



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO MIGUEL NEVES SILVA

**IMPLICAÇÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH NA ANÁLISE DA MOBILIZAÇÃO
DE ESCOLHAS RACIONAIS EM SITUAÇÕES DE TEORIA DOS JOGOS NO NONO
ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA**

Caruaru

2025

PEDRO MIGUEL NEVES SILVA

**IMPLICAÇÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH NA ANÁLISE DA MOBILIZAÇÃO
DE ESCOLHAS RACIONAIS EM SITUAÇÕES DE TEORIA DOS JOGOS NO NONO
ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em matemática do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel/licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino
(Matemática).

Orientador (a): Prof.^a Dra. Josinalva Estacio Menezes

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Pedro Miguel Neves.

Implicações do equilíbrio de Nash na análise da mobilização de escolhas racionais em situações de teoria dos jogos no nono ano de uma escola pública / Pedro Miguel Neves Silva. - Caruaru, 2025.

46 p. : il., tab.

Orientador(a): Josinalva Estacio Menezes

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

Inclui referências, apêndices.

1. Teoria dos jogos. 2. Matemática.. 3. Escolhas racionais. 4. Equilíbrio de Nash. 5. Educação matemática. 6. Adaptação de jogos. I. Menezes, Josinalva Estacio . (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

PEDRO MIGUEL NEVES SILVA

**IMPLICAÇÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH NA ANÁLISE DA MOBILIZAÇÃO
DE ESCOLHAS RACIONAIS EM SITUAÇÕES DE TEORIA DOS JOGOS NO NONO
ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso de
Licenciatura em matemática do Campus
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para a
obtenção do grau de licenciado em
Matemática.

Aprovada em: 13/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Josinalva Estacio Menezes (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Ronald de Santana da Silva (Examinador Externo)
Instituto Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho à minha esposa que me ensinou o amor e o amar, e ao meu filho, que com apenas sete meses já me ensinou mais do que eu poderei ensinar em anos na sala de aula.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à minha esposa Camilla que me aguentou e por algum ritmo ainda entrou na minha vida para nunca mais sair, você é tudo de bom e todo mundo sabe disso mesmo que às vezes você não acredite, minha vida não seria a minha vida sem você, e isso seria de uma tristeza imensurável, você é o meu amor para sempre.

Ao meu filho, Miles Micael, por ter me ensinado muita coisa em tão pouco tempo, me ensinado a ser pai, pelos nossos momentos desde o primeiro dia que você nasceu, tendo como história de ninar os axiomas de Peano.

Ao meu pai, que sempre lutou para que eu tivesse a oportunidade que ele nunca teve de estudar e alcançar coisas que ele nunca pôde sonhar.

À minha mãe e aos meus irmãos, Felipe e Samuel, por sempre estarem lá por mim, mesmo com as brigas e discussões do dia a dia.

Ao grupo dos casas, “Matheuzin pei pei”, em especial a Alvaro, Lucas, Luiz, Ronaldo e Rodrygo pelas amizades que seguem desde o maternal até a vida adulta.

Ao grupo do “fuxicos” que me acolheu durante o ensino médio, que nunca é uma fase fácil para ninguém.

À minha excelentíssima orientadora, professora Jôsinhalva, que sempre topou minhas loucuras e passou muitas e muitas horas discutindo estratégias de diferentes jogos, sempre me apresentando como “Esse é meu aluno Pedro, todo Pedro é sangue bom!”, por se dedicar tanto ao LOGAMES e me fazer ver onde eu me encaixo na pesquisa acadêmica, o seu entusiasmo e pensamento afiado são instigantes.

À professora Maria do Desterro, pela sua dedicação e carinho ímpar com a matemática, que me convenceu a ver a primeira aula de teoria dos números e me mostrou um mundo novo. Até hoje tenho saudades das noites de provas de Desterro, a senhora é um exemplo de dedicação e inteligência, que eu sou muito grato de ter conhecido durante o curso.

À professora Lidiane e ao professor Luan Danilo, por terem mostrado como a dedicação e o bom trabalho de um professor podem ser vistos de longe, para todos aqueles que mencionaram os seus nomes, sempre eram seguidos de elogios e sorrisos.

À professora Cristiane, que sempre mostrou muito conhecimento e de forma bem humorada, principalmente com foco na democratização daquele conhecimento para que o maior número de pessoas pudesse ter acesso a ele.

À professora Naralina, por ter acreditado em mim, e por ter me preparado para muitas das coisas que eu vim enfrentar pela frente no curso, durante uma das disciplinas mais difíceis para a minha experiência.

À professora Jamille, por ter ensinado com tanta paixão e domínio de conteúdo durante os primeiros períodos, com certeza até hoje me lembro das suas aulas quando alguém fala sobre Libâneo.

Ao LEMAPE, por ter sido o melhor lugar do CAA, sempre com aquele lugar aconchegante para jogar, estudar para a prova, surtar um pouco antes de voltar para a realidade, por todas as visitas, viagens, e todos os momentos passados no nosso cantinho preferido do campus.

A Lutero, o meu primeiro amigo durante a graduação, que nós nunca acreditávamos que chegaríamos aqui, então estamos formados e só espero o máximo de você, por todas as tardes estudando e as tardes procrastinando os estudos, meu percurso na UFPE não seria o mesmo sem você, eu sou uma pessoa melhor e um professor de matemática melhor por ter te conhecido.

A Malcolm, o meu rival e meu subprojeto pessoal de conclusão de curso, lembra que eu comentei que eu tentaria te ajudar a entender mais as pessoas? acredito que o Malcolm daquela época nem entenderia metade das situações que você já passou e se aperfeiçoou, mas nada disso fui eu quem fiz, foi tudo mérito seu. E você é o meu rival na matemática, vou ganhar de você na próxima vez.

A Juan, o amigo que sempre está lá por você e para você em todos os momentos, mesmo que algumas vezes eu tenha que puxar a sua orelha para você voltar a realidade, você é um excelente amigo que eu sou muito grato por ter conhecido, apesar de ser meu pato e não conseguir ganhar de mim em nenhum jogo que não tenha sorte.

À todas as inúmeras pessoas que não foram citadas que passaram pela minha vida, que eu já me ajudaram durante o curso(ou antes dele), seja sobre regras da ABNT, sobre matemática ou sobre a vida, sou muito grato a todos vocês.

Quero finalmente agradecer à matemática, que ocupa muitos dos meus pensamentos, desde muito antes que a moeda caiu cara e o curso de licenciatura foi decidido para mim, até quando eu acordo de manhã pensando na solução do problema que eu vi durante a semana que passou.

RESUMO

O trabalho busca entender quais as implicações do Equilíbrio de Nash na análise da mobilização de escolhas racionais em movimentos de jogos no nono ano de uma escola pública, levando para o enfoque a justificativa das escolhas do jogador e a análise das possibilidades diante da situação de um jogo, os alunos tiveram contato com situações de jogos de teoria dos jogos, como o dilema do prisioneiro e batalha dos sexos na sala de aula e depois responderam um questionário sobre o que os levou a escolherem as suas estratégias e de que forma aquilo foi pensado, que foi analisado durante a pesquisa. A pesquisa utiliza de artifícios da teoria dos jogos para analisar sobre a luz do Equilíbrio de Nash as escolhas racionais dos jogadores do nono ano de uma escola pública, que tiveram resultados positivos na visão dos alunos.

Palavras-chave: Teoria dos jogos; Equilíbrio de Nash; Escolhas racionais; Matemática.

ABSTRACT

The paper tries to understand what are the implications of the Nash Equilibrium in the analysis of the mobilization of rational choices in the ninth grade of a public school, taking to the center the justificative of the players choices and the analysis of the possibilities in the situation of the game, the students had faced the game theory games situations as the prisoners dilemma, battle of the sexes in the classroom and after that they answered a form from which they chose their strategies and how they arrived to them, that was analyzed during the paper. The research utilizes artifices from game theory, to analyze under the light of the Nash Equilibrium the rational choices from players in the ninth grade of a public school that had positive impacts in the student's opinions.

Keywords: Game theory; Nash Equilibrium; Rational choices; Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Matriz de recompensa – Forma de representação dos jogos que foram utilizados	26
Figura 2 –	Matriz de recompensa do jogo: Disputa da amizade	28
Figura 3 –	Matriz de recompensa do jogo Dilema da fofoca	29
Figura 4 –	Matriz de recompensa do Jogo da caça	30
Figura 5 –	Disputa da amizade com os equilíbrios de Nash destacados	37
Figura 6 –	Dilema da fofoca com o equilíbrio de Nash destacado	39
Figura 7 –	Jogo da caça com os equilíbrios de Nash destacados	40

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	13
2	JUSTIFICATIVA.....	14
3	OBJETIVOS.....	15
3.1	OBJETIVO GERAL.....	15
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
4	BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA TEORIA DOS JOGOS.....	16
5	TEOREMA DO MINIMAX X EQUILÍBRIO DE NASH.....	18
5.1	TEOREMA DO MINIMAX.....	18
5.2	EQUILÍBRIO DE NASH.....	18
5.3	CONFRONTO TEÓRICO: VANTAGENS E DESVANTAGENS.....	19
6	ELEMENTOS DE TEORIA DOS JOGOS.....	22
6.1	RACIONALIDADE EM PERSPECTIVA.....	22
6.2	JOGOS: COMENTÁRIOS E DEFINIÇÕES.....	23
6.2.1	Tipos de Jogos.....	23
6.2.1.1	Jogos Híbridos.....	23

6.2.1.2	Jogos Simultâneos.....	23
6.2.1.3	Jogos de informação simétrica e perfeita.....	24
6.2.1.4	Jogos simétricos.....	24
6.2.1.5	“Jogos de soma zero” versus “Jogos de soma não-zero.....	24
6.2.1.6	Jogos de rodada única.....	24
6.2.1.7	Jogos de ação discreta.....	25
6.3	ESTRATÉGIA.....	25
6.3.1	Estratégias puras e mistas.....	25
6.4	REPRESENTAÇÃO DOS JOGOS.....	25
7	JOGOS QUE FORAM UTILIZADOS NA PESQUISA.....	27
7.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÕES.....	27
7.2	PRIMEIRO JOGO: DISPUTA DA AMIZADE (ADAPTADO DE BATALHA DOS SEXOS).....	27
7.3	SEGUNDO JOGO: DILEMA DA FOFOCA (ADAPTADO DO DILEMA DO PRISIONEIRO)	28
7.4	TERCEIRO JOGO: JOGO DA CAÇA (ADAPTADO DO JOGO DA COLABORAÇÃO)	29
7.5	EQUILÍBRIO DE NASH RETOMADO.....	30
8	METODOLOGIA DA PESQUISA.....	33

8.1	QUESTIONÁRIO.....	34
9	ANÁLISE DE DADOS.....	36
9.1	PRIMEIRA QUESTÃO: “PARA VOCÊ, O QUE SERIA UMA ESTRATÉGIA MAIS VANTAJOSA O JOGO DISPUTA DA AMIZADE?”....	36
9.2	SEGUNDA QUESTÃO: “COMO A COOPERAÇÃO TRARIA MAIS SUCESSO OU MENOS SUCESSO PARA O GRUPO NOS JOGOS VIVENCIADOS?”.....	37
9.3	TERCEIRA QUESTÃO: “NO JOGO DILEMA DA FOFOCA, É MAIS VANTAJOSO PARA VOCÊ OS JOGADORES COOPERAREM OU NÃO COOPERAREM?”	38
9.4	QUARTA QUESTÃO: NO JOGO DA CAÇA, ENTRE CAÇAR SOZINHO E CAÇAR EM GRUPO, EXISTE UMA ESTRATÉGIA QUE É MELHOR QUE A OUTRA? SE SIM, EXPLIQUE O PORQUÊ DESSA ESTRATÉGIA SER A MELHOR”	39
9.5	QUINTA QUESTÃO: “QUAL DIFICULDADE VOCÊ SENTIU ENQUANTO JOGAVA OS JOGOS?”	41
9.6	SEXTA QUESTÃO: “VOCÊ GOSTARIA DE VIVENCIAR JOGOS DESSE TIPO NAS SUAS AULAS DE MATEMÁTICA? EM QUE VOCÊ ACHA QUE AJUDARIA VIVENCIAR ESSES JOGOS?”	41
10	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
	REFERÊNCIAS.....	44
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO.....	45

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As ideias que hoje formulam a conhecida teoria dos jogos, foram iniciadas muito antes das suas aplicações nas ciências sociais como uma matemática aplicada as situações, e apesar da teoria dos jogos ter se distanciado com o tempo da disciplina escolar matemática, a sua utilização em conjunto à educação matemática nos leva a pergunta “A Teoria dos Jogos apresenta potencial para tornar o ensino da Matemática mais participativo e despertar o interesse dos alunos em relação ao aprendizado desta disciplina?” (Kasper, 2017, p. 51).

Com a aplicação de jogos e a análise das escolhas racionais dos participantes, nós poderemos assim enxergar as implicações dos movimentos dos jogadores em cada momento, tendo uma forma de julgar e procurar justificativas por trás das jogadas.

“Graminho (2013) afirma que a Teoria dos Jogos é um estudo matemático de interações entre jogadores que buscam maximizar os ganhos ou minimizar as perdas de forma racional e conscientes de que as escolhas estratégicas de um, afetam as decisões estratégicas dos demais participantes.” (Kasper, 2017, p. 56).

Além do que já foi dito, é interessante analisar as estratégias dos jogadores à luz do Equilíbrio de Nash, que é uma visão objetiva dos jogos, pois mesmo que para alguns jogadores, perder seja preferível a empatar, e a outros jogadores o contrário.

O equilíbrio de Nash (que será abordado mais à frente) apresenta uma visão sobre o jogo, que tem valor para o raciocínio de que as estratégias dominantes são definidas e são de acordo com as preferencias individuais de cada jogador, sendo assim uma forma de nós conseguirmos visualizar a interação estratégica entre dois pares, que mesmo com estratégias diferentes conseguem entrar em um equilíbrio que seria desvantajoso para ambos os jogadores mudar as suas jogadas.

2 JUSTIFICATIVA

Numa visão mais pessoal, sempre gostei de jogos e seus desdobramentos, não apenas pelo momento de algazarra ou de êxtase que se tem quando alguém consegue alcançar o objetivo, mas também pelos desdobramentos que se dão a cada movimento, e a quantidade de possibilidades diferentes, que dependendo do jogo pode chegar a números astronômicos. A ideia de que cada jogo tem uma estratégia dominante, e que cada jogador vai analisar uma situação de forma diferente e chegar as vezes em resultados parecidos ou até mesmo resultados iguais, isso é como um meio de comunicação não ensinado: você pode não se comunicar com o outro jogador, mas pode ver nas suas jogadas, as suas estratégias e preferências, como em um jogador de xadrez que nunca faz uma jogada ofensiva, e outro que sempre faz jogadas ofensivas. Essas diferentes formas com o mesmo objetivo no jogo, sempre trazem à tona diferentes formas de pensar e diferentes problemas que não tínhamos cogitado antes.

Num âmbito acadêmico também é importante, eu considero que é um problema nós não estudarmos na área de educação matemática sobre teoria dos jogos, que foi uma área criada por um matemático (John von Neumann) e para ser aplicada em situações do dia a dia, como uma forma de estruturar situações interdependentes de dois ou mais jogadores e poder depois analisar de forma estruturada e racional as situações. Então, por esses motivos pesquisamos como os estudantes mobilizam as escolhas racionais em movimentos de jogos à luz do equilíbrio de Nash.

Acredito também que trabalhos que apliquem conceitos de teoria dos jogos na disciplina escolar de matemática sejam extremamente importantes, visto que nós não temos o costume de associar as duas áreas que foram tão intimamente correlacionadas no passado e hoje não tem mais uma ligação tão forte quanto fora criada e estruturada no passado.

3 OBJETIVOS

3.1 GERAL

Analisar como os estudantes mobilizam as escolhas racionais em movimentos de jogos à luz do equilíbrio de Nash.

3.2 ESPECÍFICOS

Realizar uma pesquisa bibliográfica sobre o Equilíbrio de Nash e jogos que empregam escolhas racionais

Selecionar três jogos de lógica, estratégia pura e de informações assimétrica e adaptá-los para o contexto de alunos do nono ano do ensino fundamental para análise.

Convidar um grupo de alunos para participar de algumas sessões de jogos em dupla.

Aplicar os jogos na sessão com um relatório pós as sessões de jogos.

Analisar os resultados das sessões de jogos à luz da teoria dos jogos e do Equilíbrio de Nash.

4 BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA TEORIA DOS JOGOS

A história da teoria dos jogos é de grande relevância para um trabalho que busca compreender a utilidade da sua utilização na sala de aula.

A Teoria dos Jogos teve início em 1920 com os estudos de John Von Neumann (1903-1957) para desenvolver uma abordagem científica que pudesse ser utilizada em uma partida de pôquer. Em seus estudos Neumann percebeu que as estratégias aplicadas neste jogo poderiam ser utilizadas também no mundo dos negócios. Nascido na Hungria, emigrou para os Estados Unidos na década de 1930. Em 1928 publicou “*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*”, *Mathematische Annalen*, onde mostra que jogos de soma-zero (onde há um perdedor sempre que há um vencedor) tem solução determinada por técnicas matemáticas (Pereira, 2014, p. 12).

A teoria dos jogos é uma área recente na matemática, que estuda abordagens científicas para a interpretação de jogos, ou situações em que vários agentes, que são chamados jogadores se interrelacionam, e notando como rapidamente as ideias iniciais da teoria dos jogos foi utilizada para a interpretação de problemas reais, modelados a partir de problemas matemáticos que originaram de jogos e suas implicações.

John Von Neumann é considerado o pai da teoria dos jogos, apesar de ter se inspirado no matemático francês Antoine Cournot que estudou o princípio matemático da riqueza como uma situação de duopólio, utilizando várias ideias que foram base para formalização de Von Neumann, que trazia ferramentas poderosas, como a ideia de que qualquer jogo de soma zero, tem solução, e o teorema do Minimax.

O próximo grande momento para a história da teoria dos jogos é muito provavelmente a evolução de alguns conceitos trazidos por Von Neumann, por meio de Nash

Era necessário ferramentas teóricas mais abrangentes que fossem capazes de analisar outros modelos de interação estratégica. Essas ferramentas surgiram a partir de 1950 com a contribuição do matemático John F. Nash Jr, do economista John C. Harsanyi e do matemático e economista Reinhard Selten, que possibilitaram a análise de uma maior variedade de modelos de interação. (Pereira, 2014, p14).

Principalmente para a pesquisa, nós temos o equilíbrio de Nash, que de certa forma é o conceito mais conhecido sobre a teoria dos jogos, que representa as soluções de um jogo como um tipo de acordo entre os dois jogadores, e é bem mais abrangente, se o teorema do Minimax era proposto apenas para jogos

de soma zero com dois jogadores, o equilíbrio de Nash por outro lado é a solução geral desses jogos, como realmente um ponto de equilíbrio.

5 TEOREMA DO MINIMAX X EQUILÍBRIO DE NASH

5.1 TEOREMA DO MINIMAX

Acerca do teorema do Minimax, que teve origem como já comentado por John Von Neumann que é considerado o pai da teoria dos jogos como conhecemos hoje.

Segundo este teorema, um jogador que se encontra diante de uma decisão que fará o adversário ganhar ou empatar, preferirá levá-lo ao empate. Este princípio é exclusivo e útil para compreender jogos de "Soma Zero", nos quais a cooperação é bastante improvável, e no qual o ganho de uma parte pressupõe a derrota da outra. (Graminho, 2013, p.58).

Como já dito, o princípio do Minimax, ou teorema do Minimax é exclusivo para os jogos de soma zero, ou seja, aqueles jogos que a perda de um jogador é o ganho do outro, e também somente para jogos de dois jogadores, apesar de seu alcance mais específico no contexto de jogos, o teorema do Minimax é extremamente conhecido e discutido em jogos de tabuleiro ou jogos de carta, como sinônimo da melhor estratégia possível, ou a melhor sequência de jogadas. A demonstração para o teorema do Minimax é considerada o início da teoria dos jogos, sem ela é razoável pensar que não haveria a revolução que veio decorrente do estudo da teoria dos jogos nos âmbitos da matemática e principalmente da economia.

Em definição, podemos interpretar o teorema do Minimax como uma igualdade, em que dada as devidas condições, como já comentadas, o teorema de forma simplificada pode ser tratado como a igualdade entre a menor das perdas e o maior dos ganhos, isto é, a jogada que mais ganha em um jogo, é a mesma que menos perde, isso parece óbvio, mas não é sempre o caso, pode-se notar em situações em que pessoas tem preferências diferentes, o ganho de uma pessoa, não necessariamente é o ganho da outra.

Essa forte descoberta é a base de muitos estudos iniciais, e ainda é muito utilizada em cursos de teoria dos jogos até hoje, pois é extremamente intuitivo e utilizável em situações do dia a dia.

5.2 EQUILÍBRIO DE NASH

Vindo como uma evolução direta do teorema do Minimax, por John Nash, o equilíbrio de Nash é uma generalização para jogos com dois ou mais jogadores, com jogos de soma zero e soma não zero, coisa que não era antes possível apenas com o teorema do Minimax.

Nash definiu o equilíbrio como uma situação em que nenhum jogador poderia melhorar seu ganho escolhendo uma outra estratégia disponível. Provou que, para uma determinada categoria muito ampla de jogos com qualquer número de jogadores, em que são permitidas estratégias mistas, existe pelo menos um ponto de equilíbrio, e que embora pudesse haver jogos em que as estratégias puras não apontassem para este ponto, o recurso da mistura de estratégia sempre produziria um novo ponto de equilíbrio em jogos finitos. (Costa, 2005, p 7).

“O Equilíbrio de Nash ou solução estratégica de um jogo ocorre quando, entre todas as estratégias disponíveis para os jogadores, é escolhida a melhor opção possível dada à resposta de todos os outros jogadores.” (Camara, 2011, p.47).

Nós podemos observar o equilíbrio de Nash como uma forma de razão, que ambos os jogadores vão chegar, de forma independente, sendo os mesmos jogadores racionais, ou como o próprio nome sugere, um equilíbrio, aquele que se qualquer jogador mudar a sua estratégia, vai ter uma recompensa pior do que se tivesse jogado com a sua estratégia inicial. Um jogo pode ter mais de um equilíbrio de Nash, e com diferentes valores, vamos falar mais sobre os mesmos quando os jogos forem apresentados.

5.3 CONFRONTO TEÓRICO: VANTAGENS E DESVANTAGENS

Uma questão importante a se levantar quando uma pesquisa como essa é proposta é como pode ser feita a escolha, e como deve ser justificada a escolha sobre qual teoria deve ser levada adiante para a formulação da metodologia, apesar de parecer uma escolha simples, visto que o equilíbrio de Nash é mais abrangente e incorpora também dentro de si o teorema do Minimax, não é necessariamente uma escolha binária, o teorema do Minimax por sua simplicidade traz vantagens como o maior arcabouço de pesquisas científicas, que quando se tratam do ensino de matemática por meio da teoria dos jogos é extremamente escassa, também traz a possibilidade de uma explicação mais

robusta matematicamente, com demonstrações acessíveis para um trabalho que não queira focar especificamente só nisso.

Por outro lado, o equilíbrio de Nash aparenta ser bem mais simples de ser defendido, pois os seus pontos positivos são mais claros para o leitor, apesar disso, acho importante citar alguns dos motivos pelos quais o equilíbrio de Nash foi escolhido para a nossa análise.

Primeiramente a abrangência do conceito, que já foi antes comentada, apesar de perder um pouco da simplicidade do teorema do Minimax. Podemos notar que em alguns jogos como o jogo da confiança que veremos a seguir, algumas estratégias não levam a maneira otimizada de jogar, mas ainda nos traz informações importantes para a pesquisa, e por último, pela forma que os jogos seriam aplicados na sala de aula, com dúvidas dos alunos, e exemplos para a explicação e contextualização dos jogos, os jogos foram aplicados mais de uma vez, o que interfere diretamente nas estratégias e ideias dos jogadores participantes, sendo assim, somente analisar a função de recompensa dos jogadores durante X partidas jogadas com um X arbitrário não seria representativo de uma estratégia geral ou solucionada de um jogo, como uma partida de jogo da velha, que ao ser jogada pela primeira vez um dos jogadores pode perder por falta de atenção, mas ao ser jogado por mais vezes, os jogadores poderiam chegar em vários empates, afetando diretamente o resultado do jogo.

¹Se os jogadores comessem jogando uma sequência de estratégias que não são um equilíbrio de Nash, algum dos dois jogadores iria descobrir que poderia jogar melhor, se ela mudar a escolha de estratégia e ainda não estiver em um equilíbrio de Nash, mais alguém vai querer mudar a sua estratégia. Esse processo de tentativa e erro continuaria até o momento em que fosse alcançado um equilíbrio de Nash e aí ninguém teria o incentivo de mudar as suas escolhas de estratégia. Essa explicação é persuasiva, mas não completamente sem falhas, pois não existe garantia que esse processo iria levar a uma situação estável. Mas, é fácil notar situações em que esse processo sim levaria. (Dutta, 1999, p.65, tradução nossa.)

¹ If players started by playing a strategy vector that is not a Nash equilibrium, somebody would discover that she could do better. If she changes her strategy choice, and we are still not in a Nash equilibrium, somebody else might want to change his strategy. This process of trial and error would go on till such time as we reach a Nash equilibrium and then nobody has the incentive to change her strategy choice. This reasoning is persuasive but not entirely correct because there is no guarantee that this process would ever lead to a stable situation. Moreover, it is easy to construct examples in which this process could. (Dutta, 1999, p.65).

Essa foi a ideia inicial de como o processo seria feito, como o conceito de teoria dos jogos seria novo para a maioria dos alunos, eles precisariam de tempo e além disso, jogatina, para que pudessem desenvolver estratégias e dentre essas estratégias, desenvolver um caminho que levasse a uma maior recompensa, para um jogador ou ambos, dependendo de cada jogo.

6 ELEMENTOS DE TEORIA DOS JOGOS:

6.1 RACIONALIDADE EM PERSPECTIVA

Qual a diferença entre um computador que escolhe semi-aleatoriamente as estratégias diferentes e um ser humano com conhecimento de teoria dos jogos e um raciocínio dedutivo lógico?

O indivíduo “racional”, segundo Von Neumann e Morgenstern (1944), é aquele que busca obter o melhor resultado, considerando sua maior utilidade e que o outro jogador também é racional e da mesma forma buscará maximizar seu próprio resultado. (Graminho, 2013, p.39).

O segundo é considerado um indivíduo racional é aquele que tem um objetivo bem definido, e níveis de “felicidade” chamada na teoria dos jogos como recompensa para cada um dos resultados possíveis, é justo afirmar que em um jogo de xadrez, um jogador prefira ganhar a perder e prefira empatar a perder e prefira ganhar a empatar, é possível então afirmar uma ordem de recompensa, com vitória acima de empate acima de derrota, para os jogos que nós vamos avaliar, isso é suficiente, porém existem também situações que as preferências são interdependentes entre os jogadores.

A teoria dos jogos procura entender como os jogadores (sejam eles indivíduos, empresas, organização, países etc.) tomam suas decisões em situações de interação estratégicas. Em outras palavras a teoria dos jogos visa explicar como esses jogadores fazem as suas escolhas em situações de interação estratégica. Para estudarmos como os jogadores tomam as suas decisões, temos de considerar as preferências desses jogadores, pois essas preferências é que irão nortear as escolhas dos jogadores. Utilizaremos aqui a **teoria da escolha racional**, ou seja, a teoria que parte das preferências dos jogadores para entender suas escolhas, assumindo como um princípio básico a ideia de que os jogadores são racionais. (Fiani, 2009, p. 23).

É interessante analisar e colocar em perspectiva a teoria da escolha racional, que é aquela que justifica as escolhas dos jogadores, contextualmente, independentemente de como é que antes de sabermos as preferências elas eram aparentemente erradas, ou irracionais, mas ao justificarmos que as escolhas de cada jogador podem ser justificadas por um norte de suas preferências, como citado antes, a depender da preferência de um jogador, pode ser que pra ele, perder em um jogo (leia-se ter uma recompensa inferior) pode

ser melhor que empatar, já que ele pode ter como preferência ter uma resolução satisfatória, seja perder ou ganhar, acima de empatar, mas o que não implica na irracionalidade do jogador, mas apenas um desdobramento da teoria da escolha racional.

6.2 JOGOS: COMENTÁRIOS E DEFINIÇÕES

Vamos para aquela que é provavelmente a mais importante definição para a teoria dos jogos:

Essas situações colaborativas ou competitivas, não determinadas pelo acaso, podem ser expressadas matematicamente e analisadas dando um norteamto de qual resultado deverá prevalecer, caso as decisões estratégicas sejam tomadas racionalmente. A essas situações chamamos de “jogos” e aos agentes participantes chamamos de “jogadores”. (Pereira, 2014, p. 15).

Nós vamos seguir com essa definição de jogos, pois essas situações são associadas com os antigos jogos de tabuleiro, ou jogos de cartas, em que você toma as suas decisões, baseando-se nas decisões dos outros jogadores, e conseqüentemente, chamamos os outros participantes, de jogadores.

6.2.1 Tipos de jogos

Os jogos podem ser divididos em vários parâmetros, a seguir, descreveremos os tipos de jogos usados nessa pesquisa, com base no trabalho de Graminho (2013):

6.2.1.1 Jogos híbridos:

São aqueles jogos que têm elementos de jogos cooperativos e de jogos não cooperativos, já que neles os ganhos individuais estão atrelados ao ganho do grupo, e as vezes a perda do outro jogador, leva a sua própria perda.

6.2.1.2 Jogos simultâneos:

São aqueles jogos que as jogadas acontecem simultaneamente, isto é, um jogador não pode basear com certeza na jogada que o seu adversário irá

fazer, já que ele não tem certeza, até fazer a sua própria jogada, fazendo com que as estratégias levem em consideração a jogada do outro jogador, para prever qual situação acontecerá.

6.2.1.3 Jogos de informação simétrica e perfeita:

Jogos de informação simétrica tem informações iguais e jogos de informação perfeita garante que todos os jogadores tem acesso a todas as informações possíveis, e as informações são iguais para os dois jogadores, não tendo como blefar, ou mentir.

6.2.1.4 Jogos simétricos:

Nos jogos simétricos as jogadas são iguais para ambos os jogadores, isso não equivale a dizer que as estratégias são iguais, já que para cada jogador nós temos funções recompensas diferentes, jogador 1 pode valorizar algo mais ou menos que o jogador 2, então as jogadas serem iguais não significam necessariamente que as matrizes de recompensa são iguais.

6.2.1.5 “Jogos de soma zero” versus “Jogos de soma não-zero”:

É importante falar dos dois casos juntos, já que jogos de soma zero são muito conhecidos, mas não muito entendidos, jogos de soma zero são aqueles em que o ganho de um jogador significa necessariamente na perda do outro jogador, já nos jogos de soma não zero, isso não é necessariamente verdade, a perda de um jogador pode inferir na perda do outro jogador, assim como o ganho de um jogador, pode influenciar no ganho de outro jogador, com valores de recompensa iguais, ou diferentes, não sendo necessário uma regra específica quanto a isso.

6.2.1.6 Jogos de rodada única:

São aqueles que possuem apenas uma rodada, são chamados também de “One-shot” ou “Single-shot Game”.

6.2.1.7 Jogos de ação discreta:

Têm um número finito de participantes, rodadas ou resultados, fazendo assim que o conjunto de estratégias seja também um conjunto finito, sendo assim as jogadas podem ser representadas numa matriz de recompensa, como será mostrado a seguir.

6.3 ESTRATÉGIA

Nós definimos estratégias como um conjunto de jogadas, ordenadas de mais preferível, a menos preferível. As estratégias podem depender de situações aleatórias, como o lançar de um dado, ou a compra de uma carta, mas para as situações que nós vamos abordar no contexto do equilíbrio de Nash as estratégias são puras.

Estratégia é a sequência de movimentos de um agente em um jogo, é uma regra para a escolha de uma ação em cada ponto que uma decisão pode ter que ser feita. Uma estratégia pura é aquela em que não há nenhuma distribuição aleatória (Pereira, 2014, p. 18).

6.3.1 Estratégias puras e mistas

Estratégias podem ser definidas entre puras e mistas, as estratégias puras são aquelas em que o jogador não muda a sua jogada, e as estratégias mistas são aquelas em que o jogador muda a sua jogada em diferentes rodadas ou partidas.

6.4 REPRESENTAÇÃO DOS JOGOS

A forma normal ou estratégica, também é chamada de forma matricial, por outros autores, ela contém todas as possibilidades de jogadas para os diferentes jogadores, normalmente ela representa apenas jogos com dois jogadores, visto que para jogos com mais que dois jogadores, a matriz se torna mais complexa, mas ainda é utilizada em certos casos.

“A forma mais simples de apresentar um jogo simultâneo é por meio da forma estratégica ou normal” (Fiani, 2009, p. 46).

A forma normal nos possibilita enxergar as diferentes interpretações e ramificações do jogo. Mais abaixo quando formos falar de cada jogo diferente, vamos ter também associado a forma estratégica de cada jogo, para efeitos do texto, podem ser chamados também de forma matricial, cada par de jogadas pode ser representada pelo par ordenado, como no exemplo da figura 1 abaixo, temos o par $(R1, R2)$, com cores distintas que representam cada jogador, no caso das matrizes, as jogadas de um jogador estão na horizontal, e as jogadas do outro jogador estão na vertical, por exemplo na posição 2x1 da matriz, temos a jogada 2 do jogador 1 (jogador que ocupa a vertical) e a jogada 1 do jogador 2 (jogador que ocupa a horizontal).

Figura 1: Matriz de recompensa – Forma de representação dos jogos que foram utilizados

		Jogador 1	
		Jogada 1	Jogada 2
Jogada 1	Jogador 2	(R1,R1)	(R1,R2)
Jogada 2		(R2,R1)	(R2,R2)

R: Recompensa

Fonte: Elaborado pelo autor

7 JOGOS QUE FORAM UTILIZADOS NA PESQUISA:

Os jogos que foram escolhidos para a pesquisa têm relevância para a teoria dos jogos, visto que são jogos clássicos da mesma e também tem contextualizações

7.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÕES

Os jogos utilizados são reinterpretações de jogos clássicos do texto de Dutta (1999), com contextualização mais voltada para a vivência dos estudantes.

Nesse sentido, a contextualização permite que o aluno seja mais participativo, deixando de ser espectador passivo na sala de aula e na vida, pois o ensino passa a ser mais significativo e a aprendizagem mais prazerosa quando a escola possibilita uma formação mais crítica, reflexiva e que faz uma relação entre o conhecimento e sua aplicação. (Silveira, 2016, p. 13).

A contextualização tem dois motivos principais, o primeiro motivo, é a contextualização para dar sentido aos contextos, pois para os alunos, nem sempre as situações como a do dilema do prisioneiro fazem sentido, pois eles nunca tiveram contato com situações similares, mas o caso de serem levados a coordenação da escola para conversar sobre algo que aconteceu recentemente, é muito mais comum.

O segundo motivo é que os jogos as vezes trazem contextos que não são apropriados para os alunos, pois podem ter desde contextos de prisão e criminalidade, como papéis antiquados de gênero.

7.2 PRIMEIRO JOGO: DISPUTA DA AMIZADE (ADAPTADO DE BATALHA DOS SEXOS)

O jogo traz a situação em que os dois jogadores têm que decidir entre ir ao cinema, que é preferível pelo jogador um, ou ir ao boliche que é preferível pelo jogador dois, mas que como eles são amigos, eles ainda preferem estar juntos, que estejam em seus locais preferidos separados, dentro dessas informações, os jogadores vão estar em um estado de competição e cooperação,

pois competem para estarem no seu local favorito, mas cooperam em estar no mesmo local, independente de qual local.

No jogo original, temos:

²A (um tanto quanto) história do jogo batalha dos sexos vai a seguir. Um marido e uma esposa estão tentando decidir entre ir para a ópera ou ir para um jogo de futebol. Eles preferem respectivamente, o futebol, e a ópera. Ao mesmo tempo, cada um deles prefere ir com o cônjuge que ir sozinho. (Dutta, 1999, p.36, tradução nossa).

Jogo no esquema estratégico:

Figura 2: Matriz de recompensa do jogo Disputa da amizade.

Disputa da amizade

		Cinema Boliche	
Cinema Boliche	Cinema	(1,2)	(0,0)
	Boliche	(0,0)	(2,1)

Você
Seu
amigo

Fonte: Elaborado pelo autor

7.3 SEGUNDO JOGO: DILEMA DA FOFOCA (ADAPTADO DO DILEMA DO PRISIONEIRO)

Nesse jogo os dois jogadores são alunos de um colégio, onde eles espalham uma fofoca que na escola eles vão ter 40 minutos de intervalo no lugar dos prévios 20 minutos, a coordenação da escola suspeita que os dois alunos estão envolvidos e diz que tem evidência de como esse “crime” aconteceu, mas que seria muito melhor se eles admitissem o que aconteceu, é proposto pela coordenação, caso o aluno 1 delate o aluno 2, o aluno 1 sairia livre, e o aluno dois receberia uma semana de suspensão, caso o aluno 2 delate o aluno 1, idem,

² The (somewhat sexist) story for the Battle of the Sexes game goes as follows. A husband and wife are trying to determine whether to go to the opera or to a football game. They each, respectively, prefer the football game and the opera. At the same time, each of them would rather go with the spouse than go alone. (Dutta, 1999, p.36)

caso os dois alunos se delatassem, os dois teriam 3 dias de suspensão, e caso os dois não falassem nada, só levariam um dia de suspensão. O dilema do prisioneiro é provavelmente o mais conhecido dos jogos estudados pela teoria dos jogos, e com um grande motivo, ele é extremamente relevante para inúmeras situações, e tem implicações práticas sérias e relevantes para o nosso dia a dia, como nós vemos as situações e como interagimos.

Jogo no esquema estratégico:

Figura 3: Matriz de recompensa do jogo Dilema da fofoca.

Dilema da fofoca

		Delatar	Colaborar	
Você Seu amigo	Delatar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$	
	Colaborar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$	

Fonte: Elaborado pelo autor

7.4 TERCEIRO JOGO: JOGO DA CAÇA (ADAPTADO DO JOGO DA COLABORAÇÃO)

Nesse jogo os dois jogadores (alunos) tem a opção de colaborarem num trabalho da escola maior, ou fazerem cada um o seu trabalho individual mais simples, que vale menos nota, porém como eles estão sem tempo para se comunicar, os dois alunos têm que decidir se vão estudar para o projeto em dupla, ou para o projeto individual, sem se comunicar.

Similar com o dilema do prisioneiro, os jogadores podem desagradar uns aos outros, mas aqui, de forma diferente, existe o incentivo pela colaboração, e não a punição da não colaboração.

O jogo também é conhecido como o jogo da confiança, já que se os dois jogadores tivessem certeza da decisão do outro jogador, o jogo seria muito mais

simples de ser analisado, visto que, se o outro jogador escolheu fazer o trabalho individual, o primeiro jogador também escolheria, e se o outro jogador escolheu o trabalho em grupo, assim também faria o primeiro jogador, fazendo com que o segundo jogador sempre queira copiar a jogada do primeiro jogador, que é justamente onde se pode observar uma parte muito importante da teoria dos jogos.

Jogo no esquema estratégico:

Figura 4: Matriz de recompensa do Jogo da caça.

Jogo da caça

		Grupo	Isolado	
Grupo		(2,2)	(0,1)	Você Seu amigo
Isolado		(1,0)	(1,1)	

Fonte: Elaborado pelo autor

7.5 EQUILÍBRIO DE NASH RETOMADO

Dutta (1999) no seu texto, fala de uma das formas intuitivas de conseguirmos entender o equilíbrio de Nash, se nós pensarmos em uma estratégia a , que é dominada por uma estratégia b , nesse caso, nunca é uma boa ideia jogar a , já que como a é dominada por b independente do que o outro jogador jogar, sempre é melhor ter jogado b , mas em casos que a sua jogada a , depende da jogada do outro jogador, é importante que você pense apenas na melhor jogada do outro jogador, e jogue de acordo com a sua jogada que melhor performe contra exatamente a melhor jogada do outro jogador, nós chamamos essa jogada de “melhor resposta”, você não vai ter certeza sobre o que o outro

jogador irá jogar, mas você tem uma boa noção, que se espera que o outro jogador seja racional e tenha como jogada a melhor estratégia possível dadas as devidas informações, e caso o outro jogador realmente jogue a sua melhor estratégia, e o primeiro jogador jogar a sua melhor resposta, então pense que o outro jogador fez o mesmo, se os dois jogadores jogaram a sua melhor jogada e sua melhor resposta, então não há incentivo para nenhum dos jogadores mudar as suas jogadas, jogando mais vezes, se vocês chegassem nas mesmas jogadas, e não tivessem razão para mudar a jogada, já que uma mudança pra qualquer um dos jogadores é pior que manter a sua jogada atual, então isso é chamado um equilíbrio de Nash.

“A tomada de decisão resume-se a resolver o problema de maximizar a recompensa, o que torna uma situação de um jogo estratégico, no entanto, é o fato de que o que é melhor para uma pessoa, em geral, depende de ações de outros indivíduos” (Pereira, 2014, p. 69).

É importante notarmos também, que o fato de maximizar a recompensa, apesar de ter um viés denotado como positivo, nem sempre é algo necessariamente positivo, pois pode ser somente, minimizar as perdas em um jogo, se for um jogo desleal, a um dos jogadores.

Jogos podem ter mais de um equilíbrio de Nash, como no caso do último jogo citado, o jogo da confiança, que caso um jogador prefira fazer o trabalho sozinho, o outro jogador também o irá escolher, e dado a oportunidade, nenhum dos dois jogadores iria querer mudar a sua jogada, mas caso um jogador queira fazer o trabalho em grupo, assim também iria o outro jogador, então nesse caso o jogo tem dois equilíbrios de Nash, de recompensas diferentes, já que os alunos conseguirão mais nota, se fizerem o trabalho em grupo, porém, por não terem certeza de qual a jogada o outro jogador irá fazer, não vão conseguir sempre fazer o trabalho em grupo.

No caso do dilema da fofoca, o equilíbrio de Nash está em delatar, mesmo que o melhor resultado para a dupla, seja que os dois jogadores não delatem, a estratégia dominante é delatar, visto que ela é melhor ou tão boa quanto qualquer outra estratégia para o jogador, fazendo com que, se os jogadores decidirem colocar as vontades pessoais acima do bem do grupo, todos serão

punidos com a pior recompensa, essa é uma das partes mais importantes de um jogo do dilema do prisioneiro.

A respeito do jogo batalha da amizade, ele também tem dois equilíbrios de Nash, porém eles são diferentes pois em cada um deles, um dos jogadores sai ganhando, pense no caso que o jogador escolhe boliche, e o outro escolhe boliche, o outro jogador poderia ir ao cinema, porém ele prefere estar no boliche acompanhado de seu amigo, a estar no cinema sozinho, e vice e versa para o caso do primeiro jogador escolher cinema, em ambos os casos, não é interessante para o jogador mudar a estratégia, fazendo com que eles cooperem em um certo nível, mas, em todas essas situações, algum jogador sai mais satisfeito que o outro.

8 METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia da pesquisa se dá de acordo com algumas definições que serão citadas a seguir:

Temos uma pesquisa aplicada, pois tem aplicações práticas para o contexto de teoria dos jogos aplicada para a matemática na educação básica.

Tratando da pesquisa aplicada, é interessante perceber que se diferencia da pesquisa básica no seu objetivo. O elemento central relacionado à pesquisa aplicada é a produção de saberes voltados para a aplicação dos seus resultados (Villarverde, *et al.*; 2021)

O trabalho se trata de uma pesquisa qualitativa, pois, de acordo com Villarverde *et al.* (2021), a pesquisa se dá por meio de respostas não objetivas, e não preocupadas com a quantidade de participantes, e sim com as respostas de cada participante.

“A pesquisa qualitativa é voltada para análise de dados que não podem ser expressos em números ou não podem se limitar a uma análise numérica em virtude do tipo de grandezas que apresentam”

O trabalho se trata de uma pesquisa exploratória. “A pesquisa exploratória procura averiguar sobre um questionamento inicial que irá propiciar inúmeras informações para que a investigação se efetive.” (Villarverde, *et al.*; 2021)

É notório que o trabalho inicia de um questionamento, sobre os motivos da teoria dos jogos não serem utilizadas como meio de ensino de matemática, e também não conclui completamente a pesquisa, sempre podendo ter uma nova investigação na área.

Ao pretender buscar a informação diretamente com a população pesquisada, na pesquisa de campo a maior parte do trabalho é realizada pessoalmente, exigindo do pesquisador o maior tempo possível de permanência na comunidade (Villarverde, *et al.*; 2021)

A pesquisa é feita *in loco*, na escola, com alunos na comunidade de origem da escola. Os sujeitos da pesquisa são alunos de uma escola pública que

estão cursando o nono ano do ensino fundamental, a escolha da escola foi feita visando uma comunidade que concentra muitos dos estudantes daquela região, é a maior escola pública da região, com nove turmas dos anos finais do ensino fundamental, que acontece no horário da tarde.

Foram escolhidas quatro duplas de alunos, duas duplas de cada uma das duas turmas de nono ano, alunos na faixa etária de 13 a 15 anos, os alunos serão nomeados com nomes fictícios: Nidalee, Ivern, Rek'sai, Elise, Lillia, Ekko, Sejuani e Ekko.

As perguntas da pesquisa foram feitas por meio de um questionário, que seguirá no apêndice do trabalho, os jogos foram explicados por um roteiro, o questionário é composto de seis perguntas, que são divididas entre questões gerais e específicas, sendo divididas entre três questões específicas sobre cada um dos jogos, e três questões gerais sobre teoria dos jogos, essa escolha foi feita para que os alunos não fossem influenciados como poderia acontecer com uma entrevista semiestruturada.

8.1 QUESTIONÁRIO:

Primeira questão: "Para você, o que seria uma estratégia mais vantajosa no jogo disputa da amizade?". Essa questão é uma das questões específicas, sobre o jogo disputa da amizade, nós podemos dividir as duas possíveis ideias de respostas, entre colaborativas e competitivas, que serão mais explicadas na análise de dados.

Segunda questão: "Como a cooperação traria mais sucesso ou menos sucesso para o grupo nos jogos vivenciados?". Essa é uma das questões gerais sobre os jogos, nessa questão nós podemos analisar a visão dos participantes, pois em alguns dos jogos como citado anteriormente, os jogos têm um ou dois equilíbrios de Nash, dependendo para qual jogador está sendo favorecido, ou se os jogadores estão colaborando ou competindo, essa questão ajuda a perceber o viés dos alunos que participaram da pesquisa.

Terceira questão: “No jogo dilema da fofoca, é mais vantajoso para você os jogadores cooperarem ou não cooperarem?”. Essa questão específica deixa claro as duas formas de pensar o jogo, já que no dilema da fofoca, existe um único equilíbrio de Nash, e vem da não cooperação dos jogadores que apesar de não ser a saída ideal para os jogadores, visto que a colaboração traria um melhor resultado para ambos, mas cairia em uma situação que qualquer jogador mudando a sua jogada teria uma situação melhor para si, o que não é um equilíbrio de Nash.

Quarta questão: “No jogo da caça, entre caçar sozinho e caçar em grupo, existe uma estratégia que é melhor que a outra? Se sim, explique o porquê dessa estratégia ser a melhor”. É a última das questões específicas sobre os jogos, e ela é feita para analisar como os jogadores interpretaram os jogos, visto que no jogo da caça, a colaboração leva a um valor mais alto de recompensa, mas se apenas um dos jogadores colaborarem, ele fica sem recompensa, o jogo tem dois equilíbrios de Nash, que dependem somente da confiança dos jogadores uns nos outros, um equilíbrio de Nash é estritamente superior ao outro, por esses motivos, o jogo originalmente tem o nome “*Reassurance game*” ou jogo da confiança em tradução livre.

Quinta questão: “Qual dificuldade você sentiu enquanto jogava os jogos?”. Essa é uma questão geral, a questão que menos fala sobre teoria dos jogos, mas tenta entender os sentimentos dos jogadores enquanto jogavam, e entender as dificuldades da aplicação da teoria dos jogos na sala de aula, que devem ser estudados e são questões muito importantes para quem tem interesse de aplicar essas situações na sala de aula.

Sexta questão: “Você gostaria de vivenciar jogos desse tipo nas suas aulas de matemática? Em que você acha que ajudaria vivenciar esses jogos?”. A última questão geral, ela é o outro lado da quinta questão, se a quinta questão pode encontrar problemas na aplicação da teoria dos jogos, a sexta questão foi colocada para perceber se os alunos tiveram uma experiência positiva ou negativa com os jogos, e no que eles acreditam que a aplicação da teoria dos jogos na sala de aula poderia colaborar com o desenvolvimento dos alunos, ou em algum conteúdo da aula de matemática ou com o desenvolvimento de estratégias e raciocínio lógico.

9 ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados se dará por meio do equilíbrio de Nash, com a argumentação dos jogadores convergindo ou divergindo do equilíbrio de Nash, e com a análise teórica sobre as respostas gerais e específicas, como elas podem ser interpretadas estrategicamente e como os alunos reagiram aos jogos.

Nash definiu o equilíbrio como uma situação em que nenhum jogador poderia melhorar seu ganho escolhendo uma outra estratégia disponível. Provou que, para uma determinada categoria muito ampla de jogos com qualquer número de jogadores, em que são permitidas estratégias mistas, existe pelo menos um ponto de equilíbrio, e que embora pudesse haver jogos em que as estratégias puras não apontassem para este ponto, o recurso da mistura de estratégia sempre produziria um novo ponto de equilíbrio em jogos finitos (Costa, 2005, p.7).

Agora vamos analisar as questões na ordem que foram questionadas.

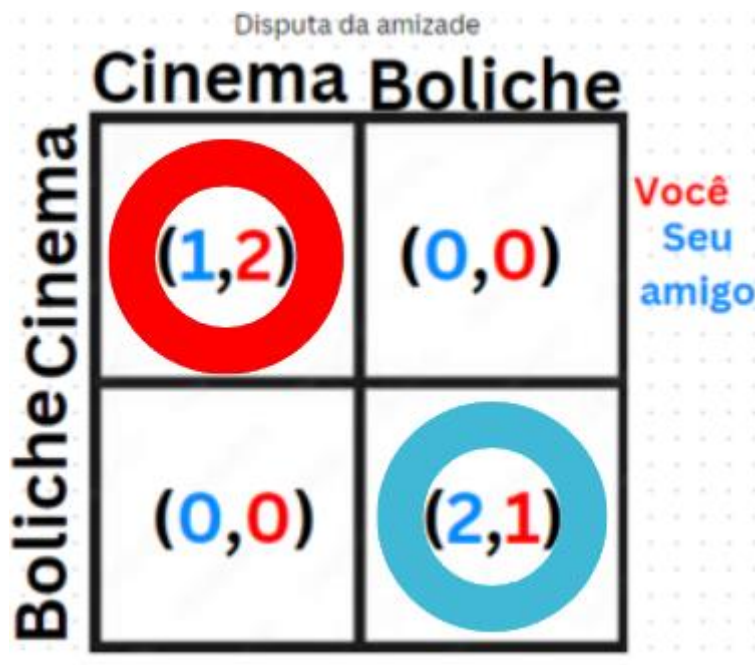
9.1 PRIMEIRA QUESTÃO: “PARA VOCÊ, O QUE SERIA UMA ESTRATÉGIA MAIS VANTAJOSA NO JOGO DISPUTA DA AMIZADE?”

Dos oito jogadores, quatro tiveram respostas colaborativas, dois tiveram respostas competitivas (não colaborativas) e um jogador teve uma resposta que não se encaixa em nenhuma das categorias, que foi a resposta de Sejuani: “Jogar ao mesmo tempo”, que pode ter vindo de uma interpretação errada da pergunta, visto que os dois jogadores sempre jogam ao mesmo tempo, no sentido que as jogadas só são reveladas quando os dois tomam suas decisões.

Outra resposta que é interessante de ser comentada é a de Nidalee: “Para mim, a estratégia mais vantajosa seria a cada duas jogadas ir para o lugar que o seu amigo quer ir, e depois ir para o local que você quer ir de acordo com o que seu amigo fizer”, essa estratégia é extremamente interessante, pois ela não é pura, mas envolve duas estratégias diferentes, colaborar e competir, essa estratégia mista pode lembrar uma versão primitiva da estratégia “*Tit for tat*”, que é chamada também de olho por olho, a estratégia é a estratégia que sempre colabora, até que seja levada vantagem sobre ela, que a fará lidar na mesma moeda que o outro jogador, como comentada por Axelrod (2019) no podcast RADIOLAB.

Os equilíbrios de Nash estão coloridos como o melhor equilíbrio para cada jogador:

Figura 5 – Disputa da amizade com os equilíbrios de Nash destacados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse jogo, os equilíbrios de Nash não são de igual valor, para o jogador “azul”, nós temos o equilíbrio Boliche x Boliche como melhor, da mesma forma para o jogador “vermelho”, podemos observar que se um jogador colaborar e o outro não colaborar, o jogador que não colaborar vai estar no equilíbrio de mais valor para ele, nessa situação de acordo com o equilíbrio de Nash dois jogadores estavam no melhor equilíbrio de Nash, a Nidalee estava meio a meio, e quatro jogadores estavam no equilíbrio que não era o ideal para eles, mas ainda é melhor que quando os dois jogadores escolhem jogadas diferentes.

9.2 SEGUNDA QUESTÃO: “COMO A COOPERAÇÃO TRARIA MAIS SUCESSO OU MENOS SUCESSO PARA O GRUPO NOS JOGOS VIVENCIADOS?”

Os jogadores: Lillia, Elise, Nidalee e Rek’sai responderam que a colaboração traria mais sucesso nos jogos vivenciados, sem falar sobre

condições, somente argumentaram a favor da colaboração nos jogos vivenciados.

Os jogadores: Ivern, Pyke e Ekko argumentaram que a cooperação poderia trazer mais sucesso, mas dependeria de qual jogo estivesse sendo jogado, o jogador Ekko respondeu “Depende do jogo. No segundo jogo, (Dilema da fofoca) não colaborar irá trazer mais vantagem para um dos jogadores, sobre não colaborar no terceiro jogo, os dois jogadores sairão perdendo.” que é uma resposta muito alinhada ao que nós vimos e vamos continuar vendo de acordo com o equilíbrio de Nash.

Novamente, Sejuani deu uma resposta que não se encaixava em nenhuma das categorias: “não jogar ao mesmo tempo”,

9.3 TERCEIRA QUESTÃO: “NO JOGO DILEMA DA FOFOCA, É MAIS VANTAJOSO PARA VOCÊ OS JOGADORES COOPERAREM OU NÃO COOPERAREM?”

No dilema da fofoca apenas um dos alunos questionados respondeu que a não colaboração era superior, o Ekko, como citado na última questão. Os outros sete alunos afirmaram que a colaboração era mais vantajosa, o que destoa do equilíbrio de Nash.

Figura 6 – Dilema da fofoca com o equilíbrio de Nash destacado.

Dilema da fofoca

		Delatar	Colaborar
Delatar	 $(-5, -5)$	$(0, -10)$	
Colaborar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$	

Você
Seu
amigo

Fonte: Elaborado pelo autor.

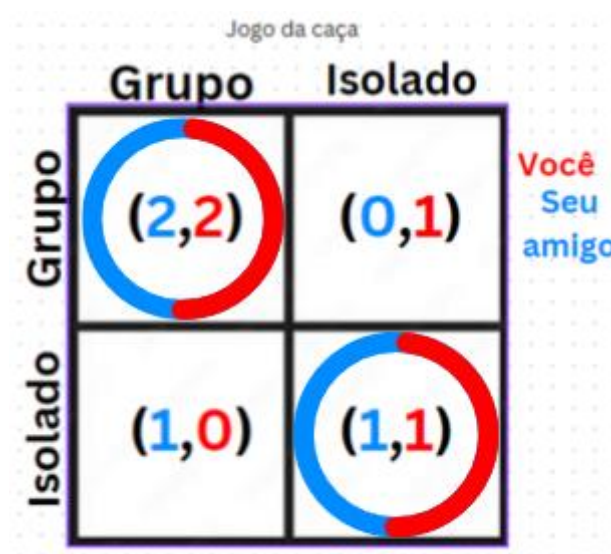
O equilíbrio de Nash no jogo Dilema da fofoca é dado quando os dois jogadores não colaboram entre si, no caso de Delatar x Delatar, pois qualquer jogador que desvie dessa jogada, cairá em uma situação pior, isto é, uma recompensa inferior ao que teria anteriormente, é importante notar que apesar disso a situação Colaborar x Colaborar é melhor para ambos os jogadores.

Como visto anteriormente, o equilíbrio de Nash é o oposto do que foi falado pela grande maioria dos alunos, mas podemos interpretar que em um ambiente em que os dois jogadores colaborem, a melhor situação simultânea para ambos os jogadores, mesmo que se em qualquer momento um dos jogadores mudar para a não colaboração, ele sairia com mais vantagem e o outro jogador com menos vantagem.

9.4 QUARTA QUESTÃO: “NO JOGO DA CAÇA, ENTRE CAÇAR SOZINHO E CAÇAR EM GRUPO, EXISTE UMA ESTRATÉGIA QUE É MELHOR QUE A OUTRA? SE SIM, EXPLIQUE O PORQUÊ DESSA ESTRATÉGIA SER A MELHOR”

Nessa questão, nós podemos ver a mais clara situação em que a colaboração é vantajosa para ambos os jogadores, e o jogador não tem incentivo para não colaborar. Nela, os oito alunos concordaram em afirmar que a colaboração era a melhor estratégia, usamos como exemplo a resposta de Elise: “caçar em grupo, pois além de pegar um animal a gente também ganha mais pontos” que é muito similar as outras respostas, sempre confirmando que a melhor estratégia é caçar em grupo, pela recompensa ser maior. Outra resposta interessante foi a de Nidalee: “Sim, se os dois jogadores escolhessem sempre caçarem em grupos no final iria ter sempre a cala maior e uma pontuação igual.” Além da colaboração, ela também citou a ideia da igualdade de pontuação assim como outros dois alunos, essa ideia pode corroborar a estratégia de caçar em grupo, pois nenhum dos jogadores se sente lesado pela colaboração.

Figura 7 – Jogo da caça com os equilíbrios de Nash destacados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse jogo, temos dois equilíbrios de Nash, o equilíbrio mais seguro e o equilíbrio menos seguro. Se os dois jogadores forem caçar isolados, eles estão em uma situação de equilíbrio de Nash, porém não tem a maior recompensa possível. No caso em que os dois jogadores escolham caçar em grupo, eles se encontram em outro equilíbrio, pois o jogador que mudar a sua jogada vai ser afetado negativamente, saindo de uma recompensa dois para uma recompensa um, e o outro jogador perde toda a sua recompensa, nesse sentido os jogadores

se concentraram no equilíbrio de Nash menos seguro, o equilíbrio tem uma recompensa maior, mas em um ambiente estritamente cooperativo, é o melhor equilíbrio definitivamente.

9.5 QUINTA QUESTÃO: “QUAL DIFICULDADE VOCÊ SENTIU ENQUANTO JOGAVA OS JOGOS?”

Essa questão serve como diagnóstico de possíveis problemas enfrentados pelos alunos que são importantes para professores que tem interesse em aplicar situações similares ou estão pesquisando sobre a área.

Nós tivemos três categorias diferentes de respostas dos oito jogadores, da mais falada até a menos falada. Tivemos, respectivamente, a primeira categoria com os que não tiveram dificuldade: quatro jogadores afirmaram não terem tido dificuldade com os jogos vivenciados. Em sequência, três jogadores disseram que a maior dificuldade que eles tiveram foi em imaginar o que o outro jogador iria jogar, como exemplificada pela resposta do jogador Ekko: “Senti uma dificuldade em entender as estratégias de meu colega de jogo”. Essa resposta é extremamente valiosa, pois é exatamente o que o estudo da teoria dos jogos pode trazer para os alunos e para a aplicação na sala de aula, pois ajudaria esses alunos a entender qual o raciocínio por trás das decisões dos jogadores. A última resposta que nós tivemos foi a da jogadora Nidalee: “A falta de comunicação, se eu e a minha dupla tivéssemos dialogado mais, nós teríamos conseguido vencer sem prejudicar um ao outro.” que pode ser classificada como uma resposta diferente das outras duas, ela pressupõe que as situações são estritamente colaborativas, e os jogadores teriam que seguir o que combinaram anteriormente, que não é verdade para os jogos.

9.6 SEXTA QUESTÃO: “VOCÊ GOSTARIA DE VIVENCIAR JOGOS DESSE TIPO NAS SUAS AULAS DE MATEMÁTICA? EM QUE VOCÊ ACHA QUE AJUDARIA VIVENCIAR ESSES JOGOS?”

Podemos ver essa questão como um prólogo de uma próxima pesquisa, uma forma de termos a ideia do que os alunos pensam, todos os jogadores responderam de forma positiva à possibilidade de vivenciar os jogos na sala de aula. Vamos observar o que eles responderam a respeito do que poderia ajudar na visão dos alunos: tivemos uma resposta sobre como ajudaria a desenvolver um pensamento estratégico e lógico, na resposta do Ekko: “Sim, vivenciamos estes jogos para contribuirmos para o desenvolvimento de pensamentos estratégicos”. Três respostas que citaram a parte lúdica dos jogos, como exemplo a resposta do Pyke: “Sim, ajudaria a compreender melhor o conteúdo de uma forma divertida e simples”. Três alunos citaram a parte da comunicação e trabalho em grupo, como exemplificado por Lillia: “Sim, vivenciar um pouco, para melhorar o trabalho em grupo dos alunos.” E um aluno, o Ivern, teve a seguinte opinião: “Sim, ajudaria a aprender a fazer cálculos de probabilidade e ajudaria a entender sobre a teoria dos jogos”, que pode ser entendido como uma pequena confusão sobre os jogos, que não envolvem eventos aleatórios, mas ainda cita o interesse na teoria dos jogos.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nós chegamos a conclusões esperadas no primeiro e terceiro jogo, com a maioria dos jogadores chegando em estratégias associadas ao equilíbrio de Nash. No segundo jogo, no entanto, chegamos a uma situação que era superior ao equilíbrio de Nash em questão de recompensa para ambos os jogadores, o que pode ser visto como um grupo de jogadores que confiavam uns nos outros, o que poderia ter levado aos jogadores criarem um viés positivo, em que um jogador poderia não delatar o outro, e vice-versa, podendo assim justificar o que foi relatado na pesquisa, em que podemos ver como uma realização positiva pelos jogadores. É esperado que no futuro os trabalhos acadêmicos tenham mais possibilidades de referencial teórico e possam utilizar como base os conceitos trabalhados nessa pesquisa, pois não é uma área comumente associada com a matemática e a educação matemática, que acreditamos ser um problema.

As respostas dos alunos foram muito relevantes, e poderiam ser analisadas com outras visões que não o equilíbrio de Nash, que poderiam ser tão interessantes quanto. Os alunos tiveram uma resposta positiva à atividade proposta e perguntaram se teriam mais sessões, pois acharam muito interessante como a matemática tinha áreas diferentes daquelas que eles já conheciam da sala de aula.

Desta forma, acreditamos que conseguimos ter algum progresso no entendimento de como os estudantes mobilizam as escolhas racionais em movimentos de jogos à luz do equilíbrio de Nash e potencializar a pesquisa para as futuras pesquisas de professores que tenham interesse de aplicar os conceitos de teoria dos jogos na sala de aula, associando a conteúdos matemáticos ou também como conteúdo próprio além de fomentar a pesquisa que pode ser considerada escassa no segmento.

REFERÊNCIAS

AXELROD, R. "Tit for Tat." *RAD/OLAB*, 17 Sept. 2019, radiolab.org/podcast/104010-one-good-deed-deserves-another/transcript. Accessed 03 July 2025.

CÂMARA, S. F. **Teoria dos jogos**. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2011.

COSTA C. S. **Teoria dos jogos e a relação entre o "Teorema Minimax" de John Von Neumann e o "Equilíbrio de Nash" de John Nash**. 2005.

DUTTA, P. K. **Strategies and games : theory and practice**. Cambridge, Mass.: Mit Press, 1999.

FIANI, R. **Teoria dos Jogos. Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 3 ed. 2009.

GRAMINHO, J. M. J. **Contribuição da Teoria dos Jogos à Gestão de Desempenho**. Mestrado em Administração - PUC/SP, São Paulo, 2013.

KASPER, F. A. de A. **TEORIA DOS JOGOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**. 2007.

PEREIRA, E. F. M. **TEORIA DOS JOGOS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO** Santo André-SP. 2004.

SILVEIRA A. J. **A Contextualização no Ensino da Matemática**. 2016.

VILLaverde, A.; SANTANA, A; LUCE, B; DECARLI, C; SILVA, C; FRAGA, C.D.C; BRASIL, G.D; BERTOTTI, H; SILVA, J.A.C; VALLADARES, L; RAMOS, L.D; CORRÊA, M.L.B; BATISTA, P.S. Tipos de pesquisa quanto à abordagem. In: ROBAINA, J.V.L; FENNER, R.D.S; MARTINS, L.A.M; BARBOSA, R.D.A; SOARES, J.R (Orgs.). **Fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa em educação em ciências. 1 ed.** Curitiba, PR: Bagai, 2021. Disponível em: Editora BAGAI - Fundamentos Tericos e Metodologicos.pdf (metodologia)

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

A vida é um jogo, e a teoria dos jogos nos ajuda a entender as regras e estratégias, não se trata apenas do que você faz, mas do que você pensa que o outro vai fazer.

Perguntas aos jogadores

1. Para você, o que seria uma estratégia mais vantajosa no jogo disputa da amizade?

2. Como a cooperação traria mais sucesso ou menos sucesso para o grupo nos jogos vivenciados?

3. No jogo dilema da fofoca, é mais vantajoso para você os jogadores cooperarem ou não cooperarem?

4. No jogo da caça, entre caçar sozinho e caçar em grupo, existe uma estratégia que é melhor que a outra? Se sim, explique o porquê dessa estratégia ser a melhor

5. Qual dificuldade você sentiu enquanto jogava os jogos?

6. Você gostaria de vivenciar jogos desse tipo nas suas aulas de matemática? Em que você acha que ajudaria vivenciar esses jogos?

Disputa da amizade

Cinema Boliche

Boliche Cinema		
		Você Seu amigo
	(1,2)	(0,0)
	(0,0)	(2,1)

Dilema da fofoca

Delatar Colaborar

Colaborar Delatar		
		Você Seu amigo
	(-5,-5)	(0,-10)
	(-10,0)	(-1,-1)

Jogo da caça

		Grupo	Isolado
Grupo		(2,2)	(0,1)
			Você Seu amigo
Isolado		(1,0)	(1,1)