UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VICTOR AUGUSTO DE SOUZA ALVES

FUNÇÕES DE QUATRO PONTOS NA TEORIA CONFORME D1-D5 ENVOLVENDO O OPERADOR DE DEFORMAÇÃO

Recife

2025

VICTOR AUGUSTO DE SOUZA ALVES

FUNÇÕES DE QUATRO PONTOS NA TEORIA CONFORME D1-D5 ENVOLVENDO O OPERADOR DE DEFORMAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Alves Lima

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Alves, Victor Augusto de Souza.
Funções de quatro pontos na teoria conforme D1-D5 envolvendo o operador de deformação / Victor Augusto de Souza Alves. - Recife, 2025.
126 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.
Orientação: André Luiz Alves Lima.
Inclui referências e apêndices.

1. CFT D1-D5; 2. Funções de correlação; 3. Orbifold simétrico. I. Lima, André Luiz Alves. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

VICTOR AUGUSTO DE SOUZA ALVES

FUNÇÕES DE QUATRO PONTOS NA TEORIA CONFORME D1-D5 ENVOLVENDO O OPERADOR DE DEFORMAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Data de aprovação: 07/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Dr. Andre Luiz Alves Lima
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov
Examinador Externo
Universidade Federal do Espírito Santo

_____
Profa. Dra. Márcia Rodrigues Tenser
Examinadora Externa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Para Josene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Josene, que mesmo de tão longe tem se mantido próxima, incentivando minhas escolhas e torcendo por minhas conquistas.

Ao meu orientador André, que tem sido extremamente atencioso e paciente, e por quem tenho grande admiração.

Agradeço à CAPES pelo incentivo financeiro, aos colegas de profissão que me inspiram a buscar o meu melhor e aos amigos que fiz em Pernambuco.

Um agradecimento especial à Profa. Márcia, pela atenção na correção da dissertação e suas sugestões.

[. . .] Se um atira, o outro também, mas a resposta nunca vai além da provocação. O que nenhum dos dois admite é qualquer movimento fora da rotina. Fora disso, os adversários ficam postados sossegadamente um perto do outro, vizinhos invisíveis — à espera do momento em que mudam as regras do jôgo. E num dia assim o repórter pensa: mas esta guerra é uma "marmelada"— ou um piquenique de mau-gôsto, com tanta chuva. Hoje porém, fomos avisados lacônicamente: a cobra vai fumar.

Em Barga, Crônicas de Guerra: Com a FEB na Itália, Rubem Braga, 1944. [1]

"What we observe is not nature itself, but nature exposed to our method of questioning."

Werner Heisenberg [2]

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a teoria de campos conforme (CFT) bidimensional conhecida como CFT D1-D5. Trata-se de uma teoria relacionada, via correspondência AdS/CFT, ao sistema D1-D5 em teoria de cordas, em que no limite de supergravidade se comporta como uma brana negra. Assim, a CFT D1-D5 tem sido uma ferramenta importante no estudo das propriedades quânticas de buracos negros na teoria de cordas. Após revisarmos alguns aspectos gerais das CFT's em duas dimensões, descrevemos as propriedades básicas da CFT D1-D5. Além de ser uma teoria conforme supersimétrica (SCFT) com $\mathcal{N} = (4, 4)$ supersimetrias, trata-se de um modelo sigma descrito por um orbifold, cujo espaço-alvo é $(T^4)^N/S_N$. Discutimos a teoria no ponto livre do orbifold, onde este pode ser descrito como N cópias de uma teoria "semente", cujos campos fundamentais são bósons e férmions livres, sujeitos a condições de contorno não triviais impostas pelo grupo simétrico de permutações S_N. Também discutimos um operador de deformação marginal que desloca a teoria além do ponto livre no espaço de moduli, em direção a uma teoria que corresponde às soluções da supergravidade. Em seguida, abordamos o cálculo de funções de quatro pontos envolvendo campos twistados, com monodromias não triviais impostas por S_N. O cálculo dessas funções exige técnicas específicas, que fazem uso de superfícies de cobertura ramificadas do plano complexo. Discutimos em detalhe o método de Lunin-Mathur, baseado no cálculo da ação de Liouville associada ao mapeamento do plano para a superfície de cobertura, e o método do tensor energia-momento, baseado em uma identidade de Ward. Utilizamos essas técnicas para calcular uma classe específica de funções, envolvendo o operador de deformação e estados fundamentais de Ramond twistados. Usamos esse resultado para mostrar que, na inserção da deformação, os estados fundamentais de Ramond são protegidos até segunda ordem perturbativa. Também utilizamos da técnica da superfície de cobertura para calcular funções de quatro pontos envolvendo descendentes de primários quirais, sobre os quais atuam modos fracionários dos geradores da simetria-R da SCFT.

Palavras-chave: CFT D1-D5; Funções de correlação; Orbifold Simétrico.

ABSTRACT

In this work, we study the two-dimensional conformal field theory (CFT) known as D1-D5 CFT. It is a theory related by AdS/CFT to the D1-D5 system in string theory, which in the supergravity limit behaves as a black brane. Thus the D1-D5 CFT has been an important tool in the study of quantum properties of black holes in string theory. After making a review of some aspects of general two-dimensional CFTs, we describe the basic properties of the D1-D5 CFT. Besides being a supersymmetric CFT (SCFT) with $\mathcal{N} = (4, 4)$ supersymmetries, it is an orbifold theory, with target space $(T^4)^N/S_N$. We discuss the theory in the free orbifold point, where it can be described as N copies of a basic "seed" theory, whose basic fields are free bosons and free fermions, subjected to non-trivial boundary conditions imposed by the symmetric group of permutations S_N. We also discuss a marginal deformation operator that move the theory away from free point in moduli space, and towards a theory that matches the supergravity solutions. Then we discuss the computation of four-point functions involving twisted fields, with non-trivial monodromy imposed by S_N. There are specific techniques that are necessary for the computation of these functions, making use of ramified coverings of the complex plane. We discuss in detail the Lunin-Mathur method, based on the computation of the Liouville action for the mapping from the plane to the covering, and the stress-tensor method, based on a Ward identity. We use these techniques to compute a class of specific functions, involving the deformation operator and twisted Ramond ground states. We use this result to show that the Ramond ground states are protected from deformation, to second order in perturbation theory. We also use the covering surface technique to compute four-point functions involving descendants of chiral primaries, acted upon by fractional modes of the generators of R-symmetry of the SCFT.

Keywords: D1-D5 CFT; Correlation Functions; Symmetric Orbifold.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de um mapeamento conforme 18
Figura 2 – Mapeamento do cilindro no plano 32
Figura 3 – Decomposição do contorno 34
Figura 4 – Decomposição do espaço 10-dimensional 40
Figura 5 – Construção de um orbifold 48
Figura 6 – Atuação de um Twist 53
Figura 7 – Cortes de Ramificação 54
Figura 8 – Representação do espaço base $C \cup \{\infty\}$ e do espaço de cobertura Σ. . . 54
Figura 9 – Curva fechada na base e sua imagem no espaço de cobertura. 55
Figura 10 – Superfícies identificadas pelo genus 56
Figura 11 – Condição de monodromia das funções de correlação 67
Figura 12 – Construção do Espaço Base 69
Figura 13 – Construção do Espaço Alvo 70
Figura 14 – Mapeamento da Função de Correlação 79
Figura 15 – Decomposição do resíduo no infinito 98
Figura 16 – Teorema de Cauchy 111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição dos Campos de Ramond 85
Tabela 2 – Coeficientes da funções de correlação 91
Tabela 3 – Definição do operador V. 95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFT	Conformal Field Theory
SCFT	Supersymmetric Conformal Field Theory
AdS	Anti-deSitter
LM	Lunin-Mathur
OPE	Operator Product Expansion
BPZ	Belavin-Polyakov-Zamolodchikov
BTZ	Bañados-Teitelboim-Zanelli
R	Ramond
NS	Neveu-Schwarz

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 TEORIA DE CAMPOS CONFORMES EM DUAS DIMENSÕES 17

2.1 GRUPO CONFORME EM DUAS DIMENSÕES 17

2.1.1 Transformações e Álgebra Conforme 18

2.1.2 Tensor Energia-Momento 20

2.2 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO 22

2.2.1 Funções de 2,3 e 4 pontos 23

2.3 IDENTIDADES DE WARD 24

2.4 EXPANSÃO DO PRODUTO DE OPERADORES 29

2.4.1 Campos Livres 29

2.5 QUANTIZAÇÃO RADIAL 31

2.5.1 Expansão em Modos 33

2.5.2 Álgebra de Virasoro 34

2.5.3 Operadores de Vértice 37

3 A TEORIA CONFORME DO SISTEMA D1-D5 39

3.1 A MOTIVAÇÃO HOLOGRÁFICA: TEORIA DE CORDAS 39

3.2 A SCFT COM $\mathcal{N} = (4, 4)$ 42

3.2.1 Álgebra Superconforme 43

3.2.1.1 Bosonificação 45

3.3 O ORBIFOLD SIMÉTRICO NO PONTO LIVRE 47

3.3.1 O Grupo Simétrico S_N 48

3.3.1.1 Classes de Conjugação 50

3.3.2 Operadores de Twist 52

3.3.3 Espaço de cobertura e Modos Fracionários 53

3.4 OPERADORES QUIRAIS PRIMÁRIOS 58

3.4.1 Quirais Primários de Ordem Ímpar 60

3.4.2 Quirais Primários de Ordem Par 60
3.5 O OPERADOR DE DEFORMAÇÃO 62

4 FUNÇÕES DE QUATRO-PONTOS 64
4.1 A IMPORTÂNCIA DE FUNÇÕES DE QUATRO-PONTOS 64
4.2 PROPRIEDADES GERAIS DAS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO NO ORBIFOLD 66
4.3 O MÉTODO DE LUNIN E MATHUR 68
4.3.1 Função de Dois Pontos 75
4.4 MÉTODO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO 77
4.5 PROPRIEDADES GERAIS DE FUNÇÕES DE CICLOS DUPLOS . . . 79
4.6 FUNÇÃO DE QUATRO-PONTOS COM OPERADOR DE DEFORMAÇÃO 82
4.6.1 Campos de Ramond 82
4.6.2 Funções de quatro pontos via LM 85
4.7 REGRAS DE FUSÃO E NÃO-RENORMALIZAÇÃO 92
4.8 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DE DESCENDENTES FRACIONÁRIOS 94

5 CONCLUSÃO 102

REFERÊNCIAS 104

APÊNDICE A – ANÁLISE COMPLEXA 109

APÊNDICE B – OPE'S E ÁLGEBRAS 113

1 INTRODUÇÃO

"We're all stories in the end. Just make it a good one."

11th Doctor, Doctor Who, S05EP13.

A caracterização de teorias de campos conformes (CFT's[1]) baseia-se em uma premissa muito simples, a generalização de uma invariância de escala válida localmente. Em duas dimensões, observa-se uma infinitude de simetrias conformes advindas de transformações locais associadas à funções holomórficas arbitrárias $z \to f(z)$, o que permite um estudo extremamente rico das CFT's, cuja formulação moderna foi inaugurada com o trabalho de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ) [3].

A teoria de campos conformes possui aplicações diretas em teorias estatísticas relacionadas à transições de fase de segunda ordem [4, 5], e em teorias de cordas [6, 7, 8], que é o contexto de maior relevância neste trabalho. A teoria de cordas propõe que os objetos fundamentais não são partículas pontuais, mas sim cordas unidimensionais, de forma que sua propagação em uma superfície de mundo (ou *worldsheet*) descreve uma superfície bidimensional. As coordenadas que descrevem a posição da corda no espaço-tempo podem ser descritas como uma coleção de campos conformes que se propagam nesse espaço bidimensional [9].

O espectro da teoria de cordas inclui um graviton de maneira consistente, e portanto a teoria é uma teoria de gravitação quântica. De fato, em baixas energias observa-se que a teoria de cordas se comporta como uma teoria clássica de supergravitação (gravitação com supersimetrias) [6, 7]. Objetos chamados de Dp-branas, superfícies $(p+1)$-dimensionais onde as cordas abertas terminam, se comportam em baixas energias como soluções gravitacionais conhecidas como p-branas, que têm propriedades gravitacionais similares às de buracos negros (são análogas a buracos negros não pontuais, estendidos em p direções espaciais, ver por exemplo [10]). Isso permite que se estude propriedades de buracos negros à luz de uma teoria quântica.

Um dos principais desenvolvimentos da teoria de cordas foi a conjectura holográfica proposta por Maldacena em [11], que estabelece uma correspondência entre a gravitação em um espaço AdS $D+1$-dimensional e uma CFT D-dimensional que vive na borda do espaço AdS [12, 13]. A realização mais famosa da correspondência AdS/CFT, que

[1] Utilizamos a sigla em inglês para Conformal Field Theroy.

relaciona a gravitação em $AdS_5 \times S^5$ com a teoria de calibre de Super-Yang-Mills com $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias, é extremamente bem estudada e passou por muitos testes não triviais. Espera-se que a correspondência esteja associada a propriedades bem gerais da gravitação quântica, como àquelas relacionadas à termodinâmica de buracos negros.

Um outro sistema muito estudado é o chamado sistema D1-D5, formado por N_1 D1- e N_5 D5-branas compactificadas de maneira específica, com $N_1, N_5 \gg 1$. Gravitacionalmente, o sistema tem uma geometria com propriedades similares às de um buraco negro, com um horizonte de eventos. Mesmo antes dos trabalhos de Maldacena, Strominger e Vafa [14] utilizaram a teoria de cordas para realizar a contagem de microestados do sistema, que se mostrou igual à entropia de Bekenstein-Hawking [15, 16] da solução gravitacional.

A solução de supergravitação do sistema D1-D5 possui um limite de desacoplamento próximo ao horizonte de eventos, em que o espaço-tempo se torna $AdS_3 \times S^3 \times T^4$. Neste limite, pode-se utilizar a holografia AdS/CFT para descrever o sistema em termos de uma CFT com duas dimensões, chamada de *CFT D1-D5* [17, 18]. As simetrias herdadas do espaço construído pelo lado gravitacional indicam que a CFT dual é superconforme (SCFT) com $\mathcal{N} = (4, 4)$ supersimetrias. Além disso, é possível mostrar que o espaço-alvo da CFT dual é o orbifold simétrico $(T^4)^N/S_N$, onde $N = N_1N_5$ e S_N é o grupo das permutações [19]. A SCFT dual à solução gravitacional é fortemente acoplada, mas existe um ponto no espaço de moduli do orbifold correspondente a uma teoria livre. Cálculos exatos podem ser realizados nesta teoria livre, com técnicas especiais para descrever o orbifold, que envolvem a construção de uma superfície de cobertura ramificada descrita por Lunin e Mathur [20, 21]. Mas é importante analisar também os efeitos de operadores marginais que deformem a teoria na direção do ponto dual à supergravitação.

Na descrição usual dos buracos negros pela mecânica quântica, a discussão iniciada por Hawking acerca da radiação térmica dos buracos negros evidencia a não-unitariedade dos processos de evolução dos mesmos, e ressalta a necessidade de uma melhor compreensão desses objetos [22, 23, 24, 25]. Uma das propostas de solução desses problemas, desenvolvida por Mathur e colaboradores, parte do sistema de branas nas soluções de supergravidade para construir as "fuzzballs", objetos extensos sem horizontes ou singularidades, constituídos de microestados [26, 27, 28, 29]. Nesse contexto, o paradoxo da informação é contornado, dado que a ausência de horizontes torna a informação novamente acessível. Assim, a aplicação do contexto da "conjectura das fuzzballs" é uma possível aplicação desse trabalho. Outro contexto onde o estudo da CFT no orbifold $(T^4)^N/S_N$ é

relevante, é na construção explícita da dualidade AdS_3/CFT_2 proposta por Gaberdiel e colaboradores nos últimos anos [30, 31, 32].

Neste trabalho, estudamos o cálculo de funções de correlação na CFT D1-D5. Os capítulos da dissertação são organizados da seguinte maneira:

Capítulo 2: Introduzimos as definições básicas da teoria de campos conformes, explorando as características que a definem e a estrutura algébrica de seus geradores. No caso específico de duas dimensões, vemos se tratar de uma teoria com infinitas simetrias. Definimos a Álgebra de Virasoro e suas aplicações, as identidades de Ward e as funções de correlação.

Capítulo 3: Descrevemos o sistema D1-D5, e CFT D1-D5. Descrevemos uma SCFT livre com $\mathcal{N} = (4, 4)$ supersimetrias. Definimos o orbifold simétrico a partir de N cópias da SCFT livre, sendo estas identificadas a partir da atuação do grupo simétrico e realizado pelos operadores de twist. Mostramos que no orbifold simétrico os campos da teoria tornam-se multivalorados e descrevemos o processo de construção do espaço de cobertura, que permite o cálculo de funções de correlação dos campos. Por fim, com intuito de inserir uma interação no sistema, definimos o operador deformação, construído a partir dos operadores quirais primários e que mantém a invariância conforme.

Capítulo 4: Motivamos o estudo de funções de quatro pontos como as primeiras funções de correlação que não possuem seu formato funcional fixado pela teoria conforme. Discutimos a renormalização em segunda ordem da dimensão conforme. Demonstramos em detalhes a construção do método de Lunin-Mathur para cálculo de funções de correlação envolvendo operadores twistados e o método do tensor energia momento, derivado a partir de uma identidade de Ward. Utilizamos o método de Lunin-Mathur (LM) para o cálculo de funções de 4 pontos envolvendo o operador deformação e campos de Ramond (R). Por fim, formulamos uma expressão geral para o cálculo de funções de correlação envolvendo modos descendentes fracionários para a corrente de simetria-R atuando em uma coleção de operadores exponenciais.

Capítulo 5: As conclusões da dissertação são apresentadas. Discutimos acerca da não renormalização em segunda ordem dos campos de Ramond a partir da deformação marginal. Discutimos acerca de perspectivas futuras quanto à continuidade da pesquisa.

2 TEORIA DE CAMPOS CONFORMES EM DUAS DIMENSÕES

"Hello There."

Obi-Wan Kenobi, Star Wars: Revenge of the Sith.

De forma geral, um sistema munido de simetria conforme é um sistema invariante sob transformações globais de escala, em que as distâncias $x_{ji} \equiv (x_j - x_i) \to \lambda x_{ji}$ são transformadas globalmente por um fator constante λ. Uma transformação conforme é uma extensão deste conceito com a permissão de parâmetros locais $\Lambda(x)$, que em suma, altera as distâncias, mas mantém invariante os ângulos entre os vetores [5, 6].

Estamos interessados em transformações $x^\mu \to x'^\mu$ que implicam na invariância conforme da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$,

$$g'_{\mu\nu}(x'^\rho) = \Lambda^2(x^\rho) g_{\mu\nu}(x^\rho), \tag{2.1}$$

onde $\Lambda(x)$ é definido como um fator de escala local. Incluído no grupo conforme está o próprio grupo de Poincaré [33], em que as transformações por translação, rotações ou boosts de Lorentz estão relacionados à $\Lambda(x) = 1$. Além destes, uma dilatação por um fator de escala constante também é uma transformação conforme, sendo a simetria de escala um caso particular das transformações conformes. Por fim, ainda temos a transformação conforme especial, válida localmente e obtida por [1]

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu - a^\mu x^2}{1 - 2a_\rho x^\rho + a^2 x^2}, \qquad a^\mu \text{ constante} \tag{2.2}$$

que conclui os tipos de transformações que satisfazem (2.1).

2.1 GRUPO CONFORME EM DUAS DIMENSÕES

Neste trabalho estaremos interessados no caso específico de duas dimensões, onde a teoria conforme adquire um alto grau de previsibilidade devido à infinitas simetrias associadas. Em duas dimensões podemos a princípio considerar o plano parametrizado pelas coordenadas $z^\mu = (z^0, z^1)$ e a partir de uma transformação invertível $z^\mu \to \omega^\mu$, a métrica é transformada [34],

$$g^{\mu\nu} \to \left(\frac{\partial \omega^\mu}{\partial z^\alpha}\right)\left(\frac{\partial \omega^\nu}{\partial z^\beta}\right) g^{\alpha\beta}. \tag{2.3}$$

[1] Aqui estamos definindo na notação de Einstein $x^2 \equiv x^\mu x_\mu$

Pela definição de uma transformação conforme (2.1) obtemos condições sob os possíveis mapeamentos que mantém a teoria conforme. Sendo estas,

$$\frac{\partial\omega^1}{\partial z^0} = \frac{\partial\omega^0}{\partial z^1} \text{ e } \frac{\partial\omega^0}{\partial z^0} = -\frac{\partial\omega^1}{\partial z^1}, \tag{2.4}$$

ou

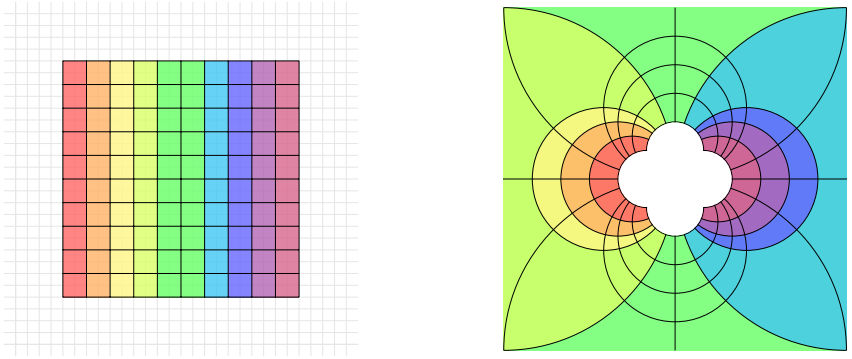
$$\frac{\partial\omega^1}{\partial z^0} = -\frac{\partial\omega^0}{\partial z^1} \text{ e } \frac{\partial\omega^0}{\partial z^0} = \frac{\partial\omega^1}{\partial z^1}. \tag{2.5}$$

Essas que representam as conhecidas equações de Cauchy-Riemann (A.1) para funções holomórficas e anti-holomórficas, respectivamente. Isso motiva então o uso de variáveis complexas para descrever o plano, em que podemos então definir $z = z^0 + iz^1$ e $\bar{z} = z^0 - iz^1$. Assim como as derivadas com respeito a essas variáveis, $\partial = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1)$ e $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1)$. Dessa forma, as condições para a transformação conforme se resumem, no primeiro caso (2.4), a

$$\bar{\partial}\omega(z,\bar{z}) = 0. \tag{2.6}$$

Ou seja, um mapeamento $z^\mu \to \omega^\mu(z)$ (ou $\bar{z}^\mu \to \bar{\omega}^\mu(\bar{z})$) definido a partir de uma função (anti-)holomórfica arbitrária gera uma transformação conforme localmente. Na Figura 1 temos uma representação de uma transformação conforme a partir de uma inversão, em que observamos retas sendo mapeadas em círculos, mas ainda assim conservando os ângulos na intersecção das retas.

Figura 1 – Representação de um mapeamento conforme



(a) Plano complexo. (b) Plano após inversão.

2.1.1 Transformações e Álgebra Conforme

Ao realizarmos a transformação de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$, um campo $\Phi(x)$ também muda como $\Phi(x) \to \Phi'(x')$. Em geral, a partir de uma transformação infinitesimal em

primeira ordem das coordenadas,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\nu}\frac{\delta x^{\mu}}{\delta \varepsilon_{\nu}}, \tag{2.7a}$$

$$\implies \Phi'(x') = \Phi(x) + \varepsilon_{\nu}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varepsilon_{\nu}}(x). \tag{2.7b}$$

com ε_{ν} sendo uma coleção de parâmetros infinitesimais, e $\mathcal{F}(\Phi(x))$ um funcional do próprio campo $\Phi(x)$ que representa a modificação do mesmo a partir da mudança de coordenadas. O gerador G^{ν} associado à transformação é definido a partir de como a transformação afeta os campos em um mesmo ponto x,

$$\delta_{\varepsilon}\Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\varepsilon_{\nu}G^{\nu}\Phi(x), \tag{2.8}$$

logo

$$iG^{\nu}\Phi(x) = \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \varepsilon_{\nu}}\partial_{\mu}\Phi(x) - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varepsilon_{\nu}}(x). \tag{2.9}$$

No caso de campos escalares, $\Phi'(x') = \Phi(x)$. Como vimos anteriormente, uma função holomórfica parametriza a transformação conforme. Assim, partindo do pressuposto que funções analíticas tenham uma expansão em série de Laurent [35], para as transformações infinitesimais temos

$$z \to z + \varepsilon(z), \qquad \varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n z^{n+1}. \tag{2.10}$$

E portanto, considerando a transformação sobre os campos escalares,

$$\begin{aligned} &\Phi(z,\bar{z}) - \Phi'(z,\bar{z}) = \varepsilon(z)\partial_z\Phi(z,\bar{z}) + \bar{\varepsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\Phi(z,\bar{z}), \\ &\implies \delta_{\varepsilon}\Phi(z,\bar{z}) = -\sum_n \left[\varepsilon_n z^{n+1}\partial_z + \bar{\varepsilon_n}\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}\right]\Phi(z,\bar{z}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

De forma que ficam definidos os geradores das transformações holomórficas e anti-holomórficas como

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \text{e} \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}. \tag{2.12}$$

Esses geradores demonstram a infinita dimensionalidade do grupo de transformações, e com os mesmos podemos ainda obter a álgebra do grupo

$$[l_n, l_m]f(z,\bar{z}) = (l_n l_m - l_m l_n)\, f(z,\bar{z}) = (n-m)l_{n+m}f(z,\bar{z}). \tag{2.13}$$

O mesmo se dá para os geradores anti-holomórficos, de forma que a álgebra completa é

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}, \tag{2.14a}$$

$$\left[\bar{l}_n, \bar{l}_m\right] = (n-m)\bar{l}_{n+m}, \tag{2.14b}$$

$$\left[l_n, \bar{l}_m\right] = 0. \tag{2.14c}$$

Pelo terceiro comutador observamos a independência da parte holomórfica e anti-holomórfica da teoria, que nos permitirá em diversos momentos realizar a separação de tais componentes e analisá-las individualmente. Essa álgebra é comumente conhecida como a álgebra de Witt[5], e posteriormente iremos estudar como a mesma muda a partir da quantização dos campos, levando à Álgebra de Virasoro[36].

Até então, as transformações aqui descritas são válidas localmente, sem restrições sobre as funções holomórficas que definem as simetrias conformes. Uma transformação que mantém a simetria conforme globalmente é dada por

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{com } ad-bc=1, \tag{2.15}$$

as chamadas funções de Möbius [37]. A partir de uma projeção estereográfica, o espaço parametrizado por z pode ser descrito por uma esfera de Riemann [38], que é preservado pelas transformações de Möbius. Em geral, quando fizermos menção ao espaço parametrizado por z e $\bar{z}$, estamos tratando do espaço bidimensional na esfera de Riemann.

Por fim, vale notar que na álgebra obtida em (2.14), incluído nos geradores das simetrias locais estão os geradores das translações (l_{-1}), rotações e dilatações (l_0) e transformações conformes (l_1). Esses que por si só formam a subálgebra do grupo de transformações globais, que podem ser verificados a partir de escolhas dos parâmetros da transformação (2.15).

2.1.2 Tensor Energia-Momento

Quanto ao tensor energia momento, podemos utilizar das propriedades de conservação e traço nulo do mesmo para obter informações quanto à propriedades do tensor energia momento em suas componentes holomórficas e anti-holomórficas. Com uma transformação arbitrária de coordenadas $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$ a variação da ação é dada por

$$\delta S = \int d^2x T^{\mu\nu}\partial_\mu \epsilon_\nu, \tag{2.16}$$

com $T^{\mu\nu}$ definindo o tensor energia momento. Como de praxe, ao realizar uma integração por partes, a ação (2.16) define a corrente conservada

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.17}$$

Supondo uma transformação de escala infinitesimal, i.e $\epsilon_\nu(x) = \lambda x_\nu$, então a variação da ação fica dada por

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^2x T^{\mu\nu}\partial_\mu\epsilon_\nu &= \lambda \int d^2x T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} \\ &= \lambda \int d^2x T^\mu{}_\mu \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim, a invariância da ação implica que o traço do tensor energia momento é identicamente nulo, $T^\mu{}_\mu = 0$.

Utilizando das variáveis complexas definidas por $z = z^0 + iz^1$ e $\bar{z} = z^0 - iz^1$ e a métrica no espaço plano parametrizado por z e $\bar{z}$, $ds^2 = dzd\bar{z}$, a métrica $g_{\mu\nu}$ é obtida por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Nas novas coordenadas o tensor energia momento permanece simétrico e portanto, $T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z}$.

Podemos estabelecer uma relação entre as componentes do tensor energia momento em ambas coordenadas a partir da transformação do tensor, de forma a obtermos que as componentes não diagonais nas novas coordenadas são nulas

$$T^{z\bar{z}} = T^{00} + T^{11} = T^{\bar{z}z} = 0, \tag{2.20}$$

em que utilizamos do traço nulo nas coordenadas z^0, z^1. Por outro lado, as componentes diagonais do tensor energia momento são relacionadas por

$$\begin{aligned} T^{zz} &= 2T^{00} + 2iT^{01}, \\ T^{\bar{z}\bar{z}} &= 2T^{00} - 2iT^{01}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Com a conservação do tensor energia momento, obtemos

$$\partial T^{zz} = 0, \qquad \bar{\partial} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0. \tag{2.22}$$

Ou seja, a componente T^{zz} é anti-holomórfica e a componente $T^{\bar{z}\bar{z}}$ é holomórfica. Ou então, utilizando do tensor métrico [5]

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

e definindo $-2\pi T_{zz} \equiv T(z)$ e $-2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}(\bar{z})$,

$$\partial \bar{T}(\bar{z}) = 0, \qquad \bar{\partial} T(z) = 0. \tag{2.24}$$

2.2 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

No contexto quântico da teoria conforme é comum abordarmos a quantização a partir das integrais de caminho[39]. A abordagem por meio das integrais de caminho é uma maneira alternativa à quantização canônica, em que na última se constrói um espaço de Hilbert a partir de estados. Esse método se mostra vantajoso no quesito da CFT por tratar em pé de igualdade as coordenadas do espaço-tempo, ao contrário da quantização canônica que destaca a coordenada temporal, além de tornar mais simples o cálculo das funções de correlação e identidades da teoria, objetos de suma importância em CFT.

Podemos definir as funções de correlação entre operadores $\mathcal{O}_i$ a partir de uma integral funcional sobre os campos independentes da teoria $\phi(z)$[2] tal que,

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)...\mathcal{O}_n(z_n)\rangle \equiv \frac{1}{Z}\int [\mathcal{D}\phi]\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)...\mathcal{O}_n(z_n)\exp\{-S\}, \tag{2.25}$$

com $\exp\{-S\}$ representando um peso associado à uma configuração associada aos campos em termos da ação S, e $Z \equiv \int[\mathcal{D}\phi]\exp\{-S\}$ uma normalização da função. É comum vermos essa descrição em teorias estatísticas [40] tal que Z representa a função de partição do sistema. Em teoria quântica de campos a função de correlação dá uma noção de distribuição de probabilidade a respeito de como os campos na função de correlação estão *correlacionados*.

De forma geral, temos que um campo quasi-primário é definido de maneira que a partir de uma transformação conforme global o mesmo se transforma como

$$\phi'(z',\bar{z}') = \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{-h}\left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}}\phi(z,\bar{z}), \tag{2.26}$$

onde $h \in \mathbb{R}$ é a dimensão conforme do campo ϕ e definiremos $\Delta = h + \bar{h}$. Se o campo se transforma dessa maneira para qualquer transformação local conforme, então o mesmo é dito *primário*. Com isso, podemos caracterizar a transformação de uma função de correlação de campos primários por

$$\langle \phi_1'(z_1',\bar{z}_1')\phi_2'(z_2',\bar{z}_2')...\phi_n'(z_n',\bar{z}_n')\rangle = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{dz'}{dz}\right)^{-h_i}_{z=z_i'}\left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}_i}_{\bar{z}=\bar{z}_i'}\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)...\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle. \tag{2.27}$$

Diremos que uma teoria conforme estará completamente resolvida se conhecermos todo seu espectro além de todas as funções de correlação compostas pelos campos da teoria.

[2] Os campos $\mathcal{O}$ na função de correlação podem ser o próprio campo ϕ.

2.2.1 Funções de 2,3 e 4 pontos

Podemos nos perguntar então como as simetrias conformes afetam o formato das funções de correlação da teoria. Veremos que as funções de dois e três pontos são completamente fixadas pelas simetrias conformes, diferente das funções de quatro pontos.

Antes de construir tais funções, podemos discutir o conceito de invariantes conformes, que como seu nome sugere, são funções que permanecem invariantes a partir das transformações conformes definidas anteriormente. Sabemos que pela invariância sob translações e rotações, apenas uma função que dependa do modulo da diferença entre dois pontos é invariante. Com adição da simetria de escala, apenas razões entre as distancias são permitidos. Por fim, com a invariância sob simetria conforme especial, obtemos que é necessário no mínimo 4 pontos para formar um invariante conforme e apenas funções $f = f(u)$, com

$$u = \frac{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}, \tag{2.28}$$

são invariantes conformes em funções de correlação com mais de quatro pontos nas coordenadas complexas.

Consideremos então uma função de correlação de dois pontos, tal que, como vimos, pelas simetrias de translação e rotação, a mesma deve ser função do modulo da diferença entre os dois pontos da função,

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\rangle = f(|z_1 - z_2|), \tag{2.29}$$

para que o espaço seja homogêneo e isotrópico. Com a simetria de dilatação, $z \to \lambda z$, obtemos pela transformação de campos primários que $\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\rangle = \lambda^{h_1+h_2}\langle \phi_1(\lambda z_1)\phi_2(\lambda z_2)\rangle$. E portanto, a forma da função de dois pontos deve ser

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|z_1 - z_2|^{h_1+h_2}}. \tag{2.30}$$

Com C_{12} sendo uma constante que pode ser escolhida em uma normalização da função de dois pontos. Por fim, com a invariância sob transformações especiais conformes, obtemos que a função de dois pontos será não nula apenas se $h_1 = h_2$ [5]. Isso fixa completamente uma função de dois pontos apenas com as simetrias conformes associadas ao espaço, para qualquer campo primário ϕ.

Poderíamos realizar o mesmo processo para uma função de três pontos, do qual obteríamos

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle = \frac{C_{123}}{(z_{12})^{h_1+h_2-h_3}(z_{23})^{h_2+h_3-h_1}(z_{13})^{h_3+h_1-h_2}}. \tag{2.31}$$

A constante C_{123} é conhecida como constante de estrutura, e não pode ser escolhida como no caso da função de dois pontos, mas sim obtida a partir de relações entre os três campos envolvidos na função de correlação.

Por fim, poderíamos tentar aplicar o mesmo processo à função de quatro pontos (ver B.3), que veríamos não ser completamente fixada pela teoria como nos casos anteriores mas sim como função dos invariantes conformes, de maneira que

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = G(u,\bar{u})\prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{h/3-h_i-h_j}\,\bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j}, \tag{2.32}$$

com $h=\sum_{i=1}^{4}h_i$, e u sendo o invariante conforme definido em (2.28). Um artifício útil neste ponto é realizarmos transformações sobre os quatro pontos da função de correlação tal que a mesma tome uma forma mais simplificada, sendo estas permitidas pela simetria conforme. Seja a transformação $u(z)$,

$$u(z)=\frac{(z_4-z)(z_2-z_1)}{(z-z_1)(z_4-z_2)}. \tag{2.33}$$

Então os três pontos z_1,z_2 e z_4 são fixados por uma transformação de Möbius de forma que $u(z_1)\to\infty$, $u(z_2)=1$ e $u(z_4)=0$. E portanto $u(z_3)=u$, mantendo o invariante conforme. Mais adiante mostraremos como essa escolha afeta as funções de correlação.

2.3 IDENTIDADES DE WARD

A função de correlação que envolve o conjunto de campos $\phi(x_i)$ com ação descrita por $S[\phi]$ e invariante sob transformações locais é definida por

$$\langle\phi(x_1)...\phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int[\mathcal{D}\phi]\phi(x_1)...\phi(x_n)\exp(-S[\phi]). \tag{2.34}$$

Desejamos realizar uma transformação infinitesimal sobre os campos a partir da forma (2.8) em que os parâmetros infinitesimais da transformação dependem das posições $\epsilon(x)$. Assim, com $\phi\to\phi'=\phi+\delta\phi$ a variação da ação é dada por

$$S[\phi+\delta\phi]=S+\delta S=S-\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu. \tag{2.35}$$

com j^μ sendo a densidade de corrente conservada relacionada à transformação. Definindo $\Phi\equiv\phi(x_1)...\phi(x_n)$,

$$\langle\Phi\rangle=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi'(\Phi+\delta\Phi)\exp\Big(-S[\phi]+\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu\Big). \tag{2.36}$$

Em primeira ordem nos parâmetros infinitesimais, o termo na exponencial pode ser aproximado por

$$\exp\Big(-S[\phi]+\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu\Big)\approx e^{-S[\phi]}(1-\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu). \tag{2.37}$$

Além disso, assumindo que a medida de integração do funcional é invariante sob transformações locais, i.e. $\mathcal{D}\phi'=\mathcal{D}\phi$, então,

$$\begin{aligned}\langle\Phi\rangle &= \frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi(\Phi+\delta\Phi)e^{-S[\phi]}(1-\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu)\\ &= \frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi\Phi e^{-S[\phi]}+\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi\delta\Phi e^{-S[\phi]}-\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi(\Phi+\delta\Phi)e^{-S[\phi]}\int d^dx\epsilon(x)\partial_\mu j^\mu.\end{aligned} \tag{2.38}$$

O primeiro termo é nada mais que a função de correlação para os campos, já o segundo é a função de correlação entre a variação dos mesmos. Para o terceiro, definimos

$$\langle j^\mu\Phi\rangle\equiv\frac{1}{Z}\int[\mathcal{D}\phi]j^\mu\Phi e^{-S[\phi]}. \tag{2.39}$$

Assim, desprezando termo de segunda ordem da forma $\epsilon\delta\Phi$,

$$\langle\delta\Phi\rangle=\int d^dx\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi\Phi\partial_\mu j^\mu e^{-S[\phi]}\epsilon(x)=\int d^dx\partial_\mu\langle j^\mu\Phi\rangle\epsilon(x). \tag{2.40}$$

A partir da relação $\delta\Phi=\phi'(x_1)...\phi'(x_n)-\phi(x_1)...\phi(x_n)$ com (2.8) temos por exemplo para $n=2$,

$$\begin{aligned}\phi'(x_1)\phi'(x_2) &= [\phi(x_1)-i\epsilon(x_1)G\phi(x_1)]\,[\phi(x_2)-i\epsilon(x_2)G\phi(x_2)]\\ &= \phi(x_1)\phi(x_2)-i\epsilon(x_2)\phi(x_1)G\phi(x_2)-i\epsilon(x_1)\phi(x_2)G\phi(x_1)+\mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{2.41}$$

E de forma geral,

$$\delta\Phi\equiv\phi'(x_1)...\phi'(x_n)-\phi(x_1)...\phi(x_n)=-i\sum_{i=1}^{n}[\phi(x_1)...G\phi(x_i)...\phi(x_n)]\,\epsilon(x_i), \tag{2.42}$$

ou então, introduzindo uma delta de Dirac na integral,

$$\delta\Phi=-i\int d^dx\sum_{i=1}^{n}[\phi(x_1)...G\phi(x_i)...\phi(x_n)]\,\epsilon(x)\delta^{(d)}(x-x_i). \tag{2.43}$$

Assim podemos comparar com o resultado (2.40) e obtém-se a identidade de Ward [3, 41, 42] em sua forma geral que pode ser aplicada para um dado gerador G,

$$\implies\partial_\mu\langle j^\mu\phi(x_1)...\phi(x_n)\rangle=-i\sum_{i=1}^{n}\langle\phi(x_1)...G\phi(x_i)...\phi(x_n)\rangle\delta(x-x_i). \tag{2.44}$$

Portanto, temos uma identidade que relaciona as funções de correlação dos campos ϕ com as correntes e geradores das simetrias do sistema.

Anteriormente, demonstramos que os geradores da teoria estão relacionados às transformações conformes (2.9). Então, da equação (2.44) podemos obter um conjunto de equações relacionadas à cada corrente conservada. Seja por exemplo a corrente tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, do qual temos o gerador de translações $P^\nu = -i\partial^\nu$ [5]. Assim, com (2.44),

$$\begin{aligned}\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu \Phi\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \phi(x_1)...\partial_\nu\phi(x_i)...\phi(x_n)\rangle \delta(x-x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle\Phi\rangle\delta(x-x_i). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para a simetria de rotação temos o tensor momento angular total $\mathcal{L}^{\nu\rho}$ como gerador, com a contribuição pelo tensor de spin $S^{\rho\nu}$,

$$j^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu \rightarrow \mathcal{L}^{\nu\rho} = x^\nu\partial^\rho - x^\rho\partial^\nu - iS^{\rho\nu}. \tag{2.46}$$

Do qual se resulta,

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle j^{\mu\nu\rho}\Phi\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^\nu\frac{\partial}{\partial x_i^\rho} - x_i^\rho\frac{\partial}{\partial x_i^\nu} - iS^{\rho\nu}\right)\langle\Phi\rangle\delta(x-x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i^\nu\frac{\partial}{\partial x_i^\rho} - x_i^\rho\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\right)\langle\Phi\rangle - iS^{\rho\nu}\langle\Phi\rangle\right]\delta(x-x_i). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Utilizando da forma explicita de $j^{\mu\nu\rho}$ em termos do tensor energia momento em (2.46) obtemos a segunda identidade de Ward,

$$\langle(T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho})\Phi\rangle = -i\sum_{i=1}^{n} S_i^{\rho\nu}\langle\Phi\rangle\delta(x-x_i). \tag{2.48}$$

Por fim, para a simetria de dilatação, com o gerador de dilatações $D = -ix^\nu\partial_\nu - i\Delta$, temos a terceira Identidade de Ward,

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle T^\mu{}_\nu x^\nu\Phi\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^\nu\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle X\rangle + \Delta\langle X\rangle\right]\delta(x-x_i), \\ \implies \langle T^\nu{}_\nu X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\langle X\rangle\delta(x-x_i). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Assim, obtemos as três Identidades de Ward [3],

$$\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu \Phi \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle \Phi \rangle \delta(x - x_i), \tag{2.50a}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu} \Phi \rangle = -i \sum_{i=1}^{n} s_i \langle \Phi \rangle \delta(x - x_i), \tag{2.50b}$$

$$\langle T^\nu{}_\nu \Phi \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \langle \Phi \rangle \delta(x - x_i). \tag{2.50c}$$

A construção da identidade de Ward anterior é geral com relação à dimensão do espaço. Considerando o espaço parametrizado por z e $\bar{z}$, com a métrica e o tensor anti-simétrico dados por (2.19) e (2.23), é simples demonstrar que podemos definir o delta de Dirac por

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi} \partial_z \frac{1}{\bar{z}}. \tag{2.51}$$

Então, na primeira identidade de Ward (2.50a) temos para $\nu = z$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu(x) \Phi \rangle = g^{\alpha\mu} \partial_\mu \langle T_{\alpha\nu}(x) \Phi \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle \Phi \rangle \delta(x - x_i), \\ \overset{\nu=z}{\Longrightarrow} \; 2\pi \partial_{\bar{z}} \langle T_{zz} \Phi \rangle + 2\pi \partial_z \langle T_{\bar{z}z} \Phi \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - \omega_i} \right) \partial_{\omega_i} \langle \Phi \rangle. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Na segunda identidade de Ward (2.50b),

$$\begin{aligned} \varepsilon^{z\bar{z}} \langle T_{z\bar{z}} \Phi \rangle + \varepsilon^{\bar{z}z} \langle T_{\bar{z}z} \Phi \rangle &= -\frac{i}{\pi} \sum_{i=1}^{n} s_i \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - \omega_i} \right) \langle \Phi \rangle, \\ \implies \; -2\pi \langle T_{z\bar{z}} \Phi \rangle + 2\pi \langle T_{\bar{z}z} \Phi \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} s_i \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - \omega_i} \right) \langle \Phi \rangle. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Por fim, na terceira identidade de Ward (2.50c),

$$\begin{aligned} \langle T^\nu{}_\nu \Phi \rangle = g^{\alpha\mu} \langle T_{\alpha\nu} \Phi \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \langle \Phi \rangle \delta(x - x_i), \\ \implies \; 2\pi \langle T_{z\bar{z}} \Phi \rangle + 2\pi \langle T_{\bar{z}z} \Phi \rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - \omega_i} \right) \langle \Phi \rangle. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Assim, somando (2.53) e (2.54) obtemos,

$$2\pi \langle T_{\bar{z}z} \Phi \rangle = -\sum_{i=1}^{n} h_i \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - \omega_i} \right) \langle \Phi \rangle, \tag{2.55}$$

onde definimos $s = (h - \bar{h})$. Substituindo este resultado em (2.52), com $T(z) \equiv -2\pi T_{zz}$,

$$\partial_{\bar{z}} \left(\langle T(z) \Phi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{h_i \langle \Phi \rangle}{(z - \omega_i)^2} + \frac{\partial_{\omega_i} \langle \Phi \rangle}{z - \omega_i} \right] \right) = 0. \tag{2.56}$$

[3] Escrevemos o tensor de spin decomposto pelo tensor anti-simétrico, $S^{\mu\nu}{}_i = \varepsilon^{\mu\nu} s_i$.

Sabendo que $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ define uma função holomórfica obtemos,

$$\langle T(z)\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{h_i\langle\Phi\rangle}{(z-\omega_i)^2} + \frac{\partial_{\omega_i}\langle\Phi\rangle}{z-\omega_i}\right] + f(z). \tag{2.57}$$

com $f(z)$ sendo uma função holomórfica regular em $z = \omega_i$. O mesmo processo pode ser feito para a parte anti-holomórfica do qual resulta numa expressão com mesmo comportamento para tal setor.

Essa é a expressão final para a identidade de Ward que utilizaremos. Nela podemos ver que singularidades surgem nas funções de correlação quando os campos se fundem no limite $z \to \omega$. Essa é uma característica diretamente ligada às flutuações quânticas dos campos. Especificamente para o caso do tensor energia momento $T(z)$ e um campo primário, podemos ver que a fusão destes resulta em[4]

$$T(z)\phi(\omega,\bar{\omega}) \sim \frac{h}{(z-\omega)^2}\phi(\omega,\bar{\omega}) + \frac{1}{z-\omega}\partial_\omega\phi(\omega,\bar{\omega}). \tag{2.58}$$

Por hipótese, o campo $\phi(\omega)$ é dito primário, enquanto outros campos que surgem na fusão dos campos $T(z)$ e $\phi(\omega)$ são classificados como descendentes de ϕ. A expressão (2.58) pode ser usada como meio de identificação dos campos da teoria, permitindo a leitura da dimensão conforme em caso de um campo primário, ou até mesmo a classificação de um campo não primário se o produto possuir termos distintos. Este é justamente o caso do tensor energia momento, que apesar de ser um campo que se comporta como um operador quasi-primário com $h = 2$ [5], não é primário.

Mais adiante demonstraremos explicitamente a forma do produto entre dois tensores energia momento e veremos que estes, apesar de não tomar a forma (2.58), possuem um comportamento previsível,

$$T(z)T(\omega) \sim \frac{\frac{1}{2}c}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega}. \tag{2.59}$$

Em que identificaremos c como a carga central, que não é fixada pela simetria conforme e está associada à teoria especifica que está sendo estudada. Termos que contém esta constante muitas vezes serão chamados de anômalos. O comportamento quártico de (2.59) surge modificando a forma em que o tensor energia momento se transforma [5], dada por

$$T'(\omega) = \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^{-2}\left[T(z) - \frac{c}{12}\{\omega; z\}\right], \tag{2.60}$$

com a operação $\{z', z\}$ definindo a derivada Schwarziana,

$$\{\omega; z\} \equiv \frac{\dddot{\omega}}{\dot{\omega}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{\omega}}{\dot{\omega}}\right)^2, \qquad \dot{\omega} \equiv \frac{d\omega}{dz}. \tag{2.61}$$

[4]Quando escrevemos o simbolo $\sim$ estamos indicando que a expressão é uma igualdade a menos de termos regulares em $z = \omega$.

2.4 EXPANSÃO DO PRODUTO DE OPERADORES

A forma para o produto do tensor energia momento com um operador primário dada em (2.58) por uma soma de termos singulares não é exclusiva destes operadores específicos. De forma geral, definimos a Expansão do Produto de Operadores (OPE) entre dois campos primários como

$$\phi_i(z_i,\bar{z}_i)\phi_j(z_j,\bar{z}_j) \sim \sum_k C_{ij}^k (z_i - z_j)^{h_k - h_i - h_j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j} \left[\phi_k(z_j,\bar{z}_j) + \text{descendentes}\right]. \tag{2.62}$$

A organização dos termos em uma OPE é essencial para a construção da teoria, identificando os campos da mesma assim como suas dimensões conformes a partir das singularidades. Como já mencionado anteriormente, as constantes C_{ij}^k são as chamadas constantes de estrutura, que carregam a informação da interação entre os campos e seus produtos, e cada termo não nulo dessa soma é identificado como um canal da decomposição da interação.

2.4.1 Campos Livres

Será útil para os propósitos dos próximos capítulos introduzirmos os campos livres da teoria, dados pelos bósons $X^i(z,\bar{z})$ e férmions spinoriais $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$, tal que a ação nas variáveis complexas é

$$S = S_{\text{boson}} + S_{\text{férmion}} = \frac{1}{4\pi}\int d^2z \left[\frac{1}{2}\partial X \bar{\partial} X + \psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}\right]. \tag{2.63}$$

A partir da ação, podemos obter os propagadores, ou funções de dois pontos, dos respectivos campos, que ficam dados por [5] [5],

$$\langle X(z,\bar{z})X(\omega,\bar{\omega})\rangle = -\ln|z-\omega|^2, \tag{2.64a}$$

$$\langle \psi(z)\psi(\omega)\rangle = \frac{2}{z-\omega}. \tag{2.64b}$$

Qualquer função de dois pontos de campos distintos é nula, e dessa forma podemos afirmar que a teoria pode ser tratada de forma separada, mesmo com um tensor energia momento composto por suas partes bosônicas e fermiônicas. Em particular, na componente holomórfica este toma a forma

$$T(z) = -\frac{1}{2}{:}\partial X(z)\partial X(z){:} - \frac{1}{4}{:}\psi(z)\partial\psi(z){:}. \tag{2.65}$$

[5] Aqui escolhemos uma normalização específica para os campos de forma que a função de dois pontos é fixada.

É comum em teoria de campos quânticos a introdução de um ordenamento normal dos campos compostos, para que seja removida a singularidade advinda da OPE. No contexto de funções de correlação como quantização iremos definir o ordenamento dos campos $\phi_1(z)$ e $\phi_2(\omega)$ normal como

$$:\phi_1(z)\phi_2(\omega): \equiv \lim_{\omega\to z}\left[\phi_1(z)\phi_2(\omega) - \langle\phi_1(z)\phi_2(\omega)\rangle\right], \tag{2.66}$$

em que a função de dois pontos remove justamente os termos singulares do produto dos campos. Daqui em diante assumiremos que campos compostos estão sempre ordenados. Ainda assim, é necessário saber como lidar com produtos de campos compostos, como $:\phi_1\phi_2:\phi_3$. Para isso utilizaremos do conhecido Teorema de Wick [5, 43]

$$:\phi_1\phi_2:\phi_3 = \ :\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}: + :\phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}:. \tag{2.67}$$

Em que o colchetes é a chamada contração entre os campos,

$$:\overbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4: \equiv \ :\phi_2\phi_4:\langle\phi_1\phi_3\rangle. \tag{2.68}$$

Com esses elementos podemos ativamente calcular a OPE do tensor energia momento com os campos da teoria. Assim, para o campo bosônico por exemplo,

$$\begin{aligned} T(z)\partial X(\omega) = -\frac{1}{2}:\partial X(z)\partial X(z):\partial X(\omega) &= -:\partial X(z)\partial\overbrace{X(z):\partial X}(\omega) \\ &= -\partial X(z)\langle\partial X(z)\partial X(\omega)\rangle = \frac{\partial X(z)}{(z-\omega)^2}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Por fim, devemos ter na OPE resultante os campos avaliados em ω, e para isso é necessário a expansão em Taylor da expressão anterior até que todos os termos singulares sejam obtidos. Realizando tal processo para o campo bosônico, assim como para o fermiônico e para o tensor energia momento,

$$T(z)\partial X(\omega) \sim \frac{\partial X(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial^2 X(\omega)}{z-\omega}, \tag{2.70a}$$

$$T(z)\psi(\omega) \sim \frac{\frac{1}{2}\psi(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial\psi(\omega)}{z-\omega}, \tag{2.70b}$$

$$T(z)T(\omega) \sim \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega}. \tag{2.70c}$$

Da primeira expressão verificamos que ∂X se transforma como um campo primário, o que não ocorre com o campo bosônico X, e da mesma obtemos que a dimensão conforme de ∂X é $h = 1$. Na segunda expressão, a mesma análise é feita de forma que o campo primário

ψ possui dimensão conforme $h = 1/2$. Por fim, na terceira expressão, ao calcularmos a OPE do tensor energia momento consigo mesmo, observamos um termo anômalo de ordem $(z-\omega)^{-4}$, como esperado, o que confirma a não primariedade do tensor energia momento. Ainda neste termo, podemos notar uma constante $c = (1 + \frac{1}{2})$ que é a carga central e caracteriza o sistema a partir dos campos que o compõem. Esta é uma quantidade extensiva, onde a carga central do bóson é $c_b = 1$ e do férmion $c_f = 1/2$, caracterizando os graus de liberdade do sistema. Este parâmetro é de extrema importância no estudo de CFT e aparecerá constantemente daqui em diante.

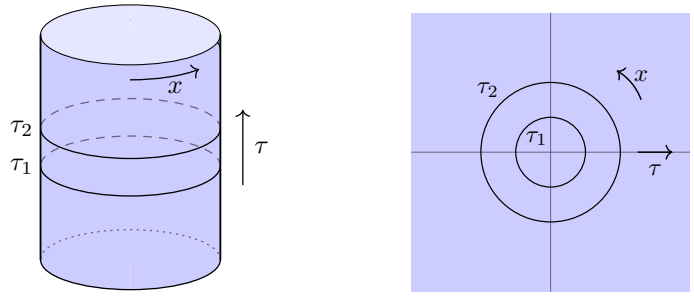
2.5 QUANTIZAÇÃO RADIAL

Até então tínhamos introduzido a quantização do sistema a partir de um formalismo baseado nas integrais de caminho (2.25), que descrevem bem o sistema se o intuito é o calculo das funções de correlação e identidades de Ward. Porém, pode ser mais prático propor um espaço de Hilbert com operadores no sentido usual para uma descrição do sistema por meio da álgebra. Para esta abordagem é necessário agora caracterizarmos as coordenadas de forma a propormos um ordenamento temporal entre os campos envolvidos. Por se tratar de um espaço Euclidiano, há uma arbitrariedade na escolha da coordenada temporal. Seja a princípio uma teoria definida em um cilindro, Figura 2a, de circunferência L, com a coordenada temporal $\tau \in (-\infty, \infty)$ e a coordenada espacial compactificada $x \in [0, L]$. Podemos mapear o cilindro no plano a partir do mapa

$$z = e^{\frac{2\pi}{L}(\tau + ix)}. \tag{2.71}$$

De forma que expandimos o cilindro identificando o infinito temporal passado na origem do plano, $z(\tau = -\infty) = 0$ e $z(\tau = \infty) = \infty$. Assim, pela Figura 2b vemos que a coordenada radial indica a passagem do tempo, enquanto a coordenada angular do espaço.

Figura 2 – Mapeamento do cilindro no plano



(a) Cilindro com coordenadas espaciais compactificadas.

(b) Plano com coordenada temporal radial.

Assim como o operador ordenamento temporal $\mathcal{T}$ usual organiza os operadores de acordo com o tempo associado a cada um deles, no contexto aqui proposto surge um ordenamento radial com uma estrutura semelhante,[6]

$$\mathcal{R}\{\phi_1(z)\phi_2(\omega)\} = \begin{cases} \phi_1(z)\phi_2(\omega) & \text{se} \quad |z| > |\omega| \\ \phi_2(\omega)\phi_1(z) & \text{se} \quad |\omega| > |z| \end{cases} \tag{2.72}$$

Construímos o processo de quantização a partir de uma conexão entre os campos $\hat{\Phi}(z, \bar{z})$ e um estado no espaço de Hilbert $|\Phi\rangle$. Assim,

$$|\Phi\rangle \equiv \hat{\Phi}(0, \bar{0}) \, |\varnothing\rangle \, , \tag{2.73}$$

com $|\varnothing\rangle$ sendo o estado de vácuo. Aqui já podemos ver uma implicação na quantização radial. Sabendo que $z = 0$ está associado ao passado $\tau = -\infty$, o estado $|\Phi\rangle$ é interpretado como um "estado inicial". O estado "final" é obtido ao tomar o complexo conjugado do anterior,

$$\langle\Phi| \equiv \langle\varnothing| \, \hat{\Phi}^\dagger(0, \bar{0}). \tag{2.74}$$

Por uma construção baseada na invariância conforme, a fim de fazer uma conexão com as funções de correlação, é necessário definir uma operação de conjugação apropriada para os operadores, sendo esta dependente da dimensão conforme do campo Φ,[5]

$$\hat{\Phi}^\dagger(z, \bar{z}) \equiv z^{-2\bar{h}} \bar{z}^{-2h} \hat{\Phi}(1/\bar{z}, 1/z). \tag{2.75}$$

Dessa maneira, construímos uma ideia semelhante ao desenvolvido em teorias de espalhamento, em que se define um *in-state*, neste caso na origem, e um *out-state* no infinito que remetem a estados assintóticos livres antes e depois da interação.

[6] Essa definição vale especificamente para campos bosônicos, no caso de campos fermiônicos um sinal advindo da anti-comutação deve ser inserido no segundo termo.

2.5.1 Expansão em Modos

Um campo conforme $\Phi(z,\bar{z})$ de dimensão conforme $(h,\bar{h})$ pode ser expandido em modos de Fourier na forma[7]

$$\Phi(z,\bar{z}) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} z^{-m-h}\bar{z}^{-n-\bar{h}}\Phi_{m,n}, \tag{2.76a}$$

$$\Phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz z^{m+h-1}\frac{1}{2\pi i}\oint d\bar{z}\bar{z}^{n+\bar{h}-1}\Phi(z,\bar{z}). \tag{2.76b}$$

Esses modos atuam como operadores criação/aniquilação gerando o espaço de Hilbert a partir do estado de vácuo. Veja que pela própria definição da expansão, por impormos estados bem comportados na origem, potencias negativas são proibidas, e portanto,

$$\Phi_{m,n}\left|\varnothing\right\rangle = 0 \qquad \text{para} \quad m > -h, \quad n > -\bar{h}. \tag{2.77}$$

Com a definição de operação conjugada (2.75) obtém-se uma importante condição sobre o conjugado dos modos,

$$\Phi^{\dagger}_{m,n} = \Phi_{-m,-n}, \tag{2.78}$$

e portanto, em (2.77),

$$\left\langle\varnothing\right| \Phi^{\dagger}_{m,n} = \left\langle\varnothing\right| \Phi_{-m,-n} = 0 \qquad \text{para} \quad m > -h, \quad n > -\bar{h}. \tag{2.79}$$

Sendo a dimensão conforme do bóson $\partial X(z)$ dada por $h = 1$ (obtida pela OPE com o tensor energia momento em (2.70)) podemos expandir este operador em modos,

$$\partial X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} i\alpha_n = i\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}z^{n-1} + i\frac{\alpha_0}{z} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{z^n}. \tag{2.80}$$

O termo isolado da soma proporcional a z^{-1} torna-se relevante quando integramos a expressão a fim de se obter a expansão do próprio campo bosônico $X(z,\bar{z})$, onde consideramos também a componente anti-holomórfica,

$$X(z,\bar{z}) = x_0 - i\alpha_0 \ln z\bar{z} + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n}{z^{n+1}} + \frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{z}^{n+1}}\right). \tag{2.81}$$

Essa expansão mostra diretamente como o campo bosônico não é analítico e possui divergências diferentes de polos, impedindo uma expansão em modos adequada. Essa divergência se reflete na função de dois pontos, onde apresenta seu comportamento logarítmico, diferente de operadores primários ou quasi-primários como o tensor energia momento. No Capítulo 3 trataremos com mais cuidado o caso da expansão fermiônica e as implicações nas condições de contorno.

[7] Daqui em diante omitiremos o chapéu nos operadores.

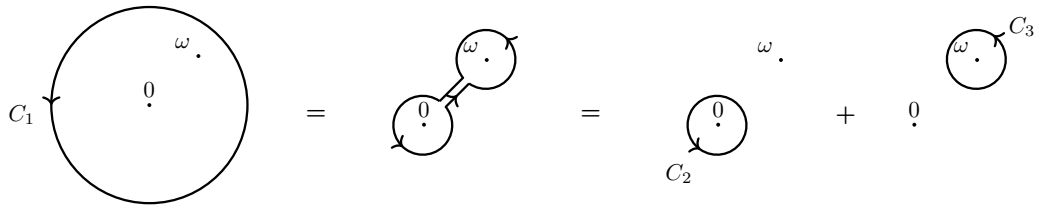
2.5.2 Álgebra de Virasoro

Com a introdução de uma quantização a partir dos operadores no espaço de Hilbert estamos prontos para desenvolver a álgebra que descreve a teoria. Para definir uma relação de comutação utilizamos do conceito de ordenamento radial definido em (2.72). Partimos da integral de contorno ao redor de $z = \omega$ de dois campos,

$$\oint_{\omega} dz \mathcal{R}\{\phi_1(z)\phi_2(\omega)\}. \tag{2.82}$$

Pela Figura 3 vemos que com uma deformação da curva C_1 podemos decompor a mesma em duas curvas C_2 e C_3 que estão centradas em $z = 0$ e $z = \omega$ respectivamente.

Figura 3 – Decomposição do contorno



Assim,

$$\oint_{C_3} dz \mathcal{R}\{\phi_1(z)\phi_2(\omega)\} = \oint_{C_1} dz \phi_1(z)\phi_2(\omega) - \oint_{C_2} dz \phi_2(\omega)\phi_1(z). \tag{2.83}$$

Evidentemente, $|z| > |\omega|$ na curva C_1 e $|\omega| > |z|$ na curva C_2. Definindo as quantidades

$$\Phi_i = \oint dz \phi_i(z), \tag{2.84}$$

e integrando a equação (2.83) em torno da origem, obtemos uma expressão para o calculo dos comutadores,

$$\oint_0 d\omega \oint_{\omega} dz \mathcal{R}\{\phi_1(z)\phi_2(\omega)\} = [\Phi_1, \Phi_2]. \tag{2.85}$$

A partir dessa expressão obtemos importantes resultados com relação à álgebra dos operadores da teoria utilizando apenas da OPE entre os operadores de interesse e calculando seu resíduo.

Assim como fizemos a expansão do operador $\partial X(z)$ podemos também a fazer para o tensor energia momento, com $h = 2$, que se decompõe nos conhecidos modos de Virasoro [5, 36],

$$T(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-2} L_m, \tag{2.86a}$$

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z). \tag{2.86b}$$

Veja que de forma semelhante ao realizado em (2.77) temos uma condição para a atuação dos modos de Virasoro no estado de vácuo $|\varnothing\rangle$ para que o estado resultante seja bem comportado na origem. Assim, $L_n |\varnothing\rangle = 0$ para $n \geq 1$.

Com a expressão obtida em (2.85) e a OPE dos tensores energia momento fazemos,[8]

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^{n+1} \oint_\omega \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z)T(\omega) \\ &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^{n+1} \oint_\omega \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} \right). \end{aligned} \tag{2.87}$$

Com o binômio de Newton,

$$z^{m+1} = (z-\omega+\omega)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (z-\omega)^k \omega^{m+1-k}, \qquad \binom{m+1}{k} \equiv \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!}. \tag{2.88}$$

Pelo teorema dos resíduos, podemos obter o resultado da integral em z para os três termos,

$$\begin{aligned}&\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (z-\omega)^k \omega^{m+1-k} \left(\frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} \right) \\ &= \omega^{m+1}\partial T(\omega) + \omega^m 2(m+1)T(\omega) + \frac{c}{12}\omega^{m-2}(m+1)m(m-1). \end{aligned} \tag{2.89}$$

Por fim, calculamos a integral em ω,

$$\oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i} \left(\sum_k L_k(-2-k)\omega^{n+m-k-1} + 2(m+1)\sum_k L_k \omega^{n+m-k-1} + \frac{c}{12}\omega^{n+m-1}(m+1)m(m-1) \right). \tag{2.90}$$

Novamente, com o teorema de resíduos, resolvemos a integral que agora possui pólos em $\omega = 0$. No primeiro e segundo termos vemos que o mesmo será não nulo quando $k = n+m$, no terceiro quando $n + m = 0$. Portanto,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{n+m} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{n+m,0}. \tag{2.91}$$

Justamente o termo com a carga central na OPE dos tensores energia momento implica em um termo a mais no comutador dos modos com relação à álgebra de Witt. Termos em álgebras como esta, que contem a carga central, serão referidos como anômalos. Logicamente o que fizemos aqui vale também para a componente anti-holomórfica do tensor energia momento, e ambas partes não se misturam.

[8] É importante atentar-se aos *shifts* advindos da dimensão conforme na expansão de Fourier.

Na própria expressão que descreve a relação dos estados e os operadores (2.73) podemos definir o estado que representa especificamente um campo primário de dimensão conforme h como $|h\rangle \equiv \phi_h(0)\,|\varnothing\rangle$. Com o comutador dos modos de Virasoro e a OPE (2.58) obtemos,

$$[L_n, \phi_h(\omega)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\omega dz z^{n+1} T(z)\phi_h(\omega) \sim h(n+1)\omega^n\phi(\omega) + \omega^{n+1}\partial\phi_h(\omega). \tag{2.92}$$

E portanto o modo de Virasoro L_0 possui como autovalor justamente o peso conforme dos estados primários,

$$L_0\,|h\rangle = L_0\phi_h(0)\,|\varnothing\rangle = [\phi_h(0)L_0 + h\phi_h(0)]\,|\varnothing\rangle = h\,|h\rangle\,. \tag{2.93}$$

Note que pela norma positiva definida deste estado temos uma condição sobre os valores do peso conforme,

$$\langle h|\,L_0\,|h\rangle = h\,\langle h|h\rangle \geq 0 \to h \geq 0. \tag{2.94}$$

Veja que, com a decomposição em modos do tensor energia momento (2.86a) e a condição sob os modos negativos (2.79), obtemos o valor esperado do tensor energia momento $\langle\varnothing|\,T(z)\,|\varnothing\rangle = 0$. Este resultado se dá especificamente no plano complexo, e adquire correções importantes ao considerarmos uma superfície com curvatura não nula [5, 6]. De fato, a coleção de resultados $L_{-1}\,|\varnothing\rangle = L_0\,|\varnothing\rangle = L_1\,|\varnothing\rangle = 0$ contém em si a própria invariância do estado de vácuo pela simetria conforme, dado que, como obtido anteriormente, os geradores de tais simetrias são justamente L_{-1},L_0 e L_1.

Por fim, observamos com o comutador (2.92) aliado à condição (2.77), que os estados primários são aniquilados para qualquer modo positivo,

$$L_n\,|h\rangle = 0 \quad n > 0. \tag{2.95}$$

Novamente, todo o resultado obtido ate aqui também vale para a componente anti-holomórfica dos estados primários. Ao considerarmos modos negativos atuando em um estado primário podemos ver quer os modos negativos aumentam a dimensão conforme dos estados primários,

$$L_0L_{-n}\,|h\rangle = (h+n)\,|h\rangle \implies L_{-n}\,|h\rangle = |h+n\rangle\,, \tag{2.96}$$

de forma que definimos assim os estados descendentes a partir de uma coleção de atuações dos modos negativos L_{-j_i},

$$L_{-j_1}L_{-j_2}\cdots L_{-j_n}\,|h\rangle \qquad 1 \leq j_1 \leq j_2 \cdots \leq j_n. \tag{2.97}$$

Cada atuação aumenta a dimensão conforme do estado primário e a coleção de todos os estados nesse conjunto compõe a família conforme do estado primário.

2.5.3 Operadores de Vértice

Seja $\phi(z,\bar{z})$ um campo bosônico livre. Com a expansão em modos obtida em (2.81) observamos uma dependência logarítmica, indicando um comportamento não-local. Porém, podemos construir operadores localmente bem definidos chamados de operadores de vértice,

$$V_\alpha(z,\bar{z}) \equiv \ :e^{i\alpha\phi(z,\bar{z})}: . \tag{2.98}$$

Veja que esse operador é de fato um operador composto, e por isso definimos o mesmo com o ordenamento normal. Devemos mostrar que este, diferente do campo ϕ, é um campo primário. Ainda com os conceitos de OPE e teorema de Wick, temos

$$\begin{aligned}\partial\phi(z)V_\alpha(\omega,\bar{\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!}\partial\phi(z)\,:\phi(\omega,\bar{\omega})^n: \\ &\sim i\alpha\frac{V_\alpha(\omega,\bar{\omega})}{z-\omega}.\end{aligned} \tag{2.99}$$

É simples ver que a OPE se reduz a uma contagem das possíveis contrações entre n campos idênticos $\phi(\omega,\bar{\omega})$ e o campo $\partial\phi(z)$. E com isso resulta-se apenas na função de correlação entre os dois campos, em que utilizamos $\langle\phi(z,\bar{z})\phi(\omega,\bar{\omega})\rangle = -2\log|z-\omega|$. O mesmo fazemos para a OPE entre o tensor energia momento e o operador de vértice,

$$\begin{aligned}T(z)V_\alpha(\omega,\bar{\omega}) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!}\,:\partial\phi(z)\partial\phi(z):\phi(\omega,\bar{\omega})^n: \\ &\sim \frac{\alpha^2}{2}\frac{V_\alpha(\omega,\bar{\omega})}{(z-\omega)^2}+\frac{\partial_\omega V_\alpha(\omega,\bar{\omega})}{z-\omega}.\end{aligned} \tag{2.100}$$

E portanto, vemos que este se comporta como um campo primário a partir da expressão geral em (2.58) e com a mesma podemos ler a dimensão conforme do operador como

$$h = \frac{\alpha^2}{2}. \tag{2.101}$$

Por fim, podemos ainda obter uma expressão para a OPE entre dois operadores de vértice. Para isso utilizamos da relação entre composições de campos livres ϕ_i,

$$:e^{i\alpha\phi_1}::e^{i\beta\phi_2}: = :e^{i(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)}:\,e^{-\alpha\beta\langle\phi_1\phi_2\rangle}. \tag{2.102}$$

Para os operadores de vértice,

$$\begin{aligned}V_\alpha(z,\bar{z})V_\beta(\omega,\bar{\omega}) = :e^{i(\alpha\phi(z)+\beta\phi(\omega))}:\,e^{2\alpha\beta\ln|z-\omega|} &= |z-\omega|^{2\alpha\beta}\,:e^{i(\alpha\phi(z)+\beta\phi(\omega))}: \\ &\sim |z-\omega|^{2\alpha\beta}V_{\alpha+\beta}(\omega,\bar{\omega})+\cdots\end{aligned} \tag{2.103}$$

Na ultima expressão, como de praxe, expandimos a função em $z = \omega$. Por este resultado vemos que a função de dois pontos entre dois operadores de vértice só é não nula se $\alpha = -\beta$. Além disso, a OPE de operadores de vértice compostos por campos distintos é regular em $z = \omega$. Para uma função de correlação envolvendo uma coleção de operadores de vértice,

$$\langle \prod_{i}^{j} {:}e^{i\alpha_i \phi(z_i, \bar{z}_i)}{:} \rangle = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2\alpha_i \alpha_j}, \tag{2.104}$$

com $\sum_i \alpha_i = 0$.

3 A TEORIA CONFORME DO SISTEMA D1-D5

"If you wish to make an apple pie from scratch, you must first invent the universe."

Carl Sagan, Cosmos: A Personal Voyage, S01EP09.

3.1 A MOTIVAÇÃO HOLOGRÁFICA: TEORIA DE CORDAS

Desde o início da formulação da mecânica quântica, a compreensão de uma teoria quântica da gravidade tem sido amplamente discutida, com diversos problemas surgindo na tentativa de construir uma teoria aceitável pelos métodos usuais, como a não-renormalização por abordagens perturbativas [44, 45, 46]. Procedimentos, como a teoria de cordas, têm sido propostos na tentativa de contornar tais problemas [6].

A teoria de cordas se baseia na ideia de que os elementos fundamentais que descrevem o universo conhecido não são partículas pontuais, mas objetos unidimensionais se propagando em um espaço de fundo. Um exemplo de sistema de cordas é o tipo IIB, composto por cordas fechadas e por Dp-branas, com p ímpar. As D-branas são objetos extensos que permeiam o hiper-espaço e permitem que cordas abertas se acoplem às branas a partir de condições de contorno de Dirichlet [7, 11]. No limite de baixas energias, $l_s \equiv \sqrt{\alpha'} \to 0$, com l_s definindo o tamanho da corda, as correções provenientes dos modos de alta frequência das cordas desacoplam, e a teoria de cordas fica descrita como uma teoria de supergravitação [11].

Uma das construções possíveis é o sistema D1-D5, amplamente descrito na literatura em um espaço-tempo em 10 dimensões [11, 18, 47, 48]. Esse sistema é composto por N_1 D1-branas, que envolvem uma dimensão y compactificada em S^1, e N_5 D5-branas que envolvem toda uma superfície 5-dimensional $S^1 \times T^4$, com S^1 em comum com as D1-branas. A partir do limite de baixas energias na ação que descreve as cordas, a métrica do espaço 10-dimensional construído é [11, 17]

$$ds_{10}^2 = \frac{1}{\sqrt{H_1 H_5}}(-dt^2 + dy^2) + \sqrt{H_1 H_5}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) + \sqrt{\frac{H_1}{H_5}} ds_4^2(T^4), \tag{3.1a}$$

$$H_1 = 1 + \frac{Q_1}{r^2}, \quad H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^2}, \tag{3.1b}$$

com $H_{1,5}$ sendo as funções harmônicas e $Q_1 = g_s \alpha'^3 N_1 / V_{T^4}$, $Q_5 = g_s \alpha' N_5$ as cargas das branas[1].

[1] Definimos g_s como o acoplamento das cordas e V_{T^4} o volume do torus-4.

Observa-se que no limite $r \to \infty$ temos $H_{1,5} \approx 1$ e a métrica torna-se assintoticamente plana decomposta por $\text{Mink}_5 \times S^1 \times T^4$. Já no limite $r \to 0$, as funções harmônicas tomam a forma

$$H_{1,5} \approx \frac{Q_{1,5}}{r^2}, \tag{3.2}$$

e a métrica

$$ds_{10}^2 = f(r)(-dt^2 + dy^2) + f(r)^{-1}dr^2 + \sqrt{Q_1 Q_5}d\Omega_3^2 + \sqrt{\frac{Q_1}{Q_5}}ds_4^2(T^4), \tag{3.3a}$$

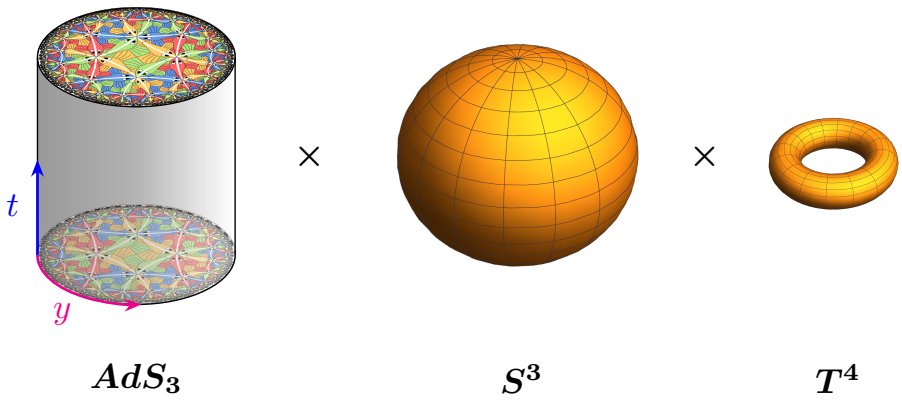
$$f(r) = \frac{r^2}{\sqrt{Q_1 Q_5}}. \tag{3.3b}$$

Esse tipo de solução descreve uma estrutura de branas negras extremais, com singularidade e horizonte de eventos em $r = 0$, e que podem ser interpretadas como buracos negros extensos [7, 49, 17]. Ainda no limite $r \to 0$, com a reparametrização $z \equiv \sqrt{Q_1 Q_5}/r$ a métrica torna-se

$$ds_{10}^2 = \frac{\sqrt{Q_1 Q_5}}{z^2}(-dt^2 + dz^2 + dy^2) + \sqrt{Q_1 Q_5}d\Omega_3^2 + \sqrt{\frac{Q_1}{Q_5}}ds_4^2(T^4). \tag{3.4}$$

Ou seja, o espaço é decomposto por $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, com o raio
$R_{AdS}^2 = R_{S^3}^2 = (Q_1 Q_5)^{1/2} = g_s \alpha'^2 \sqrt{N_1 N_5 / V_{T^4}}$.

Figura 4 – Decomposição do espaço 10-dimensional



Fonte: Representação da folheação do espaço AdS retirada de [50, 51]

Na formulação conjecturada por Maldacena, é proposto que uma CFT_2 vivendo na borda de um espaço AdS_3 é dual à uma teoria de cordas do tipo IIB definida em $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ [11]. Para mantermos a decomposição $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ no limite de baixas energias, impõe-se

$$\alpha' \to 0, \qquad U \equiv \frac{r}{\alpha'} = \text{constante}, \tag{3.5}$$

de modo que a geometria plana de Minkowski é desacoplada. Além disso, para que na ação efetiva os termos de maior ordem de curvatura $\mathcal{R}$ sejam negligenciáveis, requeremos que a curvatura do espaço $AdS_3 \times S^3$ seja pequena na escala das cordas l_s,

$$\mathcal{R} = \frac{l_s^2}{R_{AdS}^2} \propto \frac{1}{g_s\sqrt{N_1 N_5}} \ll 1, \tag{3.6}$$

o que permite inferir que a solução de gravitação apropriada é obtida no limite $g_s^2 N \gg 1$ [11].

Uma característica fundamental do argumento de dualidade é a equivalência das simetrias dos espaços em questão. Sabemos que um espaço AdS possui isometrias do tipo $SO(2,2)$ que são localmente isomórficas à $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ [7]. Este coincide justamente com a subálgebra de Virasoro para transformações globais [5]. No trabalho de Brown-Henneaux [52], o estudo de simetrias assintoticas do espaço AdS_3 demonstrou ser gerado justamente por duas cópias da Álgebra de Virasoro, e assim, a carga central associada a essa geometria pôde ser obtida

$$c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N^{(3)}}. \tag{3.7}$$

No contexto do sistema D1-D5, com o raio $R_{AdS}^2 = g_s\alpha'^2\sqrt{N_1 N_5/V_{T^4}}$ e a constante gravitacional de Newton em 3 dimensões $G_N^{(3)} = g_s^2\alpha'^4/4V_{T^4}R_{AdS}^3$, obtemos a carga central referente à geometria do espaço AdS_3: $c = 6N_1N_5$.

Um outro aspecto importante ocorre quando introduzimos uma carga Q_p associada a N_p unidades de momento na direção da brana compactificada em y. Essa carga gera um horizonte não trivial análogo a um buraco negro BTZ (Bañados-Teitelboim-Zanelli) [53], que nos permite adquirir uma entropia de Bekenstein-Hawking não nula [15, 54] e que mostra-se equivalente à contagem de microestados pela abordagem de branas na teoria tipo IIB realizada por Strominger-Vafa [14],

$$S = \frac{A}{4G_N^{(3)}} = 2\pi\sqrt{N_1 N_5 N_p}. \tag{3.8}$$

Pela conjectura de Maldacena, essa equivalência é explicada pela dualidade, em que os estados correspondentes à geometria no espaço AdS vivem na CFT. Nesse aspecto, o sistema D1-D5 torna-se essencial no entendimento da dualidade AdS_3/CFT_2, permitindo a comparação de resultados em ambas teorias.

3.2 A SCFT COM $\mathcal{N} = (4,4)$

Iniciamos o estudo da CFT Supersimétrica (SCFT) considerando um sistema de bósons $X^i(z,\bar{z})$ e férmions $\psi^{\alpha\dot{A}}(z)$, ambos livres. Esses campos possuem um espaço bidimensional como espaço base, respeitando a simetria conforme discutida no Capítulo 2. Neste caso, estamos interessados em uma teoria com quatro campos bosônicos e quatro campos fermiônicos, na qual serão impostas $\mathcal{N} = (4,4)$ supersimetrias que relacionam bósons e férmions. Ou seja, quatro supercargas no setor holomórfico e quatro no setor anti-holomórfico. Além das simetrias conformes e supersimetria teremos também simetrias associadas ao próprio espaço alvo, neste caso $S^3 \times T^4$. Esse espaço alvo possui simetria do grupo $SO(4)_E$, da esfera, que está relacionada à simetria global do espaço referente às componentes holomórficas e anti-holomórficas, ou usualmente chamadas de *"left-moving"* e *"right-moving"*, respectivamente. Além desta, também há a simetria $SO(4)_T$ associada às rotações do torus. É conhecido que o grupo $SO(4)$ pode ser decomposto em dois grupos de rotação bidimensionais [18, 47]. Assim, escrevemos,

$$SO(4)_E \cong SU(2)_L \times SU(2)_R \quad \text{e} \quad SO(4)_T \cong SU(2)_1 \times SU(2)_2. \tag{3.9}$$

Os bósons $X^i(z,\bar{z})$ com $i = 1,2,3,4$, são tratados como vetores de $SO(4)_T$, com o papel de representar as coordenadas do torus. Já os férmions, sendo spinores de duas componentes, são separados em duas componentes, holomórficas e antiholomórficas,

$$\psi^{\alpha\dot{A}}(z) \quad \text{e} \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}\dot{A}}(\bar{z}). \tag{3.10}$$

Novamente, sabendo que os vetores de $SO(4)$ podem ser decompostos em $SU(2) \times SU(2)$, utilizando das matrizes de Pauli, reescrevemos os campos bosônicos a partir da notação,

$$[X]^{\dot{A}A} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} X^i \left(\sigma^i\right)^{\dot{A}A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} X^3 + iX^4 & X^1 - iX^2 \\ X^1 + iX^2 & -X^3 + iX^4 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

com σ^i, $i = 1,2,3$, sendo as matrizes de Pauli e $\sigma^4 \equiv i\mathrm{I}_2$. Os índices devem indicar justamente a qual parte da decomposição $SU(2) \times SU(2)$ tal objeto pertence. Dessa forma,

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \quad \text{vetores de } SU(2)_L, \qquad A, B, C \rightarrow \quad \text{vetores de } SU(2)_1, \\ &\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma} \rightarrow \quad \text{vetores de } SU(2)_R, \qquad \dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \rightarrow \quad \text{vetores de } SU(2)_2, \end{aligned}$$

com $\alpha, \beta = +, -$ e $A, B = 1, 2$ de forma que os tensores anti-simétricos $\epsilon_{AB}, \epsilon_{\alpha\beta}$ têm suas componentes $\epsilon_{12} = \epsilon_{+-} = -\epsilon_{21} = -\epsilon_{-+} = 1$.

Com as simetrias descritas podemos então definir as correntes conservadas. Para o grupo de rotações $SU(2)_L$ temos a corrente da simetria-R,

$$J^a(z) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}\psi^{\gamma\dot{B}}, \tag{3.12}$$

onde o índice $a = 1, 2, 3$ é referente aos vetores do grupo associado. Para a supersimetria, temos a supercorrente, responsável pela troca bóson-férmion,

$$G^{\alpha A}(z) = \psi^{\alpha\dot{A}}[\partial X]^{\dot{B}A}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}. \tag{3.13}$$

E por fim, o tensor energia momento,

$$T(z) = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}[\partial X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{B}B} + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\partial\psi^{\beta\dot{B}}. \tag{3.14}$$

Com essas correntes podemos obter informações sobre a SCFT a partir do cálculo das OPE's, e consequentemente de suas álgebras. Essas correntes, como é de se esperar, possuem também suas versões anti-holomórficas.

3.2.1 Álgebra Superconforme

Das correntes da teoria podemos obter as OPE's associadas à SCFT $\mathcal{N} = 4$,[2]

$$J^a(z)G^{\alpha A}(\omega) \sim \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\mu}\frac{G^{\mu A}(\omega)}{z-\omega}, \tag{3.15a}$$

$$T(z)G^{\gamma C}(\omega) \sim \frac{3}{2}\frac{1}{(z-\omega)^2}G^{\gamma C}(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial G^{\gamma C}(\omega), \tag{3.15b}$$

$$G^{\alpha A}(z)G^{\beta B}(\omega) \sim -2\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^3} + \epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}\left[\frac{2J^a(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega}\right] - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}\frac{T(\omega)}{z-\omega}, \tag{3.15c}$$

$$J^a(z)J^b(\omega) \sim \frac{1}{2}\frac{\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + i\epsilon^{ab}{}_{c}\frac{J^c(\omega)}{z-\omega}, \tag{3.15d}$$

$$T(z)J^a(\omega) \sim \frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega} + \frac{J^a(\omega)}{(z-\omega)^2} \tag{3.15e}$$

$$T(z)T(\omega) \sim \frac{3}{(z-\omega)^4} + 2\frac{T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega}. \tag{3.15f}$$

Tais expressões estão de acordo com o esperado para as OPE's da SCFT considerando a carga central $c = 6$. Isso porque para os bósons temos $c_b = 4 * 1 = 4$ e para os férmions, $c_f = 4 * 1/2 = 2$. A carga central total, sendo aditiva, é $c = c_b + c_f = 6$.

[2] O calculo das OPE's encontra-se no apêndice (B.1)

Um resultado importante a se extrair dessas OPE's são as dimensões conformes h de cada corrente. Como resultado de CFT, sabemos ler a dimensão conforme de um operador primário a partir de (2.58), e assim, das OPE's (3.15) lemos as dimensões conformes de $J^a(z)$ e $G^{\alpha A}(z)$ como $h = 1, 3/2$, respectivamente. Para o tensor energia momento, devemos considerar que o mesmo não se transforma como um operador primário, mas como um quasi-primário de dimensão conforme $h = 2$. Definimos então os modos dos operadores holomórficos a partir da integral de contorno,

$$\mathcal{O}_m = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \mathcal{O}(z) z^{h+m-1}, \tag{3.16a}$$

$$\mathcal{O}(z) = \sum_{m \in \mathrm{Z}} \mathcal{O}_m z^{-(h+m)}, \tag{3.16b}$$

em que $\mathcal{O}(z)$ é o campo associado ao modo $\mathcal{O}_m$. Então, obtemos os modos do tensor energia momento,

$$L_n = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \tag{3.17a}$$

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-2-n}, \tag{3.17b}$$

da corrente associada ao grupo $SU(2)_L$,

$$J^a_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J^a(z), \tag{3.18a}$$

$$J^a(z) = \sum_n J^a_n z^{-1-n}, \tag{3.18b}$$

e da corrente de supersimetria,[3]

$$G^{\alpha A}_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1/2} G^{\alpha A}(z), \tag{3.19a}$$

$$G^{\alpha A}(z) = \sum_n G^{\alpha A}_n z^{-3/2-n}. \tag{3.19b}$$

[3]Diferente dos modos de simetria-R e tensor energia momento, em que $n \in \mathbb{N}$, os modos de supersimetria possuem modos fracionários.

Com os modos de cada corrente é possível então obter a álgebra a partir dos comutadores dos mesmos, que construímos a partir da quantização radial (2.85), [4]

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{n+m} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{n+m,0}, \tag{3.20a}$$

$$\left[L_m, G_n^{\alpha A}\right] = G_{m+n}^{\alpha A}(\frac{m}{2} - n), \tag{3.20b}$$

$$[L_m, J_n^a] = -nJ_{m+n}^a, \tag{3.20c}$$

$$\left[J_m^a, J_n^b\right] = \frac{c}{12}m\delta_{m+n,0}\delta^{ab} + i\epsilon_c^{ab}J_{m+n}^c, \tag{3.20d}$$

$$\left[J_m^a, G_n^{\alpha A}\right] = \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\beta}G_{m+n}^{\beta A}, \tag{3.20e}$$

$$\left\{G_m^{\alpha A}, G_n^{\beta B}\right\} = (m-n)\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}J_{m+n}^a - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}L_{m+n} - \frac{c}{6}(m^2-1/4)\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}\delta_{m+n,0}. \tag{3.20f}$$

Aqui nós retornamos com a expressão em termos da carga central para compreender implicações desse resultado. Essa álgebra infinita possui uma subálgebra formada pelos modos $\{L_0, L_{\pm 1}, J_0^a, G_{\pm\frac{1}{2}}^{\alpha A}\}$. A importância desses modos específicos é que a álgebra formada por estes é dita livre de anomalias, em outras palavras, nessa álgebra o termo de carga central desaparece. Além disso, ainda podemos definir uma outra subálgebra a partir dos modos $\{L_0, J_0^3\}$, e assim podemos diferenciar estados da nossa teoria a partir dos autovalores desses modos por $J_0^3 |j,h\rangle = j |j,h\rangle$ e $L_0 |j,h\rangle = h |j,h\rangle$, em que j é a carga e h a dimensão conforme do estado/operador.

3.2.1.1 Bosonificação

Para nossos propósitos será útil a representação dos férmions bosonificados na teoria, sendo os quatro férmions do setor holomórfico escritos em termos de bósons ϕ^5 e ϕ^6, na forma,

$$\psi^{\alpha\dot{1}}(z) = \begin{bmatrix} e^{-i\phi^6} \\ e^{-i\phi^5} \end{bmatrix}, \quad \psi^{\alpha\dot{2}}(z) = \begin{bmatrix} e^{i\phi^5} \\ -e^{i\phi^6} \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Aqui podemos checar a validade de tal representação sob algumas condições. Primeiramente os graus de liberdade devem ser os mesmos, e essa condição é garantida considerando que as cargas centrais de ambas representações são equivalentes. Se antes tínhamos 4 férmions implicando em uma carga central $c = 4 * 1/2 = 2$ agora temos 2 bósons ϕ^5, ϕ^6 com uma carga central $c = 2 * 1 = 2$. Uma outra imposição importante é justamente a

[4] O cálculo explicito da álgebra encontra-se no apêndice (B.2)

relação de anticomutação dos férmions. Se na representação anterior tinhamos,

$$\psi^{+\dot{1}}\psi^{+\dot{2}} = -\psi^{+\dot{2}}\psi^{+\dot{1}}, \tag{3.22}$$

na nova representação, em termos dos bósons, será necessário impor

$$e^{-i\phi^6}e^{i\phi^5} = -e^{i\phi^5}e^{-i\phi^6}. \tag{3.23}$$

Assim, de forma implícita sabemos que a ordem em que os campos ϕ^5 e ϕ^6 aparecem importa na construção da nova representação [55].

Temos por exemplo para o caso com $\psi(z) = e^{i\phi^i(z)}$ e $\psi^\dagger(z) = e^{-i\phi^i(z)}$, as OPE's na representação de bósons, baseada na OPE dos operadores de vértice (2.103),

$$:e^{i\phi^i(z)}::e^{i\phi^i(\omega)}: \sim (z-\omega)e^{i(\phi^i(z)+\phi^i(\omega))}, \tag{3.24a}$$

$$:e^{i\phi^i(z)}::e^{-i\phi^i(\omega)}: \sim (z-\omega)^{-1}e^{i(\phi^i(z)-\phi^i(\omega))}. \tag{3.24b}$$

Aqui é necessário fazer a normalização da OPE dos bósons tal que a função de dois pontos fica dada por $\langle\phi^i(z)\phi^j(\omega)\rangle = -\delta^{ij}\log(z-\omega)$. Dessa forma, expandindo ω em torno de z e tomando o limite $\omega \to z$,

$$e^{i\phi^i(z)}e^{i\phi^i(z)} \sim 0, \tag{3.25a}$$

$$e^{i\phi^i(z)}e^{-i\phi^i(\omega)} \sim \frac{1}{(z-\omega)} + i\partial\phi^i(\omega). \tag{3.25b}$$

O que está de acordo com uma teoria de férmions livres complexos.[5] Um resultado imediato dessa bosonificação é a nova forma tomada pelas cargas da simetria-R, $J^a(z)$. Pela própria definição da corrente (3.12) temos,

$$\begin{aligned} J^3(z) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^3)^\beta{}_\gamma\psi^{\gamma\dot{B}} &= \frac{1}{2}\psi^{+\dot{2}}\psi^{-\dot{1}} - \frac{1}{2}\psi^{+\dot{1}}\psi^{-\dot{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i\phi^5}e^{-i\phi^5} - e^{i\phi^6}e^{-i\phi^6}\right) = \frac{i}{2}\left(\partial\phi^5 - \partial\phi^6\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Com a notação das matrizes de Pauli tal que $(\sigma^3)^1{}_1 = 1$. Uma outra observação é que no último passo consideramos os campos bosônicos em pontos diferentes, de forma que a OPE é utilizada e então o limite $\omega \to z$ é tomado. O mesmo processo vale para as

[5] O termo adicional $i\partial\phi^i$ é regular em $z = \omega$, o que não modifica a OPE.

correntes $J^1(z)$ e $J^2(z)$,

$$J^1(z) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^1)^{\beta}{}_{\gamma}\psi^{\gamma\dot{B}} = -\frac{1}{2}\psi^{+\dot{2}}\psi^{+\dot{1}} + \frac{1}{2}\psi^{-\dot{2}}\psi^{-\dot{1}}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^{i\phi^5}e^{-i\phi^6} + e^{i\phi^6}e^{-i\phi^5}\right), \tag{3.27}$$
$$J^2(z) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^2)^{\beta}{}_{\gamma}\psi^{\gamma\dot{B}} = \frac{i}{2}\psi^{+\dot{2}}\psi^{+\dot{1}} + \frac{1}{2}\psi^{-\dot{2}}\psi^{-\dot{1}}$$
$$= \frac{i}{2}\left(e^{i\phi^5}e^{-i\phi^6} - e^{i\phi^6}e^{-i\phi^5}\right). \tag{3.28}$$

Por fim, a partir das definições dos operadores escada $J^{\pm}(z) = J^1 \pm iJ^2$ temos,

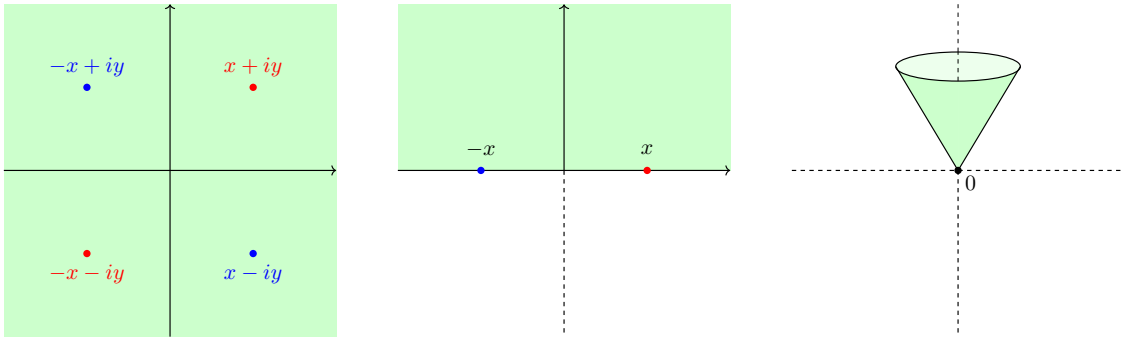
$$J^+(z) = e^{-i\phi^6}e^{i\phi^5} \quad \text{e} \quad J^-(z) = e^{-i\phi^5}e^{i\phi^6}. \tag{3.29}$$

3.3 O ORBIFOLD SIMÉTRICO NO PONTO LIVRE

Em geral, os orbifolds são obtidos a partir de uma variedade após a identificação de pontos sob um grupo de simetrias discretas. Singularidades surgem a partir de equivalências de elementos do conjunto. Um exemplo simples de uma variedade é o próprio plano complexo $\mathbb{C}$. Se realizarmos uma identificação g dos pontos do plano tal que $g(x+iy) = -x - iy$, representada por $\mathbb{Z}_2$, obtemos o espaço quociente $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$. Veja que não é necessário todo o plano para descrever este espaço, dado que pontos equivalentes são descritos pela atuação de $\mathbb{Z}_2$. A princípio podemos dividir este plano em duas metades equivalentes, Figura 5b.

A partir da identificação da reta real, o espaço quociente $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_2$ pode ser descrito como um cone, cujo vértice em $x, y = 0$ é uma singularidade pois permanece invariante sob a identificação, Figura 5c. O espaço quociente resultante é um exemplo de orbifold. Com exceção dos pontos de singularidade, o orbifold se comporta exatamente como uma variedade comum.

Figura 5 – Construção de um espaço quociente



(a) Identificação dos quadrantes.

(b) Identificação da reta real.

(c) Cone com ponto singular em $z = 0$.

No caso do sistema D1-D5, o orbifold é criado a partir de $N = N_1N_5$ cópias da SCFT que contém os bósons e férmions, descritos na variedade do torus (T^4), de forma que as singularidades são formadas a partir da identificação das cópias pelo grupo simétrico S_N. Assim, definimos o orbifold simétrico pelo quociente $\mathrm{Sym}_N(T^4) \equiv (T^4)^N/S_N$. Veja que no sistema do orbifold a carga central da teoria torna-se $c = 6N_1N_5$, recuperando o resultado obtido para a geometria AdS_3 por Brown-Henneaux, e indicando o alto grau de liberdade no limite $N_1, N_5 \gg 1$.

3.3.1 O Grupo Simétrico S_N

A identificação realizada pelo grupo simétrico S_N é descrita a partir da permutação dos elementos de um dado conjunto. Como exemplo, consideremos um conjunto de $N = 3$ elementos dado por $\{1, 2, 3\}$, de forma que $g_i \in S_3$ será definido como as diferentes maneiras de se permutar os elementos. A permutação cíclica g_1 que realiza as trocas $1 \to 2 \to 3 \to 1$, pode ser expressada por uma representação de duas linhas [56],

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ g_1(1) & g_1(2) & g_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

em que os elementos "anteriores" à permutação são escritos na primeira linha e os elementos "após" a permutação na segunda linha. De forma geral, para elementos a_n, com $n = 1, 2, .., N$, a permutação é definida como

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ g(a_1) & g(a_2) & \cdots & g(a_N) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

A definição da permutação não depende de como os elementos são ordenados, apenas de quais elementos estão sendo permutados. Ou seja, há diversas maneiras de se representar

uma permutação, necessitando apenas da correta correspondência dos elementos nas duas linhas. Por exemplo,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \cdots \tag{3.32}$$

Um conceito importante a se descrever nessa notação de duas linhas são as composições de permutações, $j \circ g$. Assim, sejam as permutações

$$j = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ j(b_1) & j(b_2) & \cdots & j(b_N) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ g(a_1) & g(a_2) & \cdots & g(a_N) \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

A composição resultante é

$$\begin{aligned} j \circ g &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ j(b_1) & j(b_2) & \cdots & j(b_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ g(a_1) & g(a_2) & \cdots & g(a_N) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ jg(a_1) & jg(a_2) & \cdots & jg(a_N) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Veja que convencionamos que a atuação das permutações é realizada da direta para a esquerda, primeiro realiza-se g e então j. A partir de verificação direta pode-se demonstrar que em geral a operação de permutação não é comutativa. Podemos utilizar ainda das diversas maneiras de se denotar uma permutação para descrever uma composição. Sejam duas permutações do grupo S_5,

$$g_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Então a composição,

$$\begin{aligned} g_2 \circ g_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{3} \end{pmatrix} \qquad (3.36) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \equiv g_3. \qquad (3.37) \end{aligned}$$

Na equação (3.36) utilizamos da arbitrariedade da ordem dos elementos e rearranjamos tal que a primeira linha de g_2 esteja na mesma ordem que a segunda linha da g_1.

O "cancelamento" das linhas constrói uma única permutação a partir das duas primeiras, $g_2 \circ g_1 = g_3$. Pelo exemplo anterior podemos ver que em g_3 os elementos 1,2 e 3 são

permutados entre si, e o mesmo ocorre com os elementos 4 e 5. Dizemos assim que a permutação é composta por duas permutações de ciclos de comprimentos 3 e 2 respectivamente. Quando não há nenhum elemento em comum nos ciclos, estes são chamados de disjuntos.

Apesar da notação de duas linhas ser eficiente no cálculo de composição de permutações, podemos adotar a notação de apenas uma linha. No exemplo anterior, pela decomposição em ciclos,

$$g_1 = (1\ 5\ 3\ 2)(4), \quad g_2 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2) \quad \text{e} \quad g_3 = (1\ 2\ 3)(4\ 5). \tag{3.38}$$

Em que, por exemplo, no caso de g_1, os elementos sofrem uma permutação cíclica $1 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1$ e o elemento 4 permanece invariante. Para o elemento invariante, indicamos com um ciclo de comprimento 1, que muitas vezes é omitido. Nesta notação podemos ver ainda que $(1\ 2\ 3)(4\ 5) = (4\ 5)(1\ 2\ 3)$, ou seja, permutações decompostas em ciclos disjuntos comutam.

Um exemplo de permutação não disjunta decomposta é $(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 4)$. Claramente esta não é uma permutação disjunta, pois há elementos em comum em ambos ciclos. Utilizando a notação de duas linhas podemos observar que,

$$\begin{aligned}(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 4) &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ou seja, partimos de uma permutação não disjunta e mostramos que esta é equivalente à duas permutações cíclicas de tamanho 2 e disjuntas. De forma geral, qualquer permutação $g \in S_N$ pode ser decomposta em ciclos disjuntos tal que $\sum n_i = N$ sendo n_i o tamanho do ciclo i [56].

3.3.1.1 Classes de Conjugação

Duas permutações $g, j \in S_N$ são ditas conjugadas se existe $h \in S_N$ tal que $hgh^{-1} = j$. Seja a princípio uma permutação g na notação de duas linhas definida por

$$g \equiv \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_N\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & a_{k+1} & \cdots & a_N\end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Ou seja, a permutação é composta por uma permutação cíclica de tamanho k, tal que $g(a_i) = a_{i+1}$ para $i \leq k$ e $g(a_k) = a_1$, além de uma coleção de permutações triviais de

tamanho 1 com $g(a_i) = a_i$ para $k < i \leq N$. Também definimos uma permutação genérica $h \in S_N$,

$$h \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & \cdots & b_N \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Queremos demonstrar que a operação de conjugação hgh^{-1} pode ser escrita como

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} h(a_1) & h(a_2) & \cdots & h(a_k) & h(a_{k+1}) & \cdots & h(a_N) \\ h(a_2) & h(a_3) & \cdots & h(a_1) & h(a_{k+1}) & \cdots & h(a_N) \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Assim, pelas expressões (3.40) e (3.41) temos,

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cdots & \cancel{a_k} & \cdots & \cancel{a_N} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & \cdots & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cdots & \cancel{a_N} \end{pmatrix} \tag{3.43a}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k & \cdots & b_N \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & \cdots & a_N \end{pmatrix} \tag{3.43b}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{a_2} & \cancel{a_3} & \cdots & \cancel{a_1} & \cdots & \cancel{a_N} \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 & \cdots & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k & \cdots & b_N \\ \cancel{a_2} & \cancel{a_3} & \cdots & \cancel{a_1} & \cdots & \cancel{a_N} \end{pmatrix} \tag{3.43c}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k & \cdots & b_N \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 & \cdots & b_N \end{pmatrix} \tag{3.43d}$$

Assim, demonstramos que com $g = (a_1\ a_2\ \cdots a_k)(a_{k+1}) \cdots (a_n)$, a operação de conjugação

$$hgh^{-1} = (h(a_1)\ h(a_2) \cdots h(a_k) \cdots h(a_n)) = (h(a_1)\ h(a_2) \cdots h(a_k))(h(a_{k+1})) \cdots (h(a_n)). \tag{3.44}$$

Ou seja, se g é um ciclo de ordem k, então seu conjugado $j \equiv hgh^{-1}$ possui a mesma estrutura com ciclo k. Essa conclusão pode ser generalizada para um caso com múltiplos ciclos, em que, sendo uma permutação decomposta em sub-permutações com ciclos de ordem k_i,

$$g \equiv g_1 g_2 \cdots g_n, \tag{3.45}$$

a permutação conjugada j,

$$\begin{aligned} j \equiv hgh^{-1} &= hg_1g_2 \cdots g_n h^{-1} \\ &= hg_1h^{-1}hg_1h^{-1}h \cdots hg_nh^{-1} \qquad (3.46) \\ &= j_1 j_2 \cdots j_n, \qquad (3.47) \end{aligned}$$

possui a mesma estrutura de ciclos que g, e assim dizemos que as composições j e g são equivalentes. Na equação (3.46) introduzimos nas permutações a identidade $h^{-1}h$.

Assim, conjugações dão a ação de S_N sobre seus próprios elementos. Todas as permutações relacionadas por conjugação pertencem a uma mesma classe de equivalência caracterizada pelos tamanhos dos ciclos disjuntos. Numa dada classe de equivalência, temos portanto, as permutações [47]

$$g = \prod_n (n)^{N_n} \qquad \text{com} \quad \sum_n n N_n = N, \tag{3.48}$$

onde (n) é um ciclo de tamanho n, [6] e N_n o número de ciclos de ordem n. As classes de equivalência ficam determinadas pela partição de N, ou seja, $\{N_1, N_2, \cdots, N_n, \cdots, N_N\}$.

3.3.2 Operadores de Twist

Os operadores de twist são operadores que realizam a identificação das cópias da teoria a partir das permutações realizadas pelo grupo S_N. Definimos um twist de ordem n em um ponto z_0 por $\sigma_{(1,2\ldots,n)}(z_0)$[7], de forma que a inserção do twist troca as cópias dos campos definidos na teoria ao circularem em torno de z_0. Sejam, por exemplo, os campos bosônicos $X^i_I(z)$, em que o índice $I = 1, 2, ..., N$ indica a cópia ao qual o campo está relacionado, então

$$X^i_I(e^{2\pi i}(z - z_0) + z_0)\sigma_{(n)}(z_0) = X^i_{I+1}(z - z_0)\sigma_{(n)}(z_0), \tag{3.49a}$$

$$X^i_{I+1}(e^{2\pi i}(z - z_0) + z_0)\sigma_{(n)}(z_0) = X^i_1(z - z_0)\sigma_{(n)}(z_0). \tag{3.49b}$$

Ou seja, com a circulação dos campos em torno de um ponto onde se define um twist, vemos que as cópias são permutadas de acordo com a permutação cíclica do twist e verifica-se a monodromia não trivial do campo. Veja que, se $n < N$, as cópias com $I > n$ permanecem invariantes. Um exemplo dessa atuação é indicada na Figura 6, onde cada cópia possui uma cor e o twist une as cópias associadas à permutação. Estando a cópia 3 ausente nos twists, essa permanece invariante.

A partir dos conceitos de classe de conjugação descritos anteriormente podemos construir um operador de twist invariante sob atuação do grupo simétrico S_N,

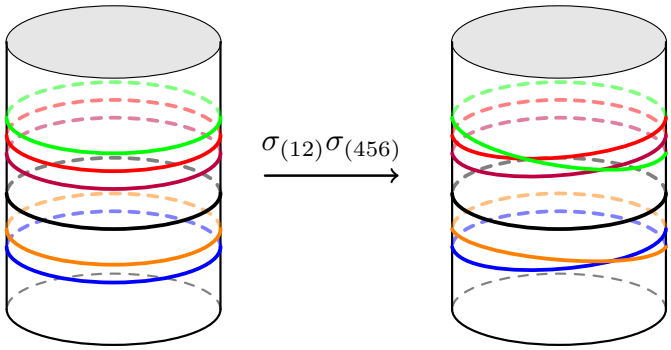
$$\sigma_{[g]} \equiv \frac{1}{\sqrt{nN!(N-n)!}} \sum_{h \in S_N} \sigma_{\hat{g}} \quad \text{com} \quad \hat{g} = h^{-1} g h. \tag{3.50}$$

Em que incluímos um fator de normalização que contabiliza as permutações de uma mesma classe de equivalência, as diferentes permutações dos elementos triviais e a liberdade de ordenarmos as permutações.

[6] Não confundir com uma permutação trivial de tamanho 1.

[7] Usualmente indicaremos apenas a ordem do twist reduzindo a notação à $\sigma_{(n)}$

Figura 6 – Representação da atuação de um twist que conecta as cópias (12) e (456), mantendo a cópia 3 inalterada.



Assim, o orbifold simétrico construído a partir das N cópias da teoria semente introduz os setores twistados a partir das n cópias identificadas pelo twist. As correntes associadas à simetria-R, à supersimetria e ao tensor energia momento são a soma sobre todas as cópias no setor twistado,

$$T(z) = \sum_{I=1}^{n} T_I(z), \qquad J^a(z) = \sum_{I=1}^{n} J_I^a(z) \qquad \text{e} \qquad G^{\alpha A}(z) = \sum_{I=1}^{n} G_I^{\alpha A}(z), \tag{3.51}$$

que, se tratando de somas, são trivialmente invariantes de S_N.

3.3.3 Espaço de cobertura e Modos Fracionários

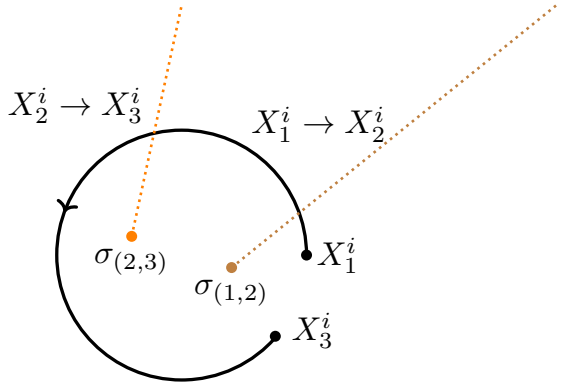
Com a inserção do twist as cópias agora tornam-se multivaloradas, dado que os campos não retornam ao seu valor inicial ao contornar o ponto z_0 onde está definido o twist. Para que seja possível contabilizar quantidades físicas a partir de funções de correlação é necessário então resolvermos tal problema, tornando as cópias novamente univaloradas.

A atuação do twist nas N cópias da CFT gera setores de twist de acordo com a ordem do mesmo. Nestes setores as cópias tornam-se multivaloradas na parametrização do espaço base na esfera de Riemann. Uma abordagem utilizada para remover tais ambiguidades é construir um espaço de cobertura Σ que associa as cópias do espaço base com diferentes folhas na cobertura, tal que nestas os campos são univalorados. O mapeamento pode ser realizado de forma que localmente é dado por,

$$z - z_0 = b(t - t_0)^n, \tag{3.52}$$

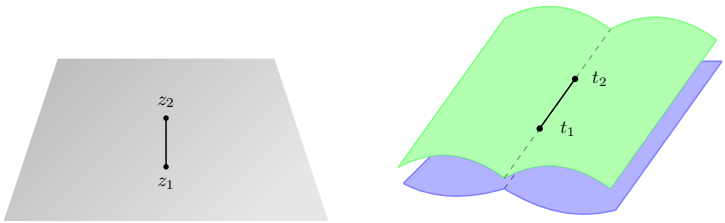
o que cria pontos de ramificação nos pontos z_0 onde localizam-se os twists de ordem n, Figura 7.

Figura 7 – Representação dos cortes de ramificação criados pelo twist



Para mostrar como é feita tal construção vejamos um caso com dois twists de ordem 2, definidos em z_1 e z_2 no espaço base, representado em um recorte na Figura 8a. Introduzimos um corte de ramificação que liga os pontos z_1 e z_2 de maneira que ao se definir uma curva fechada que atravessa esse corte e inclui um dos pontos z_1 ou z_2 em seu interior, então as cópias são permutadas. Para resolver o problema dos campos multivalorados, criamos duas cópias, pois se trata de twists de segunda ordem, da esfera de Riemann com os mesmos cortes, mas parametrizados em $t(z)$, e então conectamos as duas folhas sobre o corte de ramificação, representada na Figura 8b. Se na base o campo era multivalorado em um dado ponto z_i, no espaço de cobertura esse ponto se reflete em $t_i^{\pm}$, associado às duas diferentes folhas, se tornando univalorado.

Figura 8 – Representação do espaço base $C \cup \{\infty\}$ à esquerda e do espaço de cobertura Σ à direita.



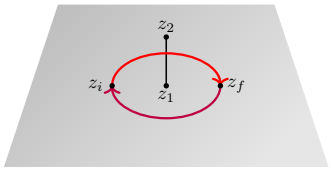
(a) Esfera de Riemann e corte de ramificação.

(b) Colagem das cópias da esfera de Riemann.

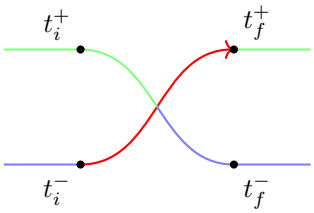
Ainda com este exemplo podemos ver como se comporta a imagem da curva fechada no espaço base que troca as cópias. Definindo os pontos z_i e z_f no plano complexo podemos construir uma curva que vai de um ponto à outro atravessando o corte de ramificação, representado em vermelho na Figura 9a. No espaço de cobertura teríamos uma curva que passa de uma folha a outra, com inicio na imagem de z_i na primeira folha, t_i^-, e fim na imagem de z_f na segunda folha, t_f^+, vide Figura 9b. Para fechar a curva na base

retornamos ao ponto z_i. Porém, como não passamos pelo corte de ramificação, então no espaço de cobertura nos mantemos na segunda folha, com uma curva se deslocando para a imagem t_i^+, como indicado na Figura 9c.

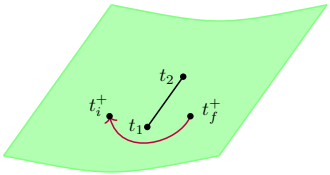
Figura 9 – Curva fechada na base e sua imagem no espaço de cobertura.



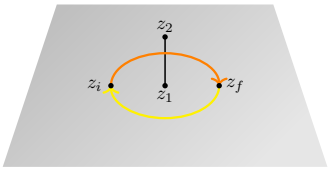
(a) Curva fechada na base atravessando o corte de ramificação.



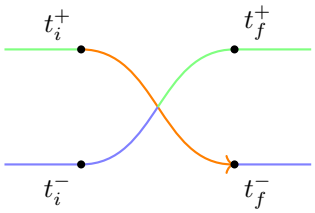
(b) Imagem da primeira semicircunferência no espaço de cobertura.



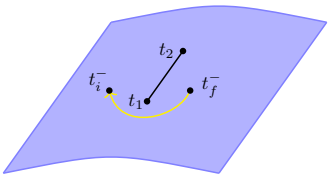
(c) Imagem da segunda semicircunferência no espaço de cobertura.



(d) Segunda volta na base.



(e) Retorno à folha 1.



(f) Fechamento da curva em Σ

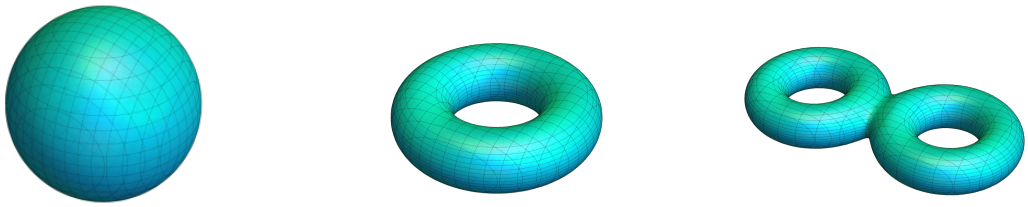
Veja que temos uma curva fechada na base, que trocaria as cópias devido ao twist em z_1, já no espaço de cobertura finalizamos trocando de folha, em que essas estão definidas em diferentes pontos, t_i^- e t_i^+. Para fechar uma curva no espaço de cobertura deveríamos realizar mais uma volta no espaço base, como indicado na Figura 9d. Ou seja, para que uma cópia retorne a si mesma, $X^1 \to X^2 \to X^1$, são necessárias duas voltas na base, e apenas uma no espaço de cobertura, demonstrando que os campos aqui definidos serão univalorados.

Em geral, a inserção de p operadores de twist $\sigma_{(n_i)}(z_i)$, produz um corte de ramificação de ordem n_i no espaço de cobertura Σ, refletindo em n_i cópias da esfera de Riemann sendo coladas em z_i. Se s é o numero de folhas totais que compõem a superfície de cobertura, então pela fórmula de Riemann-Hurwitz [57] o genus g dessa superfície é obtido por

$$g = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1) - s + 1. \tag{3.53}$$

O genus de uma superfície esta relacionado à uma classificação topológica da mesma. Dizemos que uma superfície com $g = 0$ é topologicamente uma esfera, se $g = 1$ a superfície é um torus, Figura 10.

Figura 10 – Superfícies identificadas pelo genus



(a) superfície de genus 0. (b) Superfície de genus 1. (c) Superfície de genus 2.

Em uma função de correlação composta por operadores de twist devemos considerar os twists invariantes sob o grupo simétrico (3.50),

$$\langle\prod_{i}^{p}\sigma_{[g_i]}(z_i,\bar{z}_i)\rangle = \langle\prod_{i}^{p}\sum_{h\in S_N}\sigma_{h^{-1}g_ih}(z_i,\bar{z}_i)\rangle. \tag{3.54}$$

Assim, com permutações compostas equivalentes definidas em (3.47), podemos avaliar a função de correlação de um único representante de uma classe de equivalência e contabilizar quantos elementos existem nessa classe [57].

Seja por exemplo uma função de correlação de quatro pontos

$$\langle\sigma_{[3]}(z_1)\sigma_{[2]}(z_2)\sigma_{[2]}(z_3)\sigma_{[3]}(z_4)\rangle. \tag{3.55}$$

Pela formula de Riemann-Hurwitz (3.53) temos o genus da superfície no espaço de cobertura por

$$g = \frac{1}{2}(2+2+1+1)+1-s = 4-s. \tag{3.56}$$

Com operadores de twist de ordem 3, faz-se necessário no mínimo três folhas para construir o espaço de cobertura, e portanto temos $g = 1$ com 3 folhas, e $g = 0$ com 4 folhas. Ou seja, ao construirmos as funções de correlação a partir de (3.54) temos uma soma finita de termos sob os diferentes genera, com um limite superior ($g \geq 0$). É possível mostrar que em um limite $N \gg 1$ a função de correlação toma a forma [57, 58],

$$\langle\prod_{i}^{p}\sigma_{[g_i]}(z_i,\bar{z}_i)\rangle \approx \sum_{g=0}^{g_{\max}} N^{1-g-\frac{s}{2}}\langle\prod_{i}^{p}\sigma_{\hat{g}_i}(z_i,\bar{z}_i)\rangle_g. \tag{3.57}$$

Assim, fica claro que contribuições provenientes de superfícies com genus $g > 0$ podem ser desconsideradas no limite $N \gg 1$, e portanto, consideraremos apenas superfícies no espaço de cobertura Σ com $g = 0$, ou seja, que sejam topologicamente uma esfera de Riemann.

No que se refere aos modos dos campos, assim como definimos estes para uma única cópia, podemos definir para n cópias os modos fracionários,

$$\mathcal{O}_{\frac{m}{n}} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \sum_{I=1}^{n} \mathcal{O}_I(z) e^{2\pi i \frac{m}{n}(I-1)} z^{h+\frac{m}{n}-1}. \tag{3.58}$$

Neste caso, para calcular a álgebra dos modos dos operadores fracionários $J^a_{k/n}(z)$,$G^{\alpha A}_{k/n}$ e $L_{k/n}$, podemos fazer o *"lifting"* dos operadores para o espaço de cobertura e então tratar como uma só cópia e ao fim retornar ao espaço base. O resultado obtido ao fim deste processo é equivalente à álgebra que já possuímos (3.20) com os novos índices fracionários $m \to m/n$ e a carga central total $c_t = cn$ [59]. O cálculo explícito para o caso dos modos de Virasoro fracionários são demonstrados no Apêndice B.2.1.

Assim,

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] = \left(\frac{k-k'}{n}\right) L_{\frac{k+k'}{n}} + \frac{cn}{12}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{k}{n}\delta_{k+k',0}, \tag{3.59a}$$

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, J^a_{\frac{k'}{n}}\right] = -\frac{k'}{n} J^a_{\frac{k+k'}{n}}, \tag{3.59b}$$

$$\left[J^a_{\frac{k}{n}}, J^b_{\frac{k'}{n}}\right] = \frac{k}{n}\frac{cn}{12}\delta^{ab}\delta_{k+k',0} + i\varepsilon^{ab}_c J^c_{\frac{k+k'}{n}}, \tag{3.59c}$$

e férmions.

Antes de entrarmos na discussão dos setores de twist, é útil a definição dos próprios setores de periodicidade dos campos fermiônicos. Ainda na teoria livre, no plano complexo, temos a expansão em modos de um campo fermiônico,

$$\psi(z) = \sum_k b_k z^{-(k+1/2)}. \tag{3.60}$$

Com b_k sendo os modos fermiônicos que respeitam uma relação de anti-comutação. Veja que ao realizamos uma rotação no plano complexo,

$$\psi(z) \to \psi(ze^{2\pi i}) = \sum_k (-1)^{2k+1} b_k z^{-(k+1/2)} = \pm\psi(z). \tag{3.61}$$

Assim, se os modos forem inteiros, o campo fermiônico é anti-periódico, correspondendo ao setor de Ramond (R), se os modos forem semi inteiros, então os modos serão periódicos, correspondendo ao setor de Neveu-Schwarz (NS) [5, 18]. Quando passamos a tratar dos setores de twist, especificamente no mapeamento para o espaço de cobertura, veremos que esses setores podem ser invertidos. Esses setores se fazem importantes também na construção dos estados, onde poderemos ver que o estado de vácuo associado ao setor de NS é correspondente a um estado de vácuo degenerado no setor de R.

Acerca dos setores de twist, devemos fazer essa mesma consideração sobre a periodicidade dos férmions a depender da ordem do twist. Assim, digamos que o mapeamento para o espaço de cobertura $\sum$ dado localmente por $z = bt^n$ seja considerado para a mudança de variáveis de um férmion,

$$\psi_z(z) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^{1/2} \psi_t(t) = (bn)^{1/2} t^{\frac{n-1}{2}} \psi_t(t). \tag{3.62}$$

A expressão indica que após uma rotação no espaço de cobertura o férmion se transforma por,

$$\psi_t(t) \to (-1)^{n-1} \psi_t(t). \tag{3.63}$$

Ou seja, a depender da ordem do twist a condição de contorno sobre os campos fermiônicos muda.

3.4 OPERADORES QUIRAIS PRIMÁRIOS

Retornemos à subálgebra superconforme $\{L_0, L_{\pm 1}, J_0^3, G^{\alpha A}_{\pm \frac{1}{2}}\}$ livre de anomalias descrita na seção anterior. A partir do anti-comutador dos elementos $G^{\alpha A}_{\pm 1/2}$ temos,

$$\left\{G^{-A}_{1/2}, G^{+B}_{-1/2}\right\} = \epsilon^{AB}\left(J_0^3 - L_0\right). \tag{3.64}$$

Agora suponha um estado $|\psi\rangle$ que possua carga j e dimensão h, ou seja, $J_0^3 |\psi\rangle = j |\psi\rangle$ e $L_0 |\psi\rangle = h |\psi\rangle$,

$$\langle\psi| \left(G^{-A}_{1/2} G^{+B}_{-1/2} + G^{+B}_{-1/2} G^{-A}_{1/2}\right) |\psi\rangle = \epsilon^{AB}(j - h), \tag{3.65a}$$

$$\sum_A \left(|G^{+A}_{-1/2} |\psi\rangle|^2 + |G^{-A}_{1/2} |\psi\rangle|^2\right) = 2(h - j), \tag{3.65b}$$

onde utilizamos de $\epsilon_{AB}\epsilon^{AB} = -2$ e da propriedade para os modos de supersimetria $\left(G^{\alpha A}_m\right)^\dagger = -\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{AB} G^{\beta B}_{-m}$ [18]. Com este resultado sabemos que um limite superior para a dimensão conforme de qualquer estado $|\psi\rangle$ é dado por $h \geq j$. Veja que para o caso de um estado $|\chi\rangle$ com $h = j$, temos a aniquilação do mesmo como consequência de (3.65b),

$$G^{+A}_{-1/2} |\chi\rangle = 0. \tag{3.66}$$

Assim, um estado quiral primário, identificado como um estado que possui dimensão conforme h igual à carga de simetria-R j é aniquilado pelos modos $G^{+A}_{-1/2}$ [18].

Os operadores de twist $\sigma_{(n)}$ definidos anteriormente em 3.3.2, são chamados de "twists puros". No próximo capítulo demonstraremos que este operador possui dimensão conforme

dada por

$$h_\sigma = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{n}\right). \tag{3.67}$$

Sua carga é $j = 0$ e portanto, pela construção da seção anterior, o mesmo não pode ser associado à um estado quiral primário. Se quiséssemos aumentar a carga de tal operador na intenção de formar um estado quiral primário poderíamos ingenuamente pensar em atuar com $J_n^{+(z)}$, que por definição aumenta a carga em uma unidade. Mas veja que se um estado $|\psi\rangle$ possui dimensão h, então,

$$\begin{aligned} L_0(J_{-n}^+ |\psi\rangle) &= \left(J_{-n}^+ L_0 + \left[L_0, J_{-n}^+\right]\right)|\psi\rangle \\ &= (h+n) J_{-n}^+ |\psi\rangle . \end{aligned} \tag{3.68}$$

Ou seja, o operador aumenta tanto a carga quando a dimensão do operador de twist, tornando-se impossível de se obter um operador quiral primário tal que $h = m$ dessa maneira. Uma alternativa é considerar os modos fracionários do setor twistado no espaço de cobertura. Pelos modos fracionários definidos em (3.58) sabemos que o operador escada

$$J_{-\frac{m}{n}}^{+(z)} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \sum_{I=1}^{n} J_I^+(z) e^{2\pi i \frac{m}{n}(I-1)} z^{-\frac{m}{n}}. \tag{3.69}$$

Em que indicamos com o índice (z) que este modo é definido na base [21]. Pelo mapa $z \approx bt^n$, o modo no espaço de cobertura é obtido por

$$J_{-\frac{m}{n}}^{+(z)} \mapsto \oint_0 \frac{dt}{2\pi i} J^+(t) b^{-\frac{m}{n}} t^{-m} = b^{-\frac{m}{n}} J_{-m}^{+(t)}. \tag{3.70}$$

Ou seja, os n modos fracionários na base são mapeados para um único modo J_{-m}^+.

Com a álgebra obtida em (3.59) podemos ver que o operador $J_{-1}^{+(t)}$ aumenta a carga em uma unidade e a dimensão em $1/n$, sendo possível definir um operador quiral primário a partir da atuação do modo fracionário. Aqui mais um fator se torna importante, em 3.3.3 mostramos que para os férmions a periodicidade depende da ordem do twist, se esta é par ou ímpar. No caso de um twist ímpar, o férmion é periódico no espaço de cobertura e portanto a construção do operador quiral primário é semelhante ao caso do bóson. Já se o twist for par, o contrário acontece e o férmion não retorna à si mesmo após uma atuação de um twist de ordem n. Assim, se faz necessário a separação dos casos na construção do operador quiral primário.

3.4.1 Quirais Primários de Ordem Ímpar

Com o estado de vácuo do setor twistado definido por $|\sigma_n\rangle = \sigma_n |\varnothing\rangle_{NS}$[8], temos a primeira atuação no espaço de cobertura, $J_{-1}^{+(t)} |\varnothing\rangle_{NS}$, aumentando a carga em uma unidade e a dimensão em $1/n$. Poderíamos continuar com esse processo atuando novamente com o operador $J_{-1}^{+(t)}$, mas veríamos a partir da álgebra dos modos fracionários que $J_{-1}^{+}J_{-1}^{+} |\varnothing\rangle_{NS} = 0$. O próximo operador que não aniquila o estado é $J_{-3}^{+(t)}$. Seguindo este processo, podemos construir o estado $\left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle$ [47, 60],

$$\left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle = J_{-\frac{(n-2)}{n}}^{+(z)} J_{-\frac{(n-4)}{n}}^{+(z)} \cdots J_{-\frac{3}{n}}^{+(z)} J_{-\frac{1}{n}}^{+(z)} |\sigma_n\rangle \,. \tag{3.71}$$

Se calcularmos a dimensão de tal estado veremos que,

$$h_n^{(0)} = h_\sigma + \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + ... + \frac{n-2}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-2}(2i+1) = \frac{n-1}{2}. \tag{3.72}$$

Por outro lado, a carga é simplesmente o número de operadores que atuamos, já que cada um contribui com o aumento da carga em uma unidade. Então,

$$j_n^{(0)} = \frac{n-1}{2} = h_n^{(0)}, \tag{3.73}$$

formando um estado quiral primário. Podemos obter outro quiral primário atuando no último o operador $J_{-\frac{1}{n}}^{+(z)}$, de forma que tanto a dimensão conforme quanto a carga aumentam em uma unidade. Assim,

$$\left|\mathrm{O}_n^{(2)}\right\rangle = J_{-\frac{1}{n}}^{+(z)} \left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle, \tag{3.74a}$$

$$h_n^{(2)} = j_n^{(2)} = \frac{n+1}{2}. \tag{3.74b}$$

Se seguíssemos o padrão e atuássemos com o operador $J_{-\frac{(n+2)}{n}}^{+(z)}$ então a carga aumentaria em uma unidade enquanto a dimensão em $1/(n+2)$, e portanto não teríamos um estado quiral. Por fim, podemos ainda atuar com o modo fermiônico $\psi_{-1/2}^{+\dot{A}}$, gerando mais dois estados quirais, para $\dot{A} = \dot{1}, \dot{2}$ com $h_n^{(1\pm)} = j_n^{(1\pm)} = \frac{n}{2}$.[9]

3.4.2 Quirais Primários de Ordem Par

Para este caso precisamos primeiramente alterar a periodicidade do férmion no espaço de cobertura, para que o mesmo passe a ser periódico na atuação do twist. Assim, introduzimos um operador de spin $R^{\pm}$ que altera o vácuo do setor de NS para o setor de

[8] Por se tratar de estados periódicos então os mesmos estão associados ao setor de Neveu-Schwarz no espaço de cobertura

[9] Isso pode ser verificado simplesmente calculando a dimensão e a carga do estado $\psi_{-1/2}^{+\dot{A}} |\varnothing\rangle_{NS}$.

Ramond, permitindo a atuação dos twists de ordem par. [10] Os índices ± estão associados ao fato de que o vácuo de NS é mapeado para um vácuo no setor de R degenerado. Assim, se no setor de NS temos um vácuo $|\varnothing\rangle_{NS}$ com $h = j = 0$, no setor de R temos um vácuo $R^- |\sigma_n\rangle$ com $h = 1/4$ e $j = -1/2$ e um outro vácuo $R^+ |\sigma_n\rangle = J_0^+ R^- |\sigma_n\rangle$ com $h = 1/4$ e $j = 1/2$ [18]. Podemos agora atuar com os operadores J_n^+, de forma que, seguindo o processo anterior, temos o estado quiral,

$$\left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle = J^{+(z)}_{-\frac{(n-2)}{n}} J^{+(z)}_{-\frac{(n-4)}{n}} ... J^{+(z)}_{-\frac{2}{n}} R^+ |\sigma_n\rangle \,. \tag{3.75}$$

Calculando a dimensão deste no plano z temos,

$$h_n^{(0)} = h_\sigma + \frac{1}{4n} + \frac{1}{n}\frac{n(n-2)}{4} = \frac{n-1}{2}. \tag{3.76}$$

Já quanto a carga,

$$j_n^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{n-1}{2} = h_{\sigma^-}. \tag{3.77}$$

Pelo mesmo argumento do caso anterior, podemos ainda atuar com $J^+_{-\frac{1}{n}}$. Assim,

$$\left|\mathrm{O}_n^{(2)}\right\rangle = J^{+(z)}_{-\frac{1}{n}} J^{+(z)}_{-\frac{(n-2)}{n}} J^{+(z)}_{-\frac{(n-4)}{n}} ... J^{+(z)}_{-\frac{2}{n}} R^+ |\sigma_n\rangle \,, \tag{3.78}$$

que também resulta em uma dimensão e carga iguais $h_n^{(2)} = j_n^{(2)} = (n+1)/2$. E de forma análoga, atuando o modo fermiônico $\psi^{+\dot{A}}_{-1/2}$ obtemos um estado de dimensão $h_n^{(1\pm)} = j_n^{(1\pm)} = n/2$. Dessa forma temos quatro estados quirais primários,[11]

$$\left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle, \quad \psi^{+\dot{A}}_{-\frac{1}{2n}} \left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle \quad \text{e} \quad J^+_{-\frac{1}{n}} \left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle, \tag{3.79}$$

que possuem dimensão e carga iguais a $(n-1)/2$, $n/2$ e $(n+1)/2$ respectivamente. Assim definimos na base,

$$\left|\mathrm{O}_n^{(0)}\right\rangle = \begin{cases} J^+_{-\frac{(n-2)}{n}} J^+_{-\frac{(n-4)}{n}} ... J^+_{-\frac{3}{n}} J^+_{-\frac{1}{n}} |\sigma_n\rangle & \text{para n ímpar} \\ J^+_{-\frac{(n-2)}{n}} J^+_{-\frac{(n-4)}{n}} ... J^+_{-\frac{2}{n}} R^+ |\sigma_n\rangle & \text{para n par} \end{cases} \tag{3.80}$$

Por fim, podemos realizar as mesmas operações para o setor anti-holomórfico, criando assim 16 operadores quirais primários combinando as $(4 \times \bar{4})$ possibilidades.

[10] Na literatura também é comum realizar esse mapeamento pelo *Spectral Flow*[18].

[11] Com $\dot{A} = \dot{1}, \dot{2}$.

A partir das relações de bosonificação dos operadores de carga em (3.29) podemos escrever os operadores que definem os estados quirais por

$$\mathrm{O}_n^{(0)}(z) = \exp\left\{\left(-i\frac{(n-1)}{2n}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^6(z) - \phi_I^5(z)]\right)\right\}\sigma_n(z), \tag{3.81a}$$

$$\mathrm{O}_n^{(1\pm)}(z) = \exp\left\{\left(-i\sum_{I=1}^{n}\left[\frac{(n\pm 1)}{2n}\phi_I^6(z) - \frac{(n\mp 1)}{2n}\phi_I^5(z)\right]\right)\right\}\sigma_n(z), \tag{3.81b}$$

$$\mathrm{O}_n^{(2)}(z) = \exp\left\{\left(-i\frac{(n+1)}{2n}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^6(z) - \phi_I^5(z)]\right)\right\}\sigma_n(z). \tag{3.81c}$$

É simples de ver com os operadores de vértice que os operadores possuem dimensão conforme equivalente aos estados quirais. Por exemplo, para o primeiro caso, em que temos $2n$ campos $\phi_I^{5,6}$,

$$h = 2n\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 + h_\sigma = \frac{(n-1)}{2}. \tag{3.82}$$

Por construção esses operadores possuem dimensão conforme h e carga j iguais.

3.5 O OPERADOR DE DEFORMAÇÃO

Até então tratamos de uma teoria completamente livre a partir do orbifold no ponto simétrico, que pode não ser de interesse no contexto gravitacional [61]. Se desejamos descrever uma deformação da CFT fazemos a inserção da interação

$$S_{\text{int}} = S_{\text{free}} + \lambda\int d^2z\mathrm{O}^{(\text{int})}(z,\bar{z}). \tag{3.83}$$

Ligar a interação a partir do parâmetro λ permite deslocar a teoria livre para um ponto no espaço de moduli que possui uma boa descrição gravitacional no bulk [62].

Para uma teoria conforme livre de escalas, o operador $\mathrm{O}^{(\text{int})}$ deve possuir dimensão conforme $h = \bar{h} = 1$. Esta é chamada de deformação marginal. Na construção do sistema D1-D5 são diversos os campos escalares da teoria de supegravidade, podendo conter a métrica, campos bosônicos, fermiônicos, etc. Na CFT isso corresponde a uma coleção de operadores deformação que levam a teoria livre à um ponto no espaço de moduli correspondente à uma perturbação do espaço AdS [17, 63]. Para construir tais operadores devemos nos preocupar se estes recebem correções quânticas na introdução da interação e se respeitam as supersimetrias do sistema. As cargas sob as simetrias-R e as simetrias internas associadas ao torus permitem o mapeamento dos diversos operadores deformação aos campos definidos no sistema D1-D5 [17].

Os operadores quirais primários (3.81) são exemplos de operadores que não recebem correções quânticas na inserção da interação e portanto são protegidos no deslocamento sob o espaço de moduli [61]. Neste trabalho escolhemos compor o operador deformação a partir do operador quiral $O_{(2)}^{(0,0)}$, que possui dimensão $h = 1/2$, definido em (3.81a). Além disso, para mantermos a supersimetria do sistema adicionamos correntes de supersimetria. O operador deformação toma a forma [62]

$$\mathrm{O}_{(2)}^{(\mathrm{int})}(z,\bar{z}) = \epsilon_{AB} G_{-1/2}^{-A} \bar{G}_{-1/2}^{\dot{-}B} \mathrm{O}_{(2)}^{(0,0)}(z,\bar{z}). \tag{3.84}$$

Pela álgebra obtida em (3.20), vemos que o modo de supersimetria $G_{-1/2}$ aumenta em $1/2$ a dimensão conforme do operador quiral,

$$L_0 G_{-1/2}^{\alpha A} |h\rangle = G_{-1/2}^{\alpha A} L_0 |h\rangle + \frac{1}{2} G_{-1/2}^{\alpha A} |h\rangle = (h + 1/2) G_{-1/2}^{\alpha A} |h\rangle \,, \tag{3.85}$$

e assim, o operador deformação possui a dimensão conforme desejada de $h = 1$, garantindo a forma escalar da ação.

Note que o termo adicional na ação (3.83) reflete diretamente na definição das funções de correlação, e a partir de um tratamento perturbativo introduz uma correção nas mesmas. O principal objetivo do próximo capítulo será a descrição de métodos para o cálculo de funções de correlação contendo o operador deformação.

4 FUNÇÕES DE QUATRO-PONTOS

"...And then one day you find ten years have got behind you. No one told you when to run, you missed the starting gun..."

Time, The Dark Side of The Moon, Pink Floyd, 1973.

4.1 A IMPORTÂNCIA DE FUNÇÕES DE QUATRO-PONTOS

Como discutido no Capítulo 2 as funções de dois e três pontos já possuem sua forma definida pelas simetrias conformes a menos de constantes de estrutura. As funções de correlação de quatro pontos são as primeiras que não possuem seu formato funcional fixado, o que por si só nos motiva a construirmos um método de calculá-las. De fato, ao conhecermos tais funções, podemos a partir das regras de fusão, obter as constantes de estrutura que caracterizam a CFT.

Com a ação de interação introduzida em (3.83) a partir de operadores de deformação, podemos investigar como esta altera as funções de correlação em comparação à teoria livre. Considerando uma função de dois pontos de campos $\mathcal{O}(z,\bar{z})$ normalizada na teoria interagente, sabemos que esta possui a forma funcional

$$\langle \mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_\lambda = |z_{12}|^{-2\Delta_\lambda}, \tag{4.1}$$

e assim podemos ler a dimensão conforme renormalizada Δ_λ. Para isso, devemos partir da definição de uma função de correlação (2.25), onde utilizaremos da ação interagente (3.83) em uma correção perturbativa. No contexto deste trabalho nos resumiremos a uma perturbação de segunda ordem. Assim, a função de dois pontos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_{\text{int}}}\int [DX]e^{-S_{\text{int}}}\mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2) &= \frac{1}{Z_{\text{int}}}\int [DX]e^{-S_{\text{free}}}\Bigg(1-\lambda\int d^2z_3 O^{(\text{int})}_{[2]}(z_3,\bar{z}_3)\\ &\quad+\frac{\lambda^2}{2}\int d^2z_3\int d^2z_4 O^{(\text{int})}_{[2]}(z_3,\bar{z}_3)O^{(\text{int})}_{[2]}(z_4,\bar{z}_4)\Bigg)\mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2) \qquad (4.2)\\ &= \langle \mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_0 - \lambda\int d^2z_3\langle \mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)O^{(\text{int})}_{[2]}(z_3,\bar{z}_3)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_0\\ &\quad+\frac{\lambda^2}{2}\int d^2z_3\int d^2z_4\langle \mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)O^{(\text{int})}_{[2]}(z_3,\bar{z}_3)O^{(\text{int})}_{[2]}(z_4,\bar{z}_4)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_0. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Aqui indicamos por $\langle\cdots\rangle_0$ uma função de correlação calculada sobre a teoria livre. Além disso, é muitas vezes comum interpretar os elementos de uma expansão nas funções de

correlação como diagramas de Feynman [64], e nesses, a amplitude efetiva é obtida ao desconsiderar diagramas desconectados. Por isso, em (4.3) consideramos $Z_{\text{int}} \approx Z_{\text{free}}$.

No caso da correção em primeira ordem estaremos interessados em estudar campos $\mathscr{O}$ tais que a função de três pontos com o operador interação é nula [47]. Veja que a correção de segunda ordem depende da função de correlação de quatro pontos envolvendo o operador de deformação. Isso nos motiva a desenvolver métodos de se calcular funções de correlação envolvendo tais operadores.

No capítulo 2 vimos que uma função de quatro pontos pode ser escrita na forma

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1,\bar{z}_1)\mathcal{O}_3(z_3,\bar{z}_3)\mathcal{O}_4(z_4,\bar{z}_4)\mathcal{O}_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \mathcal{F}(u,\bar{u})\prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{g/3-h_i-h_j}\bar{z}_{ij}^{\bar{g}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j}, \tag{4.4}$$

com $\mathcal{F}(u,\bar{u})$ uma função dos invariantes conformes (2.28) e $g = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Sabendo que o operador deformação possui dimensão $h_{3,4} = \bar{h}_{3,4} = 1$ e considerando campos $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1^\dagger = \mathcal{O}$ com dimensão $h_{1,2} = h$ e $\bar{h}_{1,2} = \bar{h}$, podemos simplificar a função de quatro pontos utilizando dos invariantes conformes

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(z_1,\bar{z}_1)O_{[2]}^{(\text{int})}(z_3,\bar{z}_3)O_{[2]}^{(\text{int})}(z_4,\bar{z}_4)\mathcal{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{G_{\mathcal{O}}(u,\bar{u})}{|z_{13}|^2|z_{32}|^2|z_{12}|^{2(\Delta-1)}}. \tag{4.5}$$

Essa forma é especialmente útil quando fixamos os pontos $z_1 \to \infty, z_2 \to 0, z_3 \to 1$ e $z_4 = u$ por uma transformação de Möbius, tal que obtemos

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(\infty,\bar{\infty})O_{[2]}^{(\text{int})}(1,\bar{1})O_{[2]}^{(\text{int})}(u,\bar{u})\mathcal{O}(0,\bar{0})\rangle = G_{\mathcal{O}}(u,\bar{u}). \tag{4.6}$$

Por fim, com (4.5) a correção em segunda ordem da função de dois pontos é

$$\langle \mathscr{O}^\dagger(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_\lambda = \frac{1}{|z_{12}|^{2\Delta}} + \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^2z_3}{|z_{13}|^2|z_{32}|^2|z_{12}|^{2(\Delta-1)}}\int d^2u G_{\mathcal{O}}(u,\bar{u}). \tag{4.7}$$

Aqui trocamos a integral em z_4 pela razão anarmônica $u(z)$ (2.28). Para a integral em z_3 observamos uma divergência em $z_{13}, z_{32} \to 0$. Portanto podemos proceder com uma regularização definindo um cut-off Λ, ver Apêndice A.3, de forma a obter

$$\int \frac{d^2z_3}{|z_{13}|^2|z_{32}|^2|z_{12}|^{2(\Delta-1)}} = \frac{2\pi}{|z_{12}|^{2\Delta}}\ln\left(\frac{|z_{12}|}{\Lambda}\right). \tag{4.8}$$

Segue então que, em (4.7), obtemos a correção em segunda ordem

$$\langle \mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_\lambda = \frac{1}{|z_{12}|^{2\Delta}}\left[1 + \pi\lambda^2 J\ln\left(\frac{|z_{12}|}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)\right], \tag{4.9}$$

com a definição da integral J,

$$J = \int d^2u G_{\mathcal{O}}(u,\bar{u}). \tag{4.10}$$

Para removermos a dependência do cut-off, introduzimos a renormalização do campo $\mathcal{O}$ em segunda ordem como

$$\mathscr{O}^{\text{ren}}(z,\bar{z}) = \Lambda^{\frac{\pi}{2}\lambda^2 J}\mathscr{O}(z,\bar{z}). \tag{4.11}$$

E por fim, retornando em (4.1), também obtemos a renormalização da dimensão conforme,

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{O}^{\text{ren}}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}^{\text{ren}}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_\lambda &= \Lambda^{\pi\lambda^2 J}\langle\mathscr{O}(z_1,\bar{z}_1)\mathscr{O}(z_2,\bar{z}_2)\rangle_\lambda \\ &= \left(1+\pi\lambda^2 J\ln\Lambda+\mathcal{O}(\lambda^4)\right)|z_{12}|^{-2\Delta}\left(1+\pi\lambda^2 J\ln\left(\frac{|z_{12}|}{\Lambda}\right)+\mathcal{O}(\lambda^3)\right) \\ &= \left(1+\pi\lambda^2 J\ln|z_{12}|+\mathcal{O}(\lambda^3)\right)|z_{12}|^{-2\Delta} = |z_{12}|^{\pi\lambda^2 J}|z_{12}|^{-2\Delta} \equiv |z_{12}|^{-2\Delta_\lambda},\end{aligned} \tag{4.12}$$

do qual lemos

$$\Delta_\lambda = \Delta - \frac{\pi}{2}\lambda^2 J + O(\lambda^3). \tag{4.13}$$

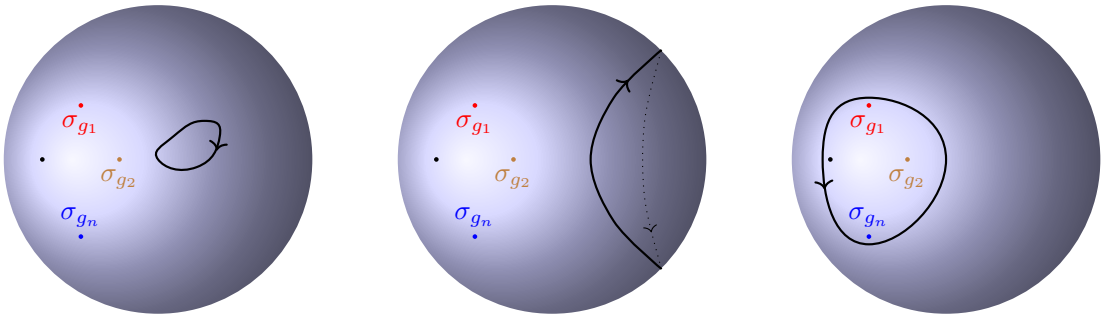
Dessa forma, temos um procedimento para se verificar a renormalização da dimensão conforme de um campo ao transportarmos a teoria livre à teoria interagente a partir do cálculo da integral J, que depende da função de quatro pontos e corrige a dimensão conforme em segunda ordem.

4.2 PROPRIEDADES GERAIS DAS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO NO ORBIFOLD

Seja a princípio a esfera de Riemann onde se localizam n operadores de twist, $\sigma_{g_i}(z_i)$. Sabemos que esses twists geram cortes de ramificação na esfera de forma que os campos se tornam multivalorados ao contornar os pontos z_i. Se definirmos uma curva que não contém nenhum twist em seu interior o campo não sofre uma troca e portanto atua-se a identidade como permutação, veja Figura 11a.

Com a arbitrariedade sobre o formato dessa curva, é permitido que deformemos a mesma, fazendo-a atravessar o ponto no infinito localizado no polo da esfera e assim contornando a esfera, Figura 11b. Mas veja que se continuarmos a deformação, passamos a contornar todos os operadores de twist ao final do processo, Figura 11c. E portanto, podemos impor uma condição de monodromia sobre as permutações associadas aos operadores de twist tal que uma função de correlação dos operadores de twist é não nula somente se as permutações compõem a identidade.

Figura 11 – Condição de monodromia das funções de correlação



(a) Curva fechada que não contém operadores de twist.

(b) Curva fechada contornando a esfera pelo infinito.

(c) Curva fechada contendo todos os twists.

Assim,

$$\langle \sigma_{\hat{g}_1}(z_1,\bar{z}_1)\sigma_{\hat{g}_2}(z_2,\bar{z}_2)...\sigma_{\hat{g}_n}(z_n,\bar{z}_n)\rangle \neq 0, \tag{4.14}$$

somente se $\hat{g}_1\hat{g}_2...\hat{g}_n = \mathcal{I}$.

No Capítulo 3 discutimos o conceito de ciclos disjuntos, onde uma permutação cíclica pode ser decomposta em permutações de ordens menores que não possuem cópias em comum. Aqui veremos como essa propriedade se reflete nas funções de correlação de operadores de twist. Seja por exemplo a função de correlação de 4 pontos,

$$\langle \sigma_{(123)}(z_1)\sigma_{(45)}(z_2)\sigma_{(132)}(z_3)\sigma_{(54)}(z_4)\rangle. \tag{4.15}$$

Podemos verificar a condição de monodromia a partir da composição das g_i permutações. Assim, as cópias são permutadas de forma que

$$\begin{gathered} 1 \xrightarrow{g_3} 3 \xrightarrow{g_1} 1, \qquad 2 \xrightarrow{g_3} 1 \xrightarrow{g_1} 2, \qquad 3 \xrightarrow{g_3} 2 \xrightarrow{g_1} 3, \\ 4 \xrightarrow{g_4} 5 \xrightarrow{g_2} 4, \qquad 5 \xrightarrow{g_4} 4 \xrightarrow{g_2} 5. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Ou seja, todas cópias retornam a si após todas as permutações e portanto, essas compõem a identidade. Mas veja que neste conjunto de permutações as cópias $[1,2,3]$ e as cópias $[4,5]$ formam conjuntos disjuntos. Não há permutação que una ambos conjuntos. Dessa forma, a função de correlação (4.15) pode ser decomposta em um produto de duas funções de correlação de dois pontos,

$$\langle \sigma_{(123)}(z_1)\sigma_{(45)}(z_2)\sigma_{(132)}(z_3)\sigma_{(54)}(z_4)\rangle = \langle \sigma_{(123)}(z_1)\sigma_{(132)}(z_3)\rangle\langle \sigma_{(45)}(z_2)\sigma_{(54)}(z_4)\rangle. \tag{4.17}$$

Poderíamos ainda ter uma permutação g_i composta por ciclos disjuntos, como na função de 3 pontos,

$$\langle \sigma_{(123)(45)}(z_1)\sigma_{(132)}(z_2)\sigma_{(54)}(z_3)\rangle, \tag{4.18}$$

de forma que a fatorização é identificada como o produto de duas funções de dois pontos,

$$\langle\sigma_{(123)(45)}(z_1)\sigma_{(132)}(z_2)\sigma_{(54)}(z_3)\rangle = \langle\sigma_{(123)}(z_1)\sigma_{(132)}(z_2)\rangle\langle\sigma_{(45)}(z_1)\sigma_{(54)}(z_3)\rangle \tag{4.19}$$

De forma geral, se a permutação g_i é escrita como $g_i = g_j \coprod g_k$, em que não há cópias em comum em g_j e g_k, então a função de correlação fatoriza como [47]

$$\langle\prod_i \sigma_{\hat{g}_i}(z_i,\bar{z}_i)\rangle = \langle\prod_j \sigma_{\hat{g}}(z_j,\bar{z}_j)\rangle\langle\prod_k \sigma_{\hat{g}}(z_k,\bar{z}_k)\rangle. \tag{4.20}$$

4.3 O MÉTODO DE LUNIN E MATHUR

Nesta seção estaremos interessados no cálculo de funções de correlação a partir do método de Lunin-Mathur [20], que consiste em mostrar que toda a contribuição na forma das funções de correlação no orbifold referente à introdução dos twists pode ser descrito em termos da ação de Liouville. O desenvolvimento do método aqui descrito acompanha o processo realizado em [18].

A princípio temos o espaço base como o plano complexo parametrizado por z. Neste, vivem os operadores de twists em pontos z_i com cortes de ramificação que implicam em campos multivalorados. Dessa forma, o problema de se calcular quantidades nesse espaço é contornado ao definir um mapeamento para o espaço de cobertura Σ na forma $z(t)$ tal que os campos passam a ser univalorados no espaço de cobertura. Mas veja que se antes tínhamos um espaço plano, com $ds^2 = dzd\bar{z}$, com o mapeamento para o espaço de cobertura, temos,

$$ds^2 = dzd\bar{z} = \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 dtd\bar{t} \equiv e^{\phi(t,\bar{t})}dtd\bar{t}. \tag{4.21}$$

Ou seja, se ϕ não for uma função constante, o que geralmente é o caso, o mapeamento introduz uma curvatura no espaço de cobertura. Se introduzirmos um mapeamento conforme no contexto de uma métrica fiducial, $ds^2 = e^{\phi}d\hat{s}^2$, podemos descrever um mapeamento agora plano ($d\hat{s}^2$), porém com um custo da não invariância da integral de caminho. Felizmente, a mudança na função de partição Z acontece de forma que toda a informação referente ao mapeamento, e a curvatura, a partir da relação $ds^2 = e^{\phi}d\hat{s}^2$ resulta na forma [20, 21],

$$Z = e^{S_L}\hat{Z}, \tag{4.22}$$

em que Z é a função de correlação na base, $\hat{Z}$ é uma função de correlação artificial em um espaço plano e S_L é a ação de Liouville na métrica fiducial,

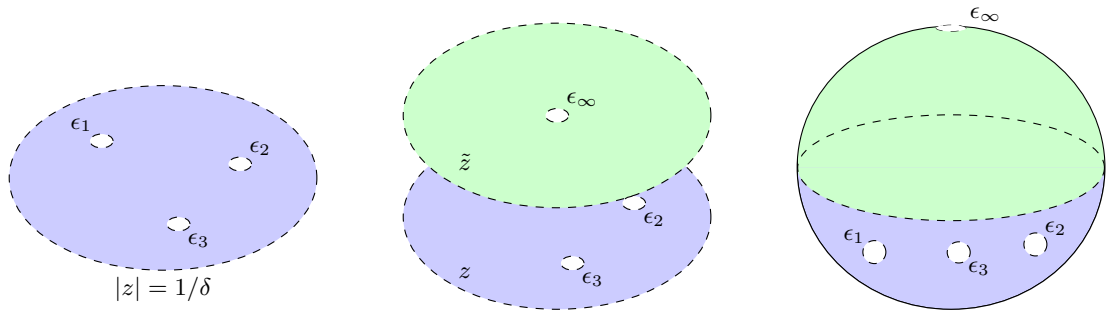
$$S_L = \frac{c}{96\pi}\int d^2t\sqrt{g^{(\hat{s})}}[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g^{(\hat{s})\mu\nu} + 2R^{(\hat{s})}\phi]. \tag{4.23}$$

Aqui $g^{(\hat{s})\mu\nu}$ e $R^{(\hat{s})}$ são a métrica e a curvatura de Ricci fiduciais, respectivamente. O problema agora se resume a encontrar a ação de Liouville que conecta as funções de correlação na base e no espaço de cobertura, e para isso devemos entender como o espaço onde estão os twists se transforma pelo mapeamento.

Para resolver o problema na inserção dos twists realizamos um corte em torno do ponto em que estes estão definidos com $|z - z_i| = \varepsilon_i$, de forma a posteriormente impor condições de contorno sobre os campos na borda deste disco. Além disso, se considerarmos todo o plano surgiriam divergências nas funções de correlação, de forma que definimos um cut-off em $|z| = 1/\delta$ com $\delta \to 0$. Esse cut-off é grande o suficiente para incluir em seu interior todos os cortes feitos em torno dos pontos onde estão definidos os operadores de twist, ver Figura 12a. Para construirmos um espaço compacto definimos um segundo disco, parametrizado pelas coordenadas $\tilde{z} = 1/(\delta^2 z)$ e também delimitado por $|\tilde{z}| = 1/\delta$, ou seja, que representa os pontos na região $|z| > 1/\delta$. Com isso, este novo disco deve conter os twists localizados no infinito, ver Figura 12b. Dessa forma, o espaço base fica sendo descrito por duas regiões que são coladas em suas fronteiras, ver Figura 12c, e a métrica desse espaço é dada por,

$$ds^2 = \begin{cases} dzd\bar{z}, & \text{para } |z| < 1/\delta \\ d\tilde{z}d\bar{\tilde{z}}. & \text{para } |\tilde{z}| < 1/\delta \end{cases} \tag{4.24}$$

Figura 12 – Construção do Espaço Base



(a) Twists no plano complexo delimitado

(b) Duplicação do plano contendo os twists

(c) Construção do espaço compacto.

Com este espaço base, desejamos então construir um mapeamento para o espaço de cobertura definido pelas variáveis t e $\tilde{t}$ de forma semelhante, porém com a consideração de um espaço plano fiducial. Ou seja,

$$d\hat{s}^2 = \begin{cases} dtd\bar{t}, & \text{para } |t| < 1/\delta' \\ d\tilde{t}d\bar{\tilde{t}}, & \text{para } |\tilde{t}| < 1/\delta' \end{cases} \tag{4.25}$$

em que novamente, $ds^2 = e^{\phi} d\hat{s}^2$.[1] E portanto, se faz necessário contabilizar na ação de Liouville todas as regiões que são mapeadas para o espaço de cobertura incluindo suas singularidades, bordas e possíveis curvaturas.

As regiões são divididas em como o mapeamento se comporta em torno de certos pontos. Para pontos onde estão definidos os twists, e que foram realizados os cortes, obtemos de forma semelhante um corte no espaço de cobertura, indicados nos pontos t_i na Figura 13b, onde localmente o mapa se comporta como

$$z - z_i \approx a_i (t - t_i)^{p_i}, \qquad z \approx z_i, t \approx t_i. \tag{4.26}$$

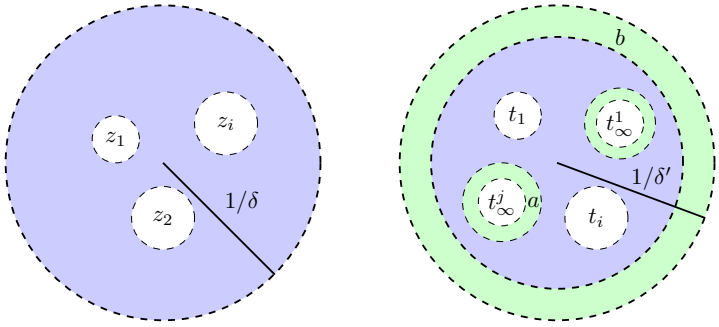
Aqui $p_i \in \mathbb{N}$ indica a ordem do twist associado ao ponto z_i e novamente o corte é tal que $|z - z_i| = \varepsilon_i$. No espaço base também temos a região em que $z \to \infty$, associada à borda $|z| = 1/\delta$ e aos twists definidos no infinito[2], indicados pelos pontos t_∞^j na Figura 13b. Dessa forma, o mapeamento se comporta como

$$z(t) \approx b_0 t^{q_0}, \qquad z = \infty, t = \infty \tag{4.27a}$$

$$z(t) \approx \frac{b_j}{(t - t_\infty^j)^{q_j}}, \qquad z = \infty, t = t_\infty^j \tag{4.27b}$$

em que q_0 e q_j estão associados à ordem do twist no infinito. Os coeficientes a_i e b_0, b_j são definidos pelo mapa do espaço de cobertura. Veja que os twists em $z = \infty$ estão definidos na região parametrizada por $\tilde{z}$, de forma que as fronteira das imagens do infinito com t_∞ e $t = \infty$ se comportam respeitando a métrica do segundo disco e devem ser tratadas com cautela. Essas regiões anelares são indicadas por a e b na Figura 13b.

Figura 13 – Representação do mapeamento da primeira metade do espaço base no espaço de cobertura. As regiões anelares a e b são indicadas.



(a) Espaço base com inserção de twists

(b) Espaço de cobertura com imagens dos cortes

[1] Importante dizer que δ' não é a imagem de $1/\delta$.

[2] Nós escolhemos δ' de forma que a imagem de $1/\delta$ esteja mapeada no primeiro disco.

Com os mapeamentos feitos, falta ainda fechar os buracos no espaço de cobertura devido aos cortes, para isso colamos discos sobre os mesmos com as devidas condições de contorno, formando assim um espaço com a topologia de uma esfera. Esses discos são parametrizados por uma métrica plana, de forma que não haverá contribuições relevantes na ação de Liouville.

A primeira contribuição relevante vem da região $|z| < 1/\delta$, onde estão os buracos em z_i devido aos twists. No espaço de cobertura, mapeamos de acordo com a métrica fiduciária plana $d\hat{s}^2 = dtd\bar{t}$. Assim, na ação de Liouville,

$$S_L^{(1)} = \frac{c}{96\pi}\int d^2t\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \frac{c}{96\pi}\int d^2t\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \frac{c}{96\pi}\int d^2t\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi. \tag{4.28}$$

O segundo termo é nulo para qualquer transformação holomórfica ($\partial_t\partial_{\bar{t}}\phi = 0$). Assim, resta um termo referente à uma integral de contorno sob os buracos, esses que na borda interna tem seu vetor normal apontado para o centro do buraco. Em coordenadas complexas a derivada direcional é dada por

$$\partial_n = -\frac{1}{|z|}(\partial_z + \partial_{\bar{z}}). \tag{4.29}$$

Veja que com $z = |z|e^{i\theta}$,

$$\int ds = |z|\int \frac{dz}{iz} = -|z|\int \frac{d\bar{z}}{i\bar{z}}, \tag{4.30}$$

e a contribuição na ação de Liouville para qualquer buraco no espaço de cobertura é obtida por[3]

$$S_L = \frac{c}{96\pi}i\int dt\phi\partial_t\phi + \text{c.c.}. \tag{4.31}$$

Seguimos considerando os twists localizados em z_i tal que realizado o corte em torno dos mesmos temos $|z - z_i| = \varepsilon_i$. Com $ds^2 = dzd\bar{z} = |\frac{dz}{dt}|^2 dtd\bar{t}$ e o mapeamento local (4.26), temos a partir de (4.21)

$$\phi_i = 2\log\left|\frac{dz}{dt}\right| = 2\log\left(|a_i|^{1/p_i}p_i\varepsilon_i^{(p_i-1)/p_i}\right), \tag{4.32a}$$

$$\partial_t\phi_i = \frac{p_i - 1}{t - t_i}. \tag{4.32b}$$

Na contribuição de um buraco i para a ação de Liouville,

$$S_L^i = \frac{c}{96\pi}\left[i\int dt\phi_i\partial_t\phi_i + \text{c.c.}\right] = \frac{c\phi_i(p_i - 1)}{96\pi}\int dt\frac{i}{t - t_i} + \text{c.c.}. \tag{4.33}$$

[3] "c.c."significa complexo conjugado.

Veja que com $t - t_i = |t - t_i|e^{i\theta}$ e $dt = i|t - t_i|e^{i\theta}d\theta$ a integral resulta em $2\pi i$,[4]

$$S_L^i = -\frac{c\phi_i(p_i - 1)}{24} = -\frac{c}{12}(p_i - 1)\log\left(|a_i|^{1/p_i} p_i \varepsilon_i^{(p_i-1)/p_i}\right)$$
$$= -\frac{c}{12}(p_i - 1)\left[\frac{\log(|a_i|)}{p_i} + \log p_i + \frac{p_i - 1}{p_i}\log\varepsilon_i\right]. \tag{4.34}$$

Se agora partirmos para o contorno onde $|z| = 1/\delta$ sabemos que localmente o mapeamento se comporta como (4.27a). Então,

$$\frac{dz}{dt} = b_0 q_0 t^{q_0 - 1}. \tag{4.35}$$

De maneira que o resultado será semelhante ao anterior, mudando os parâmetros e também considerando que agora se trata da borda exterior, e portanto a derivada direcional carrega um sinal contrario. Assim,

$$S_L^\infty = \frac{c}{12}(q_0 - 1)\left[\frac{\log(|b_0|)}{q_0} + \log q_0 - \frac{q_0 - 1}{q_0}\log\delta\right]. \tag{4.36}$$

Ainda com $|z| = 1/\delta$ temos também as imagens $t = t_\infty$ tal que, localmente, se comportam como (4.27b). Assim, temos,

$$\phi = 2\log\left|\frac{dz}{dt}\right| = 2\log\left(|b_j|^{-1/q_j} q_j \delta^{-(q_j+1)/q_j}\right), \tag{4.37a}$$
$$\partial_t\phi = -\frac{q_j + 1}{t - t_\infty^j}. \tag{4.37b}$$

Na contribuição para a ação,

$$S_L^j = -\frac{c}{12}(q_j + 1)\left[\frac{\log(|b_j|)}{q_j} - \log q_j + \frac{q_j + 1}{q_j}\log\delta\right]. \tag{4.38}$$

Aqui nós já calculamos a contribuição dos cortes realizados em torno dos twists, da borda $|z| = 1/\delta$ e suas imagens em $t = \infty$ e $t = t_\infty$. Nós ainda precisamos verificar como se comporta o mapa nas regiões anelares a entre os cortes em $t = t_\infty$ e a borda $|z| = 1/\delta$, indicadas na Figura 13b. Além disso, também há uma região anelar b entre $|z| = 1/\delta$ e a borda no espaço de cobertura tal que $|t| = 1/\delta'$. Para a região b temos com $\tilde{z} = 1/(\delta^2 z)$ e $ds^2 = d\tilde{z}d\bar{\tilde{z}}$ e a partir do mapeamento (4.27a),

$$\phi = 2\log\left(\frac{q_0}{\delta^2|b_0|}|t|^{-(q_0+1)}\right), \tag{4.39a}$$
$$\partial\phi = -\frac{q_0 + 1}{t}. \tag{4.39b}$$

[4]Neste e nos outros cálculos semelhantes, a contribuição do complexo conjugado é idêntica então apenas incluímos um fator 2.

Neste caso, $|t|$ deve ser avaliado nas duas fronteiras. Com uma integral semelhante ao caso anterior,

$$S_L^b = -\frac{c}{12}(q_0+1)^2 \log(|t|)\Big|_{\text{int}}^{\text{ext}}. \tag{4.40}$$

Veja que aqui teríamos outros termos constantes que vem de ϕ, porém além de termos constantes não contribuírem na ação de Liouville, na diferença entre a região interna e externa esses termos se anulam. Para as regiões internas e externas temos respectivamente,

$$|z| = 1/\delta \rightarrow |t| = (|b_0|\delta)^{-1/q_0} \quad \text{região interna} \tag{4.41a}$$

$$|t| = \frac{1}{\delta'} \quad \text{região externa} \tag{4.41b}$$

Assim,

$$S_L^b = \frac{c}{12}(q_0+1)^2 \left[\frac{\log|b_0|}{q_0} + \frac{\log\delta}{q_0} - \log\delta'\right]. \tag{4.42}$$

Para a região anelar a, sabemos que a mesma está delimitada pelos cortes dos twists obtidos por $t = t_\infty$ e a região em que $\tilde{z} < 1/\delta$. Então, se localmente o mapa se comporta como (4.27b),

$$\phi = 2\log\frac{q_j}{|b_j|\delta^2}|t - t_\infty^j|^{q_j-1}, \tag{4.43a}$$

$$\partial\phi = \frac{q_j - 1}{t}. \tag{4.43b}$$

O mesmo processo do caso anterior é feito, onde integramos na região delimitada pelos contornos tal que,

$$|\tilde{z}| = \tilde{\varepsilon} \rightarrow |t - t_\infty^j| = (\tilde{\varepsilon}|b_j|\delta^2)^{1/q_j} \quad \text{região interna} \tag{4.44a}$$

$$|\tilde{z}| = 1/\delta \rightarrow |t - t_\infty^j| = (|b_j|\delta)^{1/q_j} \quad \text{região externa} \tag{4.44b}$$

E então,[5]

$$S_L^a = \frac{c}{12}(q_j-1)^2 \log(|t - t_\infty^j|)\Big|_{\text{int}}^{\text{ext}} = -\frac{c}{12}\frac{(q_j-1)^2}{q_j}\log(\tilde{\varepsilon}\delta) \tag{4.45}$$

Por fim, falta calcular a contribuição da região anelar no segundo disco que forma a segunda região da esfera, este que possui parametrização $ds^2 = d\tilde{z}d\bar{\tilde{z}} = |\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}}|^2 d\tilde{t}d\bar{\tilde{t}}$ com $\tilde{z} = 1/\delta^2 z$, $\tilde{t} = 1/\delta'^2 t$ e o mapeamento (4.27a),

$$\phi = 2\log\left(\frac{\delta'^{2q_0} q_0}{\delta^2|b_0|}|\tilde{t}|^{q_0-1}\right), \tag{4.46a}$$

$$\partial\phi = \frac{q_0 - 1}{\tilde{t}}. \tag{4.46b}$$

[5] $\tilde{\varepsilon}$ é o tamanho do corte no mapa de cobertura dos twists no infinito, e assim como os outros parâmetros deve se tomar o limite à zero no final dos cálculos.

Agora, a região de interesse é tal que

$$|\tilde{z}| = \tilde{\varepsilon} \rightarrow |\tilde{t}| = \frac{1}{\delta'^2}(\tilde{\varepsilon}|b_0|\delta^2)^{1/q_0} \quad \text{região interna} \tag{4.47a}$$

$$|\tilde{t}| = \frac{1}{\delta'} \qquad \text{região externa} \tag{4.47b}$$

Assim, a contribuição na ação de Liouville para o segundo disco no mapa de cobertura,

$$S_L^{\tilde{}} = -\frac{c}{12}\frac{(q_0-1)^2}{q_0}\left[\log|b_0| + \log\tilde{\varepsilon} + 2\log\delta - q_0\log\delta'\right]. \tag{4.48}$$

Isso finaliza o cálculo de todas as contribuições para a ação de Liouville da chamada parte cinética. Em todas essas regiões tivemos métricas planas que implicaram em $R^{\hat{s}} = 0$ na integral de Liouville (4.23). Porém, vê-se uma região, dada pela intersecção dos dois planos em $|t| = 1/\delta'$ na qual há uma curvatura não nula. Na ação de Liouville,

$$S_L^c = \frac{c}{48\pi}\int d^2t R\phi = \frac{c}{6}\phi\Big|_{|t|=1/\delta'}. \tag{4.49}$$

Em que para uma esfera temos $\int d^2t R = 8\pi$. Com o mapeamento sendo o mesmo do caso anterior, mas parametrizando em t, temos,

$$\phi\Big|_{|t|=1/\delta'} = 2\log\frac{q_0}{\delta^2}\frac{\delta'^{(q_0+1)}}{|b_0|} \implies S_L^c = -\frac{c}{3}\left[\log|b_0| - \log q_0 + 2\log\delta - (q_0+1)\log\delta'\right]. \tag{4.50}$$

Portanto, temos ao considerar todas as contribuições na ação de Liouville,

$$\begin{aligned} S_L = &-\frac{c}{12}\Bigg\{\sum_i \frac{(p_i-1)}{p_i}\log(|a_i|) + \sum_i (p_i-1)\log p_i + \sum_i \frac{(p_i-1)^2}{p_i}\log\varepsilon_i \\ &+ \frac{(1-q_0)}{q_0}\log(|b_0|) - (q_0+3)\log q_0 + 2\left[\sum_j \frac{q_j^2+1}{q_j} + \frac{q_0^2+1}{q_0}\right]\log\delta \\ &+ \sum_j \frac{(q_j+1)}{q_j}\log(|b_j|) - \sum_j (q_j+1)\log q_j - 4\log\delta' + \left[\sum_j \frac{(q_j-1)^2}{q_j} + \frac{(q_0-1)^2}{q_0}\right]\log\tilde{\varepsilon}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Assim, para o cálculo de uma função de correlação em um espaço base contendo M twists de ordem p_i e N twists no infinito de ordem q_j,

$$Z = \langle\sigma_{p_1}(z_1)\sigma_{p_2}(z_2)...\sigma_{p_M}(z_M)\sigma_{q_0}(\infty)\sigma_{q_1}(\infty)...\sigma_{q_{N-1}}(\infty)\rangle, \tag{4.52}$$

apenas os coeficientes referentes ao mapeamento local são necessários para obter a função de correlação na base. Note que ainda temos termos como ε,δ e δ', que devem ser removidos na normalização das funções de correlação. Então, seja a função de correlação envolvendo

N twists de forma que no espaço de cobertura esses são mapeados para a identidade e portanto, sobram apenas os cut-off realizados no espaço base. A função de correlação fica definida por

$$Z_{\delta,\varepsilon}[\sigma_{p_1}(z_1),...,\sigma_{q_{N-1}}(\infty)] = e^{S_L} Z^{(\hat{s})} = e^{S_L} Z_{\delta'}. \tag{4.53}$$

Com $\hat{s}$ indicando uma esfera sem twists, como foi construído e a função de partição possui o cut-off em $1/\delta'$. Veja que em (4.51) se identificarmos a contribuição do cut-off, para um espaço sem twists, podemos escrever,

$$Z_\delta = (\delta)^{-\frac{c}{3}} Z^{\hat{s}} \equiv K(\delta)^{-\frac{c}{3}}, \tag{4.54}$$

dado que no espaço de cobertura os twists são proporcionais à identidade. Definimos K como uma constante que será absorvida na regularização. Por fim, podemos definir uma função de correlação

$$\langle \sigma^{\varepsilon}_{p_1},...,\sigma^{\varepsilon}_{q_{N-1}} \rangle_\delta \equiv \frac{Z_{\delta,\varepsilon}[\sigma_{p_1},...,\sigma_{q_{N-1}}]}{(Z_\delta)^N} = e^{S_L} \frac{K'}{K^N} \left(\frac{\delta'}{\delta^N}\right)^{-\frac{c}{3}} \tag{4.55}$$

Em que utilizamos o fato que no espaço de cobertura os twists são mapeados para um operador identidade.

4.3.1 Função de Dois Pontos

Da construção anterior temos para uma função de correlação de dois pontos de twist,

$$\langle \sigma^{\varepsilon}_{(n)}(0)\sigma^{\varepsilon}_{(n)}(v) \rangle_\delta = \frac{K'}{K^n} \left(\frac{\delta'}{\delta^n}\right)^{-\frac{c}{3}} e^{S_L}. \tag{4.56}$$

Dessa forma, precisamos computar as contribuições em S_L para dois operadores de twist. Para uma função de dois pontos podemos escrever o mapeamento para o espaço de cobertura como,

$$z = v \frac{t^n}{t^n - (t-1)^n}. \tag{4.57}$$

Então para $z = 0, v$ temos as imagens em $t = 0, 1$ na cobertura, para $z = \infty$ teremos as imagens $t = \infty, t^j_\infty$. De forma que, expandindo o mapeamento localmente temos,

$$z \approx v(-1)^{n+1} t^n, \qquad z = 0, t = 0 \tag{4.58a}$$

$$z - v \approx v(t-1)^n, \qquad z = v, t = 1 \tag{4.58b}$$

$$z \approx \frac{v}{n} t, \qquad z = \infty, t = \infty \tag{4.58c}$$

$$z \approx \frac{r_j}{(1-r_j)^2} (t - t^j_\infty)^{-1}. \qquad z = \infty, t = t^j_\infty \tag{4.58d}$$

Com r_j sendo as raízes que satisfazem $(r_j)^n = 1$. Dessa forma, obtemos os coeficientes necessários para se obter a ação de Liouville,

$$|a_1| = |v|, |a_2| = |v|, p_1 = p_2 = n, \tag{4.59a}$$

$$|b_0| = \frac{|v|}{n}, q_0 = 1, \tag{4.59b}$$

$$b_j = \frac{v}{n}\frac{r_j}{(1-r_j)^2}, q_j = 1. \tag{4.59c}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} S_L = &-\frac{c}{12}\Bigg\{2\frac{n-1}{n}\log|v| + 2(n-1)\log n + \frac{(n-1)^2}{n}\log\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &+ 4n\log\delta + 2\sum_{j=1}^{n-1}\log\left|\frac{v}{n}\frac{r_j}{(1-r_j)^2}\right| - 4\log\delta'\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Sabendo que r_j são as raízes de 1 podemos escrever um polinômio de grau n como a decomposição de suas raízes tal que,

$$q^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(q - r_j) = (q-1)\prod_{j=1}^{n-1}(q - r_j), \tag{4.61}$$

com $r_0 = 1$. Assim, no termo que contem tais raízes na contribuição para a ação de Liouville,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\log\left|\frac{r_j}{(1-r_j)^2}\right| = -2\log\prod_{j=1}^{n-1}|1-r_j| = -2\log\lim_{q\to 1}\frac{q^n-1}{q-1} = -2\log n. \tag{4.62}$$

E portanto,

$$S_L = -\frac{c}{12}\left\{\frac{2(n-1)(n+1)}{n}\log|v| + 4n\log\delta - 4\log\delta' + \frac{(n-1)^2)}{n}\log\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\log n\right\}, \tag{4.63}$$

de forma que obtemos a função de dois pontos não normalizada,

$$\langle\sigma^{\varepsilon}_{(n)}(0)\sigma^{\varepsilon}_{(n)}(v)\rangle = \frac{K'}{K^n}\left[|v|^{-\frac{c}{6}\left(n-\frac{1}{n}\right)}(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-\frac{c}{12n}(n-1)^2}n^{\frac{c}{3}}\right]. \tag{4.64}$$

Veja que não há mais dependência nos cut-off's δ, δ'. E por fim, podemos normalizar os operadores de twist definindo,

$$\sigma_{(n)} = \sigma^{\varepsilon}_{(n)}\sqrt{\frac{K^n}{K'}}n^{-\frac{c}{6}}\varepsilon^{\frac{c}{12n}(n-1)^2}. \tag{4.65}$$

Essa escolha deve ser carregada para cálculos de funções de correlação envolvendo operadores de twist daqui em diante. A função de dois pontos normalizada fica na forma,

$$\langle\sigma_{(n)}(0)\sigma_{(n)}(v)\rangle = |v|^{-\frac{c}{6}\left(n-\frac{1}{n}\right)}. \tag{4.66}$$

Com nosso conhecimento do comportamento de uma função de dois pontos podemos ler a dimensão conforme do operador de twist puro,

$$h = \bar{h} = \frac{c}{24}\left(n - \frac{1}{n}\right). \tag{4.67}$$

4.4 MÉTODO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Um outro método bastante conhecido para o cálculo de funções de correlação é o que se utiliza do tensor energia momento [65, 66]. Este método pode ser consideravelmente mais simples de se construir, pois baseia-se em conhecimentos relativamente básicos de CFT, como identidades de Ward e OPE's de operadores primários. Seja a identidade de Ward em sua forma holomórfica, em que consideramos a princípio apenas quatro campos primários,

$$\langle T(z)X\rangle = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{h_i\langle X\rangle}{(z-\omega_i)^2} + \frac{\partial_{\omega_i}\langle X\rangle}{z-\omega_i}\right]. \tag{4.68}$$

E definimos $X \equiv \phi_1(\infty)\phi_2(1)\phi_3(u)\phi_4(0)$. Veja que quando utilizarmos da simetria conforme para fixar três dos quatro pontos, temos uma EDO para $\langle X\rangle$ com u como variável,

$$\frac{\langle T(z)X(u)\rangle}{\langle X(u)\rangle} = \frac{\partial_u \log\langle X(u)\rangle}{z-u} + \text{outros termos} \tag{4.69}$$

Os termos com ordem diferente de $(z-u)^{-1}$ não possuem relevância dado que podemos extrair o coeficiente de interesse a partir do cálculo de resíduos. Assim,

$$\operatorname*{Res}_{z=u}\frac{\langle T(z)\phi_1(\infty)\phi_2(1)\phi_3(u)\phi_4(0)\rangle}{\langle \phi_1(\infty)\phi_2(1)\phi_3(u)\phi_4(0)\rangle} = \partial_u \log\langle \phi_1(\infty)\phi_2(1)\phi_3(u)\phi_4(0)\rangle \tag{4.70}$$

Por um lado, essa expressão pode ser útil quando se tem informações sobre o comportamento do tensor energia momento e dos campos primários. Por outro lado, a expressão pode se tornar complicada quando envolve um grande número de campos na função de correlação. Se introduzirmos os twists, ao realizar um mapa conforme podemos levar a expressão para sua representação no mapa de cobertura, onde deve ser mais fácil tratar os campos, e então retornar à base. Um quesito importante é a consideração de um tensor energia momento total, composto pela soma dos tensores energia de todas as cópias. Se cada um deles se comporta de forma semelhante, o resultado é a modificação da expressão (4.70) através da simples soma sobre o número de cópias associado à ordem do twist em questão.

Utilizemos o método descrito para calcular novamente a função de dois pontos para os operadores de twist de ordem n. Assim,

$$\partial_v \log \langle \sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle = n \operatorname*{Res}_{z=v} \left\{ \frac{\langle T(z)\sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle}{\langle \sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle} \right\}. \tag{4.71}$$

Como já construído anteriormente, sabemos que no espaço de cobertura os operadores de twist são mapeados no operador identidade, de forma que,

$$\frac{\langle T(z)\sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle}{\langle \sigma_n(0)\sigma_n(a)\rangle} \to \langle T(t)\rangle. \tag{4.72}$$

Agora veja que, como o tensor energia momento não é um campo primário, devemos considerar sua transformação apropriada,

$$T(t) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 T'(z) + \frac{c}{12}\{t(z), z\} \tag{4.73}$$

Em que $\{t(z), z\}$ define a Schwarziana a partir das derivadas do mapa,

$$\{t(z), z\} = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2, \qquad \text{com} \quad t' \equiv \frac{dt}{dz}. \tag{4.74}$$

Essa transformação evidencia a curvatura do mapa gerado pelos twists. Se na base tínhamos $\langle T('z)\rangle = 0$, no espaço de cobertura,

$$\langle T(t)\rangle = \frac{c}{12}\{t(z), z\}. \tag{4.75}$$

Portanto, temos a função de correlação,

$$\partial_v \log \langle \sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle = \frac{cn}{12} \operatorname*{Res}_{z=v} \{t(z), z\}. \tag{4.76}$$

Veja que aqui se faz necessária a transformação inversa, $t(z)$, que podemos obter recuperando o mapa proposto em (4.57). Assim

$$t(z) = \frac{z^{1/n}}{z^{1/n} - (z-v)^{1/n}}. \tag{4.77}$$

Calculando a Schwarziana desta transformação e avaliando o resíduo, temos enfim

$$\frac{cn}{12} \operatorname*{Res}_{z=v} \{t(z), z\} = \frac{cn}{12} \operatorname*{Res}_{z=v} \left(\frac{v^2(n^2-1)}{2n^2(z-v)^2 z^2} \right) = -\frac{c}{12v}\left(n - \frac{1}{n}\right). \tag{4.78}$$

E portanto na EDO que fornece a função de correlação,

$$\partial_v \log \langle \sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle = -\frac{c}{12v}\left(n - \frac{1}{n}\right), \tag{4.79}$$

$$\implies \langle \sigma_n(0)\sigma_n(v)\rangle = v^{-\frac{c}{12}\left(n - \frac{1}{n}\right)}. \tag{4.80}$$

É importante mencionar que o método considerou a atuação da componente holomórfica do tensor energia momento, mas o mesmo seria possível com a parte anti-holomórfica. Além disso, possíveis constantes de integração na solução da EDO são fixadas a partir da normalização do operador de twist. Novamente, a partir do comportamento da função de dois pontos obtemos a dimensão conforme,

$$h = \frac{c}{24}\left(n - \frac{1}{n}\right). \tag{4.81}$$

O que confirma o resultado obtido em (4.67).

4.5 PROPRIEDADES GERAIS DE FUNÇÕES DE CICLOS DUPLOS

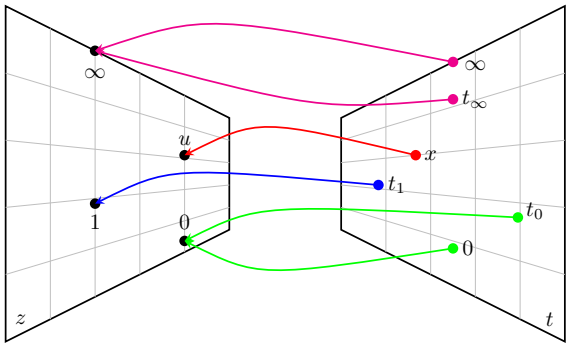
Um dos principais desafios no cálculo de funções de correlação, seja pelo método de Lunin-Mathur ou pelo método do tensor energia momento, é a definição do mapeamento que leva os objetos da base para o espaço de cobertura, removendo as singularidades do orbifold simétrico e criando diferentes folhas que tornam os campos univalorados novamente. Na seção 4.4 utilizamos de um mapeamento $z(t)$ para obter a dimensão conforme de um operador de twist puro σ_n. Aqui iremos definir um mapa que será útil para o cálculo de funções de correlação de quatro pontos com ciclos duplos, do tipo

$$\langle \left[O^1_{[n_1]}O^2_{[n_2]}\right]^\dagger(\infty,\bar{\infty})O^3_{[2]}(1,\bar{1})O^3_{[2]}(u,\bar{u})\left[O^1_{[n_1]}O^2_{[n_2]}\right](0,\bar{0})\rangle. \tag{4.82}$$

A princípio supomos que esta se trata de uma função de correlação que não se fatoriza. Iremos definir o mapa para o espaço de cobertura [47, 67], ver Figura 14,

$$z(t) = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{n_1}\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)^{n_2}\left(\frac{t_1-t_\infty}{t-t_\infty}\right)^{n_2}, \tag{4.83}$$

Figura 14 – Mapeamento da Função de Correlação



Veja que com o desdobramento em ciclos duplos também definimos os campos O^1 e O^2 em pontos distintos no espaço de cobertura, tornando-se uma função de 6 pontos no espaço de cobertura,

$$\langle O^{2^\dagger}(t_\infty, \bar{t}_\infty) O^{1^\dagger}(\infty, \bar{\infty}) O^3(t_1, \bar{t}_1) O^3(x, \bar{x}) O^1(0, \bar{0}) O^2(t_0, \bar{t_0}) \rangle. \tag{4.84}$$

Esse mapa é proposto de maneira que localmente a função se comporta de acordo com a ordem do twist de cada operador. Assim,

$$z(t) \approx b_\infty t^{n_1}, \qquad t \to \infty \tag{4.85a}$$

$$z(t) \approx b_{t_\infty} (t - t_\infty)^{-n_2}, \quad t \to t_\infty \tag{4.85b}$$

$$z(t) \approx b_0 t^{n_1}, \qquad t \to 0 \tag{4.85c}$$

$$z(t) \approx b_{t_0} (t - t_0)^{n_2}. \qquad t \to t_0 \tag{4.85d}$$

Além disso, também devemos impor que o mapa possua o comportamento adequado para os operadores com twist 2, ou seja,

$$z(t) \approx 1 + b_{t_1} (t - t_1)^2, \quad t \to t_1 \tag{4.86a}$$

$$z(t) \approx u + b_x (t - x)^2. \quad t \to x \tag{4.86b}$$

A expansão do mapa sobre os pontos t_1 e x deve fornecer condições sobre os parâmetros t_0,t_1 e t_∞ tal que o mapa fica totalmente definido. Com (4.83) vemos que já é satisfeita a condição $z(t_1) = 1$, enquanto para a segunda equação temos,

$$z(x) = \left(\frac{x}{t_1}\right)^{n_1} \left(\frac{x - t_0}{t_1 - t_0}\right)^{n_2} \left(\frac{t_1 - t_\infty}{x - t_\infty}\right)^{n_2} \equiv u(x). \tag{4.87}$$

Onde impomos que a imagem de x no plano z é justamente $z(t = x) = u$. Além disso, para que o mapeamento tenha coeficiente nulo na expansão em primeira ordem, a primeira derivada do mapa deve ser nula nesses pontos. Assim,

$$z'(x) = 0 \implies \frac{n_2}{n_1} x(t_\infty - t_0) = (x - t_0)(x - t_\infty), \tag{4.88a}$$

$$z'(t_1) = 0 \implies \frac{n_2}{n_1} t_1(t_\infty - t_0) = (t_1 - t_0)(t_1 - t_\infty). \tag{4.88b}$$

Então, temos duas condições sobre 3 parâmetros e a escolha de um deles fica livre. Por conveniência, fazemos então a definição $t_0 = x - 1$. Dessa forma, podemos obter t_∞ de

(4.88a) e substituindo em (4.88b), encontramos a solução para t_1,

$$t_0 = x - 1, \tag{4.89a}$$

$$t_1 = \frac{(x-1)(n_1 + n_2 x - n_2)}{(n_1 + n_2 x)}, \tag{4.89b}$$

$$t_\infty = x - \frac{n_2 x}{n_1 + n_2 x}. \tag{4.89c}$$

Substituindo em (4.87) temos,

$$u(x) = \left(\frac{x + \frac{n_1}{n_2}}{x - 1}\right)^{n_1+n_2} \left(\frac{x}{x + \frac{n_1}{n_2} - 1}\right)^{n_1-n_2}. \tag{4.90}$$

Como fixamos três pontos com a simetria conforme em duas dimensões, as funções de correlação podem ser descritas como funções apenas de $u(x)$. Aqui podemos afirmar que ao se realizar o mesmo processo com a troca $n_1 \leftrightarrow n_2$ teremos um mapa equivalente a menos de uma transformação conforme, tal que podemos sem perda de generalidade escolher o mapa 4.90. Em certo ponto será necessário obter a inversa de tal mapa, mas veja que o mesmo possui grau elevado, tornando o processo inviável de se realizar de forma geral. Ainda assim, podemos analisar como a inversa do mapa se comporta em certos limites de interesse. Se $u \to 0$ vemos pelo mapa que $x \to 0, -\frac{n_1}{n_2}$. Assim, temos as inversas em menor ordem

$$x_1(u) \approx \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}} u^{\frac{1}{n_1-n_2}}, \qquad x \to 0 \tag{4.91a}$$

$$x_2(u) \approx -\frac{n_1}{n_2} - \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}} u^{\frac{1}{n_1+n_2}}. \qquad x \to -\frac{n_1}{n_2} \tag{4.91b}$$

Já para $u \to 1$ temos as imagens $x \to \infty, -\frac{n_1-n_2}{2n_2}$. Na imagem $x = -\frac{n_1-n_2}{2n_2}$ é possível mostrar que na expansão do mapa $u(x)$ as correções de primeira e segunda ordem se anulam[6]. Sendo assim, uma expansão em terceira ordem é necessária, resultando em

$$x_3(u) \approx -\frac{4n_1}{1-u}, \qquad x \to \infty, \tag{4.92a}$$

$$x_4(u) \approx -\frac{n_1 - n_2}{2n_2} + 3^{1/3} 2^{-2} n_1^{-1/3} n_2^{-4/3} (n_1+n_2)^{2/3} (n_1-n_2)^{2/3} (1-u)^{1/3}, \qquad x \to -\frac{n_1-n_2}{2n_2}. \tag{4.92b}$$

Com a ação de Liouville (4.51), já desconsiderando os termos de regularização e conside-

[6]Basta verificar que a primeira e segunda derivada da função em tal ponto são nulas.

rando as definições dos coeficientes (4.89),

$$\begin{aligned} S_L = &-\frac{c}{12}\Bigg\{\frac{(n_1-1)}{n_1}\log\left(|b_0|\right)+\frac{(n_2-1)}{n_2}\log\left(|b_{t_0}|\right)+\frac{1}{2}\log\left(|b_{t_1}|\right)+\frac{1}{2}\log\left(|b_x|\right) \\ &+(n_1-1)\log n_1+(n_2-1)\log n_2+2\log 2+\frac{(1-n_1)}{n_1}\log\left(|b_\infty|\right)-(n_1+3)\log n_1 \\ &+\frac{(n_2+1)}{n_2}\log\left(|b_{t_\infty}|\right)-(n_2+1)\log n_2. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Com o mapa $u(x)$ obtemos ainda os coeficientes b,

$$b_0 = x^{-n_2}(x-1)^{-n_1}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1+n_2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{-n_1}, \tag{4.94a}$$

$$b_{t_0} = \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^{-n_2}(x-1)^{-n_2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1+n_2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{n_2-n_1}, \tag{4.94b}$$

$$b_{t_1} = -n_1(x-1)^{-2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{-2}\left(x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right), \tag{4.94c}$$

$$b_x = n_1 x^{n_1-n_2-2}(x-1)^{-(n_1+n_2)}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1+n_2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{n_2-n_1}\left(x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right), \tag{4.94d}$$

$$b_{t_\infty} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_2}x^{n_1}(x-1)^{-(n_1+n_2)}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{-n_2}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{n_2}, \tag{4.94e}$$

$$b_\infty = (x-1)^{-(n_1+n_2)}\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1}\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{n_2-n_1}. \tag{4.94f}$$

E portanto, a ação de Liouville que contém as informações do mapeamento e relaciona uma função de correlação na base com a mesma no espaço de cobertura é

$$\begin{aligned} S_L = &-\frac{c}{12}\Bigg\{\frac{2n_2^2+(2+3n_2)(n_1-n_2)n_1}{2n_1n_2}\log|x|-\frac{2n_2^2+(2+3n_2)(n_1+n_2)n_1}{2n_1n_2}\log|x-1| \\ &-\frac{2n_2^2+(2-3n_2)(n_1+n_2)n_1}{2n_1n_2}\log\left|x+\frac{n_1}{n_2}\right|+\frac{2n_2^2+(2-3n_2)(n_1-n_2)n_1}{2n_1n_2}\log\left|x+\frac{n_1}{n_2}-1\right| \\ &+\log\left|x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right|-\log n_1+2\log 2-4\log n_2\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

4.6 FUNÇÃO DE QUATRO-PONTOS COM OPERADOR DE DEFORMAÇÃO

4.6.1 Campos de Ramond

Anteriormente definimos os campos de spin a partir de operadores que mapeiam o estado de vácuo de Neveu-Schwarz para o vácuo degenerado de Ramond. Por isso muitas vezes chamamos os campos de spin de campos de Ramond. Considerando as excitações do vácuo como rotações em S^3 com carga j^3 e rotações em T^4 com carga $\mathbf{j}^3$, temos os

campos de Ramond em sua forma bosonizada [47, 67],

$$R_n^{\dot{1}}(z) = \exp\left\{\left(-\frac{i}{2n}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^5(z)+\phi_I^6(z)]\right)\right\}\sigma_n(z), \quad j^3 = 0 \ \text{ e } \ \mathbf{j}^3 = -\frac{1}{2} \tag{4.96a}$$

$$R_n^{\dot{2}}(z) = \exp\left\{\left(\frac{i}{2n}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^5(z)+\phi_I^6(z)]\right)\right\}\sigma_n(z), \quad j^3 = 0 \ \text{ e } \ \mathbf{j}^3 = \frac{1}{2} \tag{4.96b}$$

$$R_n^{\pm}(z) = \exp\left\{\left(\pm\frac{i}{2n}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^5(z)-\phi_I^6(z)]\right)\right\}\sigma_n(z). \quad j^3 = \pm\frac{1}{2} \ \text{ e } \ \mathbf{j}^3 = 0 \tag{4.96c}$$

Com conhecimento de operadores de vértice e a dimensão conforme dos operadores de spin, obtemos a dimensão conforme dos campos de Ramond: $h = n/4$. Os estados de spin são construídos a partir da atuação desses campos em um vácuo de NS,

$$\left|\pm\dot{\pm}\right\rangle_n \equiv R_n^{\pm}\tilde{R}_n^{\dot{\pm}}(0,\bar{0})\left|\varnothing\right\rangle_{NS} \quad \text{e} \quad \left|A\dot{B}\right\rangle_n \equiv R_n^{A}\tilde{R}_n^{\dot{B}}(0,\bar{0})\left|\varnothing\right\rangle_{NS}. \tag{4.97}$$

Com um estado de spin arbitrário $\left|s\right\rangle_n$ com $s = (\pm\dot{\pm}), (A\dot{B})$ podemos construir um estado de Ramond $\mathscr{R}\{N_n^{(s)}\}$ genérico a partir destes estados,

$$\mathscr{R}\{N_n^{(s)}\} \equiv \prod_{n,s}\left(\left|s\right\rangle_n\right)^{N_n^{(s)}}, \tag{4.98}$$

em que $N_n^{(s)} \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n,s} nN_n^{(s)} = N$. Por exemplo, digamos que tenhamos uma CFT com $N = 3$ cópias. Assim, escolhemos estados de spin s arbitrariamente de forma que

$$1N_1^{(s_1)} + 2N_2^{(s_2)} + 3N_3^{(s_3)} = 3. \tag{4.99}$$

Aqui teríamos possibilidades de escolha em N_n tal que cada uma representa um estado possível,

$$\mathscr{R}_1 = \left|s_1\right\rangle_1 \otimes \left|s_2\right\rangle_1 \otimes \left|s_3\right\rangle_1, \tag{4.100a}$$

$$\mathscr{R}_2 = \left|s_1\right\rangle_1 \otimes \left|s_2\right\rangle_2, \tag{4.100b}$$

$$\mathscr{R}_3 = \left|s_3\right\rangle_3. \tag{4.100c}$$

Estaremos interessados em calcular funções de dois pontos com campos de Ramond, tal que, introduzindo a interação pelo operador interação, surgem as funções de 4 pontos na forma,

$$\left\langle\left[\prod_{i,s}\left(R_{[n_i]}^{s}\right)^{N_n^{(s)}}\right]^{\dagger}(\infty,\bar{\infty})O_{[2]}^{\text{int}}(1,\bar{1})O_{[2]}^{\text{int}}(u,\bar{u})\left[\prod_{i,s}\left(R_{[n_i]}^{s}\right)^{N_n^{(s)}}\right](0,\bar{0})\right\rangle. \tag{4.101}$$

Os campos de Ramond $R_{[n_i]}^{s}$ são por construção compostos por ciclos (n_i) disjuntos, de forma que $\sum_i n_i = N$, ou seja, esses campos incluem todas as cópias da SCFT [47].

Na seção 4.2 vimos como operadores de twist podem se fatorizar a partir do comportamento de cada permutação cíclica. É simples de ver que considerando os operadores deformação $O^{(\mathrm{int})}_{[2]}$ com permutações de ciclo 2, existem maneiras limitadas de se obter uma função de correlação conectada, dado que as duas cópias presentes neste operador podem se conectar com um ou no máximo 2 operadores $R^{s}_{[n_i]}$. Assim, a função de correlação (4.101) reduz-se à três casos:

- *Ciclo único*

$$\left\langle R^{s\dagger}_{[n]}(\infty,\bar{\infty})O^{(\mathrm{int})}_{[2]}(1,\bar{1})O^{(\mathrm{int})}_{[2]}(u,\bar{u})R^{s}_{[n]}(0,\bar{0})\right\rangle \prod_j \left\langle R^{s_j\dagger}_{[n_j]}(\infty,\bar{\infty})R^{s_j\dagger}_{[n_j]}(0,\bar{0})\right\rangle . \tag{4.102}$$

Neste caso, ambas as cópias no operador deformação estão inclusas no ciclo n, e podemos ainda normalizar os campos para que a função de dois pontos seja normalizada, $\langle R^{s_j\dagger}_{n_j}(\infty,\bar{\infty})R^{s_j}_{n_j}(0,\bar{0})\rangle = 1$. Com twists de ordem n são necessárias n folhas para compor o espaço de cobertura. E então, pela fórmula de Riemann-Hurwitz (3.53), o gênus da superfície é $g = 1$, e portanto possui a topologia de um torus.

- *Ciclos duplos*

$$\left\langle \left[R^{s_1}_{[n_1]}R^{s_2}_{[n_2]}\right]^{\dagger}(\infty,\bar{\infty})O^{\mathrm{int}}_{[2]}(1,\bar{1})O^{\mathrm{int}}_{[2]}(u,\bar{u})\left[R^{s_1}_{[n_1]}R^{s_2}_{[n_2]}\right](0,\bar{0})\right\rangle \prod_k \left\langle R^{s_k\dagger}_{[n_k]}(\infty,\bar{\infty})R^{s_k\dagger}_{[n_k]}(0,\bar{0})\right\rangle . \tag{4.103}$$

No caso de ciclos duplos, uma cópia na permutação do operador deformação está inclusa em n_1 e outra em n_2. Veja que neste caso, temos campos com permutações distintas em um mesmo ponto, o que leva a 6 pontos de ramificação, sendo necessárias $n_1 + n_2$ folhas no espaço de cobertura. Assim, o gênus da superfície de cobertura é

$$g = \frac{1}{2}\left[2(n_1-1)+2(n_2-1)+2\right] - (n_1+n_2) + 1 = 0, \tag{4.104}$$

e portanto possui a topologia de uma esfera. Pelo argumento elaborado no Capítulo 3 nos preocuparemos apenas em calcular funções de correlação cujo espaço de cobertura possua genus $g = 0$.

- *Função de três pontos*

$$\begin{aligned}\left\langle R^{s_1\dagger}_{[M]}(\infty,\bar{\infty})O^{(\mathrm{int})}_{[2]}(1,\bar{1})R^{s_1}_{[n_1]}R^{s_2}_{[n_2]}(0,\bar{0})\right\rangle \\ \times \left\langle R^{s_{1'}\dagger}_{[n_{1'}]}R^{s_{2'}\dagger}_{[n_{2'}]}(\infty,\bar{\infty})O^{(\mathrm{int})}_{[2]}(u,\bar{u})R^{s_{M'}}_{[M']}(0,\bar{0})\right\rangle \prod_j \left\langle R^{s_j\dagger}_{[n_j]}(\infty,\bar{\infty})R^{s_j\dagger}_{[n_j]}(0,\bar{0})\right\rangle .\end{aligned} \tag{4.105}$$

Com $M = n_1+n_2$, é possível que a função de correlação seja decomposta em uma função de três pontos. Na seção 4.8 iremos mostrar uma identidade de Ward associada às correntes de simetria-R, de forma que, no caso particular dos modos J_0^3, podemos obter que funções de correlação em geral somente serão não nulas caso a soma das cargas j^3 dos operadores envolvidos seja nula. No caso das funções de três pontos dos campos de Ramond, devido à essa propriedade, tais funções são identicamente nulas, dado que os campos de ciclos duplos possuem carga 1 ou 0 e os campos de ciclo único possuem carga $\pm 1/2$. Isso justifica que a correção em primeira ordem da função de dois pontos dos campos de Ramond é trivialmente zero.

Pelas expressões que definem os campos de Ramond em (4.96), podemos escrever o produto de dois campos de Ramond da seguinte maneira:

$$R^{(\sigma,\rho)}_{[n_1]}R^{(\varsigma,\varrho)}_{[n_2]} \equiv \frac{1}{\mathscr{S}_{n_1 n_2}} \sum_{h\in S_N} \exp\left[\frac{i}{2n_1}\sum_{I=1}^{n_1}\left(\sigma\phi^5_{h(I)} + \rho\phi^6_{h(I)}\right) + \frac{i}{2n_2}\sum_{I=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(\varsigma\phi^5_{h(I)} + \varrho\phi^6_{h(I)}\right)\right] \times \sigma_{h^{-1}(1\ldots n_1)h}\sigma_{h^{-1}(n_1+1\ldots n_1+n_2)h}. \tag{4.106}$$

Os parâmetros $\sigma, \rho, \varsigma, \varrho = \pm 1$ são tais que produzem os diferentes campos de Ramond, vide Tabela 1. Estes campos já incluem em si a normalização $\mathscr{S}_{n_1 n_2}$ do estado. Além disso, soma-se sobre as classes de equivalência os operadores de twist.

Tabela 1 – Definição dos Campos de Ramond

$R^{(\sigma,\rho)}_{[n_1]}R^{(\varsigma,\varrho)}_{[n_2]}$	$R^{\mathrm{i}}_{[n_1]}R^{+}_{[n_2]}$	$R^{\mathrm{i}}_{[n_1]}R^{-}_{[n_2]}$	$R^{\mathrm{i}}_{[n_1]}R^{\dot{2}}_{[n_2]}$	$R^{\mathrm{i}}_{[n_1]}R^{\mathrm{i}}_{[n_2]}$	$R^{+}_{[n_1]}R^{-}_{[n_2]}$	$R^{+}_{[n_1]}R^{+}_{[n_2]}$
(σ,ρ)	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(+1,-1)$	$(+1,-1)$
(ς,ϱ)	$(+1,-1)$	$(-1,+1)$	$(+1,+1)$	$(-1,-1)$	$(-1,+1)$	$(+1,-1)$

Veja que na Tabela 1 algumas composições de campos de Ramond são omitidas pois essas podem ser obtidas a partir de uma operação de conjugação, como $R^+R^+ = (R^-R^-)^\dagger$, o que pode ser facilmente verificado pela definição 4.106.

4.6.2 Funções de quatro pontos via LM

No espaço de cobertura a função de 4 pontos de ciclos duplos (4.103) torna-se

$$\langle R^{(\sigma,\rho)\dagger}(\infty,\bar\infty)R^{(\varsigma,\varrho)\dagger}(t_\infty,\bar t_\infty)O^{\mathrm{int}}(t_1,\bar t_1)O^{\mathrm{int}}(x,\bar x)R^{(\sigma,\rho)}(0,\bar 0)R^{(\varsigma,\varrho)}(t_0,\bar t_0)\rangle, \tag{4.107}$$

ou seja, uma função de 6 pontos. Quando consideramos campos fermiônicos bosonizados no espaço de cobertura, utilizando da representação de modos fracionários (3.58) e os

operadores quirais (3.81a), podemos ver que por uma transformação que se comporta localmente como $z \approx bt^n$ os operadores bosonizados adquirem um fator b [21, 47],

$$b_*^{-p^2/n} :\exp\Big\{ip(\epsilon_j \phi^j(t_*))\Big\}:, \qquad \epsilon_j = \pm 1 \tag{4.108}$$

e portanto os campos de Ramond no espaço de cobertura, com $p = 1/2$,

$$R^{(\sigma,\rho)\dagger}(\infty) R^{(\varsigma,\varrho)\dagger}(t_\infty) = b_\infty^{\frac{1}{4n_1}} b_{t_\infty}^{\frac{1}{4n_2}} e^{-\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(\infty)+\rho\phi^6(\infty)]} e^{-\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_\infty)+\varrho\phi^6(t_\infty)]}, \tag{4.109a}$$

$$R^{(\sigma,\rho)}(0) R^{(\varsigma,\varrho)}(t_0) = b_0^{-\frac{1}{4n_1}} b_{t_0}^{-\frac{1}{4n_2}} e^{\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(0)+\rho\phi^6(0)]} e^{\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_0)+\varrho\phi^6(t_0)]}. \tag{4.109b}$$

Note que a informação do twist agora se encontra apenas nos fatores b_*, pois os campos são univalorados e não há twists no espaço de cobertura. Para calcular a função de correlação precisaremos descrever o operador interação em termos dos bósons e dos férmions bosonizados. A partir da definição do operador interação em (3.84) e com os modos do operador de supersimetria (3.19a),

$$\mathrm{O}^{(\mathrm{int})}(t_*, \bar{t}_*) = (2|b_{t_*}|)^{-1} \epsilon_{AB} \oint \frac{dt}{2\pi i} (t - t_*)^{-1/2} \oint \frac{d\bar{t}}{2\pi i} (\bar{t} - \bar{t}_*)^{-1/2} G^{-A}(t) \tilde{G}^{\dot{-}B}(\bar{t}) \mathrm{O}^{(0,0)}(t_*, \bar{t}_*). \tag{4.110}$$

Escrevendo os operadores de supersimetria explicitamente,

$$G^{-A}(z) = \psi^{-\dot{1}}(z)[\partial X]^{\dot{2}A}(z) - \psi^{-\dot{2}}(z)[\partial X]^{\dot{1}A}(z), \tag{4.111a}$$

$$\tilde{G}^{\dot{-}B}(\bar{z}) = \tilde{\psi}^{\dot{-}\dot{1}}(\bar{z})[\bar{\partial} X]^{\dot{2}B}(\bar{z}) - \tilde{\psi}^{\dot{-}\dot{2}}(\bar{z})[\bar{\partial} X]^{\dot{1}B}(\bar{z}). \tag{4.111b}$$

Com os férmions bosonizados definidos em (3.21), ao mapear para o espaço de cobertura também devemos levar em consideração os fatores b_* como em (4.109). Assim,

$$\begin{aligned} G^{-1}(t)\tilde{G}^{\dot{-}2}(\bar{t})\mathrm{O}^{(0,0)}(t_*, \bar{t}_*) \propto (e^{-i\phi^5(t)}[\partial X]^{\dot{2}1}(t) + e^{i\phi^6(t)}[\partial X]^{\dot{1}1}(t)) \\ \times (e^{-i\tilde{\phi}^5(\bar{t})}[\bar{\partial} X]^{\dot{2}2}(\bar{t}) + e^{i\tilde{\phi}^6(\bar{t})}[\bar{\partial} X]^{\dot{1}2}(\bar{t})) e^{\frac{i}{2}(\phi^5 - \phi^6)(t_*)} e^{\frac{i}{2}(\tilde{\phi}^5 - \tilde{\phi}^6)(\bar{t}_*)}. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Lembramos que aqui temos implicitamente um ordenamento normal, tal que a OPE de operadores de vértice definida em (2.103) é utilizada, e

$$:e^{A(t)} e^{B(t')}: = e^{\langle A(t) B(t') \rangle} :e^{A(t) + B(t')}:, \tag{4.113}$$

com $\langle \phi^i(z) \phi^j(z') \rangle \equiv -\delta^{ij} \log(z - z')$. Assim, um dos termos no operador interação é escrito como

$$\begin{aligned} G^{-1}(t)\tilde{G}^{\dot{-}2}(\bar{t})\mathrm{O}^{(0,0)}(t_*, \bar{t}_*) = \frac{|b_*|^{-\frac{1}{4}}}{|t - t_*|} \Bigg\{ A^\dagger(t_*)([\partial X]^{\dot{1}2})^\dagger(t) \Big[B(\bar{t}_*)[\bar{\partial} X]^{\dot{1}2}(\bar{t}) - B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial} X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}) \Big] \\ + A(t_*)[\partial X]^{\dot{1}1}(t) \Big[B(\bar{t}_*)[\bar{\partial} X]^{\dot{1}2}(\bar{t}) - B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial} X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}) \Big] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Em que definimos as funções,

$$A(t_*) = e^{\frac{i}{2}(\phi^5+\phi^6)(t_*)} \quad \text{e} \quad B(\bar{t}_*) = e^{\frac{i}{2}(\tilde{\phi}^5+\tilde{\phi}^6)(\bar{t}_*)}, \tag{4.115}$$

e para os campos bosônicos teremos a operação de conjugação [18]

$$\left([X]^{\dot{A}A}\right)^\dagger = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}[X]^{\dot{B}B}. \tag{4.116}$$

Juntando com o segundo termo em (4.110), e realizando a integração de resíduos,

$$\begin{aligned}\mathrm{O}^{(\mathrm{int})}(t_*,\bar{t}_*) = \frac{|b_*|^{-\frac{5}{4}}}{2}\Big\{ & A^\dagger(t_*)([\partial X]^{\dot{1}2})^\dagger(t_*)\left[B(\bar{t}_*)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{t}_*) - B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}_*)\right] \\ & + A(t_*)[\partial X]^{\dot{1}1}(t_*)\left[B(\bar{t}_*)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{t}_*) - B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}_*)\right] \\ & - A(t_*)[\partial X]^{\dot{1}2}(t_*)\left[B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{t}_*) + B(\bar{t}_*)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{t}_*)\right] \\ & + A^\dagger(t_*)([\partial X]^{\dot{1}1})^\dagger(t_*)\left[B^\dagger(\bar{t}_*)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{t}_*) + B(\bar{t}_*)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{t}_*)\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{4.117}$$

Assim, podemos inserir o operador interação na função de correlação e utilizar das expressões para as funções de dois pontos para os bósons e os férmions. Na função de correlação (4.107) o operador interação aparece nos pontos x e t_1 e portanto seria necessário o produto de dois operadores do tipo (4.117). Apesar disso, ao introduzirmos na função de correlação, a mesma se separa em sua parte fermiônica e bosônica. Para a parte bosônica, utilizamos das funções de dois pontos,

$$\langle[\partial X]^{\dot{A}A}(z)([\partial X]^{\dot{B}B})^\dagger(z')\rangle = -\frac{2\delta^{AB}\delta^{\dot{A}\dot{B}}}{(z-z')^2}. \tag{4.118}$$

Vamos nos preocupar a princípio apenas com as variáveis bosônicas, de forma que na função de correlação iremos verificar os termos não nulos provenientes das funções de dois pontos. Então, na função de correlação (4.107) escrevemos por simplicidade,

$$\begin{aligned}\langle R^{(\sigma,\rho)\dagger}(\infty,\bar{\infty})R^{(\varsigma,\varrho)\dagger}(t_\infty,\bar{t}_\infty)O^{\mathrm{int}}(t_1,\bar{t}_1)O^{\mathrm{int}}(x,\bar{x})R^{(\sigma,\rho)}(0,\bar{0})R^{(\varsigma,\varrho)}(t_0,\bar{t}_0)\rangle \\ \equiv \langle O^{\mathrm{int}}(t_1,\bar{t}_1)O^{\mathrm{int}}(x,\bar{x})\rangle_R.\end{aligned} \tag{4.119}$$

Assim, fazendo o produto de dois operadores interação dados por (4.117), vemos que múltiplos termos surgiriam, mas com as funções de dois pontos não nulas resulta-se,

$$\begin{aligned}\langle O^{\mathrm{int}}(t_1,\bar{t}_1)O^{\mathrm{int}}(x,\bar{x})\rangle_R = & -\langle([\partial X]^{\dot{1}2})^\dagger(t_1)[\partial X]^{\dot{1}2}(x)\rangle \times \langle A^\dagger(t_1)A(x)\Sigma(t_1,x)\rangle_R \\ & + \langle[\partial X]^{\dot{1}1}(t_1)([\partial X]^{\dot{1}1})^\dagger(x)\rangle \times \langle A(t_1)A^\dagger(x)\Sigma(t_1,x)\rangle_R \\ & - \langle[\partial X]^{\dot{1}2}(t_1)([\partial X]^{\dot{1}2})^\dagger(x)\rangle \times \langle A(t_1)A^\dagger(x)\Gamma(t_1,x)\rangle_R \\ & + \langle([\partial X]^{\dot{1}1})^\dagger(t_1)[\partial X]^{\dot{1}1}(x)\rangle \times \langle A^\dagger(t_1)A(x)\Gamma(t_1,x)\rangle_R.\end{aligned} \tag{4.120}$$

Em que definimos as funções Σ e Γ,

$$\begin{aligned}\Sigma(\bar{t}_1,\bar{x}) &= \langle\Big[B(\bar{t}_1)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{t}_1) - B^\dagger(\bar{t}_1)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}_1)\Big]\Big[B^\dagger(\bar{x})([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{x}) + B(\bar{x})[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{x})\Big]\rangle \\ &= B(\bar{t}_1)B^\dagger(\bar{x})\langle[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{t}_1)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{x})\rangle - B^\dagger(\bar{t}_1)B(\bar{x})\langle([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{t}_1)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{x})\rangle,\end{aligned} \tag{4.121a}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\bar{t}_1,\bar{x}) &= \langle\Big[B^\dagger(\bar{t}_1)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{t}_1) + B(\bar{t}_1)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{t}_1)\Big]\Big[B(\bar{x})[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{x}) - B^\dagger(\bar{x})([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{x})\Big]\rangle \\ &= B^\dagger(\bar{t}_1)B(\bar{x})\langle([\bar{\partial}X]^{\dot{1}2})^\dagger(\bar{t}_1)[\bar{\partial}X]^{\dot{1}2}(\bar{x})\rangle - B(\bar{t}_1)B^\dagger(\bar{x})\langle[\bar{\partial}X]^{\dot{1}1}(\bar{t}_1)([\bar{\partial}X]^{\dot{1}1})^\dagger(\bar{x})\rangle.\end{aligned} \tag{4.121b}$$

Utilizando das expressões para as funções de dois pontos (4.118),

$$\begin{aligned}\langle O^{\text{int}}(t_1,\bar{t}_1)O^{\text{int}}(x,\bar{x})\rangle_R = 2\left|\frac{-2}{(t_1-x)^2}\right|^2 \Big\{&\langle A^\dagger(t_1)A(x)\Big[B(\bar{t}_1)B^\dagger(\bar{x}) + B^\dagger(\bar{t}_1)B(\bar{x})\Big]\rangle_R \\ &+ \langle A(t_1)A^\dagger(x)\Big[B(\bar{t}_1)B^\dagger(\bar{x}) + B^\dagger(\bar{t}_1)B(\bar{x})\Big]\rangle_R\Big\}\end{aligned} \tag{4.122}$$

Então a função de correlação no espaço de cobertura (4.107), considerando os fatores b_* das variáveis fermiônicas é simplificada como

$$G_R^{\text{cover}}(x,\bar{x}) = 2\left|b_\infty^{\frac{1}{4n_1}} b_{t_\infty}^{\frac{1}{4n_2}} b_{t_1}^{-\frac{5}{8}} b_x^{-\frac{5}{8}} b_0^{-\frac{1}{4n_1}} b_{t_0}^{-\frac{1}{4n_2}}\right|^2 \times \left|\frac{1}{(t_1-x)^2}\right|^2 \times G_R^\psi \tag{4.123}$$

O termo G_R^ψ depende apenas das variáveis fermiônicas, expressas em (4.122). Retornando com as definições dos campos de Ramond e os coeficientes A, B

$$\begin{aligned}G_R^\psi = \langle &e^{-\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(\infty)+\rho\phi^6(\infty)]}e^{-\frac{i}{2}[\sigma\tilde{\phi}^5(\bar{\infty})+\rho\tilde{\phi}^6(\bar{\infty})]}e^{-\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_\infty)+\varrho\phi^6(t_\infty)]}e^{-\frac{i}{2}[\varsigma\tilde{\phi}^5(\bar{t}_\infty)+\varrho\tilde{\phi}^6(\bar{t}_\infty)]} \\ &\times(\mathscr{A}+\mathscr{B})e^{\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(0)+\rho\phi^6(0)]}e^{\frac{i}{2}[\sigma\tilde{\phi}^5(\bar{0})+\rho\tilde{\phi}^6(\bar{0})]}e^{\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_0)+\varrho\phi^6(t_0)]}e^{\frac{i}{2}[\varsigma\tilde{\phi}^5(\bar{t}_0)+\varrho\tilde{\phi}^6(\bar{t}_0)]}\rangle.\end{aligned} \tag{4.124}$$

Com $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ dados por

$$\mathscr{A} = e^{-\frac{i}{2}[\phi^5(t_1)+\phi^6(t_1)]}e^{\frac{i}{2}[\phi^5(x)+\phi^6(x)]}\left[e^{\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{t}_1)+\tilde{\phi}^6(\bar{t}_1)]}e^{-\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{x})+\tilde{\phi}^6(\bar{x})]} + e^{-\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{t}_1)+\tilde{\phi}^6(\bar{t}_1)]}e^{\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{x})+\tilde{\phi}^6(\bar{x})]}\right], \tag{4.125a}$$

$$\mathscr{B} = e^{\frac{i}{2}[\phi^5(t_1)+\phi^6(t_1)]}e^{-\frac{i}{2}[\phi^5(x)+\phi^6(x)]}\left[e^{-\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{t}_1)+\tilde{\phi}^6(\bar{t}_1)]}e^{\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{x})+\tilde{\phi}^6(\bar{x})]} + e^{\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{t}_1)+\tilde{\phi}^6(\bar{t}_1)]}e^{-\frac{i}{2}[\tilde{\phi}^5(\bar{x})+\tilde{\phi}^6(\bar{x})]}\right]. \tag{4.125b}$$

Podemos trabalhar aqui separando a parte holomórfica e a parte anti-holomórfica por simplicidade. Com a parte holomórfica de $\mathscr{A}(x,\bar{x})$ obtemos uma contribuição da função

de correlação

$$\begin{aligned}&\langle e^{-\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(\infty)+\rho\phi^6(\infty)]}e^{-\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_\infty)+\varrho\phi^6(t_\infty)]}e^{-\frac{i}{2}[\phi^5(t_1)+\phi^6(t_1)]}e^{\frac{i}{2}[\phi^5(x)+\phi^6(x)]}e^{\frac{i}{2}[\sigma\phi^5(0)+\rho\phi^6(0)]}e^{\frac{i}{2}[\varsigma\phi^5(t_0)+\varrho\phi^6(t_0)]}\rangle\\&=\langle e^{-\frac{i}{2}\sigma\phi^5(\infty)}e^{-\frac{i}{2}\varsigma\phi^5(t_\infty)}e^{-\frac{i}{2}\phi^5(t_1)}e^{\frac{i}{2}\phi^5(x)}e^{\frac{i}{2}\sigma\phi^5(0)}e^{\frac{i}{2}\varsigma\phi^5(t_0)}\rangle\\&\qquad\times\langle e^{-\frac{i}{2}\rho\phi^6(\infty)}e^{-\frac{i}{2}\varrho\phi^6(t_\infty)}e^{-\frac{i}{2}\phi^6(t_1)}e^{\frac{i}{2}\phi^6(x)}e^{\frac{i}{2}\rho\phi^6(0)}e^{\frac{i}{2}\varrho\phi^6(t_0)}\rangle.\end{aligned}\tag{4.126}$$

Em que separamos os campos distintos ϕ^5 e ϕ^6. Essas variáveis fermiônicas possuem função de dois pontos tal que o produto de j operadores de vértice é expressa como

$$\langle\prod_i^j :e^{i\alpha_i\phi(z_i)}:\rangle=\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}.\tag{4.127}$$

Além disso, veja que alguns campos estão sendo avaliados no infinito, e para isso precisamos expressá-los de maneira apropriada, com um limite

$$e^{i\alpha\phi(\infty)}=\lim_{z\to\infty}z^{2h}e^{i\alpha\phi(z)},\quad\text{com}\quad h=\frac{\alpha^2}{2}.\tag{4.128}$$

Com essas propriedades, a componente (4.126) é obtida

$$\left(\frac{(t_\infty-t_1)(x-t_0)}{(t_\infty-x)(t_1-t_0)}\right)^{(\varsigma+\varrho)/4}(t_\infty-t_0)^{-1/2}(t_1-x)^{-1/2}\left(\frac{x}{t_1}\right)^{(\rho+\sigma)/4}\left(\frac{t_0}{t_\infty}\right)^{(\sigma\varsigma+\rho\varrho)/4}.\tag{4.129}$$

Realizando o mesmo para a parte holomórfica de $\mathscr{B}(x,\bar{x})$, obtemos a contribuição,

$$\left(\frac{(t_\infty-t_1)(x-t_0)}{(t_\infty-x)(t_1-t_0)}\right)^{-(\varsigma+\varrho)/4}(t_\infty-t_0)^{-1/2}(t_1-x)^{-1/2}\left(\frac{x}{t_1}\right)^{-(\rho+\sigma)/4}\left(\frac{t_0}{t_\infty}\right)^{(\sigma\varsigma+\rho\varrho)/4}.\tag{4.130}$$

O processo é semelhante para a parte anti-holomórfica em (4.125). Veja que estas são idênticas e portanto sua contribuição na função de correlação também é igual e resulta-se,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_\infty}\right)^{(\sigma\varsigma+\rho\varrho)/4}(\bar{t}_1-\bar{x})^{-1/2}(\bar{t}_\infty-\bar{t}_0)^{-1/2}\\&\times\left[\left(\frac{(\bar{t}_\infty-\bar{t}_1)(\bar{x}-\bar{t}_0)}{(\bar{t}_\infty-\bar{x})(\bar{t}_1-\bar{t}_0)}\right)^{(\varsigma+\varrho)/4}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{t}_1}\right)^{(\sigma+\rho)/4}+\left(\frac{(\bar{t}_\infty-\bar{t}_1)(\bar{x}-\bar{t}_0)}{(\bar{t}_\infty-\bar{x})(\bar{t}_1-\bar{t}_0)}\right)^{-(\varsigma+\varrho)/4}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{t}_1}\right)^{-(\sigma+\rho)/4}\right].\end{aligned}\tag{4.131}$$

E portanto, juntando os termos obtemos a expressão para a função de correlação fermiônica G_R^ψ,

$$\begin{aligned}G_R^\psi=\Bigg|&\left(\frac{t_0}{t_\infty}\right)^{(\sigma\varsigma+\rho\varrho)/4}(t_1-x)^{-1/2}(t_\infty-t_0)^{-1/2}\\&\times\left[\left(\frac{(t_\infty-t_1)(x-t_0)}{(t_\infty-x)(t_1-t_0)}\right)^{(\varsigma+\varrho)/4}\left(\frac{x}{t_1}\right)^{(\sigma+\rho)/4}+\left(\frac{(t_\infty-t_1)(x-t_0)}{(t_\infty-x)(t_1-t_0)}\right)^{-(\varsigma+\varrho)/4}\left(\frac{x}{t_1}\right)^{-(\sigma+\rho)/4}\right]\Bigg|^2.\end{aligned}\tag{4.132}$$

Por fim, para obter a função de correlação completa na base,

$$G_R^{\text{base}} = e^{S_L} G_R^{\text{cover}}, \tag{4.133}$$

e utilizando da ação de Liouville (4.95), os coeficientes (4.94) e a definição dos termos t_0,t_1 e t_∞ em (4.89),

$$\begin{aligned} G_R(x,\bar{x}) = \Bigg| & C x^{n_2-n_1+\frac{6-(\sigma\varsigma+\rho\varrho+\sigma+\varsigma+\rho+\varrho)}{4}} (x-1)^{n_1+n_2+\frac{6+\sigma\varsigma+\rho\varrho-(\sigma+\varsigma+\rho+\varrho)}{4}} \\ & \times \left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{-n_1-n_2+\frac{6+\sigma\varsigma+\rho\varrho-(\sigma+\varsigma+\rho+\varrho)}{4}} \left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{-n_2+n_1+\frac{6-(\sigma\varsigma+\rho\varrho+\sigma+\varsigma+\rho+\varrho)}{4}} \\ & \times \left(x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right)^{-4} \Bigg[\left(x\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)\right)^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \left(\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)\right)^{\frac{\varsigma+\varrho}{2}} \\ & + \left((x-1)\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)\right)^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \left(x\,(x-1)\right)^{\frac{\varsigma+\varrho}{2}} \Bigg] \Bigg|^2 \end{aligned} \tag{4.134}$$

Aqui, C é uma constante que contém as constantes advindas da ação de Liouville e da função de correlação no espaço de cobertura. Portanto, obtivemos uma expressão para a função de correlação (4.103) de ciclos duplos genérica em termos dos twists e spins. Seguindo com as definições de σ, ς, ρ e ϱ pela Tabela 1, e pela expressão obtida em (4.134) temos a função de correlação para $(s_1, s_2) = (\dot{\imath}, +)$,

$$\begin{aligned} G_{\dot{\imath}+}(x) &= C x^{1-n_1+n_2}(x-1)^{1+n_1+n_2} \left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-n_1-n_2} \left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{1+n_1-n_2} \\ &\quad \times \left(x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right)^{-4} \left[(x-1)\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)+x\left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)\right] \\ &= \mathcal{F}(x) \times \left[x\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)+\frac{n_2-n_1}{2n_2}\right]. \end{aligned} \tag{4.135}$$

Em que definimos,

$$\mathcal{F}(x) = 2C x^{1-n_1+n_2}(x-1)^{1+n_1+n_2} \left(x+\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-n_1-n_2} \left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)^{1+n_1-n_2} \left(x+\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right)^{-4}. \tag{4.136}$$

O mesmo pode ser feito para as outras funções de correlação, tal que obtemos,

$$G_{\dot{\imath}-}(x) = G_{\dot{\imath}+}(x), \tag{4.137a}$$

$$G_{\dot{\imath}\dot{+}}(x) = \mathcal{F}(x) \times \left[x\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)+\frac{(n_2-n_1)^2}{2n_2^2}\right], \tag{4.137b}$$

$$G_{\dot{\imath}\dot{\imath}}(x) = \mathcal{F}(x) \times \left[x\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)+\frac{n_2^2+n_1^2}{2n_2^2}\right], \tag{4.137c}$$

$$G_{+-}(x) = \mathcal{F}(x) \times \left[x\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)\right], \tag{4.137d}$$

$$G_{++}(x) = \mathcal{F}(x) \times \left[x\left(x+\frac{n_1}{n_2}-1\right)-\frac{n_1}{n_2}\right]. \tag{4.137e}$$

Ou seja, podemos escrever todas as funções de correlação para os campos de Ramond com spin (s_1, s_2) simplesmente como,

$$G_{s_1 s_2}(x) = \mathcal{F}(x)\left[x\left(x + \frac{n_1}{n_2} - 1\right) + A_{s_1 s_2}\right] \tag{4.138}$$

Onde as constantes $A_{s_1 s_2}$ de cada caso são expostas na Tabela 2 [47].

Tabela 2 – Coeficientes da funções de correlação

$G_{s_1 s_2}$	$G_{\mathrm{i}\pm}$	$G_{\mathrm{i}\dot{2}}$	$G_{\mathrm{i}\mathrm{i}}$	G_{+-}	G_{++}
$A_{s_1 s_2}$	$\frac{n_2 - n_1}{2n_2}$	$\frac{(n_2-n_1)^2}{2n_2^2}$	$\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_2^2}$	0	$-\frac{n_1}{n_2}$

Note que pela função de correlação dos campos de Ramond,

$$\langle R(\infty, \bar{\infty}) O^{\mathrm{int}}_{[2]}(1, \bar{1}) O^{\mathrm{int}}_{[2]}(u, \bar{u}) R(0, \bar{0})\rangle = G_R(u, \bar{u}), \tag{4.139}$$

vemos que a mesma está parametrizada em u, de forma que seria necessário obter as inversas $x(u)$ do mapa que leva ao espaço de cobertura. Como discutido anteriormente, não podemos realizar tal procedimento explicitamente devido ao alto grau da função $u(x)$. E assim, devemos analisar como o mapa se comporta em pontos específicos, sendo estes justamente os pontos que se encontram na função de correlação, $u \to 0, 1, \infty$, que se relacionarão com as OPE's dos operadores definidos em tais pontos.[7]. Utilizaremos portanto o comportamento das inversas obtidas assintoticamente em (4.91) e (4.92) nos pontos x_1,x_2,x_3 e x_4.

Para o primeiro canal relacionado à $u \to 1$, $G(x_3(u))$, vemos que x_3 possui potência negativa, então o termo de interesse será o de maior ordem em x. Observando que $\mathcal{F}(x_3) \approx 2C$, o termo de maior ordem em (4.138) será x^2. Assim,

$$G_{s_1 s_2}(x_3(u)) \approx \frac{32 C n_1^2}{(1-u)^2} \qquad , x \to \infty \tag{4.140}$$

Daqui em diante escolheremos $C = 1/32n_1^2$. Para o segundo canal do limite $u \to 1$, $G_{s_1, s_2}(x_4(u))$, o processo é semelhante, com a singularidade se relacionando com a potência x^{-4} de (4.136), de forma que

$$G_{s_1 s_2}(x_4(u)) \approx 3^{-4/3} 2^{-2} (n_1 n_2)^{-2/3} (n_1^2 - n_2^2)^{-2/3} \left[4n_2^2 A_{s_1 s_2} - (n_1 - n_2)^2\right] (1-u)^{-4/3} \tag{4.141}$$

[7] A análise dos limites $u \to 0$ e $u \to \infty$ trazem as mesmas informações quanto à fusão dos operadores de deformação e campos de Ramond.

Por fim, para os casos $G_{s_1 s_2}(x_1(u))$ e $G_{s_1 s_2}(x_2(u))$, ambos em $u \to 0$,

$$G_{s_1 s_2}(x_1(u)) \approx A_{s_1 s_2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)^{-2} n_1^{-\frac{2n_1}{n_1 - n_2}} n_2^{\frac{2n_2}{n_1 - n_2}} u^{-1+\frac{1}{n_1 - n_2}}, \tag{4.142a}$$

$$G_{s_1 s_2}(x_2(u)) \approx \left(A_{s_1 s_2} + \frac{n_1}{n_2}\right) \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)^{-2} n_1^{-\frac{2n_1}{n_1 + n_2}} n_2^{-\frac{2n_2}{n_1 + n_2}} u^{-1+\frac{1}{n_1 + n_2}}. \tag{4.142b}$$

Note que, especificamente para o caso $g(x_1)$, estamos supondo $A \neq 0$, pois este termo constante será o de menor ordem na expansão. Se $A = 0$, os coeficientes mudam e a ordem da inversa é $x_1 \propto u^{-1+\frac{2}{n_1 - n_2}}$.

4.7 REGRAS DE FUSÃO E NÃO-RENORMALIZAÇÃO

Resgatando o estudo de CFT do Capítulo 2, em que tratamos de OPE's e regras de fusão, vimos que podemos relacionar dois operadores $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ através de suas OPE's como

$$\mathcal{O}_1(u, \bar{u})\mathcal{O}_2(0, \bar{0}) = \sum_k C_{12k} |u|^{\Delta_k - \Delta_1 - \Delta_2} \mathcal{O}_k(0, \bar{0}) + \text{descendentes}. \tag{4.143}$$

Com C_{12k} sendo as constantes de estrutura e $\mathcal{O}_k$ os operadores primários que compõem a fusão dos operadores anteriores. Além disso, é importante lembrar que as cargas dos operadores deve ser conservada e, portanto, $j_k^3 = j_1^3 + j_2^3$. Veja que ao utilizamos essa expressão na função de correlação,

$$\begin{aligned}\langle R^{(s_1,s_2)\dagger}_{[n_1,n_2]}(\infty, \bar{\infty}) O^{\text{int}}_{[2]}(1, \bar{1}) O^{\text{int}}_{[2]}(u, \bar{u}) R^{(s_1,s_2)}_{[n_1,n_2]}(0, \bar{0})\rangle = \sum_k |u-1|^{\Delta_k - 4} \langle O^{\text{int}}_{[2]} \mathcal{O}_k O^{\text{int}}_{[2]}\rangle \\ \times \langle \left[R^{(s_1)}_{[n_1]} R^{(s_2)}_{[n_2]}\right]^\dagger \mathcal{O}_k R^{(s_1)}_{[n_1]} R^{(s_2)}_{[n_2]}\rangle. \end{aligned} \tag{4.144}$$

Assim, para os casos $G(x_3)$ e $G(x_4)$, relacionados a $u \to 1$, sabemos pela singularidade do primeiro canal (4.140) que a OPE está associada a um operador de dimensão zero e carga nula sob rotações do SU(2), levando ao operador identidade. Já no segundo canal, (4.141), obtemos um operador também com carga nula mas com dimensão $\Delta = \frac{2}{3} = \frac{1}{4}(3 - \frac{1}{3})$. Ou seja, um operador de twist puro de ciclo 3. Assim, tratamos a fusão dos operadores interação sob a OPE na função de correlação como

$$\left[O^{\text{int}}_{[2]}\right] \times \left[O^{\text{int}}_{[2]}\right] = \mathbb{I}(1, \bar{1}) + \sigma_3(1, \bar{1}), \tag{4.145}$$

em que $[\phi]$ indica a família conforme do campo ϕ. Com o canal envolvendo o operador de twist puro $\sigma_{(3)}$, podemos retornar à função de correlação (4.144) de forma que obtemos,

pelo limite do canal (4.141)

$$\left|3^{-4/3}2^{-2}(n_1n_2)^{-2/3}(n_1^2-n_2^2)^{-2/3}\left[4n_2^2A_{s_1s_2}-(n_1-n_2)^2\right]\right|^2$$
$$=\langle\left[R^{(s_1)}_{[n_1]}R^{(s_2)}_{[n_2]}\right]^\dagger\sigma_{(3)}R^{(s_1)}_{[n_1]}R^{(s_2)}_{[n_2]}\rangle\langle O^{\rm int}_{[2]}\sigma_{(3)}O^{\rm int}_{[2]}\rangle. \quad (4.146)$$

O mesmo pode ser realizado para o limite $u\to 0$, no qual utilizamos os canais $G(x_1)$ e $G(x_2)$ que resultam na OPE do operador interação com os campos de Ramond,

$$\left[O^{\rm int}_{[2]}\right]\times\left[R^{(s_1)}_{[n_1]}R^{(s_2)}_{[n_2]}\right]. \quad (4.147)$$

Assim, adquirimos uma coleção de constantes de estrutura que compõem a SCFT.

Apesar de termos tratado a função de correlação assintoticamente anteriormente, podemos obter um resultado para a correção em segunda ordem do campo e da dimensão conforme dos campos de Ramond definidos em (4.13) sem considerar limites locais. Sendo a integral $J_{s_1s_2}$ definida por

$$J_{s_1s_2}=\int d^2uG_{s_1s_2}(u,\bar{u}), \quad (4.148)$$

podemos contornar o problema da inversa da função de correlação a partir de uma troca de variáveis $u(x)$, de forma que a integral torna-se

$$J_{s_1s_2}=\int d^2x|u'(x)G_{s_1s_2}(x)|^2. \quad (4.149)$$

Com o mapa dado por (4.90) temos a derivada,

$$u'(x)=\frac{u(x)}{n_2}\left[\frac{(n_1-n_2)^2}{x(x+\frac{n_1}{n_2}-1)}-\frac{(n_1+n_2)^2}{(x-1)(x+\frac{n_1}{n_2})}\right]. \quad (4.150)$$

Definindo uma substituição de variáveis $y=-\left(\frac{2n_2}{n_1+n_2}\right)^2(x-1)(x+\frac{n_1}{n_2})$,

$$J_{s_1s_2}=\frac{1}{2^{10}n_1^2}\left(\frac{n_1+n_2}{n_2}\right)^2\int d^2y|1-y|^{-3}|y-B|^2, \quad (4.151)$$

com $B\equiv(\frac{2n_2}{n_1+n_2})^2\left(A_{s_1,s_2}+\frac{n_1}{n_2}\right)$. Essa integral pode ser avaliada a partir de uma extensão analítica descrita em [68] e, de forma geral, temos que integrais desse tipo reduzem-se a funções Gamma na forma,

$$\int d^2y|y|^{2m}|y-1|^{2n}=\sin(\pi n)\frac{\Gamma(1+m)\Gamma^2(1+n)\Gamma(-1-m-n)}{\Gamma(-m)\Gamma(2+m+n)}. \quad (4.152)$$

Portanto, para nossa integral, podemos realizar uma nova troca de variáveis, $z = (y - B)/(1 + B)$, tal que

$$\int d^2y|1-y|^{-3}|y-B|^2 = (1+B)\int d^2z|1-z|^{-3}|z|^2$$
$$= (1+B)\lim_{m\to 1}\frac{4\pi\Gamma(1+m)\Gamma(\frac{1}{2}-m)}{\Gamma(-m)\Gamma(\frac{1}{2}+m)} = (1+B)\lim_{m\to 1}\frac{-16\pi}{\Gamma(-a)} = 0. \tag{4.153}$$

Assim, pelas equações referentes às renormalizações do campo e dimensão conforme (4.11-4.13), demonstramos que os campos de Ramond compostos

$$\left[\prod_i \left(R^{s_i}_{[n_i]}\right)^{N^{(s_i)}_{n_i}}\right], \qquad \sum_i n_i N^{(s_i)}_{n_i} = N \tag{4.154}$$

são protegidos na inserção da deformação em segunda ordem a partir do cálculo da função de correlação (4.101) [47, 69, 70].

4.8 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DE DESCENDENTES FRACIONÁRIOS

Nesta seção estaremos interessados em obter uma expressão para funções de correlação com a inserção de modos fracionários das correntes J^3. Em sua forma bosonizada, como descrito em (3.26), a corrente de simetria-R é dada por

$$J^3(z) = \frac{i}{2}(\partial\phi^5(z) - \partial\phi^6(z)). \tag{4.155}$$

No orbifold simétrico criamos N cópias da teoria semente contendo os bósons e férmions livres, que vimos implementar a atuação de um operador de twist $\sigma_{(n)}$ que permuta as n cópias e torna os campos multivalorados. O modo fracionário da corrente J^3 definido em (3.59) atuando em um campo twistado $\mathcal{O}_{(n)}(z_*)$ na base é então

$$:J^3_{-\frac{k}{n}}\mathcal{O}_{(n)}(z_*): \equiv \oint_{z_*}\frac{dz}{2\pi i}(z-z_*)^{-\frac{k}{n}}J^3_{\{k\}}(z)\mathcal{O}_{(n)}(z_*), \tag{4.156a}$$
$$J^3_{\{k\}} = \sum_{I=1}^{n} J^3_I(z)e^{2\pi i\frac{k}{n}(I-1)}. \tag{4.156b}$$

A atuação do modo J^3_0 extrai a carga j dos estados/operadores da teoria como vimos na seção 3.4,

$$:J^3_0\mathcal{O}_{(n)}(z_*): = j\mathcal{O}_{(n)}(z_*). \tag{4.157}$$

Nos capítulos 3 e 4 definimos os campos quirais primários $O_{(n)}(z)$, (3.81), e os campos de Ramond $R_{(n)}$, (4.96). Os primeiros são aqueles que possuem dimensão conforme igual

à carga, enquanto os segundos mapeiam os estados de vácuo do setor de Neveu-Schwarz para o vácuo degenerado do setor de Ramond. Podemos definir uma expressão geral para estes operadores na base como

$$V_{(n)}(\alpha,\beta;z)=\exp\left(\sum_{I=1}^{n}\frac{i}{2n}\Big[\alpha\phi_{5,I}(z)-\beta\phi_{6,I}(z)\Big]\right)\sigma_{(n)}(z), \tag{4.158}$$

em que os coeficientes α e β que identificam cada operador são descritos na Tabela 3, e a carga de cada cópia é dada por $j=(\alpha+\beta)/4$.

Tabela 3 – Definição do operador V.

(α,β)	$(n-1,n-1)$	$(n+1,n+1)$	$(n+1,n-1)$	$(n-1,n+1)$	$(\pm1,\pm1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
V_n	$O_n^{(0)}$	$O_n^{(2)}$	$O_n^{(1+)}$	$O_n^{(1-)}$	$R_n^{\pm}$	$R_n^{\dot{1}}$	$R_n^{\dot{2}}$
h_n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$	$n/2$	$n/2$	$n/4$	$n/4$	$n/4$
j_n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$	$n/2$	$n/2$	$\pm1/2$	0	0

Como de costume, estamos interessados no cálculo de funções de correlação compostas por campos que, na base, são multivalorados. Por isso, construímos um espaço de cobertura a partir de cópias da esfera de Riemann, de acordo com o twist dos operadores, de forma que os campos se tornem univalorados. O mapa que leva os pontos z_*, onde estão definidos os twists, para os pontos t_* é dado localmente por

$$z(t)=z_*+(t-t_*)^n\Big[b_*+a_{1,*}(t-t_*)+a_{2,*}(t-t_*)^2+\cdots\Big], \tag{4.159}$$

de forma que a integral de contorno (4.156a) é mapeada

$$\begin{aligned}\oint_{z_*}\frac{dz}{2\pi i}(z-z_*)^{-\frac{k}{n}}J^3_{\{k\}}(z)\mathcal{O}_{(n)}(z_*)\hookleftarrow\oint_{t_*}\frac{dt}{2\pi i}[z(t)-z_*]^{-\frac{k}{n}}J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(t_*)\\ =\oint_{t_*}\frac{dt}{2\pi i}(t-t_*)^{-k}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell^{(*)}(t-t_*)^\ell\right]J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(t_*).\end{aligned} \tag{4.160}$$

Em que $A_\ell^{(*)}$ são os coeficientes da expansão e $A_0^{(*)}\equiv b_*^{-k/n}$. Por outro lado, se $z=\infty$ é um ponto onde há um corte de ramificação, a expansão (4.159) é dada por potências negativas e a integral de contorno torna-se

$$\begin{aligned}:J^3_{\frac{k}{n}}\mathcal{O}_{(n)}(\infty):\hookleftarrow\oint_{\infty}\frac{dt}{2\pi i}[z(t)]^{\frac{k}{n}}J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(\infty)\\ =\oint_{\infty}\frac{dt}{2\pi i}t^k\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell^{(\infty)}t^{-\ell}\right]J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(\infty).\end{aligned} \tag{4.161}$$

No espaço de cobertura não há twists, e portanto a OPE dos campos com as correntes pode ser descrita de maneira usual,

$$J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(t_*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{:J_k^3\hat{\mathcal{O}}(t_*):}{(t-t_*)^{1+k}}\,, \quad :J_k^3\hat{\mathcal{O}}(t_*): = \oint_{t_*}\frac{dt}{2\pi i}(t-t_*)^k J^3(t)\hat{\mathcal{O}}(t_*), \tag{4.162}$$

e portanto, em (4.160) e (4.161),

$$:J^3_{-\frac{k}{n}}\mathcal{O}_{(n)}(z_*): \;\hookleftarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell^{(*)}\, :J^3_{-k+\ell}\hat{\mathcal{O}}(t_*):, \tag{4.163a}$$

$$:J_{\frac{k'}{n}}\mathcal{O}_{(n)}(\infty): \hookleftarrow \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'}^{(\infty)} J^3_{k'-\ell'}(t)\hat{\mathcal{O}}(\infty). \tag{4.163b}$$

Dessa forma, funções de correlação envolvendo os modos fracionários

$$\langle :J^3_{\frac{k'}{n}}\mathcal{O}^{\infty}_{(n)}(\infty): \mathcal{O}^{Q}_{(n_Q)}(z_Q)\cdots\mathcal{O}^{1}_{(n_1)}(z_1)\, :J^3_{-\frac{k}{n}}\mathcal{O}^{0}_{(n)}(z_0):\rangle, \tag{4.164}$$

são mapeadas para o espaço de cobertura como uma soma de modos inteiros

$$\sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} A_\ell^{(0)} A_{\ell'}^{(\infty)} \langle :J^3_{k'-\ell'}\hat{\mathcal{O}}^{\infty}(\infty): \hat{\mathcal{O}}^{Q}(z_Q)\cdots\hat{\mathcal{O}}^{1}(z_1)\, :J^3_{-k-\ell}\hat{\mathcal{O}}^{0}(z_0):\rangle. \tag{4.165}$$

Veja que no espaço de cobertura definimos os campos por $\hat{\mathcal{O}}$. No caso dos campos exponenciais definidos em (4.158), estes adquirem os fatores b_* provenientes do mapeamento,

$$V_{(n)}(\alpha,\beta;z_*) \hookleftarrow \hat{V}(\alpha,\beta;t_*) = (\text{fator b})\times V(\alpha,\beta;t_*), \tag{4.166}$$

com

$$V(\alpha,\beta;t) = \exp\frac{i}{2}\left(\alpha\phi_1(t) - \beta\phi_2(t)\right). \tag{4.167}$$

A OPE com a corrente J^3, a partir da definição (4.155), resulta em

$$J^3(t)V(t_*) = \frac{j}{t-t_*}\,V(t_*) + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(t-t_*)^\ell}{\ell!}\,:(\partial^\ell J^3)V(t_*):\tag{4.168}$$

Comparando com as expressões em (4.162), obtemos, para $\ell > 0$,

$$:J^3_\ell V(t): = 0, \quad :J^3_0 V(t): = jV(t), \quad :J^3_{-\ell}V(t): = \frac{:(\partial^{\ell-1}J^3)V(t):}{(\ell-1)!}. \tag{4.169}$$

Assim, sabemos que, em (4.163a), a soma é finita e, portanto, para $k \geq 0$,

$$:J^3_{-\frac{k}{n}}V_{(n)}(z_*): \;\hookleftarrow \sum_{\ell=0}^{k} A_{k-\ell}^{(*)}\, :J^3_{-\ell}\hat{V}(t_*):. \tag{4.170}$$

Para os modos no infinito, devemos recordar da definição da integral de contorno,

$$\begin{aligned}
:J^3_\ell V(\infty): &= \oint_\infty \frac{dt}{2\pi i} t^\ell J(t) V(\infty) \\
&= \oint_\infty \frac{dt}{2\pi i} t^\ell J(t) \lim_{T\to\infty} T^{2h} V(T) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \oint_0 \frac{dt'}{2\pi i} t'^{-\ell} J(t') V(\tau) = \lim_{\tau\to 0} \oint_\tau \frac{dt'}{2\pi i} (t'-\tau)^{-\ell} J(t') V(\tau) = :J^3_{-\ell} V(0):
\end{aligned} \tag{4.171}$$

onde realizamos uma inversão $t = 1/t'$ e $\tau = -1/T$. Assim, no infinito são os modos negativos que se anulam e, portanto, obtemos uma soma finita com $k' \geq 0$,

$$:J^3_{\frac{k'}{n}} V_{(n)}(\infty): \;\hookleftarrow \sum_{\ell'=0}^{k'} A^{(\infty)}_{k'-\ell'} \, :J^3_{\ell'} \hat{V}(\infty): \,. \tag{4.172}$$

Dessa forma, a função de correlação,

$$\langle :J^3_{\frac{k'}{n'}} V^\infty_{(n')}(\infty): \mathcal{O}^Q_{(n_Q)}(z_Q) \cdots \mathcal{O}^1_{(n_1)}(z_1) \, :J^3_{-\frac{k}{n}} V^0_{(n)}(z_0):\rangle, \tag{4.173}$$

é mapeada para uma soma finita de descendentes atuando nos operadores exponenciais,

$$\sum_{\ell'=0}^{k'} \sum_{\ell=0}^{k} A^{(\infty)}_{k'-\ell'} A^{(0)}_{k-\ell} \langle :J^3_{\ell'} \hat{V}^\infty(\infty): \hat{\mathcal{O}}^Q(z_Q) \cdots \hat{\mathcal{O}}^1(z_1) \, :J^3_{-\ell} \hat{V}^0(z_0):\rangle. \tag{4.174}$$

Consideremos t_i pontos, $i = 0, 1, ..., Q$ e um operador descendente em $t = \infty$, de forma que

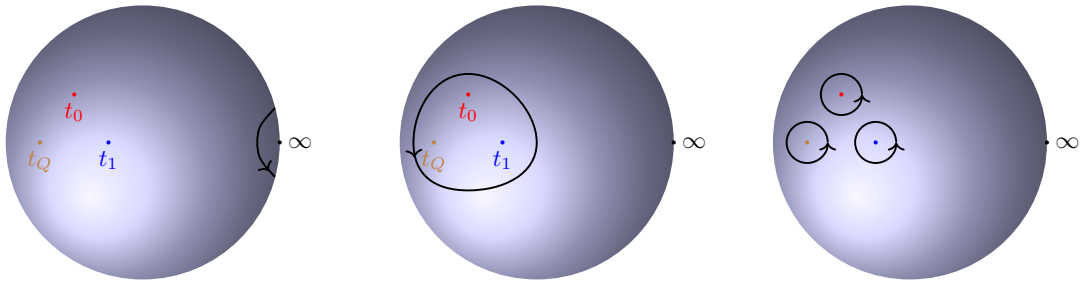
$$\begin{aligned}
\Big\langle :J^3_\ell \mathcal{O}^\infty(\infty): \prod_{i=0}^{Q} \hat{\mathcal{O}}^i(t_i) \Big\rangle &= \oint_\infty \frac{dt}{2\pi i} \, t^\ell \Big\langle J^3(t) \; \hat{\mathcal{O}}^\infty(\infty) \prod_{i=0}^{Q} \hat{\mathcal{O}}^i(t_i) \Big\rangle, \\
&= -\sum_{i=0}^{Q} \oint_{t_i} \frac{dt}{2\pi i} \, t^\ell \Big\langle J^3(t) \hat{\mathcal{O}}^\infty(\infty) \hat{\mathcal{O}}^Q(t_Q) \cdots \hat{\mathcal{O}}^1(t_1) \hat{\mathcal{O}}^0(0) \Big\rangle.
\end{aligned} \tag{4.175}$$

Essa relação fica ilustrada na Figura 15 onde iniciamos com um contorno sob o ponto no infinito e deformamos a curva até que o contorno esteja sob os pontos finitos t_i. Veja que no caso de modos J^3_0 podemos obter,

$$\left(j^3_\infty + \sum_{i=0}^{Q} j^3_i \right) \Big\langle \mathcal{O}^\infty(\infty) \prod_{i=0}^{Q} \hat{\mathcal{O}}^i(t_i) \Big\rangle = 0. \tag{4.176}$$

E portanto adquirimos a propriedade de que a soma das cargas dos campos envolvidos na função de correlação deve ser nula.

Figura 15 – Decomposição do resíduo no infinito



(a) Contorno sob pontos singulares no infinito.

(b) Contorno sob todos os pontos finitos.

(c) Contorno sob cada ponto singular finito.

A fim de coletar os resíduos em torno dos pontos t_i, fazemos a mudança,

$$t^\ell = (t - t_i + t_i)^\ell = \sum_{r\geq 0} \binom{\ell}{r} t_i^{\ell-r}(t-t_i)^r. \tag{4.177}$$

De forma que na expressão (4.175) temos uma soma de modos J^3 atuando nos campos em cada ponto t_i,

$$\begin{aligned}\left\langle :J^3_\ell \hat{\mathcal{O}}_\infty(\infty): \prod_{i=0}^{Q} \hat{\mathcal{O}}_i(t_i) \right\rangle = -\sum_{r\geq 0}\binom{\ell}{r}\Bigg[t_Q^{\ell-r}\left\langle \hat{\mathcal{O}}_\infty(\infty)\ :J^3_r\hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q):\cdots\hat{\mathcal{O}}_0(0)\right\rangle + \cdots \\ + t_1^{\ell-r}\left\langle \hat{\mathcal{O}}_\infty(\infty)\ \hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q)\cdots :J^3_r\hat{\mathcal{O}}_1(t_1):\hat{\mathcal{O}}_0(0)\right\rangle\Bigg] \\ - \left\langle \mathcal{O}_\infty(\infty)\ \hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q)\cdots\mathcal{O}_1(t_1)\,:J^3_\ell\mathcal{O}_0(0):\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.178}$$

Veja que especificamente no ponto $t_0 = 0$ não precisamos realizar a mudança no fator t^ℓ pois este já está centrado em $t = 0$. Um processo semelhante pode ser realizado para modos negativos atuando em um ponto finito, de forma que obtemos

$$\begin{aligned}&\left\langle :J^3_{-k}\hat{\mathcal{O}}_1:(t_1)\ \hat{\mathcal{O}}_2(t_2)\cdots\hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q)\right\rangle \\ &= \sum_{r\geq 0}(-1)^{1+r}\binom{k+r-1}{r}\Bigg[\frac{1}{(t_2-t_1)^{k+r}}\left\langle \hat{\mathcal{O}}_1(t_1)\ :J^3_r\hat{\mathcal{O}}_2(t_2):\ \hat{\mathcal{O}}_3(t_3)\cdots\hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q)\right\rangle \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{(t_Q-t_1)^{k+r}}\left\langle \hat{\mathcal{O}}_1(t_1)\cdots\ :J^3_r\hat{\mathcal{O}}_Q(t_Q):\right\rangle\Bigg].\end{aligned} \tag{4.179}$$

Com as expressões (4.178-4.179), podemos, então, calcular funções de correlação do tipo

$$G(z) = \left\langle :J^3_{\frac{k'}{n'}}V^\infty_{(n')}(\infty):\ V^2_{(n_2)}(z_2)\ V^1_{(n_1)}(z_1)\ :J^3_{-\frac{k}{n}}V^0_{(n)}(0):\right\rangle, \tag{4.180}$$

que, em (4.174), vimos ser mapeada para o espaço de cobertura como uma soma de modos inteiros,

$$G(t) = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{\ell'=0}^{k'} A^{(\infty)}_{k'-\ell'} A^{(0)}_{k-\ell} G_{\ell',\ell}(t) \tag{4.181a}$$

$$\text{com} \qquad G_{\ell',\ell}(t) = \Big\langle :J^3_{\ell'}\hat{V}_\infty(\infty): \, \hat{V}_2(t_2) \, \hat{V}_1(t_1) \, :J^3_{-\ell}\hat{V}_0(0): \Big\rangle. \tag{4.181b}$$

Seja, a princípio, o modo $J^3_{\ell'}$ no infinito. Por (4.178), vimos que este é dado pela soma dos modos positivos atuando nos campos em pontos finitos da função de correlação. Se, em (4.181), os campos em t_1 e t_2 são exponenciais, então, por (4.169), vemos que o único modo não nulo atuando nestes campos é J^3_0. Já em $t_0 = 0$, temos,

$$:J_r :J_{-\ell}\hat{V}_0(0):: = \frac{1}{(\ell-1)!} \oint_0 \frac{dt'}{2\pi i} (t')^r J^3(t') : (\partial^{\ell-1} J^3)\hat{V}_0(0): \tag{4.182}$$

Por (4.169), a OPE entre J^3 e V_0 possui polo simples, portanto a expressão acima é não nula somente se $r = 0$. Por outro lado, para a OPE entre as correntes J^3, temos

$$J^3(t')J^3(t) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(t-t')^2}, \qquad J^3(t')\partial^{\ell-1}J^3(t) \sim \frac{\ell!}{2}(t'-t)^{-\ell-1}. \tag{4.183}$$

Portanto, de (4.182) obtemos

$$:J_0 :J_{-\ell}\hat{V}_0(0):: = j_0 \, :J^3_{-\ell}\hat{V}_0(0):, \tag{4.184a}$$

$$:J_r :J_{-\ell}\hat{V}_0(0):: = \frac{\ell}{2}\hat{V}_0(0)\delta_{r,\ell}. \qquad r,\ell \geq 1 \tag{4.184b}$$

Utilizando esses resultados em (4.181), junto com a identidade (4.178), obtemos

$$\begin{aligned} G_{\ell',\ell}(t) = &- \left(j_2 t_2^{\ell'} + j_1 t_1^{\ell'}\right) \Big\langle \hat{V}_\infty(\infty) \, \hat{V}_1(t_1) \, \hat{V}_2(t_2) \, :J^3_{-\ell}\hat{V}_0(0): \Big\rangle \\ &- \frac{\ell}{2}\delta_{\ell',\ell} \Big\langle \hat{V}_\infty(\infty) \, \hat{V}_1(t_1) \, \hat{V}_2(t_2) \, \hat{V}_0(0) \Big\rangle \end{aligned} \tag{4.185}$$

Aqui assumimos $\ell', \ell \geq 1$; caso contrário, a atuação de um modo J^3_0 é trivial, e a expressão é simplificada. Por fim, podemos usar a identidade para modos em pontos finitos (4.179), e assim que obtemos o resultado final,

$$G_{\ell',\ell}(t) = B_{\ell',\ell} \times \Big\langle \hat{V}_\infty(\infty) \, \hat{V}_2(t_2) \, \hat{V}_1(t_1) \, \hat{V}_0(0) \Big\rangle, \tag{4.186}$$

com os coeficientes $B_{\ell',\ell}$ dados por

$$B_{\ell',\ell} = \left[\left(j_2 t_2^{\ell'} + j_1 t_1^{\ell'}\right) \left(j_2 t_2^{-\ell} + j_1 t_1^{-\ell}\right) - \frac{\ell}{2}\delta_{\ell',\ell} \right], \qquad \ell', \ell \geq 1 \tag{4.187a}$$

$$B_{\ell',0} = - \left(j_2 t_2^{\ell'} + j_1 t_1^{\ell'}\right) j_0, \qquad \ell' \geq 1 \tag{4.187b}$$

$$B_{0,\ell} = - \left(j_2 t_2^{-\ell} + j_1 t_1^{-\ell}\right) j_\infty, \qquad \ell \geq 1 \tag{4.187c}$$

$$B_{0,0} = j_\infty j_0. \tag{4.187d}$$

Portanto, retornando à expressão para a função de correlação (4.180), temos

$$G(z) \hookleftarrow \sum_{\ell'=0}^{k'} \sum_{\ell=0}^{k} A^{(\infty)}_{k'-\ell'} A^{(0)}_{k-\ell} B_{\ell',\ell} \Big\langle \hat{V}_\infty(\infty)\, \hat{V}_2(t_2)\, \hat{V}_1(t_1)\, \hat{V}_0(0) \Big\rangle. \tag{4.188}$$

Assim, conseguimos formular uma expressão que fornece uma relação funcional direta entre funções de correlação com modos fracionários e aquelas dos campos V, sendo necessário apenas identificar os coeficientes da expansão do mapa para o espaço de cobertura, bem como as cargas associadas.

Como aplicação da fórmula obtida, calculemos a atuação dos modos fracionários com $k, k' = 1$ em operadores quirais de menor peso, com $j_n = (n-1)/2$. A função de correlação de interesse na base é dada por

$$G(u) = \Big\langle :J^3_{\frac{1}{n}} \mathrm{O}^{(0)\dagger}_{(n)}(\infty): \; \mathrm{O}^{(0)\dagger}_{(2)}(1) \; \mathrm{O}^{(0)}_{(2)}(u) \; :J^3_{-\frac{1}{n}} \mathrm{O}^{(0)}_{(n)}(0): \Big\rangle. \tag{4.189}$$

Veja que a função de correlação contém pares $\mathrm{O}^\dagger$, que possuem cargas opostas. Assim, $j_\infty = -j_0 = -j_n$ e $j_1 = -j_2 = 1/2$. Além disso, o mapeamento para o espaço de cobertura é dado pela expressão obtida em (4.87), com $n_1 = n$ e $n_2 = 1$,

$$z(t) = \left(\frac{t}{t_1}\right)^n \left(\frac{t - t_0}{t - t_\infty}\right) \left(\frac{t_1 - t_\infty}{t_1 - t_0}\right), \tag{4.190}$$

com a definição dos coeficientes (4.89) tomando a forma

$$t_0 = x - 1, \qquad t_1 = \frac{(x-1)(n+x-1)}{n+x}, \qquad t_\infty = x - \frac{x}{n+x}. \tag{4.191}$$

A expansão do mapa em torno de $t = 0$ e $t = \infty$, de acordo com (4.159), define os coeficientes A,

$$A^{(0)}_0 = b_0^{-1/n}, \qquad A^{(0)}_1 = b_0^{-1/n} \frac{t_\infty - t_0}{n t_0 t_\infty} = \frac{b_0^{-1/n}}{x(x-1)(x+n-1)}, \tag{4.192a}$$

$$A^{(\infty)}_0 = b_\infty^{1/n}, \qquad A^{(\infty)}_1 = b_\infty^{1/n} \frac{t_\infty - t_0}{n} = \frac{b_\infty^{1/n}}{x+n}. \tag{4.192b}$$

A função de correlação no espaço de cobertura, fica escrita como

$$G(x) = \left(\sum_{\ell',\ell=0}^{1} A^{(\infty)}_{1-\ell'} A^{(0)}_{1-\ell} B_{\ell',\ell} \right) \Big\langle \hat{\mathrm{O}}^{(0)\dagger}(\infty)\, \hat{\mathrm{O}}^{(0)\dagger}(t_1)\, \hat{\mathrm{O}}^{(0)}(x)\, \hat{\mathrm{O}}^{(0)}(0) \Big\rangle, \tag{4.193}$$

com os coeficientes $B_{\ell',\ell}$,

$$B_{0,0} = -j_n^2, \qquad B_{0,1} = j_2 j_n \frac{(t_1 - x)}{t_1 x}, \tag{4.194}$$

$$B_{1,0} = j_2 j_n \,(t_1 - x)\,, \qquad B_{1,1} = -j_2^2 \frac{(\,x - t_1)^2}{t_1 x} - \frac{1}{2}. \tag{4.195}$$

A soma dos coeficientes em (4.193) fica dada por

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell',\ell=0}^{1} A^{(\infty)}_{1-\ell'} A^{(0)}_{1-\ell} B_{\ell',\ell} \\
&\quad = A^{(\infty)}_{1} A^{(0)}_{1} B_{0,0} + A^{(\infty)}_{1} A^{(0)}_{0} B_{0,1} + A^{(\infty)}_{0} A^{(0)}_{1} B_{1,0} + A^{(\infty)}_{0} A^{(0)}_{0} B_{1,1} \\
&\quad = -(b_0/b_\infty)^{-1/n} \left(\frac{1}{2} + \frac{(j_n + j_2(2x+n-1))^2}{x(x-1)(x+n)(x+n-1)} \right) \\
&\quad = -(b_0/b_\infty)^{-1/n} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n-1)} \right),
\end{aligned} \tag{4.196}$$

tal que a função de correlação no espaço de cobertura toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\left\langle J^3_1 \hat{O}^{(0)\dagger}_n(\infty)\ \hat{O}^{(0)\dagger}_2(t_1)\ \hat{O}^{(0)}_2(x)\ J^3_{-1} \hat{O}^{(0)}_n(0) \right\rangle \\
&\quad = -\left(\frac{(x-1)(x+n)}{x(x+n-1)} \right)^{-1/n} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n-1)} \right) \left\langle \hat{O}^{(0)\dagger}_n(\infty)\ \hat{O}^{(0)\dagger}_2(t_1)\ \hat{O}^{(0)}_2(x)\ \hat{O}^{(0)}_n(0) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{4.197}$$

onde utilizamos os parâmetros b_0, b_∞ obtidos em (4.94). Após este processo, o resultado é função apenas das funções de 4 pontos dos operadores exponenciais $\hat{O}^{(0)}$, que possuem o formato definido em (4.158) com $\alpha = \beta = (n-1)$. Sabendo que no espaço de cobertura os operadores exponencias recebem fatores b_*, conforme (4.108), e que funções de correlação de operadores de vértice possuem o seguinte formato funcional

$$\langle \prod_i^j {:}e^{i\alpha_i \phi(t_i)}{:} \rangle = \prod_{i<j} (t_i - t_j)^{\alpha_i \alpha_j}, \tag{4.198}$$

podemos utilizar o método de Lunin-Mathur para obter a função de correlação (4.189) na base a partir da ação de Liouville com os parâmetros (4.94). Obtemos então [71],

$$\begin{aligned}
G(x)_{\text{base}} &= \left\langle {:}J^3_{\frac{1}{n}} \mathrm{O}^{(0)\dagger}_{(n)}(\infty){:}\ \mathrm{O}^{(0)\dagger}_{(2)}(t_1)\ \mathrm{O}^{(0)}_{(2)}(x)\ {:}J^3_{-\frac{1}{n}} \mathrm{O}^{(0)}_{(n)}(0){:} \right\rangle \\
&= C \left(\frac{(x-1)(x+n)}{x(x+n-1)} \right)^{-1/n} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n-1)} \right) \\
&\qquad \times (x-1)^2 \left(x + \frac{n-1}{2} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.199}$$

Em resumo, com a expressão geral (4.188), podemos avaliar qualquer função de correlação envolvendo modos fracionários $J^3_{k/n}$ de setores twistados atuando em campos exponenciais definidos por (4.158). Em um procedimento semelhante ao caso dos campos de Ramond, resta ainda realizar análises de regras de fusão em limites $u \to 0, 1$ a fim de se obter informações da CFT a partir das constantes de estrutura.

5 CONCLUSÃO

"A disciplina é a mãe do êxito."

Ésquilo.

Este trabalho foi dedicado ao estudo de propriedades da teoria de campos conforme conhecida como CFT D1-D5. Essa teoria está associada à uma descrição holográfica, a partir da dualidade AdS/CFT, de um sistema de D1- e D5-branas, cujo limite de baixas energias resulta em uma solução de supergravitação com as propriedades de um buraco negro. A CFT D1-D5 tem suas características determinadas pela correspondência holográfica, como o número de supersimetrias. Uma das características principais é que a teoria tem como espaço alvo um modelo sigma descrito por um orbifold simétrico, o que exige técnicas específicas para o cálculo de funções de correlação.

No Capítulo 2, revisamos os principais conceitos e ferramentas usadas em teorias conformes com duas dimensões, como OPE's, identidades de Ward e funções de correlação.

No Capítulo 3, motivamos e descrevemos a CFT D1-D5. Essa CFT possui $\mathcal{N} = (4, 4)$ supersimetrias cujos geradores formam uma álgebra que inclui a álgebra de Virasoro. As correntes de simetria e as (super)cargas associadas refletem as propriedades do espaço-tempo $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, que aparece no limite assintótico de desacoplamento do sistema D1-D5 em sua representação gravitacional. O espaço alvo da teoria é descrito por um orbifold simétrico $(T^4)^N/S_N$, o que leva à existência de setores twistados no espaço de Hilbert, tornando a teoria não trivial. Esses setores são criados pela inserção de operadores de twist associados a permutações $g \in S_N$. Nos setores twistados com um ciclo (n), é possível definir modos fracionários dos geradores da superalgebra. Mostramos que esses operadores formam a álgebra dos modos fracionários. Usando os modos fracionários no setor twistado é possível criar operadores quirais primários, caracterizados por sua carga e dimensão conforme iguais. A CFT D1-D5 é descrita como uma teoria de orbifold com campos bosônicos e fermiônicos livres. Discutimos como os operadores quirais podem ser descritos em termos dos férmions bosonizados como operadores de vértice. A teoria dual ao sistema gravitacional é uma teoria fortemente acoplada, e por isso é necessário deformar a CFT livre com um operador marginal relacionado aos moduli de supergravitação. Descrevemos um operador específico, que é um escalar com respeito aos grupos de simetria e que chamamos de operador de deformação, composto por operadores quirais.

No Capítulo 4, estudamos o cálculo de funções de 4-pontos envolvendo operadores twistados. Descrevemos dois métodos: o de Lunin-Mathur, no qual as funções de correlação na base e no espaço de cobertura são conectadas por uma ação de Liouville completamente determinada pelo mapa entre os espaços; e o método do tensor energia momento, baseado na identidade de Ward. Como aplicação do método de Lunin-Mathur, realizamos o cálculo explícito de uma função de 4 pontos envolvendo o operador de deformação e campos de Ramond. Essas funções podem ser usadas para calcular a correção da dimensão conforme dos campos de Ramond em segunda ordem no acoplamento da deformação. Demonstramos, com isso, que estes campos são protegidos em segunda ordem, mantendo a sua dimensão conforme mesmo quando nos movemos além do ponto no espaço de moduli referente à teoria livre [47, 58, 67, 72, 71].

Finalmente, como resultado inédito da dissertação, demonstramos um método para a obtenção de funções de correlação envolvendo a atuação de descendentes fracionários $J^3_{k/n}$, associados à simetria-R, em campos exponenciais V_n. O método baseia-se em uma identidade de Ward para as correntes de simetria-R da CFT D1-D5, e permite verificar que as funções de correlação envolvendo os modos fracionários nos setores twistados são reduzidas a funções de correlação que não envolvem esses modos. Assim, a função de correlação na base pode ser obtida como uma soma finita de termos envolvendo funções de correlação de operadores de vértice,

$$\begin{aligned}\Big\langle :J^3_{\frac{k'}{n'}} V^{\infty}_{(n')}(\infty): \; V^2_{(n_2)}(1)\; V^1_{(n_1)}(u)\; :J^3_{-\frac{k}{n}} V^0_{(n)}(0): \Big\rangle \\ = e^{S_L} \sum_{\ell'=0}^{k'} \sum_{\ell=0}^{k} A^{(\infty)}_{\ell'-k'} A^{(0)}_{\ell-k} B_{\ell',\ell} \Big\langle \hat{V}_{\infty}(\infty)\, \hat{V}_2(t_1)\, \hat{V}_1(x)\, \hat{V}_0(0) \Big\rangle. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como aspirações futuras, pretendemos aprofundar a análise das funções com descendentes calculadas no final do Capítulo 4. É necessário estudar os limites de OPE's, como feito na seção 4.7 para as funções com campo de Ramond, para obter constantes de estrutura envolvendo o operador de deformação e descendentes. Essa análise pode elucidar propriedades dos operadores que aparecem nas OPE's consideradas em [71]. Também pretendemos estender a análise para funções envolvendo descendentes de Virasoro. Tais funções podem ser úteis no contexto da holografia de soluções de supergravitação conhecidas como 'superstrata' [73].

REFERÊNCIAS

[1] BRAGA, R. *Crônicas de guerra: Com a FEB na Itália*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora do Autor, 1964.

[2] HEISENBERG, W. *Physics and Philosophy: The Revolution of Modern Science*. [S.l.]: American Institute of Physics, 1958.

[3] BELAVIN, A. A.; POLYAKOV, A. M.; ZAMOLODCHIKOV, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 241, n. 2, p. 333–380, 1984. DOI = 10.1016/0550-3213(84)90052-X.

[4] CARDY, J. Conformal field theory and statistical mechanics. *Exact methods in low-dimensional statistical physics and quantum computing*, p. 65–98, 2010. DOI = 10.48550/arXiv.0807.3472.

[5] FRANCESCO, P. D.; MATHIEU, P.; SENECHAL, D. *Conformal Field Theory*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997. DOI: 10.1007/978-1-4612-2256-9. ISBN 978-0-387-94785-3.

[6] POLCHINSKI, J. *String theory, volume 1: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. DOI: 10.1017/CBO9780511816079.

[7] POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). DOI = 10.1017/CBO9780511618123.

[8] SCHWARZ, J. H. The early history of string theory and supersymmetry. *arXiv preprint arXiv:1201.0981*, 2012. DOI = 10.48550/arXiv.1201.0981.

[9] POLYAKOV, A. M. Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 103, n. 3, p. 207–210, 1981. DOI = 10.1016/0370-2693(81)90743-7.

[10] PEET, A. W. Tasi lectures on black holes in string theory. In: *Strings, branes and gravity*. [S.l.]: World Scientific, 2001. p. 353–433. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/0008241.

[11] MALDACENA, J. The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999. DOI = 10.1023/A:1026654312961.

[12] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 428, n. 1-2, p. 105–114, 1998. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/9802109.

[13] WITTEN, E. Anti de sitter space and holography. *arXiv preprint hep-th/9802150*, 1998. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/9802150.

[14] STROMINGER, A.; VAFA, C. Microscopic origin of the bekenstein-hawking entropy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 379, n. 1-4, p. 99–104, 1996. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00345-0.

[15] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. DOI: 10.1007/BF02345020.

[16] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. In: *Jacob Bekenstein: the conservative revolutionary*. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 303–306. DOI = 10.1007/BF02757029.

[17] DHAR, A.; MANDAL, G.; WADIA, S. R.; YOGENDRAN, K. D1/D5 system with B-field, noncommutative geometry and the cft of the higgs branch. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 575, n. 1-2, p. 177–194, 2000. DOI = 10.1016/S0550-3213(00)00066-3.

[18] AVERY, S. Using the D1D5 CFT to understand black holes. 2010. ArXiv: 1012.0072.

[19] LARSEN, F.; MARTINEC, E. U (1) charges and moduli in the D1-D5 system. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 1999, n. 06, p. 019, 1999. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/9905064.

[20] LUNIN, O.; MATHUR, S. D. Correlation functions for M^N/S_N orbifolds. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 219, p. 399–442, 2001. DOI: 10.1142/S0217751X0100862X.

[21] LUNIN, O.; MATHUR, S. D. Three-point functions for M^N/S_N orbifolds with N = 4 supersymmetry. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 227, p. 385–419, 2002. DOI = 10.1007/s002200200638.

[22] HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974. DOI = 10.1038/248030a0.

[23] HAWKING, S. W. Breakdown of predictability in gravitational collapse. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 10, p. 2460, 1976. DOI = 10.1103/PhysRevD.14.2460.

[24] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. DOI = 10.1007/BF02345020.

[25] LUNIN, O.; MATHUR, S. D. AdS/CFT duality and the black hole information paradox. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 623, n. 1-2, p. 342–394, 2002. DOI = 10.1016/S0550-3213(01)00620-4.

[26] SKENDERIS, K.; TAYLOR, M. The fuzzball proposal for black holes. *Physics Reports*, Elsevier, v. 467, n. 4-5, p. 117–171, 2008. DOI = 10.1016/j.physrep.2008.08.001.

[27] MATHUR, S. D. Fuzzballs and the information paradox: a summary and conjectures. *Advanced Science Letters*, American Scientific Publishers, v. 2, n. 2, p. 133–150, 2009. DOI = 10.1166/asl.2009.1021.

[28] MATHUR, S. D. The information paradox: conflicts and resolutions. *Pramana*, Springer, v. 79, n. 5, p. 1059–1073, 2012. DOI = 10.1007/s12043-012-0417-z.

[29] MATHUR, S. D. The fuzzball proposal for black holes: An elementary review. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, Wiley Online Library, v. 53, n. 7-8, p. 793–827, 2005. DOI = 10.1002/prop.200410203.

[30] EBERHARDT, L.; GABERDIEL, M. R.; GOPAKUMAR, R. The worldsheet dual of the symmetric product CFT. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 4, p. 1–48, 2019. DOI = 10.1007/JHEP04(2019)103.

[31] EBERHARDT, L.; GABERDIEL, M. R. String theory on AdS3 and the symmetric orbifold of liouville theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 948, p. 114774, 2019. DOI = 10.1016/j.nuclphysb.2019.114774.

[32] EBERHARDT, L.; GABERDIEL, M. R.; GOPAKUMAR, R. Deriving the AdS3/CFT2 correspondence. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2020, n. 2, p. 1–52, 2020. DOI = 10.1007/JHEP02(2020)136.

[33] MULLER-KIRSTEN, H. J.; WIEDEMANN, A. *Introduction to supersymmetry*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2010. v. 80. DOI: 10.1142/7594.

[34] WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

[35] AFONSO, S. M. S.; SILVA, M. A. d. Teoria básica de análise complexa. *São Paulo: Editora Unesp*, 2011. ISBN: 9788595463387.

[36] VIRASORO, M. A. Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models. *Physical Review D*, APS, v. 1, n. 10, p. 2933, 1970. DOI = 10.1103/PhysRevD.1.2933.

[37] NEEDHAM, T. *Visual complex analysis*. [S.l.]: Oxford University Press, 2023. DOI = 10.1093/oso/9780198534471.001.0001.

[38] AHLFORS, L. V.; AHLFORS, L. V. *Complex analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1979. v. 3. ISBN = 978-0070006577.

[39] FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of modern physics*, APS, v. 20, n. 2, p. 367, 1948. DOI = 10.1103/RevModPhys.20.367.

[40] GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. *Thermodynamics and statistical mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. DOI = 10.1103/RevModPhys.20.367.

[41] WARD, J. C. An identity in quantum electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 78, n. 2, p. 182, 1950. DOI = 10.1103/PhysRev.78.182.

[42] TAKAHASHI, Y. On the generalized ward identity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Società Italiana di Fisica Bologna, v. 6, n. 2, p. 371–375, 1957. DOI = 10.1007/BF02832514.

[43] WICK, G.-C. The evaluation of the collision matrix. *Physical review*, APS, v. 80, n. 2, p. 268, 1950. DOI = 10.1103/PhysRev.80.268.

[44] HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. J. G. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincare A Phys. Theor.*, v. 20, p. 69–94, 1974.

[45] DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. van. One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 10, p. 401–410, Jul 1974. DOI = 10.1103/PhysRevD.10.401.

[46] DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 160, p. 1113–1148, Aug 1967. DOI = 10.1103/PhysRev.160.1113.

[47] LIMA, A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. On the dynamics of protected ramond ground states in the D1-D5 CFT. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2021, n. 7, p. 1–45, 2021. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)120.

[48] SEIBERG, N.; WITTEN, E. The D1/D5 system and singular CFT. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 1999, n. 04, p. 017, 1999. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/9903224.

[49] HOROWITZ, G. T.; STROMINGER, A. Black strings and p-branes. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 360, n. 1, p. 197–209, 1991. DOI = 10.1016/0550-3213(91)90440-9.

[50] DUNHAM, D. More "circle limit iii"patterns. In: *Bridges London: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 451–458. https://www.d.umn.edu/ ddunham/dunbrid07.pdf.

[51] AARONSON, S.; POLLACK, J. Discrete bulk reconstruction. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2023, n. 4, p. 1–35, 2023. DOI = 10.1007/JHEP04(2023)037.

[52] BROWN, J. D.; HENNEAUX, M. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 104, p. 207–226, 1986. DOI: 10.1007/BF01211590.

[53] BANADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical review letters*, APS, v. 69, n. 13, p. 1849, 1992. DOI = 10.48550/arXiv.hep-th/9204099.

[54] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, APS, v. 7, n. 8, p. 2333, 1973. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2333.

[55] BURRINGTON, B. A.; PEET, A. W.; ZADEH, I. G. Bosonization, cocycles, and the D1-D5 CFT on the covering surface. *Physical Review D*, APS, v. 93, n. 2, p. 026004, 2016. DOI = 10.1103/PhysRevD.93.026004.

[56] HERSTEIN, I. N. *Topics in algebra*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. DOI = 10.1103/PhysRevD.93.026004.

[57] PAKMAN, A.; RASTELLI, L.; RAZAMAT, S. S. Diagrams for symmetric product orbifolds. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 10, p. 034, 2009. ArXiv = 0905.3448v2.

[58] LIMA, A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Correlation functions of composite ramond fields in deformed D1-D5 orbifold SCFT 2. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 10, p. 106004, 2020. ArXiv: 2006.16303.

[59] BEER, T. D.; BURRINGTON, B. A.; JARDINE, I. T.; PEET, A. The large N limit of OPEs in symmetric orbifold CFTs with N=(4, 4) supersymmetry. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 8, p. 15, 2019. DOI = 10.48550/arXiv.1904.07816.

[60] KANITSCHEIDER, I.; SKENDERIS, K.; TAYLOR, M. Holographic anatomy of fuzzballs. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2007, n. 04, p. 023, 2007. ArXiv: hep-th/0611171.

[61] AHARONY, O.; GUBSER, S. S.; MALDACENA, J.; OOGURI, H.; OZ, Y. Large N field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, Elsevier, v. 323, n. 3-4, p. 183–386, 2000. DOI = 10.1016/S0370-1573(99)00083-6.

[62] AVERY, S. G.; CHOWDHURY, B. D.; MATHUR, S. D. Deforming the D1D5 CFT away from the orbifold point. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2010, n. 6, p. 1–33, 2010. DOI = 10.1007/JHEP06(2010)031.

[63] DAVID, J. R.; MANDAL, G.; WADIA, S. R. D1/D5 moduli in SCFT and gauge theory, and hawking radiation. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 564, n. 1-2, p. 103–127, 2000. DOI = 10.1016/S0550-3213(99)00620-3.

[64] PESKIN, M. E. *An Introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018. DOI: 10.1201/9780429503559.

[65] DIXON, L.; FRIEDAN, D.; MARTINEC, E.; SHENKER, S. The conformal field theory of orbifolds. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 282, p. 13–73, 1987. DOI: 10.1016/0550-3213(87)90676-6.

[66] ARUTYUNOV, G.; FROLOV, S. Four graviton scattering amplitude from $s^n r^8$ supersymmetric orbifold sigma model. *Nucl. Phys. B*, v. 524, p. 159–206, 1998. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00326-5.

[67] LIMA, A. A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Four-point functions with multi-cycle fields in symmetric orbifolds and the D1-D5 CFT. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2022, n. 5, p. 1–58, 2022. DOI: 10.1007/JHEP05(2022)106.

[68] DOTSENKO, V. Lectures on conformal field theory. In: *Conformal field theory and solvable lattice models*. [S.l.]: Mathematical Society of Japan, 1988. v. 16, p. 123–171. DOI = 10.2969/aspm/01610123.

[69] LIMA, A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Microstate renormalization in deformed D1-D5 SCFT. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 808, p. 135630, 2020. DOI = 10.48550/arXiv.2005.06702.

[70] LIMA, A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Renormalization of twisted ramond fields in D1-D5 SCFT2. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2021, n. 3, p. 1–45, 2021. DOI = 10.1007/JHEP03(2021)202.

[71] LIMA, A. A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Four-point functions with multi-cycle fields in symmetric orbifolds and the D1-D5 CFT. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2022, n. 5, p. 1–58, 2022. DOI = 10.1007/JHEP05(2022)106.

[72] LIMA, A.; SOTKOV, G.; STANISHKOV, M. Correlation functions of composite ramond fields in deformed d1-d5 orbifold scft 2. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 10, p. 106004, 2020. DOI = 10.1103/PhysRevD.102.106004.

[73] SHIGEMORI, M. Superstrata. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 52, n. 5, p. 51, 2020. DOI = 10.48550/arXiv.2002.01592.

[74] SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, APS, v. 82, n. 5, p. 664, 1951. DOI = 10.1103/PhysRev.82.664.

APÊNDICE A – ANÁLISE COMPLEXA

Nesta seção expõe-se conceitos de análise complexa que serão úteis na construção do trabalho.

A.1 EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f(z) : D \to \mathbb{C}$ com $z \equiv x + iy$. Podemos escrever a função complexa f a partir de suas componentes, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, de forma que

$$u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x, y)) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x, y)). \tag{A.1}$$

Podemos caracterizar a função como *holomórfica*, em um ponto $z_0 \in D$, se esta for diferenciável em um entorno de z_0. Ou, de forma global, a função é holomórfica se for diferenciável em todos os pontos de seu domínio D.

A condição necessária e suficiente para que uma função complexa seja diferenciável vem de uma relação entre as derivadas parciais de suas componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Afirma-se que a função f é diferenciável se suas componentes satisfazem as chamadas equações de Cauchy-Riemann [35],

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.2}$$

Um resultado destas condições pode ser aplicado ao estudo de CFT, vide Capítulo 2. Sendo as duas variáveis independentes $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$, tal que as derivadas se traduzem em

$$\partial_x = \frac{1}{2}\left(\partial + \bar{\partial}\right) \quad \text{e} \quad \partial_y = \frac{1}{2i}\left(\partial - \bar{\partial}\right), \tag{A.3}$$

com $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ e $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, e utilizando das equações de Cauchy-Riemann, obtemos que uma função holomórfica deve satisfazer,

$$\bar{\partial} f(z, \bar{z}) = 0 \implies f = f(z). \tag{A.4}$$

Portanto, componentes holomórficas e anti-holomórficas são separadas.

A.2 TEOREMA DE RESÍDUOS

Supondo uma função analítica na vizinhança de um ponto z_0, de forma que este define um polo de ordem n, ou seja,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots . \tag{A.5}$$

Em uma expansão em série de Laurent da função f sem singularidades essenciais, temos termos finitos na expansão de potências negativas,

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{A.6}$$

e o resíduo é definido como o coeficiente a_{-1} desta expansão. Dessa forma,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + ... + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{A.7}$$

Multiplicando ambos lados da equação por $(z - z_0)^n$,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + ... + (z - z_0)^{n-2} a_{-2} + (z - z_0)^{n-1} a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n}. \tag{A.8}$$

Se desejamos obter o coeficiente a_{-1}, derivamos $n - 1$ vezes,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] = (n - 1)! a_{-1} + \text{termos proporcionais a } (z - z_0). \tag{A.9}$$

Portanto, no limite $z \to z_0$,

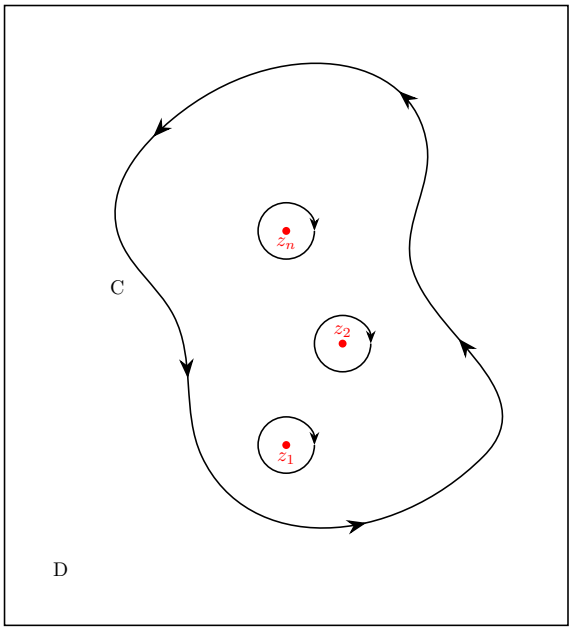
$$a_{-1} \equiv \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right]. \tag{A.10}$$

Uma aplicação importante destes resultados é no Teorema de Resíduos de Cauchy [38], que afirma que, se f é uma função analítica em um domínio $D \in \mathbb{C}$ a menos de n pontos z_i, e $C \in D$ é uma curva anti-horária, fechada e suave por partes contendo z_i, ver Figura 16, então,

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z). \tag{A.11}$$

Veja que aqui não é imposta uma forma específica para a curva, apenas que ela contenha as singularidades em seu interior e que esteja contida no domínio da função. Dessa forma, é permitido deformá-la livremente, conforme nossa conveniência.

Figura 16 – Representação de uma coleção de singularidades z_n da função $f(z)$ no interior de uma curva fechada C e orientada de forma anti-horária.



A.3 REGULARIZAÇÃO

Aqui trataremos da regularização da integral (4.8) associada à renormalização da função de dois pontos. Desejamos obter uma expressão para a integral,

$$I = \int d^2 z_3 \frac{1}{|z_{13}|^2 |z_{32}|^2}, \tag{A.12}$$

que diverge nos limites $z_{13}, z_{23} \to 0$. A princípio, fixemos as variàveis $z_1 = 0, z_2 = L$ e $z_3 \equiv z$ de forma que $|z_{12}| = L$. Então, a integral torna-se

$$I = \int d^2 z \frac{1}{|z|^2 |z - L|^2}. \tag{A.13}$$

Podemos utilizar a parametrização de Schwinger [74], que de forma geral é dada por

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty du u^{n-1} e^{-uA}. \tag{A.14}$$

Assim, a integral (A.13) pode ser parametrizada em $u, v > 0$ por

$$I = \int d^2 z \frac{1}{|z|^2 |z - L|^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty du dv \int d^2 z \exp\Big(-u|z|^2 - v|z - L|^2\Big). \tag{A.15}$$

Podemos reescrever o termo na exponencial como

$$u|z| + v|z - L| = (u + v)|z - y|^2 + \frac{uv}{u + v} L^2, \qquad \text{com} \quad y = \frac{vL}{u + v}. \tag{A.16}$$

Portanto, na integral, temos

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty dudv \exp\Big(-uvL^2/(u+v)\Big) \int d^2z \exp\Big(-(u+v)|z-y|^2\Big). \tag{A.17}$$

Ao reparametrizarmos a variável complexa $z - y = \omega = \omega_x + i\omega_y$ com $\omega_x, \omega_y \in (-\infty, \infty)$, as integrais em ω_x, ω_y são claramente integrais gaussianas. Assim, procedemos integrando sobre o plano real e obtemos

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty dudv \exp\Big(-uvL^2/(u+v)\Big) \frac{\pi}{u+v}. \tag{A.18}$$

O procedimento aqui é semelhante ao realizado na parametrização de Feynman onde definimos as variáveis s, t

$$s = u + v, \quad t = \frac{u}{u+v}, \qquad \text{com} \quad u, v > 0 \implies s > 0 \ \text{ e } \ 0 < t < 1. \tag{A.19}$$

Além disso, com as inversas $u = st$ e $v = s(1-t)$ temos o Jacobiano da transformação,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ (1-t) & -s \end{vmatrix} = s. \tag{A.20}$$

Assim, na integral I,

$$I = \pi \int_0^1 dt \int_0^\infty ds \exp\Big(-st(1-t)L^2\Big) = \frac{\pi}{L^2} \int_0^1 dt \frac{1}{t(1-t)}. \tag{A.21}$$

Observamos que a integral diverge quando $t \to 0$, e para regularizá-la definimos um parâmetro adimensional $\delta \ll 1$, de modo que

$$\int_\delta^{1-\delta} dt \frac{1}{t(1-t)} = [\ln(t) - \ln(1-t)] \Big|_\delta^{1-\delta} = 2 \ln \frac{1}{\delta}. \tag{A.22}$$

Por fim, ao introduzirmos um cut-off Λ na escala, definimos o parâmetro adimensional, $\delta \equiv \frac{\Lambda}{L}$, e obtemos

$$I = \frac{2\pi}{L^2} \ln\left(\frac{L}{\Lambda}\right) = \frac{2\pi}{|z_{12}|^2} \ln\left(\frac{|z_{12}|}{\Lambda}\right). \tag{A.23}$$

Na expressão de interesse em (4.7), isso resulta em

$$\int d^2z_3 \frac{1}{|z_{13}|^2 |z_{32}|^2 |z_{12}|^{2(\Delta-1)}} = \frac{2\pi}{|z_{12}|^{2\Delta}} \ln\left(\frac{|z_{12}|}{\Lambda}\right), \tag{A.24}$$

o que, por fim, leva à renormalização dos campos e da dimensão conforme.

APÊNDICE B – OPE'S E ÁLGEBRAS

B.1 OPERATOR PRODUCT EXPANSION

Estaremos interessados em obter as OPE's entre as correntes definidas no sistema D1-D5

$$J^a(z) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}\psi^{\gamma\dot{B}}, \qquad a = 1,2,3 \tag{B.1a}$$

$$G^{\alpha A}(z) = \psi^{\alpha A}[\partial X]^{\dot{B}A}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}, \qquad \alpha, A, \dot{A} = 1,2 \tag{B.1b}$$

$$T(z) = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}[\partial X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{B}B} + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\alpha\dot{A}}\partial\psi^{\beta\dot{B}}. \tag{B.1c}$$

O tensor antisimétrico é definido com coeficientes $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = -\epsilon_{21} = -\epsilon^{12} = 1$ e contração dos índices

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\alpha\beta}v^{\alpha} = v_{\beta}. \tag{B.2}$$

Para os férmions $\psi^{\alpha A}(z)$ e bósons $X^{A\dot{A}}(z)$ definidos em (3.10-3.11), é necessário as funções de correlação de dois pontos

$$\langle\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\psi^{\beta\dot{B}}(\omega)\rangle = -\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}}{z-\omega}, \tag{B.3a}$$

$$\langle[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(\omega)]^{\dot{B}B}\rangle = \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^2}. \tag{B.3b}$$

A primeira OPE a ser calculada é $J^a(z)G^{\alpha A}(\omega)$. Nos cálculos aqui descritos iremos omitir a operação de ordenamento normal, que deve ser considerada na inserção de campos compostos. Pelas definições (B.1),

$$J^a(z)G^{\alpha A}(\omega) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\gamma}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\mu\dot{C}}(z)\psi^{\gamma\dot{D}}(z)\psi^{\alpha\dot{A}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{B}A}. \tag{B.4}$$

Vemos que o produto é composto por 4 campos, sendo 3 deles fermiônicos. Devemos proceder utilizando do Teorema de Wick, que realiza a contração dos campos. Trivialmente, a contração entre um campo fermiônico e bosônico é nula. Também é necessário notar que, se tratando de campos fermiônicos, a relação de anti-comutação deve ser considerada. Assim,

$$\psi^{\mu\dot{C}}(z)\psi^{\gamma\dot{D}}(z)\psi^{\alpha\dot{A}}(\omega) = \psi^{\mu\dot{C}}(z)\langle\psi^{\gamma\dot{D}}(z)\psi^{\alpha\dot{A}}(\omega)\rangle - \psi^{\gamma\dot{D}}(z)\langle\psi^{\mu\dot{C}}(z)\psi^{\alpha\dot{A}}(\omega)\rangle. \tag{B.5}$$

Por fim, expandimos os campos em torno de $z = \omega$, desconsiderando termos não singulares. Assim,

$$\psi^{\mu\dot{C}}(z)\psi^{\gamma\dot{D}}(z)\psi^{\alpha\dot{A}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{B}A} \sim \frac{\epsilon^{\mu\alpha}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}}{z-\omega}\psi^{\gamma\dot{D}}(\omega)[\partial X]^{\dot{B}A}(\omega) - \frac{\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon^{\dot{D}\dot{A}}}{z-\omega}\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)[\partial X]^{\dot{B}A}(\omega). \tag{B.6}$$

Daqui em diante omitiremos a dependência dos campos em ω quando não houver margem para confusão. Voltando à (B.4), com a definição do tensor anti-simétrico,

$$\begin{aligned} J^a(z)G^{\alpha A}(\omega) &\sim \frac{1}{4}\frac{(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}}{z-\omega}\psi^{\gamma\dot{D}}[\partial X]^{\dot{B}A}\epsilon_{\dot{D}\dot{B}} + \frac{1}{4}\frac{(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\mu}}{z-\omega}\psi^{\mu\dot{C}}[\partial X]^{\dot{B}A}\epsilon_{\dot{C}\dot{B}}, \\ &\sim \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\mu}\frac{G^{\mu A}(\omega)}{z-\omega}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

A próxima OPE é a do tensor energia momento e da corrente de supersimetria, $T(z)G^{\gamma C}(\omega)$, que pelas definições (B.1),

$$T(z)G^{\gamma C}(\omega) = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}C} \tag{B.8a}$$

$$+ \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}C}. \tag{B.8b}$$

Aqui separamos o calculo das contrações nos dois termos. Para o primeiro teremos apenas contrações entre os campos bosônicos,

$$\begin{aligned} &[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}C} \\ &\qquad = \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega) + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BC}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{A}A}\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega) \\ &\qquad \sim \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{B}B}\psi^{\gamma\dot{C}} + \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AC}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{B}B}\psi^{\gamma\dot{C}} \\ &\qquad + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BC}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{A}A}\psi^{\gamma\dot{C}} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BC}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{A}A}\psi^{\gamma\dot{C}}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Novamente, após as contrações expandimos as funções em $z = \omega$, neste caso termos maiores que segunda ordem são não singulares. Para o segundo termo (B.8b),

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\gamma\dot{C}}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}C} \sim \frac{\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}[\partial X]^{\dot{D}C} + \frac{\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}[\partial X]^{\dot{D}C} \\ + \frac{\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}[\partial X]^{\dot{D}C}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Portanto, a OPE,

$$\begin{aligned} T(z)G^{\gamma C}(\omega) &\sim \frac{3}{2}\frac{1}{(z-\omega)^2}G^{\gamma C} + \frac{1}{z-\omega}\psi^{\gamma\dot{C}}[\partial^2 X]^{\dot{A}C}\epsilon_{\dot{C}\dot{A}} + \frac{1}{z-\omega}\partial\psi^{\gamma\dot{B}}[\partial X]^{\dot{D}C}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \\ &\sim \frac{3}{2}\frac{1}{(z-\omega)^2}G^{\gamma C} + \frac{1}{z-\omega}\partial G^{\gamma C}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Seguimos com a OPE entre os campos de supersimetria,

$$G^{\alpha A}(z)G^{\beta B}(\omega) = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\psi^{\alpha A}(z)[\partial X(z)]^{\dot{B}A}\psi^{\beta C}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}B}. \tag{B.12}$$

Aqui teremos uma contração entre os dois campos bosônicos, assim como uma contração entre os dois campos fermiônicos, resultando no produto

$$\psi^{\alpha A}(z)[\partial X(z)]^{\dot{B}A}\psi^{\beta C}(\omega)[\partial X(\omega)]^{\dot{D}B} \sim -\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}[\partial X]^{\dot{B}A}[\partial X]^{\dot{D}B} + \frac{\epsilon^{AB}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\beta\dot{C}} + \frac{\epsilon^{AB}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\beta\dot{C}} - \frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^3}. \tag{B.13}$$

Então a OPE,

$$G^{\alpha A}(z)G^{\beta B}(\omega) \sim -2\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^3} + \frac{\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{\alpha\beta}}{z-\omega}[\partial X]^{\dot{B}A}[\partial X]^{\dot{D}B} + \frac{\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{AB}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\beta\dot{C}} + \frac{\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\beta\dot{C}}. \tag{B.14}$$

Veja que com a definição de $J^a(\omega)$ temos que,

$$\partial J^a(\omega) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\partial\psi^{\mu\dot{A}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\rho\dot{B}} + \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\partial\psi^{\mu\dot{A}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\partial\psi^{\rho\dot{B}}. \tag{B.15}$$

Assim, implica-se a operação,

$$\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}\partial J^a(\omega) = \frac{1}{4}\epsilon^{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\partial\psi^{\beta\dot{A}}\psi^{\alpha\dot{B}} - \frac{1}{2}\epsilon^{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\partial\psi^{\beta\dot{A}}\psi^{\alpha\dot{B}} + \frac{1}{4}\epsilon^{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\beta\dot{A}}\partial\psi^{\alpha\dot{B}} - \frac{1}{2}\epsilon^{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\psi^{\beta\dot{A}}\partial\psi^{\alpha\dot{B}} = 0. \tag{B.16}$$

Aplicando a mesma operação em $2J^a$ o cálculo é análogo e obtemos

$$\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}2J^a(\omega) = \epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{AB}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\beta\dot{C}}. \tag{B.17}$$

Com o tensor energia momento $T(\omega)$,

$$\epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}T(\omega) = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}[\partial X]^{\dot{C}B}[\partial X]^{\dot{D}A} + \epsilon^{AB}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\psi^{\beta\dot{C}}\partial\psi^{\alpha\dot{D}}. \tag{B.18}$$

Portanto,juntando os termos, a OPE em (B.14),

$$G^{\alpha A}(z)G^{\beta B}(\omega) \sim -2\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^3} + \epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^{\alpha}{}_{\gamma}\left[\frac{2J^a(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega}\right] - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}\frac{T(\omega)}{z-\omega}. \tag{B.19}$$

Partindo para a OPE entre as correntes $J^a(z)$,

$$J^a(z)J^b(\omega) = \frac{1}{16}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*b})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\psi^{\gamma\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega). \tag{B.20}$$

O produto dos campos é dado por,

$$\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\psi^{\gamma\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega) \sim \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}\psi^{\gamma\dot{B}}\psi^{\rho\dot{D}} - \frac{\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}}{z-\omega}\psi^{\gamma\dot{B}}\psi^{\mu\dot{C}} - \frac{\epsilon^{\gamma\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{z-\omega}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\rho\dot{D}}$$
$$\frac{\epsilon^{\gamma\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{z-\omega}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\gamma\dot{C}} - \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\gamma\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^2} + \frac{\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\gamma\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^2}. \quad \text{(B.21)}$$

Então, vejamos o resultado da aplicação dos tensores antisimetricos e matrizes de Pauli de (B.20) em um dos termos proporcionais a $\psi\psi$,

$$\frac{1}{16}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*b})^{\nu}{}_{\rho}\epsilon^{\gamma\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\gamma\dot{C}} = -\frac{i}{16}\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}{}_{c}(\sigma^{*c})^{\beta}{}_{\mu}\psi^{\mu\dot{C}}$$
$$= \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{c}J^{c}(\omega). \quad \text{(B.22)}$$

Aqui utilizamos do fato de que com $a \neq b$, as matrizes de pauli respeitam a relação,

$$(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}(\sigma^{*b})^{\gamma}{}_{\mu} = i\epsilon^{ab}{}_{c}(\sigma^{*c})^{\beta}{}_{\mu}. \quad \text{(B.23)}$$

Os outros três termos de mesmo tipo resultam na mesma expressão, somando assim a unidade. Para um dos termos proporcionais à $(z-\omega)^{-2}$ temos em (B.20),

$$-\frac{1}{16}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*b})^{\nu}{}_{\rho}\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\gamma\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}} = \frac{1}{8}(\sigma^{*a})^{\beta}{}_{\gamma}(\sigma^{*b})^{\gamma}{}_{\beta} = \frac{1}{4}\delta^{ab}. \quad \text{(B.24)}$$

Observamos que caso $a \neq b$ podemos utilizar da última propriedade de matriz de Pauli para obter que tal termo é proporcional ao traço de qualquer matriz de Pauli, que é nulo, com $a = b$ tal produto torna-se a duas vezes a identidade, de forma que juntando os dois resultados, têm-se a OPE,

$$J^{a}(z)J^{b}(\omega) \sim \frac{1}{2}\frac{\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + i\epsilon^{ab}{}_{c}\frac{J^{c}(\omega)}{z-\omega}. \quad \text{(B.25)}$$

Para a OPE do tensor energia momento e a corrente J^a, note que a parte de T que depende apenas dos bósons não contribui para tal OPE, dado que J^3 é composto apenas por férmions. Assim,

$$T(z)J^{a}(\omega) = \frac{1}{8}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega). \quad \text{(B.26)}$$

O produto dos campos,

$$\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega) = \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega) - \frac{\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)$$
$$+ \frac{\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega) - \frac{\epsilon^{\beta\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega) - \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\beta\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^3} + \frac{\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^3}. \quad \text{(B.27)}$$

Veja que nos dois últimos termos combinado com os tensores antissimétricos e as matrizes de Pauli implicam que tais termos são proporcionais ao traço das matrizes de Pauli, que são todas nulas. Então expandimos os campos fermiônicos em primeira ordem,

$$\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\psi^{\rho\dot{D}}(\omega) \sim \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\psi^{\rho\dot{D}} - \frac{\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\psi^{\mu\dot{C}}$$
$$+ \frac{\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\rho\dot{D}} + \frac{\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\rho\dot{D}} - \frac{\epsilon^{\beta\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\mu\dot{C}} - \frac{\epsilon^{\beta\rho}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\mu\dot{C}}. \quad \text{(B.28)}$$

Retornando à expressão (B.26),

$$\begin{aligned} 8T(z)J^a(\omega) \sim{}& \frac{1}{z-\omega}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\epsilon_{\beta\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\rho\dot{D}} - \frac{1}{z-\omega}\epsilon_{\dot{C}\dot{B}}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\beta}\psi^{\mu\dot{C}} \\ &+ \frac{1}{(z-\omega)^2}\epsilon_{\dot{A}\dot{D}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\rho\dot{D}} + \frac{1}{z-\omega}\epsilon_{\dot{A}\dot{D}}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\alpha\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\rho}\psi^{\rho\dot{D}} \\ &- \frac{1}{(z-\omega)^2}\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\alpha}\psi^{\mu\dot{C}} - \frac{1}{z-\omega}\epsilon_{\dot{C}\dot{A}}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{*a})^{\nu}{}_{\alpha}\psi^{\mu\dot{C}}. \quad \text{(B.29)} \end{aligned}$$

Utilizando da anti-comutação entre os campos fermiônicos observa-se que o terceiro e quinto termos são iguais e formam J, já os termos restantes formam ∂J,

$$T(z)J^a(\omega) \sim \frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega} + \frac{J^a(\omega)}{(z-\omega)^2}. \quad \text{(B.30)}$$

Por fim, a OPE relacionada ao produto entre dois operadores energia momento é dada por,

$$T(z)T(\omega) = \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{CD}[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}[\partial X(\omega)]^{\dot{C}C}[\partial X(\omega)]^{\dot{D}D} \quad \text{(B.31)}$$
$$+ \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\partial\psi^{\nu\dot{D}}(\omega). \quad \text{(B.32)}$$

No produto dos campos bosônicos,

$$[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}[\partial X(\omega)]^{\dot{C}C}[\partial X(\omega)]^{\dot{D}D} = \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}[\partial X(\omega)]^{\dot{D}D}$$
$$+ \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AD}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}[\partial X(\omega)]^{\dot{C}C} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{BC}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(\omega)]^{\dot{D}D}$$
$$+ \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BD}}{(z-\omega)^2}[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(\omega)]^{\dot{C}C} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{BC}\epsilon^{AD}}{(z-\omega)^4} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^4}. \quad \text{(B.33)}$$

Realizando a expansão em $z=\omega$,

$$
\begin{aligned}
[\partial X(z)]^{\dot{A}A}[\partial X(z)]^{\dot{B}B}[\partial X(\omega)]^{\dot{C}C}[\partial X(\omega)]^{\dot{D}D} \\
&\sim \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{B}B}[\partial X]^{\dot{D}D} + \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{AC}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{B}B}[\partial X]^{\dot{D}D} \\
&+ \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AD}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{B}B}[\partial X]^{\dot{C}C} + \frac{\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{AD}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{B}B}[\partial X]^{\dot{C}C} \\
&+ \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{BC}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{D}D} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{BC}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{D}D} \\
&+ \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BD}}{(z-\omega)^2}[\partial X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{C}C} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BD}}{z-\omega}[\partial^2 X]^{\dot{A}A}[\partial X]^{\dot{C}C} \\
&+ \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{BC}\epsilon^{AD}}{(z-\omega)^4} + \frac{\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{AC}}{(z-\omega)^4}. \qquad \text{(B.34)}
\end{aligned}
$$

Para o produto dos campos fermiônicos,

$$
\begin{aligned}
&\psi^{\alpha\dot{A}}(z)\partial\psi^{\beta\dot{B}}(z)\psi^{\mu\dot{C}}(\omega)\partial\psi^{\nu\dot{D}}(\omega) \sim \frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\partial\psi^{\nu\dot{D}} + \frac{\epsilon^{\alpha\nu}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}}{(z-\omega)^2}\partial\psi^{\beta\dot{B}}\psi^{\mu\dot{C}} \\
&+ \frac{\epsilon^{\alpha\nu}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}}{z-\omega}\partial^2\psi^{\beta\dot{B}}\psi^{\mu\dot{C}} + \frac{\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^2}\psi^{\alpha\dot{A}}\partial\psi^{\nu\dot{D}} + \frac{\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{z-\omega}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\partial\psi^{\nu\dot{D}} - 2\frac{\epsilon^{\beta\nu}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^3}\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\mu\dot{C}} \\
&- 2\frac{\epsilon^{\beta\nu}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^2}\partial\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\mu\dot{C}} - \frac{\epsilon^{\beta\nu}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{z-\omega}\partial^2\psi^{\alpha\dot{A}}\psi^{\mu\dot{C}} + 2\frac{\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\beta\nu}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}}{(z-\omega)^4} - \frac{\epsilon^{\alpha\nu}\epsilon^{\beta\mu}\epsilon^{\dot{A}\dot{D}}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}}{(z-\omega)^4}. \qquad \text{(B.35)}
\end{aligned}
$$

Assim, realizando as contrações com os tensores anti-simétricos e somando ambas contribuições,

$$T(z)T(\omega) \sim \frac{3}{(z-\omega)^4} + 2\frac{T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega}. \qquad \text{(B.36)}$$

B.2 ÁLGEBRA DE MODOS

Temos os modos das correntes de simétria do tensor energia momento L_n, corrente de supersimetria $G_n^{\alpha A}$ e simetria R J_n^a, todos centrados em $z=0$,

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1}T(z), \quad J_n^a = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J^a(z), \quad G_n^{\alpha A} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1/2}G^{\alpha A}(z), \qquad \text{(B.37)}$$

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-2-n}, \quad J^a(z) = \sum_n J_n^a z^{-1-n}, \quad G^{\alpha A}(z) = \sum_n G_n^{\alpha A} z^{-3/2-n}. \qquad \text{(B.38)}$$

Pela quantização radial, definimos o comutador entre os modos A e B em (2.85) por

$$[A,B] = \oint_0 d\omega \oint_\omega dz a(z)b(\omega). \qquad \text{(B.39)}$$

Em que utilizaremos das OPE's obtidas anteriormente. Para o comutador dos modos de $T(z)$ e $G^{\alpha A}(\omega)$ temos,

$$\left[L_m, G_n^{\alpha A}\right] = \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^{n+1/2}\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1}\left(\frac{\frac{3}{2}G^{\alpha A}(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial G^{\alpha A}(\omega)}{z-\omega}\right). \qquad \text{(B.40)}$$

Com o binômio de Newton,

$$\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i}\sum_{k=0}^{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix}(z-\omega)^k\omega^{m+1-k}\left(\frac{\frac{3}{2}G^{\alpha A}(\omega)}{(z-\omega)^2}+\frac{\partial G^{\alpha A}(\omega)}{z-\omega}\right)$$
$$=\omega^{m+1}\partial G^{\alpha A}(\omega)+\frac{3}{2}(m+1)\omega^m G^{\alpha A}(\omega). \tag{B.41}$$

Na segunda integral,

$$\begin{aligned}\left[L_m, G_n^{\alpha A}\right] &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\sum_k G_k^{\alpha A}\left((-3/2-k)+\frac{3}{2}(m+1)\right)\omega^{m+n-k-1}\\ &= G_{m+n}^{\alpha A}\left(\frac{m}{2}-n\right).\end{aligned} \tag{B.42}$$

Para o comutador entre L e J,

$$\begin{aligned}[L_m, J_n^a] &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^n\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}\left(\frac{J^a(\omega)}{(z-\omega)^2}+\frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega}\right)\\ &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\left(\omega^{1+n+m}\partial J^a(\omega)+(m+1)\omega^{n+m}J^a(\omega)\right)\\ &= -\oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\sum_k J_k^a\omega^{m+n-k-1}(k-m)\\ &= -nJ_{m+n}^a.\end{aligned} \tag{B.43}$$

Para o comutador entre as correntes da simetria R,

$$\begin{aligned}\left[J_m^a, J_n^b\right] &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^n\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i}z^m\left(\frac{1}{2}\frac{\delta^{ab}}{(z-\omega)^2}+\frac{i\epsilon_c^{ab}J^c(\omega)}{z-\omega}\right)\\ &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\left(\omega^{n+m}i\epsilon_c^{ab}J^c(\omega)+\frac{1}{2}m\omega^{n+m-1}\delta^{ab}\right)\\ &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\sum_k i\epsilon_c^{ab}J_k^c\omega^{m+n-k-1}+\frac{m}{2}\delta_{m+n,0}\delta^{ab}\\ &= \frac{m}{2}\delta_{m+n,0}\delta^{ab}+i\epsilon_c^{ab}J_{m+n}^c.\end{aligned} \tag{B.44}$$

Análogamente, o comutador entre J e G,

$$\begin{aligned}\left[J_m^a, G_n^{\alpha A}\right] &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^{n+1/2}\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i}z^m\left(\frac{1}{2}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\beta\frac{G^{\beta A}(\omega)}{z-\omega}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\beta\oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}G^{\beta A}(\omega)\omega^{n+m+1/2}\\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\beta\oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\sum_k G_k^{\beta A}\omega^{m+n-k-1}\\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\beta G_{m+n}^{\beta A}.\end{aligned} \tag{B.45}$$

Por fim, considerando que o operador de supersimetria é composto por férmions, devemos considerar o anticomutador dos modos G,

$$\begin{aligned}\left\{G_m^{\alpha A}, G_n^{\beta B}\right\} &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\omega^{n+1/2}\oint_\omega \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1/2}\Bigg(-2\frac{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}}{(z-\omega)^3} + \epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\gamma \frac{2J^a(\omega)}{(z-\omega)^2} \\ &\qquad + \epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\gamma \frac{\partial J^a(\omega)}{z-\omega} - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}\frac{T(\omega)}{z-\omega}\Bigg) \\ &= \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i}\Bigg[\left(\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\gamma \partial J^a(\omega) - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}T(\omega)\right)\omega^{m+n+1} \\ &+ 2(m+1/2)\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\gamma J^a(\omega)\omega^{m+n} - (m^2-1/4)\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}\omega^{m+n-1}\Bigg] \\ &= (m-n)\epsilon^{AB}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{*a})^\alpha{}_\gamma J^a_{m+n} - \epsilon^{AB}\epsilon^{\alpha\beta}L_{m+n} - (m^2-1/4)\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}\delta_{m+n,0}.\end{aligned} \tag{B.46}$$

B.2.1 Modos Frácionários

Aqui mostraremos apenas os cálculos referentes ao comutador entre os modos do tensor energia momento. O procedimento pode ser realizado de forma análoga para os outros, porém veremos que o resultado da álgebra de modos fracionários é a mesma da já obtida anteriormente apenas considerando a mudança na carga central $c = 6n$. Os modos fracionários são definidos por

$$\mathcal{O}_{\frac{m}{n}}(z) = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{O}^{(k)}(z)e^{2\pi i\frac{m}{n}(k-1)}z^{h+\frac{m}{n}-1}, \tag{B.47}$$

em que escolhemos o contorno ao redor de $z = 0$ e h é a dimensão conforme do campo $\mathcal{O}$. O mapeamento do plano complexo no espaço de cobertura é dado localmente por $z = bt^n$. Considerando que o tensor energia momento não se transforma como um campo primário, temos que a partir o mapeamento $z \to z(t)$ leva à transformação do tensor energia momento por

$$T'(z) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-2}[T(t) - \frac{c}{12}\{z(t), t\}], \tag{B.48}$$

em que $\{z, t\}$ define o Schwarziano,

$$\{z,t\} = \dot{z}^{-1}\dddot{z} - \frac{3}{2}\dot{z}^{-2}(\ddot{z})^2. \qquad \dot{z} = \frac{dz}{dt} \tag{B.49}$$

Com o mapeamento temos na cobertura o gerador do tensor energia momento,

$$L_{\frac{k}{n}}\sigma_n \to \oint \frac{dt}{2\pi i}z(t)^{\frac{k}{n}+1}\left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1}\left[T(t) - \frac{c}{12}\{z(t),t\}\right]. \tag{B.50}$$

Veja que como de praxe, o operador de twist é mapeado na identidade no espaço de cobertura. Portanto, para o comutador dos geradores l temos,

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] \to \oint_0 \frac{dt_2}{2\pi i} \oint_{t_1=t_2} \frac{dt_1}{2\pi i} z(t_1)^{\frac{k}{n}+1} z(t_2)^{\frac{k'}{n}+1} \dot{z_1}^{-1} \dot{z_2}^{-1} \times \left[T(t_1) - \frac{c}{12}\{z(t_1), t_1\}\right]\left[T(t_2) - \frac{c}{12}\{z(t_2), t_2\}\right]. \quad \text{(B.51)}$$

Por simplificação definimos $dz/dt_1 = \dot{z_1}$. Veja que no mapeamento temos $z(t) \propto t^n$, de forma que o Schawziano possui polo de no máximo grau 2. Assim, com $k > 0$ esse termo é não singular e podemos ignorá-lo. Portanto, com a OPE entre os tensores energia momento,

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] \to \oint \frac{dt_2}{2\pi i} \oint_{t_1=t_2} \frac{dt_1}{2\pi i} z(t_1)^{\frac{k}{n}+1} z(t_2)^{\frac{k'}{n}+1} \dot{z_1}^{-1} \dot{z_2}^{-1} \left[\frac{c/2}{t_{12}^4} + \frac{2T(t_2)}{t_{12}^2} + \frac{\partial T(t_2)}{t_{12}}\right]. \quad \text{(B.52)}$$

Pelo teorema dos resíduos, com um polo de grau n,

$$\oint_{t=t_2} \frac{dt}{2\pi i} f(t) = \text{Res}(f, t_2) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t \to t_2} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t-t_2)^n f(t)], \quad \text{(B.53)}$$

então a integral em t_1,

$$\oint_{t_1=t_2} \frac{dt_1}{2\pi i} \left[\frac{c/2}{t_{12}^4} + \frac{2T(t_2)}{t_{12}^2} + \frac{\partial T(t_2)}{t_{12}}\right] f(t_1) = \frac{c}{12}\frac{d^3}{dt_2{}^3} f(t_2) + 2T(t_2)\frac{d}{dt_2} f(t_2) + \partial T(t_2) f(t_2), \quad \text{(B.54)}$$

em que definimos

$$f(t_1) = z(t_1)^{\frac{k}{n}+1} \dot{z_1}^{-1}. \quad \text{(B.55)}$$

De forma que temos as derivadas,

$$\dot{f} = \left(\frac{k}{n} + 1\right) z^{\frac{k}{n}} - z^{\frac{k}{n}+1} \dot{z}^{-2} \ddot{z}, \quad \text{(B.56)}$$

$$\dddot{f} = \left(\frac{k^2}{n^2} - 1\right) \frac{k}{n} z^{\frac{k}{n}-2} \dot{z}^2 - 2\left(\frac{k}{n} + 1\right) z^{\frac{k}{n}} \dot{z}^{-1} \dddot{z} + 6 z^{\frac{k}{n}+1} \dot{z}^{-3} \ddot{z} \dddot{z} - z^{\frac{k}{n}+1} \dot{z}^{-2} \ddddot{z} + 3\left(\frac{k}{n} + 1\right) z^{\frac{k}{n}} \dot{z}^{-2} (\ddot{z})^2 - 6 z^{\frac{k}{n}+1} (\ddot{z})^3 \dot{z}^{-4}. \quad \text{(B.57)}$$

Precisamos realizar a integração em t_2, que vamos denotar por t já que não há margem pra confusão. Antes de juntar todos os termos façamos primeiramente a integração por partes do termo $\partial T(t)$,

$$\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2} \dot{z}^{-2} \partial T(t) = 2 \oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2} \dot{z}^{-3} \ddot{z} T(t) - (\alpha + 2) \oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1} \dot{z}^{-1} T(t). \quad \text{(B.58)}$$

Em que o termo integrado pela integração por partes é nulo pois temos uma curva fechada. Além disso definimos $\alpha = \frac{k+k'}{n}$. Voltando à integral inicial,

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] \to \left(\frac{k-k'}{n}\right) \oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1} \dot{z}^{-1} T(t) + \frac{c}{12} \oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\frac{k'}{n}+1} \dot{z}^{-1} \frac{d^3}{dt_2{}^3} f(t). \tag{B.59}$$

Trabalhemos em um primeiro momento com a segunda integral com a derivada tripla, para este teremos

$$\begin{aligned} I = \left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{k}{n}\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha-1}\dot{z} - 2\left(\frac{k}{n}+1\right)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-2}\dddot{z} + 6\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-4}\ddot{z}\,\ddot{z} \\ - \oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-3}\dddot{z} + 3\left(\frac{k}{n}+1\right)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-3}(\ddot{z})^2 - 6\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-5}(\ddot{z})^3. \end{aligned} \tag{B.60}$$

Para todas as integrais utilizaremos o método de integral por partes, lembrando que o termo integrado sobre a curva fechada será nulo, temos assim,

$$\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-3}\dddot{z} = -(\alpha+2)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-2}\dddot{z} + 3\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-4}\ddot{z}\,\ddot{z}, \tag{B.61}$$

$$\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-4}\ddot{z}\,\ddot{z} = -\frac{\alpha+2}{2}\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-3}(\ddot{z})^2 + 2\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+2}\dot{z}^{-5}(\ddot{z})^3. \tag{B.62}$$

Substituindo essas integrais em (B.60),

$$I = \left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{k}{n}\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha-1}\dot{z} - \left(\frac{k-k'}{n}\right)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-2}\dddot{z} + \frac{3}{2}\left(\frac{k-k'}{n}\right)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\alpha+1}\dot{z}^{-3}(\ddot{z})^2. \tag{B.63}$$

Agora perceba que com a definição do Schwarziano temos justamente que os dois últimos termos em I compões a derivada Schwarziana. Assim, juntando todos os termos em (B.59) temos para o comutador,

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] \to \left(\frac{k-k'}{n}\right)\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\frac{k+k'}{n}+1}\dot{z}^{-1}\left[T(t) - \frac{c}{12}\{z(t),t\}\right] + \frac{c}{12}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{k}{n}\oint \frac{dt}{2\pi i} z^{\frac{k+k'}{n}-1}\frac{dz}{dt}. \tag{B.64}$$

Veja que o primeiro termo é justamente o gerador energia momento na cobertura para o índice apropriado, já o segundo termo é uma derivada total que é diferente de zero apenas quando $k + k' = 0$, com a definição do mapeamento $z \propto t^n$ vemos que o polo simples é dado por n/t e portanto, temos o resultado

$$\left[L_{\frac{k}{n}}, L_{\frac{k'}{n}}\right] = \left(\frac{k-k'}{n}\right) l_{\frac{k+k'}{n}} + \frac{c.n}{12}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{k}{n}\delta_{k+k',0}. \tag{B.65}$$

B.3 FUNÇÃO DE 4 PONTOS

Demonstraremos explicitamente que a função de quatro pontos, diferente dos casos com dois e três pontos, não possui seu formato funcional fixado pela teoria. A transformação conforme dos campos primários ϕ_i com peso conforme Δ_i em d dimensões é dada por ,

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \left|\frac{dx_1'}{dx_1}\right|^{-\frac{\Delta_1}{d}}\left|\frac{dx_2'}{dx_2}\right|^{-\frac{\Delta_2}{d}}\left|\frac{dx_3'}{dx_3}\right|^{-\frac{\Delta_3}{d}}\left|\frac{dx_4'}{dx_4}\right|^{-\frac{\Delta_4}{d}}\langle\phi_1'(x_1')\phi_2'(x_2{}')\phi_3'(x_3')\phi_4'(x_4{}')\rangle. \tag{B.66}$$

As transformações rotação/translação requerem que a função de correlação seja um funcional da diferença do modulo dos pontos x_i,

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \frac{f(u)}{x_{12}{}^a x_{13}{}^b x_{14}{}^c x_{23}{}^d x_{24}{}^e x_{34}{}^f}. \tag{B.67}$$

Por simplificação denotaremos $|x_i - x_j| \equiv x_{ij}$. Na função de correlação $f(u)$ representa funções arbitrarias dos invariantes conformes de 4 pontos, e pela condição de simetria de escala, os pesos conformes de cada campo satisfazem

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = a + b + c + d + e + f. \tag{B.68}$$

No Capítulo 2 definimos a transformação conforme especial de forma que

$$\left|\frac{dx'}{dx}\right| = \frac{1}{(1 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + b^2\mathbf{x}^2)^d} \equiv \alpha^{-d}. \tag{B.69}$$

Assim, temos a transformação da função de correlação,

$$\begin{aligned}\langle\phi_1'(x_1')\phi_2'(x_2')\phi_3'(x_3')\phi_4'(x_4')\rangle &= \alpha_1{}^{\Delta_1}\alpha_2{}^{\Delta_2}\alpha_3{}^{\Delta_3}\alpha_4{}^{\Delta_4}\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle \\ &= \alpha_1{}^{\Delta_1}\alpha_2{}^{\Delta_2}\alpha_3{}^{\Delta_3}\alpha_4{}^{\Delta_4}\frac{f(u)}{x_{12}{}^a x_{13}{}^b x_{14}{}^c x_{23}{}^d x_{24}{}^e x_{34}{}^f}\end{aligned} \tag{B.70}$$

Devemos então verificar as condições para que a função de correlação seja invariante sob a transformação conforme especial. Realizando a transformação explicitamente [5]

$$\begin{aligned}\langle\phi_1'(x_1')\phi_2'(x_2')\phi_3'(x_3')\phi_4'(x_4')\rangle &= \frac{f(u)}{x_{12}'{}^a x_{13}'{}^b x_{14}'{}^c x_{23}'{}^d x_{24}'{}^e x_{34}'{}^f} \\ &= \frac{f(u)}{x_{12}{}^a x_{13}{}^b x_{14}{}^c x_{23}{}^d x_{24}{}^e x_{34}{}^f}\alpha_1{}^{\frac{a}{2}}\alpha_2{}^{\frac{a}{2}}\alpha_1{}^{\frac{b}{2}}\alpha_3{}^{\frac{b}{2}}\alpha_1{}^{\frac{c}{2}}\alpha_4{}^{\frac{c}{2}}\alpha_2{}^{\frac{d}{2}}\alpha_3{}^{\frac{d}{2}}\alpha_2{}^{\frac{e}{2}}\alpha_4{}^{\frac{e}{2}}\alpha_3{}^{\frac{f}{2}}\alpha_4{}^{\frac{f}{2}}\end{aligned} \tag{B.71}$$

Assim, comparando as expressões (B.70) e (B.71) temos as condições sobre os $\Delta_i's$,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{1}{2}(a+b+c) \;\; ; \;\; \Delta_2 = \frac{1}{2}(a+d+e) \\ \Delta_3 &= \frac{1}{2}(b+d+f) \;\; ; \;\; \Delta_4 = \frac{1}{2}(c+e+f)\end{aligned} \tag{B.72}$$

Com a condição (B.68) obtemos,

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 + f \equiv \Delta_a + f \tag{B.73a}$$

$$b = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + e \equiv \Delta_b + e \tag{B.73b}$$

$$c = 2\Delta_4 - e - f \equiv \Delta_c - e - f \tag{B.73c}$$

$$d = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - e - f \equiv \Delta_d - e - f \tag{B.73d}$$

Retornando à expressão para a função de correlação (B.67),

$$\begin{aligned}\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle &= f(u){x_{12}}^{-\Delta_a}{x_{13}}^{-\Delta_b}{x_{14}}^{-\Delta_c}{x_{23}}^{-\Delta_d}\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{14}x_{23}}\right)^{-f-e}\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}\right)^{e} \\ &= f(u){x_{12}}^{-\Delta_a}{x_{13}}^{-\Delta_b}{x_{14}}^{-\Delta_c}{x_{23}}^{-\Delta_d}\end{aligned} \tag{B.74}$$

Veja que as razões são invariantes e podem ser englobados em $f(u)$. Defina $\Delta_{ij} = \frac{\Delta}{3} - \Delta_i - \Delta_j$. Assim,

$$-\Delta_a = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \Delta_{12} - \Delta_{34} \implies {x_{12}}^{-\Delta_a} = {x_{12}}^{\Delta_{12}}{x_{12}}^{-\Delta_{34}}, \tag{B.75a}$$

$$-\Delta_b = -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 = \Delta_{13} - \Delta_{24} \implies {x_{13}}^{-\Delta_b} = {x_{13}}^{\Delta_{13}}{x_{13}}^{-\Delta_{24}}, \tag{B.75b}$$

$$-\Delta_c = -2\Delta_4 = \Delta_{14} - \frac{\Delta}{3} + \Delta_1 - \Delta_4, \tag{B.75c}$$

$$-\Delta_d = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 = \Delta_{23} - \frac{\Delta}{3} + \Delta_1 - \Delta_4. \tag{B.75d}$$

Além disso, ${x_{24}}^0 = {x_{24}}^{\Delta_{24}}{x_{24}}^{-\Delta_{24}}$ e ${x_{34}}^0 = {x_{34}}^{\Delta_{34}}{x_{34}}^{-\Delta_{34}}$. Dessa forma obtemos o resultado final,

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \mathcal{F}(u)\prod_{i<j}{x_{ij}}^{\Delta_{ij}}. \tag{B.76}$$

Novamente, no cálculo explicito da ultima expressão surgem razões que se dão por invariantes, que compõem uma única função $\mathcal{F}$.