{D}$ com o dobro de entradas, todas elas relacionadas a D :

$$\mathbf{D}_{\mu\nu}^{\alpha\alpha'} = \delta^{\alpha\alpha'} (E\delta_{\mu\nu} - \mathcal{H}_{\mu\nu} - \Sigma_{\mu\nu}^R). \quad (2.31)$$

Definamos também a matriz cujas entradas são as fontes da função geratriz, incluindo os novos graus de liberdade para conjugação de carga, como

$$\mathbf{J}_{\mu\nu}^{\alpha\alpha'} = \delta^{\alpha\alpha'} k_\alpha J_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

onde J é a matriz definida anteriormente para a função geratriz, $k_0 \equiv 1$ e $k_1 \equiv -1$.

Uma matriz que é compatível com a função geratriz dada pela equação (2.30), incluindo os novos graus de liberdade e a super-álgebra (ver apêndice 1), pode ser escrita como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} + \mathbf{J} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} + \mathbf{J}^T \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T. \quad (2.33)$$

Podemos usar a definição da fonte dada pela equação (2.32) e reobter a equação (2.30) para a função geratriz com fonte J . Usando as propriedades da super-álgebra, temos

$$\begin{aligned} \text{Sdet}^{-1/2}(\mathbf{M}) &= \text{Sdet}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{J}) \\ &= \det \left(\frac{D - J}{D + J} \right) = \det \left(\frac{1 - JG^R}{1 + JG^R} \right) \\ &= \mathcal{Z}(J). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pelas equações (2.34), vê-se que a função geratriz também pode ser escrita como $\mathcal{Z}(J) = \text{Sdet}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{J})$. Dessa forma, como o super-determinante pode ser escrito como uma super-integral gaussiana (veja a equação (A.12) do apêndice), a função geratriz pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{\alpha q} \left\langle (\Phi^\dagger)_q^\alpha, (\mathbf{A}\Phi)_q^\alpha \right\rangle \right], \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{J}$. Os auto-estados de $\mathbf{A}$ contém a “corrente de transição” J entre níveis de energia μ e ν . O super-vetor Φ tem $4N_c$ entradas, podendo ser escrito como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\star \end{pmatrix}; \quad \varphi = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_{N_c}^0; \varphi_1^1, \dots, \varphi_{N_c}^1)^T. \quad (2.36)$$

A medida, nesse espaço, é dada por

$$\mathcal{D}\Phi = \prod_{\alpha=0}^1 \prod_{\mu=1}^{N_c} i^\alpha d\varphi_\mu^\alpha d(\varphi_\mu^\alpha)^\star.$$

Podemos separar a porção de $\mathcal{D}$ que contém a aleatoriedade e extrair a média no ensemble de matrizes $\mathcal{H}$. Usaremos o resultado dado pelas equações (A.15) e (A.16) para escrever

$$\left\langle \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{\alpha q} \left\langle (\Phi^\dagger)_q^\alpha, (\mathbf{H}\Phi)_q^\alpha \right\rangle \right] \right\rangle_H = \exp \left(-\frac{\lambda^2}{4N_c} \text{Str} S^2 \right), \quad (2.37)$$

onde $S_{qq'}^{\alpha\alpha'} \equiv \sum_{\mu=1}^{N_c} \Phi_q^\alpha(\mu) (\Phi^\dagger)_q^{\alpha'}(\mu)$. Portanto, o argumento do exponencial da super-integral em Φ fica quártico. Como está deduzido na equação (A.20) do apêndice, uma maneira de torná-lo quadrático em Φ é fazer uma transformação de Hubbard-Stratonovich. Podemos mostrar que

$$\exp \left(-\frac{\lambda^2}{4N_c} \text{Str}(S^2) \right) = \int d\sigma \exp \left[-\frac{N_c}{4\lambda^2} \text{Str}(\sigma^2) - \frac{i}{2} \langle \Phi^\dagger, (\sigma \otimes I_{N_c}) \Phi \rangle \right], \quad (2.38)$$

onde a matriz σ é um campo auxiliar que satisfaz uma “invariância de deslocamento” em S e deve pertencer a um grupo de simetria e ter uma parametrização correspondente, como veremos.

A equação (2.38) permite imediatamente escrever a média da função geratriz no ensemble de hamiltonianos:

$$\langle \mathcal{Z}(J) \rangle = \int d\sigma \exp \left(-\frac{N_c}{4\lambda^2} \text{Str}(\sigma^2) \right) \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \frac{i}{2} \langle \Phi^\dagger, \mathbf{A}\Phi \rangle \right\}, \quad (2.39)$$

onde $\mathbf{A} = [(EI_{N_c} - \Sigma^R) \otimes I_4 + \mathbf{J} - \sigma \otimes I_{N_c}]$. Usando novamente a equação (A.12) para integrais gaussianas, podemos efetuar a integral em Φ da equação (2.39) e escrever a média da função geratriz de uma maneira muito apropriada

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}(J) \rangle &= \int d\sigma \exp [i\mathcal{L}(\sigma, J)]; \\ i\mathcal{L}(\sigma, J) &\equiv -\frac{N_c}{4\lambda^2} \text{Str}(\sigma^2) - \frac{1}{2} \text{Str} \ln [(EI_{N_c} - \Sigma^R) \otimes I_4 + \mathbf{J} - \sigma \otimes I_{N_c}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Quando o número de ressonâncias na cavidade é muito grande, podemos fazer uma aproximação tipo ponto-de-sela para a equação (2.40). Para isso, fazemos $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$ e expandimos a lagrangeana em potências de $\delta\sigma$. Igualando a zero o termo linear, obtemos a equação de ponto de sela

$$\sigma_0(EI_4 - \sigma_0) = \lambda^2 I_4, \quad (2.41)$$

a qual, para $E = 0$, tem uma única solução convergente, $\sigma_0 = -i\lambda I_4$. Próximo ao ponto de sela isolado, a lagrangeana (2.40) pode ser aproximada por

$$i\mathcal{L}(\sigma, J) \approx -\frac{1}{2} \text{Str} \ln [(EI_{N_c} - \Sigma^R) \otimes I_4 + \mathbf{J} - \sigma_0 \otimes I_{N_c}] - \frac{N_c}{4\lambda^2} \text{Str}(\delta\sigma)^2. \quad (2.42)$$

Eliminando os modos massivos, expandindo a lagrangeana dada pela equação (2.42) até segunda ordem em J e tomando os super-traços, obtemos, respectivamente, a função geratriz média próxima ao ponto-de-sela e a função de Green média usando a equação (2.29):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}(J) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{\lambda} \sum_{\mu\nu} \left[\left(I_{N_c} + \frac{i}{\lambda} \Sigma^R \right)^{-1} \right]_{\mu\nu} (J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu}) \right\}, \\ \langle G_{\mu\nu}^R \rangle &= -\frac{i}{\lambda} \left[\left(I_{N_c} + \frac{i}{\lambda} \Sigma^R \right)^{-1} \right]_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A média da matriz S pode ser imediatamente escrita se usarmos as equações (2.43) e (2.28). O tempo de decaimento dos estados ressonantes da cavidade está intimamente ligado à parcela não-hermitiana do hamiltoniano efetivo. A aleatoriedade dos níveis de energia da cavidade pode ser incorporadas na média de espaçamentos dada por $\Delta \equiv \pi\lambda/N_c$. Com essas considerações, podemos escrever a média da matriz S como

$$\langle S \rangle = \frac{N_c \Delta - \pi^2 W^\dagger W}{N_c \Delta + \pi^2 W^\dagger W}. \quad (2.44)$$

Mais especificamente, na ausência de reações diretas, as entradas da matriz S podem ser escritas em termos dos parâmetros escalares de acoplamento (ver seção anterior). Consideraremos parâmetros diferentes para cada canal de espalhamento, as entradas da matriz de espalhamento média podem então ser escritas como:

$$\langle S_{mn}^{pq} \rangle = \delta_{pq} \delta_{mn} \frac{1 - w_{pm}}{1 + w_{pm}}. \quad (2.45)$$

A referência [34] obtém a média da matriz S incluindo dependência em energia na matriz W . Já vimos que no limite de muitos níveis de energia com espaçamento pequeno, a matriz W depende muito fracamente da energia. Contudo, essa forma mais geral ganha alguma importância interpretativa quando definimos os coeficientes de transmissão

$$T_{pn} \equiv 1 - |\langle S_{nn}^{pp} \rangle|^2.$$

Nesse caso, a equação (2.45) sofre modificação: os parâmetros de acoplamento são levados em $w_{pn} \rightarrow w_{pn} g(E)$, com $g(E) \equiv iE/2 + (1 - E^2/4)^{1/2}$. Por outro lado, os coeficientes de transmissões ficam escritos como [48]

$$\frac{1}{T_{pn}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2\Re(g(E))} \left(w_{pn} + \frac{1}{w_{pn}} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Pela equação (2.46), vemos que T_{pn} fica cada vez menor à medida que o parâmetro de acoplamento w_{pn} cresce ou decresce, contrariando a intuição de que um acoplamento forte aumentaria a transmissão. Por meio dessa mesma equação, vemos que a taxa de transmissão média ocorre quando $w_{pn} = 1$. O valor máximo atingido pelo coeficiente de transmissão ocorre para um intervalo de energia na vizinhança de $E = 0$ para $w_{pn} = 1$. Quando $w_{pn} = 0$, próximo a $E = 0$, a média da matriz S é a identidade e $T_{pn} = 0$, ou seja, a ausência de acoplamento entre os canais propagantes e a região de interação limita completamente a entrada de estados na cavidade. Esse caso foi estudado usando o exemplo da seção anterior. O coeficiente de transmissão T_{pn} pode caracterizar a parcela do fluxo do canal pn que fica na região de interação por um tempo significativo formando meta-estados que depois decaem.

2.3 Cumulantes e Momentos da Estatística de Contagem

Vimos, na introdução, que um sistema fora do equilíbrio pode gerar estados propagantes em guias (terminais) provenientes de reservatórios. Vimos que a condutância pode ser escrita em termos de coeficientes de transmissão, via formulação

de Landauer-Büttiker, mediante coeficientes C_{pq} que representam a condutância adimensional dada por $G_{pq} = G_0 C_{pq}$. Os coeficientes C_{pq} caracterizam a taxa de transmissão de canais propagantes entre os guias p e q conectados não-idealmente ao ponto quântico caótico. Vimos que esses coeficientes são dados em termos de funções de Green como

$$\begin{aligned} C_{pq} &= \text{Tr}(t_{pq} t_{pq}^\dagger) \\ &= \text{Tr}(\Gamma_p G^R \Gamma_q G^A), \quad \Gamma_{p(q)} \equiv -2\pi i W_{p(q)} W_{p(q)}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde $G^A = G^{R\dagger}$ é a função de Green avançada. Os coeficientes também podem ser expressos como o traço do produto de projetores das matrizes S e $S^\dagger$. Nesta seção, veremos como representá-lo mediante uma função geratriz e usar o método de integral funcional, similar ao da seção anterior, para calcular suas médias no GOE.

Vamos introduzir uma função geratriz que inclua uma fonte capaz de incorporar todas as simetrias do ensemble:

$$\mathcal{Z} = \text{Sdet}^{-1/2}(\mathcal{D} + \mathcal{J}(h)), \quad (2.48)$$

onde $\mathcal{D}^{-1} = \text{diag}(G^R, G^R, G^R, G^R, G^A, G^A, G^A, G^A)$. Por outro lado, a fonte $\mathcal{J}(h)$ será definida como

$$\mathcal{J}(h) = \sum_{q=1}^M \sum_{l=1}^2 \sum_{\sigma=B,F} h_{ql\sigma} \Gamma_q \otimes \mathcal{F}_{l\sigma}, \quad (2.49)$$

onde $\mathcal{F}_{l\sigma}$ podem ser decompostas em sub-blocos

$$\mathcal{F}_{1\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & k_2^\sigma \\ k_1^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

e

$$\mathcal{F}_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & k_1^\sigma \\ k_2^\sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Tais subblocos são definidos como matrizes diagonais, $k_1^B = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$, $k_2^B = \text{diag}(0, 1, 0, 0)$, $k_1^F = \text{diag}(0, 0, 1, 0)$ e $k_2^F = \text{diag}(0, 0, 0, 1)$.

Podemos calcular os coeficientes de transmissão em termos de derivadas da função geratriz. Considerando que a função geratriz pode ser representada de diversas formas para eliminar informações da aleatoriedade, podemos estabelecer a seguinte relação geral

$$C_{pq} = \left. \frac{\partial^2}{\partial h_{p1B} \partial h_{q2B}} \right|_{h=0} \mathcal{Z}(h), \quad (2.52)$$

A equação (2.52) mostra que, para obter a média do coeficiente de transmissão, é suficiente conhecer a média da função geratriz no espaço de matrizes $\mathcal{H}$. Denotaremos a média da função geratriz no ensemble $\mathcal{H}$ como $\langle \mathcal{Z} \rangle$. Seguindo o procedimento convencional, representaremos a função geratriz como uma integral multidimensional e mapearemos a média no espaço de matrizes $\mathcal{H}$ em um espaço de supermatrizes Q de ordem 8.

Seguindo o procedimento padrão, podemos usar a equação (A.12) para representar $\mathcal{Z}(h)$ como uma super-integral gaussiana:

$$\mathcal{Z}(h) = \int \mathcal{D}\Phi \exp [i\bar{\Phi}(\mathcal{M}_{NR} - \mathcal{M}_R)\Phi], \quad (2.53)$$

onde $\Phi^T \equiv (\varphi, r\varphi^*)$ é um supervetor com componentes φ e $r\varphi^*$ dados por $\varphi_a^\alpha(\mu)$ ($\alpha = 0, 1$, $a = 1, 2$ e $\mu = 1, \dots, N_c$) e $\bar{\varphi}_a^\alpha(\mu) = (-1)^{(1-\alpha)(1+a)}$. A medida é dada por $\mathcal{D}\Phi = (-1)^{N_c} \prod_{\alpha=0}^1 \prod_{a=1}^2 \prod_{\mu=1}^{N_c} i^\alpha d\varphi_a^\alpha(\mu) d(\phi_a^\alpha(\mu))^*$. A matriz r , com componentes $r_{aa'}^{\alpha\alpha'} = r_a^{\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{aa'}$, $r_a^\alpha = (-1)^{(1-\alpha)(1+a)}$, está representando aqui a simetria de “conjugação de carga” típica do GOE, isto é, $\bar{\Phi} \equiv \Phi^\dagger \mathcal{R}$ para a qual

$$\mathcal{R} \equiv \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}_{c,c'}, \quad c, c' = 1, 2. \quad (2.54)$$

Separámos o argumento de $\mathcal{Z}(h)$ em uma porção matricial não-aleatória denotada na super-integral por $\mathcal{M}_{NR}$ e que pode ser escrita em termos de produtos tensoriais da seguinte forma

$$\mathcal{M}_{NR} = \bar{E} \otimes 1_8 - \frac{i}{2} \Lambda \otimes \Gamma + \bar{\mathcal{J}}, \quad (2.55)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$. Escrevemos, também nesta notação, a porção matricial aleatória $\mathcal{M}_R$ definida como

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{H} \otimes 1_8. \quad (2.56)$$

A média no ensemble $\mathcal{H}$, como no caso da seção anterior, pode ser calculada em termos dos super-campos, desta vez com a adição de mais um grau de liberdade

$$\left\langle \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a,\alpha,c} \bar{\Phi} \mathcal{M}_R \Phi \right\} \right\rangle = \exp \left(\frac{\lambda^2}{4N_c} \text{Str} \mathcal{S}^2 \right), \quad (2.57)$$

onde

$$\mathcal{S}_{aa';cc'}^{\alpha\alpha'} = \sum_{\mu=1}^{N_c} \Phi_{ac}^\alpha(\mu) \bar{\Phi}_{a'c'}^{\alpha'}(\mu). \quad (2.58)$$

Inserindo a equação (2.57) na equação (2.53), linearizando a matriz $\mathcal{S}$ por meio da transformação de Hubbard-Stratonovitch, equação (A.20), e integrando sobre os supervetores Φ e $\bar{\Phi}$, obtém-se a seguinte representação exata para a média da função geratriz, agora em um espaço de dimensão bem menor

$$\langle \mathcal{Z}(h) \rangle = \int d\sigma e^{i\mathcal{L}(\sigma, h)}, \quad (2.59)$$

onde

$$i\mathcal{L}(\sigma, h) = -\frac{N_c}{2\lambda^2} \text{Str}(\sigma^2) - \text{Str} \ln (\mathcal{M}_{NR} - \sigma \otimes 1_{N_c}). \quad (2.60)$$

No regime físico em que o número de ressonâncias é muito grande, $N_c \gg M$, pode-se integrar sobre os modos “massivos” usando o método de ponto de sela. Após alguma álgebra, obtemos uma representação integral no espaço quociente de Efetov $UOSP(2, 2|4)/UOSP(2|2) \otimes UOSP(2|2)$, cujos pontos são parametrizados por super-matrizes 8×8 satisfazendo o vínculo $Q^2 = 1$ que caracteriza um modelo σ não-linear. Tal representação escrita na equação que segue pode ser interpretada como um modelo sigma não-linear zero-dimensional para os modos de Goldstone correspondentes

$$\langle \mathcal{Z}(h) \rangle = \int dQ \prod_{l=1}^M \prod_{n=1}^{N_l} \text{Sdet}^{-1/2} (1 + \Theta_{qn}(Q) \Lambda \epsilon_q). \quad (2.61)$$

Na equação (2.61), definimos

$$\Theta_{qn} \equiv -\frac{2iw_{pn}}{w_{pm} + \Lambda Q}, \quad (2.62)$$

e

$$\epsilon_q = \sum_{l, \sigma} h_{ql\sigma} \mathcal{F}_{l\sigma}. \quad (2.63)$$

O modelo sigma não-linear dado pela equação (2.61) permite, dentre outras coisas, obter, diretamente, o coeficiente de transmissão por meio de quadraturas numéricas e/ou integração analítica. Mostraremos no que segue a representação integral irreduzível para a condutância adimensional, válida também no limite quântico extremo, para um número arbitrário de terminais. Todos os resultados são válidos também para um número arbitrário de canais e para acoplamentos arbitrários em cada terminal. Faremos também um estudo numérico desta representação integral irreduzível.

Iniciamos calculando a média na equação (2.52) e substituindo nela a equação (2.61). Dessa forma, obtemos diretamente

$$\begin{aligned} \langle C_{pq} \rangle &= - \sum_{m=1}^{N_p} \sum_{n=1}^{N_q} \langle \text{Str}(\Lambda_{pn}^{1B}) \text{Str}(\Lambda_{qn}^{2B}) \rangle_Q \\ &\quad - 2\delta_{pq} \sum_{n=1}^{N_p} \langle \text{Str}(\Lambda_{pn}^{1B} \Lambda_{pn}^{2B}) \rangle_Q, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde

$$\Lambda_{pn}^{a\sigma} = w_{pn} \Theta_{pn} \Lambda \mathcal{F}_{l\sigma}. \quad (2.65)$$

Note que a média agora é executada sobre o espaço quociente de matrizes Q . A equação para tal média será denotada por

$$\langle f(Q) \rangle_Q = \int dQ f(Q) \prod_{l=1}^M \prod_{n=1}^{N_l} \text{Sdet}^{-1/2} (1 + \Theta_{qn}(Q) \Lambda \epsilon_q).$$

A equação (2.64) pode ser representada explicitamente em um sistema de coordenadas do espaço de Efetov correspondente. A parametrização para o GOE pode ser encontrada na referência [32] e é escrita como

$$Q = U \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \sin \hat{\theta} \\ -i \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix} \bar{U}; \quad U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

onde

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} i\theta_1 & i\theta_2 & 0 & 0 \\ i\theta_2 & i\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

com $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $0 < \theta < 2\pi$. A decomposição da matriz pseudo-unitária U dada pela equação (2.68) é feita de maneira que a primeira matriz contenha apenas entradas comutantes e que a segunda matriz contenha apenas variáveis anti-comutantes (Grassmann). A operação de “conjugação de carga” para o ensemble de matrizes U ortogonais é definida por $\bar{U} = \Lambda U \Lambda$. A matriz U é pseudo-unitária

no sentido que $U\bar{U} = 1$ e, conseqüentemente, os seus blocos também são pseudo-unitários, $u_1\bar{u}_1 = u_2\bar{u}_2 = v_1\bar{v}_1 = v_2\bar{v}_2 = 1$. Definindo as seguintes matrizes

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ -\eta_2^* & -\eta_1^* \end{pmatrix}, \quad \kappa \equiv \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_2^* & -\kappa_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

onde $\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2$ são variáveis anti-comutantes, podemos escrever os blocos matriciais u_1 e v_1 como

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2\eta\bar{\eta} + 6(\eta\bar{\eta})^2 & 2\eta(1 - 2\bar{\eta}\eta) \\ -2(1 - 2\bar{\eta}\eta)\bar{\eta} & 1 - 2\bar{\eta}\eta + 6(\bar{\eta}\eta)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 + 2\kappa\bar{\kappa} + 6(\kappa\bar{\kappa})^2 & 2i\kappa(1 + 2\bar{\kappa}\kappa) \\ -2i(1 + 2\bar{\kappa}\kappa)\bar{\kappa} & 1 + 2\bar{\kappa}\kappa + 6(\bar{\kappa}\kappa)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Os blocos matriciais u_2 e v_2 podem ser escritos em termos das matrizes

$$\tau_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} m & m_1^* \\ m_1 & -m \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

como

$$u_2 = \begin{pmatrix} (1 - iM)(1 + iM)^{-1} & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_1\tau_3) \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_2\tau_3) \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

onde m e m_1 são números complexos e $0 < \phi_1, \phi_2 < 2\pi$. Definindo $\lambda_1 = \cosh(\theta_1)$, $\lambda_2 = \cosh(\theta_2)$ e $\lambda_0 = \cos(\theta)$, a medida de integração invariante nesse espaço de matrizes Q fica escrita como

$$dQ = \frac{1 - \lambda^2}{64\pi\mathcal{R}} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_0 \mathcal{D}F D\Phi D\Phi^*, \quad (2.75)$$

onde $d\Phi d\Phi^* = d\eta_1 d\eta_2 d\kappa_1 d\kappa_2 d\eta_1^* d\eta_2^* d\kappa_1^* d\kappa_2^*$ é a medida de integração grassmanniana, $\mathcal{R} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_0\lambda_1\lambda_2 - 1$ é um fator geométrico e $\mathcal{D}F$ denota a medida de integração do $SU(2)$

$$\mathcal{D}F = \frac{4}{\pi^2(|m_1|^2 + m^2 + 1)^3} dm d(\Re(m_1)) d(\Im(m_1)). \quad (2.76)$$

Uma maneira bastante conveniente de representar as integrais no espaço de coordenadas consiste em eliminar todas as variáveis grassmannianas. Usamos

um procedimento algébrico e computacional para eliminar termos devido à nilpotência da álgebra e integrar sobre as variáveis grassmannianas remanescentes (veja apêndice). Como exemplo, para contatos ideais, podemos representar os coeficientes de transmissão da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle C_{pq} \rangle &= 2N_p N_q (1 + \delta_{pq}) \int_{-1}^1 d\lambda_0 \int_1^\infty d\lambda_1 \int_1^\infty d\lambda_2 \left[\frac{(1 + \lambda_0)^N}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{N+2}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1 - \lambda_0)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - 1)}{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - 1)^2} \right] + \delta_{pq} N_p \end{aligned} \quad (2.77)$$

Podemos integrar exatamente a equação (2.77) usando uma identidade de Ward que pode ser derivada da condição de unitariedade (conservação de corrente) da matriz S . Para isso, definimos a função espectral $A \equiv i(G^r - G^a)$ e $\Gamma = \sum_{p=1}^M \Gamma_p$. Note que $A = G^r \Gamma G^a = G^a \Gamma G^r$. Somando C_{pq} sobre q , podemos escrever

$$\sum_{q=1}^M C_{pq} = \sum_{q=1}^M C_{qp} = \text{Tr}(\Gamma_p A).$$

Usando a última equação e notando que $\langle \text{Tr}(\Gamma_p A) \rangle = -2\text{ImTr}(\Gamma_p G^r)$, podemos mostrar a seguinte relação

$$\sum_{q=1}^M \langle C_{pq} \rangle = \sum_{q=1}^M \langle C_{qp} \rangle = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{4}{e^{\alpha_{pn}} + 1}, \quad (2.78)$$

onde $\alpha_{pn} = -\ln(w_{pn})$. Para o caso de contatos ideais, temos $\alpha_{pn} = 0$ e, para canais equivalentes, $\sum_{q=1}^M \langle C_{pq} \rangle = 2N_p$. Usando isso e o resultado dado pela equação (2.77), concluímos que $G_{pq}/G_0 = N_p N_q / (N + 1)$ e que

$$\int_{\{\lambda\}} \frac{(1 + \lambda_0)^N}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{N+2}} \frac{(1 - \lambda_0)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - 1)}{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - 1)^2} = \frac{1}{2(N + 1)}, \quad (2.79)$$

onde $N = \sum_{p=1}^M N_p$ é o número total de canais abertos nos M terminais.

Para um número arbitrário de terminais, de canais e barreiras arbitrárias, obtemos o seguinte resultado para os coeficientes de condutância

$$\left\langle \frac{G_{pq}}{G_0} \right\rangle = \sum_{m=1}^{N_p} \sum_{n=1}^{N_q} \int_{\lambda} \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{R}} \frac{f(\gamma_{pm}) - f(\gamma_{qn})}{\gamma_{pm} - \gamma_{qn}}, \quad (2.80)$$

onde $\gamma_{pm(qn)} \equiv 2/T_{pm(qn)} - 1$, e as funções auxiliares são definidas como

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\{\lambda\}) = \frac{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_0\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}{1 - \lambda_0^2}, \quad (2.81)$$

que é um fator geométrico na formulação usual,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\{\lambda\}; \{\gamma\}) \\ &= \prod_{p=1}^M \prod_{m=1}^{N_p} \frac{\gamma_{pm} + \lambda_0}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\gamma_{pm}\lambda_1\lambda_2 + \gamma_{pm}^2 - 1)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

que faz o papel de um “núcleo de integração”, e

$$\begin{aligned} f &= f(\gamma; \{\lambda\}) \\ &= (\gamma^2 - 1) \left(\frac{1}{\gamma + \lambda_0} - \frac{\gamma + \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\gamma\lambda_1\lambda_2 + \gamma^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

A integral exata do problema quântico dada pela equação (2.80) constitui uma simplificação dramática no número de variáveis necessárias para o cálculo da média: tiramos o sistema de um espaço com um número infinito de variáveis (entradas independentes da matriz aleatória) e o colocamos em um espaço em que existem apenas três variáveis relevantes para o cálculo. Esta última integral é não-trivial. Pode-se fazer uma expansão assintótica semi-clássica como a que foi executada na referência [34]. Como resultados assim já foram obtidos, para o cálculo da condutância, focamos na quadratura numérica da equação (2.80) no limite quântico extremo. Detalhes do algoritmo de quadratura são apresentados na próxima seção. Exibimos na figura 2.2 gráficos dos coeficientes de condutância em função de N_i e de T_i para o caso de dois terminais com canais equivalentes.

Processos aleatórios, devidos ao hamiltoniano $\mathcal{H}$ da região de interação, introduzem flutuações universais da condutância (veja-se a introdução). Para um estudo numérico completo das distribuições, podemos citar a referência [41]. As flutuações são obtidas mediante médias do seguinte coeficiente

$$D_{pq,p'q'} \equiv C_{pq}C_{p'q'} = \text{Tr}(\Gamma_p G^r \Gamma_q G^a) \text{Tr}(\Gamma_{p'} G^r \Gamma_{q'} G^a). \quad (2.84)$$

Para o caso em que $p = p'$ e $q = q'$ na equação (2.84), o coeficiente $D_{pq,pq}$ gera o quadrado dos coeficientes de condutância entre os guias p e q . Para esse caso, denotaremos tal coeficiente por $g^2 = D_{pq,pq}$. A variância é dada por $\text{var}(g) = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$.

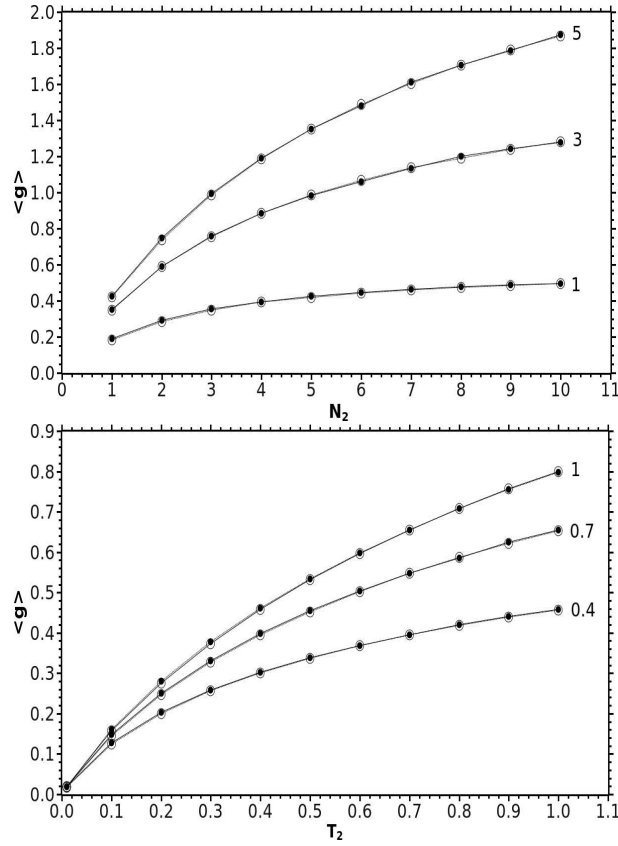


Figura 2.2: Os gráficos do painel superior representam a condutância normalizada em função do número de canais do segundo guia, onde fixamos $T_1 = T_2 = 0,6$. O índice em cada curva indica o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam a condutância em função do valor da barreira T_2 do segundo guia, fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva indicam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes.

Os coeficientes $D_{pq,p'q'}$ podem ser obtidos diretamente da função geratriz para a condutância. A principal vantagem de escrevê-los em termos desta função consiste em aproveitar o mesmo modelo σ não-linear deduzido anteriormente para os coeficientes de condutância. Os coeficientes ficam escritos em termos de derivadas da seguinte maneira

$$D_{pq,p'q'} = \frac{\partial^4}{\partial h_{p1F} \partial h_{q2F} \partial h_{p'1B} \partial h_{q'2B}} \bigg|_{h=0} \mathcal{Z}(h), \quad (2.85)$$

As médias dos coeficientes $D_{pq,p'q'}$ no ensemble $\mathcal{H}$ introduzem um número maior de fatores envolvendo a matriz S , o que implica em um maior número de super-traços no espaço Q . A proliferação de variáveis grassmannianas pode ser controlada de maneira apropriada considerando a nil-potência da álgebra. Como primeiro exemplo, considere o caso de contatos ideais nas equações (2.61) e (2.84). Sem perda de generalidade, consideramos o caso mais usual de uma cavidade acoplada a apenas dois terminais para o caso em que os coeficientes $D_{pq,p'q'}$ produzem g^2 . Calculando as derivadas da equação (2.85), obtemos para o caso de canais equivalentes o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle D_{1212} \rangle &= N_1^2 N_2^2 \langle \mathcal{T}_1 \rangle_Q + 2N_1^2 N_2 \langle \mathcal{T}_2 \rangle_Q \\ &\quad + 2N_1 N_2^2 \langle \mathcal{T}_3 \rangle_Q + 4N_1 N_2 \langle \mathcal{T}_4 \rangle_Q, \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde a nil-potência da álgebra e a integração das variáveis grassmannianas é usada para simplificar os seguintes super-traços contidos em $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1F}) \text{Str}(\Lambda_{2F}) \text{Str}(\Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}); \\ \mathcal{T}_2 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{2F} \Lambda_{2B}) \text{Str}(\Lambda_{1F}) \text{Str}(\Lambda_{1B}); \\ \mathcal{T}_3 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1F} \Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2F}) \text{Str}(\Lambda_{2B}); \\ \mathcal{T}_4 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1F} \Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2F}) \text{Str}(\Lambda_{2B}). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Note que estamos usando uma notação simplificada nas equações anteriores para as matrizes definidas na equação (2.65). Para canais equivalentes e para $p = 1 = p'$; $q = 2 = q'$, pode-se escrever $\Lambda_{a\sigma} \equiv \Lambda_{an}^{a\sigma}$, considerando que a equação (2.65) não tem dependência em n . Para contatos ideais, as médias simplificam drasticamente e integrandos com um número pequeno de termos podem ser escritos explicitamente para as integrais irredutíveis do espaço Q após a eliminação grass-

manniana. Denotando $\langle g^2 \rangle \equiv \langle D_{1212} \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle g^2 \rangle = & w_1^2 w_2^2 \int_{\{\lambda\}} \frac{P}{Q (\lambda_1 + \lambda_2)^4 (\lambda_0 + 1)^2} (N_1^2 N_2^2 \mathcal{T}'_1 \\ & + 2N_1^2 N_2 \mathcal{T}'_2 + 2N_1 N_2^2 \mathcal{T}'_3 + 4N_1 N_2 \mathcal{T}'_4), \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde $\mathcal{T}'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ é o resultado final da integração grassmanniana. Permanece a típica integração tripla irreduzível para o GOE em supersimetria, denotada por $\int_{\{\lambda\}} \equiv \int_{-1}^1 d\lambda_0 \int_1^\infty d\lambda_1 \int_1^\infty d\lambda_2$. Para o caso ideal ($w_1 = 1 = w_2$), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'_1 = & 2(3\lambda_2^4 + 3\lambda_1^4 - \lambda_2^4 \lambda_0 - \lambda_1^4 \lambda_0 + \lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0^2 + 3\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0^2 - 12\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0 \\ & + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0^2 + \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0^2 - 8\lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0 - 8\lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0 + 7\lambda_2^3 \lambda_1 + 7\lambda_1^3 \lambda_2 \\ & + 9\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 4\lambda_2^2 - 4\lambda_1^2 + 1 - 6\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^2 - 2\lambda_2^2 \lambda_0 \\ & + 2\lambda_2^2 \lambda_0^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_0 + 2\lambda_1^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_0); \\ \mathcal{T}'_2 = & (\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_0^2 - \lambda_2^4 \lambda_0 + \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \lambda_0 + \lambda_1^4 - 2\lambda_0 \\ & - 4\lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0 + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0^2 - 8\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0 - 4\lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0 - 2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 3\lambda_1^3 \lambda_2 \\ & + 3\lambda_2^3 \lambda_1 + 2\lambda_2^2 \lambda_0 + 2\lambda_1^2 \lambda_0 - 1 + \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0^2 - \lambda_0^2 + \lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0^2); \\ \mathcal{T}'_3 = & \mathcal{T}'_2; \\ \mathcal{T}'_4 = & 1/2(3\lambda_2^4 + 3\lambda_1^4 - \lambda_2^4 \lambda_0 - \lambda_1^4 \lambda_0 + \lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0^2 + 3\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0^2 - 12\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_0 \\ & + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0^2 + \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0^2 - 8\lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_0 - 8\lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_0 + 7\lambda_2^3 \lambda_1 + 7\lambda_1^3 \lambda_2 \\ & + 9\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 4\lambda_2^2 - 4\lambda_1^2 + 1 - 6\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^2 - 2\lambda_2^2 \lambda_0 \\ & + 2\lambda_2^2 \lambda_0^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_0 + 2\lambda_1^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_0). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para contatos arbitrários, as fórmulas para $\mathcal{T}'_i$ têm muitos termos no integrando e nós não as colocaremos explicitamente neste texto. A despeito disto, a quadratura numérica foi executada e nós exibimos gráficos típicos na figura (2.3).

Pelo argumento de Landauer-Büttiker, a discreteza da carga dos portadores de corrente gera ruído de disparo à temperatura nula (veja a introdução). A potência do ruído de disparo, denotado por P , pode ser escrita em termos do coeficiente abaixo, o qual será denominado de coeficiente de ruído de disparo,

$$D'_{pq,p'q'} \equiv \text{Tr}(\Gamma_p G^r \Gamma_q G^a \Gamma_{p'} G^r \Gamma_{q'} G^a). \quad (2.90)$$

Através deste coeficiente e o do coeficiente de condutância, podemos escrever o ruído de disparo entre dois terminais p e q como $P = C_{pq} - D'_{pq,p'q'}$, para $p = p'$ e $q = q'$. Então, o coeficiente (2.90) fornece informação relevante sobre a mecânica quântica

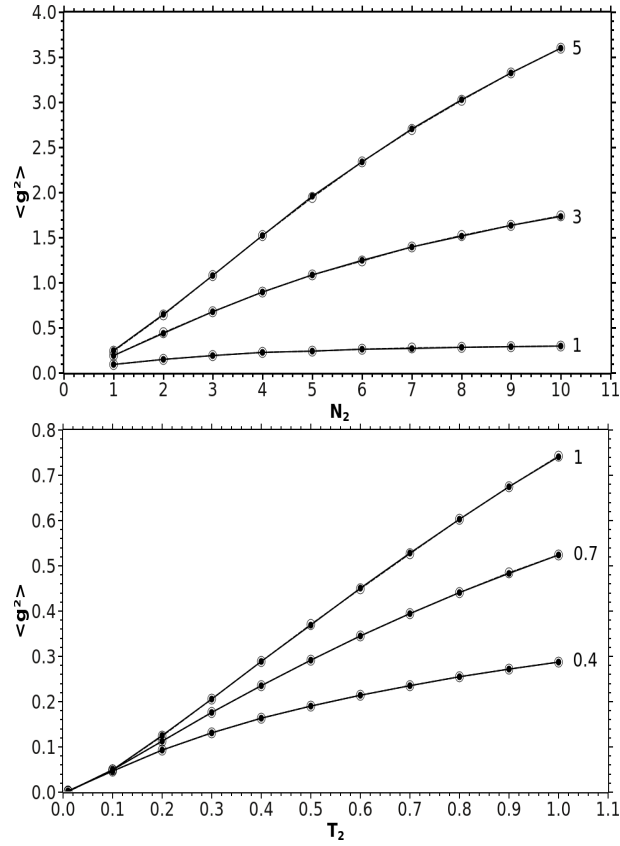


Figura 2.3: Os gráficos do painel superior representam $\langle g^2 \rangle$ normalizado em função do número de canais do segundo guia para os quais fixamos $T_1 = T_2 = 0,6$. O índice em cada curva indica o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam $\langle g^2 \rangle$ em função do valor da barreira T_2 do segundo guia para os quais fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva caracterizam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes.

do sistema. Podemos relacionar o coeficiente de ruído de disparo à função geratriz. Obtemos a seguinte relação

$$6D'_{pq,p'q'} = \frac{\partial^4}{\partial h_{p1B} \partial h_{q2B} \partial h_{p'1B} \partial h_{q'2B}} \Big|_{h=0} \mathcal{Z}(h) - C_{pq} C_{p'q'} - C_{pq'} C_{p'q}. \quad (2.91)$$

O coeficiente de ruído de disparo envolve o traço de quatro funções de Green ou, equivalentemente, o traço de quatro matrizes S , como podemos ver na equação (2.90). Dessa forma, para o cálculo da média dos coeficientes de ruído de disparo, iremos além das flutuações da matriz S como fizemos para obter $\langle g^2 \rangle$. Calculamos esse traço de quatro funções de Green decompondo a relação apresentada na equação (2.91), definindo sua porção que envolve derivada como

$$X_{qpq'p'} \equiv \frac{\partial^4}{\partial h_{p1B} \partial h_{q2B} \partial h_{p'1B} \partial h_{q'2B}} \Big|_{h=0} \mathcal{Z}(h). \quad (2.92)$$

Restringimo-nos ao caso relevante em que $p = 1 = p'$, $q = 2 = q'$ (dois terminais) e os canais são equivalentes, a despeito de haver a possibilidade de tratar os outros casos possíveis usando a mesma função geratriz. Obtem-se resultados similares aos da variância, tomando apenas o setor “bosônico” para gerar as médias (os mesmos resultados podem ser obtidos caso se tome apenas o setor fermiônico). O resultado final pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle X_{1212} \rangle &= N_1^2 N_2^2 \langle \mathcal{U}_1 \rangle_Q + 2N_1^2 N_2 \langle \mathcal{U}_2 \rangle_Q \\ &\quad + 2N_1 N_2^2 \langle \mathcal{U}_3 \rangle_Q + 4N_1 N_2 \langle \mathcal{U}_4 \rangle_Q. \end{aligned} \quad (2.93)$$

agora, todos os super-traços envolvem apenas variáveis bosônicas e, de maneira similar, poder ser eliminados usando-se a nil-potência e a integração grassmanniana. Os termos $\mathcal{U}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}) \text{Str}(\Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}); \\ \mathcal{U}_2 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{2B} \Lambda_{2B}) \text{Str}(\Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{1B}); \\ \mathcal{U}_3 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1B} \Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}); \\ \mathcal{U}_4 &\equiv \text{Str}(\Lambda_{1B} \Lambda_{1B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}) \text{Str}(\Lambda_{2B}). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Denotando $\langle x \rangle \equiv \langle X_{1212} \rangle$, podemos escrever a média do coeficiente auxiliar no espaço Q em termos da seguinte integral

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = & w_1^2 w_2^2 \int_{\{\lambda\}} \frac{P}{Q (\lambda_1 + \lambda_2)^4 (\lambda_0 + 1)^2} (N_1^2 N_2^2 \mathcal{U}'_1 \\ & + 2N_1^2 N_2 \mathcal{U}'_2 + 2N_1 N_2^2 \mathcal{U}'_3 + 4N_1 N_2 \mathcal{U}'_4), \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde $\mathcal{U}'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ é o resultado da eliminação grassmanniana das entradas de $\mathcal{U}_i$. Para o caso ideal, podemos escrever as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_1 &= 8 (\lambda_0 + 1 - \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2; \\ \mathcal{U}'_2 &= 2 (\lambda_0 + 1 - \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2; \\ \mathcal{U}'_3 &= \mathcal{U}'_2; \\ \mathcal{U}'_4 &= 4 (\lambda_0 + 1 - \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para obter a potência do ruído de disparo, P , usamos o coeficiente auxiliar notando que $\langle D_{pp'q'q'} \rangle = \langle C_{pq} C_{p'q'} \rangle$ na equação (2.91). O resultado final pode ser escrito em termos da seguinte fórmula

$$P = \langle C_{12} \rangle - \frac{1}{6} (\langle x \rangle - 2 \langle g^2 \rangle). \quad (2.97)$$

Da mesma forma que ocorre em $\langle g^2 \rangle$, as fórmulas para contatos arbitrários, resultantes de $\mathcal{U}'_i$, adquirem uma quantidade considerável de termos. A quadratura numérica é executada em poucos milisegundos para contatos arbitrários e/ou número arbitrário de canais abertos. Alguns gráficos são apresentados na figura (2.4).

2.4 Conclusão

Exibimos uma função geratriz que pode gerar os cumulantes e momentos da estatística de contagem de um ponto quântico não-ideal acoplado a múltiplos terminais. A função geratriz pode ser representada em uma variedade homogênea supersimétrica como um modelo σ não-linear zero-dimensional. Isso é feito partindo do modelo de Mahaux-Weidenmüller e usando o procedimento de Verbaarschot, Weidenmüller e Zirbauer. Como exemplo, obtivemos fórmulas exatas para a condutância de um sistema multiterminal, a variância para um sistema com dois terminais e a potência do ruído de disparo para um sistema com dois terminais.

A representação final é uma integral tripla que contém toda a informação quântica relevantes sobre o sistema. O integrando para o caso não-ideal tem muitos

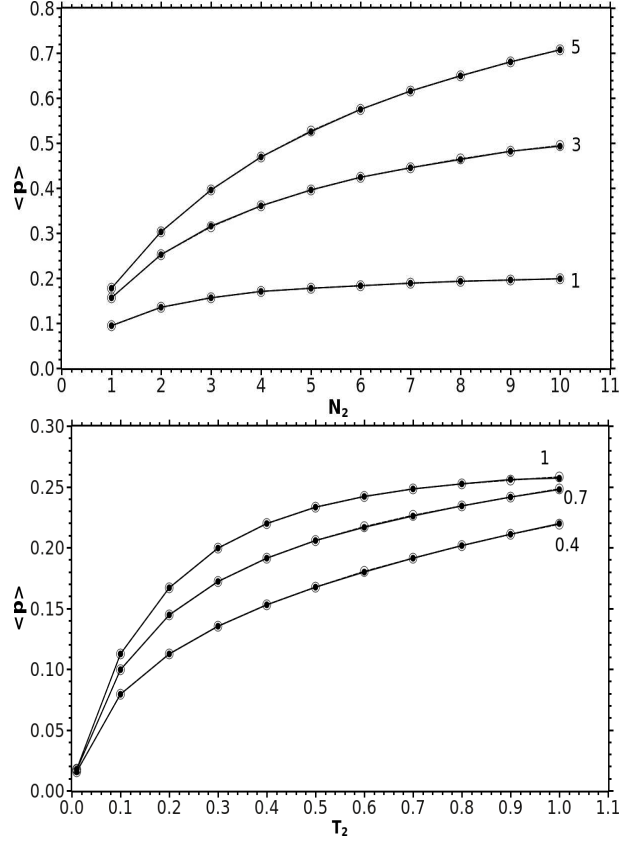


Figura 2.4: Os gráficos do painel superior representam a potência do ruído de disparo normalizado em função do número de canais do segundo guia, para os quais fixamos $T_1 = T_2 = 0, 6$. O índice em cada curva caracteriza o número N_1 de canais no guia 1. Os gráficos do painel inferior representam a potência do ruído de disparo em função do valor da barreira T_2 do segundo guia, dado que fixamos $N_1 = N_2 = 2$ e os índices em cada curva caracterizam os valores das barreiras no primeiro guia. Os círculos sólidos ilustram os valores numéricos da quadratura via modelo σ e os círculos grandes abertos ilustram os valores numéricos de uma simulação numérica por meio de ensembles de matrizes S . As linhas ligam os pontos: sólidas para SUSY e tracejada para ensemble de matrizes.

termos para o caso da variância e da potência do ruído de disparo. Omitimos o integrando do caso não-ideal e exibimos gráficos no limite quântico extremo (poucos canais abertos). O limite quântico extremo é inacessível por outros métodos analíticos da literatura atual. Para verificar nossos resultados, fizemos uma comparação com aqueles obtidos mediante uma simulação por amostragem de matrizes aleatórias seguindo o procedimento descrito na referência [41]. Nessa simulação numérica, gera-se um ensemble de matrizes aleatórias seguindo o ensemble circular ortogonal e usando-se a parametrização de estube como na referência [49]. Da matriz de espalhamento, pode-se obter a matriz de transmissão e conseqüentemente os cumulantes. Depois de se obter várias realizações dos cumulantes, extrai-se a média e a variância dos cumulantes.

Uma das constatações numéricas é a de que o limite semiclássico, para o qual as expansões em número de canais podem ser executadas, é atingido muito rapidamente. Para valores das barreiras não tão baixos, um número de seis ou sete canais de espalhamento abertos é suficiente para atingir numericamente o regime semiclássico. Os resultados levam em conta múltiplos produtos de funções de Green e são importantes para o entendimento conceitual do transporte quântico. O modelo σ , como veremos, também é uma importante ferramenta para justificar microscopicamente expansões semiclássicas dentro do formalismo de matriz de espalhamento.

Capítulo 3

Teoria Semiclássica de Circuitos

Neste capítulo, faremos uma expansão semiclássica do modelo σ não-linear para o ponto quântico. Para isso, seguiremos a ação deduzida na referência [50] e a equação de ponto-de-sela obtida na referência [51]. Por questões didáticas, exibiremos alguns detalhes dos cálculos destas referências.

As duas referências, juntamente com a contribuição da referência [52], permitirão obter, de maneira algébrica, o termo principal semiclássico e a primeira correção de localização fraca para a condutância e para o ruído de disparo. Estenderemos o método para estudar alguns aspectos de uma cadeia de cavidades caóticas. Em particular, correções de localização fraca dos cumulantes da cavidade caótica exibem surpreendentes resultados, como pode ser visto na referência [53]. Estenderemos a referência [53] para incluir o crossover entre ensembles de Wigner-Dyson. Tal crossover conterà contribuições devido ao acoplamento spin-órbita (fazendo o crossover para o ensemble simplético) e devido ao espalhamento magnético (fazendo o crossover para o ensemble unitário).

3.1 Dedução de uma Teoria de Circuitos do Modelo σ Não-linear

Seguindo as referências [50] e [51], nesta seção, mostraremos que uma teoria de circuitos pode emergir do modelo σ não-linear que representa a função geratriz de observáveis de transporte quântico introduzida por Rejazi na referência [54]. O mapa que leva do modelo hamiltoniano com um grande número de graus de liberdade para o espaço quociente de supermatrizes de ordem reduzida é exato e contém as propriedades de transporte da cavidade caótica. A teoria de circuitos resulta

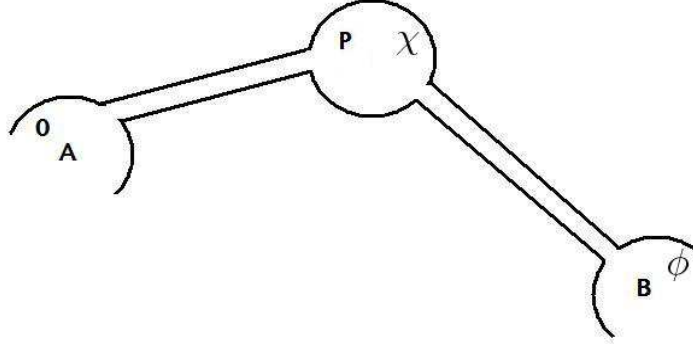


Figura 3.1: Figura esquemática de uma cavidade caótica P num pseudo-potencial χ conectada por guias aos reservatórios A (num pseudo-potencial 0) e B (num pseudo-potencial ϕ).

do ponto-de-sela do modelo σ e pode ser vista como resultado de uma expansão semi-clássica da função geratriz da estatística de contagem. A teoria de circuitos representa uma lei de conservação de corrente de uma simetria contínua e pode ser vista como uma consequência do teorema de Noether.

3.1.1 A Ação e o Modelo σ não-linear

Considere um ponto quântico acoplado a dois reservatórios por meio de dois terminais indexados por A e B , como na figura (3.1). Propriedades de transmissão de modos propagantes, como exposto no capítulo anterior, podem ser tratadas em termos de matrizes de transmissão t , e dos N_1 e N_2 canais abertos nos terminais A e B , respectivamente. Um modelo σ similar ao do capítulo anterior também pode ser obtido a partir da função geratriz introduzida por Rejarei na referência [54] e escrita como

$$\mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \det \left(\frac{1_{N_1} - \eta_1 \eta_2 t t^\dagger}{1_{N_1} - \xi_1 \xi_2 t t^\dagger} \right), \quad (3.1)$$

onde $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ e $\mathcal{N} = N_1 + N_2$. Todos os cumulantes da estatística de contagem podem ser extraídos como derivadas da função geratriz dada pela equação (3.1). Por exemplo, a condutância pode ser escrita como $g = -\partial^2 \mathcal{Z} / \partial \eta_1 \partial \eta_2 |_{\vec{\eta}=\vec{\xi}=\vec{0}}$.

No capítulo anterior, mostrou-se que razões de determinantes podem ser escritos em termos de super-determinantes mediante a super-álgebra. Dessa forma,

uma maneira conveniente de escrever a equação (3.1) é em termos de produtos tensoriais:

$$\mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \det^{-1/2} \left(\frac{1_{2N_1} - tt^\dagger \otimes \text{diag}(\xi_1, \xi_2)}{1_{2N_1} - tt^\dagger \otimes \text{diag}(\eta_1, \eta_2)} \right). \quad (3.2)$$

A razão de determinantes da equação (3.2) pode ser escrita em termos de um super-determinante se usarmos a identidade dada no apêndice pela equação (A.10)

$$\text{Sdet} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} = \frac{\text{Det}(a - \alpha b^{-1} \beta)}{\text{Det}(b)}. \quad (3.3)$$

Escolhendo $\alpha = 0 = \beta$, $a = (1_{2N_1} - tt^\dagger \otimes \text{diag}(\xi_1, \xi_2))$ e $b = (1_{2N_1} - tt^\dagger \otimes \text{diag}(\eta_1, \eta_2))$ na equação anterior, obtém-se

$$\mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \text{Sdet}^{-1/2} (1_{4N_1} - tt^\dagger \otimes \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)). \quad (3.4)$$

Seguindo as referências [55, 56, 50, 51], mostraremos como obter exatamente o modelo σ do capítulo anterior, para o caso específico de dois terminais, a partir da equação (3.4). Para isso, deve-se escrever a matriz t em termos das funções de Green aleatórias do capítulo anterior e da matriz de acoplamento. Mostramos que a matriz t no modelo de Mahaux-Weidemüller, para o caso de apenas dois terminais, pode ser escrita como $t = 2\pi i W_1 G^r W_1$. Substituindo t na equação (3.4) e com um pouco de álgebra, mostra-se que a função geratriz pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \text{Sdet}^{-1/2} \left(1_{4N_1} - \begin{pmatrix} \pi i W_1 G^r W_1 & 0 \\ 0 & \pi i W_1 G^a W_1 \end{pmatrix} \otimes (\Omega - \Lambda), \right) \quad (3.5)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(1_4, -1_4)$, $G^r = (E - H + i\Gamma/2)$ ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, com $\Gamma_p = 2\pi W_p W_p^\dagger$) e $\Omega = S\Lambda S^{-1}$, com

$$S = \exp \begin{pmatrix} 0 & iX_1 \\ iY_1 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & iY_2 \\ iX_2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} X_i = \text{diag}(\xi_i, 0, \eta_i, 0); \\ Y_i = \text{diag}(0, \xi_i, 0, \eta_i), \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

A equação (3.5) mostra que o argumento do super-determinante é uma matriz de ordem $4N_1$. Entretanto, como foi visto no capítulo anterior, um modelo σ pode ser gerado quando extraímos a média no ensemble de matrizes aleatórias que caracteriza a cavidade, considerando um número muito grande de modos ressonantes. Portanto, é importante transformar o argumento do super-determinante para matrizes com ordem do número, M , de modos ressonantes. Uma maneira de executar tal operação

é usar a identidade $\text{Sdet}^{-1/2}(1_{N_1} - B_{N_1 \times M} A_{M \times N_1}) = \text{Sdet}^{-1/2}(1_M - B_{M \times N_1} A_{N_1 \times M})$. Com isso, podemos gerar a seguinte equação para a função geratriz

$$\mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \text{Sdet}^{-1/2} \left(D + \frac{i}{2} \Gamma_1 \otimes (\Delta - \Lambda) \right), \quad (3.7)$$

onde $D = \text{diag}(1_4 \otimes D_+, 1_4 \otimes D_-)$, com D_+ e D_- denotando, respectivamente, as inversas das funções de Green retardada e avançada, G^R e G^A , respectivamente, ambas de ordem M . A equação (3.7) é apropriada para ser usada na dedução do modelo σ como no capítulo anterior. Usando exatamente o mesmo procedimento, obtém-se para H distribuído no GUE, a seguinte função que representa a média no ensemble

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \langle \mathcal{Z}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \rangle_H \\ \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \int_{Q^2=1} dQ f_1(\Omega, Q) f_2(Q, \Lambda); \\ f_p(Q, Q') &= \prod_{n=1}^{N_p} \text{Sdet}^{-1/2} (1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'), \quad p = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A obtenção da equação (3.8) segue os procedimentos usuais já discutidos no capítulo anterior, consistindo no mapa do assintótico $M \rightarrow \infty$, local no espectro ($E = 0$), entre o ensemble de matrizes aleatórias H de ordem muito grande para um espaço quociente de um modelo σ não-linear super-simétrico. A fórmula é válida para um número arbitrário de canais com barreiras arbitrárias $T_{pn} = \text{sech}^2(\alpha_{pn}/2)$. A matriz Q da equação (3.8) é característica do grupo de simetria correspondente, ou seja, pertence ao espaço quociente $U(2|2)/U(2) \otimes U(2)$. Dessa forma, podemos parametrizá-la em termos dos setores compacto e não-compacto definindo

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{i}{2} \sinh \phi_1; & \xi_2 = -i \tanh(\phi_1/2) \\ \eta_1 = -\frac{1}{2} \sin \phi_0; & \eta_2 = -\tan(\phi_0/2). \end{cases}$$

A matriz Q fica dada por

$$Q = u^{-1} \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \sin \hat{\theta} \\ -i \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{pmatrix} u, \quad (3.9)$$

onde u é uma matriz unitária e $\hat{\theta} = \text{diag}(i\theta_1 1_2, \theta_0 1_2)$, $\theta_1 > 0$, $0 < \theta_0 < \pi$. A simetria contínua da matriz Q impõe, de acordo com o teorema de Noether, leis de conservação que serão estudadas na subseção seguinte.

3.1.2 Teoria de Circuitos e Pseudo-corrente

Estamos interessando no regime semi-clássico, para o qual o número de canais é grande, ou seja, $N_1, N_2 \gg 1$. O ponto-de-sela da ação contida na equação (3.8) pode ser obtido, nesse regime, minimizando-se a ação com respeito à variação em Q com o vínculo $Q^2 = 1$. Supondo uma variação do tipo $Q \rightarrow \tilde{Q} = e^{\delta\Omega} Q e^{-\delta\Omega} \approx Q + \delta Q$, com $\delta Q \equiv [\delta\Omega, Q]$. Note-se que, nesse caso, a matriz $\tilde{Q}$ respeita o mesmo vínculo, ou seja, $\tilde{Q}^2 = 1$. A equação (3.8) pode ser reescrita como

$$\Psi(\hat{\phi}) = \int_{Q^2=1} dQ e^{i\mathcal{L}(Q, \hat{\phi})}, \quad (3.10)$$

onde

$$i\mathcal{L}(Q, \hat{\phi}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \text{Str} \ln \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \text{Str} \ln \left(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0 \right). \quad (3.11)$$

O princípio variacional pode ser usado substituindo-se $\tilde{Q}$ na equação (3.11). Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}(\tilde{Q}, \hat{\phi}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \text{Str} \ln \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} \tilde{Q} Q_{\hat{\phi}} + \delta A_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \text{Str} \ln \left(1 + e^{-\alpha_{2n}} \tilde{Q} Q_0 + \delta A_2 \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\delta A_1 = e^{-\alpha_{1n}} (\delta Q) Q_{\hat{\phi}}$ e $\delta A_2 = e^{-\alpha_{2n}} (\delta Q) Q_0$.

A equação (3.12) pode ser escrita como uma soma da porção da lagrangeana não perturbada e uma parcela de perturbação em δA_i , $i = 1, 2$. A lagrangeana fica escrita de maneira que o ponto-de-sela pode ser fixado considerando apenas a parte perturbada da mesma. O resultado final é a equação (3.12), escrita em termos da equação (3.11) da seguinte maneira

$$i\mathcal{L}(\tilde{Q}, \hat{\phi}) = i\mathcal{L}(Q, \hat{\phi}) + i\mathcal{L}^{(1)}(Q, \delta A_1) + i\mathcal{L}^{(2)}(Q, \delta A_2). \quad (3.13)$$

Fazendo-se uma expansão da função logaritmo da parcela perturbativa, $i\mathcal{L}^{(i)}(Q, \delta A_i)$,

da equação (3.13), obtém-se

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}^{(1)}(Q, \delta A_1) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_i} \text{Str} \ln \left[1 + \left(1 + e^{-\alpha_{i,n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \delta A_i \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_i} \text{Str} \ln \left[\left(1 + e^{-\alpha_{i,n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \delta A_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N_i} \text{Str} \ln \left[\left(1 + e^{-\alpha_{i,n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \delta A_i \right]^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e $i\mathcal{L}^{(2)}(Q, \delta A_1) = i\mathcal{L}^{(1)}(Q, \delta A_1)|_{\hat{\phi}=0}$. Substituindo δA_i , definido em termos de $\delta\Omega$, na equação anterior e usando a identidade $\text{Str}(A[C, B]) = \text{Str}([B, A]C)$, obtemos a correção perturbativa da lagrangeana em termos do campo perturbador desacoplado

$$i\mathcal{L}^{(1)}(Q, \delta\Omega) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_i} e^{-\alpha_{i,n}} \text{Str} \left\{ \left[Q, Q_{\hat{\phi}} \left(1 + e^{-\alpha_{i,n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \right] \delta\Omega \right\}, \quad (3.15)$$

e $i\mathcal{L}^{(2)}(Q, \delta\Omega) = i\mathcal{L}^{(1)}(Q, \delta\Omega)|_{\hat{\phi}=0}$. Considerando um número muito grande de canais na soma da equação anterior, podemos fazer uma aproximação tipo ponto-de-sela usando a condição $\delta\mathcal{L}(\tilde{Q}, \hat{\phi})/\delta\Omega = 0$ para obter a equação

$$\sum_{n=1}^{N_1} e^{-\alpha_{1n}} \text{Str} \left[Q, Q_0 \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \right] + \sum_{n=1}^{N_2} e^{-\alpha_{2n}} \text{Str} \left[Q, Q_0 \left(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0 \right)^{-1} \right] = 0 \quad (3.16)$$

Vamos admitir uma parametrização simples para o ponto-de-sela dada por

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \text{sen} \hat{\theta} \\ -i \text{sen} \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde $\hat{\theta} = \text{diag}(i\theta_1 1_2, \theta_0 1_2)$ e substituir na equação (3.16). Executando todos os produtos matriciais mediante a expansão em potências de $Q_{\hat{\theta}} Q_{\hat{\phi}}$ do termo $\left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_{1n}} \left[Q_{\hat{\theta}}, Q_0 \left(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q_{\hat{\theta}} Q_{\hat{\phi}} \right)^{-1} \right] &= -i\sigma_x \otimes \frac{\text{sen}(\hat{\theta} - \hat{\phi})}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\hat{\theta} - \hat{\phi})}; \\ e^{-\alpha_{2n}} \left[Q_{\hat{\theta}}, Q_0 \left(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q_{\hat{\theta}} Q_0 \right)^{-1} \right] &= -i\sigma_x \otimes \frac{\text{sen} \hat{\theta}}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \hat{\theta}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalmente, substituindo as equações (3.18) na equação para o ponto-de-sela (3.16), podemos escrevê-la, respectivamente, em termos matriciais ou em termos escalares, resultando em uma relação entre os campos ϕ_i dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\text{sen}(\hat{\phi} - \hat{\theta})}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\hat{\phi} - \hat{\theta})} &= \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\text{sen} \hat{\theta}}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \hat{\theta}}; \text{ (forma matricial)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\text{sen}(\phi_0 - \theta_0)}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\phi_0 - \theta_0)} = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\text{sen} \theta_0}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \theta_0} \\ \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\text{senh}(\phi_1 - \theta_1)}{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_1 - \theta_1)} = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\text{senh} \theta_1}{\cosh \alpha_{2n} + \cosh \theta_1} \end{array} \right. &\text{ (forma escalar) } \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como veremos, as equações (3.19) constituem uma importante lei de conservação, que pode ser usada para extrair informações sobre o transporte quântico no sistema.

O cálculo da função geratriz no ponto-de-sela, como foi visto, fornecerá informações no regime semi-clássico. Fixando tal regime como foco de estudo nesta seção, calcula-se a função geratriz, em $Q = Q_{\hat{\theta}}$, usando-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{Sdet} \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q_{\hat{\phi}} Q_{\hat{\theta}} \right) &= \text{Sdet} \begin{pmatrix} 1 + e^{-\alpha_{1n}} \cos(\hat{\phi} - \hat{\theta}) & -ie^{-\alpha_{1n}} \text{sen}(\hat{\phi} - \hat{\theta}) \\ -ie^{-\alpha_{1n}} \text{sen}(\hat{\phi} - \hat{\theta}) & 1 + e^{-\alpha_{1n}} \cos(\hat{\phi} - \hat{\theta}) \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\frac{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_1 - \theta_1)}{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_0 - \theta_0)} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.20) na função geratriz para o ponto-de-sela (sp), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{sp}(\hat{\phi}) &= f_1(Q_{\hat{\phi}}, Q_{\hat{\theta}}) f_2(Q_{\hat{\theta}}, Q_0) \\ &= \prod_{n=1}^{N_1} \text{Sdet}^{-1/2} \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q_{\hat{\phi}} Q_{\hat{\theta}} \right) \prod_{n=1}^{N_2} \text{Sdet}^{-1/2} \left(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q_{\hat{\theta}} Q_0 \right) \\ &= \prod_{n=1}^{N_1} \left(\frac{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_0 - \theta_0)}{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_1 - \theta_1)} \right) \prod_{m=1}^{N_2} \left(\frac{\cosh \alpha_{2n} + \cosh \theta_0}{\cosh \alpha_{2n} + \cosh \theta_1} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A equação (3.19) exhibe igualdades que podem ser usadas para definir uma lei de conservação de “corrente”. Essa corrente carregaria informação sobre a estatística de contagem de carga do sistema. Para isso, vamos definir uma “pseudo-corrente” $K(x)$ relacionada à função geratriz de Rejaei como

$$K(x) \equiv \frac{\partial \Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{\partial \eta_2} \bigg|_{\vec{\eta}=(\text{sen}(2x)/2, -\tan x)=\vec{\xi}}, \quad (3.22)$$

onde a função $\Psi(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ representa a média da função geratriz no ensemble de matrizes aleatórias. Calculando a equação anterior, mostra-se que

$$K(x) = \frac{\sinh(2x)}{2} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{tt^\dagger}{1 + \sinh^2(x)tt^\dagger} \right) \right\rangle = -i \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_0} \Big|_{\phi_0 = -2ix = i\phi_1}. \quad (3.23)$$

Derivando a equação (3.21) para o ponto-de-sela seguindo a equação (3.23), obtém-se

$$K_{sp}(x) = i \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\text{sen}(-2ix - \theta_0)}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(-2ix - \theta_0)} = i \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\text{sen}(\theta_0)}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \theta_0}. \quad (3.24)$$

Por conveniência, tomamos $\theta_0 = -2iy$ de maneira a simplificar a equação anterior e definimos a pseudo-corrente do terminal i como

$$K_j(x) \equiv \sum_{n=1}^{N_j} \frac{\sinh(2x)}{\cosh \alpha_{jn} + \cosh(2x)}. \quad (3.25)$$

Usando a equação (3.25), mostra-se que a equação (3.24) pode ser escrita como uma lei de conservação de pseudo-corrente entre os terminais, uma vez fixados os “pseudo-potenciais” x para o primeiro reservatório, y para o ponto quântico e zero para o segundo reservatório:

$$K_{sp}(x) = K_1(x - y) = K_2(y). \quad (3.26)$$

As equações (3.19) e (3.26) podem ser resolvidas obtendo-se, respetivamente, o campo y em função de x e o campo θ_i em função de ϕ_i . Para isso, introduzimos o seguinte procedimento - a ser executado em sequência:

- Resolver a equação (3.26), escrevendo a relação entre o pseudo-potencial y e o pseudo-potencial x ;
- Substituir a relação $y = y(x)$ na equação para a pseudo-corrente;
- Obter a expressão para $K_{sp}(x)$, a qual fornecerá a estatística de contagem no limite semi-clássico.

Executados esses três procedimentos, podemos obter a estatística de contagem usando o seguinte gerador

$$g_{sp}(\epsilon) \equiv \epsilon^2 \frac{I_{sp}(\phi)}{\text{sen}(\phi)} \Big|_{\cos(\phi/2) = \epsilon},$$

onde $I_{sp}(\phi) = 2K_{sp}(\phi = -2ix)/i$, veja as equações (3.19). Qualquer cumulante fica dado em termos do gerador como

$$q_{sp}^{l+1} = \left(\frac{\epsilon}{2} \frac{d}{d\epsilon} \right)^l g_{sp}(\epsilon) \Big|_{\epsilon=1} ; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

A generalização da teoria de circuitos proveniente do modelo σ para outras classes de simetria segue da função geratriz introduzida por Brouwer e Frahm na referência [50]

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \left\langle \prod_{\sigma=\pm} \det^{1/2} \left(\frac{1 - \sin^2(\phi_{0\sigma}^{(\beta)}/2) tt^\dagger}{1 - \sinh^2(\phi_{0\sigma}^{(\beta)}/2) tt^\dagger} \right) \right\rangle, \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{0\sigma}^{(\beta)} &= \phi_0 + \sigma \phi_{0\beta}; & \phi_{0\beta} &= \phi_2 \delta_{\beta,4} \\ \phi_{1\sigma}^{(\beta)} &= \phi_1 + \sigma \phi_{1\beta}; & \phi_{1\beta} &= \phi_3 \delta_{\beta,1} \\ \vec{\phi} &= (\phi_0, \phi_{0\beta}, \phi_1, \phi_{1\beta}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Seguindo os procedimentos mencionados anteriormente, obtemos a representação em termos do modelo σ para qualquer β :

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \int_{Q^2=1} dQ e^{S^{(\beta)}}(Q, Q_{\hat{\phi}}), \quad (3.30)$$

onde

$$\begin{aligned} S^{(\beta)}(Q, Q_{\hat{\phi}}) &= m_\beta (S_1(Q_{\hat{\phi}}, Q) + S_2(Q, Q_0)) \\ iS_p(Q, Q') &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_p} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e $m_\beta = 1 + \delta_{\beta,4}$. A equação de ponto-de-sela é resolvida por meio da matriz com a mesma estrutura da equação (3.17), modificando a matriz $\hat{\theta}$ para $\hat{\theta} = \text{diag}(i\theta_B, \theta_F)$ com

$$\theta_B = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_{1\beta} \\ \theta_{1\beta} & \theta_1 \end{pmatrix}; \quad \theta_F = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_{0\beta} \\ \theta_{0\beta} & \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A fase m_β em $S^{(\beta)}(Q, Q_{\hat{\phi}})$ não altera o resultado do método variacional aplicado da forma já descrita, ou seja, as leis de conservação (3.19) são as mesmas para todos os ensembles.

3.2 Termo Principal Semiclássico

Como exemplo simples de aplicação da teoria de circuitos, calculamos o termo principal da condutância e da potência do ruído de disparo para um ponto acoplado a dois terminais, como na figura (3.1). Seguindo a referência [53], vamos escrever a estatística de contagem usando a equação de conservação (3.19) com uma pseudo-corrente dada por

$$I_p(\phi) = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{2T_{pn} \tan(\phi/2)}{1 + (1 - T_{pn}) \tan^2(\phi/2)}, \quad p = 1, 2. \quad (3.33)$$

Para o caso de contatos ideais, ou seja, $T_{pn} = 1$, a equação (3.33) pode ser escrita de maneira trivial como $I_p(\phi) = 2N_p \tan(\phi/2)$ e a equação de conservação fica escrita como

$$N_1 \tan(\phi - \chi) = N_2 \tan(\chi), \quad (3.34)$$

onde ϕ é o pseudo-potencial no primeiro reservatório, χ é o pseudo-potencial no ponto-quântico e o pseudo-potencial é nulo no segundo reservatório, como na figura (3.1). Usando a identidade

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)},$$

e definindo $\xi \equiv \tan \chi$, podemos reescrever a equação (3.34) em termos de ξ como

$$N_1 \frac{\tan \phi - \xi}{1 + \xi \tan \phi} = N_2 \xi. \quad (3.35)$$

A equação anterior gera uma equação quadrática em ξ da forma

$$\xi^2 N_2 \tan \phi + (N_1 + N_2) \xi - N_1 \tan \phi = 0,$$

cujas soluções podem ser expandidas em potências de ϕ e é dada explicitamente por

$$\xi(\phi) = \frac{1}{2} \frac{N_1}{N_1 + N_2} \phi + \frac{1}{24} N_1 \frac{-N_1 N_2 + N_1^2 + N_2^2}{(N_1 + N_2)^3} \phi^3 + O(\phi^5) \quad (3.36)$$

A pseudo-corrente fica, então, dada explicitamente por $I^{(\beta)}(\phi) = N_2 \xi(\phi)$.

Um cumulante arbitrário da estatística de contagem pode ser obtido derivando a equação (3.1), como já foi discutido. Uma maneira direta de executar este cálculo é usar a relação

$$q_{l+1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\epsilon}{2} \frac{d}{d\epsilon} \right)^l \frac{\epsilon^2 I^{(\beta)}(\phi)}{\sin(\phi)} \Big|_{\epsilon=\cos(\phi/2)}. \quad (3.37)$$

Os cumulantes obtidos mediante a equação (3.37) também podem ser escritos em termos unicamente do campo ϕ no regime linear, ou seja, $\phi \rightarrow 0$. Por exemplo, a condutância e a potência do ruído de disparo serão dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= q_1 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2(\phi/2) I^{(\beta)}(\phi)}{\sin \phi} \right]; \\ \langle p \rangle &= q_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[-\cot(\phi/2) \frac{d}{d\phi} \frac{\cos^2(\phi/2) I^{(\beta)}(\phi)}{\sin \phi} \right]; \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando o resultado dado pela equação (3.36) na equação (3.38) e expandindo o argumento do limite em ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} - \frac{1}{4} \frac{(N_1 N_2)^2}{(N_1 + N_2)^3} \phi^2 - \dots \right] \\ &= \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{(N_1 N_2)^2}{(N_1 + N_2)^3} + \frac{N_1 N_2 (-7N_1 N_2 + 4N_1^2 + 4N_2^2)}{60(N_1 + N_2)^3} \phi^2 - \dots \right] \\ &= \frac{(N_1 N_2)^2}{(N_1 + N_2)^3} \end{aligned} \quad (3.40)$$

A equação (3.39) pode ser interpretada em termos da lei de Ohm. Para isso, deve-se levar em conta que a condutância do guia 1 é dada pelo traço dos auto-valores de transmissão e, como estamos considerando o caso ideal, a condutância do contato 1 é dada por $\langle g_1 \rangle = N_1$ e, da mesma forma, a condutância no contato 2 é dada por $\langle g_2 \rangle = N_2$. Então, a condutância total, $\langle g \rangle$, do sistema em série é dada por $1/\langle g \rangle = 1/\langle g_1 \rangle + 1/\langle g_2 \rangle$ (lei de Ohm), confirmando que $\langle g \rangle$ é dada pela equação (3.39). Os resultados para $\langle g \rangle$ e $\langle p \rangle$ também estão em acordo com os obtidos por outros métodos, como os que estão descritos na referência [57]. Usando o mesmo procedimento, podemos generalizar os resultados para a média da condutância e da potência do ruído de disparo para contatos não-ideais, usando novamente a equação (3.37). Devemos lembrar, novamente, que o termo principal independe do ensemble,

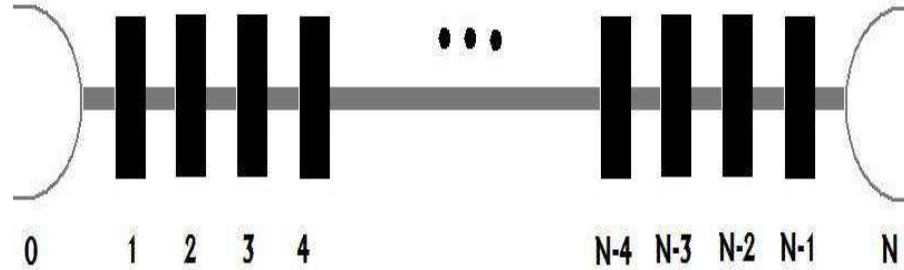


Figura 3.2: Figura esquemática de uma cadeia de cavidades caóticas (retângulos pretos) com índices $i = 1, \dots, N - 1$ em pseudo-potenciais χ_i conectadas umas às outras por guias e aos reservatórios $i = 0$ (num pseudo-potencial 0) e $i = N$ (num pseudo-potencial ϕ).

o que significa independência de índice de Dyson β . Nesse caso mais geral, os termos principais das médias podem ser explicitamente escritos, para os dois casos, como

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \\ \langle p \rangle &= \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^4} [G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - T_2) + G_2^3 (1 - T_1)], \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $G_i \equiv N_i T_i$.

3.3 Teoria de Circuitos de Nazarov e Correção de Localização Fraca

O modelo σ não-linear da seção anterior pode ser reescrito de maneira a gerar exatamente a mesma ação obtida por Nazarov [35]. Para isso, considere-se Q_1 e Q_2 duas matrizes de voltagem (potencial). Pode-se mostrar que

$$\frac{1}{2} \text{Str} \ln \left[1 - \frac{T}{4} (Q_1 - Q_2)^2 \right] = \text{Str} \ln (1 + e^{-\alpha} Q_1 Q_2); \quad T = \text{sech}^2(\alpha/2). \quad (3.42)$$

Uma parametrização recentemente usada por Nazarov [35] para as matrizes de voltagem considera que tais matrizes são não-diagonais por blocos. Pode-se, imediata-

mente, reobter essa ação, usando apenas uma matriz u_0 com a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ Q &= u \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \operatorname{sen} \hat{\theta} \\ -i \operatorname{sen} \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix} u^{-1} = u u_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\hat{\theta}} \\ e^{i\hat{\theta}} & 0 \end{pmatrix} (u u_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Escolhendo uma fonte e um ponto-de-sela parametrizados, respectivamente, pelas matrizes

$$\begin{aligned} Q_{\hat{\phi}} &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\hat{\phi}} \\ e^{i\hat{\phi}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\phi} = \operatorname{diag}(i\phi_1, i\phi_2, \phi_0, \phi_0); \text{ e} \\ Q_{sp} &= Q_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\hat{\theta}} \\ e^{i\hat{\theta}} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

obtém-se a mesma ação obtida por Nazarov, por exemplo, na referência [35], usando argumentos quase-clássicos

$$iS_p(Q_{\hat{\theta}}, Q_{\hat{\phi}}) = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N_p} \operatorname{Str} \ln \left[1 + \frac{T_{pn}}{4} \left(\{Q_{\hat{\theta}}, Q_{\hat{\phi}}\} - 2 \right) \right]. \quad (3.45)$$

A generalização imediata da ação anterior para uma cadeia de pontos conectados, como na figura (3.2), pode seguir do trabalho de Brouwer e Frahm na referência [50], ou dos argumentos semi-clássicos de Nazarov. A ação pode ser muito simplificada se considerarmos canais equivalentes e número igual de canais em cada guia. Nesse caso, a ação final fica escrita como

$$S = \frac{1}{4} g \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Tr} \ln \left[1 + \frac{T}{4} (\{G_j, G_{j+1}\} - 2) \right] - \frac{i\pi}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Tr}(\Sigma_j G_j), \quad (3.46)$$

onde $N-2$ é o número total de pontos, os índices $0, N$ caracterizam os reservatórios, Σ_j é o elemento da ação que descreve a descoerência no ponto quântico (cavidade caótica) e Δ é o espaçamento médio de níveis. As matrizes G_j podem ser vistas como as matrizes Q do modelo σ , como demonstrado, mas têm a sua ordem aumentada para conter os índices de canais em cada guia. Para simplificar mais ainda, consideremos o caso de junções de tunelamento ($T \ll 1$). Nesse caso, podemos reescrever a ação anterior expandindo até primeira ordem em T e obter

$$S = \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Tr}(G_j G_{j+1}) - \frac{i\pi}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Tr}(\Sigma_j G_j), \quad (3.47)$$

onde g_T é a condutância das junções de tunelamento. Por definição, $G_0 = G(0)$ e $G_N = G(\phi)$, com ϕ denotando o potencial no reservatório com índice N . A forma da matriz G_N será dada em termos da parametrização dada pela equação (3.44).

A equação semi-clássica é obtida de maneira idêntica ao que já foi mencionado para o ponto quântico, tomando $G_j \rightarrow e^{\delta\omega_j} G_j e^{-\delta\omega_j} = G_j + \delta G_j$; $\delta G_j \equiv [\delta\omega_j, G_j]$, mantendo o vínculo $G_j^2 = 1$. Pode-se escrever $S(G + \delta G) = S(G) + \delta S(G, \delta G)$ e eliminar os termos irrelevantes para a derivação matricial, levando a

$$\begin{aligned} \delta S(G; \delta\omega) &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \{ \text{Tr}([G_{j+1}, G_j] \delta\omega_{j+1}) + \text{Tr}([G_j, G_{j+1}] \delta\omega_j) \} \\ &\quad - \frac{i\pi}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} \text{Tr}(\Sigma_j [G_j, \Sigma_j] \delta\omega_j). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Minimizando a derivada matricial, obtém-se

$$\frac{\delta S}{\delta\omega_j} = \frac{1}{4} g_T ([G_j, G_{j-1}] + [G_j, G_{j+1}]) + \frac{i\pi}{\Delta} [\Sigma_j, G_j] = 0. \quad (3.49)$$

Definindo as correntes matriciais $I_{j,\sigma} \equiv g_T [G_{j+\sigma}, G_j]/4$, $\sigma = \pm 1$, e $I_j^{(\text{vazamento})} \equiv -i\pi [\Sigma_j, G_j]/\Delta$, pode-se reescrever a equação (3.49) como

$$\sum_{\sigma=\pm 1} I_{j,\sigma} + I_j^{(\text{vazamento})} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.50)$$

Como primeira aplicação da equação (3.50), vamos desprezar efeitos de descoerência, ou seja, negligenciar a pequena perturbação causada pelo vazamento de pseudo-corrente. Nesse caso, podemos escrever

$$[G_{j+1}^{sp}, G_j^{sp}] = [G_j^{sp}, G_{j-1}^{sp}]; \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.51)$$

As condições de contorno impostas pelos potenciais escalares dos reservatórios são os elementos necessários para resolver a equação anterior. Anteriormente, foi visto que as condições de contorno podem ser escritas nos reservatórios de índice 0 e N , respectivamente, como

$$\begin{cases} G_0^{sp} = G(0) = \sigma_1 \\ G_N^{sp} = G(\phi) = e^{-i\phi\sigma_3/2} \sigma_1 e^{i\phi\sigma_3/2} \end{cases} \quad (3.52)$$

Uma tentativa simples de solução para a equação anterior seria escolher $G_j^{sp} = e^{-i\phi_j\sigma_3/2} \sigma_1 e^{i\phi_j\sigma_3/2}$ e encontrar a solução para os potenciais ϕ_j de cada ponto. Usando

essa tentativa, obtém-se

$$[G_{j+1}^{sp}, G_j^{sp}] = -2i \text{sen}(\phi_{j+1} - \phi_j) \sigma_3. \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

Usando a equação anterior e a equação (3.51), obtém-se $\text{sen}(\phi_{j+1} - \phi_j) = \text{sen}(\phi_j - \phi_{j-1})$, gerando uma equação de Laplace discreta unidimensional

$$\begin{cases} \phi_{j+1} + \phi_{j-1} - 2\phi_j = 0 \\ \phi_0 = 0 \quad ; \quad \phi_N = \phi \end{cases} \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.55)$$

A solução da equação anterior é dada por $\phi_j = j\phi/N$. Substituindo tal solução na ação original, obtém-se que $\{G_j^{sp}, G_{j+1}^{sp}\} = 2 \cos(\phi/N) 1_2$ e

$$S_{sp}(\phi) = \frac{N}{2} g_T \cos(\phi/N). \quad (3.56)$$

A pseudo-corrente é dada em termos da derivada da ação

$$I_{sp}(\phi) = -2 \frac{d}{d\phi} S_{sp}(\phi) = g_T \text{sen}(\phi/N). \quad (3.57)$$

Usando a pseudo-corrente e a equação para o gerador da estatística de contagem e expandindo em ϕ , como nas equações (3.38), obtemos a condutância e o ruído de disparo, respectivamente

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= q_1 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2(\phi/2) I(\phi)}{\text{sen} \phi} \right] \\ &= g_T \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N} - \left(\frac{1}{6N^3} + \frac{1}{12N} \right) \phi^2 + \dots \right] \\ &= \frac{g_T}{N}; \\ \langle p \rangle &= q_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[-\cot(\phi/2) \frac{d}{d\phi} \frac{\cos^2(\phi/2) I^{(\beta)}(\phi)}{\text{sen} \phi} \right] \\ &= g_T \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{2 + N^2}{3N^3} - \frac{4 + N^4 + 10N^2}{60N^5} \phi^2 \right] \\ &= \frac{g_T}{3N} \left(1 + \frac{2}{N^2} \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

De acordo com a equação (3.58), a condutância e o ruído de disparo para o caso de uma única cavidade caótica ($N = 2$) são dados, respectivamente, por $\langle g \rangle = g_T/2$ e $\langle p \rangle = g_T/4$. Note que esse caso coincide com o resultado dado pelas equações (3.38) tomando $g_T = N_1 T_1$, como $N_1 = N_2$ e $T_1 = T_2 \ll 1$. Para $N \gg 1$, reobtemos o resultado da referência [57] para o fio quântico quase-unidimensional: $\langle p \rangle / \langle g \rangle = 1/3$. Generalizar o termo principal dos cumulantes para a cadeia para barreiras arbitrárias segue o mesmo procedimento. Vamos agora encontrar correções quânticas para os cumulantes.

Seguindo argumentos recentemente apresentados por Campagnano e Nazarov na referência [52], vamos calcular a correção de localização fraca para a cadeia acoplada por junções de tunelamento. O procedimento básico consiste em duplicar o espaço no qual está embebida a função de Green. Isso permite criar dois setores independentes que podem representar os diagramas tipo escada (difusons) ou os diagramas maximamente cruzados (cooperons). Tais setores, como veremos, serão representados por campos escalares independentes. Consideremos então uma matriz de ordem quatro cujos blocos são as funções de Green solução da equação de Laplace dada pela equação (3.55) com a seguinte estrutura

$$\hat{G}_j^{sp}(\phi, \phi') = \begin{pmatrix} G(j\phi/N) & 0 \\ 0 & G(j\phi'/N) \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

onde j denota o índice do conector ou reservatório, como já explicado. O procedimento usado na referência [52] consiste em perturbar a ação no ponto-de-sela mediante um termo perturbador g_j até segunda ordem. Nesse caso, a função de Green perturbada será dada por

$$\hat{G}_j = \hat{G}_j^{sp} + \hat{g}_j - \frac{1}{2} \hat{G}_j^{sp} \hat{g}_j^2 + \dots \quad (3.60)$$

Devemos notar que o vínculo $\hat{G}_j^2 = 1$ é mantido apenas se $\{\hat{G}_j^{sp}, \hat{g}_j\} = 0$.

Uma maneira conveniente de escrever a matriz $\hat{G}_j^{sp}$ é torná-la diagonal. Note-mos que $G(\phi) = e^{-i\phi\sigma_3/2} \sigma_1 e^{i\phi\sigma_3/2}$, ou seja, a função de Green de ordem duplicada para o ponto arbitrário pode ser escrita como

$$\hat{G}_j^{sp} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta\sigma_3/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta'\sigma_3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta\sigma_3/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta'\sigma_3/2} \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

onde $\theta = j\phi/N$ e $\theta' = j\phi'/N$. Uma matriz que diagonaliza $\hat{G}_j^{sp}$ é dada por

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix}; \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Nessa nova base, temos $\hat{G}_j^{sp} = \hat{u}^\dagger \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} T_j \hat{u}$, onde a matriz $\hat{\Lambda}$ é a matriz $\hat{G}_j^{sp}$ diagonalizada e a matriz $\hat{T}_j$ carrega informações sobre os índices da cadeia. Tais matrizes são escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \hat{T}_j &= \hat{u} \begin{pmatrix} e^{i\theta\sigma_3/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta'\sigma_3/2} \end{pmatrix} \hat{u}^\dagger = \hat{u} \begin{pmatrix} e^{i\theta\sigma_1/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta'\sigma_1/2} \end{pmatrix} \hat{u}^\dagger.\end{aligned}\quad (3.63)$$

Substituindo $\hat{G}_j^{sp}$ diagonalizado na ação e usando a propriedade cíclica do traço e o fato que $\hat{T}_j \hat{T}_{j+1}^\dagger$ não depende do índice da cadeia, a expressão para a ação no ponto-de-sela pode ser grandemente simplificada

$$\begin{aligned}S_{sp} &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr}(\hat{G}_j^{sp} \hat{G}_{j+1}^{sp}) \\ &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr}(\hat{u}^\dagger \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} T_j \hat{u} \hat{u}^\dagger \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} T_{j+1} \hat{u}) \\ &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr}(\hat{L}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L}_j \hat{\Lambda}) \\ &= \frac{N}{4} g_T \text{Tr}(\hat{L} \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda}),\end{aligned}\quad (3.64)$$

onde a matriz $\hat{L}$ não depende do índice de cadeia e é representada como

$$\hat{L} \equiv \hat{T}_j \hat{T}_{j+1}^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\phi\sigma_1/2N} & 0 \\ 0 & e^{i\phi'\sigma_1/2N} \end{pmatrix}.\quad (3.65)$$

A equação (3.64) pode imediatamente gerar a equação (3.56) levando em conta o campo escalar ϕ e ϕ' contidos nos dois espaços separados. Para isso, basta notar que $\hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} = \hat{L}$, ou seja, a equação (3.64) pode ter o traço calculado imediatamente

usando também a equação (3.65)

$$\begin{aligned}
 S_{sp} &= \frac{N}{4} g_T \text{Tr} \left(\hat{L}^2 \right) \\
 &= \frac{N}{4} g_T \text{Tr} \begin{pmatrix} e^{i\phi\sigma_1/N} & 0 \\ 0 & e^{i\phi\sigma_1/N} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{N}{2} g_T [\cos(\phi/N) + \cos(\phi'/N)].
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Uma vez diagonalizada a matriz $\hat{G}_j^{sp}$ como $\hat{\Lambda}$, pode-se fazer uma escolha apropriada da matriz g_k que satisfaça arbitrariamente o vínculo $\{\hat{G}_j^{sp}, g_j\} = 0$. Uma escolha simples é a usada na referência [52]

$$\hat{g}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{k,p}^{bw} \\ 0 & 0 & g_{k,m}^{bw} & 0 \\ 0 & g_{k,p}^{wb} & 0 & 0 \\ g_{k,m}^{wb} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_k^{bw} \\ g_k^{wb} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

onde k é índice de ponto, o segundo sub-índice é um índice interno dos sub-blocos e o sobre-índice rotula o bloco. Usando a nomenclatura da referência [52], os setores b (preto) e w (branco) caracterizam os espaços independentes da expansão perturbativa: b caracteriza a primeira linha (coluna) e w caracteriza a segunda linha (coluna), de maneira que bw e wb são índices de acoplamento entre os sub-espacos. O segundo sub-índice será escrito em termos de $\pm$. Assim, $p = +, -$ e $m = -, +$ na equação (3.67). Com os termos perturbativos presentes na ação mediante a função de Green $\hat{G}_j = \hat{\Lambda} + g_j - 1/2\hat{\Lambda}g_j^2 + \dots$ substituindo $\hat{\Lambda}$, a ação fica descrita pelos campos escalares que doravante denotaremos por ϕ_b e ϕ_w , como

$$S'(\phi_b, \phi_w) = \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr}(\hat{L}^\dagger \hat{G}_j \hat{L} \hat{G}_{j+1}). \tag{3.68}$$

Coletando apenas os termos que contribuem para a perturbação até segunda ordem em $\hat{g}_j$, usando a relação $\hat{L}\hat{\Lambda}^\dagger\hat{L} = \hat{L}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 S(\phi_b, \phi_w) &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \text{Tr}(\hat{L}^\dagger \hat{g}_j \hat{L} \hat{g}_{j+1}) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{g}_{j+1}^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{g}_j^2 \hat{L}^\dagger \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} g_T \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \text{Tr} \left(\hat{L}^\dagger \hat{g}_j \hat{L} \hat{g}_{j+1} \right) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\hat{L}^\dagger)^2 g_{j+1}^2 \right) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\hat{L}^\dagger \hat{g}_j^2 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Definindo $A_{b(w)} \equiv e^{i\phi_{b(w)}\sigma_1/2N}$, $B_{b(w)} \equiv A_{b(w)}^2$, $\bar{\sigma} = \pm = \mp$, obtemos, após tomar o traço na estrutura externa das matrizes, o seguinte resultado

$$S(\phi_b, \phi_w) = \frac{1}{4}g_T \sum_{j=0}^{N-1} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6), \quad (3.70)$$

onde levamos em conta a estrutura da matriz $\hat{g}_j$ na base que diagonaliza $\hat{G}_j^{sp}$, ou seja, $(g_j^{bw(wb)})_{\sigma, \sigma'} \propto \delta_{\sigma, \bar{\sigma}'}$ para obter

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \text{Tr}(A_b^\dagger g_j^{bw} A_w g_{j+1}^{wb}) = \sum_{\sigma \sigma' \sigma'' \sigma'''} (A_b^\dagger)_{\sigma \sigma'} (X_j^{bw})_{\sigma' \sigma''} (A_w)_{\sigma'' \sigma'''} (X_{j+1}^{wb})_{\sigma''' \sigma} \\ &= \sum_{\sigma \sigma'} (A_b^\dagger)_{\sigma \sigma'} (g_j^{bw})_{\sigma', \bar{\sigma}'} (A_w)_{\bar{\sigma}', \bar{\sigma}} (g_{j+1}^{wb})_{\bar{\sigma}, \sigma} \\ &= \sum_{\sigma \sigma'} a_{\sigma' \sigma}^{b*} a_{\bar{\sigma}' \bar{\sigma}}^w g_{k, \sigma' \bar{\sigma}'}^{bw} g_{j+1, \bar{\sigma} \sigma}^{wb}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

e, com álgebra similar para eliminar somatórios irrelevantes,

$$\begin{aligned} T_2 &\equiv \text{Tr}(A_w^\dagger g_j^{wb} A_b g_{j+1}^{bw}) = \sum_{\sigma \sigma'} a_{\sigma' \sigma}^{w*} a_{\bar{\sigma}' \bar{\sigma}}^b g_{j, \sigma' \bar{\sigma}'}^{wb} g_{j+1, \bar{\sigma} \sigma}^{bw} \\ T_3 &\equiv \text{Tr}(B_b^\dagger g_{j+1}^{bw} g_{j+1}^{wb}) = \sum_{\sigma} B_{\sigma \sigma}^{b*} g_{j+1, \sigma \bar{\sigma}}^{bw} g_{j+1, \bar{\sigma} \sigma}^{wb} \\ T_4 &\equiv \text{Tr}(B_w^\dagger g_{j+1}^{wb} g_{j+1}^{bw}) = \sum_{\sigma} B_{\sigma \sigma}^{w*} g_{j+1, \sigma \bar{\sigma}}^{wb} g_{j+1, \bar{\sigma} \sigma}^{bw} \\ T_5 &\equiv \text{Tr}(B_b^\dagger g_j^{bw} g_j^{wb}) = \sum_{\sigma} B_{\sigma \sigma}^{b*} g_{j, \sigma \bar{\sigma}}^{bw} g_{j, \bar{\sigma} \sigma}^{wb} \\ T_6 &\equiv \text{Tr}(B_w^\dagger g_j^{wb} g_j^{bw}) = \sum_{\sigma} B_{\sigma \sigma}^{w*} g_{j, \sigma \bar{\sigma}}^{wb} g_{j, \bar{\sigma} \sigma}^{bw} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Os escalares T_i , $i = 1, \dots, 6$ permitem obter explicitamente os auto-valores da expansão perturbativa proposta. Para isso, vamos primeiramente escrever explicitamente as entradas das matrizes auxiliares $A_{b(w)} \equiv e^{i\phi_{b(w)}\sigma_1/2N}$, $B_{b(w)} \equiv A_{b(w)}^2$:

$$\begin{aligned} A_{b(w)} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi_{b(w)}/2N) & i\text{sen}(\phi_{b(w)}/2N) \\ i\text{sen}(\phi_{b(w)}/2N) & \cos(\phi_{b(w)}/2N) \end{pmatrix}; \\ B_{b(w)} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi_{b(w)}/N) & i\text{sen}(\phi_{b(w)}/N) \\ i\text{sen}(\phi_{b(w)}/N) & \cos(\phi_{b(w)}/N) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por inspeção, podemos imediatamente escrever as derivadas dos escalares T_i substituindo as entradas. Por exemplo, vamos tomar a variação de T_1 com respeito a $g_{l,+}^{wb}$ e substituir

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial g_{l,+}^{wb}} &= \sum_{\sigma'=\pm} a_{\sigma'-}^{b*} a_{\sigma'-}^w g_{l-1,\sigma'\sigma'}^{bw} \\ &= a_{+-}^{b*} a_{--}^w g_{l-1,+-}^{bw} + a_{--}^{b*} a_{+-}^w g_{l-1,-+}^{bw} \\ &= [\text{isen}(\phi_b/2N)] [\cos(\phi_w/2N)] g_{l-1,+-}^{bw} + [\cos(\phi_b/2N)] [\text{isen}(\phi_w/2N)] g_{l-1,-+}^{bw}. \end{aligned}$$

Tomando a variação com respeito a $g_{l,+}^{wb}$ da soma de T_i seguindo esse exemplo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{l,+}^{wb}} \sum_{i=1}^6 T_i &= \text{sen}(\phi^b/2N) \text{sen}(\phi^w/2N) (g_{l+1,+-}^{wb} + g_{l-1,+-}^{wb}) \\ &\quad + \cos(\phi^b/2N) \cos(\phi^w/2N) (g_{l+1,-+}^{wb} + g_{l-1,-+}^{wb}) \\ &\quad - [\cos(\phi^b/N) + \cos(\phi^w/N)] g_{l,+}^{wb}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Procedendo da mesma forma com a variação com respeito a $g_{l,-+}^{wb}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{l,-+}^{wb}} \sum_{i=1}^6 T_i &= \text{sen}(\phi^b/2N) \text{sen}(\phi^w/2N) (g_{l+1,-+}^{wb} + g_{l-1,-+}^{wb}) \\ &\quad + \cos(\phi^b/2N) \cos(\phi^w/2N) (g_{l+1,+-}^{wb} + g_{l-1,+-}^{wb}) \\ &\quad - [\cos(\phi^b/N) + \cos(\phi^w/N)] g_{l,-+}^{wb}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Uma forma conveniente de escrever o resultado para a variação da ação, δS , é escrevê-la em termos de uma matriz M que “acopla” os setores wb e bw . Em termos dessa matriz, a variação da ação pode ser escrita como

$$\delta S = g_{\bar{a}}^{wb} M_{\bar{a}\bar{b}} g_{\bar{b}}^{bw}, \quad (3.76)$$

onde o índice com barra é composto de três outros índices, dois para a matriz que descreve o nó e um do próprio nó, respectivamente, de modo que a o índice barra tem a seguinte forma $\bar{a} \equiv (a, b, \alpha)$. A variação da equação (3.76) sujeita ao vínculo $\{\hat{G}_0, g\} = 0$ fornece a correção. Vamos então encontrar os auto-valores da matriz M . Tomando a variação de δS com respeito a $g_{l,+}^{wb}$ e igualando à variação da ação

dada pela equação (3.70), obtemos um sistema de equações acopladas

$$\begin{aligned} \frac{4}{g_T} M g_{l,-+}^{wb} &= \sin(\phi^b/2N) \sin(\phi^w/2N) (g_{l+1,-+}^{wb} + g_{l-1,-+}^{wb}) \\ &\quad + \cos(\phi^b/2N) \cos(\phi^w/2N) (g_{l+1,-+}^{wb} + g_{l-1,-+}^{wb}) \\ &\quad - [\cos(\phi^b/N) + \cos(\phi^w/N)] g_{l,-+}^{wb}; \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{g_T} M g_{l,+-}^{wb} &= \sin(\phi^b/2N) \sin(\phi^w/2N) (g_{l+1,+-}^{wb} + g_{l-1,+-}^{wb}) \\ &\quad + \cos(\phi^b/2N) \cos(\phi^w/2N) (g_{l+1,+-}^{wb} + g_{l-1,+-}^{wb}) \\ &\quad - [\cos(\phi^b/N) + \cos(\phi^w/N)] g_{l,+-}^{wb}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Para desacoplar a equação anterior, é conveniente escrever

$$g_{l,\sigma\bar{\sigma}}^{wb} = g_{\sigma\bar{\sigma}}^{>} e^{iq_l} + g_{\sigma\bar{\sigma}}^{<} e^{-iq_l}, \quad (3.79)$$

onde q é determinado pelas condições de contorno $g_{0,\sigma\bar{\sigma}}^{wb} = 0$ e $g_{N,\sigma\bar{\sigma}}^{wb} = 0$. Dessas condições de contorno, fica claro que $g_{\sigma\bar{\sigma}}^{>} = g_{\sigma\bar{\sigma}}^{<}$ e que $q = \pi l/N$ com $l = 1, \dots, N-1$. Substituindo a equação (3.79) nas equações (3.77 e (3.78), obtém-se uma matriz 2×2 cujos auto-valores são dados por

$$\begin{aligned} \frac{4}{g_T} M_l^{\pm}(\phi^b, \phi^w) &= 2 \cos\left(\frac{\phi^b}{2N}\right) \cos\left(\frac{\phi^w}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}\right) \\ &\quad - \cos\frac{\phi^b}{N} \cos\frac{\phi^w}{N} \mp 2 \sin\left(\frac{\phi^b}{2N}\right) \sin\left(\frac{\phi^w}{2N}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{N}\right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Pode-se mostrar que o termo da ação de localização fraca da ação da cadeia pode ser escrita em termos dos auto-valores $M_l^{\pm}(\phi, -\phi)$ da seguinte forma

$$S^{WL} = \frac{1}{2} \sum_l \left(\ln \frac{M_l^-}{M_l^+} + \frac{3}{2} \ln \frac{M_l^+}{M_l^-} \right). \quad (3.81)$$

Substituindo a equação (3.80) na equação (3.81), obtemos

$$S^{WL} = \frac{N-2}{2} \ln \left(\cos \frac{\phi}{N} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin \frac{2\phi}{N}}{\sin \phi} \right). \quad (3.82)$$

Claramente, pela equação acima, o caso em que temos uma cavidade caótica acoplada por junções de tunelamento a dois reservatórios ($N=2$) torna a ação nula, ou seja,

para esse sistema não existe correção de localização fraca nos cumulantes no limite de barreiras de tunelamento. Executando os procedimentos descritos anteriormente, Campagnano e Nazarov generalizam a ação para uma cavidade caótica com contatos arbitrários. O cálculo é idêntico ao anterior e o resultado para os auto-valores de localização fraca, ou seja, substituindo $\phi_b = -\phi_w$ na equação de auto-valores, será apresentado na seção seguinte.

Na próxima seção, mostraremos como extrair a informação sobre a correção de localização fraca com barreiras arbitrárias para a cavidade caótica usando esse conjunto de auto-valores. Tal resultado foi publicado na referência [53]. De maneira surpreendente, o resultado exibe interessantes efeitos de troca de sinal no termo de localização fraca num mesmo ensemble - o que é incomum na literatura.

3.4 Correção de Localização Fraca para o Ponto Quântico com Barreiras Arbitrárias - Ensembles Puros

Na referência [53], mostramos que a correção de localização fraca para o ruído de disparo de um ponto quântico não-ideal apresenta um interessante efeito de supressão-amplificação. Mostramos o resultado por dois métodos independentes e vimos uma importante conexão entre eles. O método diagramático de integração sobre grupo unitário será apresentado no capítulo seguinte. O método que apresentaremos nesta seção, consiste em aplicar, de maneira não-trivial, as idéias de Campagnano e Nazarov para a obtenção dos cumulantes da estatística de contagem para a cavidade caótica.

A contribuição dominante é proveniente da equação do ponto-de-sela, a qual, como vimos, reproduz a lei de conservação de pseudo-corrente da teoria semiclassica de circuitos (ver referência [35]), $I^{(\beta)}(\phi) \approx I_{sp}(\phi) = I_1(\phi - \chi) = I_2(\chi)$, onde p é índice de terminal e

$$I_p(\phi) = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{2T_{pn} \tan(\phi/2)}{1 + (1 - T_{pn}) \tan^2(\phi/2)}, \quad p = 1, 2. \quad (3.83)$$

Para além da contribuição do ponto-de-sela, obtemos a correção de localização fraca, de maneira que a expansão completa em potências inversas da condutância clássica pode ser escrita como $I_\phi^{(\beta)} = I_{sp}(\phi) + I^{WL}(\phi) + \dots$, onde $I^{WL}(\phi)$ denota a correção de localização fraca para a pseudo-corrente. Para sistemas com simetria unitária ($\beta = 2$) e contatos ideais ($T_{pn} = 1$), a expansão completa pode ser

calculada explicitamente, como foi feito na referência [51]. Usaremos a ação dada pela equação (3.82) deduzida da teoria de circuitos por Campagnano e Nazarov para o caso de ensembles puros com os auto-valores para barreiras arbitrárias. Na notação introduzida na referência [53], pode-se escrever a ação de localização fraca como

$$I^{WL}(\phi) = \frac{2 - \beta}{\beta} \frac{d}{d\phi} \ln \frac{M_+(\phi)}{M_-(\phi)}, \quad (3.84)$$

onde $M_{\pm}(\phi)$ são os auto-valores Cooperon, obtidos na seção anterior tomando-se $\phi^b = -\phi^w = \phi$ que, para nosso caso, podem ser escritos como

$$\begin{aligned} M_+(\phi) &= 2 \frac{I'_{sp}(\phi)}{[\chi'(\phi)]^2 - 1/4} \\ M_-(\phi) &= 2I_{sp}(\phi) \left[\cot \left(\chi(\phi) - \frac{\phi}{2} \right) - \cot \left(\chi(\phi) + \frac{\phi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde $I'_{sp}(\phi) \equiv dI_{sp}(\phi)/d\phi$, $\chi'(\phi) \equiv d\chi(\phi)/d\phi$ é a fase intermediária $\chi(\phi)$, obtida da equação de ponto-de-sela escrita na forma $I_{sp}(\phi) = I_1(\phi/2 + \chi) = I_2(\phi/2 - \chi)$. Devemos lembrar que tais expressões para os auto-valores, como ficou claro na seção anterior, variam conforme o sistema físico em questão. As equações (3.85) servem ao nosso propósito de aplicação à cavidade caótica. A principal dificuldade técnica é obter expressões explícitas para a média da condutância (g) e potência de ruído de disparo (p) das seguintes equações

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \left. \frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin(\phi)} I(\phi) \right|_{\phi=0}, \\ \langle p \rangle &= -\cot(\phi/2) \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin(\phi)} I(\phi) \right) \Big|_{\phi=0}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Consideramos que a pseudo-corrente $I(\phi)$ das equações anteriores são dadas até ordem de correção de localização fraca, de maneira que podemos escrevê-la através da ação do ponto-de-sela e da ação de localização fraca da seguinte maneira

$$\begin{aligned} I(\phi) &= -2 \frac{d}{d\phi} S \\ &= I_{sp}(\phi) + \frac{2 - \beta}{\beta} I^{WL}(\phi) + \dots \\ &= -2 \left(\frac{d}{d\phi} S_{sp} + \frac{2 - \beta}{\beta} \frac{d}{d\phi} S^{WL} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

A pseudo-corrente é calculada usualmente, expressando $I_{sp}(\phi)$ em termos de uma solução física da equação quártica resultante da “lei de conservação”. Executando corretamente as expansões polinomiais da equação quártica no limite $\phi \rightarrow 0$ (regime linear), obtém-se a pseudo-corrente e, conseqüentemente, os auto-valores da ação de localização fraca. Usando a função geratriz da estatística de contagem, obtemos a média da condutância até ordem $\mathcal{O}(1)$ como

$$\langle g \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1)}{(G_1 + G_2)^3}. \quad (3.88)$$

A equação (3.88) está em total acordo com a referência [57]. O primeiro termo representa a lei de Ohm e o segundo é a correção de localização fraca. Por definição, $G_1 = N_1 T_1$ e $G_2 = N_2 T_2$ (canais equivalentes), ou seja, o primeiro termo da equação anterior representa a condutância de um circuito em série. O segundo termo se anula quando $\beta = 2$, caracterizando o cancelamento da localização fraca para intensidade do campo magnético suficientemente alta. Para a potência do ruído de disparo, a média até ordem $\mathcal{O}(1)$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle p \rangle = & \frac{G_1 G_2 [G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - T_2) + G_2^3 (1 - T_1)]}{(G_1 + G_2)^4} \\ & + \left(\frac{2}{\beta} - 1\right) \frac{G_1 G_2 (G_1 - G_2) (G_1 T_2 + G_2 T_1) [3(G_2^2 - G_1^2) + 4(G_1^2 T_2 - G_2^2 T_1)]}{(G_1 + G_2)^6}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.89) será alvo de investigação na próxima seção. Trata-se de um resultado novo na literatura, apresentado na referência [53], que ilustra uma importante manifestação fenomenológica das barreiras nas correções de localização fraca.

3.5 Efeito Supressão-Amplificação Intrínseco

O primeiro termo da equação (3.89) é o termo clássico e já tinha sido previamente obtido na referência [57]. Vamos nos concentrar no termo de correção de localização fraca da equação (3.89), ou seja, no termo

$$p^{WL} = \left(\frac{2}{\beta} - 1\right) \frac{G_1 G_2 (G_1 - G_2) (G_1 T_2 + G_2 T_1) [3(G_2^2 - G_1^2) + 4(G_1^2 T_2 - G_2^2 T_1)]}{(G_1 + G_2)^6}. \quad (3.90)$$

Em primeiro lugar, note-se que o caso limite de contatos ideais já havia sido obtido por Beenakker na referência [57]. O nosso resultado da equação (3.90) coincide com o

dessa referência para $T_i = 1$, resultando em $p^{WL} = \left(\frac{2}{\beta} - 1\right) (N_1 - N_2)^2 / (N_1 + N_2)^4$. Nesse caso, a correção de localização fraca é sempre não-negativa ($\beta = 1$), não-positiva ($\beta = 4$) ou nula ($\beta = 2$), dependendo apenas da classe de simetria, mas mantendo o sinal dentro da mesma classe. Levando em conta as barreiras, observamos um efeito supressão-amplificação (mudança de sinal no termo de localização fraca) dentro de um mesmo ensemble, o que era totalmente inesperado.

Com o propósito de clareza, vamos nos concentrar no caso de canais equivalentes. Os resultados podem ser melhor entendidos mediante os diagramas nos planos (T_1, T_2) para um parâmetro a definido como $a \equiv N_2/N_1$ fixo e (a, T_2) para T_1 fixo. O principal efeito físico novo é a existência de regiões no espaço de parâmetros, denotadas por (+) e por (-) nos gráficos (2) e (4) da figura (3.3), onde $p^{WL} < 0$ e $p^{WL} > 0$, respectivamente. Consequentemente, o sistema exhibe uma transição supressão-amplificação induzida pelas barreiras na correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo. Podemos também definir regiões, denotados por (0), (I) e (II), nos gráficos (1) e (3) da figura (3.3), onde p^{WL} tem, como função das variáveis remanescentes, zero (0), uma (I) e duas (II) mudanças de sinal. As formas das linhas de contorno separando tais regiões são independentes das variáveis remanescentes. O ponto mais interessante dos diagramas é dado por $p_c^{WL} = (3/4, 3/4)$. Em p_c^{WL} , $p^{WL} = 0$ para todos os valores de a . Sendo assim, p_c^{WL} separa duas regiões independentes de a no gráfico (1) da figura (3.3): uma onde $p^{WL} < 0$ para pontos na linha (T, T) com $T < 3/4$ e outra para $p^{WL} > 0$ para pontos na linha (T, T) com $T > 3/4$. Consequentemente, as linhas de contorno inferiores entre as regiões (+) e (-) exibidos nos gráficos (2) da figura (3.3) (ambas as linhas, contínua e tracejada) estão localizadas na região (II) do gráfico (1) da figura (3.3). Finalmente, a supressão linear de p^{WL} no limite opaco, definido na referência [58] como $T_i \rightarrow 0$ com G_i fixo, é uma propriedade interessante do nosso resultado. Um efeito similar para a correção de localização fraca para a condutância tem uma “explicação” física baseada no método semi-clássico, como o da referência [58].

Nós acreditamos que as transições previstas nesse trabalho possam se tornar uma ferramenta útil para detectar experimentalmente, de maneira controlada, a correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo em pontos quânticos caóticos balísticos. Experimentos com barreiras controláveis, como os que estão discutidos nas referências [2, 59], já estão prontos para detectar pequenas variações na corrente elétrica e, desse modo, extrair a estatística de contagem e cumulantes até quinta ordem.

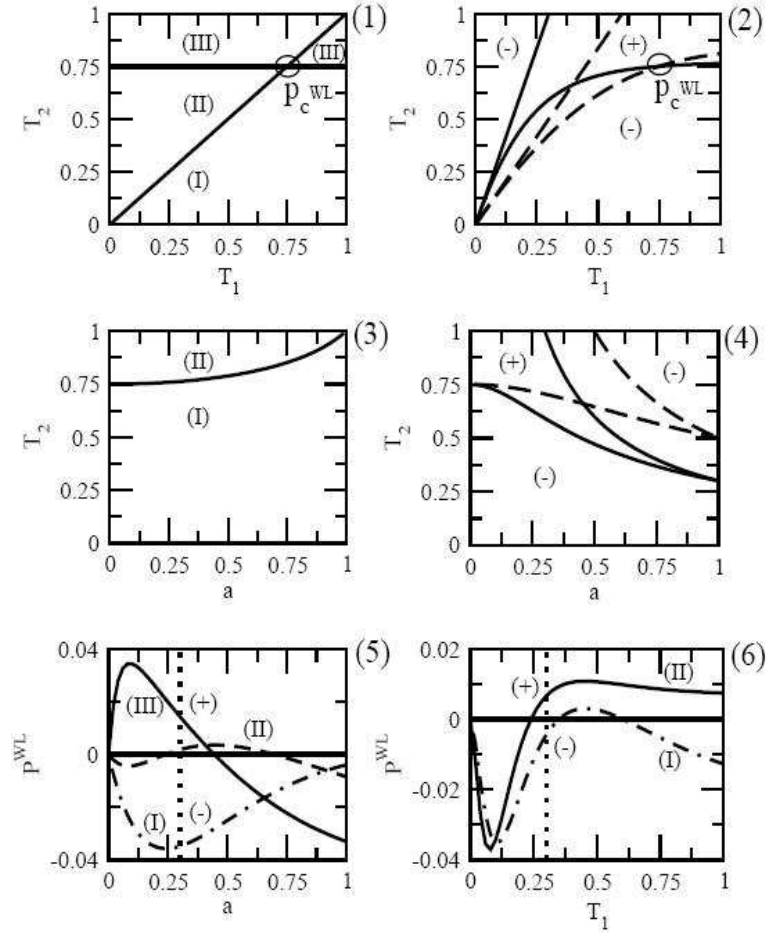


Figura 3.3: Diagramas mostrando a transição. (1) Nas regiões (0), (I) e (II), p^{WL} têm, respectivamente, zero, uma e duas mudanças de sinais como função de a no intervalo $[0, 1]$; (2) Diagramas (T_1, T_2) separando as regiões positivas (+) e negativas (-) para $a = 3/10$ (linha contínua) e $a = 6/10$ (linha tracejada); (3) Diagrama (a, T_2) separando as regiões (I) e (II), onde p^{WL} tem uma e duas mudanças de sinal, respectivamente, como função de T_1 ; (4) Regiões positivas (+) e negativas (-) no plano (a, T_2) para $T_1 = 3/10$ (linha contínua) e $T_1 = 5/10$ (linha tracejada); (5) Gráfico de p^{WL} mostrando as mudanças de sinal como função de a para pontos interiores a cada uma das regiões do diagrama (1); (6) Gráfico de p^{WL} mostrando as mudanças de sinal como função de T_1 para cada região do diagrama (3).

3.6 Crossover entre as Classes de Wigner-Dyson para o Ponto Quântico Caótico Não-Ideal

As realizações experimentais mais comuns de cavidades caóticas envolvem metais desordenados na forma de fio, no limite em que o seu comprimento tende a zero, ou regiões confinadas no gás de elétrons bidimensional em heteroestruturas do tipo GaAs/Ga[Al]As. Em tais experimentos, é possível, por exemplo, controlar a intensidade do campo elétrico na amostra por meio de “portas” de tensão, controlar a intensidade do campo magnético externo e o espalhamento spin-órbita por meio de impurezas. Variando a intensidade do espalhamento magnético e/ou do espalhamento spin-órbita, o sistema transita entre as três classes de simetria de Dyson - ensemble gaussiano ortogonal (GOE), ensemble gaussiano unitário (GUE) e ensemble gaussiano simplético (GSE) - os quais são especificados pela presença ou ausência de simetria de reversão temporal (T) e simetria $SU(2)$ de rotação de spin.

A condutância e a potência do ruído de disparo têm sido alvo de intenso estudo nesses sistemas de crossover. Em estudo recente, a correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo, nas referências [60, 61], e também para a condutância, nas referências [62, 63], têm sido estudados no regime de crossover, ambos para contatos ideais. As referências [63, 60] usam formalismo de trajetórias para obter o crossover entre o GOE e o GUE para a potência do ruído de disparo e para a condutância, respectivamente. A referência [62] usa o formalismo de teoria de matrizes aleatórias para generalizar o crossover, incluindo o GSE, para a condutância de pontos quânticos em heteroestruturas semicondutoras anisotrópicas (ver referência [64]) e revela uma transição supressão-amplificação dependente da taxa de espalhamento spin-órbita. A referência [61] usa RMT e mostra essa transição supressão-amplificação como função da taxa de espalhamento spin-órbita também para a potência do ruído de disparo. Esta transição via parâmetro de espalhamento spin-órbita é interessante do ponto de vista experimental, contendo informação da escala de tempo de descoerência a baixas temperaturas. Essa escala está contida entre outras escalas fundamentais, tais quais o tempo de Ehrenfest, o tempo de coerência de fase e o tempo de permanência, que emergem naturalmente em modelos teóricos de descoerência como os da referência [64, 65, 66]. Um dos principais resultados da referência [61] é a conjectura de que a fração p^{WL}/g^{WL} não depende dos parâmetros de crossover, onde p^{WL} e g^{WL} são, respectivamente, as correções de localização fraca para a potência do ruído de disparo e para a condutância.

De acordo com as referências [62, 61], a transição supressão-amplificação seria uma característica da mudança na classe de simetria de Dyson: para uma dada simetria, a correção de localização fraca seria sempre negativa ou sempre positiva.

Entretanto, mostramos, na seção anterior e nas referências [53, 67], que o campo elétrico manifesto nas barreiras mediante portas de voltagem concomitantemente com o número de canais abertos podem induzir a transição no mesmo ensemble de Dyson. As barreiras então adquirem um papel preponderante para a transição em ensembles puros. Estudamos o efeito dessas barreiras quebrando as simetrias de rotação de spin e de reversão temporal no regime de crossover e mostramos uma miríade de efeitos da transição. Em particular, a conjectura citada na referência [61] manifesta-se inválida na presença de barreiras. Nós obtemos a resposta enfática: o efeito das barreiras determina a transição de maneira completamente independente da taxa de espalhamento spin-órbita e, além disso, o campo magnético pode gerar o mesmo efeito para certas configurações de barreiras e canais abertos.

Seguindo a referência [52] e a seção sobre correção de localização fraca em teoria de circuitos, nós generalizamos todos os resultados incluindo regime de crossover. Usando nossa notação, no formalismo super-simétrico, para a cavidade caótica, o resultado da correção de localização fraca para a teoria de circuitos pode ser escrito como

$$I^{WL}(\phi) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{M_+(\phi) - 4x^2}{M_-(\phi) - 4x^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{M_+(\phi) - 4x^2 - 4a^2}{M_-(\phi) - 4x^2 - 4a^2} \right) \right], \quad (3.91)$$

onde x e a representam as taxas de espalhamento magnético e spin-órbita, respectivamente. A equação (3.91) parte de uma generalização da ação (3.82), incluindo a corrente de vazamento na lei de conservação (efeitos de descoerência) e o limite $\phi^b = -\phi^w = \phi$ (correção de localização fraca). Os coeficientes $M_{\pm}(\phi)$ são os auto-valores da versão finita dos cooperons e são dados por

$$\begin{aligned} M_+(\phi) &= 2 \frac{I'_{sp}(\phi)}{[\chi'(\phi)]^2 - 1/4} \\ &\quad - 2 \left[\frac{I'_{sp}(\phi)}{\chi'(\phi) + 1/2} - I_{sp}(\phi) \cot \left(\chi(\phi) + \frac{\phi}{2} \right) \right] \\ &\quad + 2 \left[\frac{I'_{sp}(\phi)}{\chi'(\phi) - 1/2} - I_{sp}(\phi) \cot \left(\chi(\phi) - \frac{\phi}{2} \right) \right], \\ M_-(\phi) &= 2I_{sp}(\phi) \left[\cot \left(\chi(\phi) - \frac{\phi}{2} \right) - \cot \left(\chi(\phi) + \frac{\phi}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

com $I'_{sp}(\phi) \equiv dI_{sp}(\phi)/d\phi$. A função fase intermediária $\chi(\phi)$ é obtida da “lei de conservação” escrita como $I_{sp}(\phi) = I_1(\phi/2 + \chi) = I_2(\phi/2 - \chi)$. Para canais equiva-

lentes $T_{pn} = T_p$, $p = 1, 2$, essa lei de conservação gera uma equação polinomial de grau quatro. Após selecionar a raiz física da equação de ponto-de-sela, substituir na equação (3.91), a qual tem dependência explícita em $I_{sp}(\phi)$, e procedendo como na seção anterior, obtemos a condutância

$$\langle g \rangle = 2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left[1 - \frac{(G_1 T_2 + G_2 T_1)}{(G_1 + G_2)} \left(\frac{1}{G_C + 2a^2} - \frac{a^2}{G_C(G_C + 2a^2)} \right) \right], \quad (3.92)$$

onde $G_C \equiv G_1 + G_2 + 2x^2$. Efetuando a álgebra e usando a equação (3.27) para $\langle p \rangle \equiv q_2$, obtemos a média da potência do ruído de disparo. O resultado é dado pela fórmula explícita

$$\begin{aligned} \langle p \rangle = & 2 \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^4} [G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - T_2) + G_2^3 (1 - T_1)] \\ & + 2 \frac{G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1)}{G_C^2 (G_1 + G_2)^5 (G_C + 2a^2)^2} \{ 4 [-G_1 G_2 (G_1 + G_2) - 3(G_1^3 + G_2^3) \\ & + 4(G_2^3 T_1 + G_1^3 T_2)] (2x^4 + a^2 x^2 - a^4) x^2 + 4(G_1 + G_2) [12(G_1^3 T_2 + G_2^3 T_1) \\ & - 9(G_1^3 + G_2^3) + G_1 G_2 (G_1 + G_2) - 4G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1)] x^4 \\ & + 4(G_1 + G_2)^2 [4G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1) - 3(G_1^2 + G_2^2) - 2G_1 G_2] a^2 x^2 \\ & + 2(G_1 + G_2)^2 [12(G_1^3 T_2 + G_2^3 T_1) - 9(G_1^3 + G_2^3) + 5G_1 G_2 (G_1 + G_2) \\ & - 8G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1)] x^4 + (G_1 - G_2)(G_1 + G_2) [4(G_1^2 T_2 - T_1 G_2^2) \\ & 3(G_2^2 - G_1^2)] (1 - 2a^4) + (G_1 + G_2)^2 [-3(G_1^3 + G_2^3) + 4(G_1^3 T_2 + G_2^3 T_1) \\ & - 9G_1 G_2 (G_1 + G_2) + 8G_1 G_2 (G_1 T_2 + G_2 T_1)] a^2 \} \end{aligned} \quad (3.93)$$

3.7 Efeito Supressão-Amplificação entre Classes de Simetria

Como veremos no próximo capítulo, o resultado dado pela equação (5.64) pode ser obtido usando uma expansão diagramática diretamente do espaço de matrizes aleatórias. Tomando o limite $x = a = 0$, recuperamos os resultados obtidos nas referências [53, 67] e dados pelas equações (3.88) e (3.89) no caso $\beta = 1$. O primeiro termo da equação (5.64) é o termo clássico, o qual, como esperado, não é afetado por campos externos. Os outros termos representam a correção de WL para a potência do ruído de disparo. Os resultados dados pelas equações (3.92) e (3.93) para a condutância e para a potência do ruído de disparo são atualmente os mais completos da literatura atual para crossover em cavidades caóticas, e os seus aspectos

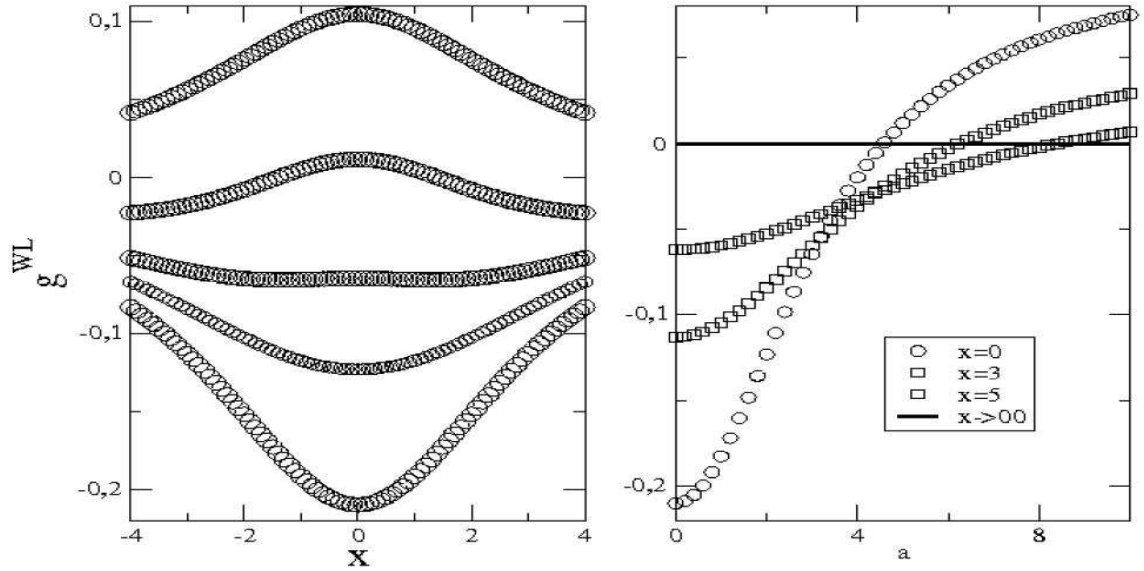


Figura 3.4: Gráficos exibindo dois tipos de crossovers para a correção de localização fraca da condutância. Em ambos os casos, fixamos $T_1 = 0,9$, $T_2 = 0,8$ e $N_2/N_1 = 0,65$. No gráfico à esquerda, estamos fixando valores de taxas de espalhamento spin-órbita em $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 5$ e $a = \infty$ com os correspondentes gráficos de baixo para cima. No gráfico à direita, variamos a taxa de espalhamento spin-órbita para os valores de espalhamento magnético fixados no retângulo do gráfico.

fenomenológicos gerais são bastante ricos. O limite opaco ($T_i \rightarrow 0$ com G_i finito) é obtido, imediatamente, das equações (3.92) e (3.93) e, como esperado para a potência do ruído de disparo, tende linearmente a zero. O limite em que $x \rightarrow \infty$ com $a = 0$ corresponde ao ensemble GUE, ou seja, $g^{WL} = 0$, como esperado. O limite em que $a \rightarrow \infty$ corresponde ao ensemble GSE e a equação para a condutância manifesta uma mudança de sinal em relação ao resultado do GOE para g^{WL} , como esperado. A figura (3.4) mostra o comportamento geral da correção de localização fraca.

Na figura (3.5), mostramos como a correção de WL para $\langle g \rangle$ e para $\langle p \rangle$, equações (5.62) e (5.64), respectivamente, variam como função da taxa de espalhamento magnético x e da taxa de espalhamento spin-órbita a . Note-se que o efeito de supressão-amplificação em g^{WL} ocorre se, e somente se, variarmos a . Por outro lado, percebem-se surpreendentes efeitos supressão-amplificação para p^{WL} como função de x quando $a = 0$ (crossover GOE-GUE) e $a \rightarrow \infty$ (crossover GSE-GUE), como pode ser visto na figura (5.64). Concluimos que - diferentemente

do que conjectura a referência [61] - para amplificar ou suprimir a contribuição semiclássica da potência do ruído de disparo, não é necessário sair do ensemble ortogonal para o simplético: todo o efeito pode ser modulado pelo número total de canais abertos, pelas transparências das barreiras e, surpreendentemente, pelo campo magnético perpendicular externo aplicado, independentemente do ensemble de Dyson. A correção para g^{WL} da cavidade caótica não exibe este efeito.

Para o caso de contatos ideais, $T_1 = T_2 = 1$, reobtemos a relação simples entre as correções da condutância e da potência do ruído de disparo, primeiramente obtida por Béri e Cserti, na referência [61], sugerindo uma independência em relação aos parâmetros x e a

$$\frac{p^{WL}}{g^{WL}} = - \left(\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right)^2. \quad (3.94)$$

A equação (3.94) mostra que as correções são proporcionais. Entretanto, tal relação não é válida quando existem barreiras arbitrárias. Em todos os outros casos, surpreendentemente, p^{WL}/g^{WL} sempre depende do campo magnético perpendicular e do espalhamento spin-órbita. Outra propriedade interessante de p^{WL}/g^{WL} é que essa relação não é linear no limite opaco. Podemos obter uma relação simples nesse limite, por exemplo, fixando $x = a = 0$, obtemos

$$\frac{p^{WL}}{g^{WL}} = \frac{3G_1G_2(G_1 - G_2)^2}{(G_1 + G_2)}. \quad (3.95)$$

A fenomenologia presente na equação (5.64) pode ser melhor entendida mediante os diagramas nos planos (x, a) e (T_1, T_2) para, por exemplo, $N_2/N_1 \approx 0,67$. Uma propriedade importante é que existem regiões no espaço de parâmetros, denotadas por negativas $(-)$ e positivas $(+)$ nas figuras (3.6.3) e (3.6.4), onde $p^{WL} < 0$ e $p^{WL} > 0$, respectivamente. Consequentemente, o sistema submetido a um campo magnético perpendicular exibe transição supressão-amplificação na correção quântica da potência do ruído de disparo. A figura (3.6.5) mostra o crossover GOE-GSE quando $x = 0$.

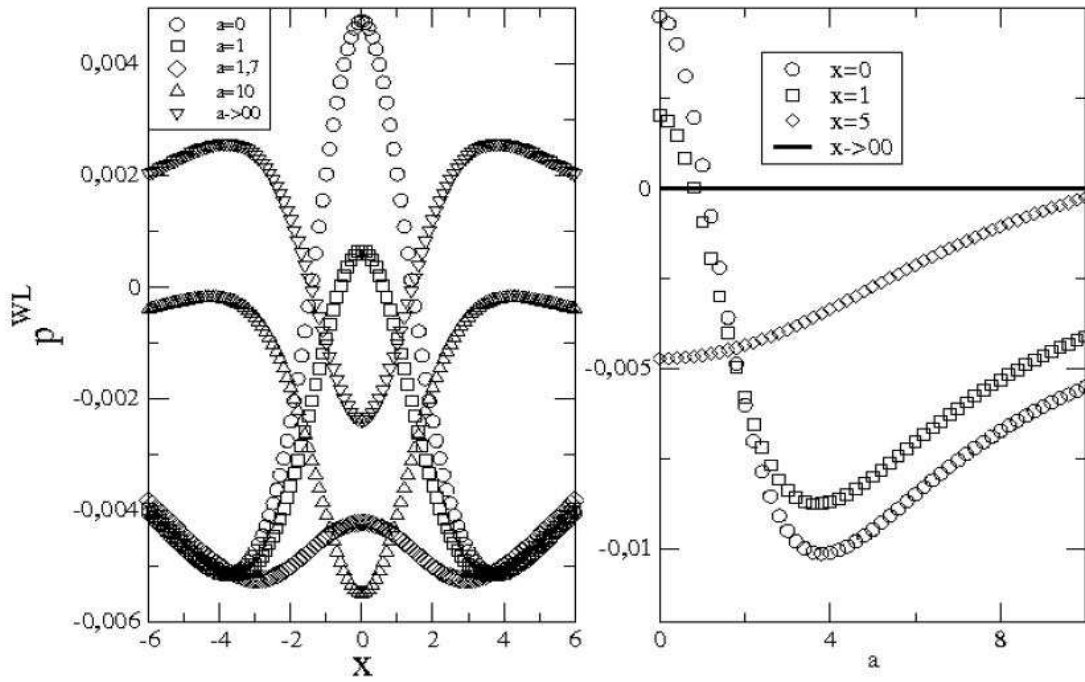


Figura 3.5: O gráfico esquerdo mostra a correção de localização fraca para a média da potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . O gráfico direito mostra a correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . Para o caso $a = 0$ e $a \rightarrow \infty$, p^{WL} exibe uma transição supressão-amplificação como função de x (crossover GOE-GUE e GSE-GUE, respectivamente). Em ambos os casos, usamos $T_1 = 0.8$, $T_2 = 0.9$ e $N_2/N_1 \approx 0,67$.

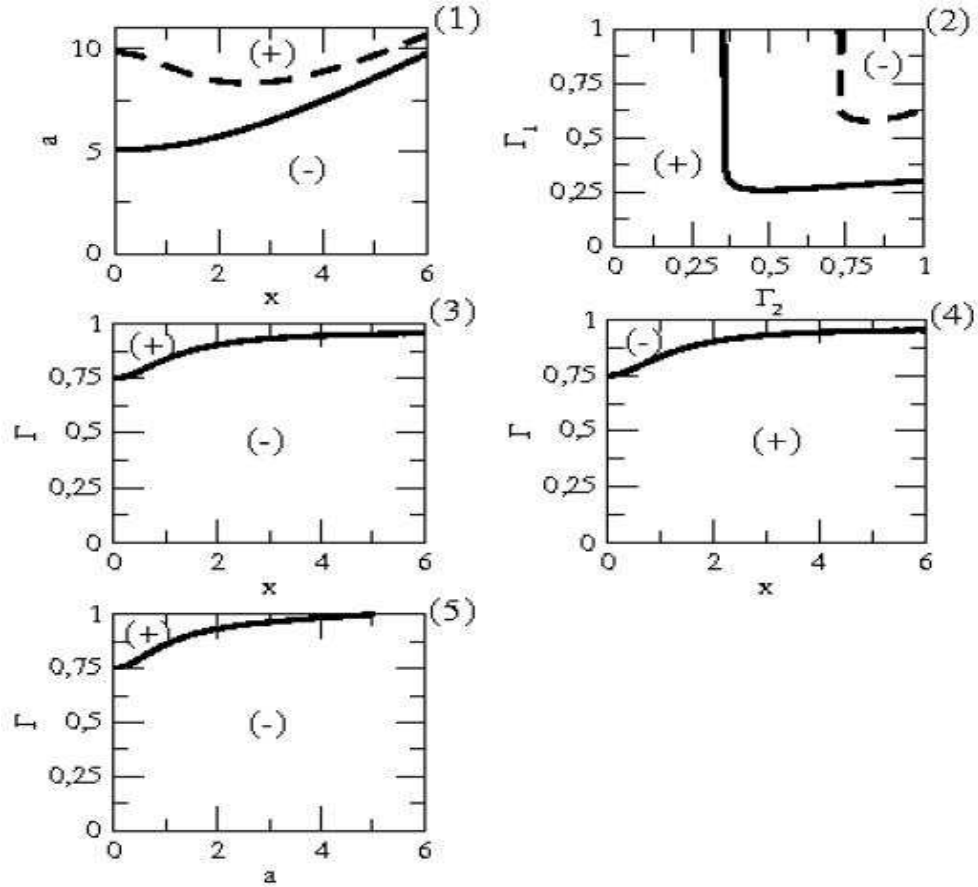


Figura 3.6: Gráficos mostrando a transição quando $N_2/N_1 \approx 0,67$. (1) Diagrama (x, a) separando as regiões positiva $(+)$ (amplificação) e negativa $(-)$ (supressão) para $T_1 = 1$ com $T_2 = 0,3$ (linhas contínuas) e $T_2 = 0,7$ (linhas descontínuas); (2) Regiões positiva $(+)$ e negativa $(-)$ em (T_1, T_2) para $x = 2$ com $a = 6$ (linhas contínuas) e $a = 10$ (linhas descontínuas); (3) Diagrama no qual $T_1 = T_2 = T$ no limite em que $a \rightarrow 0$; (4) Diagrama no qual $T_1 = T_2 = T$ no limite $a \rightarrow \infty$. As regiões que são positivas $(+)$ no diagrama (3) tornam-se negativas $(-)$ em (4) e as que são negativas em 3 tornam-se positivas em (4); (5) Diagrama no qual tomamos $T_1 = T_2 = T$ e o limite $x \rightarrow 0$.

Capítulo 4

Expansão Semi-clássica e Método Diagramático

No capítulo anterior, vimos que a presença de barreiras com transparência arbitrária, ou seja, contatos não-ideais, pode gerar efeitos surpreendentes (veja referência [53]), como a transição supressão-amplificação na correção quântica da potência do ruído de disparo. Vimos que esse efeito pode ocorrer em um ensemble puro e ser atribuído unicamente à mudança gradual da transparência das barreiras. O presente capítulo mostra uma maneira alternativa de obter os resultados do capítulo anterior por meio de um método independente: expansão diagramática do grupo unitário. Tal trabalho está publicado na referência [67]. Neste capítulo, nós mostramos detalhadamente a seleção sutil dos diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção de localização fraca da potência do ruído de disparo. Nós também indicamos potenciais aplicações para esse novo conjunto de diagramas maximamente cruzados em sistemas físicos diferentes

A teoria de matrizes aleatórias (TMA) descreve muito precisamente propriedades da estatística universal de observáveis do transporte quântico de uma cavidade aberta. A descrição é válida na condição de $\tau_{dw} \gg \max(\tau_E, \tau_{erg})$, onde τ_{dw} é o tempo de permanência da cavidade, τ_{erg} é o tempo ergódico e τ_E é o tempo de Ehrenfest. No caso de contatos ideais, a teoria pode se basear em matrizes aleatórias dos ensembles clássicos de Wigner-Dyson (ver referência [12]). Esses ensembles são classificados de acordo com as simetrias fundamentais que são mantidas pela dinâmica caótica e podem ser indexadas pelo parâmetro inteiro β , como na referência [21]. Mais especificamente, o ensemble circular ortogonal (COE) é aplicável para sistemas na presença de simetrias de reversão temporal (RT) e de rotação de spin (RS), $\beta = 1$; o ensemble circular unitário (CUE) é válido para sistemas com

quebra de ambas as simetrias, RT e RS, $\beta = 2$; e o ensemble circular simplético (CSE) pode ser usado em sistemas com a simetria RS quebrada, mas na presença de simetria TR, $\beta = 4$. O objeto matemático básico da teoria, a matriz de espalhamento, pode ser sempre escrito em termos de uma forma de blocos como

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t' & r' \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde t, t' e r, r' são, respectivamente, matrizes de transmissão e de reflexão. Usando-se o formalismo de espalhamento de Landauer para o transporte quântico (veja referência [18]), podemos relacionar momentos da matriz de transmissão à observáveis de transporte. Por exemplo, a condutância é dada simplesmente por

$$\mathbf{g}_1 = \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (4.2)$$

Introduzindo o segundo momento

$$\mathbf{g}_2 = \text{Tr}[(tt^\dagger)^2], \quad (4.3)$$

podemos escrever a potência do ruído de disparo (segundo cumulante) combinando a equação (4.2) com (4.3) da seguinte maneira

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \text{Tr}[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)]. \quad (4.4)$$

Para obter propriedades estatísticas de observáveis de transporte de uma cavidade caótica com barreiras arbitrárias, devemos usar uma distribuição de matrizes de espalhamento que não está nos ensembles circulares. Tal distribuição pode ser obtida por um *princípio de máxima entropia informacional* e é conhecida como núcleo de Poisson como está bem descrito na referência [68]. Podemos escrevê-la como

$$P(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-(\beta N + 2 - \beta)}, \quad (4.5)$$

onde $\beta \in \{1, 2, 4\}$ é o parâmetro identifica as classes de simetria distintas. O parâmetro inteiro N é o número de canais de espalhamento abertos nos terminais metálicos que conectam a cavidade caótica aos reservatórios de elétrons e $\bar{S}$ é uma matriz sub-unitária representando a média da matriz S , podendo, sem perda de generalidade, ser escrita como

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde r_1 e r_2 são matrizes de reflexão das barreiras 1 e 2 respectivamente. Note-se que, em particular, a escolha $\vec{S} = 0$ recupera os ensembles de Wigner-Dyson, considerando que eles representam distribuições uniformes.

Outra maneira de justificar o núcleo de Poisson é usar o modelo σ não-linear a partir de uma transformação exata tipo “color-flavor” feita na referência [69]. Essa transformação estabelece que o campo mesônico das super-matrizes Q do capítulo 2, satisfazendo o vínculo $Q^2 = 1$, podem ser substituídos pelos campos de glúons de matrizes S de espalhamento através da equação

$$\int dS \Omega^\beta(\vec{\phi}, S) P^\beta(S) = \int dQ \exp\left(-S^\beta(Q, Q_{\vec{\phi}})\right), \quad (4.7)$$

onde $S^\beta(Q, Q_{\vec{\phi}})$ é a ação da teoria de circuitos do capítulo 3, $P^\beta(S)$ é o núcleo de Poisson e $\Omega^\beta(\vec{\phi}, S)$ é a função geratriz no espaço de matrizes S . Tal função geratriz é dada por

$$\Omega^\beta(\vec{\phi}, S) = \prod_{\sigma=\pm} \det \left(\frac{1 - \sin^2(\phi_{0\sigma}^\beta/2) t t^\dagger}{1 + \sinh^2(\phi_{1\sigma}^\beta) t t^\dagger} \right), \quad (4.8)$$

onde $\vec{\phi}$ está definido no capítulo 3. Integrar no campo de “gluons” não é trivial e requer o uso de um método diagramático.

O método diagramático usado neste capítulo foi desenvolvido na referência [7] como um método de integração sobre o grupo unitário. Ele se aplica de maneira direta para ensembles circulares e com pequenas modificações pode também ser usado para calcular médias sobre o núcleo de Poisson. Ele também fornece uma representação diagramática simples dos modos difusos (diagramas escadas) e cooperons (diagramas maximamente cruzados) da teoria de localização, como está posto, por exemplo, nas referências [70, 6] em uma forma que se aplica à cavidades caóticas abertas. Acreditamos que os resultados deste capítulo serão particularmente relevantes para desenvolvimentos do método diagramático como ferramenta em sistemas mesoscópicos.

4.1 Integração no Grupo Unitário: Método Diagramático

O problema de integração no grupo unitário $U(N)$ para ensembles gaussianos e circulares foi resolvido perturbativamente na referência [7] usando um método diagramático. Nesta seção, faremos um breve resumo de tal referência, tornando

este capítulo auto-contido. A idéia central é encontrar médias de funções $f(U)$ que dependam de matrizes unitárias e aleatórias U de ordem $N \times N$ distribuídas uniformemente. A média dessas funções no grupo unitário será denotada por

$$\langle f \rangle = \int dU f(U). \quad (4.9)$$

Considerando que f depende de U mediante alguma operação algébrica, $\mathcal{O} : U(N) \rightarrow \mathbb{C}$, como o traço ou o determinante, sem perda de generalidade, a média no ensemble, com medida de Haar dU normalizada, será a integral de uma função polinomial das entradas da matriz U . Dessa forma, um termo genérico sobre o qual deseja-se calcular médias é dado por $f(U) = U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \cdots U_{a_n b_n} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \cdots U_{\alpha_n \beta_n}^*$. Dado que a distribuição é uniforme, $\langle f \rangle$ é não-nulo apenas se 1) $m = n$, 2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ formam alguma permutação $\mathcal{P}$ de $a_1, a_2, \dots, a_n$ e 3) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ formam alguma permutação $\mathcal{P}'$ de $b_1, b_2, \dots, b_n$. A média é dada por [71]

$$\begin{aligned} \langle f(U) \rangle &= \langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \cdots U_{a_n b_n} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \cdots U_{\alpha_n \beta_n}^* \rangle \\ &= \delta_{mn} \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} V_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \prod_{j=1}^n \delta_{a_j \alpha_{\mathcal{P}(j)}} \delta_{b_j \beta_{\mathcal{P}'(j)}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde os coeficientes $V_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}$ dependem da estrutura cíclica das permutações $\mathcal{P}'\mathcal{P}$.

Como exemplo de estruturas cíclicas, vamos considerar o grupo simétrico S_3 de $\{1, 2, 3\}$. Nesse caso, existem seis permutações possíveis com as respectivas estruturas cíclicas escrita em parênteses: a) $\{1, 2, 3\} \rightarrow (1)(2)(3)$, b) $\{1, 3, 2\} \rightarrow (1)(23)$, c) $\{2, 1, 3\} \rightarrow (3)(12)$, d) $\{2, 3, 1\} \rightarrow (123)$, e) $\{3, 1, 2\} \rightarrow (132)$ e f) $\{3, 2, 1\} \rightarrow (2)(13)$. Na permutação c), por exemplo, da estrutura ordenada original, trocamos a primeira entrada pela segunda e a segunda pela primeira $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (12) e a terceira se manteve (3). Portanto, a permutação c) tem dois ciclos c_k , $k = 1, 2$, sendo o (12) de comprimento $c_1 = 2$ e o (3) de comprimento $c_2 = 1$. Esses dois ciclos são chamados de disjuntos por não terem interseção. Note-se que $\sum_k c_k = 3$ para as seis permutações possíveis.

A generalização do exemplo anterior para o caso de S_n pode ser estudada em detalhes na referência [72]. Um resultado importante é que S_n tem uma única fatorização disjunta (ciclos) de comprimentos $c_1, c_2, \dots, c_k$ com $n = \sum_k c_k$. Dessa forma, podemos colocar toda a dependência dos coeficientes da equação (4.10) nos comprimentos dos ciclos da fatorização $\mathcal{P}'\mathcal{P}$, ou seja, $V_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} = V_{c_1, c_2, \dots, c_k}$. Vamos aplicar tal idéia diretamente na equação (4.10) para $n = 2$. O grupo S_2 contém dois tipos de permutações cíclicas: $\{a_1, \alpha_1\} \rightarrow (1)(1)$ e $\{a_1, \alpha_2\} \rightarrow (12)$ e, da mesma

forma para b_i e β_i . Portanto, para o caso $n = 2$, a equação (4.10) fica

$$\begin{aligned} \langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \rangle = & V_{(1)(2), (1)(2)} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_2} \\ & + V_{(12), (1)(2)} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1} \\ & + V_{(1)(2), (12)} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1} \\ & + V_{(12), (12)} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vamos agora escrever a equação (4.11) em termos dos comprimentos dos ciclos. O primeiro termo do lado direito dessa equação tem fatorizações $\mathcal{P} = \mathcal{P}' = (1)(2)$, ou seja, $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}' = \mathcal{P}^{-1}((1)(2)) = \{1, 2\} = (1)(2)$, duas permutações cíclicas de comprimento 1. Vamos denotar então esse coeficiente em termos dos comprimentos como $V_{1,1}$. O segundo termo do lado direito tem fatorização $\mathcal{P} = (12)$ e $\mathcal{P}' = (1)(2)$, ou seja, $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}' = (21)$, ou seja, um ciclo de comprimento 2 que leva a um coeficiente denotado por V_2 . Tratando os dois últimos termos de maneira similar, obtemos

$$\begin{aligned} \langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \rangle = & V_{1,1} \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_2} \delta_{b_2 \beta_2} \\ & + V_2 \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_1} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1} \\ & + V_2 \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1} \\ & + V_{1,1} \delta_{a_1 \alpha_2} \delta_{b_1 \beta_2} \delta_{a_2 \alpha_1} \delta_{b_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

No caso mais geral, S_n , os termos $V_{1,1,\dots,1}$ vão se referir a permutações idênticas $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, ou seja, contrações gaussianas (entre pares) das matrizes U e U^* . Nas referências [71] e [7], mostra-se que tais coeficientes satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$NV_{c_1, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} V_{p,q,c_2, \dots, c_k} + \sum_{j=2}^k c_j V_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} = \delta_{c_1 1} V_{c_2, \dots, c_k}, \quad (4.13)$$

com $V_0 \equiv 1$. Uma característica importante do método é a possibilidade de expandir as relações de recorrência em potências de N^{-1} . Por exemplo, na referência [7], encontra-se a importante relação

$$V_{c_1, c_2, \dots, c_k} = \prod_{j=1}^k V_{c_j} + \mathcal{O}(N^{k-2n-2}), \quad (4.14)$$

onde

$$V_c = \frac{1}{c} N^{1-2c} (-1)^{c-1} \binom{2c-2}{c-1} + \mathcal{O}(N^{-1-2c}). \quad (4.15)$$

Os coeficientes $V_{c_1, \dots, c_k}$ determinam os momentos de U . Com os momentos, podemos obter os cumulantes $W_{c_1, \dots, c_k}$ simplesmente removendo todas as possíveis combinações de fatorizações de grau menor. Por exemplo, $W_{c_1} = V_{c_1}$ e $W_{c_1, c_2} = V_{c_1, c_2} - W_{c_1} W_{c_2}$. A relação de recorrência (4.13) para os momentos implica na seguinte relação de recorrência para os cumulantes

$$NW_{c_1, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} W_{p, q, c_2, \dots, c_k} + \sum_{j=2}^k c_j W_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} \\ + \sum_{p+q=c_1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{(l-1)!(k-l)!} \sum_{\mathcal{P}} W_{p, c_{\mathcal{P}(2)}, \dots, c_{\mathcal{P}(l)}} W_{q, c_{\mathcal{P}(l+1)}, \dots, c_{\mathcal{P}(k)}} = 0, \quad (4.16)$$

com $W_0 = 1$ e $\mathcal{P}$ denotando permutações de $\{2, \dots, k\}$. Expandindo em potências de N^{-1} , obtém-se

$$W_{c_1, c_2, \dots, c_k} = 2^k N^{-2n-k+2} (-1)^{n+k} \frac{(2n+k-3)!}{(2n)!} \prod_{j=1}^k \frac{(2c_j-1)!}{(c_j-1)!^2} + \mathcal{O}(N^{-2n-k}). \quad (4.17)$$

Os resultados anteriores permitem calcular médias arbitrárias de produtos de matrizes unitárias. No entanto, o cálculo das funções recursivas para os cumulantes é bastante delicado e cresce em complexidade ao aumentarmos o número de termos no produto de matrizes unitárias. Como veremos, para ensembles circulares, haverá um número infinito de produtos de matrizes U para certas classes de problemas. Nesse contexto, surge uma ferramenta auxiliar ao método de integração, um método diagramático de integração no grupo unitário, tema da próxima seção.

4.2 Método Diagramático de Integração no Grupo Unitário

O método diagramático de integração no grupo unitário, sobre o qual iremos tratar, consiste em representar a equação (4.10) em termos de diagramas com topologias caracterizando as permutações possíveis. Os pesos serão dados pelas equações de recorrência tratadas na seção anterior. Os objetos centrais desse cálculo diagramático são os elementos matemáticos da equação (4.10): 1) as matrizes U_{ab} e $U_{\alpha\beta}^*$, 2) as funções δ_{ij} de contração de índices e 3) eventuais matrizes com entradas A_{ij} presentes em $f(U)$. Esses quatro elementos fundamentais estão desenhados na figura (4.1). Os diagramas terão uma linha horizontal inferior carregada de matrizes

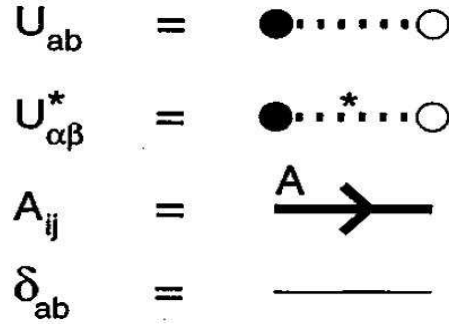


Figura 4.1: Representação diagramática de (1) matrizes unitárias U_{ab} e $U_{\alpha\beta}^*$, (b) eventual matriz fixa presente no argumento da média no ensemble de matrizes aleatória e (3) as funções δ_{ij} de Kronecker que contraem os índices das matrizes unitárias e fixam os tipos de permutação. Figura retirada da referência [7].

U_{ab} e uma linha horizontal superior carregada de matrizes $U_{\alpha\beta}^*$. Representaremos U_{ab} como uma linha tracejada com um ponto preto em um extremo representando o índice a e um ponto branco no outro extremo representando o índice b . As funções δ_{ij} serão representadas por linhas finas e contínuas conectando pontos da linhas superior e inferior, ou seja, representarão as respectivas contrações do ponto i (na linha superior) com o ponto j (na linha inferior). As outras matrizes fazem a conexão entre os extremos de linhas horizontais distintas ou conectam no “centro” filas de índices de matrizes U de uma mesma linha horizontal.

Consideremos dois exemplos retirados da referência [7] para ilustrar o método, o cálculo da média das funções $f(U) = AUBU^\dagger$ e $g(U) = AUBU^\dagger CUDU^\dagger$. Para $f(U)$, temos um único elemento de matriz U na linha superior do diagrama e um único elemento da matriz $U^\dagger$ na linha inferior. Conectando essas duas linhas nos extremos, temos as matrizes A e B não-aleatórias. O desenho é feito no sentido anti-horário como na figura (4.2).

A média de $f(U)$ e de $g(U)$ consiste em usar a equação (4.10). Por simplicidade, vamos considerar explicitamente como exemplo o cálculo da média de $f(U)$ usando tal equação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \langle f(U) \rangle &= \langle \text{Tr}(AUBU^\dagger) \rangle \\
 &= \sum_{i,j,k,l} A_{ij} B_{kl} \langle U_{jk} U_{il}^* \rangle \\
 &= \sum_{i,j} A_{ii} B_{jj} V_1 = V_1 \text{Tr}(A) \text{Tr}(B),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

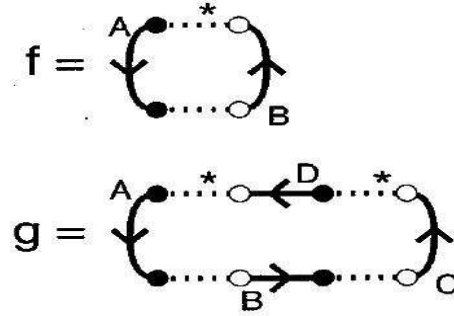


Figura 4.2: Representação diagramática de duas funções simples usadas para o cálculo de médias no ensemble unitário. Figura retirada da referência [7].

onde usamos a contrações para eliminar duas das quatro somas. Esse procedimento algébrico pode ser implementado via método diagramático considerando todas as combinações de pontos da mesma cor (contração de índices) na figura (4.2). Por exemplo, para a função $f(U)$, podemos mostrar que todas as possibilidades estão desenhadas na figura (4.3).

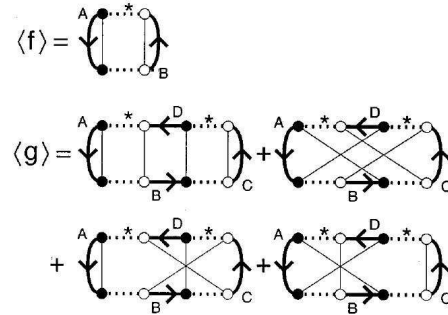


Figura 4.3: Todas as possíveis contrações de índices de acordo com a equação (4.10) aplicadas à dois tipos especiais de funções de matrizes unitárias. Figura retirada da referência [7].

Um circuito k alternado entre linhas pontilhadas e linhas contínuas significa, da equação (4.10), que houve a combinação de certos índices gerando o produto das entradas correspondentes. Todos os índices devem se combinar dessa forma gerando um produto final e a correspondente permutação $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}'$. Um circuito k com duas bolas pretas e duas brancas tem comprimento $c_k = 1$ (a permutação é a

identidade). O aumento de bolas brancas e/ou pretas no ciclo indica o aumento no número de permutações $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}'$. Tais ciclos são chamados na referência [7] de *ciclos* U e o comprimento do ciclo c_k é dado por metade do número de linhas descontínuas do ciclo. No único diagrama de $\langle f(U) \rangle$ da figura (4.3), existe apenas um ciclo U de comprimento $c_1 = 1$. Portanto, o peso desse diagrama é dado por V_1 . No primeiro diagrama de $\langle g(U) \rangle$ da figura (4.3), existem dois ciclos U ambos com comprimento $c_1 = 1$, ou seja, diagrama com peso $V_{1,1}$.

Um circuito que alterna linhas contínuas finas e linhas contínuas com setas é chamado de *ciclo* T . Tais ciclos resultam em traços nas matrizes fixas $A_1, A_2, \dots, A_k$ na ordem em que aparecem. Por exemplo, o único diagramas de $\langle f(U) \rangle$ da figura (4.3) tem dois ciclos T que resultam em $\text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$. O segundo diagrama de $\langle g(U) \rangle$ da figura (4.3) tem um ciclo T , resultando em $\text{Tr}(ADCB)$.

A combinação de ciclos U e de ciclos T nos diagramas resulta nas médias

$$\begin{aligned}\langle f(U) \rangle &= V_1 \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) \\ \langle g(U) \rangle &= V_{1,1} [\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) + \text{Tr}(ADCB)] \\ &\quad + V_2 [\text{Tr}(A)\text{Tr}(BDC) + \text{Tr}(ADB)\text{Tr}(C)],\end{aligned}\quad (4.19)$$

onde $V_1 = 1/N$, $V_{1,1} = 1/(N^2 - 1)$ e $V_2 = 1/[N(N^2 - 1)]$. Aplicaremos esses resultados na seção seguinte para obter a média da condutância e da potência do ruído de disparo para contatos ideais.

Os dois exemplos simples anteriores podem ser generalizados para um número arbitrariamente grande de diagramas, gerando as seguintes regras para o cálculo da função (4.10) no limite semicássico:

- A função geral que precede o cálculo das médias é desenhada conforme o diagrama da figura (4.2);
- Para o cálculo das médias, emparelhe em pares todos os pontos pretos da linha superior com os da linha inferior e faça o mesmo para os pontos brancos;
- Todos os circuitos com alternância entre linhas pontilhadas e linhas contínuas finas corresponderão a ciclos U de comprimento c_k igual a metade do número de pontos no circuito. O número de circuitos é igual ao número de índices no coeficiente V e os seus comprimentos aparecerão explicitamente como $V_{c_1, c_2, \dots, c_k}$. Para fatorar o peso V em cumulantes, basta separar os ciclos U em grupos de comprimentos $c_1, c_2, \dots, c_p$ com respectivo peso em cumulantes dados por $W_{c_1, c_2, \dots, c_p}$;

- Cada circuito com alternância entre linhas contínuas sólidas (com setas) e linhas contínuas finas forma um ciclo T com sentido anti-horário de traços sobre as matrizes A .

Considerando todas as possíveis combinações de diagramas ou, equivalentemente, de permutações na equação (4.10), tem-se a média exata de qualquer função de matrizes unitárias. No entanto, o número de diagramas pode crescer muito para funções arbitrárias e a expansão semi-clássica (N grande) faz-se necessária no sentido de reduzir o número de diagramas. Um diagrama que contenha l ciclos T e k ciclos U de comprimento total n particionados em g grupos tem uma ordem em N característica. Cada traço desse diagrama tem ordem N e o peso W pode ser expandido no limite semi-clássico de acordo com a equação (4.17). Para esse diagrama arbitrário, a ordem em N é dada por $N^{2g+l-k-2n}$, ou seja, os diagramas que mais contribuem são os que tem $g = k$, considerando que o número de grupos é sempre menor que o número de ciclos k . Nesse caso, o número total de ciclos $k + l$ é máximo. Concluímos que, na expansão semi-clássica, os diagramas são classificados de acordo com o número de ciclos. O número de ciclos estabelece um critério para a correspondente ordem da expansão em N^{-1} de forma que diagramas com mais ciclos determinam contribuições maiores para o cálculo perturbativo. Dessa forma, os que mais contribuem são os que determinam partições de ciclos U em grupos de um único ciclo, chamados de diagramas escada ou difusons.

4.2.1 Integração sobre o COE

O grupo de matrizes unitárias simétricas possui um vínculo adicional em relação grupo de matrizes simplesmente unitárias. Isso se traduz em regras diagramáticas sutilmente distintas no que concerne aos tipos de contrações (ou linhas finas conectando pontos nos diagramas), considerando que nesse caso uma matriz unitária V arbitrária tem o vínculo $V_{ab} = V_{ba}$, ou seja, existirão novas possibilidades de combinação de índices. Basta notar então que a matriz V simétrica pode ser decomposta em um produto especial de outras duas matrizes unitárias arbitrárias da seguinte forma $V = UU^T$. Então, para o COE, as médias podem ser escritas com a seguinte estrutura geral

$$\langle U_{a_1 a_2} \cdots U_{a_{2n-1} a_{2n}} U_{\alpha_1 \alpha_2}^* \cdots U_{\alpha_{2m-1} \alpha_{2m}}^* \rangle = \delta_{nm} \sum_{\mathcal{P}} V_{\mathcal{P}} \prod_{j=1}^{2n} \delta_{a_j \alpha_{\mathcal{P}(j)}}. \quad (4.20)$$

Para o COE, os coeficientes de momento obedecem a seguinte relação de

recursão

$$(N + c_1)V_{c_1, c_2, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} V_{p, q, c_2, \dots, c_k} + 2 \sum_{j=2}^k c_j V_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} = \delta_{c_1 1} V_{c_2, \dots, c_k},$$

onde, como no caso da relação de recursão para o CUE, temos $V_0 = 1$. A expansão semiclássica dos pesos têm um termo a mais em relação à expansão para o CUE devido à simetria e é dada pela equação

$$V_{c_1, c_2, \dots, c_k} = \prod_{j=1}^k V_{c_j} + \mathcal{O}(N^{k-2n-2}) \quad , \quad (4.21)$$

$$V_c \equiv \frac{1}{c} N^{1-2c} (-1)^{c-1} \binom{2c-2}{c-1} - N^{-2c} (-4)^{c-1} + \mathcal{O}(N^{-1-2c}) \quad . \quad (4.22)$$

Expansões correspondentes para os pesos dos cumulantes podem ser obtidas usando-se a referência [7]. A segunda regra diagramática muda para o caso do COE, considerando que agora círculos pretos podem se conectar a círculos brancos devido ao novo tipo de simetria presentes nas permutações da equação (4.20). Se U é uma matriz unitária e simétrica, usando as regras diagramáticas, podemos mostrar que um dos exemplos tratados anteriormente, $f(U) \equiv \text{Tr}(AUBU^\dagger)$, tem média dada pela seguinte fórmula exata:

$$\langle f(U) \rangle = V_1 [\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) + \text{Tr}(A^T B)] \quad , \quad (4.23)$$

onde $V_1 = (N+1)^{-1}$, enquanto no CUE $V_1 = N^{-1}$. O mesmo pode ser feito para a função $g(U)$ no COE. Nesse caso, como podemos combinar pontos pretos com brancos, são $4!$ diagramas, enquanto no CUE consideramos $2! \times 2!$ desses diagramas (restrição de combinações).

4.3 Condutância de uma Cavidade Caótica com Contatos Ideais

Considere-se a fórmula para o primeiro cumulante da estatística de contagem dada pela equação (4.2). Podemos decompor o argumento do traço em termos de matrizes pertencentes a um dos ensembles circulares. Para isso, considere as matrizes de projeção $C_{1,2}$ definidas por

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{N_2} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde 1_N denota a matriz unidade $N \times N$. As seguintes relações, características de projetores, são válidas: $C_1 C_2 = 0$ e $C_1 + C_2 = 1_N$. Em termos dessas matrizes de projeção, podemos reescrever o argumento do traço em termos de matrizes de espalhamento

$$\begin{aligned}\langle g \rangle &= \langle \text{Tr}(tt^\dagger) \rangle \\ &= \langle \text{Tr}(C_1 S C_2 S^\dagger) \rangle,\end{aligned}\tag{4.25}$$

onde S é uma matriz de espalhamento de ordem $N \times N$ com $N = N_1 + N_2$. Vamos considerar primeiro que S pertença ao ensemble unitário, ou seja, que descreva a cavidade caótica com um campo magnético quebrando a simetria de reversão temporal. Nesse caso, pode-se desenhar os diagramas para a equação (4.25) da mesma forma que está posto na primeira figura (4.3), fazendo a substituição $U \rightarrow S$, $U^\dagger \rightarrow S^\dagger$, $A_1 \rightarrow C_1$ e $A_2 \rightarrow C_2$. Então, a condutância pode ser calculada exatamente da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle g \rangle^{CUE} &= V_1^{CUE} \text{Tr}(C_1) \text{Tr}(C_2) \\ &= \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2},\end{aligned}\tag{4.26}$$

onde V_1^{CUE} é o peso para o CUE. A equação (4.26) está em total acordo com o resultado obtido na seção anterior por meio da teoria de circuitos. A principal diferença entre o resultado dado pela equação (4.26) é a demonstração de sua validade mesmo no limite quântico extremo (N_1 e N_2 pequenos).

Para o COE, a simetria de reversão temporal impõe a existência de um diagrama a mais para a equação (4.25), já que pontos brancos podem agora se misturar com pretos. De acordo com a equação (4.23), o diagrama a mais gera um termo proporcional a $\text{Tr}(C_1 C_2^T)$, que se anula devido à propriedade dos projetores. Dessa forma, a média da condutância para o COE tem apenas o peso diferente da expressão para a média no CUE. Ficamos então com

$$\begin{aligned}\langle g \rangle^{COE} &= V_1^{COE} \text{Tr}(C_1) \text{Tr}(C_2) \\ &= \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2 + 1},\end{aligned}\tag{4.27}$$

onde $V_1^{COE} = (N + 1)^{-1}$ é o peso para o COE.

Procedendo de maneira similar para ensemble circular simplético (mais detalhadamente explicado no próximo capítulo), obtemos uma fórmula exata para a condutância no caso de contatos ideais para um número arbitrário de canais e um

índice de simetria arbitrário. A fórmula está presente na referência [7] e pode ser escrita como

$$\langle g \rangle^\beta = \frac{\beta N_1 N_2}{\beta N + 2 - \beta}. \quad (4.28)$$

No limite semi-clássico, a equação anterior pode ser expandida em potências de $1/N$, gerando o resultado

$$\langle g \rangle^\beta = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} + \dots. \quad (4.29)$$

O segundo termo do lado direito da equação anterior é a primeira contribuição quântica, conhecida como localização fraca. Note-se que no ensemble unitário, $\beta = 2$, a correção de localização fraca se anula, resultado amplamente conhecido na literatura. O primeiro termo do lado direito corresponde à lei de Ohm e não depende do ensemble, coincidindo com o resultado obtido via o ponto de sela do modelo σ não-linear supersimétrico. Na próxima seção, vamos executar um cálculo similar e obter o segundo momento da estatística de contagem.

4.4 Potência do Ruído de Disparo de uma Cavidade Caótica com Contatos Ideais

Nesta seção, derivaremos uma expressão exata mediante o método diagramático para a média da potência do ruído de disparo de uma cavidade caótica com dois contatos. Da equação (4.4), vemos que a potência do ruído de disparo pode ser obtida subtraindo a média do segundo momento, equação (4.3), da condutância média, equação (4.2). A condutância média foi obtida usando técnica diagramática por Brouwer e Beenakker na referência [7]. Podemos escrevê-la como

$$\langle \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{N_1 N_2}{N - 1 + \frac{2}{\beta}}, \quad (4.30)$$

onde $\beta \in \{1, 2, 4\}$ é o índice de simetria de Dyson, N_1 e N_2 são os números de canais abertos nos guias 1 e 2, respectivamente, de maneira que $N = N_1 + N_2$ é o número total de canais de espalhamento do sistema.

Dessa forma, o cálculo a ser executado consiste em fazer a média do segundo momento. Seguindo a referência [7], reescrevemos o segundo momento da seguinte maneira

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Tr} [(C_1 S C_2 S^\dagger)^2]. \quad (4.31)$$

A matriz S nessa fórmula pode ser representada como na equação (4.1) e descreve o espalhamento caótico dentro do ponto quântico. Essa matriz está distribuída de acordo com o ensemble circular (C) relevante: COE para $\beta = 1$, CUE para $\beta = 2$ e CSE para $\beta = 4$. Os projetores $C_{1,2}$ estão definidos na seção anterior.

Estamos agora em posição de aplicar o método diagramático para calcular a média da equação (4.31). Para uma descrição completa das regras diagramáticas do CUE, COE e CSE recomendamos a referência [7]. Vimos que uma função com o argumento do traço tendo o produto de quatro matrizes unitárias terá média no COE representada por 24 diagramas. Isso também é válido para o CSE. Entretanto, as propriedades algébricas dos projetores irão impor que apenas quatro desses diagramas sejam não-nulos. Os diagramas não-nulos serão os mesmos para ambos os ensembles. Dessa forma, a diferença crucial entre as médias em ensembles distintos estará nos pesos. Aqui apresentamos detalhadamente apenas o caso CUE, considerando que as expressões finais são extensíveis para outros ensembles por meio da inserção dos índices de Dyson β provenientes das funções peso. Além disso, cálculos no CUE são mais simples e exibem todos os detalhes do método. O primeiro passo é representar $\mathbf{g}_2$ diagramaticamente como na figura (4.4.a), na qual, por conveniência, rearrumamos as matrizes de espalhamento nos diagramas, colocando S no lado direito do centro da linha superior do diagrama e $S^\dagger$ no lado esquerdo dessa linha. A linha inferior fica com S no lado esquerdo e $S^\dagger$ no lado direito. As matrizes unitárias continuam representadas por linhas pontilhadas, $\bullet \cdots \circ$, e as matrizes de projeção $C_{1,2}$ são representadas por linhas contínuas sólidas direcionadas. O segundo passo é executar a média no ensemble diretamente na representação diagramática conectando, no caso do CUE, os pontos da mesma cor por linhas finas da mesma cor em todos os caminhos topologicamente distintos. Encontramos quatro possíveis diagramas, veja a figura (4.4.b). Diagramas similares foram apresentados no cálculo perturbativo da referência [61]. Aplicando as regras diagramáticas para os diagramas da figura (4.4.b), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_2 \rangle = & V_{1,1} [(\mathbf{Tr} C_1)^2 \mathbf{Tr}(C_2)^2 + \mathbf{Tr}(C_1)^2 (\mathbf{Tr} C_2)^2] \\ & + V_2 [(\mathbf{Tr} C_1)^2 (\mathbf{Tr} C_2)^2 + \mathbf{Tr}(C_1)^2 \mathbf{Tr}(C_2)^2], \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde os pesos são dados por $V_{1,1} = (N^2 - 1)^{-1}$ e $V_2 = -(N(N^2 - 1))^{-1}$. Para maiores detalhes na maneira de calcular tais pesos recursivamente, veja referência [71, 7]. Depois de alguma álgebra, obtemos da equação (4.32) as seguintes expressões simples e exatas

$$\langle \mathbf{g}_2 \rangle = \frac{N_1 N_2 (N_1^2 + N_1 N_2 + N_2^2 - 1)}{(N - 1) N (N + 1)}. \quad (4.33)$$

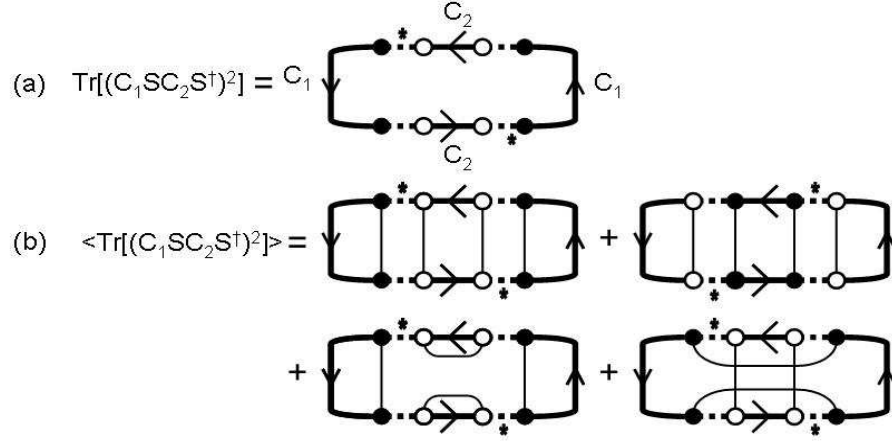


Figura 4.4: Representação diagramática do (a) segundo momento, equação (4.31), e (b) a média no ensemble do segundo momento, equação (4.32). Note-se que, na linguagem de ciclos introduzida na referência[7], os dois primeiros diagramas de (b) têm dois ciclos U e três ciclos T , enquanto os dois últimos têm um ciclo U e 4 e 2 ciclos T , respectivamente.

Nesse ponto, podemos introduzir o índice β e reescrever essa expressão de uma maneira que a mesma seja válida para todas as classes de simetria, com obtido aplicando as regras diagramáticas para médias nos ensembles COE e CSE. Obtemos

$$\langle g_2 \rangle = \frac{N_1 N_2 \left(N_1^2 + N_1 N_2 + N_2^2 - 2N + 1 + \frac{4N-6}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} \right)}{\left(N - 2 + \frac{2}{\beta} \right) \left(N - 1 + \frac{2}{\beta} \right) \left(N - 1 + \frac{4}{\beta} \right)}. \quad (4.34)$$

Note-se que, fixando $\beta = 2$, recuperamos a equação (4.33), como esperado.

Inserindo as equações (4.34) e (4.30) dentro de $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{g}_1 \rangle - \langle \mathbf{g}_2 \rangle$, obtemos a seguinte expressão exata para a média da potência do ruído de disparo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{N_1 N_2 \left(N_1 - 1 + \frac{2}{\beta} \right) \left(N_2 - 1 + \frac{2}{\beta} \right)}{\left(N - 2 + \frac{2}{\beta} \right) \left(N - 1 + \frac{2}{\beta} \right) \left(N - 1 + \frac{4}{\beta} \right)}, \quad (4.35)$$

em concordância com a referência [73], para N_1 e N_2 arbitrários, e com [74], para $N_1 = N_2$, onde os cálculos foram executados com métodos não-diagramáticos. Vamos isolar a primeira correção quântica ao termo semiclássico. Para isso, vamos

expandir perturbativamente das equações (4.34) e (4.35) os primeiros dois termos da série, que é válida para $N_1, N_2 \gg 1$. Obtemos as seguintes expressões para a média do segundo momento

$$\langle \mathbf{g}_2 \rangle = \frac{N_1 N_2 (N_1^2 + N_1 N_2 + N_2^2)}{(N_1 + N_2)^3} + 2 \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{N_1 N_2 (N_1^2 + N_2^2)}{(N_1 + N_2)^4} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.36)$$

e para a potência do ruído de disparo, obtemos

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3} - \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2}{(N_1 + N_2)^4} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.37)$$

A equação (4.37) é bem conhecida na literatura, veja, por exemplo, a referência [57]. O segundo termo da expansão é a correção quântica dominante ao termo semiclássico. Note-se que fazendo $\beta = 2$ na equação (4.37) a correção se anula, como esperado pela supressão da interferência quântica causada pela quebra de simetria TR mediante a aplicação de um campo magnético externo. Entretanto, para $\beta = 1$ ($\beta = 4$), a correção de interferência quântica amplifica (suprime) o valor semiclássico da média da potência do ruído de disparo se $N_1 = N_2$.

O cálculo da média da potência do ruído de disparo para a cavidade caótica com dois contatos ideais é uma aplicação muito simples da técnica diagramática que fornece resultados exatos. Apesar da simplicidade, os quatro diagramas da figura (4.4.b) são ainda um guia útil para a execução de cálculos muito mais complicados da expansão perturbativa da média da potência do ruído de disparo com duas barreiras, a qual é objeto de estudo na próxima seção.

4.5 Potência do Ruído de Disparo Média de Cavidade Caótica com Barreiras

Nesta seção, estabelecemos em guia para o cálculo diagramático perturbativo da média da potência do ruído de disparo de uma cavidade caótica com duas barreiras de transparências arbitrárias, com atenção especial para a correção de interferência quântica dominante. Na presença de barreiras, a matriz de espalhamento da cavidade caótica está distribuída de acordo com o núcleo de Poisson, equação (4.5). A idéia central do esquema é mapear a média no ensemble descrito pelo núcleo de Poisson em um problema efetivo com uma matriz aleatória pertencente a um dos ensembles circulares, de maneira que a técnica diagramática usada na seção anterior possa ser aplicada. Seguindo a referência [7], isso é atingido separando a média da

parte flutuante da própria matriz de espalhamento, como segue $S = \bar{S} + \delta S$, onde $\bar{S}$ é a matriz sub-unitária exibida na equação (4.6). A parcela flutuante é parametrizada na forma $\delta S = L(1 - UR)^{-1}UT$, onde a matriz U é uma matriz aleatória distribuída de acordo com um dos ensembles circulares. As matrizes L , T e R descrevem os coeficiente de transmissão e de reflexão das barreiras e são relacionados a $\bar{S}$ por meio da condição de que

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{S} & L \\ T & R \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

seja unitária. A escolha mais conveniente para as matrizes T , L e R é

$$T = \begin{pmatrix} (i\sqrt{T_1})1_{N_1} & 0 \\ 0 & (i\sqrt{T_2})1_{N_2} \end{pmatrix} = L \quad (4.39)$$

e

$$R = \begin{pmatrix} (\sqrt{1-T_1})1_{N_1} & 0 \\ 0 & (\sqrt{1-T_2})1_{N_2} \end{pmatrix} = \bar{S}, \quad (4.40)$$

nas quais T_1 e T_2 representam os coeficientes de transmissão de cada canal nas barreiras 1 e 2 respectivamente. Usando a decomposição $S = \bar{S} + \delta S$ e propriedades estatísticas simples de δS , tais como a sua média nula, podemos escrever a equação (4.31) como

$$\langle \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \text{Tr} [(C_1 \delta S C_2 \delta S^\dagger)^2] \rangle. \quad (4.41)$$

Expandindo o denominador na parametrização de δS e inserindo o resultado na equação (4.41), obtemos a série

$$\langle \mathbf{g}_2 \rangle = \sum_{k,l,m,n \geq 1}^{\infty} \langle f_{k,l,m,n} \rangle, \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{k,l,m,n} = & \text{Tr} [C_1 L (UR)^{k-1} U T C_2 T^\dagger U^\dagger (R^\dagger U^\dagger)^{l-1} L^\dagger \\ & \times C_1 L (UR)^{m-1} U T C_2 T^\dagger U^\dagger (R^\dagger U^\dagger)^{n-1} L^\dagger]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Segue de uma propriedade básica (tratada na primeira seção) das médias sobre grupos unitários que $\langle f_{k,l,m,n} \rangle \neq 0$ se e somente se $k + m = l + n$. A tarefa não-trivial que permanece é calcular perturbativamente a parcela não-nula de $\langle f_{k,l,m,n} \rangle$. O termo dominante, que gera o valor semiclássico, é calculado na próxima seção.

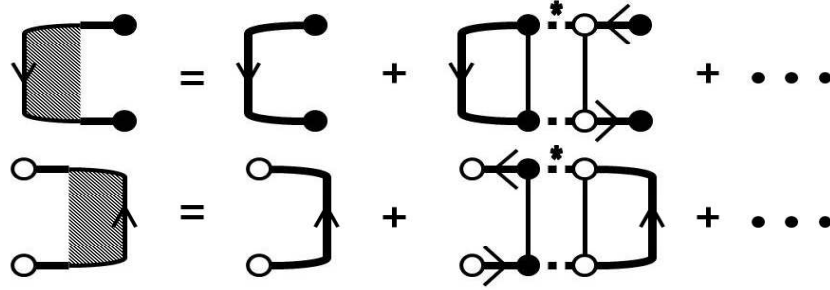


Figura 4.5: Representação diagramática das matrizes F_L (acima), equação (4.44), e F_R (abaixo), equação (4.45). Elas são séries infinitas de diagramas tipo escada, veja [7].

4.5.1 Termo Semiclássico

Como o termo semiclássico é independente do índice de simetria β , podemos executar a média no ensemble usando as regras diagramáticas simples do ensemble CUE. Segue que a contribuição dominante é dada inserindo os diagramas escada nos primeiros três diagramas da figura 4.4.b. Para tornar sistemático o procedimento, é conveniente introduzir inserções esquerdas e direitas de diagramas escada mediante as matrizes F_L e F_R definidas como

$$\begin{aligned} F_L &= L^\dagger C_1 L + \sum_{n=1}^{\infty} W_1^n \text{Tr}(L^\dagger C_1 L) (\text{Tr}(R^\dagger R))^{n-1} R^\dagger R \\ &= L^\dagger C_1 L + \frac{\text{Tr}(L^\dagger C_1 L)}{N - \text{Tr}(R^\dagger R)} R^\dagger R \end{aligned} \quad (4.44)$$

e

$$\begin{aligned} F_R &= TC_2 T^\dagger + \sum_{n=1}^{\infty} W_1^n R R^\dagger (\text{Tr}(R^\dagger R))^{n-1} \text{Tr}(TC_2 T^\dagger) \\ &= TC_2 T^\dagger + R R^\dagger \frac{\text{Tr}(TC_2 T^\dagger)}{N - \text{Tr}(R^\dagger R)}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

nas quais usamos os valores assintóticos dos pesos $V_1 = W_1 \approx N^{-1}$ associados com os ciclos U curtos. Essas matrizes são representadas diagramaticamente na figura 4.5.

Identificamos seis diagramas topologicamente distintos, os quais são exibidos na figura (4.6). Por conveniência, desenhemos cada diagrama da figura (4.6) usando quatro braços sem restrições de presença ou ausência de inserção de diagramas escada. Os primeiros diagramas da figura (4.4.b) geram os diagramas 2, 3 e 5 da figura (4.6), enquanto o segundo diagrama gera os diagramas 4 e 6. O terceiro diagrama da figura (4.4.b) gera o diagrama 1 da figura (4.6) e o último não gera qualquer contribuição no limite semiclássico. Esses seis diagramas exibem inserções de diagramas escada e representam a informação contida nos modos difusons discretos do sistema, veja referência [6].

1	$W_2 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} F_R)^2$
2	$W_1^4 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} R R^\dagger R R^\dagger) (\mathbf{Tr} F_R)^2$
3	$2W_1^3 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} T C_2 T^\dagger R R^\dagger) (\mathbf{Tr} F_R)$
4	$2W_1^3 (\mathbf{Tr} F_L) (\mathbf{Tr} L^\dagger C_1 L R^\dagger R) (\mathbf{Tr} F_R)^2$
5	$W_1^2 \mathbf{Tr} (L^\dagger C_1 L)^2 (\mathbf{Tr} F_R)^2$
6	$W_1^2 (\mathbf{Tr} F_L)^2 \mathbf{Tr} (T C_2 T^\dagger)^2$

Tabela 4.1: Expressões algébricas correspondendo aos diagramas da figura(4.6).

Na tabela (4.1), mostramos expressões algébricas com os pesos correspondentes associados a cada um dos diagramas da figura (4.6). Note-se que o diagrama da figura (4.6.1) tem um ciclo U longo com peso $V_2 = W_2$ enquanto os outros têm ciclos U com peso W_1 . Adicionando as equações da tabela (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{g}_2 \rangle = & W_2 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} F_R)^2 + W_1^4 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} R R^\dagger R R^\dagger) (\mathbf{Tr} F_R)^2 \\
& + 2W_1^3 (\mathbf{Tr} F_L)^2 (\mathbf{Tr} T C_2 T^\dagger R R^\dagger) (\mathbf{Tr} F_R) \\
& + 2W_1^3 (\mathbf{Tr} F_L) (\mathbf{Tr} L^\dagger C_1 L R^\dagger R) (\mathbf{Tr} F_R)^2 \\
& + W_1^2 \mathbf{Tr} (L^\dagger C_1 L)^2 (\mathbf{Tr} F_R)^2 + W_1^2 (\mathbf{Tr} F_L)^2 \mathbf{Tr} (T C_2 T^\dagger)^2. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Inserindo os valores semiclássicos $W_1 \approx N^{-1}$, $W_2 \approx -N^{-3}$, (4.44), (4.45) e definindo as expressões das matrizes C_1 , C_2 , T , R e L na equação (4.46), obtemos o resultado compacto

$$\langle \mathbf{g}_2 \rangle = \frac{g_1^4 \bar{g}_2 + 2g_1^3 \bar{g}_1^2 + 2g_1^2 \bar{g}_1^3 + g_2 \bar{g}_1^4}{(g_1 + \bar{g}_1)^4} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.47)$$

onde $g_p = \sum_{i=1}^{N_1} (T_i)^p$ e $\bar{g}_p = \sum_{i=N_1+1}^N (T_i)^p$.

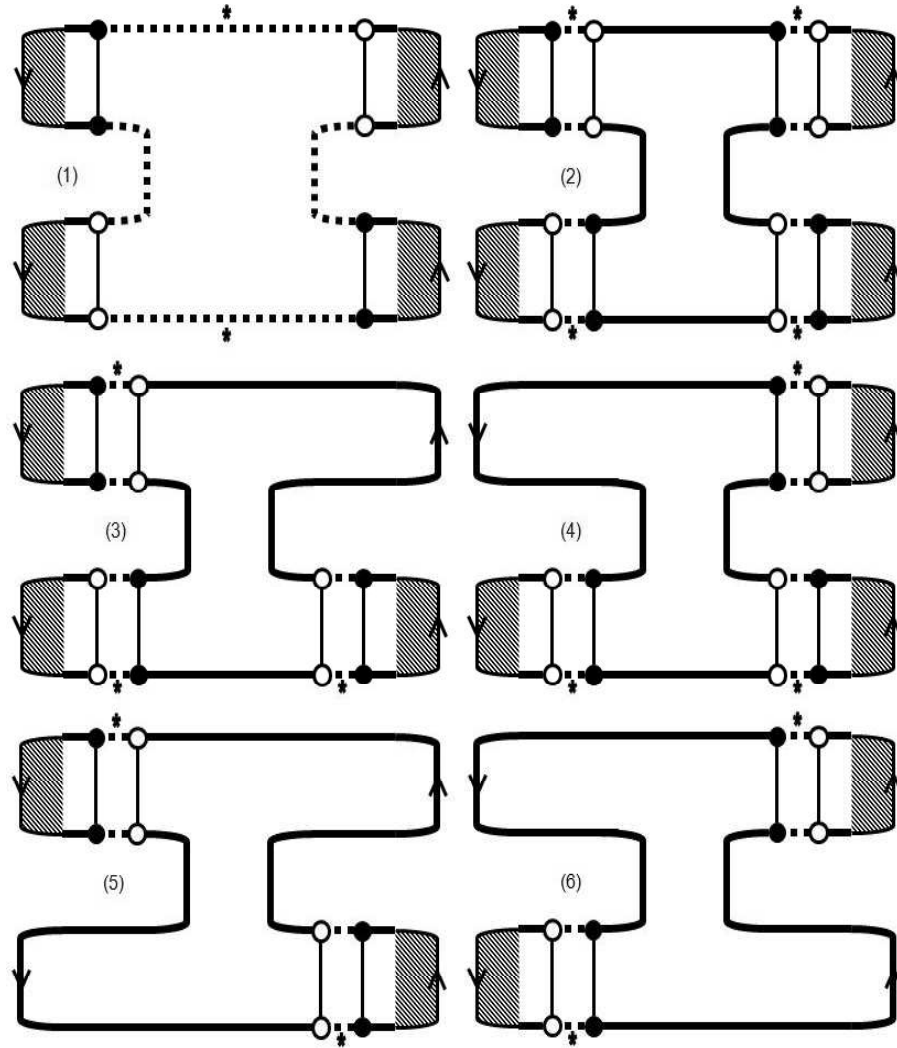


Figura 4.6: Os seis conjuntos de diagramas topologicamente distintos que contribuem para o termo semiclássico da média da potência do ruído de disparo.

Um cálculo similar para $\langle \mathbf{g}_1 \rangle$ pode ser encontrado na referência [7] que obtém

$$\langle \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{g_1 \bar{g}_1}{g_1 + \bar{g}_1} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.48)$$

Inserindo as equações (4.47) e (4.48) dentro de $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{g}_1 \rangle - \langle \mathbf{g}_2 \rangle$, obtemos o valor semiclássico da média da potência do ruído de disparo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{g_1^4 \bar{g}_1 + g_1^3 \bar{g}_1^2 - g_1^4 \bar{g}_2 - \bar{g}_1^4 g_2 + g_1^2 \bar{g}_1^3 + g_1 \bar{g}_1^4}{(g_1 + \bar{g}_1)^4} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.49)$$

em concordância com o resultado de Whitney na referência [58], obtido pelo formalismo semiclássico de trajetórias. A equação (4.49) reproduz os resultados da referência [39] do formalismo de cascata se fixamos $g_p = N_1(T_1)^p$ e $\bar{g}_p = N_2(T_2)^p$, e está em acordo com cálculos semiclássicos executados via função geratriz da estatística de contagem das referências [75, 76] se fixarmos $N_1 = N_2 = N/2$, $g_p = N(T_1)^p/2$ e $\bar{g}_p = N(T_2)^p/2$.

4.5.2 Correção Quântica Dominante

Quando a matriz U da equação (4.42) está distribuída de acordo com o ensemble circular ortogonal, o segundo momento médio $\langle \mathbf{g}_2 \rangle$, mostrado na equação (4.47), tem uma correção quântica de $\mathcal{O}(1)$ a qual denotamos por $\delta \mathbf{g}_2$. Fisicamente, ela emerge de interferências construtivas entre pares de trajetórias eletrônicas revertidas no tempo. Separamos essa correção quântica em termos de duas contribuições,

$$\langle \delta \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \delta \mathbf{g}_{2,1} \rangle + \langle \delta \mathbf{g}_{2,2} \rangle. \quad (4.50)$$

O primeiro termo, $\langle \delta \mathbf{g}_{2,1} \rangle$, é proveniente da correção de ordem seguinte dos pesos dos ciclos U curtos (veja referência [7]), $W_1 \approx N^{-1}(1 - N^{-1})$. Esse fator afeta significativamente as matrizes F_L e F_R , considerando que após a inserção de $W_1^n \approx N^{-n} - nN^{-n-1}$ nas equações (4.44) e (4.45), obtemos as correções

$$\begin{aligned} \delta F_L &= - \sum_{n=1}^{\infty} n N^{-n-1} \text{Tr} (L^\dagger C_1 L) (\text{Tr} (R^\dagger R))^{n-1} R^\dagger R \\ &= - \frac{\text{Tr} (L^\dagger C_1 L)}{(N - \text{Tr} (R^\dagger R))^2} R^\dagger R, \end{aligned} \quad (4.51)$$

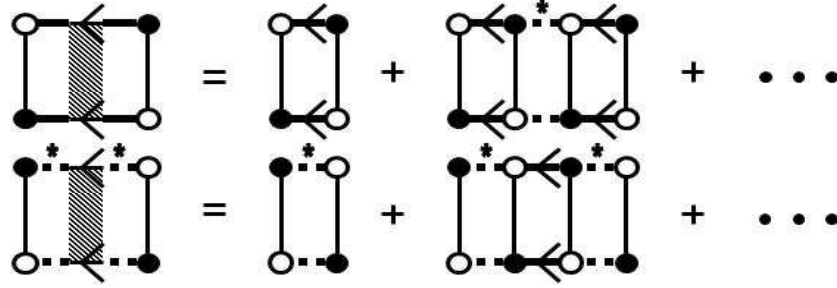


Figura 4.7: Representação diagramática das funções f_{TT} (acima), equação (4.54), e f_{UU} (abaixo), equação (4.55). Elas são séries infinitas dos diagramas maximamente cruzados, conhecidos como cooperons, ver a referência [7].

e

$$\begin{aligned} \delta F_R &= - \sum_{n=1}^{\infty} n N^{-n-1} (\text{Tr}(R^\dagger R))^{n-1} \text{Tr}(TC_2 T^\dagger) R R^\dagger \\ &= - \frac{\text{Tr}(TC_2 T^\dagger)}{(N - \text{Tr}(R^\dagger R))^2} R R^\dagger. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Inserindo $F_L + \delta F_L$ e $F_R + \delta F_R$ nos lugares onde estão F_L e F_R na equação (4.46), com δF_L e δF_R dados nas equações (4.51) e (4.52), respectivamente, obtemos

$$\langle \delta \mathbf{g}_{2,1} \rangle = -2 \frac{g_1^4 \bar{g}_2 + 2g_1^3 \bar{g}_1^2 - g_1^3 \bar{g}_1 \bar{g}_2 - g_1 g_2 \bar{g}_1^3 + 2g_1^2 \bar{g}_1^3 + g_2 \bar{g}_1^4}{(g_1 + \bar{g}_1)^5} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.53)$$

A segunda correção para o segundo momento, $\delta \mathbf{g}_{2,2}$, é proveniente dos diagramas de $\mathcal{O}(1)$. Essas correções têm características puramente quânticas e podem ser obtidas via inserções de séries de diagramas maximamente cruzados representando os modos cooperons discretos do sistemas. Eles também podem ser desenhados como diagramas tipo escada, ver referência [6]], como é exibido nas figuras (4.7) e (4.8), e são definidas pelas seguintes equações

$$f_{TT} = \sum_{n=0}^{\infty} N^{-n} (\text{Tr}(R^\dagger R))^{n+1} = \frac{N \text{Tr}(R^\dagger R)}{N - \text{Tr}(R^\dagger R)}, \quad (4.54)$$

$$f_{UU} = \sum_{n=0}^{\infty} N^{-n-1} (\text{Tr}(R^\dagger R))^n = \frac{1}{N - \text{Tr}(R^\dagger R)}, \quad (4.55)$$

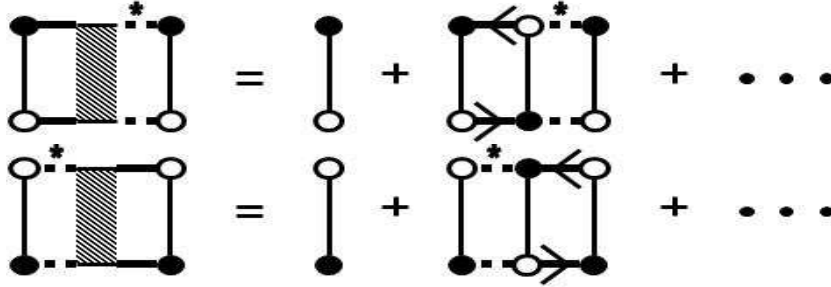


Figura 4.8: Série de diagramas maximamente cruzados representando as funções f_{TU} (acima) e f_{UT} (abaixo), equação (4.56), ver a referência [7].

e

$$f_{TU} = f_{UT} = \sum_{n=0}^{\infty} N^{-n} (\text{Tr}(R^\dagger R))^n = \frac{N}{N - \text{Tr}(R^\dagger R)}. \quad (4.56)$$

Podemos gerar sistematicamente os diagramas de $\mathcal{O}(1)$ cruzando os braços dos seis diagramas da figura (4.6) e inserindo os diagramas das figuras (4.7) e (4.8) em todas as possibilidades topologicamente distintas. Encontramos um conjunto de diagramas com seis elementos, três conjuntos com sete elementos e dois conjuntos com três elementos. Eles estão exibidos nas figuras (4.9)-(4.11). As expressões algébricas correspondentes são exibidas na tabela (4.2). O procedimento é sistemático e está descrito como segue. Iniciamos definindo 7 tipos básicos de inserções, H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , K_1 , K_2 e K_3 , cujos diagramas e as correspondentes expressões algébricas são mostrados no apêndice. Os diagramas da figura (4.9) são obtidos por inserções de K_1 , K_2 e K_3 dentro do diagrama da figura (4.6.1). Os diagramas da figura (4.10) são obtidos por inserções de H_1 e H_2 dentro do diagrama da figura (4.6.2). Finalmente, os diagramas de 4.11 são obtidos por inserções de H_3 e H_4 dentro dos diagramas da figuras (4.6.3)-(4.6.6).

Com os 3 conjuntos de expressões algébricas exibidos na tabela (4.2), obtemos as seguintes expressões para $\delta g_{2,2}$

$$\begin{aligned} \langle \delta g_{2,2} \rangle = & 4W_2 K_1 \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) + 2W_3 K_2 \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) \\ & + 2W_2 K_3 \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) + 4\text{Tr}(H_1 H) + 2\text{Tr}(H_2 H) \\ & + 2W_1^2 \text{Tr}(H_3 R R^\dagger) \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) + 2W_1^2 \text{Tr}(H_4 R^\dagger R) \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) \\ & + 2W_1 \text{Tr}(H_3 T C_2 T^\dagger) \text{Tr}(F_L) + 2W_1 \text{Tr}(H_4 L^\dagger C_1 L) \text{Tr}(F_R). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Inserindo as expressões algébricas para H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , K_1 , K_2 e K_3 exibidos no

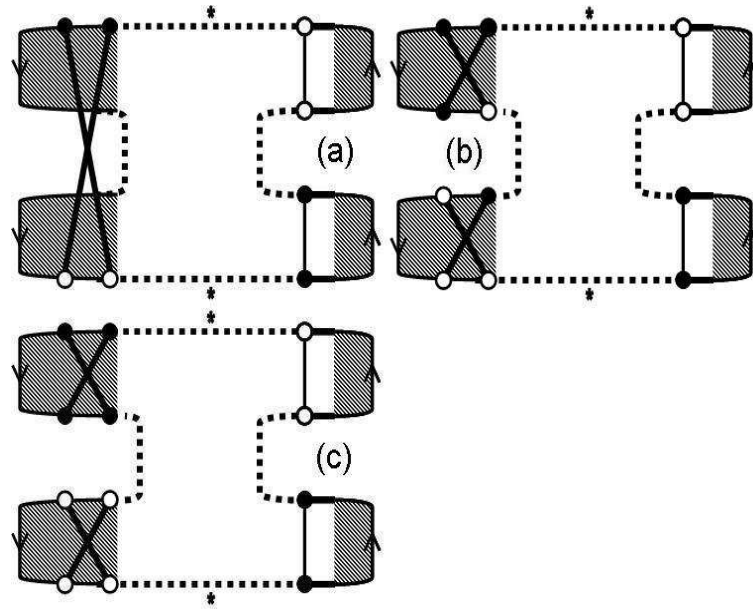


Figura 4.9: Primeiro conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos por cruzamentos dos braços do diagrama da figura (4.6.1).

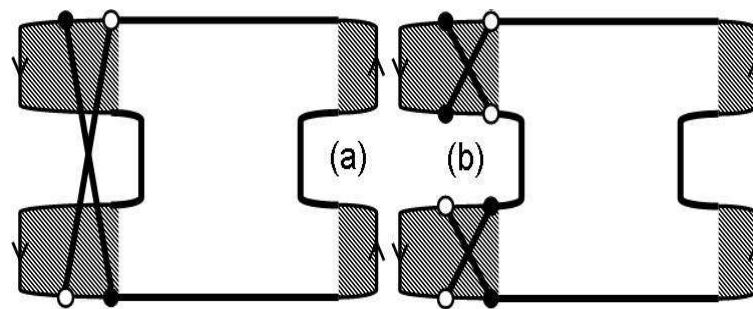


Figura 4.10: Segundo conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos cruzando os braços do diagrama da figura (4.6.2).

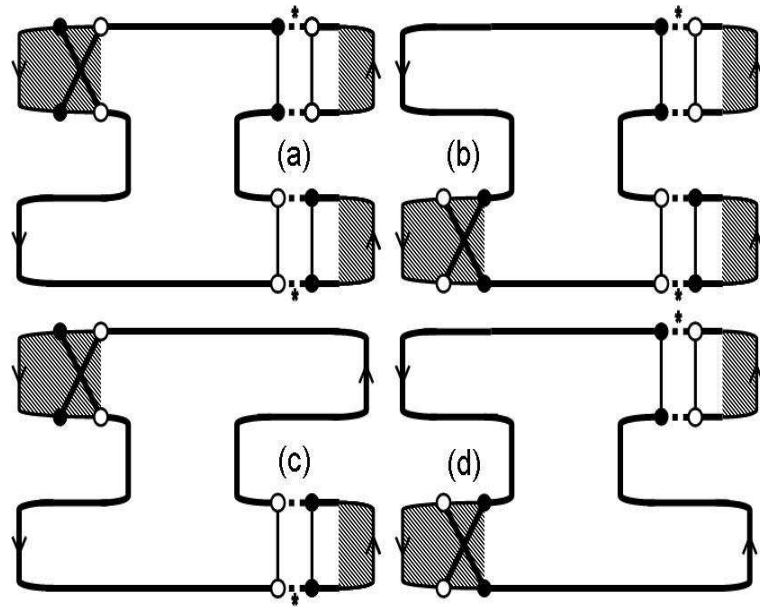


Figura 4.11: Terceiro conjunto de diagramas maximamente cruzados que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo. Os diagramas são obtidos cruzando os braços do diagramas da figuras (4.6.3-4.6.6).

apêndice, equações (4.54)-(4.56) e o valor assintótico para os pesos $W_1 \approx N^{-1}$, $W_2 \approx -N^{-3}$ e $W_3 \approx 2N^{-5}$ em (4.57), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{g}_{2,2} \rangle = & -2(g_1 + \bar{g}_1)^{-6} (-g_1^2 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 + 4g_1^3 \bar{g}_1^2 \bar{g}_2 + 4g_1^2 \bar{g}_1^3 g_2 + 3g_1^4 \bar{g}_1 \bar{g}_2 - g_1^3 \bar{g}_1^2 g_2 \\ & -2g_2 \bar{g}_1^5 + 2g_1^5 \bar{g}_3 + 2\bar{g}_1^5 g_3 - 4g_1^4 \bar{g}_2^2 + 2g_1 \bar{g}_1^3 g_2 \bar{g}_2 + 2g_1^3 \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_2 \\ & -4g_1^2 \bar{g}_1^2 g_2 \bar{g}_2 - 2g_1^5 \bar{g}_2 - 4g_2^2 \bar{g}_1^4 + 3g_1 \bar{g}_1^4 g_2 + 2\bar{g}_1^4 g_3 g_1 + 2g_1^4 \bar{g}_3 \bar{g}_1 \\ & -2g_1^4 \bar{g}_1^2 - 4g_1^3 \bar{g}_1^3 - 2g_1^2 \bar{g}_1^4) + \mathcal{O}(N^{-1}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Inserindo as equações (4.53) e (4.58) dentro de (4.50), obtemos a correção quântica dominante para a média do segundo momento

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_2 \rangle = & 2(g_1 + \bar{g}_1)^{-6} (-2g_1^3 \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_2 + 4g_1^2 \bar{g}_1^2 g_2 \bar{g}_2 - 2g_1 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 g_2 + g_2 \bar{g}_1^5 - 2g_1^5 \bar{g}_3 \\ & -2\bar{g}_1^5 g_3 + 4g_1^4 \bar{g}_2^2 + g_1^5 \bar{g}_2 + 4g_2^2 \bar{g}_1^4 + g_1^2 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 - 3g_1^3 \bar{g}_1^2 \bar{g}_2 - 3g_1^2 \bar{g}_1^3 g_2 - 3g_1^4 \bar{g}_1 \bar{g}_2 \\ & + g_1^3 \bar{g}_1^2 g_2 - 3g_1 \bar{g}_1^4 g_2 - 2\bar{g}_1^4 g_3 g_1 - 2g_1^4 \bar{g}_3 \bar{g}_1) + \mathcal{O}(N^{-1}). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Vamos agora combinar a equação (4.47) com a equação (4.59) e inserir a dependência característica do índice de simetria de Dyson β , mediante o fator $(\frac{2}{\beta} - 1)$, para obter os primeiros dois termos na expansão semiclássica da média do segundo momento

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_2 \rangle = & (g_1 + \bar{g}_1)^{-4} (g_1^4 \bar{g}_2 + 2g_1^3 \bar{g}_1^2 + 2g_1^2 \bar{g}_1^3 + g_2 \bar{g}_1^4) \\ & + 2 \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) (g_1 + \bar{g}_1)^{-6} (-2g_1^3 \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_2 + 4g_1^2 \bar{g}_1^2 g_2 \bar{g}_2 - 2g_1 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 g_2 + g_2 \bar{g}_1^5 \\ & -2g_1^5 \bar{g}_3 - 2\bar{g}_1^5 g_3 + 4g_1^4 \bar{g}_2^2 + g_1^5 \bar{g}_2 + 4g_2^2 \bar{g}_1^4 + g_1^2 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 - 3g_1^3 \bar{g}_1^2 \bar{g}_2 - 3g_1^2 \bar{g}_1^3 g_2 \\ & -3g_1^4 \bar{g}_1 \bar{g}_2 + g_1^3 \bar{g}_1^2 g_2 - 3g_1 \bar{g}_1^4 g_2 - 2\bar{g}_1^4 g_3 g_1 - 2g_1^4 \bar{g}_3 \bar{g}_1) + \mathcal{O}(N^{-1}). \end{aligned} \quad (4.60)$$

A extensão para o ensemble $\beta = 4$ para a equação (4.60) pode ser feita usando as regras diagramáticas para a média no ensemble sobre o CSE, veja a referência [7]. Note-se que o caso $T_i = 1$ na equação (4.60) simplifica para a equação (4.36), como esperado.

Um cálculo similar para a média da condutância foi apresentado na referência [7] e resulta em

$$\langle \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{g_1 \bar{g}_1}{g_1 + \bar{g}_1} + \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{g_2 \bar{g}_1^2 + g_1^2 \bar{g}_2}{(g_1 + \bar{g}_1)^3} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.61)$$

Substituindo as equações (4.60) e (4.61) dentro de $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{g}_1 \rangle - \langle \mathbf{g}_2 \rangle$, obtemos a expansão semiclássica para a média da potência do ruído de disparo com a correção

quântica dominante

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p} \rangle = & (g_1 + \bar{g}_1)^{-4} (g_1^4 \bar{g}_1 + g_1^3 \bar{g}_1^2 - g_1^4 \bar{g}_2 - \bar{g}_1^4 g_2 + g_1^2 \bar{g}_1^3 + g_1 \bar{g}_1^4) \\
& + \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) (g_1 + \bar{g}_1)^{-6} (-3g_2 \bar{g}_1^5 + 4g_1^5 \bar{g}_3 + 4\bar{g}_1^5 g_3 - 8g_1^4 \bar{g}_2^2 - 3g_1^5 \bar{g}_2 - 8g_2^2 \bar{g}_1^4 \\
& + 4g_1^3 \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_2 + 4g_1 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 g_2 - 8g_1^2 \bar{g}_1^2 g_2 \bar{g}_2 - 3g_1^2 \bar{g}_1^3 \bar{g}_2 + 3g_1^3 \bar{g}_1^2 \bar{g}_2 + 3g_1^2 \bar{g}_1^3 g_2 \\
& + 3g_1^4 \bar{g}_1 \bar{g}_2 - 3g_1^3 \bar{g}_1^2 g_2 + 3g_1 \bar{g}_1^4 g_2 + 4\bar{g}_1^4 g_3 g_1 + 4g_1^4 \bar{g}_3 \bar{g}_1) + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.62)
\end{aligned}$$

A equação (4.62) é o principal resultado deste capítulo e é válido para $\beta \in \{1, 2, 4\}$. Recuperamos o caso de contatos ideais, equação (4.37), fixando $T_i = 1$. Se tomarmos $g_p = N_1 T_1^p$ e $\bar{g}_p = N_2 T_2^p$ na equação (4.62), o resultado simplifica para

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p} \rangle = & \frac{G_1 G_2 (G_1 G_2 (G_1 + G_2) + G_1^3 (1 - T_2) + G_2^3 (1 - T_1))}{(G_1 + G_2)^4} \quad (4.63) \\
& + \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{G_1 G_2 (G_1 - G_2) (G_1 T_2 + G_2 T_1) (3(G_2^2 - G_1^2) + 4(G_1^2 T_2 - G_2^2 T_1))}{(G_1 + G_2)^6},
\end{aligned}$$

onde $G_i = N_i T_i$ with $i = 1, 2$. Essa equação foi obtida na referência [53] usando teoria quântica de circuitos (ver referências [76, 52]) e descrita no capítulo 3, onde um efeito supressão-amplificação foi reportado e analisado em detalhes.

	1	2
a	$4W_2 K_1 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R)$	$4\mathbf{Tr}(H_1 H)$
b	$2W_3 K_2 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R)$	$2\mathbf{Tr}(H_2 H)$
c	$2W_2 K_3 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R)$	
	3	
a	$2W_1^2 \mathbf{Tr}(H_3 R R^\dagger) \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R)$	
b	$2W_1^2 \mathbf{Tr}(H_4 R^\dagger R) \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R)$	
c	$2W_1 \mathbf{Tr}(H_3 T C_2 T^\dagger) \mathbf{Tr}(F_L)$	
d	$2W_1 \mathbf{Tr}(H_4 L^\dagger C_1 L) \mathbf{Tr}(F_R)$	

Tabela 4.2: Expressões algébricas para os diagramas das figuras (4.9)-(4.11).

4.6 Sumário e Conclusões

Neste capítulo, foi apresentada uma análise quantitativa detalhada por meio do método diagramático para a integração no grupo unitário da correção quântica para

a potência do ruído de disparo de uma cavidade caótica com contatos não-ideais. Nosso principal resultado é válido para todas as classes de simetria dos ensembles de Wigner-Dyson. Acreditamos que esse capítulo seja de utilidade para contribuições no desenvolvimento do método diagramático, considerando que o novo conjunto de diagramas maximamente cruzados para o cálculo geral de correções de localização fraca para a média da potência do ruído de disparo pode ser aplicado para outros sistemas em situações mais gerais. Um exemplo será a aplicação desses diagramas no problema do próximo capítulo. Esses diagramas também podem ser imediatamente aplicados em estudos de sistemas híbridos com ferromagnetos e/ou supercondutividade.

Capítulo 5

Crossover entre os Ensembles de Wigner-Dyson

No capítulo anterior e na referência [53], mostramos um tipo sutil de efeito supressão-amplificação na correção de localização fraca da potência do ruído de disparo em cavidades caóticas para as três classes de simetria de Dyson. Neste capítulo, generalizaremos o resultado, apresentando o crossover completo entre os três ensembles usando dois parâmetros de controle: a taxa de espalhamento spin-órbita e a taxa de espalhamento magnético. Tal crossover foi estudado no capítulo 3 usando a teoria de circuitos. Doravante, mostraremos o modelo hamiltoniano subjacente e aspectos fundamentais da mecânica quântica e da matriz de espalhamento do sistema. Para obter observáveis de transporte, usaremos a teoria de matrizes aleatórias e um método diagramático de integração no grupo unitário. Como esperado, os resultados via teoria de circuitos e via matrizes aleatórias coincidem, se admitirmos a validade universal da transformação “color-flavor”. Complementamos a literatura de matrizes aleatórias, introduzindo no crossover barreiras arbitrárias, além de parâmetros de espalhamento variáveis. Mostramos um efeito de supressão-amplificação que ocorre apenas para contatos não-ideais e que está relacionado ao campo magnético e à consequente quebra de simetria de reversão temporal.

O transporte em cavidades caóticas pode ser amplamente afetado por efeitos de interferência resultantes de trajetórias de Feynman revertidas no tempo. Veremos como a correção de localização fraca para a condutância pode ser influenciada pela quebra de reversão temporal ou pela quebra de simetria de rotação de spin. Uma das consequências de nossos resultados é a transição entre localização e anti-localização para uma mesma intensidade de campo magnético, um efeito totalmente inesperado. Em experimentos de cavidades caóticas mesoscópicas, é possível controlar o campo

elétrico externo, o campo magnético externo e o parâmetro de espalhamento spin-órbita do sistema. Variando as taxas de espalhamento magnético e/ou spin-órbita, o sistema transita entre os ensembles de Dyson, especificados pela presença ou ausência de simetria de reversão temporal (T) e simetria de rotação de spin SU(2).

5.1 O Hamiltoniano de Dirac e o Acoplamento Spin-Órbita

Em mecânica quântica não-relativística, o efeito do acoplamento spin-órbita pode ser descrito através de um termo de potencial devido a Pauli. Esse potencial, escrito como $H_{SO} = -(e\hbar/2mc)\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$, é inserido de maneira *ad hoc*. Por definição, c é a velocidade da luz no vácuo, e é a carga do elétron e m é a massa do elétron. Uma maneira natural ou “fundamental” de perceber a origem do termo de acoplamento spin-órbita seria usando, simplesmente, o fato de que toda interação eletromagnética seria dada em termos do acoplamento mínimo na dinâmica da função de onda original, ou seja, fazer a substituição $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}/c$ na equação que descreva a dinâmica. Estamos interessados em partículas relativísticas de spin 1/2, as quais podem ser descritas pela equação de Dirac. Vamos, então, considerar o hamiltoniano de Dirac e executar uma expansão em baixas velocidades com o objetivo de perceber os acoplamentos resultantes. Para isso, seguiremos a referência [77].

A equação de Dirac gera a dinâmica de spinores relativísticos de Dirac, $|\Psi\rangle$, satisfazendo a equação de auto-valores $H^D |\Psi\rangle = (E^{Rel} - V) |\Psi\rangle$, onde E^{Rel} é a energia do spinor relativístico, V é algum potencial de interação e H^D é o Hamiltoniano do spinor livre de Dirac, escrito como

$$H^D = \begin{pmatrix} 0 & c\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ c\vec{p} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Substituindo o hamiltoniano de Dirac na equação de auto-valores e escrevendo as componentes do spinor explicitamente, obtém-se

$$H^D \begin{pmatrix} |\Psi_R\rangle \\ |\Psi_L\rangle \end{pmatrix} = (E^{Rel} - V) \begin{pmatrix} |\Psi_R\rangle \\ |\Psi_L\rangle \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} c\vec{p} \cdot \vec{\sigma} |\Psi_L\rangle \\ c\vec{p} \cdot \vec{\sigma} |\Psi_R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E^{Rel} - V - mc^2) |\Psi_R\rangle \\ (E^{Rel} - V + mc^2) |\Psi_L\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

A equação vetorial anterior gera duas equações acopladas. Facilmente, podemos resolvê-la em termos de $|\Psi_L\rangle$ ou de $|\Psi_R\rangle$. Tomando, por exemplo, a segunda entrada da equação anterior, obtemos uma componente do spinor em função da outra, escrita como

$$|\Psi_L\rangle = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E^{Rel} - V + mc^2} |\Psi_R\rangle. \quad (5.4)$$

No limite de baixas velocidades, a energia da partícula pode ser escrita como $E^{Rel} = E + mc^2$, com a energia adicional à energia de repouso satisfazendo $E \ll mc^2$. Além disso, o potencial também deve ser muito menor que a energia de repouso. Dessa forma, tem-se $E^{Rel} - V + m_0c^2 = E - V + 2mc^2$, com $|E - V| \ll mc^2$. Logo, no limite não-relativístico, podemos expandir a equação (5.4) em potências de $|E - V|/mc^2$ e obter

$$|\Psi_L\rangle = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2mc} |\Psi_R\rangle. \quad (5.5)$$

Por outro lado, admitindo a interpretação probabilística da mecânica quântica, deve-se impor a condição de normalização da função de onda do spinor, ou seja, devemos impor

$$\int d^3\vec{r} (\langle \Psi_L | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \Psi_L \rangle + \langle \Psi_R | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \Psi_R \rangle) = 1, \quad (5.6)$$

onde $\vec{r}$ é uma coordenada espacial. Substituindo a equação (5.5) na equação (5.6), fica claro que a função de onda, no limite não-relativístico, deve ser escrita em termos de $|\Psi_R\rangle$ levando-se em conta a condição de normalização

$$\int d^3\vec{r} \langle \Psi_R | \left(1 + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2}{4m^2c^2} \right) | \Psi_R \rangle = 1. \quad (5.7)$$

Escolhendo-se uma função tal que $|\Psi'\rangle = [1 + (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2/8m^2c^2] |\Psi_R\rangle$, então, até ordem de $(m^2c^2)^{-1}$, a equação de probabilidade (5.7) satisfaz $\int \langle \Psi' | \Psi' \rangle = 1$ para o limite não-relativístico. A equação de auto-valores pode ser desacoplada e gerar a seguinte equação para o campo R no limite não-relativístico

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \frac{c^2}{E - V + 2mc^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} |\Psi_R\rangle = (E - V) |\Psi_R\rangle, \quad (5.8)$$

na qual podemos substituir o campo normalizado e expandi-la até ordem quártica no momento. Fazendo a expansão, obtemos

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{E - V}{2mc^2} + \dots \right) \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \left(1 - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2}{8mc^2} + \dots \right) |\Psi'\rangle = (E - V) |\Psi'\rangle. \quad (5.9)$$

A equação anterior pode ser vista de maneira mais apropriada se separarmos os termos até segunda ordem no gradiente $\vec{p} = i\hbar\nabla$, destacando os termos cinéticos e potenciais da seguinte forma

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{8mc^2} \nabla^2 V - \frac{p^2}{8m^3c^2} - \frac{\hbar}{4m^2c^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \times \nabla V \right) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle. \quad (5.10)$$

Os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação (5.10) são os da equação de Schrödinger na presença de potencial. O terceiro termo é uma correção relativística para os níveis de energia. O quarto termo representa a primeira correção relativística para o termo cinético (precessão de Thomas). O quinto termo representa a correção relativística que introduz o acoplamento spin-órbita, colocado de maneira ad-hoc por Pauli na equação de Schrödinger. Usaremos amplamente o hamiltoniano da equação (5.10) e as suas simetrias nas próximas seções.

5.2 Spin, SU(2) e Rotações

Nesta seção, seguiremos a referência [78] para estudar o efeito, em observáveis de transporte, de uma rotação completa de um estado com spin 1/2, em uma trajetória de Feynman, dentro de uma cavidade caótica. Vamos considerar o operador de rotação $\mathcal{D}(\hat{n}, \phi)$ em uma direção arbitrária $\hat{n}$ por um ângulo ϕ usando a representação de matrizes de Pauli. Nesse caso, podemos escrever a rotação geral por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\hat{n}, \phi) &= \exp\left(-\frac{i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\phi}{2}\right) \\ &= \mathbf{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

A equação (5.11) permite concluir que o estado inicial da partícula de spin 1/2 gira em um ângulo de 2π sem que volte ao estado inicial. Isso fica evidente se substituirmos $\phi = 2\pi$ na equação (5.11), resultando em $\mathcal{D}(\hat{n}, 2\pi) = -1$ para qualquer $\hat{n}$.

A estrutura matricial da equação (5.11) pode ser melhor entendida se a escrevermos explicitamente de maneira a identificar o grupo de simetria. Vemos que a matriz de rotação tem apenas três parâmetros reais livres que podem ser identifi-

cadadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}; \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-in_x - n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (5.12)$$

onde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$. O operador de rotação é unimodular, ou seja, $\det(\mathcal{D}) = 1$. Além disso, tal operador é unitário. A inversa da matriz de rotação é dada por $\mathcal{D}^{-1}(a, b) = \mathcal{D}(a^*, -b)$. Tais propriedades permitem concluir que o grupo de rotação corresponde ao $SU(2)$, ou seja, grupo especial de rotações unitárias. O $SU(2)$ é um subgrupo do $U(2)$, com a restrição de ser unimodular. Em um giro de 2π , vemos que o spin ganha uma fase global e que a esfera de Bloch não caracteriza completamente o estado. Vamos estudar a consequência da simetria $SU(2)$ de spin para os coeficientes de transmissão e de reflexão de uma cavidade caótica com apenas um canal aberto. Uma maneira intuitiva de entender o problema está descrita na figura (5.1) e sua interpretação. Considerando, inicialmente, o caso do estado sem spin, existe uma entrada na cavidade caótica, com probabilidade não-nula de retorno, por meio de uma trajetória clássica, como na figura (5.1). Vamos considerar todos os caminhos possíveis do estado submetido a uma certa ação retornando ao mesmo ponto. Nesse caso, a amplitude de reflexão será a soma de todos os caminhos possíveis e, então, será escrita como

$$r = \sum_l A_l e^{iS_l/\hbar}, \quad (5.13)$$

onde l é um caminho arbitrário que fecha o retorno, A_l é um peso e S_l é uma ação associada à cavidade caótica. A probabilidade de reflexão fica então dada por

$$R = rr^\dagger = \sum_{l, l'} A_l A_{l'}^* e^{i(S_l - S_{l'})/\hbar}. \quad (5.14)$$

No limite clássico, para o qual $\hbar \rightarrow 0$, o exponencial seleciona apenas a trajetória direta, ou seja, apenas o termo $l = l'$ contribui para a soma da equação (5.14). Dessa forma, a contribuição clássica para a probabilidade é dada por

$$R_{\text{cl}} = \sum_l |A_l|^2.$$

Além dessa contribuição, como as trajetórias direta e a revertida no tempo têm mesma ação, há uma segunda contribuição de igual probabilidade devido à trajetória revertida no tempo. Essa contribuição corresponde a $l' = l_{\text{rev}}$ e é justamente o

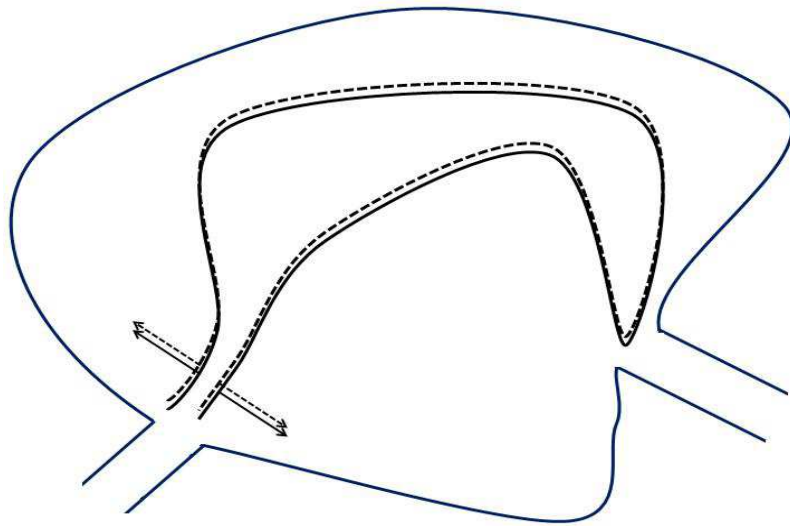


Figura 5.1: A figura exhibe uma cavidade caótica não-balística acoplada a dois reservatórios de partículas. Dentro da cavidade, desenhemos duas trajetórias de Feynman que retornam ao local de entrada, uma com sentido normal (a contínua) e outra revertida no tempo (a tracejada), ambas fechando um circuito. Em cada uma das trajetórias, desenhemos uma seta indicando o spin. Deve-se notar que a trajetória normal “gira” o spin em π no sentido horário, enquanto a trajetória revertida no tempo “gira” o spin em π no sentido anti-horário.

termo de localização fraca, duplicando a probabilidade clássica devido a interferência construtiva entre as trajetórias.

Estados com spin $1/2$ têm o hamiltoniano corrigido pelo termo de Pauli dado na equação (5.10). Esse termo não tem consequências notáveis na correção global da trajetória. No entanto, o estado sofre uma rotação de um ângulo de 180 graus de fase global ao retornar ao ponto de entrada, como na figura (5.1). Seguindo a referência [79], vemos que o acoplamento spin-órbita leva a um termo de fase K_l em cada trajetória, de maneira que a amplitude de reflexão fica dada por

$$r = \sum_l K_l A_l e^{iS_l/\hbar}. \quad (5.15)$$

A probabilidade de reflexão contém, portanto, novos coeficientes que modulam os fatores de spin. Podemos escrevê-la como

$$R = \sum_{l,l'} K_l K_{l'}^* A_l A_{l'}^* e^{i(S_l - S_{l'})/\hbar}. \quad (5.16)$$

O acoplamento spin-órbita gera uma rotação θ_l adiabática, de modo que a amplitude K_l ao longo da trajetória é dada por $K_l = e^{i\theta_l}$. Dessa forma, para trajetórias clássicas, o termo principal tem fator de spin $K_l K_{l'}^* = K_l K_l^* = 1$ ao longo de toda a trajetória, ou seja, a contribuição clássica para o estado com spin $1/2$ é idêntica à contribuição para estados com spin inteiro. Por outro lado, o acoplamento spin-órbita induz uma rotação de 180 graus no spin ao longo de uma trajetória normal no tempo e uma rotação de -180 graus na trajetória revertida no tempo. Isso implica em uma fase global acumulada no termo $K_l K_{l'}^* = K_l K_l^* = |K_l|^2$ de 360 graus, gerando uma amplitude com sinal negativo para a correção de localização fraca (wl). Tal correção afeta profundamente o problema, visto que $R_{wl} = -R_{cl}$, o que anula a probabilidade de reflexão. Para sistemas com N canais abertos, a contribuição clássica é sempre muito maior que a contribuição de localização fraca, sendo a primeira de ordem $\mathcal{O}(N)$ e a segunda de ordem $\mathcal{O}(1)$. Nas seções seguintes, estudaremos esse problema em situações mais gerais.

5.3 Operadores Anti-Unitários e a Simetria de Reversão Temporal

Nesta seção, seguiremos a referência [78] para estudar os efeitos da simetria de reversão temporal. Um exemplo simples dessa simetria discreta está na figura (5.1),

na qual o sentido de propagação do estado é invertido. Isso pode ser expresso mediante a transformação $t \rightarrow -t$ ou, equivalentemente, invertendo-se o momento $\vec{p}_{t=t_0} \rightarrow -\vec{p}_{t=t_0}$ em um certo tempo $t = t_0$. Supondo a presença de campos eletromagnéticos no sistema, a força de Lorentz é mantida invariante para uma trajetória revertida no tempo se e somente se os campos elétrico e magnético satisfazem $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$. Mantendo o sentido do campo magnético, a trajetória invertida no tempo não é igual à trajetória normal, ou seja, o campo magnético quebra a simetria de reversão temporal.

Levando o problema para a mecânica quântica, vamos supor a existência de dois estados $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ e uma operação de simetria S arbitrária. Por meio desta transformação, os estados se alteram, mas o módulo do produto interno deve ser preservado para manter a probabilidade. Dessa forma, devemos ter, por meio de S , as relações

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &\xrightarrow{S} |\Psi'_1\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &\xrightarrow{S} |\Psi'_2\rangle, \\ |\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle| &= |\langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle|. \end{aligned} \quad (5.17)$$

As transformações unitárias não são as únicas que satisfazem as relações anteriores. Transformações de simetria gerais que tenham como requerimento as equações (5.17) satisfazem uma das seguintes relações

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle \\ \langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^* = \langle\Psi_2|\Psi_1\rangle \end{array} \right. . \quad (5.18)$$

Esse fato generaliza a condição de solubilidade da equação de Schrödinger: se $\Psi(x, t)$ é solução da equação

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi, \quad (5.19)$$

então $\Psi(x, -t)$ não é uma solução, mas $\Psi^*(x, -t)$ representa uma outra solução. Uma transformação T' que satisfaz $\langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^*$ é chamada de anti-unitária. Nesse caso, o operador antilinear T' deve satisfazer

$$T'(\alpha_1 |\Psi_1\rangle + \alpha_2 |\Psi_2\rangle) = \alpha_1^* T' |\Psi_1\rangle + \alpha_2^* T' |\Psi_2\rangle.$$

Percebe-se que o operador T' pode ser decomposto em uma parte unitária U e uma parte que gera a conjugação complexa $\mathcal{C}$, de maneira que podemos escrevê-lo como $T' = U\mathcal{C}$.

Seguindo a referência [78], vamos mostrar que o operador de reversão temporal T é um operador anti-unitário. Para isso, vamos supor que conhecemos o estado $|\Psi_1\rangle$ em um certo tempo $t = t_0$ e que queremos conhecê-lo em um instante $t = t_0 + \delta t$ imediatamente posterior. Esses estados em tempos distintos estão conectados pelo operador de evolução temporal, o qual, para δt pequeno, pode gerar a conexão

$$|\Psi_1, t = t_0 + \delta t\rangle = \left[1 - \frac{iH}{\hbar}(t_0 + \delta t)\right] |\Psi_1, t = t_0\rangle, \quad (5.20)$$

onde H é o Hamiltoniano que caracteriza a dinâmica do sistema. Se o sistema tem simetria de reversão temporal, então, por definição, o sistema teria um estado idêntico ao anterior com a forma $T' |\Psi_1, t = t_0 - \delta t\rangle$, ou seja,

$$\left[1 - \frac{iH}{\hbar}(t_0 + \delta t)\right] T' |\Psi_1, t = t_0\rangle = T' \left[1 - \frac{iH}{\hbar}(t_0 - \delta t)\right] |\Psi_1, t = t_0\rangle. \quad (5.21)$$

Por redução ao absurdo, de acordo com a equação anterior, se T' fosse um operador unitário, então $-HT' = T'H$. Nesse caso, um estado $|\Psi_1\rangle$ teria energia E e o revertido $T' |\Psi_1\rangle$ teria energia $-E$, o que não tem sentido para a partícula livre. Sendo assim, devemos impor que $T'H = HT'$, de maneira que o operador de reversão temporal é anti-unitário.

5.3.1 Degenerescência de Kramers e Matriz de Espalhamento

Diante do que foi colocado na sub-seção anterior, podemos observar consequências notáveis para as funções de onda típicas e para aspectos fundamentais da mecânica quântica. A primeira consequência da presença de simetria de reversão temporal em um sistema é um vínculo sobre os tipos de funções de onda permitidas: na presença dessa simetria discreta, todo estado com spin inteiro pode ser descrito por uma função de onda real. Como a matriz de espalhamento S relaciona estados de entrada e de saída dentro da cavidade caótica, então, na presença de simetria de reversão temporal, S pode ser totalmente descrita por entradas reais. Como a matriz de espalhamento deve ser também unitária, então S é simétrica. Estados de spin inteiro que não têm simetria de reversão temporal são descritos por funções de onda complexas e a matriz de espalhamento fica simplesmente complexa e unitária.

Para sistemas com spin $1/2$, vimos que a simetria $SU(2)$ impõe rotações com estados de $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}/2$ e auto-valores $\hbar/2$. Além disso, o operador de momento angular deve ser ímpar com respeito à simetria de reversão temporal. Em particular, o operador $\vec{J}$ de momento angular de spin satisfaz $T\vec{J}T^{-1} = -\vec{J}$. Portanto, para descrever o

estado com spin $1/2$, devemos representar o operador de reversão temporal na base de auto-estados de spin. Um auto-estado de autovalor positivo de $\vec{J} \cdot \hat{n}$ fica, então, representado por

$$|\hat{n}; +\rangle = e^{-i\sigma_z\alpha/2} e^{-i\sigma_y\beta/2} |+\rangle, \quad (5.22)$$

onde α e β são coordenadas de $\hat{n}$ em ângulos polar e azimutal, respectivamente. Aplicando o operador de reversão temporal na equação anterior, obtém-se

$$T|\hat{n}; +\rangle = e^{-i\sigma_z\alpha/2} e^{-i\sigma_y\beta/2} T|+\rangle = \mathcal{P}|\hat{n}; -\rangle, \quad (5.23)$$

onde usamos que o operador de reversão temporal, aplicado no lado direito da equação, inverte o estado de spin, considerando a paridade ímpar. $\mathcal{P}$ é uma fase adquirida na rotação. O estado de spin invertido tem uma diferença de ângulo azimutal de π , de maneira que podemos escrever

$$|\hat{n}; -\rangle = e^{-i\sigma_z\alpha/2} e^{-i\sigma_y(\pi+\beta)/2} |+\rangle, \quad (5.24)$$

Substituindo a equação (5.24) na equação (5.23) e notando que um operador unitário arbitrário é escrito como $U\mathcal{C}$, obtemos que o operador de reversão temporal, na base σ_3 , satisfaz $T = \mathcal{P}e^{-i\pi\sigma_y/2}\mathcal{C} = -i\mathcal{P}\sigma_y\mathcal{C}$. Esse resultado é muito importante e mostra também que o operador de reversão temporal satisfaz a seguinte relação

$$\begin{aligned} T^2(\alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle) &= T(\mathcal{P}\alpha_1^*|-\rangle - \mathcal{P}\alpha_2^*|+\rangle) \\ &= -\mathcal{P}\mathcal{P}^*(\alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle) \\ &= -(\alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle), \end{aligned} \quad (5.25)$$

ou seja, $T^2 = -1$. Como podemos perceber, as entradas das matrizes de espalhamento para partículas de spin $1/2$ podem ser representadas por matrizes 2×2 . Então, a matriz de espalhamento geral terá ordem $2N \times 2N$, onde N é o número total de canais abertos. As entradas 2×2 da matriz S satisfazem propriedades de simetria de $SU(2)$. A álgebra dessa simetria será apresentada em termos de quaternions na sub-seção seguinte.

Uma das principais consequências não-triviais das propriedades do operador anti-unitário T é a *degenerescência de Kramers*. Vamos supor um estado $|\Psi\rangle$ descrito por um hamiltoniano H que comuta com T . Em um mesmo nível de energia está o estado $T|\Psi\rangle$. Vamos supor que esses estados são iguais, ou seja, diferem no máximo por uma fase, de maneira que $T|\Psi\rangle = \mathcal{P}|\Psi\rangle$. Sendo verdadeira a hipótese, então seria satisfeita a equação $T^2|\Psi\rangle = \mathcal{P}\mathcal{P}^*|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, ou seja, $T^2 = 1$, o que, como foi explicitamente demonstrado, seria absurdo para estados com spin $1/2$. Assim, *existem dois estados diferentes com a mesma energia E para sistemas com simetria*

de reversão temporal. Operadores com simetria par (por exemplo, o campo elétrico) comutam com o hamiltoniano e não quebram a degenerescência. Operadores com simetria ímpar, como o campo magnético ou momento linear, não comutam com o hamiltoniano e geram a quebra de simetria de reversão temporal e da degenerescência de Kramers.

5.3.2 Quatérnions

A álgebra de quaternions foi inventada por William Rowan Hamilton e forma uma generalização dos números complexos. Existem muitas referências sobre o tema, mas aqui vamos nos restringir ao que dele é necessário para o estudo, seguindo as referências [80] e [81]. Define-se quatérnions usando-se a relação $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. A consequência mais notável da álgebra de quatérnions é a não-comutatividade dos elementos da base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. A representação mais comum dos quatérnions é feita em termos das matrizes de Pauli usando-se a conexão $\mathbf{i} = i\sigma_1$, $\mathbf{j} = i\sigma_2$, $\mathbf{k} = i\sigma_3$.

Com as motivações já estabelecidas, vamos escrever uma matriz H genérica de ordem $2N \times 2N$ com entradas quaterniônicas, que podem ser escritas na base ordenada $\{\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ como

$$H_{ij} = q_{ij}^{(0)} \mathbf{1} + i\vec{q}_{ij} \cdot \vec{\sigma}, \quad (5.26)$$

onde $i, j \in \{1, N\}$ são os índices de entrada da matriz H e $\vec{q}_{ij} = (q_{ij}^{(1)}, q_{ij}^{(2)}, q_{ij}^{(3)})$ é um vetor com coeficientes complexos da combinação linear quaterniônica. A matriz identidade tem ordem 2×2 e as matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

As matrizes de Pauli são idempotentes e satisfazem à álgebra de spin $\{\sigma_i, \sigma_j\} = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, com ϵ_{ijk} denotando o tensor de Levi-Civita. O conjugado complexo quaterniônico H_{ij}^* e o conjugado hermitiano $H_{ij}^\dagger$ são definidos como

$$\begin{aligned} H_{ij}^* &= q_{ij}^{(0)*} \mathbf{1} + i\vec{q}_{ij}^* \cdot \vec{\sigma} = \sigma_2 H_{ij}^* \sigma_2, \\ H_{ij}^\dagger &= q_{ij}^{(0)*} \mathbf{1} - i\vec{q}_{ij}^* \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se uma entrada da matriz satisfaz $H_{ij}^* = H_{ij}$, então o quaternion H_{ij} é chamado de real. Portanto, se uma matriz H é real e anti-simétrica, então teremos $H^* = -H$. Definimos também o dual de um quaternion pela relação $H_{ij}^R = q_{ij}^{(0)*} \mathbf{1} - i\vec{q}_{ij}^* \cdot \vec{\sigma}$, o qual satisfaz a relação $H_{ij}^R = \sigma_2 H_{ij}^T \sigma_2$, com a operação de transposição denotada por

T . Dadas duas matrizes quaterniônicas H e K , podemos separá-las em suas porções múltiplas da identidade, H_1 e K_1 , e as múltiplas das matrizes de Pauli, H_σ e K_σ , como $H = H_1 + H_\sigma$ e $K = K_1 + K_\sigma$, respectivamente. Formando um vetor com os coeficientes da parcela das matrizes de Pauli, $\vec{K}_\sigma$ e $\vec{H}_\sigma$, podemos representar o produto quaterniônico de duas matrizes como

$$HK = H_1K_1 - \vec{H}_\sigma \cdot \vec{K}_\sigma + H_1\vec{K}_\sigma + K_1\vec{H}_\sigma + \vec{H}_\sigma \times \vec{K}_\sigma. \quad (5.29)$$

Essas definições serão fundamentais para o que se segue nas seções seguintes com cálculos que envolvem matrizes S com entradas quaterniônicas.

5.4 Formalismo de Matriz de Espalhamento

Nas referências [51, 53] e no capítulo sobre teoria de circuitos, apresenta-se uma descrição intuitiva para a estatística de contagem de carga transferida (ECCT) por meio de uma cavidade caótica acoplada a dois terminais, indexados por $p = 1, 2$, com N_1 e N_2 denotando o número de canais de espalhamento abertos nos guias 1 e 2, respectivamente. Nesta seção, usaremos tal resultado para a descrição da ECCT na teoria de matrizes aleatórias. Como descrito, a função geratriz dos cumulantes é dada por

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \int dS \Omega^{(\beta)}(\vec{\phi}, S) P^{(\beta)}(S), \quad (5.30)$$

onde $P^{(\beta)} \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-\beta(N_1+N_2-1+2/\beta)}$ é o núcleo de Poisson, dS é a medida de Haar sobre o grupo unitário apropriado, e também definimos o vetor $\vec{\phi} \equiv (\phi_0, \phi_{0\beta}, \phi_1, \phi_{1\beta})$, com $\phi_{0\beta} = \phi_2 \delta_{\beta,4}$ e $\phi_{1\beta} = \phi_3 \delta_{\beta,1}$ sendo campos escalares. O núcleo de integração é dado na referência [50]

$$\Omega^{(\beta)}(\vec{\phi}, S) = \prod_{\sigma=\pm} \det \left(\frac{1 - \sin^2(\phi_{0\sigma}^\beta/2) t t^\dagger}{1 + \sinh^2(\phi_{1\sigma}^\beta/2) t t^\dagger} \right). \quad (5.31)$$

A matriz de espalhamento e sua média são dados, conforme descrito no capítulo anterior, por

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

onde r, r' and t, t' são, respectivamente, as matrizes de reflexão e de transmissão da cavidade caótica. Podemos escrevê-las em termos dos coeficientes de transmissão

como $r_p = \text{diag}(\sqrt{1 - T_{p1}}, \dots, \sqrt{1 - T_p})$, onde p é um índice do terminal que suporta N_p canais abertos. Os cumulantes da estatística de contagem são dados por

$$q_{l+1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\epsilon}{2} \frac{d}{d\epsilon} \right)^l \frac{\epsilon^2 I^{(\beta)}(\phi)}{\sin(\phi)} \Big|_{\cos(\phi/2)=\epsilon}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (5.33)$$

onde $I^{(\beta)}(\phi)$ faz o papel da pseudo-corrente em teoria quântica de circuitos. Podemos escrever

$$I^{(\beta)}(\phi) = -2^{m_\beta} \frac{\partial \Psi^{(\beta)}(\phi)}{\partial \phi_{0+}^\beta} \Big|_{\vec{\phi}=(\phi, \phi, i\phi, i\phi)}, \quad (5.34)$$

onde $\phi_{0\sigma}^\beta \equiv \phi_0 + \sigma \phi_{0\beta}$, $\sigma \in \{+, -\}$. Por exemplo, a média dos dois primeiros cumulantes adimensionais, condutância e potência do ruído de disparo, no espaço de matrizes aleatórias, podem ser propriamente escritas como

$$\langle g \rangle \equiv q_1 = \langle \text{Tr} [tt^\dagger] \rangle, \quad (5.35)$$

$$\langle p \rangle \equiv q_2 = \langle \text{Tr} [tt^\dagger(1 - tt^\dagger)] \rangle. \quad (5.36)$$

Vamos fixar t como o bloco de transmissão de ordem $N_2 \times N_1$ da matriz S de ordem $N \times N$, com $N = N_1 + N_2$. Esse bloco de transmissão pode ser escrito de maneira mais conveniente em termos de matrizes de projeção, de modo que $t = W_2 S W_1^\dagger$, onde W_1 é uma matriz $N_1 \times N$ com $(W_1)_{ij} = \delta_{i,j}$, e W_2 é uma matriz $N_2 \times N$ com $(W_2)_{ij} = \delta_{i+N_1,j}$ [61].

Como vimos, médias em teoria de matrizes aleatórias envolvem integração na medida de Haar. Usamos o método diagramático, descrito no capítulo anterior e na referência [7], para extrair médias no limite semiclássico. Iniciamos definindo a parametrização de estube [82] para introduzir o efeito das barreiras, campo magnético e espalhamento spin-órbita. O estube pode ser pensado como uma ferramenta matemática efetiva que garante a possibilidade de integrar no grupo unitário usando-se o método diagramático. Como vimos, para partículas com spin 1/2, a matriz de espalhamento S é unitária com entradas quaterniônicas [22]. No modelo de estube, podemos parametrizar a matriz S como

$$S = TU(1 - Q^\dagger \Re Q U)^{-1} T^\dagger \quad (5.37)$$

onde U é uma matriz aleatória unitária $M \times M$, que descreve o espalhamento na cavidade caótica, tomada dos ensembles circulares de Dyson, e a matriz T , de ordem $N \times M$, tem informações sobre as barreiras de tunelamento. A matriz Q , de ordem $(M - N) \times M$, é uma matriz de projeção, satisfazendo $Q_{ij} = \delta_{i+N,j}$. As entradas

quaterniônicas das matrizes U , T e Q podem ser escritas proporcionais a matrizes $\mathbf{1}_2$ de ordem 2×2 . Os parâmetros externos são introduzidos no estube mediante a matriz de espalhamento quaterniônica $\mathfrak{R}$, de ordem $(M - N) \times (M - N)$, definida como

$$\mathfrak{R}(B_{\perp}, \tau_{SO}) = \exp \left[-i \left(\frac{\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO})}{M} + iV\mathbf{1}_2 \right) \right], \quad (5.38)$$

onde $\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO})$ é uma matriz quaterniônica aleatória de ordem $(M - N) \times (M - N)$, carregando informação sobre as quebras de simetrias. A presença de barreiras com transparências arbitrárias na interface entre a cavidade caótica e os guias pode ser levada em conta mediante a matriz sub-unitária V . Para usar a parametrização de estube, devemos assegurar que o tempo de permanência (“dwell time”) da cavidade caótica é muito maior que o tempo de permanência do estube. Além disso, em uma dinâmica universal, o tempo ergódico deve ser muito menor que o tempo de permanência dentro da composição cavidade e estube juntos e o tempo de Ehrenfest deve tender a zero. Esses fatos significam que os parâmetros externos estão inseridos apenas na matriz de espalhamento que caracteriza o estube, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(B_{\perp}, \tau_{SO})$, e que o espaço de fase do sistema composto será visitado totalmente antes que a corrente saia para os guias quando $M \gg N$.

Com o intuito de tornar claro o método, vamos iniciar considerando o caso de contatos ideais, para o qual o número de diagramas é drasticamente reduzido. O caso de contatos ideais equivale a tomar $V = 0$ na equação (5.38). Além disso, considere-se também o limite semiclássico para o qual $M \rightarrow \infty$ e a seguinte expansão da matriz $\mathfrak{R}(B_{\perp}, \tau_{SO})$ pode ser executada

$$\mathfrak{R}(B_{\perp}, \tau_{SO}) = \mathbf{1} - i \frac{\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO})}{M} - \left(\frac{\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO})}{M} \right)^2 + \mathcal{O}(M^{-3}). \quad (5.39)$$

A matriz $\mathfrak{R}(B_{\perp}, \tau_{SO})$ com termos até segunda ordem em $1/M$ será usada ao longo dos cálculos.

Vamos considerar, primeiro, o caso da condutância decomposta em termos da parte clássica conhecida e da parte de correção de localização fraca, como segue

$$g = 2 \frac{N_1 N_2}{N} - \text{Tr}(SCS^{\dagger}C), \quad (5.40)$$

onde o traço da equação anterior deve ser efetuado sobre o espaço de canais e o fator 2 no termo semiclássico ocorre devido à presença de spin. A matriz C de projeção é definida como

$$C = \begin{pmatrix} \frac{N_2}{N} \mathbf{1}_{N_1} & 0 \\ 0 & -\frac{N_1}{N} \mathbf{1}_{N_2} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Vamos denotar os índices dos N canais abertos por letras romanas e os índices de spin por letras gregas. Tomando o limite semiclássico (grande número de canais abertos), podemos expandir a equação (5.40), seguindo a maneira usual do método diagramático, e obter

$$\langle S_{ij;\rho\sigma}(B_{\perp}, \tau_{SO}) S_{kl;\mu\nu}^*(B_{\perp}, \tau_{SO}) \rangle = \sum_{m,n \geq 1}^{\infty} \langle f_{m,n} \rangle, \quad (5.42)$$

onde

$$f_{m,n} = \left[L (U Q R Q^{\dagger})^{m-1} U T \right]_{ij;\rho\sigma} \left[T^* U^* ((Q^{\dagger})^* R^* Q^* U^*)^{n-1} L^* \right]_{kl;\mu\nu}. \quad (5.43)$$

As matrizes que definem $f_{m,n}$ são $R \equiv R(B_{\perp}, \tau_{SO})$ de ordem $(M - N) \times (M - N)$ que insere no sistema o efeito dos campos de espalhamento. A matriz U define o espalhamento na cavidade caótica pura, tem ordem $M \times M$ e carrega as simetrias dos ensembles puros de Wigner-Dyson. As matrizes $L = T^{\dagger}$ e Q são projetores de ordem $N \times M$ e $(M - N) \times M$, respectivamente, com entradas definidas por $T_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{1}$ e $Q_{ij} = \delta_{i+N,j} \mathbf{1}$. Devemos lembrar que o estube é uma protuberância que contem os campos externos e não deve afetar, drasticamente, o espaço de fase e as escalas de tempo características da cavidade caótica. Dentre todos os diagramas, os que contribuem para o termo principal da correção quântica são os da figura (5.2), representando os difusons (diagramas escadas) e os cooperons (diagramas maximamente cruzados). Note que efetuaremos, primeiro, um traço no espaço de canais e, em seguida, um traço no espaço de spin, caracterizado pelos índices gregos. Cada ponto do diagrama representa um índice do espaço de canais e, agregado a ele, um índice do espaço de spin a ser contraído posteriormente. Isso pode ser visto na figura (5.2) e o resultado final do traço no espaço de canais gera a média

$$\langle S_{ij;\rho\sigma}(B_{\perp}, \tau_{SO}) S_{kl;\mu\nu}^*(B_{\perp}, \tau_{SO}) \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathcal{D}_{\rho\sigma;\mu\nu} + \delta_{il} \delta_{jk} (\mathcal{T} \mathcal{C} \mathcal{T})_{\rho\sigma;\mu\nu}, \quad (5.44)$$

onde $\mathcal{D}$ é a contribuição do diagrama difuson, enquanto $\mathcal{C}$ corresponde à contribuição do diagrama cooperon. Note-se que o termo $\mathcal{T} = \mathbf{1} \otimes \sigma_2$ no termo algébrico do cooperon é associado à inversão da parte inferior do diagrama maximamente cruzado.

O diagrama difuson contém a parcela f_{UU} , já explicada no capítulo anterior, de maneira que o termo $\mathcal{D}_{\rho\sigma;\mu\nu}$ fica escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sum_{n=0}^{\infty} (M \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{-n-1} [\text{Tr}(R \otimes R^{\dagger})]^n \\ &= \frac{1}{M \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \text{Tr}(R \otimes R^{\dagger})}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

O diagrama cooperon também contém f_{UU} e, com as devidas modificações, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \sum_{n=0}^{\infty} (M\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{-n-1} [\text{Tr}(R \otimes R^*)]^n \\ &= \frac{1}{M\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \text{Tr}(R \otimes R^*)}.\end{aligned}\quad (5.46)$$

Usando a operação de “backward multiplication”, definida como $(\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_k \otimes \sigma_l) = (\sigma_i \sigma_k) \otimes (\sigma_l \sigma_j)$, e a expansão da matriz R até segunda ordem (até onde essa matriz contribui com a primeira correção quântica), mostramos que o diagrama difuson não contribui e que a condutância com a correção de localização fraca fica escrita inteiramente em termos do diagrama cooperon da seguinte forma

$$\langle g \rangle = 2 \frac{N_1 N_2}{N} - \frac{N_1 N_2}{N} \sum_{\mu, \nu} (\mathcal{TCT})_{\mu\nu; \mu\nu}. \quad (5.47)$$

Inserindo o modelo hamiltoniano específico do problema na equação anterior, tem-se, imediatamente, a correção de localização fraca para a condutância. Nas seções seguintes, faremos esse cálculo para a condutância e para a potência do ruído de disparo, já incluindo o efeito das barreiras com o modelo hamiltoniano isotrópico resultante do hamiltoniano de Dirac com o termo de correção de Pauli. Além do termo de Pauli, responsável pelo espalhamento spin-órbita, colocaremos o campo magnético mediante o potencial vetor presente no acoplamento minimal.

5.4.1 Hamiltoniano Efetivo

O crossover entre ensembles de Dyson pode ser apropriadamente descrito mediante vários hamiltonianos em teoria de matrizes aleatórias. Estudaremos, nesta seção, o crossover que envolve o hamiltoniano do sistema isotrópico com termo de Pauli e na presença de campo magnético. O campo magnético, inserido via acoplamento minimal, ou seja, visto em termos do efeito do potencial vetor correspondente, gera uma quebra gradual da simetria de reversão temporal. A presença do termo de Pauli já descrito em seção anterior, garante o crossover para o ensemble simplético. A referência [83] exhibe muitas aplicações para esse hamiltoniano isotrópico com acoplamento minimal que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}H &= H_0 + u(\vec{x}), \\ H_0 &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + V(\vec{x}) + H_{SO}(\vec{x}),\end{aligned}\quad (5.48)$$

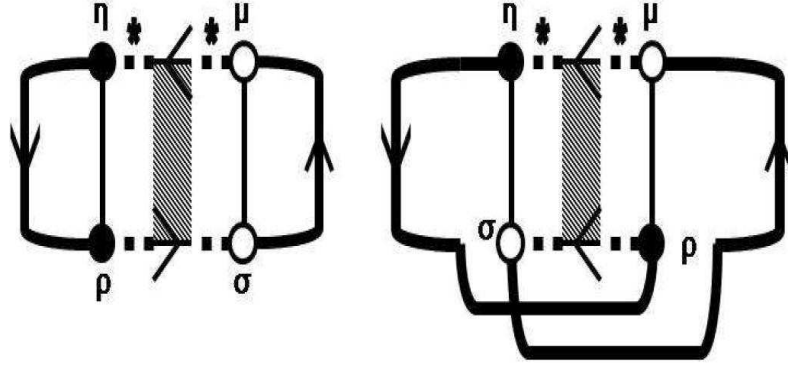


Figura 5.2: O diagrama à esquerda representa os modos difusons da cavidade caótica com termo de espalhamento spin-órbita, ou seja, carregando os índices gregos de spin além dos pontos usuais representando índices do espaço de canais. O diagrama difuson contém o termo f_{UU} . O diagrama à direita representa os modos cooperons e também carrega índices de spin e o termo f_{UU}

onde $u(x)$ é um potencial aleatório que modela a dinâmica caótica e é responsável por tornar isotrópica a função distribuição eletrônica. O hamiltoniano H_0 contém termos de energia cinética para o momento livre invariante de calibre com acoplamento minimal $\vec{p} - e\vec{A}$, onde $\vec{p}$ é o momento canônico e $\vec{A}$ é o potencial vetor que descreve os efeitos orbitais do campo magnético. Note que estamos descartando correções relativísticas para a parte cinética livre. O potencial $V(x)$ caracteriza os contatos entre a cavidade caótica e as barreiras nas junções de tunelamento. Finalmente, o termo $H_{SO}(\vec{x})$ caracteriza o acoplamento spin-órbita do spinor no limite não-relativístico. O potencial vetor $\vec{A}$ é tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, onde $\vec{B}$ é o campo magnético perpendicular externo incidindo no sistema. Escolhemos um calibre tal que o vetor $\vec{A} = (B_{\perp}x)\hat{j}$ seja simétrico com respeito ao plano médio da cavidade, com $B_{\perp}$ denotando o módulo de $\vec{B}$. A média sobre o volume da cavidade caótica é dada, na referência [52], em termos das escalas de tempo características como $\langle A^2 \rangle \propto 1/\tau_B$, onde τ_B é o tempo de descoerência magnética. O inverso desse tempo, $1/\tau_B$, pode ser entendido como a taxa de quebra de simetria de reversão temporal. O tempo magnético pode ser escrito de acordo com o fluxo magnético Φ através da cavidade caótica como [84]

$$\frac{1}{\tau_B} = \frac{1}{\tau_{erg}} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \propto \frac{e^2 B_{\perp}^2 L^4}{\tau_{erg} \hbar^2}, \quad (5.49)$$

onde usamos a relação $\Phi \propto B_{\perp} L^2$, com L denotando o comprimento característico da cavidade caótica, e $\Phi_0 = \hbar/e$ denotando o quantum de fluxo magnético.

A porção do hamiltoniano $H_{SO}(\vec{x})$ descreve o acoplamento spin-órbita da partícula não-relativística e é dado por (ver início do capítulo) [85]

$$H_{SO}(\vec{x}) = \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{B}}, \quad \vec{\mathcal{B}} = \frac{\vec{\nabla} V_{SO}(\vec{r}) \times \vec{p}}{2m_0 c^2}, \quad (5.50)$$

onde μ_e é o momento magnético eletrônico, $\vec{\mathcal{B}}$ denota o campo magnético associado por invariância de Lorentz ao potencial escalar $V_{SO}(\vec{x})$. Seguindo a referência [83], podemos considerar $\vec{\mathcal{B}}$ como uma variável aleatória com distribuição gaussiana e $\langle \mathcal{B}^2 \rangle \propto 1/\tau_{SO}$, com τ_{SO} denotando o tempo de espalhamento spin-órbita. O inverso desse tempo, $1/\tau_{SO}$, pode ser entendido como a taxa de quebra de simetria spin-órbita.

Em sistemas mesoscópicos a temperaturas baixas, com campo magnético e acoplamento spin-órbita fracos, o modelo isotrópico pode ser usado no formalismo de matrizes aleatórias se $\tau_{SO}, \tau_B \gg \tau_{erg}$ e $\tau_{SO} \gg \tau_e$, onde τ_{erg} é o tempo de trânsito do estado dentro da cavidade caótica e τ_e é o tempo de espalhamento elástico. Como $1/\tau_{SO}$ é muito menor que a taxa de espalhamento elástico $1/\tau_e$, é necessário assegurar que não há espalhamento inelástico no sistema. Essas são as hipóteses básicas da teoria de matrizes aleatórias.

As informações contidas nas simetrias do hamiltoniano e nas escalas de tempo permitem decrever, apropriadamente, a matriz aleatória $\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO})$, equação (5.38), usando o modelo hamiltoniano isotrópico, equação (5.48), em termos de parâmetros experimentais controláveis. Os potenciais escalares aleatórios discutidos anteriormente podem ser ambos descritos por matrizes quaterniônicas aleatórias, gerando perturbações no hamiltoniano livre da cavidade caótica devido ao campo magnético perpendicular e ao acoplamento spin-órbita [86],

$$\mathcal{H}(B_{\perp}, \tau_{SO}) = ix X \mathbf{1}_2 + \frac{ia}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 A_i \sigma_i, \quad (5.51)$$

onde X e A_i ($i=1,2,3$) são matrizes reais anti-simétricas de dimensão $(M-N) \times (M-N)$ e σ_i são matrizes de Pauli. Consideramos que as entradas das matrizes são aleatórias e pertencem à distribuições com médias nulas, $\langle \text{Tr}(X) \rangle = \langle \text{Tr}(A_i) \rangle = 0$, e com variâncias dadas por $\langle \text{Tr}(XX^T) \rangle = M^2$ e $\langle \text{Tr}(A_i A_j^T) \rangle = \delta_{ij} M^2$. Usando a álgebra de quaternions e, mais especificamente, a relação entre o complexo conjugado e o conjugado hermitiano [87] de um quaternion dado por $H^* = (H^\dagger)^R$, onde H^R

é uma matriz dual com $H^R = \sigma_2 H^T \sigma_2$. Os parâmetros adimensionais x e a são as taxas de quebra de simetria de reversão temporal e de espalhamento spin-órbita, respectivamente. Nós os definimos como

$$x^2 = \frac{2\pi\hbar}{\tau_B\Delta}, \quad a^2 = \frac{2\pi\hbar}{\tau_{SO}\Delta} \quad (5.52)$$

onde Δ é o espaçamento médio de níveis..

5.4.2 Média da Condutância

Como vimos, o cálculo das médias de cumulantes da estatística de contagem de carga transferida em teoria de matrizes aleatórias envolve a integração sobre a medida de Haar. Esse procedimento foi discutido no capítulo anterior e a técnica usada nesta seção segue do método diagramático já explicado e contido na referência [7]. Para a condutância, é importante lembrar que apenas os diagramas cooperon (maximamente cruzados) são afetados pelas taxas de espalhamento magnético e spin-órbita, considerando que os diagramas difuson (escadas) não levam em conta os efeitos da simetria de reversão temporal [6].

Como exemplo, começaremos calculando a média da condutância para contatos ideais. Os diagramas difuson (escada) e cooperon (maximamente cruzados) exigem conjugações específicas. Substituindo o hamiltoniano na fórmula para R e executando as conjugações específicas de cada tipo de diagrama, obtemos, para os difusons e cooperons, respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R \otimes R^\dagger) &= (M - N)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{3}{2}a^2\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{a^2}{2}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3), \\ \text{Tr}(R \otimes R^*) &= (M - N_C)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{3}{2}a^2\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{a^2}{2}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3), \end{aligned}$$

onde $N_C = N + 2x^2$. Substituindo-se as equações anteriores nas equações (5.45) e (5.46), respectivamente, e invertendo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{2N + a^2}{2N(N + 2a^2)}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{a^2}{2N(N + 2a^2)}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3), \\ \mathcal{C} &= \frac{2N_C + a^2}{2N_C(N_C + 2a^2)}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{a^2}{2N_C(N_C + 2a^2)}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Substituindo as equações anteriores na equação (5.47) e efetuando o traço, percebemos que o termo de difusão não contribui e que o cooperon gera contribuições após tomarmos o traço da matriz $\mathcal{TC}\mathcal{T}$. Obtemos

$$\mathcal{TC}\mathcal{T} = \frac{2N_C + a^2}{2N_C(N_C + 2a^2)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{a^2}{2N_C(N_C + 2a^2)} (-\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 - \sigma_3 \otimes \sigma_3),$$

e

$$\langle g \rangle = 2 \frac{N_1 N_2}{N} - 2 \frac{N_1 N_2}{N} \left(\frac{1}{N_C + 2a^2} - \frac{a^2}{N_C(N_C + 2a^2)} \right). \quad (5.54)$$

A generalização para o caso com barreiras é tecnicamente mais complicada. Vimos que o primeiro termo da média da condutância é a contribuição clássica e é gerada pelos diagramas difusos no limite em que o número de ressonâncias na cavidade $M \rightarrow \infty$. Nesse limite, se desconsiderarmos as taxas de quebra de simetria, ou seja, ignorando-se a matriz $\mathcal{H}(B_\perp, \tau_{SO})$, a equação (5.38) simplifica para

$$\mathfrak{R} = e^{V\mathbf{1}_2}, \quad (5.55)$$

com $Q^\dagger \mathfrak{R} Q \otimes Q^\dagger \mathfrak{R}^\dagger Q = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - T^\dagger \otimes T)$, onde a matriz $T^\dagger T$ tem auto-valores de transmissão T_n . Note-se que estamos considerando, por simplicidade, canais equivalentes. Para tomar o traço, usamos a identidade $\text{Tr}(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}^\dagger) = (M - N_1 \Gamma_1 - N_2 \Gamma_2) \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$, notando que as somas são apenas sobre índices de canais. Procedendo assim, obtemos a seguinte expressão para os diagramas difusos da referência [7]

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \sum_{\rho\sigma} \{[\text{Tr}(C_1) \text{Tr}(C_2)] \mathcal{D}\}_{\rho\sigma; \sigma\rho} \\ &= 2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde $G_i = N_i T_i$, $C_i = W_i T \otimes W_i^\dagger T^\dagger$, $\text{Tr}(C_i) = G_i \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$ e

$$\mathcal{D} = [M \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \text{Tr}(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}^\dagger)]^{-1}. \quad (5.57)$$

O resultado dado pela equação (5.56) foi obtido na referência [7] e requer o uso da álgebra de quatérnions junto com a definição da “backward multiplication”,

$$(\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_k \otimes \sigma_l) = (\sigma_i \sigma_k) \otimes (\sigma_l \sigma_j), \quad (5.58)$$

como descrito na referência [62]. O fator 2 aparece devido à degenerescência de spin. A primeira contribuição para a localização fraca da média da condutância,

δg_1 , parte do uso dos diagramas difuson com a primeira correção para o peso [7] $M^{-n} \longrightarrow M^{-n} - nM^{-n-1}$, como fizemos no capítulo anterior. Procedendo dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \delta g_1 \rangle &= - \sum_{\rho\sigma} \{ [\text{Tr}(C_1) \text{Tr}(C_2)] \mathcal{D}^2 \}_{\rho\sigma; \sigma\rho} \\ &= -2 \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^2}.\end{aligned}\quad (5.59)$$

A segunda contribuição para a correção de localização fraca da condutância provém dos diagramas cooperons. O sistema com barreiras arbitrárias requer diagramas cooperon com partes escada e partes maximamente cruzadas, mas apenas as porções maximamente cruzadas são afetadas pelo espalhamento magnético e spin-órbita. As expressões para os diagramas cooperons [7] são as seguintes

$$\begin{aligned}\langle \delta g_2 \rangle &= \sum_{\rho\sigma} \{ - (M^{-3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2) \text{Tr}[F_L (\mathcal{T} f_{TT} \mathcal{T})] \text{Tr}[F_R] \\ &+ \text{Tr}[F_L (\mathcal{T} f_{UU} \mathcal{T}) F_R] \}_{\rho\sigma; \rho\sigma},\end{aligned}\quad (5.60)$$

onde o índice sobrescrito $*$ denota a conjugação complexa quaterniônica de $\mathfrak{R}$, $\mathcal{T} = \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_2$,

$$\begin{aligned}F_L &= C_1 + \text{Tr}[C_1] \mathcal{D} (\mathfrak{R}^\dagger \otimes \mathfrak{R}), \\ F_R &= C_2 + (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}^\dagger) \text{Tr}[C_2] \mathcal{D},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f_{UU} &= [M \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \text{Tr}(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}^*)]^{-1}, \\ f_{TT} &= (M \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2) \text{Tr}(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}^*) f_{UU}.\end{aligned}$$

Usando as equações (5.38) e (5.51), as regras específicas de conjugação de quatérnions e tomando o limite semiclássico, $M \longrightarrow \infty$, obtemos

$$f_{UU}^{-1} = \left(G_C + \frac{3}{2} a^2 \right) \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \frac{a^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i, \quad (5.61)$$

onde $G_C = G_1 + G_2 + 2x^2$. Somando as equações (5.56), (5.59) e (5.60), obtemos a média da condutância

$$\langle g \rangle = 2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left[1 - \frac{(G_1 \Gamma_2 + G_2 \Gamma_1)}{(G_1 + G_2)} \left(\frac{1}{G_C + 2a^2} - \frac{a^2}{G_C(G_C + 2a^2)} \right) \right], \quad (5.62)$$

Esse resultado é relevante, já que introduz informações sobre as barreiras e foi obtido de maneira independente via teoria de circuitos no capítulo anterior. O primeiro termo da equação (5.62) é o termo clássico. O segundo termo tem aspectos importantes da correção de localização fraca da condutância e o seu comportamento está descrito na figura 5.3. A recente referência [62] obtém, para contatos ideais, um resultado similar ao da equação (5.62). Nosso resultado é sutilmente diferente, já que nós usamos o modelo isotrópico mediante o hamiltoniano da equação (5.51), enquanto que o modelo anisotrópico para heteroestruturas da referência [62] usa o modelo da referência [88]. Comparando os modelos isotrópico e anisotrópico, nós vemos uma pequena diferença numérica para a condutância. A equação (5.62) mostra que a presença de barreiras gera uma supressão linear da localização fraca no limite opaco definido na referência [58], o qual consiste em tomar $T_i \rightarrow 0$ com G_i fixo, independentemente da intensidade do campo magnético e da taxa de espalhamento spin-órbita. Tal comportamento também pode ser parcialmente visto usando formalismo de trajetórias como na referência [58]. Esse efeito ocorreria devido à competição dos dois aspectos mais fundamentais da mecânica quântica: tunelamento e interferência.

5.4.3 Média do Ruído de Disparo

A média do ruído de disparo pode ser obtida usando os mesmos diagramas do capítulo anterior, os quais estão publicados na referência [67]. Usamos o resultado da subseção anterior e calculamos essencialmente a média de $\langle h \rangle = \langle \text{Tr}(tt^\dagger)^2 \rangle$ usando exatamente a mesma técnica do modelo de estube da seção 5.4.2. A contribuição semiclássica para a potência do ruído de disparo é obtida por meio dos diagramas difuson, significando que não é afetada pelos campos magnético e tampouco pelo espalhamento spin-órbita. A contribuição dos diagramas difuson para a correção da localização fraca provém, exclusivamente, dos pesos dos diagramas, como está claro na referência [67]. Para os diagramas cooperon, procedemos de maneira similar, usando as simetrias, como no cálculo da localização fraca da condutância, e seguindo a referência [67]. Considerando a modificação sutil do traço devido à álgebra quaterniônica, a sensibilidade dos diagramas cooperon aos campos externos (veja a seção 5.4.2) e somando sobre todos os diagramas difusons e cooperons que estão no capítulo anterior, obtemos o resultado

$$\begin{aligned}
\langle h \rangle = & 2G_1G_2 [(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) + 2G_2G_1(G_1 + G_2)] / [G_1 + G_2]^4 \\
& - 4G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1) \{ 4 [2(T_1G_2^3 + G_1^3T_2) + G_2G_1(G_1 + G_2) \\
& - (G_2^3 + G_1^3)] (2x^4 + a^2x^2 - a^4) x^2 + 4(G_1 + G_2) [-3(G_1^3 + G_2^3) \\
& + 6(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) - 2G_2G_1(G_1T_2 + G_2T_1) + 5G_2G_1(G_1 + G_2)] x^4 \\
& + (G_1 + G_2)^2 \{ [2(G_1^2T_2 + G_2^2T_1) - (G_1^2 + G_2^2)] a^2 + 2 [-3(G_1^3 + G_2^3) \\
& + 6(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) + 7G_2G_1(G_1 + G_2) - 4G_2G_1(G_1T_2 + G_2T_1)] \} x^2 \\
& + (G_1 + G_2)^2 [2(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) - 3G_2G_1(G_1 + G_2) + 4G_2G_1(G_1T_2 + G_2T_1) \\
& - (G_2^3 + G_1^3)] a^2 + \frac{(G_1 + G_2)}{G_C^2 (G_1 + G_2)^5 (G_C + 2a^2)^2} [2(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) \\
& + 3G_2G_1(G_1 + G_2) - 2G_2G_1(G_1T_2 + G_2T_1) \\
& - (G_2^3 + G_1^3)] [(G_1 + G_2)^2 - 2a^4] \}. \tag{5.63}
\end{aligned}$$

A potência do ruído de disparo é dada pela diferença $p \equiv g_2 = \langle g \rangle - \langle h \rangle$. Usando-se as equações (5.62) e (5.63), obtemos a equação para a correção da localização fraca do ruído de disparo, dada pela equação (5.64). As propriedades da potência do ruído de disparo serão melhor estabelecidas na próxima seção.

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle = & 2G_1G_2 [G_1G_2(G_1 + G_2) + G_1^3(1 - T_2) + G_2^3(1 - T_1)] / [G_1 + G_2]^4 \\
& + 2G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1) \{ 4 [-G_1G_2(G_1 + G_2) - 3(G_1^3 + G_2^3) \\
& + 4(G_2^3T_1 + G_1^3T_2)] (2x^4 + a^2x^2 - a^4) x^2 \\
& + 4(G_1 + G_2) [12(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) - 9(G_1^3 + G_2^3) + G_1G_2(G_1 + G_2) \\
& - 4G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1)] x^4 \\
& + 4(G_1 + G_2)^2 [4G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1) - 3(G_1^2 + G_2^2) - 2G_1G_2] a^2x^2 \\
& + 2(G_1 + G_2)^2 [12(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) - 9(G_1^3 + G_2^3) + 5G_1G_2(G_1 + G_2) \\
& - 8G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1)] x^4 \\
& + (G_1 - G_2)(G_1 + G_2) [4(G_1^2T_2 - T_1G_2^2) + 3(G_2^2 - G_1^2)] (1 - 2a^4) \\
& + (G_1 + G_2)^2 [-3(G_1^3 + G_2^3) + 4(G_1^3T_2 + G_2^3T_1) - 9G_1G_2(G_1 + G_2) \\
& + 8G_1G_2(G_1T_2 + G_2T_1)] a^2 \} \\
& / [G_C^2 (G_1 + G_2)^5 (G_C + 2a^2)^2] \}. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

O resultado dado pela equação (5.64) foi obtido no capítulo sobre teoria de circuitos usando-se um método independente: perturbação quadrática na ação de

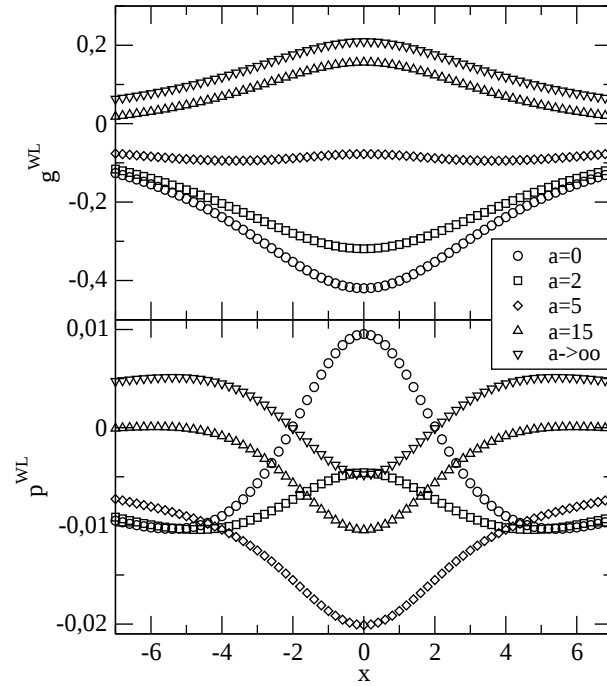


Figura 5.3: O gráfico superior mostra a média da correção de localização fraca para a condutância como função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores fixos da taxa de espalhamento spin-órbita com parâmetro a . Os gráficos inferiores mostram a média da correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo como função de x para valores fixos de a . Note-se que, quando $a = 0$ e $a \rightarrow \infty$, p^{WL} exibe uma transição supressão-amplificação como função de x (crossover COE-CUE e CSE-CUE, respectivamente). Em ambos os casos, usamos $T_1 = 0.8$, $T_2 = 0.9$ e $N_2/N_1 \approx 0,67$.

teoria quântica de circuitos. Tomando $x = a = 0$, recuperamos o resultado obtido nas referências [53, 67]. O primeiro termo da equação (5.64) é a parcela semiclássica, a qual não é afetada pelos campos externos. Os outros termos são correções de localização fraca para a potência do ruído de disparo. As equações (5.62 e 5.64) para a condutância e para a potência do ruído de disparo são os principais resultados desse trabalho e os seus aspectos fenomenológicos serão explorados na próxima seção. Note-se que o limite opaco, definido previamente, leva a uma correção de localização fraca que tende linearmente para zero. A figura 5.3 exhibe o comportamento geral dessa correção de localização fraca.

5.5 Modelo Anisotrópico de Rashba-Dresselhaus

Em heteroestruturas do tipo GaAs/GaAlAs, o acoplamento spin-órbita pode surgir devido à assimetria do potencial confinante do gás bidimensional. As duas correções mais relevantes para o hamiltoniano dessas estruturas são devido aos termos de Rashba e de Dresselhaus. Nesse problema, as correções são quadráticas para o momento, que também contém acoplamento minimal. Duas direções sofrem correções: uma na direção longitudinal (cristalina) e outra na direção transversal. Podemos escrever o hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(p_1 - eA_1 - \frac{\sigma_2}{\lambda_1} \right)^2 + \left(p_2 - eA_2 - \frac{\sigma_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] + V(\vec{r}) + \frac{1}{2} \mu_B g \vec{B} \cdot \sigma, \quad (5.65)$$

onde g é o fator giromagnético, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, e λ_i , $i = 1, 2$, são constantes de acoplamento nas direções transversais.

Partindo do modelo para o acoplamento spin-órbita devido à correção Rashba e Dresselhaus, a referência [62] calcula a correção de localização fraca e as flutuações universais, ambos para a condutância, no caso de barreiras ideais. O procedimento básico para gerar o ensemble de matrizes aleatórias correspondente ao modelo é efetuar uma transformação unitária no hamiltoniano, proposta na referência [62]. A transformação é

$$U = \exp \left(\frac{ix_1\sigma_2}{2\lambda_1} - \frac{ix_2\sigma_1}{2\lambda_2} \right). \quad (5.66)$$

Escolhemos o calibre $\vec{A} = B_3(\hat{e}_3 \times \vec{r})/2c$, onde B_3 é a intensidade de um campo perpendicular ao gás bidimensional e $\hat{e}_3$ é a direção perpendicular. Através dessa transformação unitária, o hamiltoniano fica escrito como

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{1}{2m} \left(\frac{p_2\sigma_1}{\lambda_2} - \frac{p_1\sigma_2}{\lambda_1} \right) + \frac{\mu_B g}{2} \vec{B} \cdot \sigma. \quad (5.67)$$

Para introduzir o modelo anisotrópico no formalismo de matrizes aleatórias, satisfazendo as mesmas hipóteses do modelo isotrópico, trataremos o acoplamento spin-órbita local como aleatório, isto é, $A_i = p_i/\lambda_i$, $i = 1, 2$, é aleatório. Fazendo isso, obtemos que a parte do hamiltoniano que perturba o espectro de energias no estube é dada por

$$\mathcal{H} = i\frac{x\Delta}{2\pi}X\mathbf{1} + i\left(\frac{\hbar\Delta}{2\pi\tau_{SO}}\right)^{1/2}(A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2), \quad (5.68)$$

onde A_i são matrizes aleatórias, associadas ao acoplamento spin-órbita, e X é uma matriz aleatória associada ao campo magnético. Definindo os parâmetros de espalhamento devidamente como no modelo isotrópico, podemos gerar médias seguindo o modelo de estube e o método diagramático. Para a condutância, obtemos

$$\langle g \rangle = 2\frac{G_1G_2}{G_1 + G_2} \left[1 - \frac{(G_1T_2 + G_2T_1)}{2(G_1 + G_2)} \left(\frac{1}{G_C + 2a^2} + \frac{1}{G_C + 4a^2} - \frac{2a^2}{G_C(G_C + 2a^2)} \right) \right]. \quad (5.69)$$

A equação para a potência do ruído de disparo tem muitos termos e será omitida nesta tese. No entanto, o gráfico é exibido na figura (5.5).

5.6 Conclusão

Os resultados obtidos via teoria de circuitos foram confirmados via método de estube para o modelo isotrópico. O comportamento geral das fórmulas para a condutância e potência do ruído de disparo são exibidos no capítulo 3. Nesse capítulo, também é indicada a importância física dos resultados para o modelo isotrópico e é feita uma análise dos resultados obtidos e dos efeitos tipo supressão-amplificação. Portanto, o modelo de estube e a teoria de circuitos podem funcionar como formalismos independentes para comparação de resultados.

Estendendo o método para heteroestruturas semicondutoras, percebemos que o acoplamento spin-órbita gerado pelo termo de Pauli e o gerado pelo termo de Dresselhaus-Rashba levam a resultados qualitativos bastante próximos. Na figura (5.4), exibimos os gráficos da condutância para os dois modelos e observamos que os gráficos são bastante próximos, assim como as equações correspondentes. Na figura (5.5) exibimos os gráficos da potência do ruído de disparo em função do parâmetro de espalhamento magnético para valores diferentes da taxa de espalhamento spin-órbita. Para este cumulante, observamos, novamente, gráficos bastante próximos, a despeito de terem fórmulas analíticas bastante diferentes. Percebemos, então,

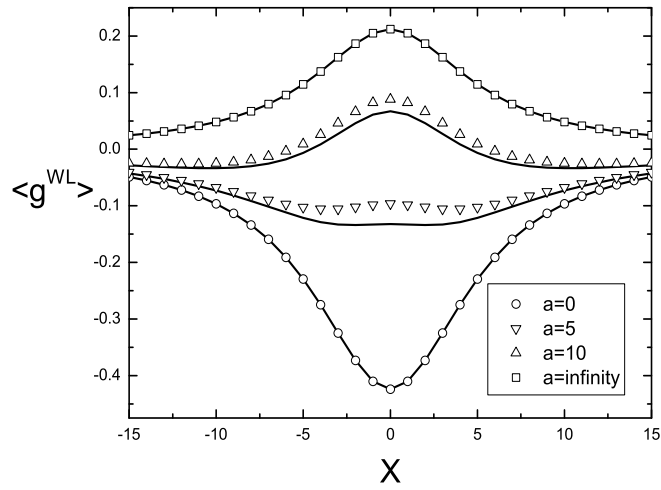


Figura 5.4: A figura exhibe os gráficos da correção de localização fraca para a condutância. Os gráficos com linhas contínuas representam a correção para o modelo isotrópico e os gráficos com linhas descontínuas exibem a correção para o modelo anisotrópico. Ambos os gráficos estão em função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores diferentes do espalhamento spin-órbita

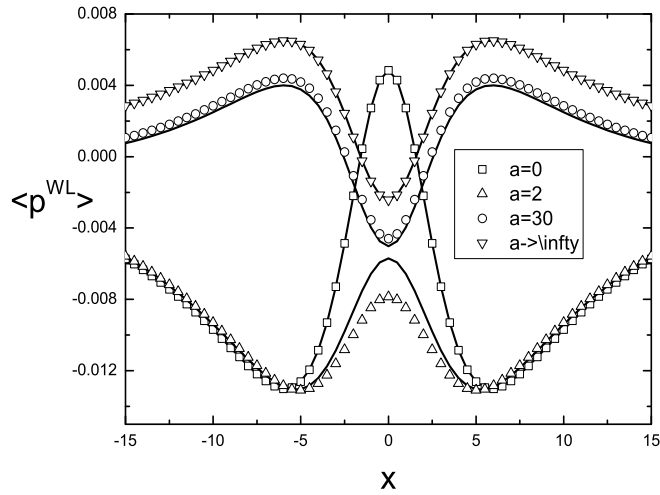


Figura 5.5: A figura exibe os gráficos da correção de localização fraca para a potência do ruído de disparo. Os gráficos com linhas contínuas representam a correção para o modelo isotrópico e os gráficos com linhas descontínuas exibem a correção para o modelo anisotrópico. Ambos os gráficos estão em função do parâmetro de espalhamento magnético x para valores diferentes do espalhamento spin-órbita

que ambos os modelos, o isotrópico (para grãos-metálicos) e o anisotrópico (para heteroestruturas), funcionam como mecanismos de quebra de simetria de reversão de rotação de spin bastante parecidos.

Capítulo 6

Conclusão

Estudamos propriedades de transporte quântico em sistemas mesoscópicos. Mais especificamente, investigamos os dois primeiros momentos da estatística de contagem, condutância e potência do ruído de disparo. Investigamos também as flutuações universais da condutância para um número arbitrário de canais abertos e para um número arbitrário de terminais. Na primeira parte do estudo, obtivemos resultados que contêm toda a informação de transporte quântico, mediante um cálculo não-perturbativo. Através deste cálculo, verificamos que o limite semiclássico, para o qual valem as aproximações perturbativas em função do número de canais abertos, é atingido rapidamente. Seguindo cálculos perturbativos, obtivemos a correção de localização fraca para a condutância e para a potência do ruído de disparo. Para o caso de uma cavidade caótica não-ideal acoplada a terminais com múltiplos canais de transporte de elétrons, fizemos o estudo em todos os ensembles clássicos de Wigner-Dyson e no regime de crossover. Conexões entre modelos da literatura foram estabelecidas. Em particular, relacionamos modelos microscópicos (reducionistas) e modelos efetivos (emergentistas).

O modelo de Mahaux-Weidenmüller, generalizado para múltiplos terminais, pode relacionar a matriz de espalhamento de uma cavidade caótica mesoscópica ao hamiltoniano quântico subjacente. Obtida a matriz de espalhamento, escrevemos uma função geratriz de cumulantes em função de suas múltiplas entradas, seguindo a abordagem de Landauer-Büttiker. Usando o procedimento de Verbaarschot, Weidenmüller e Zirnbauer (VWZ), mapeamos o espaço de matrizes de espalhamento S em um espaço de matrizes Q de ordem oito. Mostramos que o transporte quântico no espaço de matrizes Q é descrito por um modelo σ não-linear supersimétrico zero-dimensional em uma variedade homogênea. Nesse modelo, as barreiras emergem como parâmetros fenomenológicos e, portanto, os cumulantes dependem exclusi-

vamente da média das matrizes de espalhamento e do número de canais abertos. Obtivemos gráficos da condutância, potência do ruído de disparo e variância da condutância para sistemas com simetria de reversão temporal. Os resultados foram comparados com outros obtidos via simulação numérica de matrizes S . A comparação demonstra que os resultados analíticos são coerentes. Sendo assim, supersimetria pode gerar resultados não-perturbativos para cumulantes e momentos da estatística de contagem. Nesse sentido, extensões do presente trabalho para os outros ensembles de Wigner-Dyson são relevantes, considerando que o limite quântico pode ser estudado em detalhes. O cálculo com barreiras também pode ser feito em regime de crossover, inserindo matrizes com as respectivas simetrias e parâmetros de quebra de simetria.

O modelo σ não-linear supersimétrico contém simetrias contínuas. Tais simetrias determinam leis de conservação que, no limite semi-clássico, são interpretadas como teorias de circuitos. As leis de conservação são descritas por uma “pseudo-corrente” que se conserva localmente e é função de um único campo escalar, interpretado como um “pseudo-potencial”. Seguindo o formalismo de Levitov-Lesovik, vimos que a lei de conservação pode gerar todos os cumulantes da estatística de contagem no limite semi-clássico. O termo principal do cálculo perturbativo não depende do ensemble. A primeira correção quântica (ou de interferência) é determinada em função de auto-valores cooperons e difusons, segundo resultado recente de Campagnano e Nazarov. Tal correção quântica depende do ensemble, conforme o cálculo que executamos. Na presença de barreiras arbitrárias, a correção pode levar a um interessante efeito do tipo supressão-amplificação na potência do ruído de disparo. O formalismo de Campagnano e Nazarov também permite incluir espalhamento magnético e acoplamento spin-órbita em modelo isotrópico. Vimos que efeitos do tipo supressão-amplificação, importantes para modelos de descoerência, podem emergir como função das taxas de espalhamento. A inclusão de anisotropia no formalismo de Campagnano e Nazarov seria interessante, considerando a grande variedade de experimentos recentes feitos em um gás bidimensional confinado em heteroestruturas anisotrópicas. A inclusão de barreiras no estudo de cadeias e a inclusão de novos graus de liberdade também poderiam trazer contribuições. Outra perspectiva seria calcular as correções quânticas diretamente de uma expansão do modelo σ não-linear supersimétrico.

Seguindo uma transformação tipo “color-flavor” obtida por Zirnbauer, relacionamos o modelo σ não-linear supersimétrico ao cálculo no espaço de matrizes de espalhamento descritas pelo núcleo de Poisson. Tal mapa exato pode indicar uma justificativa microscópica para o núcleo de Poisson, considerando que o modelo σ provém do modelo microscópico de Mahaux-Weidemüller. No espaço de matrizes

S , executamos uma integração perturbativa no núcleo de Poisson com medida de Haar seguindo um método diagramático de integração no grupo unitário. A integração foi executada para os três ensembles puros de Wigner-Dyson. O caso de contatos ideais gera resultados não-perturbativos seguindo o método diagramático. O caso de contatos arbitrários leva a diagramas tipo cooperons e tipo difusons, com topologias análogas às dos diagramas que emergem do cálculo de “média em impurezas”. Obtivemos todos os diagramas topologicamente distintos que contribuem para a correção quântica da potência do ruído de disparo com barreiras arbitrárias. Por meio do método diagramático, confirmamos resultados obtidos via teoria de circuitos. Tais diagramas permitirão obter resultados para sistemas mesoscópicos mais sofisticados. Por exemplo, poderemos aplicá-los ao estudo da cavidade caótica acoplada a reservatórios supercondutores, ao estudo de sistemas com barreiras ativas e ao estudo de cadeias de pontos quânticos com barreiras, inclusive em regime de crossover.

Uma expansão do modelo de Mahaux-Weindemüller com dependência em energia pode gerar um modelo de estube. Os níveis de energia caracterizam as ressonâncias da cavidade caótica no regime universal. Perturbações nesses níveis de energia podem ser vistas como “protuberâncias” ou estubes da cavidade caótica. O efeito do estube é um pequeno aumento do espaço de fase do sistema e o consequente mecanismo de descoerência. A inserção de campos externos no sistema pode ser vista como ampliações do estube ou perturbações nas energias da cavidade caótica. Perturbações desse tipo afetam a matriz de espalhamento. Executamos cálculos seguindo modelos hamiltonianos específicos que perturbam o estube e contêm campos externos. Em escalas características, consideramos as flutuações de tais campos através de ensembles de matrizes aleatórias. Fizemos médias no ensemble de matrizes seguindo o método diagramático e obtivemos as contribuições dos campos externos à correção de localização fraca. Nesse caso, os diagramas que contribuem são os cooperons. Confirmamos os resultados obtidos via teoria de circuitos para o modelo isotrópico, que tem termo de quebra de simetria de rotação de spin devido a Pauli. Estendemos o cálculo para o caso de heteroestrutura anisotrópica com barreiras na presença de mecanismo de quebra de rotação do tipo Rashba-Dresselhaus. Mostramos que os mecanismos de quebra tipo Pauli e tipo Rashba-Dresselhaus levam a correções de localização fraca qualitativamente próximas para a condutância e para a potência do ruído de disparo. Extensões do método de estube para outras heteroestruturas ou outras configurações de campos externos podem gerar estudos interessantes. Cálculos de correlação, com dependência explícita em energia, também seriam desejáveis como extensão do método.

Apêndice A

Fórmulas e Identidades Relevantes em Super-simetria

Apresentamos aqui os resultados mais relevantes que foram usado no capítulo sobre métodos em SUSY.

A.0.1 Álgebra de Grassman

Vamos definir um conjunto finito de variáveis de Grassmann $C_G \equiv \{\chi_i; i = 1, \dots, n\}$ e a seguinte regra de multiplicação entre os objetos do conjunto

$$\{\chi_i, \chi_j\} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Uma das consequências imediatas da regra dada pela equação (A.1) é a nil-potência, ou seja, $\chi_i^2 = 0$ e a consequente linearidade polinomial de qualquer função desses objetos.

Por conveniência, vamos definir operações análogas às que são definidas para números reais ou complexos. Para isso, definamos a operação de conjugação dos elementos do conjunto C_G gerando um novo conjunto $C_G^* = \{\chi_i^*; i = 1, \dots, n\}$. Os objetos do conjunto C_G^* satisfazem, por definição, às mesmas regras do conjunto C_G . Definamos também a operação de conjugação de produtos de elementos de C_G e a conjugação do conjugado, respectivamente, como

$$\begin{aligned} (\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n)^* &\equiv \chi_1^* \chi_2^* \cdots \chi_n^*; \\ (\chi_i^*)^* &= -\chi_i. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Com as definições pouco usuais dadas pelas equações (A.2), notamos que um produto de um par de variáveis de Grassmann é efetivamente um “número” real, dado

que: $(\chi_i \chi_j)(\chi_k \chi_l) = (\chi_k \chi_l)(\chi_i \chi_j)$ (comutação) e $(\chi_i \chi_i^*)^* = \chi_i \chi_i^*$ (identidade da conjugação).

Para definir **derivadas**, vamos levar em conta que uma função f arbitrária de variáveis de Grassmann pode ser decomposta como um polinômio finito e que podemos definir um novo conjunto $\delta C_G \equiv \{\delta \chi_i; i = 1, \dots, n\}$ de variáveis de Grassmann, de maneira que podemos escrever

$$\begin{aligned} f(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_i, \dots, \chi_n) &= \sum_{\nu_i=0,1} c(\{\nu_i\}) \chi_1^{\nu_1} \chi_2^{\nu_2} \cdots \chi_i^{\nu_i} \cdots \chi_n^{\nu_n}, \\ f(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_i + \delta \chi_i, \dots, \chi_n) &= \sum_{\nu_i=0,1} c(\{\nu_i\}) \chi_1^{\nu_1} \chi_2^{\nu_2} \cdots (\chi_i + \delta \chi_i)^{\nu_i} \cdots \chi_n^{\nu_n}. \end{aligned}$$

Dadas as duas equações anteriores, concluímos que a diferença $\delta f = f(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_i + \delta \chi_i, \dots, \chi_n) - f(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_i, \dots, \chi_n)$ não depende de χ_i . A parte dessa diferença que não depende de $\delta \chi_i$ será chamada de derivada da função f . Para derivadas de f , podemos passar $\delta \chi_i$ para a direita ou para esquerda em δf e isso pode afetar o seu sinal. Então ficam definidos dois tipos de derivadas:

$$\begin{aligned} \delta f &= \delta \chi_i \frac{\partial^e f}{\partial \chi_i} \quad (\text{derivada pela esquerda}); \\ \delta f &= \frac{\partial^d f}{\partial \chi_i} \delta \chi_i \quad (\text{derivada pela direita}). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se n for par, as derivadas à esquerda e à direita são iguais e, se n for ímpar, as derivadas são diferentes. Obviamente, a derivada segunda de f depende da ordem da derivação, mantendo a seguinte propriedade

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \chi_i \partial \chi_j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial \chi_j \partial \chi_i}, \quad \forall i \neq j. \tag{A.4}$$

A **integração** de funções de variáveis de grassmann segue da definição de um novo conjunto com “diferenciais” denotado por $dC_G \equiv \{d\chi_i; i = 1, \dots, n\}$. Os elementos desse conjunto são também variáveis de Grassmann e a integração Grassmaniana é definida como

$$\begin{aligned} \int d\chi_i &= \int d\chi_i^* = 0 \\ \int \chi_i d\chi_i &= \int \chi_i^* d\chi_i^* = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Note que a definição anterior contempla todos os tipos de funções de variáveis de Grassmann, considerando que todas elas são lineares. Note também que a integral multivariada da função f geral anterior pode ser executada imediatamente

$$\int f(\chi) d\chi = c(\{\nu_i = 1\}), \quad (\text{A.5})$$

onde $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ e $d\chi = d\chi_1 \cdots d\chi_n$. Um dos corolários importantes da definição de integração grassmaniana é o que resulta de uma função gaussiana do tipo $f(\chi, \chi^\dagger) = \exp(-\chi^\dagger A \chi)$, com $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$ e A sendo uma matriz hermitiana. Nesse caso, pode-se mostrar que

$$\int f(\chi, \chi^\dagger) \prod_{i=1}^n d\chi_i \chi_i^* = \text{Det}(A). \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) é uma relação importante, considerando que variáveis reais resultariam no inverso do determinante. Tal fato é amplamente usado na literatura de supersimetria [34, 5, 48].

A.0.2 Super-Álgebra

A super-álgebra é usada para todos os objetos em espaços graduados, ou seja, aqueles que tem elementos comutantes (C) e anti-comutantes (AC) em uma mesma estrutura. Vamos definir um super-vetor Φ como um vetor com algumas entradas C e outras AC na seguinte ordem

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi \\ S \end{pmatrix}; \text{ com } \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde χ é um vetor de Grassmann e S é um vetor com números complexos. A conjugação do super-vetor segue definições usuais para vetores com números complexos e o produto interno segue a definição

$$\Phi^\dagger \Phi = \sum_{i=1}^n \chi_i^* \chi_i + \sum_{i=1}^m S_i^* S_i. \quad (\text{A.8})$$

Qualquer transformação linear no espaço graduado pode ser representada por uma matriz T tal que $\Phi = T\Phi$, o que significa que a matriz T deve ter a seguinte forma

específica para manter a estrutura do super-vetor:

$$T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

onde a, b são matrizes com entradas comutativas e α, β matrizes com entradas anti-comutativas. Denotaremos os blocos matriciais da super-matriz por $T_{ij}^{00} = a_{ij}$, $T_{ij}^{01} = \alpha_{ij}$, $T_{ij}^{10} = \beta_{ij}$, $T_{ij}^{11} = b_{ij}$. Os blocos T^{00} , T^{01} , T^{10} e T^{11} são comumente chamados de blocos “bóson-bóson”, “bóson-férmion”, “férmion-bóson” e “férmion-férmion”, respectivamente, por analogia com física de partículas elementares. Uma maneira simples de compactar a notação para a permutação no produto de entradas da matriz T é usar a relação $T_{ii'}^{\mu\mu'} T_{jj'}^{\nu\nu'} = (-1)^{(\mu+\mu')(\nu+\nu')} T_{jj'}^{\nu\nu'} T_{ii'}^{\mu\mu'}$.

O super-traço, Str , de uma super-matriz T é definido em termos de traços usuais de uma maneira apropriada

$$\text{Str}(T) = \text{Tr}(a) - \text{Tr}(b).$$

A forma do super-traço determina o super-determinante, Sdet , definido a seguir em termos de determinantes, $\det$, usuais. Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \text{Sdet}(T) &\equiv \exp(\text{Str}(\ln T)) \\ &= \text{Det}(a - \alpha b^{-1} \beta) \text{Det}^{-1}(b). \end{aligned}$$

Definido da maneira anterior, o super-determinante satisfaz todas as propriedades usuais de determinante.

O transposto de uma super-matriz A é definido de maneira que seja mantida a relação $\Phi_1^T A^T \Phi_2 = (A \Phi_1)^T \Phi_2$. Portanto, mostra-se que a transposição da matriz A é dada por

$$A^T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^T & \beta^T \\ -\alpha^T & b^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Definindo a matriz k com entradas $k_{ij}^{\mu\nu} = (-1)^\mu \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}$, obtém-se outras relações entre repetidas operações de transposição e conjugação dadas por

$$\begin{aligned} A^{TT} &= k A k, & A^{\dagger\dagger} &= A \\ A^{**} &= k A k, & \Phi^{**} &= k \Phi. \end{aligned}$$

Super-integrais podem ser definidas para todas as entradas de um super-vetor. Considere a seguinte integral de uma função f do super-vetor [5]

$$I_{nm} = \int f(\Phi) d\chi dS; \quad d\chi = \prod_{i=1}^n d\chi_i, \quad dS = \prod_{i=1}^m dS_i, \quad (\text{A.11})$$

onde as entradas comutantes estão num domínio D . A referência [5] mostra importantes consequências dessa definição. Dentre elas, podemos escrever a integral de um super-vetor Gaussiano como

$$\int \exp(-\Phi^\dagger A \Phi) d\Phi^* d\Phi = \text{Sdet}(A); \quad d\Phi^* d\Phi = d\chi d\chi^* dS dS^*. \quad (\text{A.12})$$

Pode-se usar o resultado anterior para deduzir integrais de produtos de super-vetores com a “distribuição” Gaussiana anterior. Para tal, deriva-se a equação anterior com respeito a A_{ij} e obtém-se, por exemplo,

$$\frac{\int \Phi^\dagger \Phi \exp(-\Phi^\dagger A \Phi) d\Phi^* d\Phi}{\int \exp(-\Phi^\dagger A \Phi) d\Phi^* d\Phi} = (A^{-1})_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Outras super-integrais de produtos de super-vetores com a mesma “distribuição” podem gerar resultado similar ao do teorema de Wick. Outro resultado relevante para obter, por exemplo, o ponto de sela do modelo σ não-linear, é o efeito de um deslocamento linear do super-vetor da forma $\Phi \rightarrow \Phi A^{-1} \Phi_0$ e $\Phi^\dagger \rightarrow \Phi_0^\dagger \Phi A^{-1}$, com Φ_0 sendo outro super-vetor. Nesse caso, obtém-se

$$\int \Phi^\dagger \Phi \exp(-\Phi^\dagger A \Phi - \Phi_0^\dagger \Phi - \Phi^\dagger \Phi_0) d\Phi^* d\Phi = \text{Sdet}(A) \exp(\Phi_0^\dagger A^{-1} \Phi_0). \quad (\text{A.14})$$

A.0.3 Média no Ensemble e Transformação de Hubbard-Stratonovich

Dado um ensemble de matrizes aleatórias $\mathcal{H}$ com distribuição gaussiana, temos a média

$$\left\langle \exp \left(-i \sum_{i,c} \langle \bar{\varphi}_{ic}^\mu, (H\varphi)_{ic}^\mu \rangle \right) \right\rangle_H = \langle \exp(-i \text{Tr}_\mu H \mathcal{S}) \rangle_H. \quad (\text{A.15})$$

onde Tr_μ denota o traço no espaço de níveis e fizemos o produto nesse espaço introduzindo uma matriz $N \times N$ ordinária com índices μ e ν dada por

$$\mathcal{S}(\alpha, \beta) = \sum_{i,c} \bar{\varphi}_{ic}^\mu(\beta) \varphi_{ic}^\mu(\alpha).$$

Usando o teorema de Wick e o correspondente fator combinatorial $\mathcal{N}(n) = (2n - 1)!! = (2n)!/(n!2^n)$ (número de maneira de combinar $2n$ objetos distintos em n

pares) e considerando que a distribuição é gaussiana, pode-se extrair a média no ensemble de matrizes aleatórias do lado direito da equação (A.15) diretamente

$$\begin{aligned}
\langle \exp(-i \mathbf{Tr}_\mu H \mathcal{S}) \rangle_H &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \langle [\mathbf{Tr}_\mu(H \mathcal{S})]^{2n} \rangle_H \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathcal{N}(n) [\langle (\mathbf{Tr}_\mu(H \mathcal{S}))^2 \rangle_H]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \left[\frac{\lambda^2}{N} \mathbf{Tr}_\mu(\mathcal{S}^2) \right]^n \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2N} \text{Str} \mathcal{S}^2\right), \tag{A.16}
\end{aligned}$$

onde [89] $S_{pq;ij}^{\alpha\beta} \equiv \sum_\mu \varphi_{pi}^\alpha(\mu) \bar{\varphi}_{qj}^\beta(\mu)$.

A matriz S gera um termo quártico em Φ na lagrangeana para a função geratriz. A integração direta desse termo fica intratável no espaço de super-vetores. Uma maneira de simplificar o problema é usar uma transformação de Hubbard-Stratonovich (HS), eliminando os graus de liberdade da interação quártica das partículas originais e gerando novos graus de liberdade contidos em uma supermatriz σ cujas entradas são as diádicas $\sum_\mu \phi(\mu) \bar{\phi}(\mu)$. A lagrangeana final fica decomposta em uma parte massiva, com integração direta via método de ponto-de-sela no limite em que o número de níveis é muito grande, e em uma parcela de modos de Goldstone não-massiva. Outra grande vantagem da transformação de Hubbard-Stratonovich é a redução drástica do número de graus de liberdade. Para executar essa transformação, vamos usar as referências [90], [34] e [89]. Antes disso, vamos considerar o **exemplo** mais simples de uma única variável real.

A transformação de HS foi primeiramente usada nas referências [91] e [92] para linearizar o operador densidade de uma interação do tipo muitos corpos em teorias de campos. Em uma variável, podemos escrever que

$$\exp\left(-\frac{a}{2}x^4\right) = (2\pi a)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2a} - ix^2y\right) dy,$$

onde $a > 0$ é um número real. Nesse contexto, a idéia básica da transformação de HS é reformular o problema de duas partículas interagindo em termos de partículas independentes embebidas num campo flutuante.

A versão super-matricial da integral escalar substitui termos proporcionais a S^2 , ou, equivalentemente, a $|\varphi|^4$ por termos proporcionais a $|\varphi|^2$. Defina-se

uma matriz σ de ordem 16 respeitando as mesmas simetrias de S . Vamos definir o Lagrangeano das “partículas” originais como $i\mathcal{L}_0(S) \equiv -\lambda^2 \text{Str}(S^2)/4N$ e uma translação linear da matriz S gerando o seguinte Lagrangeano

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{L}}(\sigma, S) &\equiv -i\mathcal{L}_0\left(S - i\frac{N}{\lambda^2}\sigma\right) \\ \Rightarrow i\tilde{\mathcal{L}}(\sigma, 0) &\equiv -\frac{N}{4\lambda^2}\text{Str}(\sigma^2). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Vamos construir σ de maneira que exista uma invariância de translação dada por

$$\int \exp\left(i\tilde{\mathcal{L}}(\sigma, S)\right) = 1 = \int \exp\left(i\tilde{\mathcal{L}}(\sigma, 0)\right). \quad (\text{A.18})$$

Usando as equações (A.18) e (A.17), podemos escrever a função de partição das partículas originais em termos de super-integrais

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{L}_0(S)) &= \int d\sigma \exp\left(i\tilde{\mathcal{L}}(\sigma, S) + i\mathcal{L}_0(S)\right) \\ &= \int d\sigma \exp\left(-\frac{i}{2}\text{Str}(S\sigma) - \frac{N}{4\lambda^2}\text{Str}(\sigma^2)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por outro lado, pode-se escrever que $\text{Str}(S\sigma) = \langle \bar{\varphi}, [\sigma \otimes 1_N] \varphi \rangle$, ou seja, obtém-se a versão super-matricial da transformação de HC, cuja representação integral é dada por

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2N}\text{Str}(S^2)\right) = \int d\sigma \exp\left(-\frac{N}{4\lambda^2}\text{Str}(\sigma^2) - i\bar{\varphi}(\sigma \otimes 1_N)\varphi\right). \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

Quadratura Numérica Tridimensional mediante Gauss-Legendre e Trapézios

As integrais triplas dos modelos σ anteriores não têm, em geral, solução analítica. Usando uma rotina em Fortran, pode-se gerar um procedimento de quadratura numérica de maneira a obter os gráficos exibidos nas figuras (2.2), (2.3) e (2.4). O exemplo mais simples de uma quadratura é a evolução numérica por meio de trapézios de uma integral dada por

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (\text{B.1})$$

onde $f(x)$ é uma função com singularidades removíveis no intervalo $[a, b]$. Uma possível interpretação da equação (B.1) é a sua representação como área no plano cartesiano como na figura (B.1). Podemos particionar o eixo x em intervalos iguais, de maneira que cada ponto do extremo do intervalo fique caracterizado por um índice i com coordenada $x_i = a + i * n$, onde $n = (b - a)/N$ é o tamanho do intervalo e N é o número total de partições no intervalo (a, b) . A área sob a curva $f(x)$ pode ser calculada usando retângulos que tenham altura “um pouco” acima ou um pouco abaixo da curva, de maneira que a integral numérica fica aproximada por

$$I = \sum_{i=1}^N n f(x_i). \quad (\text{B.2})$$

Essa aproximação à medida que o tamanho dos intervalos diminui, o que significa tomar o valor da função uniforme ao longo do intervalo (x_i, x_{i+1}) . Essa abordagem

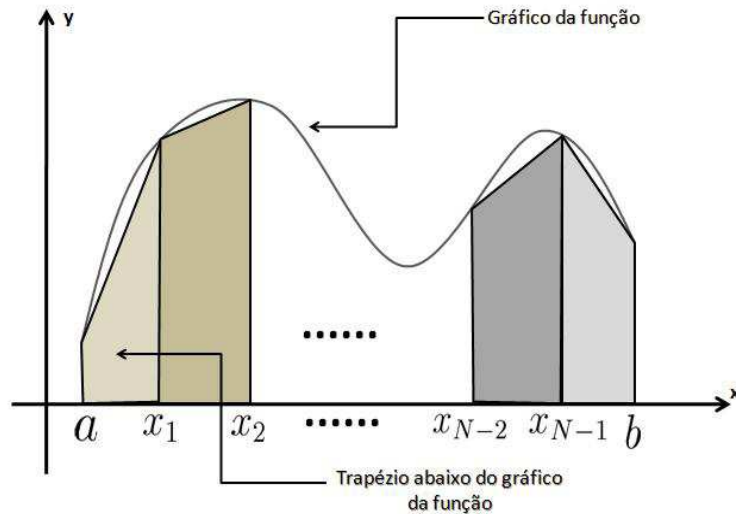


Figura B.1: Gráfico de uma função $y = f(x)$ arbitrária e trapézios abaixo do gráfico correspondente. Note que os trapézios têm bases com comprimentos iguais e que as alturas variam de acordo com os valores correspondentes de $f(x)$.

é, no entanto, muito lenta e outros métodos mais sofisticados de quadratura foram elaborados, considerando diferentes pesos para cada intervalo e intervalos que não são igualmente espaçados. O melhor método de quadratura dependerá do comportamento da função $f(x)$.

O fator geométrico R introduz singularidades algébricas nos integrandos do modelo σ , de maneira que quadraturas numéricas não podem ser executadas diretamente naquele sistema de coordenadas. Note, no entanto, que o valor numérico do integrando é finito no intervalo de definição das coordenadas $\{\lambda\}$. Isso indica que existe um sistema de coordenadas no qual é possível eliminar essas aparentes singularidades. Nós utilizamos o sistema de coordenadas da referência [93], na qual existe um estudo completo de como eliminar a maioria das singularidades, restando apenas duas singularidades nos extremos dos intervalos. Além disso, o sistema de coordenadas proposto na referência [93] torna o intervalo de integração compacto, elimina os pontos de acumulação fortes e torna o integrando suficientemente decrescente nos extremos de integração. Tal sistema é obtido pela seguinte transformação

de coordenadas

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{yx - 1 + y}{yx + 1 - y} \\ \lambda_1 &= \frac{1 + yz - xyz}{yx + 1 - y} \\ \lambda_2 &= \frac{1 - yz + xyz}{yx + 1 - y},\end{aligned}\tag{B.3}$$

onde $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$ e $z \in [0, 1]$. Permanece no fator geométrico uma singularidade removível para quadratura numérica em $y = 1$, mas isso pode ser eliminado considerando que o integrando se aproxima desse limite por um fator $\delta = 1 - y$ suficientemente pequeno. O Jacobiano da transformação de coordenadas (B.3) é dado por

$$J(x, y, z) = \left| \frac{y^2(x-1)}{(xy - y + 1)^4} \right|.\tag{B.4}$$

Como as integrais devem ser executadas entre intervalos finitos e a função tem valores altos próxima aos extremos, um método de quadratura bastante apropriado é o de Gauss-Legendre (GL). A quadratura GL é válida para intervalos compactos $[-1, 1]$. Dentre os três intervalos de integração, dois são do tipo $[0, 1]$ e um do tipo $[-1, 1]$. Os que são $[0, 1]$ podem ser estendidos, considerando que os integrandos são simétricos nessas variáveis. O método de GL faz uso de pesos w_i para cada intervalo i que são escritos em termos de polinômios de Legendre $P_i(x_i)$ da seguinte forma

$$w_i = \frac{A_{n+1}\gamma_n}{A_n P'_n(x_i) P_{n+1}(x_i)},\tag{B.5}$$

onde A_n é o coeficiente do termo x^n em $P_n(x)$ e $\gamma_n = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 = 2/(2n+1)$. Usando que $A_n = (2n)!/(2^n(n!)^2)$, obtém-se

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_i)]^2}.\tag{B.6}$$

A integral fica escrita em termos desses pesos e a convergência é bem mais rápida que no método trapezoidal. A quadratura fica escrita como

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),\tag{B.7}$$

onde o intervalo $[x_1, x_2]$ pode ser reescalado de forma que o método de Gauss-Legendre fique válido para qualquer intervalo finito.

A quadratura tridimensional usando GL pode ser obtida da unidimensional imediatamente usando o seguinte procedimento:

- Fixe o primeiro valor para a coordenada x_i e z_j , isto é, fixe $i = 1$ e $j = 1$;
- Calcule a quadratura de $f(x_1, y, z_1)$ no intervalo especificado para y ;
- Mantenha x_1 fixo e adicione n_z a z_1 , onde n_z é o tamanho do intervalo $[z_1, z_1 + n_z]$;
- Calcule a quadratura de $f(x_1, y, z_1 + n)$ no intervalo especificado para y ;
- Rode a as duas etapas anteriores para $z_{i+1} = z_i + n$ até que $z_i = z_N$, onde z_N é o extremo superior da integração em z ;
- Fixe $x_2 = x_1 + n_x$ e execute os quatro procedimentos anteriores;
- Execute os procedimentos anteriores até que $x_i = x_N$, onde x_N é o extremo superior da integração em x .

No algoritmo anterior, fixe o número de iterações para a integração em y até que a diferença percentual entre uma iteração e outra tenha um valor fixado. No caso, fixamos o valor 10^{-14} como margem para parada de iterações. Com a mudança de sistema de coordenadas, verificamos que o integrando possui pontos de acumulação fora dos extremos de integração em y . Por outro lado, a quadratura de GL “tende” a dar mais peso aos intervalos próximos aos extremos de integração. Uma maneira de corrigir esse problema é dividir a integração do hiper-cubo em camadas do eixo y . Fazemos isso executando o algoritmo descrito anteriormente várias vezes para cada camada em y . Em geral, para o problema físico descrito, é suficiente criar 10 camadas de integração. O resultado do procedimento de quadratura é o exibido nas figuras (2.2), (2.3) e (2.4).

Para verificar nossos resultados, fizemos uma comparação com aqueles obtidos mediante uma simulação por amostragem de matrizes aleatórias seguindo o procedimento descrito na referência [41]. Nessa simulação numérica, gera-se um ensemble de matrizes aleatórias seguindo o ensemble circular ortogonal e usando-se a parametrização de estube como na referência [49]. Da matriz de espalhamento, pode-se obter a matriz de transmissão e consequentemente os cumulantes. Depois de se obter várias realizações dos cumulantes, extrai-se a média e a variância dos cumulantes.

Apêndice C

Diagramas Auxiliares

Apresentamos aqui os diagramas auxiliares, figuras (C.1) e (C.2) - e as correspondentes expressões algébricas - que são usados para gerar todos os diagramas maximamente cruzados. As equações auxiliares são dadas por

$$H = W_1^2 \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) R^\dagger R R^\dagger + W_1 \text{Tr}(F_L) R^\dagger T C_2 T^\dagger + W_1 \text{Tr}(F_R) L^\dagger C_1 L R^\dagger; \quad (\text{C.1})$$

$$H_1 = \text{Tr}(F_L F_R^T) f_{UU}^2 R + W_2 \text{Tr}(F_L) \text{Tr}(F_R) f_{TU}^2 R; \quad (\text{C.2})$$

$$H_2 = W_1 \text{Tr}(F_R) f_{UU} F_L^T R + W_1 \text{Tr}(F_L) f_{UU} R F_R^T + W_1 \text{Tr}(R R^\dagger F_L^T) f_{UU}^2 \text{Tr}(F_R) R + W_1 \text{Tr}(F_L) f_{UU}^2 \text{Tr}(R^\dagger R F_R^T) R + W_1 W_2 \text{Tr}(F_L) f_{TT} f_{TU} \text{Tr}(F_R) R + W_1 W_2 \text{Tr}(F_L) f_{TT} f_{TU} \text{Tr}(F_R) R; \quad (\text{C.3})$$

$$H_3 = f_{UU} F_L^T T C_2 T^\dagger + \text{Tr}(R R^\dagger F_L^T) f_{UU}^2 T C_2 T^\dagger + W_2 \text{Tr}(F_L) f_{TT} f_{TU} T C_2 T^\dagger; \quad (\text{C.4})$$

$$H_4 = L^\dagger C_1 L F_R^T f_{UU} + \text{Tr}(R^\dagger R F_R^T) f_{UU}^2 L^\dagger C_1 L + W_2 \text{Tr}(F_R) f_{TT} f_{TU} L^\dagger C_1 L; \quad (\text{C.5})$$

e

$$K_1 = W_2 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R) f_{TT}^2 + \mathbf{Tr}(F_L F_R^T) f_{UT}^2; \quad (\text{C.6})$$

$$K_2 = \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R) f_{TT} + \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R) f_{TT}; \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} K_3 = & \mathbf{Tr}(RR^\dagger F_L^T) \mathbf{Tr}(F_R) f_{UU} f_{UT} \mathbf{Tr}(F_R) \\ & + \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(R^\dagger R F_R^T) f_{UU} f_{UT} \mathbf{Tr}(F_R) + W_2 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R) f_{TT}^2 \\ & + W_2 \mathbf{Tr}(F_L) \mathbf{Tr}(F_R) f_{TT}^2. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

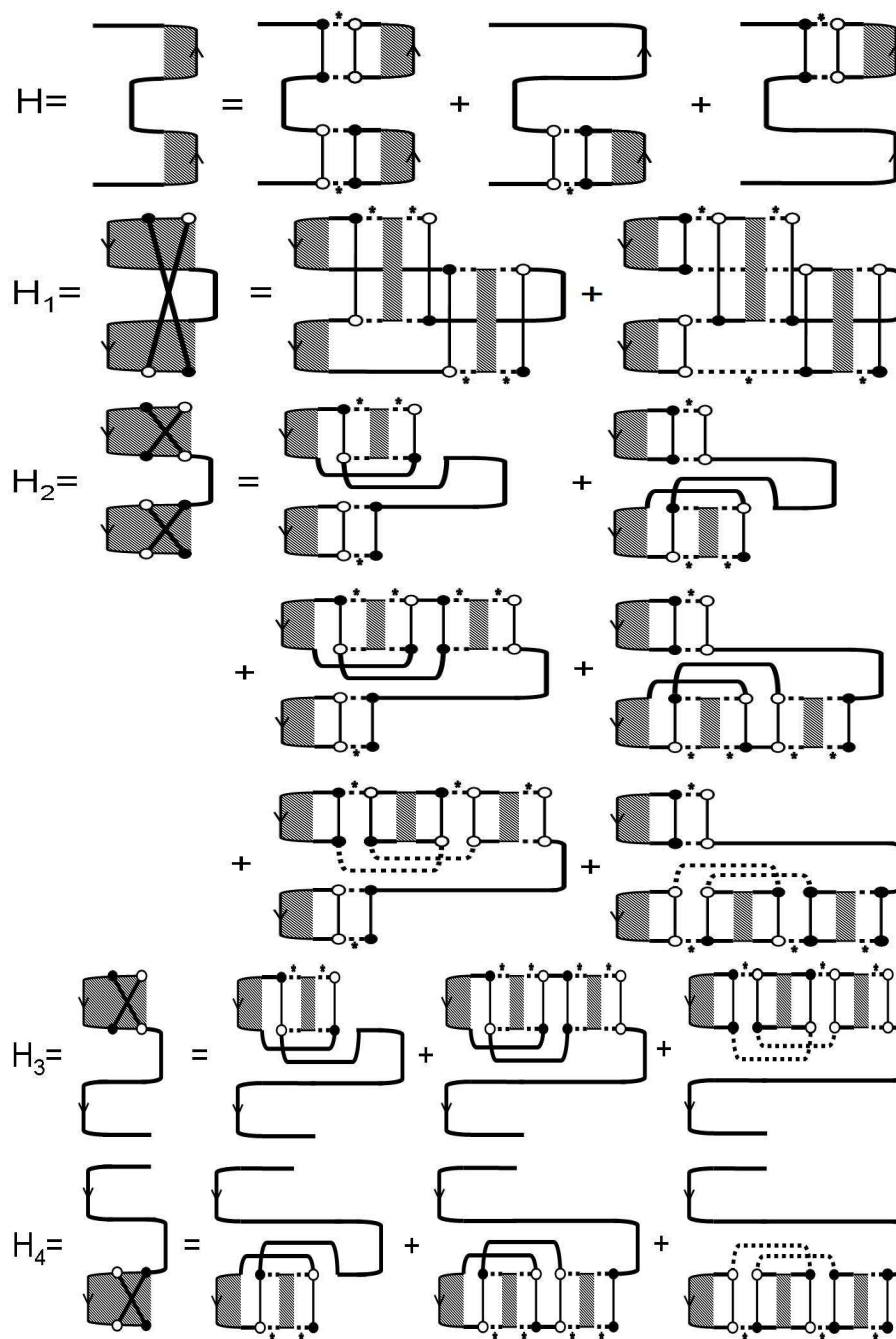


Figura C.1: Primeiro conjunto de diagramas auxiliares.

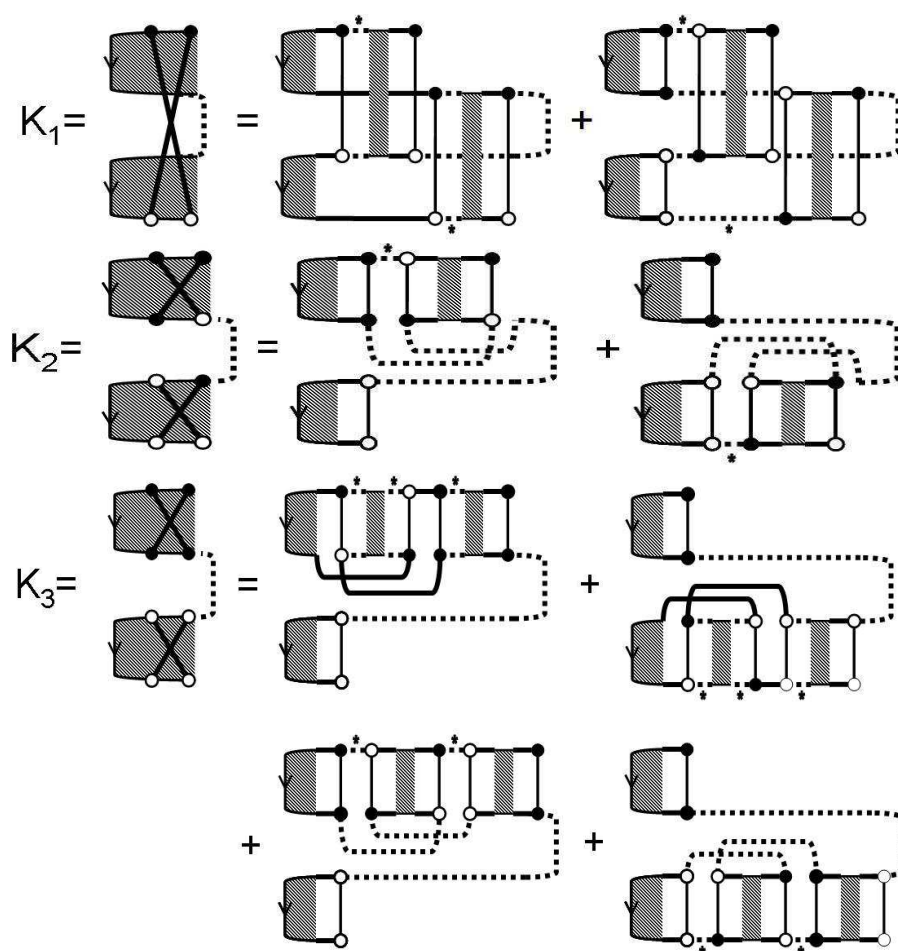


Figura C.2: Segundo conjunto de diagramas auxiliares.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Heinzl. *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*. Wiley-VCH, Berlin, 2007.
- [2] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D. C. Driscoll e A. C. Gossard. Counting statistics of single-electron transport in a quantum dot. *Physical Review Letters*, **96**:076605, 2006.
- [3] N. Bohr. Neutron capture and nuclear constitution. *Nature*, **137**:344, 1936.
- [4] S. Washburn e R.A. Webb. Aharonov-bohm effect in normal metal: Quantum coherence and transport. *Adv. Phys.*, **35**:375, 1986.
- [5] K. Efetov. *Supersymmetry in Disorder and Chaos*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] E. Akkermans e G. Montambaux. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [7] P. W. Brouwer e C. W. J. Beenakker. Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. *Journal of Mathematical Physics*, **37**:4904, 1996.
- [8] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. *Journal of Mathematical Physics*, **3**:157, 1963.
- [9] E. P. Wigner . *Proc. Canadian Mathematical Congress* . Univ. of Toronto Press, Toronto, 1957.
- [10] E. P. Wigner. Statistical properties of nuclei. *SIAM Rev.*, **9**:1, 1967.
- [11] C. E. Porter. *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*. Academic, New York, 1965.

- [12] P. A. Mello e N. Kumar. *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations*. Oxford University Press, New York, 2004.
- [13] R. Balian. Random matrices and information theory. *Nuovo Cim.*, **57**:183, 1968.
- [14] R. Landauer. Spatial variations of currentes and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM J. Res. Dev.*, **1**:223, 1957.
- [15] R. Landauer. Conductance determined by transmission: probes and quantised constriction resistance. *J. Phys.: Condens. Matter*, **1**:8099, 1989.
- [16] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer e S. Pinhas. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings. *Physical Review B*, **31**:6207, 1985.
- [17] M. Di Ventra. *Electrical Transport in Nanoscale Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [18] S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [19] P. A. Mello, P. Pereyra e N. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Annals of Physics*, **181**:290, 1988.
- [20] Th. Martin e R. Landauer. Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems. *Physical Review B*, **45**:1742, 1992.
- [21] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. *Journal of Mathematical Physics*, **3**:140, 1962.
- [22] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, Inc., 1992.
- [23] T. H. Seligman. *The Maximum Entropy Method*. Springer Berlin, Heidelberg, 1985.
- [24] L. S. Levitov e G. B. Lesovik. Charge distribution in quantum shot noise. *JETP Letters*, **58**:230, 1993.
- [25] L. Mandel e E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Pres, Cambridge, 1995.

- [26] Y. V. Nazarov. *Quantum Noise In Mesoscopic Physics*. Springer Netherlands, Netherlands, 2002.
- [27] Ya. M. Blanter e E. V. Sukhorukov. Semi-classical theory of conductance and noise in open chaotic cavities. *Physical Review Letters*, **84**:1280, 2000.
- [28] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, **109**:1492, 1958.
- [29] D. J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Phys. Rep.*, **13**:93, 1974.
- [30] T. Guhr, A. Mueller-Groeling e H. A. Weidenmüller. Random matrix theories in quantum physics: Common concepts. *Phys. Rep.*, **299**:189, 1998.
- [31] L. Schäfer e F. Wegner. Disordered system with n orbitals per site: Lagrange formulation, hyperbolic symmetry, and goldstone modes. *Z. Phys. B*, **38**, 1980.
- [32] K. B. Efetov. Supersymmetry and theory of disordered metals. *Adv. in Phys.*, **32**:53, 1983.
- [33] C. Mahaux e H. A. Weidenmüller. *Shell-model Approach to Nuclear Reactions*. North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [34] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller e M. R. Zirnbauer. Grassmann integration in stochastic quantum physics: The case of compound-nucleus scattering. *Phys. Rep.*, **129**:367, 1985.
- [35] Y. V. Nazarov e Y. M. Blanter. *Quantum Transport: Introduction to Nanoscience*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [36] Y. V. Nazarov e Y. M. Blanter. *Quantum Signatures of Chaos*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [37] Yu. V. Nazarov e D. A. Bagrets. Circuit theory for full counting statistics in multiterminal circuits. *Physical Review Letters*, **88**:196801, 2002.
- [38] A. M. S. Macêdo. Scaling theory of phase-coherent metallic conductors. *Physical Review B*, **66**:033306, 2002.
- [39] K. E. Nagaev, P. Samuelsson e S. Pilgram. Cascade approach to current fluctuations in a chaotic cavity. *Physical Review B*, **66**:195318, 2002.

- [40] S. Pilgram, A. N. Jordan, E. V. Sukhorukov e M. Büttiker. Stochastic path integral formulation of full counting statistics. *Physical Review Letters*, **90**:206801, 2003.
- [41] F. A. G. Almeida, S. Rodríguez-Pérez e A. M. S. Macêdo. Distribution of charge cumulants of a chaotic quantum dot with nonideal contacts. *Physical Review B*, **80**:125390, 2009.
- [42] D. V. Savin, H.-J. Sommers e W. Wieczorek. Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities. *Physical Review B*, **77**:125332, 2008.
- [43] M. Novaes. Full counting statistics of chaotic cavities with many open channels. *Physical Review B*, **75**:073304, 2007.
- [44] J. N. Kupferschmidt e P. W. Brouwer. Temperature and magnetic-field dependence of the quantum corrections to the conductance of a network of quantum dots. *Physical Review B*, **78**:125313, 2009.
- [45] A. M. S. Macêdo. Average conductance coefficients in multiterminal chaotic cavities. *Physical Review B*, **63**:115309, 2001.
- [46] P. Seba. Random matrix theory and mesoscopic fluctuations. *Physical Review B*, **53**:13024, 1996.
- [47] S. Albeverio, F. Haake, P. Kurasov, M. Kus e P. Seba. Random matrix theory and mesoscopic fluctuations. *Journal of Mathematical Physics*, **37**:4888, 1996.
- [48] Y. V. Fyodorov e H.-J. Sommers. Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering for systems with broken time reversal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, **38**:1918, 1997.
- [49] P. W. Brouwer. Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads. *Physical Review B*, **51**:12878, 1995.
- [50] P. W. Brouwer e K. Frahm. Quantum transport in disordered wires: Equivalence of the one-dimensional s model and the dorokhov-mello-pereyra-kumar equation. *Physical Review B*, **53**:1490, 1996.
- [51] G. C. Duarte-Filho, A. F. Macedo-Junior e A. M. S. Macêdo. Circuit theory and full counting statistics of charge transfer through mesoscopic systems: A random-matrix approach. *Physical Review B*, **76**:075342, 2007.

- [52] G. Campagnano e Yu. V. Nazarov. g_Q corrections in the circuit theory of quantum transport. *Physical Review B*, **74**:125307, 2006.
- [53] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa e A. M. S. Macêdo. Quantum interference correction to the shot-noise power in nonideal chaotic cavities. *Physical Review B*, **78**:235305, 2008.
- [54] B. Rejaei. Equivalence of the transmission-eigenvalue density in supersymmetric and scaling theories of disordered wires without time-reversal symmetry. *Physical Review B*, **53**:R13235, 1996.
- [55] S. Iida, H. A. Weidenmüller e J. A. Zuk. Statistical scattering theory, the supersymmetry method and universal conductance fluctuations. *Annals of Physics*, **200**:219, 1990.
- [56] A. D. Mirlin, A. Müller-Groeling e M. R. Zirnbauer. Conductance fluctuations of disordered wires: Fourier analysis on supersymmetric spaces. *Annals of Physics*, **236**:325, 1994.
- [57] C. W. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics*, **69**(3):527, 1997.
- [58] R. S. Whitney. Suppression of weak localization and enhancement of noise by tunneling in semiclassical chaotic transport. *Physical Review B*, **75**:235404, 2007.
- [59] S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, M. Reinwald e W. Wegscheider. Measurements of higher-order noise correlations in a quantum dot with a finite bandwidth detector. *Physical Review B*, **75**:075314, 2007.
- [60] P. Braun, S. Heusler, S. Müller e F. Haake. Semiclassical prediction for shot noise in chaotic cavities. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **39**:L159, 2006.
- [61] B. Béri e J. Cserti. Effect of symmetry class transitions on the shot noise in chaotic quantum dots. *Physical Review B*, **75**:041308(R), 2007.
- [62] P. W. Brouwer, J. N. H. J. Cremers e B. I. Halperin. Weak localization and conductance fluctuations of a chaotic quantum dot with tunable spin-orbit coupling. *Physical Review B*, **65**:081302(R), 2002.

- [63] S. Heusler, S. Müller, P. Braun e F. Haake. Semiclassical theory of chaotic conductors. *Physical Review Letters*, **96**:066804, 2006.
- [64] I. L. Aleiner e V. I. Fal'ko. Spin-orbit coupling effects on quantum transport in lateral semiconductor dots. *Physical Review Letters*, **87**:256801, 2001.
- [65] P. W. Brouwer. Dephasing in quantum chaotic transport: A semiclassical approach. *Physical Review B*, **76**:165313, 2007.
- [66] R. S. Whitney, P. Jacquod e C. Petitjean. Spin-orbit coupling effects on quantum transport in lateral semiconductor dots. *Physical Review B*, **77**:045315, 2008.
- [67] A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos e A. M. S. Macêdo. Average shot-noise power via diagrammatic method. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **43**:075101, 2010.
- [68] P. A. Mello e H. U. Baranger. Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: an information-theoretic approach. *Waves Random Media*, **9**:105, 1999.
- [69] M. R. Zirnbauer. Supersymmetry for systems with unitary disorder: circular ensembles. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **29**:7113, 1996.
- [70] C. Texier e G. Montambaux. Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires. *Physical Review Letters*, **92**:186801, 2004.
- [71] S. Samuel. *Journal of Mathematical Physics*, **21**:4061, 1980.
- [72] L. Comtet. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Dordrecht, Netherlands, 1974.
- [73] D. V. Savin e H.-J. Sommers. Shot noise in chaotic cavities with an arbitrary number of open channels. *Physical Review B*, **73**:081307, 2006.
- [74] A. F. Macedo-Junior e A. M. S. Macêdo. Brownian-motion ensembles of random matrix theory: A classification scheme and an integral transform method. *Nuclear Physics B*, **752**:439, 2006.
- [75] A. L. R. Barbosa e A. M. S. Macêdo. Diagrammatic analysis of the unitary group for double-barrier ballistic cavities: Equivalence with circuit theory. *Physical Review B*, **71**:235307, 2005.

- [76] A. M. S. Macêdo e A. M. C. Souza. Formation of fabry-perot resonances in double-barrier chaotic billiards. *Physical Review E*, **71**:066218, 2005.
- [77] J. J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley Company, 1967.
- [78] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Company, 1985.
- [79] O. Zaitsev, D. Frustaglia e K. Richter. Role of orbital dynamics in spin relaxation and weak antilocalization in quantum dots. *Physical Review Letters*, **94**, 026809, 2005.
- [80] D. V. Aleynikov e E. A. Tolkachev. *Kustaanheimo-stiefel transformation and static zero modes of dirac operator*. *High Energy Physics Los Alamos Archive/0206211v1*, 2002.
- [81] M. Tanish e G. Ozgur. Biquaternionic representations of angular momentum and dirac equation. *Acta Physica Slovaca*, **53**, 243, 2003.
- [82] M. L. Polianski e P. W. Brouwer. Scattering matrix ensemble for time-dependent transport through a chaotic quantum dot. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, **36**, 3215, 2003.
- [83] S. Chakravarty e A. Schmid. Weak localization: The quasiclassical theory of electrons in a random potential. *Physics Reports*, **140**, 193, 1986.
- [84] B. Béri e J. Cserti. Weak localization correction to the density of transmission eigenvalues in the presence of magnetic field and spin-orbit coupling for a chaotic quantum dot. *Physical Review B*, **74**, 235314, 2006.
- [85] E. I. Rashba. Spin-orbit coupling and spin transport. *Physica E*, **34**, 31, 2006.
- [86] D. A. Gorokhov e P. W. Brouwer. Combined effect of electron-electron interactions and spin-orbit scattering in metal nanoparticles. *Physical Review Letters*, **91**, 186602, 2003.
- [87] M. G. A. Crawford, P. W. Brouwer, C. W. J. Beenakker. Weak localization correction to the density of transmission eigenvalues in the presence of magnetic field and spin-orbit coupling for a chaotic quantum dot. *Physical Review B*, **67**, 115313, 2003.
- [88] I.L. Aleiner e V. I. Fal'ko. Spin-orbit coupling effects on quantum transport in lateral semiconductor dots. *Physical Review Letters*, **87**:256801, 2001.

- [89] J. A. Zuk. Introduction to the supersymmetry method for the gaussian random-matrix ensembles. *Condensed Matter Los Alamos Archive/9412060v3*, 1996.
- [90] A. Pruisken e L. Schäfer. Participation ratio in the nonlinear σ -model representation of localization. *Nuclear Physics A*, **200**:20, 1982.
- [91] R. L. Stratonovich. On a method of calculating quantum distribution functions. *Soviet Physics Doklady*, **2**:416, 1958.
- [92] R. L. Stratonovich. Calculation of partition functions. *Physical Review Letters*, **3**:77, 1959.
- [93] Z. Pluhar, H.A. Weidenmüller, J.A. Zuk, C.H. Lewenkopf e F.J. Wegner. Crossover from orthogonal to unitary symmetry for ballistic electron transport in chaotic microstructures. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **243**:1, 1995.