
BOOTSTRAP PONDERADO:
UMA AVALIAÇÃO NUMÉRICA

FELIPE CHAVES INÁCIO

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
Área de concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção
do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2004

Em memória de meu pai.

My general feeling about bootstrapping is that I don't like it very much. It's easy for me to say that, because I don't have to do practical problems for a living.

—Henry Daniels, 1993

Agradecimentos

Como eu já disse algumas vezes, esse é um dos melhores momentos no desenvolvimento da dissertação, pois podemos esquecer um pouco o rigor exigido pelo trabalho científico e dizer mais sobre nossos sentimentos pessoais. Sendo assim, gostaria primeiramente de agradecer a Deus. Nada teria sido possível sem que Ele estivesse ao meu lado todo o tempo, principalmente naqueles momentos em que tudo me parecia faltar. Gostaria também, antes de qualquer outro agradecimento, de agradecer especialmente ao meu orientador Francisco Cribari Neto pelo seu profissionalismo inquestionável e principalmente pela forma perfeita como conduziu a orientação deste trabalho. Agradeço pelo exemplo de profissional que ele me deixa e até mesmo por não ter dispensado as palavras ríspidas quando essas eram necessárias. Hoje seria muito difícil enumerar tudo o que pude aprender com ele e o que eu posso dizer agora é: muito obrigado!

À minha família eu também gostaria de fazer um agradecimento especial, principalmente à minha mãe por ter sido uma ‘timoneira forte em águas turbulentas’, nos ensinando sempre a trilhar nossos caminhos e perseguir nossos sonhos; mostrando-nos que a família é a rocha firme sobre a qual nos apoiamos para um grande salto. Minha família tem sido de fato essa rocha e é por isso que eu também agradeço enormemente às minhas irmãs Nânia e Lílian e aos meus sobrinhos Pedro Henrique e Renan. Como eu sempre digo, minha vida teria sido extremamente monótona sem todos esses momentos maravilhosos que vocês me proporcionam.

Para os meus amigos do mestrado; Tatiene, Tarciana, Moisés, Keila, Sílvia, João Marcelo, Raydonal, Gilson, Bartolomeu, Patrícia e Valéria; eu gostaria de poder expressar todos os meus sentimentos. Toda a minha gratidão, todo meu carinho, toda minha vontade de permanecer entre eles e fazer com que nossa amizade permaneça por muitos e muitos anos. Muito obrigado por tudo! Vocês fizeram com que minha vida nessa cidade fosse ainda mais agradável.

Gostaria de fazer também um agradecimento especial à minha namorada Cristiane pelo seu apoio incondicional durante todo o tempo e por ter permanecido em minha vida no momento em que eu mais precisava. Muito obrigado, Cris! Agradeço também ao meu primeiro orientador e hoje amigo Afonso Henriques por ter me ajudado tanto em momentos importantes da minha vida profissional e pessoal e por ter também deixado o exemplo do

professor cujo ensinamento vai muito além do conhecimento técnico. Aos demais professores do mestrado em estatística ficam os meus mais sinceros agradecimentos, assim como a todos os técnicos que tornam possível o nosso trabalho. Agradeço também a Capes pelo apoio financeiro. Para aqueles de quem agora me esqueço, ficam minhas desculpas. Como eu costumo dizer, minha memória não é tão grande quanto o carinho que sinto por vocês.

Resumo

Em modelos de regressão linear em que os erros são heteroscedásticos, a prática comum é utilizar o estimador de mínimos quadrados ordinários para a estimação dos parâmetros juntamente com um estimador consistente da matriz de covariâncias dessas estimativas que, em geral, é o estimador desenvolvido por White (1980) ou uma de suas variantes. Entretanto, estimadores da matriz de covariâncias baseados em esquemas de bootstrap têm-se mostrado boas alternativas aos estimadores tradicionais. Em especial o estimador desenvolvido por Cribari–Neto & Zarkos (2004), em que a probabilidade de seleção dos resíduos é ponderada pelo inverso do grau de alavancagem, apresenta desempenho superior aos estimadores consistentes tradicionais, principalmente em situações não-balanceadas em que há observações potencialmente influentes. Utilizando simulações de Monte Carlo, foi analisada neste trabalho a sensibilidade desse estimador a diferentes formas de reamostragem através da análise do comportamento de novos estimadores que utilizam outras probabilidades de seleção dos resíduos. Adicionalmente, investigou-se a sensibilidade da inferência baseada neste e em outros estimadores a situações de não-normalidade dos erros.

Abstract

Cross sectional data usually display some form of heteroskedasticity. Since the ordinary least squares estimator of the linear regression parameters remains unbiased and consistent under heteroskedasticity of unknown form, it is common practice to use it together with a consistent estimator of its covariance matrix. The chief goal of this dissertation is twofold. First, we investigate the sensitivity of Cribari–Neto & Zarkos’s (2004) inversely adjusted weighted bootstrap estimator to different resampling schemes. Second, we investigate the impact of non-normality on inference under heteroskedasticity, in particular on inference performed using the aforementioned estimator.

Índice

Capítulo 1: Bootstrap	
1.1 Introdução	1
1.2 Algumas aplicações	3
1.3 Alguns resultados assintóticos	5
Capítulo 2: Heteroscedasticidade	
2.1 Introdução	9
2.2 O modelo	10
2.3 Uma breve revisão bibliográfica	21
Capítulo 3: Novos estimadores e avaliação numérica	
3.1 Introdução	26
3.2 Novos estimadores	26
3.3 Resultados numéricos	27
3.4 Sensibilidade dos estimadores a erros não-normais	36
3.4.1 Erros com distribuição exponencial	36
3.4.2 Erros com distribuição t_3	44
3.5 Uma aplicação empírica	52
3.6 Conclusões	54
Apêndice.....	56
Referências bibliográficas.....	66

Capítulo 1

Bootstrap

1.1 Introdução

Bootstrap é um procedimento de reamostragem introduzido por Bradley Efron em 1979 (Efron, 1979). É, portanto, uma técnica relativamente recente por ser computacionalmente intensiva, exigindo um certo poder computacional para simplificar os cálculos freqüentemente complicados da teoria estatística tradicional. Segundo MacKinnon (2002, p.1), “the astonishing increase in computer performance over the past two decades has made it possible for economists to base many statistical inferences on simulated, or bootstrap, distributions rather than on distributions obtained from asymptotic theory.”

O termo bootstrap surgiu de uma analogia com uma obra do século XVIII intitulada “Aventuras do Barão de Munchausen” de Rudolph Rasp. O barão encontrava-se no fundo de um lago e se salvou puxando a si próprio para cima pelas alças de suas botas. Seguindo esta analogia, a utilização dos dados para gerar dados adicionais parece ser uma “trapaça”, mas não é. Essa técnica tem sido usada com sucesso numa vasta gama de problemas, permitindo ao pesquisador simplificar problemas complexos. Também tem sido usada em situações mais simples, como para checar a adequação de medidas padrão de incerteza, relaxar suposições e fornecer rapidamente soluções aproximadas. Nesse sentido, o método bootstrap desempenha dois papéis importantes em econometria e estatística:

i) fornece melhoramentos para aproximações de primeira ordem de estatísticas assintoticamente pivotais e

ii) produz aproximações em situações onde é muito difícil ou até mesmo impossível conseguir uma solução exata.

(Estatísticas assintoticamente pivotais são aquelas cujas distribuições limite não dependem de quantidades desconhecidas.)

O método bootstrap é aplicado quando é necessário obter conhecimento sobre a distribuição de probabilidade de uma estatística T , como por exemplo o seu viés, seu desvio padrão ou ainda a forma como se pode calcular limites de confiança para um parâmetro θ usando a estatística T , cujo valor observado na amostra será denotado por τ . Questões de inferência como estas freqüentemente envolvem a estimação de uma função de distribuição F .

Há dois procedimentos distintos para tanto, conhecidos como paramétrico e não-paramétrico. Quando há um modelo matemático particular, com parâmetros que determinam completamente a função densidade ou de probabilidade f , diz-se que o modelo é paramétrico e métodos estatísticos baseados neste modelo são métodos paramétricos. Quando não é usado nenhum desses modelos matemáticos, a análise estatística é não-paramétrica e utiliza somente o fato das variáveis aleatórias serem independentes e identicamente distribuídas (Davison & Hinkley, 1997, p.11). No caso do bootstrap paramétrico, assume-se que F pertence a alguma família paramétrica e \hat{F} é calculada substituindo o parâmetro desconhecido em F pela sua estimativa de máxima verossimilhança ou por outra estimativa qualquer. No bootstrap não-paramétrico, é usada a função de distribuição empírica (FDE), \mathcal{F} . Esse é o chamado “princípio plug in”; segundo Efron & Tibshirani (1993), o método bootstrap é uma aplicação direta desse princípio.

A função de distribuição empírica, como se pode ver, desempenha um papel fundamental no método bootstrap não-paramétrico. Essa função associa probabilidade $1/n$ a cada valor observado, $x_t, t = 1, \dots, n$, sendo definida como

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\#\{x_t \leq x\}}{n}.$$

Um ponto importante a ser destacado é que não há perda de informação quando os dados são representados, de forma sintética, em termos de frequências. De fato, é possível mostrar que \mathcal{F} é uma estatística suficiente para a verdadeira distribuição F , ou seja, \mathcal{F} resume toda a informação sobre F contida nos dados.

Muitas estatísticas simples podem ser pensadas a partir de propriedades de \mathcal{F} . Em geral, $\tau(\mathcal{F})$ é uma função simétrica de x_1, \dots, x_n , ou seja, $\tau(\mathcal{F})$ não é afetado pelo reordenamento dos dados, dependendo apenas de \mathcal{F} . Este fato é expresso como $\tau = \tau(\mathcal{F})$, onde $\tau(\cdot)$ é uma expressão matemática para o procedimento de cálculo de τ a partir de \mathcal{F} . Essa expressão é de fundamental importância no caso não-paramétrico porque ela também define o parâmetro de interesse θ através de $\theta = \tau(F)$, correspondendo à idéia de que θ é uma característica da população descrita por F . A relação entre a estimativa τ e \mathcal{F} pode ser expressa como $\tau = \tau(\mathcal{F})$, correspondendo à relação $\theta = \tau(F)$ entre a característica de interesse e a distribuição subjacente (Davison & Hinkley, 1997, p.12). A relação $\tau(\cdot)$ define tanto o parâmetro como sua estimativa, contudo $\tau(\cdot)$ será usado para denotar a referida expressão matemática e τ para representar a estimativa de θ .

Pode-se mostrar que \mathcal{F} converge quase certamente para F quando $n \rightarrow \infty$. Assim, se $\tau(\cdot)$ é uma função contínua, a relação $T = \tau(\cdot)$ implica que T converge para θ quando $n \rightarrow \infty$, que é a propriedade de consistência (Davison & Hinkley, 1997, p.13).

1.2 Algumas aplicações

No caso em que os cálculos teóricos são muito complexos e não é possível fazer aproximações, uma alternativa é estimar os parâmetros de interesse através de dados simulados. Esses dados são representados como x_1^*, \dots, x_n^* , onde os x_t^* 's são amostrados independentemente da distribuição \mathcal{F} . Uma estatística calculada através de dados simulados será representada por T^* e, após R repetições da simulação, obtêm-se T_1^*, \dots, T_R^* , de onde se pode inferir as propriedades de $T - \theta$, como, por exemplo, o viés de T , que é dado por

$$B(T) = E(T|\mathcal{F}) - \theta = E^*(T^*) - \theta,$$

e estimado por

$$\widehat{B}(T) = R^{-1} \sum_{r=1}^R T_r^* - \tau.$$

A variância de T pode ser estimada como

$$\widehat{\text{var}}(T) = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (T_r^* - \bar{T}^*)^2,$$

onde $\bar{T}^* = R^{-1} \sum_{r=1}^R T_r^*$ e E^* é a esperança calculada através do método bootstrap. Outros momentos podem ser estimados de forma análoga.

Uma questão que surge naturalmente dessas considerações diz respeito ao número de réplicas na simulação, ou seja, o valor de R que se deve tomar para se obter estimativas confiáveis. Davison & Hinkley (1997) afirmam que, apesar de não ser possível fornecer uma regra geral e precisa, é possível ter uma boa noção do que é necessário para se obter boas estimativas das quantidades de interesse. Segundo os autores, R pode ser escolhido com base no fator de inflação da variância, ressaltando-se, contudo, que em alguns casos esse fator pode ser muito grande. Nesse caso, o que realmente importa é o efeito da simulação sobre os resultados finais, ou seja, o tamanho e a cobertura do intervalo de confiança, um assunto que, segundo eles, é bastante mais complicado.

No que se refere à distribuição de certas estatísticas, as estimativas obtidas por simulação são frequentemente usadas conjuntamente com uma aproximação normal, especialmente em grandes amostras. Contudo, em algumas situações, essa aproximação é inadequada. É a função de distribuição empírica (FDE) desses valores simulados que pode fornecer uma aproximação mais precisa. A distribuição de $T - \theta$ é frequentemente aproximada por aquela de $T^* - \tau$. As probabilidades são, então, estimadas pela FDE dos valores simulados $\tau^* - \tau$,

ou seja, se $G(x) = P(T - \theta \leq x)$, então a estimativa por simulação de $G(x)$ é dada por

$$\widehat{G}_R(x) = \frac{\#\{\tau_r^* - \tau \leq x\}}{R} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R I(\tau_r^* - \tau \leq x),$$

onde $I(A)$ é uma variável indicadora que assume valor 1 se o evento A ocorre e zero caso contrário. À medida que R cresce, essa estimativa converge para $\widehat{G}(x)$, que é a função de distribuição de $T^* - \tau$. Deve-se notar que a aproximação de G por \widehat{G}_R contém duas fontes de erros: aquela entre G e \widehat{G} devido à variabilidade dos dados e aquela entre \widehat{G}_R e \widehat{G} devida à simulação. No que se refere ao erro causado pela variabilidade dos dados, uma boa discussão pode ser encontrada em Davison & Hinkley (1997). Os erros devidos à simulação, caso mais relacionado ao assunto tratado aqui, ocorrem, por exemplo, quando se aproxima a estimativa do viés por

$$B_R = R^{-1} \sum_{r=1}^R (T_r^* - \tau)$$

e quando são usadas outras aproximações desse tipo. Neste caso, a variabilidade de $R^{-1} \sum T_r^*$ só pode ser completamente removida por uma simulação infinita que, na prática, obviamente não é viável. Contudo, esse erro pode ser minimizado com uma escolha cuidadosa de R , como foi mencionado anteriormente.

No que diz respeito à estimação dos quantis da distribuição de $T - \theta$, muitas vezes esses quantis são aproximados usando valores ordenados de $\tau^* - \tau$. Um resultado subjacente usado aqui é que se x_1, \dots, x_n são independentes e distribuídos com função de distribuição (FD) comum G e se $x_{(j)}$ denota o j -ésimo valor ordenado, então

$$E(x_{(j)}) = G^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right),$$

onde G^{-1} é a inversa de G . Assim, para $0 < p < 1$, uma estimativa de $G^{-1}(p)$ é $x_{((n+1)p)}$, sendo $(n+1)p$ um número inteiro. O quantil p da distribuição de $T - \theta$ pode, então, ser estimado pelo $(R+1)p$ -ésimo valor ordenado de $\tau^* - \tau$, que é $\tau_{((R+1)p)}^* - \tau$, onde R é escolhido de tal forma que $(R+1)p$ seja inteiro.

A maior aplicação dos quantis da distribuição de uma estatística e da própria distribuição dessa estatística é na construção de intervalos de confiança e o método bootstrap pode ser usado de várias formas nesse contexto. A forma mais simples é usar uma aproximação normal para a distribuição de T . Neste caso, usando estimativas obtidas por bootstrap para os quantis da distribuição de $T - \theta$, um intervalo de confiança $(1 - 2\alpha) \times 100\%$ terá limites

$$\tau - (\tau_{((R+1)(1-\alpha))}^* - \tau), \tau - (\tau_{((R+1)\alpha)}^* - \tau).$$

Quanto mais a distribuição de $T^* - \tau$ se aproximar da distribuição de $T - \theta$, mais preciso será esse intervalo. Essas distribuições irão coincidir quando $T - \theta$ for pivotal. Entretanto, a distribuição de $T - \theta$ freqüentemente depende de valores desconhecidos, de forma que se torna necessário encontrar expressões alternativas, como a versão “studentizada” de $T - \theta$, definida como

$$z = \frac{T - \theta}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(T|F)}}.$$

A idéia é imitar a estatística t , que tem essa forma (Davison & Hinkley, 1997, p.29). Os quantis de z podem ser estimados através de replicações de $z^* = (T^* - \tau)/\sqrt{\widehat{\text{var}}^*(T|F)}$, onde T^* e $\widehat{\text{var}}^*(\cdot)$ são baseados na amostra aleatória simulada. Neste caso, o intervalo de confiança para θ tem limites

$$\tau - v^{1/2} z_{((R+1)(1-\alpha))}^*, \tau - v^{1/2} z_{((R+1)\alpha)}^*,$$

onde v é uma estimativa da variância de T .

Deve-se ressaltar que essas são apenas duas maneiras de se utilizar o bootstrap na construção de intervalos de confiança. Maiores detalhes podem ser encontrados em Davison & Hinkley (1997), Efron & Tibshirani (1993) e MacKinnon (2002), dentre muitos outros.

1.3 Alguns resultados assintóticos

Uma questão de suma importância no que se refere ao bootstrap diz respeito a por que o método funciona e quando ele funciona. Colocado de outra forma, o método realmente fornece resultados confiáveis quando usado com o tipo de dados que se tem na prática? Para responder a perguntas como essa, é importante considerar alguns aspectos teóricos do método bootstrap.

Suponha que se tem uma amostra aleatória x_1, \dots, x_n ou, equivalentemente, sua FDE \mathcal{F} , a partir da qual se deseja estimar propriedades de uma quantidade $Q = q(x_1, \dots, x_n; F)$. Por exemplo, suponha que se tenha

$$Q(x_1, \dots, x_n; F) = n^{1/2} \left\{ \bar{X} - \int x dF(x) \right\} = n^{1/2} (\bar{X} - \theta),$$

onde $\bar{X} = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$ e se queira estimar a função de distribuição

$$G_{F,n}(q) = P\{Q(x_1, \dots, x_n; F) \leq q|F\}.$$

O condicionamento em F indica que x_1, \dots, x_n é uma amostra aleatória de F . A estimativa de bootstrap dessa função de distribuição é

$$G_{\widehat{F},n}(q) = P\{Q(x_1^*, \dots, x_n^*; \widehat{F}) \leq q | \widehat{F}\},$$

onde $Q(x_1^*, \dots, x_n^*; \widehat{F}) = n^{1/2}(\overline{X}^* - \bar{x})$, sendo $\bar{x} = n^{-1} \sum_{t=1}^n x_t$. Supondo que a verdadeira distribuição F é circundada por uma vizinhança \mathcal{V} num espaço de distribuições e que, quando $n \rightarrow \infty$, \widehat{F} está em \mathcal{V} com probabilidade um, existem três condições para que $G_{\widehat{F},n}$ se aproxime de $G_{F,n}$, a saber:

- 1) para qualquer $A \in \mathcal{V}$, $G_{A,n}$ deve necessariamente convergir fracamente para um limite $G_{A,\infty}$;
- 2) essa convergência tem que ser uniforme em \mathcal{V} ;
- 3) a função $g : A \rightarrow G_{A,\infty}$ tem que ser contínua.

Aqui, convergência fraca quer dizer que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int h(x) dG_{A,n}(x) \rightarrow \int h(x) dG_{A,\infty}(x)$$

para qualquer função $h(\cdot)$ que seja contínua, real e limitada. Sob essas condições, o método bootstrap é consistente, ou seja, para quaisquer q e $\epsilon > 0$, $P\{|G_{\widehat{F},n}(q) - G_{F,\infty}(q)| > \epsilon\} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se uma dessas condições não se verificar, o método bootstrap poderá falhar.

Uma vez estabelecida a consistência, o que significa dizer que o método é válido assintoticamente, resta saber se ele é realmente bom em relação a outros métodos. Para tanto, deve-se analisar as taxas de convergência. Por exemplo, a cobertura do intervalo de confiança difere de $(1 - 2\alpha)$ por $O_p(n^{-1/2})$ ou $O_p(n^{-1})$? Respostas a perguntas como essa podem ser dadas com a utilização de métodos de expansão. Suponha que a distribuição limite de Q seja normal padrão e que a expansão de Edgeworth se aplica. Então, a função de distribuição de Q pode ser escrita da forma

$$P(Q \leq q | F) = \Phi(q) + n^{-1/2} a(q) \phi(q) + O(n^{-1}),$$

onde $\Phi(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ são, respectivamente, a função de distribuição e a função densidade da distribuição normal padrão e $a(\cdot)$ é uma função quadrática par. Em geral, a versão bootstrap correspondente é

$$P(Q^* \leq q | \widehat{F}) = \Phi(q) + n^{-1/2} \widehat{a}(q) \phi(q) + O(n^{-1}),$$

onde $\widehat{a}(\cdot)$ é obtida substituindo os valores desconhecidos de $a(\cdot)$ por suas estimativas. No entanto, tipicamente $\widehat{a}(q) = a(q) + O_p(n^{-1/2})$, então

$$P(Q^* \leq q|\widehat{F}) - P(Q \leq q|F) = O_p(n^{-1}). \quad (1.1)$$

Dessa forma, a distribuição estimada de Q difere da verdadeira distribuição por um termo que é $O_p(n^{-1})$, uma vez que Q tenha sido construída de tal forma que seja assintoticamente pivotal. Um argumento similar também é válido quando Q tem uma outra distribuição limite qualquer, desde que não dependa de valores desconhecidos (Davison & Hinkley, 1997, p.40). De fato, suponha que a distribuição limite de Q seja normal com variância σ^2 . Ainda assim a expansão de Edgeworth se aplica, agora com a forma

$$P(Q \leq q|F) = \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) + n^{-1/2}a'\left(\frac{q}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) + O(n^{-1}),$$

onde $a'(\cdot)$ é um polinômio quadrático diferente de $a(\cdot)$. A expansão correspondente para Q^* é

$$P(Q^* \leq q|\widehat{F}) = \Phi\left(\frac{q}{\widehat{\sigma}}\right) + n^{-1/2}a'\left(\frac{q}{\widehat{\sigma}}\right)\phi\left(\frac{q}{\widehat{\sigma}}\right) + O_p(n^{-1}).$$

Tipicamente, $\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2 + O_p(n^{-1/2})$, então

$$P(Q^* \leq q|\widehat{F}) - P(Q \leq q|F) = O_p(n^{-1/2}), \quad (1.2)$$

onde $\widehat{\sigma}^2 = (n-1)^{-1}\sum_{j=1}^n(x_j - \bar{x})^2$.

A diferença entre (1.1) e (1.2) explica a importância de se trabalhar com quantidades aproximadamente pivotaes sempre que for possível. O uso de quantidades com essa característica garante que as funções de distribuição obtidas por bootstrap sejam uma ordem de magnitude mais próximas da verdadeira distribuição (Davison & Hinkley, 1997, p.40).

Em algumas situações, entretanto, o método bootstrap provavelmente irá falhar, como no caso de dados dependentes. Um bom exemplo disso é o caso em que os dados x_1, \dots, x_n formam uma realização de uma série temporal. Suponha que os dados vêm de uma série estacionária $\{X_t\}$, cuja variância é $\sigma^2 = \text{var}(X_t)$ e cujas autocorrelações são $\rho_h = \text{cor}(X_t, X_{t+h})$ para $h = 1, 2, \dots$. A estimativa feita por bootstrap não-paramétrico da variância de \bar{X} é aproximadamente $\widehat{\sigma}^2/n$ que, para grandes valores de n , será próxima de σ^2/n . No caso considerado aqui, onde $\{X_t\}$ é uma série temporal, a variância de \bar{X} é

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \rho_h.$$

Esse somatório será consideravelmente diferente de um e a estimativa por bootstrap da variância estará errada. A essência desse problema é que a amostragem de bootstrap impõe mútua independência dos X_t 's, assumindo que sua distribuição conjunta seja $F(x_1) \times \cdots \times F(x_n)$ e amostrando de sua estimativa $\widehat{F}(x_1^*) \times \cdots \times \widehat{F}(x_n^*)$, o que é incorreto para dados dependentes. A dificuldade é que, neste caso, não existe uma maneira óbvia de se estimar uma densidade conjunta geral para X_1, \dots, X_n dada uma realização.

Capítulo 2

Heteroscedasticidade

2.1 Introdução

Análise de regressão é talvez a técnica estatística mais utilizada em aplicações, sendo particularmente importante em econometria. O modelo de regressão linear, em particular, é amplamente utilizado em situações onde se pretende estudar a relação estocástica entre variáveis explanatórias e uma variável dependente. Nesse contexto, a técnica de estimação conhecida como mínimos quadrados ordinários (MQO) é a mais comumente utilizada e, em certo sentido, a mais importante (Davidson & MacKinnon, 1993, p.3). A grande utilização deste método advém, talvez, da facilidade de cálculo dos estimadores e das boas propriedades que eles apresentam, como não-viés, consistência e eficiência. Uma análise bastante completa a respeito das características destes estimadores pode ser encontrada em Davidson & MacKinnon (1993) e uma discussão também bastante ampla sobre o modelo de regressão linear pode ser encontrada em obras como Draper & Smith (1980) e Theil (1971), dentre muitas outras.

Contudo, a estimação realizada por mínimos quadrados ordinários nem sempre é a mais adequada, em especial quando as suposições normalmente feitas sobre o modelo não se verificam, o que não é apenas uma rara exceção à regra. De fato, segundo White (2001), os dados resultam geralmente de processos estocásticos que se encontram fora do controle do pesquisador. Por essa razão os erros do modelo podem não seguir distribuição normal, bem como podem apresentar heteroscedasticidade (variância não-constante) e correlação serial, violando suposições feitas sobre o modelo, uma vez que usualmente se supõe que os erros apresentam variância constante e que quaisquer dois erros são não-correlacionados, conforme será visto posteriormente.

A presença de heteroscedasticidade, em particular, é um problema bastante comum em dados de corte transversal. Neste caso, os estimadores de MQO dos parâmetros de regressão permanecem não-viesados e consistentes. Entretanto, os estimadores usuais das variâncias dos estimadores de MQO se tornam inconsistentes, fazendo com que os testes t e F usuais se tornem pouco confiáveis. Assim, outros métodos de estimação da matriz de covariâncias se tornam necessários; alguns desses métodos serão apresentados no decorrer da presente dissertação.

Neste capítulo serão apresentados o modelo de regressão linear e as suposições geralmente feitas sobre ele. Serão apresentadas também as consequências da violação da suposição de homoscedasticidade sobre os estimadores de mínimos quadrados ordinários e algumas alternativas normalmente utilizadas para contornar o problema que surge com tal violação.

2.2 O modelo

O modelo que será considerado nessa dissertação é da forma

$$y = X\beta + u,$$

onde y é um vetor $n \times 1$ de respostas, X é uma matriz $n \times k$ de regressores fixos com posto(X) = k , β é um vetor $k \times 1$ de parâmetros lineares, u é um vetor $n \times 1$ de erros aleatórios, sendo n o número de observações e k o número de parâmetros lineares no modelo ($k < n$). As suposições normalmente feitas sobre o modelo são as seguintes:

- i) $y = X\beta + u$ é o modelo correto;
- ii) $E(u_t) = 0 \quad \forall t$;
- iii) $\text{var}(u_t) = \sigma^2 > 0 \quad \forall t$;
- iv) $\text{cov}(u_s, u_t) = 0 \quad \forall s \neq t$.

De acordo com essas suposições, o vetor de erros possui média zero e matriz de covariâncias $\Omega = \sigma^2 I$, sendo I a matriz identidade de ordem n . Uma quinta suposição é acrescentada quando o objetivo é a realização de inferência, a saber:

$$v) u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I).$$

Segundo White (2001), muitos estimadores podem ser vistos como resultantes da solução de um problema de otimização. Nesse contexto, o estimador de mínimos quadrados ordinários é o valor que minimiza a soma dos quadrados dos erros:

$$S = u'u = (y - X\beta)'(y - X\beta).$$

A condição de primeira ordem para a minimização de S é dada por

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'(y - X\beta) = 0,$$

de forma que, se $X'X$ for não-singular, obtém-se o estimador de mínimos quadrados ordinários dos parâmetros do modelo:

$$\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

É possível derivar algumas propriedades relativas a este estimador, que se encontram apresentadas nos teoremas a seguir.

Teorema 1.1 Dadas as suposições (i) e (ii) o vetor $\widehat{\beta}$ é um estimador não-viesado do vetor de parâmetros β , ou seja, $E(\widehat{\beta}) = \beta$.

Prova. Temos

$$E(\widehat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'y],$$

e, dada a suposição (i),

$$\begin{aligned} E(\widehat{\beta}) &= E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u] \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(u) \\ &= \beta. \end{aligned}$$

■

Foram utilizados o fato de $(X'X)^{-1}X'X = I$ e a suposição (ii). É importante ressaltar que a suposição (iii) não foi utilizada, ou seja, não é preciso assumir homoscedasticidade para que o estimador de mínimos quadrados ordinários seja não-viesado.

Com o propósito de mostrar a consistência do estimador de MQO, serão enunciados dois lemas cujas provas podem ser encontradas em James (1981).

Lema 1.1 (Lei Fraca de Tchebychev) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes duas a duas com variâncias finitas e uniformemente limitadas (i.e., existe uma constante c finita tal que para todo $t = 1, \dots, n$, $\text{var}(X_t) \leq c$). Então,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0,$$

onde $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Lema 1.2 (Slutsky) Sejam X, X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis aleatórias tais que $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$, onde c é uma constante. Então,

- a) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$;
- b) $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - c$;

- c) $X_n Y_n \xrightarrow{d} Xc$;
d) Se $c \neq 0$ e $P(Y_n \neq 0) = 1$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$.

Teorema 1.2 O estimador de mínimos quadrados ordinários $\widehat{\beta}$ é estimador consistente para β , ou seja, $\text{plim}(\widehat{\beta}) = \beta$.

Prova. O estimador $\widehat{\beta}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u \\ &= \beta + \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \left(\frac{X'u}{n}\right).\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\text{plim}(\widehat{\beta}) = \text{plim}(\beta) + \text{plim}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{X'u}{n}\right),$$

onde plim denota limite em probabilidade. Dadas as suposições (ii) e (iii) e assumindo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (X'\Omega X/n) = \mathcal{S}$, onde \mathcal{S} é uma matriz finita e positiva-definida, tem-se pelo Lema 1.1 que

$$\text{plim}\left(\frac{X'u}{n}\right) = 0,$$

uma vez que $X'u = \sum_{t=1}^n X'_t u_t$, onde X_t é a t -ésima linha da matriz X e $E\left(\sum_{t=1}^n X'_t u_t\right) = 0$.

Assumindo que todo tipo de convergência é preservado por funções contínuas, que a matriz X é não-estocástica e supondo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (X'X/n) = \mathcal{Q}$, onde \mathcal{Q} é uma matriz finita e positiva-definida, tem-se que

$$\begin{aligned}\text{plim}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} &= \left(\text{plim}\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(\lim\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \\ &= \mathcal{Q}^{-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\text{plim}(\widehat{\beta}) = \beta + \mathcal{Q}^{-1}0 = \beta.$$

■

Também aqui não foi necessário assumir homoscedasticidade.

A matriz de covariâncias do estimador de mínimos quadrados ordinários pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Psi = \text{var}(\widehat{\beta}) &= E[(\widehat{\beta} - \beta)(\widehat{\beta} - \beta)'] \\
&= E\{[(X'X)^{-1}X'u][(X'X)^{-1}X'u]'\} \\
&= E\{[(X'X)^{-1}X'u][u'X(X'X)^{-1}]\} \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1},
\end{aligned}$$

onde $\Omega = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}$. Sob homoscedasticidade, temos que $\text{var}(u) = \sigma^2 I$ e a matriz de covariâncias de $\widehat{\beta}$ se torna

$$\Psi = \sigma^2(X'X)^{-1}.$$

O Teorema de Gauss-Markov, enunciado e demonstrado a seguir, atesta que o estimador de mínimos quadrados ordinários possui a menor variância na classe dos estimadores lineares não-viesados.

Teorema 1.3 Sejam $\Psi(\widehat{\beta})$ a matriz de covariâncias do estimador de mínimos quadrados ordinários e $\Psi(\widetilde{\beta})$ a matriz de covariâncias de um outro estimador linear não-viesado, $\widetilde{\beta}$. Sob as suposições (i)-(iv), $\Psi(\widetilde{\beta}) - \Psi(\widehat{\beta})$ é uma matriz positiva semidefinida.

Prova. Como $\widetilde{\beta}$ é um estimador linear, ele pode ser escrito na forma

$$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y + Cy,$$

onde C é uma matriz não-aleatória de dimensão $k \times n$. Deve-se notar que $\widehat{\beta}$ também pode ser escrito dessa forma (é um membro da classe dos estimadores lineares) quando C é uma matriz de zeros. Usando a suposição (i), pode-se escrever $\widetilde{\beta}$ como

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta} &= [(X'X)^{-1}X' + C](X\beta + u) \\
&= \beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Cu.
\end{aligned}$$

Dada a suposição (ii), tem-se que $E(\widetilde{\beta}) = \beta + CX\beta$. Para que $\widetilde{\beta}$ seja não-viesado, deve-se

ter $CX = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta} &= E[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'] \\
&= [C + (X'X)^{-1}X']E(uu')[C' + X(X'X)^{-1}] \\
&= [C + (X'X)^{-1}X']\sigma^2I[C' + X(X'X)^{-1}] \\
&= \sigma^2[CC' + (X'X)^{-1}X'C' + CX(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}] \\
&= \sigma^2[CC' + (X'X)^{-1}] \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2CC'.
\end{aligned}$$

Acima foram utilizadas as suposições (iii) e (iv). A diferença entre a matriz de covariâncias de $\tilde{\beta}$ e a de $\hat{\beta}$ é σ^2CC' , que é uma matriz positiva semidefinida. ■

Deve-se notar, aqui, que o uso da suposição de homoscedasticidade é fundamental. De fato, na presença de heteroscedasticidade, o estimador de mínimos quadrados ordinários não é necessariamente o melhor estimador linear não-viesado, ou seja, quando a suposição (ii) é violada, um outro estimador linear de β possui variância menor que a variância do estimador de mínimos quadrados ordinários. Esse estimador é conhecido como estimador de mínimos quadrados generalizados (MQG) e pode ser obtido através de uma transformação do modelo original, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{\beta}_G = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y.$$

Sua matriz de covariâncias é da forma

$$\Psi_G = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

Como resultado, tem-se que, sob heteroscedasticidade, o estimador de mínimos quadrados ordinários permanece não-viesado e consistente, tornando-se, contudo, ineficiente.

É importante ressaltar que para obter o estimador de mínimos quadrados generalizados é preciso conhecer completamente a estrutura da heteroscedasticidade dada pela função cedástica. Segundo Davidson & MacKinnon (1993, p.547), “it is perfectly easy to estimate a regression model by weighted least squares (i.e., GLS) when the error terms are heteroskedastic with a pattern of heteroskedasticity that is determined by a known skedastic function. (...) it is reasonably easy to estimate a regression model by feasible GLS or maximum likelihood when the parameters of the skedastic function are not known, but its form is.” Contudo, a estrutura da heteroscedasticidade raramente é conhecida e, na prática, um procedimento bastante utilizado é estimar os parâmetros do modelo por mínimos quadrados ordinários e usar um estimador consistente da matriz de covariâncias do estimador assim obtido. A

importância dessa prática pode ser percebida no comentário de Woodridge (2000, p.249): “In the last two decades, econometricians have learned to adjust standard errors, t , F and LM statistics so that they are valid in the presence of heteroskedasticity of unknown form. This is very convenient because it means we can report new statistics that work, regardless of the kind of heteroskedasticity present in the population.”

O problema, durante muito tempo, foi encontrar um estimador consistente para a matriz de covariâncias dos estimadores de mínimos quadrados ordinários, tarefa que parecia impossível, uma vez que Ω possui n elementos diagonais a serem estimados, tendo-se para tanto exatamente n observações. Após alguns trabalhos seminiais, como os de Eicker (1963, 1967) e Hinkley (1977), White propôs, num influente artigo de 1980, o estimador que hoje é o mais utilizado, quando se suspeita de heteroscedasticidade, conhecido como HC0. White percebeu que não é a matriz Ω que deve ser estimada consistentemente e sim a matriz $X'\Omega X$, que possui $\frac{1}{2}(k^2 + k)$ elementos e, por isso, pode ser estimada consistentemente. Assim, $\frac{1}{n}(X'\Omega X)$ pode ser estimado por

$$\frac{1}{n}(X'\widehat{\Omega}X),$$

onde $\widehat{\Omega}$ é um estimador de Ω . O estimador proposto por White (1980) é obtido substituindo o t -ésimo elemento diagonal de Ω pelo quadrado do t -ésimo resíduo de MQO, ou seja,

$$\widehat{\Omega} = \text{diag}\{\widehat{u}_1^2, \dots, \widehat{u}_n^2\}. \quad (2.1)$$

O estimador HC0, no entanto, pode ser bastante viesado em amostras pequenas ou de tamanho moderado. Ele tipicamente subestima as verdadeiras variâncias, podendo conduzir a testes quasi- t associados bastante liberais, no sentido de rejeitar a hipótese nula um número maior de vezes do que aquele dado pelo nível nominal, quando essa hipótese é verdadeira. Chesher & Jewitt (1987) mostraram que o viés deste estimador pode ser expressivo mesmo em grandes amostras. Entretanto, é possível modificar o estimador de White para que ele apresente melhores propriedades em pequenas amostras. A forma mais fácil, segundo Davidson & MacKinnon (1993), é multiplicar (2.1) por $\frac{n}{n-k}$, obtendo o estimador proposto por Hinkley (1977) e conhecido como HC1, que usa

$$\widehat{\Omega} = \frac{n}{n-k} \text{diag}\{\widehat{u}_1^2, \dots, \widehat{u}_n^2\}.$$

No caso em que há homoscedasticidade, a esperança de \widehat{u}_t^2 é dada por $\sigma^2(1 - h_t)$, onde h_t é o t -ésimo elemento diagonal da matriz H , definida como $H = X(X'X)^{-1}X'$. De fato, definindo $M = I - H$, o vetor de resíduos \widehat{u} pode ser escrito como

$$\hat{u} = My = M(X\beta + u).$$

Dessa forma,

$$E(\hat{u}) = E(My) = E[M(X\beta + u)].$$

Uma vez que $MX = (I - H)X = 0$, tem-se que

$$E(\hat{u}) = E(Mu) = 0$$

e assim

$$\begin{aligned} E(\hat{u}\hat{u}') &= \text{var}(\hat{u}) + E(\hat{u})E(\hat{u}') \\ &= \text{var}(Mu) \\ &= M\Omega M'. \end{aligned}$$

Sob homoscedasticidade, tem-se que $\Omega = \sigma^2 I$ e, como M é uma matriz simétrica e idempotente, obtemos

$$E(\hat{u}\hat{u}') = M\sigma^2 M = \sigma^2 M = \sigma^2(I - H). \quad (2.2)$$

Cada elemento diagonal de (2.2) é dado por

$$E(\hat{u}_t^2) = \sigma^2(1 - h_t).$$

Assim, dividindo \hat{u}_t^2 por $1 - h_t$ obter-se-ia uma estimativa não-viesada para σ^2 caso os erros fossem homoscedásticos. Numa analogia para o caso heteroscedástico, Horn, Horn & Duncan (1975) sugeriram o estimador conhecido como HC2 e que utiliza, em sua definição,

$$\hat{\Omega} = \text{diag} \left\{ \frac{\hat{u}_1^2}{1 - h_1}, \dots, \frac{\hat{u}_n^2}{1 - h_n} \right\}.$$

Contudo, na presença de heteroscedasticidade, as observações com maior variância tenderão a ser mais influentes, produzindo resíduos consideravelmente menores do que aqueles produzidos pelas demais observações. Dessa forma, pode ser necessário inflacionar um pouco mais os resíduos de mínimos quadrados ordinários, fazendo

$$\hat{\Omega} = \text{diag} \left\{ \frac{\hat{u}_1^2}{(1 - h_1)^2}, \dots, \frac{\hat{u}_n^2}{(1 - h_n)^2} \right\}.$$

O estimador que utiliza essa definição de $\hat{\Omega}$, conhecido como HC3, é uma aproximação para o estimador obtido através da técnica jackknife, cuja idéia básica é recalculas as estimativas dos parâmetros de um modelo n vezes, cada vez retirando uma das observações e, então, usar a variabilidade das estimativas como uma estimativa da variabilidade do estimador original.

É importante notar também que as correções para amostras finitas usadas nas definições de HC2 e HC3 são baseadas no grau de alavancagem de cada observação. Quanto maior o grau de alavancagem de uma observação, mais o quadrado do resíduo de MQO correspondente será inflacionado. Isso se deve ao fato do forte viés negativo do estimador de White surgir quando há um grande h_t , pois o resíduo de MQO associado tem pequena magnitude em média e o estimador de White interpreta pequenos resíduos como evidência de pequenas variâncias dos erros (Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira, 2002).

O comportamento de estatísticas quasi- t baseadas nesses estimadores em pequenas amostras foi estudado por MacKinnon & White (1985). Segundo eles, os testes baseados no estimador HC0 foram os que apresentaram o pior desempenho, tendendo a rejeitar demasiadamente a hipótese nula. Os testes baseados nos estimadores HC1 e HC2 apresentaram desempenho melhor que aquele baseado em HC0. Contudo, os testes baseados no estimador de jackknife, que é aproximado por HC3, foram os que apresentaram os melhores resultados. Chesher & Jewitt (1991), com base em integração numérica, também verificam a superioridade de HC3 sobre os estimadores concorrentes. Long & Ervin (2000) fornecem exaustivos resultados de simulação que apontam HC3 como o melhor estimador na classe dos HC's. Os autores recomendam a utilização do HC3 em amostras de 250 observações ou menos.

Deve-se notar que esses estimadores são, em geral, viesados. O estimador HC1, em particular, só não o será no caso especial de um experimento balanceado, onde $h_t = k/n$ para todo t . Contudo, esse é um caso bastante raro. Em geral, algumas observações exercem maior influência sobre o vetor estimado de parâmetros do que outras. Caso isso aconteça, os dados devem ser analisados com cuidado. Segundo Davidson & MacKinnon (1993, p.32), “it may be that these influential observations are erroneous or for some reason untypical of the rest of the sample. (...) even a single erroneous observation can have an enormous effect on $\hat{\beta}$ in some cases. Thus it may be extremely important to identify and correct such observations if they are influential. Even if the data are all correct, the interpretation of the results may change substantially if it is known that one or a few observations are primarily responsible for those results, especially if those observations differ systematically in some way from the rest of the data.”

Uma forma de detectar observações influentes é através da chamada matriz chapéu:

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

Deve-se, inicialmente, notar que H depende apenas da matriz X e não depende de forma alguma do vetor y . Escrevendo o t -ésimo elemento diagonal da matriz chapéu como $h_t = e_t'He_t = \|He_t\|^2$, onde e_t é um vetor de dimensão n contendo 1 na t -ésima posição e zero

nas outras, pode-se perceber que h_t é o quadrado do comprimento de um certo vetor, o que implica $h_t \geq 0$. Por outro lado, $\|e_t\| = 1$ e, como o comprimento do vetor He_t não pode ser maior que o comprimento de e_t (H é uma matriz de projeção ortogonal), $h_t \leq 1$. Dessa forma, $0 \leq h_t \leq 1$.

O efeito de uma observação individual sobre $\hat{\beta}$ pode ser visto comparando $\hat{\beta}$ a $\hat{\beta}^{(t)}$, que é a estimativa de β que seria obtida sem a t -ésima observação. Temos que

$$\hat{\beta}^{(t)} = \hat{\beta} - \left(\frac{1}{1 - h_t} \right) (X'X)^{-1} X_t' \hat{u}_t, \quad (2.3)$$

onde \hat{u}_t é o t -ésimo elemento do vetor de resíduos.

Outra característica importante da matriz chapéu é que a soma dos h_t 's é igual a k , conforme se pode verificar utilizando as propriedades usuais do traço de uma matriz:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n h_t &= \text{tr}[X(X'X)^{-1}X'] \\ &= \text{tr}[(X'X)^{-1}X'X] \\ &= \text{tr}[I] = k. \end{aligned}$$

Portanto, na média, os h_t 's devem ser iguais a $\frac{k}{n}$. Segundo uma regra de bolso comumente utilizada, se algum h_t for maior que duas vezes o valor médio, a observação correspondente possui alta alavancagem. Dito de outra forma, se $h_t > \frac{2k}{n}$, a t -ésima observação possui alta alavancagem. Se todos os h_t 's forem iguais a $\frac{k}{n}$, caso em que o único regressor é um termo constante, por exemplo, todas as observações têm a mesma alavancagem. Essa seria a situação mais desejável, contudo é raramente verificada, uma vez que a matriz X em geral não está sob controle do investigador.

Analisando-se a equação (2.3) pode-se perceber que o efeito da t -ésima observação sobre alguns elementos de $\hat{\beta}$ será substancial se \hat{u}_t for grande e/ou se $(1 - h_t)$ for pequeno, ou seja, quando h_t é relativamente grande, a retirada da t -ésima observação terá um grande impacto sobre $\hat{\beta}$, a menos que \hat{u}_t seja muito próximo de zero. Dito de outra forma, uma observação pode ter um alto grau de alavancagem mas não ser muito influente, caso h_t seja grande mas \hat{u}_t , pequeno. Uma observação com alto grau de alavancagem é potencialmente influente, mas se esse potencial será realizado depende de y_t .

A relação entre a presença de observações potencialmente influentes e o comportamento dos HC's é discutida em Chesher & Jewitt (1987). Segundo os autores, a presença de observações potencialmente influentes pode levar a vieses substanciais. Cribari-Neto & Zarkos (2001), através de estudos de Monte Carlo, mostraram que observações potencialmente influentes causam um grande impacto sobre o comportamento dos HC's em pequenas amostras.

Segundo os autores, a presença de observações potencialmente influentes é mais decisiva para o viés dos estimadores consistentes que o grau de heteroscedasticidade. Cribari–Neto & Zarkos (2004) propõem esquemas de bootstrap que são robustos contra heteroscedasticidade e, ao mesmo tempo, levam em consideração o efeito de observações potencialmente influentes sobre a realização de inferência.

Estimadores da matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$ baseados em esquemas de bootstrap aparecem como alternativas aos HC's expostos anteriormente. O método bootstrap “recicla” a informação disponível na amostra para inferir a respeito da distribuição da estatística de interesse e geralmente fornece uma aproximação para a distribuição da quantidade de interesse que é pelo menos tão precisa quanto aproximações assintóticas de primeira ordem.

O procedimento de bootstrap mais simples que pode ser usado para se obter uma estimativa da estrutura de covariâncias de $\hat{\beta}$ é chamado de ‘naïve’ e pode ser descrito pelos seguintes passos:

- 1 - Retira-se, com reposição, uma amostra aleatória $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)'$ dos resíduos \hat{u} da regressão.
- 2 - Forma-se uma amostra bootstrap, $y^* = X\hat{\beta} + \hat{u}^*$.
- 3 - Calcula-se a estimativa de MQO, $\beta^* = (X'X)^{-1}X'y^*$.
- 4 - Os passos 1 a 3 são repetidos um grande número (R) de vezes.
- 5 - Calcula-se a covariância dos R vetores de estimativas obtidas através dos passos 1 a 4.

Deve-se notar que o estimador obtido dessa forma não é consistente nem assintoticamente não-viesado se houver heteroscedasticidade. Um estimador consistente tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade de forma desconhecida baseado na reamostragem dos resíduos foi proposto por Wu (1986) e pode ser implementado modificando os passos 1 e 2 do esquema anterior como segue:

1.b - Para cada t , $t = 1, \dots, n$, retira-se aleatoriamente η_t^* de uma distribuição com média zero e variância unitária.

2.b - Forma-se uma amostra bootstrap (y^*, X) , onde $y_t^* = X_t\hat{\beta} + \eta_t^* \frac{\hat{u}_t}{\sqrt{1-h_t}}$.

Esse esquema de bootstrap é conhecido como bootstrap ponderado (ou bootstrap selvagem). Existem várias formas de se reamostrar η_t^* . Uma forma é reamostrar de a_1, \dots, a_n , onde

$$a_t = \frac{\hat{u}_t - \bar{\hat{u}}}{\sqrt{n^{-1} \sum_{j=1}^n (\hat{u}_j - \bar{\hat{u}})^2}},$$

com $\bar{\hat{u}} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \hat{u}_j$.

Uma outra possibilidade seria amostrar η_t^* , no esquema de bootstrap ponderado, não com probabilidade $1/n$, mas com uma probabilidade inversamente proporcional a h_t (Cribari-Neto & Zarkos, 2004). Fazendo

$$\delta = \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t} \quad \text{e} \quad f_t = \begin{cases} 1, & \text{se } h_t \leq 2k/n, \\ 3, & \text{se } h_t > 2k/n, \end{cases}$$

o esquema de bootstrap seria como segue:

1.c - Para cada t , $t = 1, \dots, n$, retira-se η_t^* de a_1, \dots, a_n , onde a_t é definido como antes. Aqui, a_t é selecionado com probabilidade p_t ; ver (2.4).

2.c - Forma-se a amostra bootstrap (y^*, X) , onde $y_t^* = X_t \hat{\beta} + \eta_t^* \frac{\hat{u}_t}{\sqrt{(1-h_t)^{f_t}}}$. Seja $p_t = \frac{\gamma}{h_t}$, onde γ é uma constante estritamente positiva. Então, $\sum_{t=1}^n p_t = 1$ implica

$$\sum_{t=1}^n \gamma h_t^{-1} = \gamma \sum_{t=1}^n h_t^{-1} = \gamma \delta = 1.$$

Assim,

$$p_t = \frac{1}{\delta h_t}. \tag{2.4}$$

A idéia aqui é que observações com alta alavancagem seriam selecionadas no esquema de reamostragem com probabilidade menor que aquela relacionada às outras observações. Ou seja, quanto maior o grau de alavancagem de uma observação, menos frequentemente o resíduo correspondente será selecionado na reamostragem.

Estudos realizados por Cribari-Neto & Zarkos (2004) sugerem que os estimadores da variância de $\hat{\beta}$ baseados em esquemas de bootstrap, especialmente aquele ponderado pelo inverso do grau de alavancagem, apresentam desempenho superior aos estimadores consistentes tradicionais, principalmente em situações não-balanceadas em que há observações potencialmente influentes. Sobre esse estimador, que é ponderado pelo inverso do grau de alavancagem e chamado por Cribari-Neto & Zarkos (2004) de ‘invwu’, é que versará a presente dissertação.

2.3 Uma breve revisão bibliográfica

Os estimadores consistentes apresentados anteriormente são comumente utilizados na realização de testes quasi- t , onde a hipótese a ser testada é $\mathcal{H}_0 : r'\beta = s$ contra uma hipótese alternativa bicaudal. Aqui, r é um vetor de dimensão k e s é um dado escalar. A estatística de teste quasi- t é dada por

$$\zeta = \frac{r'\widehat{\beta} - s}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(r'\widehat{\beta})}},$$

onde $\widehat{\text{var}}(\cdot)$ denota o estimador consistente considerado. A distribuição limite da estatística de teste ζ sob a hipótese nula é $\mathcal{N}(0, 1)$, independentemente da forma da heteroscedasticidade e de qual estimador consistente é utilizado (Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira, 2002). Assim, o valor crítico de nível α é obtido de uma distribuição normal padrão.

MacKinnon & White (1985) analisaram três versões modificadas do estimador consistente da matriz de covariâncias de White (HC1, HC2 e jackknife), comparando o desempenho das estatísticas quasi- t associadas a estes estimadores. Segundo os autores, o desempenho do estimador jackknife, que é uma forma aproximada de HC3, é melhor que o desempenho de todos os demais estimadores. Eles também estudaram uma alternativa para se alcançar inferências mais confiáveis em pequenas amostras quando há heteroscedasticidade de forma desconhecida, a saber: as aproximações de Edgeworth de Rothenberg (1984). Segundo os autores, essa alternativa é bem mais difícil de ser implementada que o estimador jackknife e seu desempenho é pior que o desempenho deste último quando o tamanho da amostra é pequeno. No que se refere aos testes alternativos de heteroscedasticidade estudados pelos autores, eles encontram que freqüentemente falta poder aos testes para que detectem níveis danosos de heteroscedasticidade. Os autores concluem, então, que seria sensato usar o estimador jackknife ao invés do estimador usual de MQO, mesmo quando se tem pouca evidência da presença de heteroscedasticidade.

Conforme mencionado anteriormente, Long & Ervin (2000) também estudaram o comportamento em pequenas amostras dos HC's em simulações de Monte Carlo e compararam o desempenho destes estimadores com base no tamanho de testes quasi- t associados. Segundo estes autores, para amostras com menos de 250 observações, HC3 deve ser usado. Neste caso, o uso de HC0 freqüentemente resulta em inferências incorretas. Quando o tamanho da amostra é 500 ou mais, outras versões dos HC's podem também ser usadas. A superioridade de HC3 sobre HC2 deve-se às melhores propriedades do primeiro quando os coeficientes estimados são fortemente afetados por heteroscedasticidade.

Os resultados contidos nos trabalhos citados acima, sugerem que o estimador de White (HC0) é consideravelmente viesado em amostras pequenas ou de tamanho moderado. Com base nessa deficiência de HC0, Cribari–Neto, Ferrari & Cordeiro (2000) propuseram um estimador modificado que é aproximadamente livre de viés. Resultados numéricos mostram que os estimadores modificados apresentam viés muito menor que o estimador de White em pequenas amostras. Os autores mostraram também que a correção do viés produz estimadores com variâncias maiores e que testes baseados nos estimadores corrigidos propostos por eles tipicamente apresentam menores distorções de tamanho.

Cribari–Neto & Galvão (2003) generalizaram os resultados de Cribari–Neto, Ferrari & Cordeiro (2000) definindo seqüências de estimadores corrigidos para a matriz de covariâncias que são consistentes sob heteroscedasticidade. Estes estimadores corrigidos podem ser obtidos a partir de HC0, HC1, HC2 ou HC3. Os autores compararam o desempenho dos estimadores corrigidos em relação aos estimadores originais. Os resultados encontrados por Cribari–Neto & Galvão (2003) indicam que o estimador HC0 tende a subestimar as verdadeiras variâncias, apresentando grandes vieses em amostras de tamanho pequeno a moderado. HC1 e HC2 corrigem essa tendência, sendo que o segundo o faz de forma mais eficiente. De acordo com os autores, o estimador HC3 tende a corrigir demasiadamente essa tendência, contudo seu desempenho é o menos afetado por aumentos no grau de heteroscedasticidade. No que se refere à correção de viés, o mecanismo iterativo utilizado pelos autores promove melhorias para todos os estimadores na classe dos HC's. Segundo eles, apenas duas iterações da seqüência corretiva proposta são tipicamente suficientes para reduzir consideravelmente o viés dos estimadores, independentemente da direção e da magnitude deste viés. Os resultados favorecem as versões corrigidas do estimador HC2.

Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira (2002) compararam os HC's e suas versões corrigidas usando métodos de integração numérica, mais especificamente o algoritmo de Imhof (1961). Os autores concluem que o teste que mais se beneficia do uso de estimadores ajustados para viés é o teste baseado no estimador HC0. Eles também encontram que o teste que apresenta melhor desempenho é o que utiliza o estimador HC3 não modificado. Em relação à estatística de teste construída usando o estimador HC3, os autores concluem que a correção deste estimador deteriora a aproximação assintótica de primeira ordem usada no teste. Um outro resultado importante encontrado pelos autores é que pontos de alavanca na estrutura de regressão levam a testes quasi- t com pior desempenho em amostras finitas, principalmente quando se trata de testes baseados no estimador HC0. Os testes baseados em HC3 são os menos sensíveis a observações com alta alavancagem. Esses resultados são parecidos com aqueles encontrados por Long & Ervin (2000). A diferença é que em Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira (2002) os resultados são exatos enquanto os resultados encontrados por Long & Ervin

(2000) são obtidos através de simulação estocástica. Outra diferença é que Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira (2002) consideram também as versões ajustadas para viés dos estimadores consistentes usuais.

Chesher & Austin (1991) também utilizam métodos de integração numérica para avaliar o desempenho de testes quasi- t baseados em HC's. Os resultados obtidos por eles também apontam para a superioridade dos testes quasi- t baseados no estimador HC3. A diferença em relação ao trabalho de Cribari–Neto, Ferrari & Oliveira (2002) é que estes, conforme dito acima, levam em consideração as versões modificadas para viés dos HC's.

Conforme mencionado anteriormente, a presença de observações potencialmente influentes (pontos de alavanca) na matriz de regressores causa grande impacto sobre o comportamento dos HC's em pequenas amostras, conduzindo a inferências pouco confiáveis. Com o objetivo de obter inferências mais precisas, levando em consideração a presença de pontos de alavanca em amostras finitas, Cribari–Neto (2003) propôs o estimador conhecido como HC4. Este estimador utiliza

$$\widehat{\Omega} = \text{diag} \left\{ \frac{\widehat{u}_1^2}{(1 - h_1)^{\kappa_1}}, \dots, \frac{\widehat{u}_n^2}{(1 - h_n)^{\kappa_n}} \right\},$$

onde $\kappa_t = \min\{4, h_t/\bar{h}\}$, com $\bar{h} = n^{-1} \sum_{i=1}^n h_i = k/n$, $t = 1, \dots, n$. O expoente κ_t controla o nível de desconto para a t -ésima observação, ou seja, o quadrado do t -ésimo resíduo será mais fortemente inflacionado quando h_t for grande em relação a \bar{h} . Esse desconto, entretanto, é truncado em 4, que equivale a duas vezes o grau de desconto utilizado no estimador HC3. O uso do estimador HC4 reduz as distorções de tamanho dos testes quasi- t associados quando há observações potencialmente influentes, apesar de ser viesado para as verdadeiras variâncias. Segundo o autor (p.18), “the HC4 estimator we propose, however, is suited for inference via quasi- t tests, but not for point estimation, since it is typically quite biased in finite samples.” Resultados numéricos mostram que o estimador HC4 apresenta comportamento em pequenas amostras superior ao comportamento do estimador HC3, no que diz respeito a inferência. Os testes quasi- t que utilizam o estimador HC4 são também mais confiáveis que aqueles realizados por bootstrap duplo, sendo, ainda, muito mais simples do ponto de vista computacional.

Bera et al. (2002) consideraram o estimador não-viesado de norma quadrática mínima (MINQUE) como uma alternativa aos HC's apresentados acima. Os autores compararam os estimadores HC0, HC2 e o estimador MINQUE através de expressões analíticas do erro quadrático médio. Segundo eles (p.126), “a contrast between the MINQUE and the Eicker-White consistent estimator of Ω can be made in terms of their weighting scheme. Each MINQUE of σ_t^2 is estimated by a linear combination of squares of all the OLS residuals with

the weights related to the design matrix X . In the Eicker-White approach, on the other hand, all the weights are given to the respective OLS squared residual (...). Clearly, the Eicker-White estimator is biased unless $H = X(X'X)^{-1}X'$ is a null matrix. (...) However, in finite sample problems, one or some h_t may not be small. (...) In such a situation the MINQUE may be useful as a point estimator.” Por construção, o estimador MINQUE incorpora toda a informação sobre a matriz de regressores, eliminando o viés que, sabidamente, é o que causa os problemas de inferência relacionados ao estimador de White (Bera et al., 2002, p.133). Entretanto, apesar de ser não-viesado por construção, o estimador MINQUE apresenta grande variância, especialmente quando existem pontos de alavanca na matriz de regressores. Os autores afirmam que, por isso, o estimador MINQUE não é o melhor em termos de erro quadrático médio.

No que se refere ao bootstrap ponderado/selvagem, Davidson & Flachaire (2001) desenvolveram expansões de Edgeworth para o erro na probabilidade de rejeição (EPR) de testes de bootstrap selvagem baseados em estatísticas t assintóticas calculadas com um estimador consistente da matriz de covariâncias. Os autores se interessam particularmente na distribuição auxiliar usada pelo bootstrap selvagem para gerar ‘erros bootstrap’ e, segundo eles, a distribuição de Rademacher¹ tipicamente fornece EPR menores, em pequenas amostras, que a versão de bootstrap selvagem mais utilizada na literatura. Simulações de Monte Carlo confirmam esses resultados conseguidos inicialmente através de expansões de Edgeworth, além de fornecer resultados sobre algumas questões para as quais as expansões não fornecem conclusões definitivas. Os autores concluem que uma versão particular de bootstrap selvagem — aquela baseada no que eles chamam de distribuição F_2 simétrica — deve ser preferencialmente utilizada em situações práticas.

Segundo Cribari-Neto & Zarkos (2004), estudos de Monte Carlo mostram que o desempenho do estimador de bootstrap ponderado em amostras pequenas ou de tamanho moderado pode ser bastante pobre quando existem pontos de alta alavancagem nos dados. Nesse sentido, os autores desenvolvem métodos alternativos de bootstrap que levam em consideração o efeito de observações potencialmente influentes na realização de inferências via testes quasi- t . Além do já citado estimador de bootstrap inversamente ajustado (‘invwu’), os autores consideram ainda os estimadores de bootstrap ponderado ajustado e o linearmente ajustado. Esse último pode ser descrito como a seguir. Seja

$$g_t = \min \left\{ \frac{h_t}{n^{-1} \sum_{t=1}^n h_t}, 3 \right\} = \min \left\{ \frac{nh_t}{k}, 3 \right\}.$$

O esquema de bootstrap é então calculado como segue:

¹ Uma variável aleatória segue distribuição de Rademacher quando assume os valores -1 com probabilidade $1/2$ e 1 com probabilidade $1/2$.

1. Para cada t , $t = 1, \dots, n$, retira-se η_t^* de uma distribuição com média zero e variância unitária;
2. Forma-se a amostra de bootstrap (y^*, X) , onde $y_t^* = X_t \hat{\beta} + \eta_t^* \hat{u}_t / \sqrt{(1 - h_t)^{g_t}}$, $t = 1, \dots, n$;
3. Calcula-se a estimativa OLS: $\beta^* = (X'X)^{-1} X' y^*$;
4. Repete-se os passos 1 a 3 um grande número (R) de vezes;
5. Calcula-se a variância dos R vetores de estimativas obtidas utilizando o esquema descrito nos passos 1 a 4.

A idéia nesse esquema é utilizar como fator de desconto a taxa entre a medida de alavancagem de cada observação e a média de todas as medidas de alavancagem. Esse desconto linear é feito até o ponto onde essa taxa é igual a três, sendo que para taxas superiores a três, fixa-se $g_t = 3$. O truncamento em três evita um fator de desconto excessivamente pequeno. Nesse esquema, a quantidade que controla o fator de desconto (g_t) cresce linearmente com h_t , a medida de alavancagem, até o ponto de truncamento. Os autores concluem que alguns dos estimadores propostos por eles apresentam desempenho superior em relação ao desempenho do estimador de bootstrap ponderado quando os dados apresentam pontos de alta alavancagem. Segundo eles “the results show that inference based on test that use the newly proposed estimators can be considerably more precise than inference relying on tests based on ‘usual’ (White, HC2, HC3, weighted bootstrap) estimators.” Eles ainda sugerem a utilização dos métodos de bootstrap propostos na realização de inferência em modelos de regressão linear possivelmente heteroscedásticos, especialmente quando a matriz de regressores inclui pontos de alta alavancagem.

Capítulo 3

Novos estimadores e avaliação numérica

3.1 Introdução

Conforme visto no capítulo anterior, estimadores da matriz de covariâncias baseados em esquemas de bootstrap constituem boas alternativas aos usuais estimadores consistentes da matriz de covariâncias. Em particular, o estimador desenvolvido por Cribari–Neto & Zarkos (2004), chamado por eles de ‘invwu’, apresenta desempenho superior aos estimadores consistentes tradicionais, como mencionado anteriormente. No presente capítulo procurar-se-á, primeiramente, analisar a sensibilidade do estimador ‘invwu’ a diferentes formas de reamostragem dos resíduos. Para tanto, serão desenvolvidas algumas variantes do estimador original (‘invwu’) que utilizam diferentes probabilidades de seleção dos resíduos no esquema de reamostragem. Posteriormente, será analisada a sensibilidade em amostras finitas do estimador original a erros que seguem distribuições não-normais.

3.2 Novos estimadores

Analisando a equação (2.4), pode-se perceber que a probabilidade de seleção dos resíduos no processo de reamostragem é inversamente proporcional ao grau de alavancagem da observação, ou seja,

$$p_t \propto \frac{1}{h_t}. \quad (3.1)$$

Entretanto, (3.1) pode ser generalizada como segue:

$$p_t \propto \frac{1}{h_t^\varphi}. \quad (3.2)$$

Introduzindo uma constante de proporcionalidade em (3.2) a fim de garantir $\sum_{t=1}^n p_t = 1$, tem-se que

$$p_t = \frac{1}{\xi h_t^\varphi},$$

onde $\xi = \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^\varphi}$.

No caso particular em que $\varphi = 0$, a probabilidade de seleção dos resíduos no esquema de reamostragem é constante e igual a $1/n$. Neste caso, o estimador resultante é o estimador de Wu (1986). Quando $\varphi = 1$, o estimador resultante é o estimador ‘invwu’ desenvolvido por Cribari–Neto & Zarkos (2004). Contudo, não existe, em princípio, nenhuma razão para acreditar que estes sejam os melhores valores para φ . No presente trabalho serão analisados os estimadores construídos de tal forma que as probabilidades de seleção dos resíduos utilizam $\varphi = 0.5$, $\varphi = 0.75$, $\varphi = 1.25$.

Outros estimadores podem também ser construídos utilizando diferentes probabilidades de seleção de resíduos no esquema de reamostragem. Neste trabalho serão propostos mais dois estimadores. O primeiro deles utiliza os quantis da distribuição exponencial com parâmetro (λ) igual a 1 na probabilidade de seleção dos resíduos. Assim,

$$p_t = \frac{1}{\xi G^{-1}(h_t)},$$

onde $\xi = \sum_{t=1}^n \frac{1}{G^{-1}(h_t)}$, G^{-1} denotando a inversa da função distribuição exponencial com $\lambda = 1$.

Na construção do outro estimador, a função distribuição normal padrão é utilizada na probabilidade de seleção dos resíduos da seguinte forma:

$$p_t = \frac{1}{\xi \Phi(m_t)}, \tag{3.3}$$

onde $m_t = \frac{e^{h_t}}{1+e^{h_t}}$, $\xi = \sum_{t=1}^n \frac{1}{\Phi(h_t)}$ e $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição normal padrão.

A motivação para o estudo destes estimadores é analisar a sensibilidade do estimador invwu a diferentes formas de amostragem com pesos inversamente proporcionais às medidas de alavancagem em amostras finitas.

3.3 Resultados numéricos

Com o objetivo de avaliar o desempenho dos novos estimadores propostos e compará-los aos já existentes, foi realizado um experimento de simulação de Monte Carlo baseado no seguinte modelo de regressão linear:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \sigma_t u_t, \quad t = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Os dados utilizados referem-se ao gasto per capita em escolas públicas e à renda per capita por estado nos Estados Unidos em 1979 e foram retirados de Greene (1997, p.541). As

variáveis x_1 e x_2 são a renda per capita e o quadrado da renda per capita, respectivamente. Os dados totalizam $n = 50$ observações e cada observação de x_1 e x_2 é replicada duas e três vezes com o objetivo de formar amostras de $n = 100, 150$ observações. Esse artifício garante que o grau de heteroscedasticidade, medido por $v = \max(\sigma_t^2)/\min(\sigma_t^2)$, permanece constante para os diferentes tamanhos de amostra, permitindo que os resultados do experimento sejam afetados apenas pelo aumento do número de observações. Sob homoscedasticidade, $v = 1$ e sob heteroscedasticidade v vai depender da especificação da função cedástica.

A simulação foi realizada com 5000 réplicas de Monte Carlo e 500 réplicas de bootstrap (2.5 milhões de réplicas, por experimento, portanto). Foram considerados dois conjuntos de dados: o primeiro é composto por todas as observações já mencionadas e no segundo foram retiradas as observações com alta alavancagem. Os valores dos parâmetros do modelo de regressão foram fixados em $\beta_0 = \beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$ e a função cedástica foi especificada como

$$\sigma_t^2 = \exp\{\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t}^2\}.$$

Sob homoscedasticidade, as simulações foram realizadas fixando-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e sob heteroscedasticidade, fixando-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ para o primeiro conjunto de dados (resultando num grau de heteroscedasticidade $v = 15.178$) e $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.7$ para o segundo conjunto de dados (o que resulta num grau de heteroscedasticidade praticamente idêntico, $v = 15.250$)². Os desempenhos dos diferentes estimadores considerados no experimento de Monte Carlo foram avaliados com base no tamanho dos testes quasi- t associados para o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$ e com base no viés relativo total. O viés relativo é definido como a diferença entre a variância estimada e a verdadeira variância, dividida pela verdadeira variância. O viés relativo total é definido como a soma dos valores absolutos dos três vieses relativos: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (Cribari–Neto & Zarkos, 2004).

Os estimadores considerados nesse experimento foram os seguintes:

- ◇ ‘ols’: estimador de mínimos quadrados ordinários;
- ◇ ‘white’: estimador HC0 de Halbert White;
- ◇ ‘hc3’: estimador HC3;
- ◇ ‘hc4’: estimador HC4;
- ◇ ‘naïve’: estimador de bootstrap naïve;
- ◇ ‘wu’: estimador de bootstrap ponderado de Wu;
- ◇ ‘invwu’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado;
- ◇ ‘invwu2’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado com $\varphi = 0.5$;
- ◇ ‘invwu3’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado com $\varphi = 0.75$;

² Sob heteroscedasticidade, portanto, o maior desvio padrão é aproximadamente quatro vezes maior que o menor desvio padrão.

- ◇ ‘invwu4’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado com $\varphi = 1.25$;
- ◇ ‘invwu5’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado utilizando a inversa da função de distribuição exponencial;
- ◇ ‘invwu6’: estimador de bootstrap ponderado inversamente ajustado utilizando a função de distribuição normal.

Foram realizadas quatro simulações de Monte Carlo, duas para cada conjunto de dados (sob homoscedasticidade e sob heteroscedasticidade). O primeiro conjunto de dados (chamado ‘dados1’) se refere às 50 observações retiradas de Greene (1997), conforme mencionado anteriormente. O segundo conjunto de dados (‘dados2’) foi obtido retirando-se três observações com alta alavancagem. Essas observações correspondem aos estados do Alaska e Mississipi e a Washington D.C. Deve-se chamar a atenção para o alto grau de alavancagem da observação correspondente ao estado do Alaska, uma vez que $h_{Alaska} = 0.651$, enquanto $3k/n = 0.180$. Todas as simulações foram realizadas utilizando a linguagem de programação matricial `Ox` criada por Jurgen Doornik em 1994 e que constitui a plataforma computacional utilizada no desenvolvimento de toda essa dissertação por permitir uma fácil implementação de técnicas estatísticas e atender a requisitos como precisão e eficiência.

Os resultados das simulações referentes às taxas de rejeição da hipótese nula dos diferentes testes quasi- t para os dados originais (‘dados1’) podem ser vistos na Tabela 3.1. A Tabela 3.2 apresenta os mesmos resultados para o conjunto de dados sem alavancagem (‘dados2’).

Sob homoscedasticidade e quando as observações com alta alavancagem estão presentes (Tabela 3.1), o teste baseado no estimador usual de mínimos quadrados ordinários se comporta muito bem, apresentando tamanho empírico muito próximo do nível nominal. O teste baseado no estimador HC4 também apresenta comportamento parecido. Quando $n = 50$, por exemplo, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 10.68% quando o nível nominal é $\alpha = 10\%$. O teste baseado no estimador de White, amplamente utilizado em trabalhos empíricos, mostra-se bastante liberal, no sentido de que apresenta tamanho empírico muito maior do que aquele dado pelo nível nominal. Quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 20.70%. Esse resultado para o teste baseado no estimador de White já era esperado, uma vez que trabalhos anteriores, como Long & Ervin (2000), já chamavam atenção para as grandes distorções de tamanho apresentadas pelos testes baseados nesse estimador, sobretudo em pequenas amostras. Dentre os estimadores baseados em esquemas de bootstrap, o teste que utiliza o estimador naïve é o que apresenta os melhores resultados. Por exemplo, quando $n = 150$ e o tamanho nominal é $\alpha = 1\%$, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico exatamente de 1%. No que se refere aos testes baseados nos novos estimadores propostos, esses apresentam comportamentos muito próximos entre si e próximos também

Tabela 3.1. Tamanho dos testes para 'dados1'.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naive	wu	invwu	invwu2	invwu3	invwu4	invwu5	invwu6
homo	50	10	10.64	20.70	15.34	10.68	10.70	15.28	6.04	6.06	6.06	6.00	6.08	6.28
		5	6.16	14.04	9.74	6.48	6.12	9.98	3.50	3.52	3.50	3.54	3.50	3.82
	100	1	1.42	6.26	4.20	2.72	1.48	4.20	1.22	1.26	1.28	1.28	1.24	1.36
		10	10.62	16.12	13.50	11.08	10.70	13.66	8.28	8.20	8.46	8.34	8.40	8.54
	150	5	5.28	9.92	7.84	6.10	5.40	7.86	4.42	4.40	4.54	4.44	4.44	4.62
		1	1.04	3.36	2.40	1.92	1.12	2.54	1.16	1.22	1.20	1.14	1.14	1.32
hetero	50	10	10.28	14.28	12.26	10.80	10.44	12.50	8.66	8.84	8.66	8.68	8.60	8.98
		5	4.76	8.28	6.72	5.58	4.82	6.84	4.38	4.40	4.38	4.34	4.42	4.52
	100	1	0.98	2.18	1.86	1.66	1.00	1.78	1.02	1.14	1.06	1.08	1.02	1.10
		10	35.40	38.86	27.32	17.50	35.42	27.46	10.34	10.44	10.38	10.35	10.32	10.46
	150	5	26.94	30.72	20.70	12.96	27.10	20.64	7.14	6.96	7.06	7.08	7.10	6.96
		1	15.10	18.98	11.70	7.04	15.22	12.00	3.66	3.62	3.68	3.76	3.64	3.66
hetero	100	10	34.30	25.32	20.14	15.66	34.74	20.36	12.18	12.04	12.20	12.56	12.26	11.52
		5	26.04	18.00	13.92	10.52	26.10	14.00	8.14	8.00	8.08	8.20	8.06	7.68
	150	1	14.00	9.36	6.84	4.84	14.32	6.92	3.44	3.34	3.40	3.56	3.46	3.34
		10	34.00	19.90	16.74	13.74	34.20	16.82	12.22	11.82	12.06	12.24	12.32	11.18
	150	5	25.84	13.46	11.04	8.76	25.80	11.02	7.62	7.36	7.48	7.76	7.56	7.00
		1	13.68	6.28	4.88	3.62	13.90	4.92	3.08	3.02	3.04	3.06	3.06	2.78

Tabela 3.2. Tamanho dos testes para 'dados2'.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naive	wu	'invwu'	'invwu'2	'invwu'3	'invwu'4	'invwu'5	'invwu'6
homo	10	10	10.92	13.30	11.64	11.52	10.94	11.8	9.62	9.84	9.80	9.64	9.64	10.04
	5	5	5.76	8.00	6.54	6.48	5.82	6.88	5.06	5.24	5.18	5.00	5.02	5.44
	1	1	1.34	2.16	1.70	1.76	1.36	1.70	1.18	1.16	1.18	1.16	1.20	1.28
	10	10	9.90	11.40	10.32	10.36	10.14	10.64	9.36	9.56	9.54	9.44	9.40	9.78
	5	5	5.08	6.32	5.50	5.48	5.16	5.74	4.62	4.84	4.62	4.80	4.58	4.86
	1	1	0.96	1.44	1.18	1.18	0.98	1.16	0.94	0.98	0.98	0.96	0.92	1.02
hetero	10	10	9.42	10.38	9.80	9.78	9.52	10.10	9.20	9.40	9.24	9.16	9.14	9.36
	5	5	4.78	5.66	5.24	5.18	4.98	5.10	4.40	4.52	4.50	4.38	4.38	4.72
	1	1	1.10	1.50	1.28	1.3	1.08	1.34	1.08	1.14	1.08	1.08	1.08	1.10
	10	10	17.98	16.36	13.60	13.08	18.08	13.88	11.72	11.16	11.56	11.92	11.74	10.78
	5	5	10.56	9.74	7.92	7.58	10.94	8.30	6.66	6.30	6.50	6.86	6.74	6.28
	1	1	3.54	3.46	2.78	2.74	3.64	3.00	2.10	2.08	2.02	2.14	2.12	1.98
hetero	10	10	17.34	12.90	11.98	11.64	17.56	12.10	11.82	11.32	11.70	12.20	11.90	10.22
	5	5	10.64	7.56	6.56	6.38	10.58	6.70	6.36	6.04	6.20	6.58	6.40	5.46
	1	1	3.04	2.04	1.76	1.72	3.18	1.80	1.64	1.54	1.58	1.76	1.64	1.32
	10	10	16.82	11.58	10.80	10.60	17.04	11.10	11.82	10.92	11.14	11.92	11.76	10.02
	5	5	9.94	6.08	5.56	5.50	10.02	5.82	6.04	5.46	5.80	6.22	6.02	5.12
	1	1	2.98	1.86	1.60	1.58	2.92	1.66	1.82	1.66	1.80	1.94	1.82	1.38

Tabela 3.3. Viés para ‘dadosI’.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naive	wu	‘invwu’	‘invwu’2	‘invwu’3	‘invwu’4	‘invwu’5	‘invwu’6	
homo	50	ω_1	0.00	-0.28	0.00	0.63	0.00	-0.01	2.46	2.46	2.46	2.45	2.46	2.48	
		ω_2	0.00	-0.31	0.00	0.73	0.00	-0.01	2.82	2.82	2.82	2.81	2.82	2.84	
		ω_3	0.00	-0.34	0.00	0.83	0.00	-0.01	3.22	3.22	3.23	3.23	3.21	3.22	3.25
		total	0.00	0.93	0.00	2.19	0.00	0.03	8.50	8.51	8.52	8.47	8.50	8.57	
	100	ω_1	0.00	-0.14	0.00	0.17	0.00	0.00	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44
		ω_2	0.00	-0.15	0.00	0.20	0.00	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
		ω_3	0.00	-0.17	0.00	0.22	0.00	0.00	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.57
		total	0.00	0.46	0.00	0.59	0.00	0.00	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.51
		ω_1	0.00	-0.09	0.00	0.10	0.00	0.00	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24
		ω_2	0.00	-0.10	0.01	0.12	0.00	0.00	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
150	ω_3	0.00	-0.11	0.01	0.14	0.00	0.00	0.30	0.30	0.31	0.30	0.31	0.30	0.31	
	total	0.00	0.30	0.02	0.36	0.00	0.00	0.81	0.81	0.82	0.81	0.82	0.81	0.82	
	50	ω_1	-0.59	-0.60	-0.26	0.62	-0.59	-0.59	-0.27	2.66	2.82	2.73	2.60	2.64	3.18
		ω_2	-0.63	-0.62	-0.28	0.64	-0.63	-0.63	-0.28	2.74	2.91	2.81	2.68	2.72	3.27
		ω_3	-0.67	-0.64	-0.28	0.66	-0.67	-0.67	-0.29	2.81	2.99	2.89	2.76	2.80	3.37
		total	1.89	1.86	0.82	1.92	1.89	1.89	0.84	8.21	8.72	8.43	8.04	8.16	9.82
100	ω_1	-0.57	-0.30	-0.06	0.27	-0.58	-0.58	-0.07	0.51	0.58	0.54	0.49	0.51	0.76	
	ω_2	-0.62	-0.31	-0.07	0.28	-0.62	-0.62	-0.07	0.53	0.60	0.56	0.51	0.53	0.79	
	ω_3	-0.66	-0.32	-0.07	0.28	-0.66	-0.66	-0.07	0.55	0.62	0.57	0.53	0.54	0.81	
	total	1.85	0.93	0.20	0.83	1.86	1.86	0.21	1.59	1.80	1.67	1.53	1.58	2.36	
	ω_1	-0.57	-0.19	-0.03	0.17	-0.57	-0.57	-0.03	0.23	0.28	0.25	0.22	0.23	0.43	
	ω_2	-0.62	-0.20	-0.03	0.18	-0.61	-0.61	-0.03	0.24	0.29	0.26	0.23	0.24	0.45	
150	ω_3	-0.66	-0.21	-0.03	0.18	-0.66	-0.66	-0.03	0.25	0.30	0.27	0.24	0.25	0.46	
	total	1.85	0.60	0.09	0.53	1.84	1.84	0.09	0.72	0.87	0.78	0.69	0.72	1.34	

Tabela 3.4. Vies para 'dados2'.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	'invwu'	'invwu'2	'invwu'3	'invwu'4	'invwu'5	'invwu'6
homo	47	ω_1	0.00	-0.10	0.00	0.01	-0.01	-0.01	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13
		ω_2	0.00	-0.10	0.00	0.01	-0.01	-0.01	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.13
		ω_3	0.00	-0.10	0.00	0.01	-0.01	-0.01	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
		total	0.00	0.30	0.00	0.03	0.03	0.03	0.41	0.41	0.40	0.40	0.40	0.40
	94	ω_1	0.00	-0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
		ω_2	0.00	-0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
		ω_3	0.00	-0.05	0.00	0.01	0.00	0.00	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
		total	0.00	0.15	0.00	0.01	0.00	0.00	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
		ω_1	0.00	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
		ω_2	0.00	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
hetero	47	ω_1	-0.21	-0.14	-0.02	0.03	-0.21	-0.03	0.08	0.14	0.10	0.06	0.06	0.07
		ω_2	-0.26	-0.15	-0.02	0.03	-0.26	-0.03	0.08	0.14	0.11	0.06	0.06	0.08
		ω_3	-0.30	-0.15	-0.02	0.03	-0.31	-0.03	0.08	0.14	0.11	0.06	0.06	0.08
		total	0.77	0.44	0.06	0.09	0.78	0.09	0.24	0.42	0.32	0.18	0.18	0.23
	94	ω_1	-0.20	-0.07	0.00	0.02	-0.20	-0.01	-0.03	0.02	0.00	0.00	-0.05	-0.03
		ω_2	-0.25	-0.07	0.00	0.02	-0.25	-0.01	-0.03	0.02	0.00	0.00	-0.05	-0.03
		ω_3	-0.30	-0.07	-0.01	0.02	-0.30	-0.01	-0.03	0.03	0.00	0.00	-0.05	-0.03
		total	0.75	0.21	0.01	0.06	0.75	0.03	0.09	0.07	0.00	0.00	0.15	0.09
		ω_1	-0.20	-0.05	0.00	0.01	-0.20	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06
		ω_2	-0.25	-0.05	0.00	0.01	-0.25	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06
141	ω_3	-0.30	-0.05	0.00	0.01	-0.30	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06	
	total	0.75	0.15	0.00	0.03	0.75	0.03	0.18	0.03	0.03	0.12	0.24	0.18	
	ω_1	-0.21	-0.14	-0.02	0.03	-0.21	-0.03	0.08	0.14	0.10	0.06	0.06	0.07	
	ω_2	-0.26	-0.15	-0.02	0.03	-0.26	-0.03	0.08	0.14	0.11	0.06	0.06	0.08	
141	ω_3	-0.30	-0.15	-0.02	0.03	-0.31	-0.03	0.08	0.14	0.11	0.06	0.06	0.08	
	total	0.77	0.44	0.06	0.09	0.78	0.09	0.24	0.42	0.32	0.18	0.18	0.23	
	ω_1	-0.20	-0.07	0.00	0.02	-0.20	-0.01	-0.03	0.02	0.00	0.00	-0.05	-0.03	
	ω_2	-0.25	-0.07	0.00	0.02	-0.25	-0.01	-0.03	0.02	0.00	0.00	-0.05	-0.03	
	ω_3	-0.30	-0.07	-0.01	0.02	-0.30	-0.01	-0.03	0.03	0.00	0.00	-0.05	-0.03	
	total	0.75	0.21	0.01	0.06	0.75	0.03	0.09	0.07	0.00	0.00	0.15	0.09	
141	ω_1	-0.20	-0.05	0.00	0.01	-0.20	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06	
	ω_2	-0.25	-0.05	0.00	0.01	-0.25	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06	
	ω_3	-0.30	-0.05	0.00	0.01	-0.30	-0.01	-0.06	-0.01	-0.01	-0.04	-0.08	-0.06	
	total	0.75	0.15	0.00	0.03	0.75	0.03	0.18	0.03	0.03	0.12	0.24	0.18	

do teste baseado no estimador original ('invwu'). Para o nível nominal $\alpha = 10\%$ e $n = 50$, por exemplo, os tamanhos empíricos dos testes baseados nesses estimadores variam de 6.0% ('invwu4') a 6.28% ('invwu6'), enquanto o teste baseado no estimador 'invwu' apresenta tamanho empírico igual a 6.04%.

Sob heteroscedasticidade, os testes baseados no estimador de mínimos quadrados ordinários, no estimador de White e no estimador naïve se mostram demasiadamente liberais, apresentando tamanhos empíricos iguais a 35.40%, 38.86% e 35.42%, respectivamente, quando $\alpha = 10\%$ e $n = 50$. Também são bastante liberais os testes que utilizam o estimador wu, apresentando tamanho estimado igual a 27.46%, e aqueles baseados nos estimadores HC3 e HC4, que apresentam tamanhos iguais a 27.32% e 17.50%, respectivamente, para os mesmos valores de α e n . Quanto aos outros estimadores baseados em esquemas de bootstrap, pode-se ver que os tamanhos dos testes baseados nos novos estimadores encontram-se muito próximos entre si e também próximo do tamanho do teste baseado no estimador 'invwu'. Por exemplo, quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, os tamanhos dos testes baseados nos novos estimadores variam de 10.32% ('invwu5') a 10.46% ('invwu6'), enquanto o tamanho empírico do teste baseado no estimador 'invwu' para esses valores de α e n é 10.34%. Com isso pode-se concluir que quando observações com alta alavancagem estão presentes na amostra o estimador original ('invwu') se mostra pouco sensível a diferentes formas de seleção dos resíduos.

Quando as observações de alta alavancagem não estão presentes na amostra (Tabela 3.2) e sob homoscedasticidade, o teste baseado no estimador de White é o mais liberal, para todos os tamanhos de amostra. O teste baseado no estimador de bootstrap naïve, assim como no caso anterior, apresenta tamanhos estimados muito próximos do tamanho nominal. Por exemplo, quando $n = 94$ e $\alpha = 10\%$, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho estimado de 10.14%. No que se refere aos testes baseados nos demais estimadores de bootstrap, o teste que apresenta os melhores resultados é aquele baseado no estimador invwu, seguido de suas variantes (invwu2, invwu3, invwu4, invwu5 e invwu6). Quando $n = 47$ e $\alpha = 5\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 5.06% e o tamanho do teste baseado no estimador invwu4 é exatamente igual a 5%. Quanto ao teste baseado no estimador invwu6, este é o que apresenta os melhores resultados entre os testes baseados nos novos estimadores propostos. Por exemplo, quando $n = 94$ e $\alpha = 5\%$, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho estimado de 4.86% e quando $\alpha = 10\%$ e $n = 47$ o tamanho do teste baseado no estimador invwu6 é igual a 10.04%. É importante notar uma vez mais a proximidade entre os tamanhos dos testes baseados nos estimadores propostos. Esses resultados são próximos também daqueles apresentados pelo teste baseado no estimador original (invwu).

Sob heteroscedasticidade, os testes baseados em todos os estimadores considerados se

tornam mais liberais, especialmente os testes baseados nos estimadores ‘ols’ e ‘white’. Para $n = 47$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘ols’ passa de 10.92%, sob homoscedasticidade, para 17.98%, sob heteroscedasticidade. Os testes baseados em estimadores de bootstrap são os que apresentam tamanhos estimados mais próximos do nível nominal, particularmente os testes baseados no estimador ‘invwu’ e suas variantes. Por exemplo, quando $n = 94$ e $\alpha = 10\%$, o teste baseado no estimador ‘invwu6’ apresenta tamanho estimado de 10.22% enquanto o teste baseado no estimador ‘white’ por exemplo apresenta tamanho estimado igual a 12.90%. Mais uma vez, cabe ressaltar a proximidade entre os resultados dos testes baseados no estimador ‘invwu’ e aqueles baseados nos estimadores propostos.

As Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam os resultados da simulação de Monte Carlo referentes ao viés dos estimadores considerados. A Tabela 3.3 apresenta os resultados baseados nos dados originais (‘dados1’), sob homoscedasticidade e heteroscedasticidade. A Tabela 3.4 apresenta os mesmos resultados para ‘dados2’, o conjunto de dados sem alavancagem. Quando os pontos de alavanca estão presentes nos dados e sob homoscedasticidade, os estimadores ‘ols’ e ‘naïve’ são livres de viés, como pode ser visto na Tabela 3.3. Também são praticamente livres de viés o estimador HC3 e o estimador de bootstrap ‘wu’. Os estimadores ‘invwu’ e suas variantes são os que apresentam os maiores vieses, especialmente para pequenas amostras. Por exemplo, quando $n = 50$ o viés relativo total do estimador ‘invwu3’ é igual a 8.52, enquanto o estimador de White, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.93.

Sob heteroscedasticidade, o estimador de White apresenta vieses superiores àqueles apresentados sob homoscedasticidade. Quando $n = 50$, por exemplo, o viés relativo total desse estimador é igual a 1.86, ou seja, exatamente duas vezes maior que o viés apresentado sob homoscedasticidade. O mesmo acontece com os estimadores livres (ou quase livres) de viés, ou seja, quando os erros não apresentam variância constante, os estimadores considerados tendem a apresentar vieses maiores, como os estimadores HC3 e ‘naïve’, por exemplo. Quanto aos estimadores de bootstrap, o estimador ‘wu’ é o que apresenta os melhores resultados. Quando $n = 150$, por exemplo, o viés relativo total desse estimador é igual a 0.09, enquanto o estimador naïve por exemplo apresenta viés relativo total igual a 1.84. Em relação ao estimador ‘invwu’ e suas variantes, é importante notar que, apesar de apresentarem vieses particularmente altos em pequenas amostras, esses valores diminuem substancialmente à medida que o tamanho da amostra aumenta. O estimador ‘invwu2’, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 8.72, para $n = 50$. Quando o tamanho da amostra aumenta para $n = 150$, o viés desse estimador cai para 0.87. Cabe destacar ainda que essa é uma situação que se verifica em ambas situações, sob homoscedasticidade e sob heteroscedasticidade.

Retirando da amostra as observações com alta alavancagem (‘dados2’), pode-se perceber

que os vieses dos estimadores diminuem substancialmente. Por exemplo, quando $n = 47$ e sob homoscedasticidade, o viés relativo total do estimador HC4 diminui de 2.19 ('dados1') para 0.03 ('dados2'). Sob homoscedasticidade, os estimadores se apresentam livres ou praticamente livres de viés, exceto o estimador de White e os estimadores 'invwu' e suas variantes. Esses últimos são os que apresentam os maiores vieses. O estimador 'invwu6', por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.42 quando $n = 47$ ao passo que o estimador 'ols' é totalmente livre de viés para esse tamanho de amostra. Sob heteroscedasticidade, o viés de todos os estimadores tende a aumentar em relação ao caso em que há homoscedasticidade. O estimador 'ols', contudo, é o que apresenta as maiores diferenças, como pode ser visto, por exemplo, para $n = 47$, quando esse estimador apresenta viés igual a 0.77 sob heteroscedasticidade, enquanto sob homoscedasticidade seu viés é nulo. Quanto aos estimadores "invwu" e suas variantes, esses apresentam vieses relativamente pequenos, exceto o estimador "invwu'6" que apresenta o maior viés na classe dos "invwu"s e um dos maiores vieses quando comparado com todos os outros estimadores considerados. Mais uma vez, os vieses apresentados pelo estimador "invwu" são muito próximos daqueles apresentados pelas variantes que nós propusemos.

3.4 Sensibilidade dos estimadores a erros não-normais

Conforme mencionado anteriormente, um dos objetivos do presente trabalho é analisar a sensibilidade do estimador 'invwu' a erros não-normais em amostras finitas. Para tanto, foram realizados experimentos de simulação de Monte Carlo nos quais os erros seguem distribuição exponencial com parâmetro (λ) igual a 1 e distribuição t com três graus de liberdade (t_3). Pretende-se, com isso, analisar a sensibilidade do estimador "invwu" a erros fortemente assimétricos e a erros que seguem distribuição com caudas longas. O experimento segue o mesmo desenho daquele descrito anteriormente, com exceção da distribuição dos erros. O desempenho dos estimadores continua sendo avaliado através do tamanho de testes quasi- t associados para o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$ referente ao modelo (3.4) e com base no viés relativo total.

3.4.1 Erros com distribuição exponencial

Primeiramente será considerado o caso em que os erros seguem distribuição exponencial com $\lambda = 1$. A Tabela 3.6 apresenta as taxas de rejeição da hipótese nula dos diferentes testes quasi- t para os dados originais ('dados1'); a Tabela 3.7 apresenta os mesmos resultados para

Tabela 3.6. Tamanho dos testes quasi- t para ‘dados1’ com erros exponenciais.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	50	10	10.86	21.70	15.50	10.16	11.20	16.00	5.32
		5	6.00	13.96	9.36	5.42	6.00	9.62	2.68
		1	1.96	5.86	2.78	1.78	1.96	2.90	0.70
	100	10	10.34	16.16	13.82	11.84	10.40	13.94	9.62
		5	5.74	10.20	8.48	7.28	5.90	8.38	5.66
		1	1.54	3.38	2.82	2.46	1.72	2.92	1.52
	150	10	10.20	14.92	13.40	11.90	10.60	13.10	10.52
		5	5.38	9.10	7.72	7.08	5.22	7.86	5.72
		1	1.24	2.72	2.26	1.98	1.24	2.32	1.54
hetero	50	10	30.76	40.56	29.38	20.46	30.96	29.58	12.44
		5	21.88	32.10	22.12	14.90	21.86	22.52	8.48
		1	10.88	18.40	11.58	7.52	11.06	11.72	4.24
	100	10	31.58	27.88	23.60	19.84	32.20	23.62	17.02
		5	22.42	20.96	17.46	14.72	22.62	17.70	12.18
		1	10.96	11.68	9.44	7.68	11.20	9.64	5.92
	150	10	32.78	23.12	20.16	17.98	33.12	20.54	16.36
		5	23.50	16.86	14.86	12.76	23.86	14.98	11.60
		1	11.24	8.90	7.82	6.86	11.24	7.80	5.84

os dados sem pontos de alavanca (‘dados2’).

No caso em que os pontos de alavanca estão presentes na amostra e sob homoscedasticidade (Tabela 3.6), os testes baseados nos estimadores considerados apresentam resultados ligeiramente diferentes dos resultados apresentados quando os erros são normalmente distribuídos. O teste baseado no estimador HC3, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 15.34% quando $n = 50$, $\alpha = 10\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 15.50%, para os mesmos valores de n e α . Outro exemplo pode ser dado pelo teste baseado no estimador de bootstrap ‘naïve’ que, quando os erros são normalmente distribuídos, apresenta tamanho empírico igual a 5.40% quando $n = 100$ e $\alpha = 5\%$. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 5.90%, para o mesmo valor de α e o mesmo tamanho de amostra. Quando os testes baseados nos estimadores considerados são comparados entre si no caso em que os erros seguem distribuição exponencial, pode-se perceber que o teste baseado no estimador HC4 é o que apresenta tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais em pequenas amostras. Por exemplo, quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 10.16%, enquanto os testes baseados nos estimadores de White e HC3, por exemplo, apresentam tamanhos empíricos iguais a 21.70% e 15.50%, res-

pectivamente. Quando o tamanho da amostra aumenta, no entanto, os testes baseados nos estimadores ‘ols’ e “invwu” são os que apresentam os melhores resultados. Quando $n = 100$ e $\alpha = 5\%$, por exemplo, o teste baseado no estimador ‘ols’ apresenta tamanho estimado igual a 5.74% e o teste baseado no estimador “invwu” apresenta tamanho estimado igual a 5.66%. Para esses mesmos valores de α e n , o tamanho estimado do teste baseado no estimador de White, por exemplo, é 10.20%.

Sob heteroscedasticidade, os testes baseados em todos os estimadores considerados se tornam substancialmente mais liberais quando comparados ao caso em que os erros apresentam variância constante. O teste baseado no estimador ‘naïve’, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 23.86% quando $n = 150$ e $\alpha = 5\%$, enquanto sob homoscedasticidade o teste baseado neste estimador apresenta tamanho empírico igual a 5.22% para o mesmo valor de α e tamanho de amostra. Os testes baseados no estimador ‘invwu’ são os que apresentam tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais. Quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 12.44%, enquanto os testes baseados nos estimadores de White e HC4, por exemplo, apresentam tamanhos estimados iguais a 40.56% e 20.46%, respectivamente. Quando comparados ao caso em que os erros seguem distribuição normal, ainda sob heteroscedasticidade, os testes baseados nos estimadores considerados não apresentam grandes diferenças. O teste baseado no estimador HC3, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 20.14% quando $n = 100$, $\alpha = 10\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 23.60%, para os mesmos valores de α e n . Outro exemplo pode ser dado pelo teste baseado no estimador ‘naïve’ que, quando os erros seguem distribuição normal, apresenta tamanho empírico igual a 34.20% para $n = 150$ e $\alpha = 10\%$. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho empírico igual a 33.12%, para os mesmos valores de α e n . Em ambos os casos, com erros seguindo distribuição normal e exponencial, os testes baseados no estimador “invwu” são os que apresentam tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais.

No caso em que os pontos de alavanca não estão presentes na amostra (Tabela 3.7) e sob homoscedasticidade, os testes baseados nos estimadores considerados apresentam resultados ligeiramente diferentes em relação ao caso em que os erros seguem distribuição normal. O teste baseado no estimador HC3, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 5.24% quando $n = 141$, $\alpha = 5\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o tamanho empírico do teste baseado nesse estimador é igual a 5.28% para os mesmos valores de α e n . A semelhança entre os resultados apresentados nesses dois casos também pode ser exemplificada pelo teste baseado no estimador “invwu”,

Tabela 3.7. Tamanho dos testes quasi- t para ‘dados2’ com erros exponenciais.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	47	10	9.88	12.32	10.60	10.52	10.10	10.68	8.86
		5	4.52	6.72	5.42	5.44	4.74	5.74	4.16
		1	1.00	1.62	1.26	1.26	1.02	1.26	0.70
	94	10	10.58	12.20	11.28	11.22	10.44	11.22	10.24
		5	5.12	6.16	5.70	5.58	5.12	5.74	4.90
		1	0.88	1.36	1.22	1.22	0.92	1.24	0.92
	141	10	10.02	11.20	10.60	10.50	10.24	10.60	10.04
		5	5.06	5.78	5.28	5.24	5.14	5.56	5.10
		1	1.00	1.16	1.12	1.12	1.06	1.14	0.82
hetero	47	10	17.04	16.16	14.08	13.78	17.24	14.36	12.82
		5	9.98	10.24	8.44	8.32	10.32	8.92	7.10
		1	2.64	3.62	3.04	3.02	2.88	3.06	2.12
	94	10	17.50	13.96	12.98	12.72	17.92	13.18	13.42
		5	10.44	8.64	7.92	7.80	10.62	8.00	7.62
		1	3.10	3.00	2.78	2.78	3.34	2.82	2.10
	141	10	17.64	13.16	12.40	12.20	17.96	12.60	13.08
		5	10.64	7.66	7.26	7.16	10.82	7.34	7.52
		1	3.18	2.70	2.42	2.40	3.18	2.58	2.02

que apresenta tamanho empírico igual a 4.62% quando $n = 94$, $\alpha = 5\%$ e os erros seguem distribuição normal. O tamanho estimado do teste baseado nesse estimador quando os erros seguem distribuição exponencial é 4.90% para o mesmo valor de α e tamanho de amostra. Quando os erros seguem distribuição exponencial, os testes baseados em todos os estimadores considerados apresentam tamanhos empíricos bastante próximos dos níveis nominais, conforme pode ser visto na Tabela 3.7. Os testes baseados nos estimadores HC3 e HC4, por exemplo, apresentam tamanhos empíricos iguais a 10.60% e 10.50%, respectivamente, quando $n = 141$ e $\alpha = 10\%$. Quanto aos testes baseados nos estimadores bootstrap, aquele baseado no estimador ‘naïve’ é o que apresenta tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais em pequenas amostras. Quando $n = 47$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o teste baseado nesse estimador apresenta tamanho estimado igual a 10.10%. Quando o tamanho da amostra aumenta, entretanto, o teste baseado no estimador “invwu” é o que apresenta os melhores resultados, como pode ser visto para $n = 141$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, quando o teste baseado no estimador “invwu” apresenta tamanho estimado igual a 10.04%, enquanto o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘wu’ é igual a 10.60%, para os mesmos valores de α e n .

Sob heteroscedasticidade os resultados dos testes baseados em todos os estimadores considerados se deterioram em relação ao caso em que há homoscedasticidade, como ocorre, por

exemplo, com o teste baseado no estimador HC3 que, sob heteroscedasticidade, apresenta tamanho estimado igual a 12.40% quando $n = 141$ e $\alpha = 10\%$. Quando os erros apresentam variância constante, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é 10.60% para os mesmos valores de α e n . Os testes que, tipicamente, apresentam os melhores resultados são aqueles baseados nos estimadores HC4 e “invwu”. Por exemplo, quando $n = 47$ e $\alpha = 5\%$, o teste baseado no estimador “invwu” apresenta tamanho empírico igual a 7.10%, enquanto o teste baseado no estimador ‘wu’, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 8.92%. O tamanho estimado do teste baseado no estimador HC4 é igual a 8.32% para o mesmo tamanho de amostra e mesmo nível nominal. Quando se compara o caso em que os erros seguem distribuição exponencial com o caso em que os erros são normalmente distribuídos, os testes baseados nos estimadores considerados também não apresentam grandes diferenças. O tamanho estimado do teste baseado no estimador HC4, por exemplo, é igual a 11.64% quando $n = 94$, $\alpha = 10\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 12.72% para os mesmos valores de α e n . No caso em que os erros seguem distribuição exponencial, os tamanhos dos testes baseados no estimador “invwu” se apresentam ligeiramente mais liberais em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Por exemplo, quando $n = 94$, $\alpha = 10\%$ e os erros seguem distribuição normal, o tamanho estimado do teste baseado no estimador “invwu” é igual a 11.82%. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 13.42%, para os mesmos valores de α e n . A diferença entre os dois casos, entretanto, é relativamente pequena, como pode ser visto quando $n = 47$, $\alpha = 10\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Nesse caso, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 11.72%, enquanto no caso em que os erros seguem distribuição exponencial o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é 12.82%.

Diante das considerações feitas para o caso em que os pontos de alavanca estão presentes na amostra e para o caso em que eles não estão, pode-se afirmar que os testes baseados nos estimadores considerados são relativamente pouco sensíveis a erros assimétricos no que diz respeito ao tamanho estimado desses testes.

As Tabelas 3.8 e 3.9 apresentam os resultados da simulação de Monte Carlo referentes ao viés dos estimadores considerados para o caso em que os erros seguem distribuição exponencial. A Tabela 3.8 apresenta os resultados baseados nos dados originais e a Tabela 3.9 apresenta os mesmos resultados para o conjunto de dados sem pontos de alavanca. Quando os pontos de alavanca estão presentes nos dados e sob homoscedasticidade, o estimador HC3 é o que apresenta os menores vieses, seguido pelos estimadores ‘ols’ e ‘naïve’, conforme pode ser visto na Tabela 3.8. O estimador que apresenta os maiores vieses neste caso é o estimador

‘invwu’. Quando $n = 50$, esse estimador apresenta viés relativo total igual a 8.29, enquanto o viés relativo total do estimador HC3, por exemplo, é igual a 0.02 para o mesmo tamanho de amostra. À medida que o tamanho da amostra aumenta, entretanto, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ diminui substancialmente, como pode ser visto para $n = 150$, quando o viés relativo total desse estimador é igual a 0.72. Quando comparados ao caso em que os erros são normalmente distribuídos, pode-se constatar que os vieses relativos totais dos estimadores considerados se apresentam ligeiramente maiores quando os erros seguem distribuição exponencial. O estimador HC4, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 2.19 quando $n = 50$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial o viés relativo total desse estimador é igual a 2.24, para o mesmo tamanho de amostra. O estimador ‘invwu’ é uma exceção. Quando os erros seguem distribuição exponencial, os vieses desse estimador são ligeiramente menores relativamente ao caso em que os erros são normalmente distribuídos, como pode ser visto, por exemplo, quando $n = 100$. Para esse tamanho de amostra, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é 1.50 quando os erros são normalmente distribuídos e 1.35 quando os erros seguem distribuição exponencial.

Sob heteroscedasticidade, os estimadores considerados apresentam vieses maiores em relação ao caso em que há homoscedasticidade. O viés relativo total do estimador HC3, por exemplo, passa de 0.02 sob homoscedasticidade para 0.83 sob heteroscedasticidade, quando $n = 50$. O estimador HC3, entretanto, continua sendo o estimador menos viesado dentre os estimadores considerados. A exceção é o caso em que $n = 150$, quando o estimador ‘wu’ apresenta viés relativo total igual a 0.09 enquanto o viés relativo total do estimador HC3 é igual a 0.12. O estimador ‘invwu’ é o único dentre os estimadores considerados que, sob heteroscedasticidade, apresenta vieses menores do que aqueles apresentados sob homoscedasticidade. Quando $n = 50$, por exemplo, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ passa de 8.29, sob homoscedasticidade, para 7.33 sob heteroscedasticidade. Comparando o caso em que os erros seguem distribuição exponencial com o caso em que os erros são normalmente distribuídos, pode-se perceber que a diferença entre os vieses apresentados pelos estimadores nos dois casos é bastante pequena. Por exemplo, o viés do estimador HC4, quando $n = 100$ e os erros são normalmente distribuídos, é igual a 0.83. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o viés desse estimador é igual a 0.84. O estimador ‘wu’ apresenta o mesmo viés nesses dois casos, assim como o estimador ‘ols’. O estimador ‘invwu’ se apresenta um pouco menos viesado no caso em que os erros seguem distribuição exponencial. Quando $n = 50$, por exemplo, o viés relativo total desse estimador é 8.21, no caso em que os erros são normalmente distribuídos e 7.33 no caso em que os erros seguem distribuição exponencial. Mais uma vez é importante notar que, apesar do estimador ‘invwu’

Tabela 3.8. Viés para ‘dados1’ com erros exponenciais.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	50	ω_1	-0.02	-0.29	-0.01	0.64	-0.02	-0.02	2.39
		ω_2	-0.02	-0.32	-0.01	0.74	-0.02	-0.01	2.75
		ω_3	-0.02	-0.35	0.00	0.86	-0.02	-0.01	3.15
		total	0.06	0.96	0.02	2.24	0.06	0.04	8.29
	100	ω_1	-0.01	-0.15	-0.01	0.16	-0.01	-0.01	0.39
		ω_2	-0.01	-0.16	-0.01	0.19	-0.01	-0.01	0.45
		ω_3	-0.01	-0.18	0.00	0.22	-0.01	-0.01	0.51
		total	0.03	0.49	0.02	0.57	0.03	0.03	1.35
	150	ω_1	-0.01	-0.10	-0.01	0.09	-0.01	-0.01	0.21
		ω_2	-0.01	-0.11	0.00	0.11	-0.01	-0.01	0.24
		ω_3	-0.01	-0.12	0.00	0.12	-0.01	-0.01	0.27
		total	0.03	0.22	0.01	0.32	0.03	0.03	0.72
hetero	50	ω_1	-0.59	-0.60	-0.27	0.63	-0.60	-0.27	2.37
		ω_2	-0.64	-0.62	-0.28	0.65	-0.64	-0.28	2.45
		ω_3	-0.68	-0.64	-0.28	0.67	-0.68	-0.29	2.51
		total	1.91	1.86	0.83	1.95	1.92	0.84	7.33
	100	ω_1	-0.58	-0.30	-0.07	0.27	-0.58	-0.08	0.38
		ω_2	-0.62	-0.31	-0.07	0.28	-0.62	-0.08	0.39
		ω_3	-0.66	-0.32	-0.07	0.29	-0.66	-0.08	0.40
		total	1.86	0.93	0.21	0.84	1.86	0.24	1.17
	150	ω_1	-0.57	-0.20	-0.04	0.16	-0.57	-0.03	0.14
		ω_2	-0.62	-0.20	-0.04	0.17	-0.62	-0.03	0.15
		ω_3	-0.66	-0.21	-0.04	0.17	-0.66	-0.03	0.16
		total	1.85	0.61	0.12	0.50	1.85	0.09	0.45

ser o mais viesado dentre os estimadores considerados, seu viés decresce substancialmente à medida que o tamanho da amostra aumenta, tanto no caso em que os erros são normalmente distribuídos quanto no caso em que os erros seguem distribuição exponencial.

Quando são retiradas da amostra as observações com alta alavancagem (‘dados2’), pode-se perceber que, sob homoscedasticidade, os estimadores considerados se tornam menos viesados em relação ao caso em que os pontos de alavanca estão presentes nos dados. Quando $n = 47$, por exemplo, o viés do estimador HC4 passa de 2.24 (‘dados1’) para 0.06 (‘dados2’). O estimador que se apresenta mais viesado, no caso em que as observações com alta alavancagem não estão presentes na amostra, é o estimador de White, seguido do estimador ‘invwu’. Isso pode ser visto, por exemplo, quando $n = 94$. Para esse tamanho de amostra, o viés relativo total do estimador de White é 0.21 e o viés do estimador ‘invwu’ é 0.10. Entretanto, o viés do estimador ‘invwu’ decresce mais rapidamente que o viés do estimador de White à medida que o tamanho da amostra aumenta. Quando $n = 47$, por exemplo, o

Tabela 3.9. Viés para ‘dados2’ com erros exponenciais.

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’	
homo	47	ω_1	-0.02	-0.13	-0.03	-0.02	-0.02	-0.04	0.08	
		ω_2	-0.02	-0.13	-0.03	-0.02	-0.02	-0.04	0.09	
		ω_3	-0.02	-0.13	-0.03	-0.02	-0.02	-0.04	0.09	
		total	0.06	0.39	0.09	0.06	0.06	0.12	0.26	
	94	ω_1	-0.01	-0.07	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	0.03
		ω_2	-0.01	-0.07	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	0.03
		ω_3	-0.01	-0.07	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	0.04
		total	0.03	0.21	0.06	0.03	0.04	0.06	0.10	
	141	ω_1	-0.01	-0.04	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.02
		ω_2	-0.01	-0.05	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.02
		ω_3	-0.01	-0.05	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.02
		total	0.03	0.14	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	
hetero	47	ω_1	-0.23	-0.17	-0.05	-0.01	-0.24	-0.07	0.00	
		ω_2	-0.28	-0.18	-0.18	-0.01	-0.29	-0.07	0.00	
		ω_3	-0.33	-0.18	-0.18	-0.01	-0.33	-0.07	0.00	
		total	0.84	0.53	0.41	0.03	0.86	0.21	0.00	
	94	ω_1	-0.21	-0.09	-0.02	0.00	-0.22	-0.03	-0.07	
		ω_2	-0.26	-0.09	-0.02	0.00	-0.27	-0.03	-0.07	
		ω_3	-0.31	-0.09	-0.02	0.00	-0.31	-0.03	-0.07	
		total	0.78	0.27	0.06	0.00	0.80	0.09	0.21	
	141	ω_1	-0.21	-0.06	-0.02	-0.01	-0.21	-0.02	-0.10	
		ω_2	-0.26	-0.06	-0.02	-0.01	-0.26	-0.02	-0.10	
		ω_3	-0.30	-0.06	-0.02	-0.01	-0.31	-0.02	-0.10	
		total	0.77	0.18	0.06	0.03	0.78	0.06	0.30	

estimador de White apresenta viés relativo total igual a 0.39. Esse valor decresce para 0.14 quando o tamanho da amostra aumenta para $n = 141$. O viés do estimador ‘invwu’, por outro lado, passa de 0.26 quando $n = 47$ para 0.06 quando $n = 141$. Os vieses dos estimadores considerados se apresentam ligeiramente maiores no caso em que os erros seguem distribuição exponencial em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos, com exceção do estimador ‘invwu’, que apresenta uma pequena redução no seu viés relativo total.

Sob heteroscedasticidade, os estimadores se apresentam mais viesados em relação ao caso em que os erros apresentam variância constante. As exceções são os estimadores HC4 e ‘invwu’, que apresentam uma pequena redução em seus vieses quando há heteroscedasticidade. Por exemplo, quando $n = 94$, o viés relativo total do estimador HC4 é 0.03 sob homoscedasticidade enquanto que sob heteroscedasticidade este estimador se apresenta livre de viés. O estimador ‘invwu’ apresenta uma redução ainda maior em seu viés quando $n = 47$. Para

esse tamanho de amostra, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é igual a 0.26 sob homoscedasticidade enquanto que sob heteroscedasticidade esse estimador também se apresenta livre de viés. Entretanto, essa redução no viés do estimador ‘invwu’ não se verifica quando $n = 94$ e $n = 141$. Pelo contrário, quando $n = 141$, por exemplo, o viés relativo total desse estimador passa de 0.06 sob homoscedasticidade para 0.30 sob heteroscedasticidade. Em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos, os estimadores considerados tipicamente se apresentam mais viesados quando os erros seguem distribuição exponencial. O estimador HC3, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.06 quando $n = 47$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o viés desse estimador é 0.41, para o mesmo tamanho de amostra. A exceção, mais uma vez, é o estimador HC4. Quando os erros seguem distribuição exponencial, esse estimador se apresenta menos viesado, como pode ser visto quando $n = 94$. Para esse tamanho de amostra o estimador HC4 apresenta viés relativo total igual a 0.06 quando os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o viés é nulo. O estimador ‘invwu’ também se apresenta menos viesado em pequenas amostras e quando os erros seguem distribuição exponencial, em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Quando $n = 47$ e os erros seguem distribuição normal, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é igual a 0.24. Quando os erros seguem distribuição exponencial, esse estimador se apresenta livre de viés. Quando $n = 94$ e $n = 141$, no entanto, o estimador ‘invwu’ se apresenta mais viesado quando os erros seguem distribuição exponencial relativamente ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Quando $n = 141$, por exemplo, o viés do estimador ‘invwu’ é igual a 0.18 quando os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o viés relativo total desse estimador é igual a 0.30, conforme mencionado anteriormente.

Diante dessas considerações, pode-se concluir que, do ponto de vista do viés relativo total, os estimadores considerados apresentam desempenho inferior quando os erros seguem distribuição fortemente assimétrica. O estimador ‘invwu’ está entre aqueles mais sensíveis a erros assimétricos, pelo menos no que diz respeito a esse critério de avaliação.

3.4.2 Erros com distribuição t_3

Na presente seção será analisada a sensibilidade do estimador ‘invwu’ a erros que seguem distribuição t com três graus de liberdade. A Tabela 3.10 apresenta os resultados da simulação referentes aos testes quasi- t para o caso em que as observações com alta alavancagem estão presentes na amostra (‘dados1’). A Tabela 3.11 apresenta os mesmos resultados para ‘dados2’, o conjunto de dados sem pontos de alavanca.

Tabela 3.10. Tamanho dos testes quasi- t para ‘dados1’ com erros t_3 .

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	50	10	10.16	18.12	12.34	8.50	10.12	12.54	4.62
		5	6.08	11.78	7.84	4.90	6.24	7.86	2.26
		1	2.04	5.02	3.06	1.44	2.16	3.10	0.66
	100	10	10.24	14.60	11.50	9.30	10.20	11.96	6.86
		5	5.52	7.52	5.70	4.42	5.48	5.76	3.24
		1	1.78	2.20	1.60	1.22	1.72	1.56	0.70
	150	10	9.80	12.60	11.16	9.82	9.84	11.24	8.10
		5	5.10	6.78	5.56	4.72	5.18	5.68	3.64
		1	1.60	1.68	1.22	0.92	1.66	1.28	0.78
hetero	50	10	27.54	33.76	22.70	13.32	27.76	22.74	7.30
		5	21.78	25.70	15.36	8.62	21.86	15.78	4.60
		1	12.12	14.02	7.48	4.04	12.28	7.54	1.90
	100	10	29.24	21.32	16.52	13.16	29.22	17.02	10.14
		5	21.62	14.58	10.74	7.86	21.74	11.14	5.94
		1	11.58	6.58	4.48	3.04	11.72	4.78	1.94
	150	10	28.30	17.30	14.18	11.72	28.30	14.52	10.32
		5	20.82	10.96	8.68	6.72	21.02	8.86	5.92
		1	11.28	3.94	2.84	1.96	11.30	2.94	1.70

Quando os pontos de alavanca estão presentes na amostra e sob homoscedasticidade, os testes baseados nos estimadores ‘ols’ e ‘naïve’ são os que apresentam tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais, mesmo em pequenas amostras. Quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘ols’ é igual a 10.16% enquanto o teste baseado no estimador ‘naïve’ é igual a 10.12%. O estimador de White, amplamente utilizado em trabalhos empíricos, é o que conduz aos testes mais liberais dentre os estimadores considerados. Quando $n = 50$ e $\alpha = 5\%$, por exemplo, o tamanho empírico do teste baseado no estimador de White é igual a 11.78%, enquanto o teste baseado no estimador ‘ols’, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 6.08%. O teste baseado no estimador ‘invwu’ também apresenta tamanhos empíricos bastante distantes daqueles dados pelos níveis nominais, especialmente em pequenas amostras. Por exemplo, quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 4.62%. À medida que o tamanho da amostra aumenta, o tamanho estimado do teste baseado neste estimador se aproxima do tamanho nominal. Entretanto, o estimador ‘invwu’ continua sendo um dos que conduzem a testes cujos tamanhos mais se distanciam dos níveis nominais, como pode ser visto, por exemplo quando $n = 150$ e $\alpha = 5\%$. Nesse caso, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 3.64%, enquanto o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘ols’, por exemplo, é igual a 5.10%. O tamanho estimado dos testes

baseados nos estimadores considerados se apresentam ligeiramente diferentes quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Quando $n = 100$ e $\alpha = 5\%$, o tamanho do teste baseado no estimador ‘naïve’, por exemplo, é igual a 5.40% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 5.48% quando os erros seguem distribuição t . Os tamanhos do teste baseado no estimador ‘invwu’ se apresentam mais distantes do tamanho nominal quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 6.04% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 4.62% quando os erros seguem distribuição t com três graus de liberdade.

Sob heteroscedasticidade, os testes baseados nos estimadores considerados se apresentam substancialmente mais liberais quando comparados ao caso em que os erros apresentam variância constante. O tamanho do teste baseado no estimador HC4, por exemplo, passa de 8.50% sob homoscedasticidade para 13.32% sob heteroscedasticidade, quando $n = 50$ e $\alpha = 10\%$. Para os mesmos valores de α e n , o tamanho do teste baseado no estimador de White passa de 18.12% sob homoscedasticidade para 33.76% sob heteroscedasticidade. Os testes baseados no estimador ‘invwu’ são os que tipicamente apresentam os melhores resultados sob heteroscedasticidade. Quando $n = 100$ e $\alpha = 10\%$, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 10.14%, enquanto o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘wu’, por exemplo, é igual a 17.02%. Em comparação ao caso em que os erros seguem distribuição normal, os testes baseados nos estimadores considerados se apresentam um pouco menos liberais quando os erros seguem distribuição t , como pode ser visto, por exemplo, quando $n = 150$ e $\alpha = 5\%$. Nesse caso, o tamanho estimado do teste baseado no estimador HC3, por exemplo, é igual a 11.04% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 8.68% quando os erros seguem distribuição t . Testes baseados em outros estimadores apresentam diferenças ainda maiores entre os dois casos, como o teste baseado no estimador ‘wu’, por exemplo. Quando $n = 50$ e $\alpha = 5\%$, o teste baseado nesse estimador é igual a 20.64% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 15.78% quando os erros seguem distribuição t . Os testes baseados no estimador ‘invwu’ tipicamente apresentam tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos como pode ser visto, por exemplo, quando $n = 100$ e $\alpha = 5\%$. Nesse caso, o tamanho estimado do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 8.14% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 5.94% quando os erros seguem distribuição t . Quando $\alpha = 10\%$, o teste baseado nesse estimador é igual a 12.18% quando os erros seguem distribuição normal e igual a 10.14% quando os erros seguem distribuição t , para o mesmo tamanho de amostra.

Quando os pontos de alavanca não estão presentes na amostra ('dados2'), sob homoscedasticidade os testes baseados nos estimadores 'ols' e 'naïve' são os que apresentam tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais em pequenas amostras. Entretanto, quando $n = 94$ e $n = 141$ os testes baseados no estimador 'invwu' são os que apresentam os melhores resultados. Por exemplo, quando $n = 94$ e $\alpha = 10\%$, o tamanho empírico do teste baseado no estimador 'invwu' é igual a 10.54%, enquanto os tamanhos empíricos dos testes baseados nos estimadores 'ols' e 'naïve' são 11.18% e 11.22%, respectivamente. Em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos, os testes baseados nos estimadores considerados apresentam tamanhos empíricos ligeiramente menores em pequenas amostras quando os erros seguem distribuição t . Quando o tamanho da amostra aumenta, no entanto, os testes se apresentam ligeiramente mais liberais. O teste baseado no estimador de White, por exemplo, apresenta tamanho empírico igual a 10.38% quando $n = 141$, $\alpha = 10\%$ e os erros seguem distribuição normal. Quando os erros seguem distribuição t , o tamanho empírico do teste baseado nesse estimador é igual a 11.52%. Os testes baseados no estimador 'invwu' também se apresentam um pouco mais liberais quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Quando $n = 141$ e $\alpha = 5\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado no estimador 'invwu' é igual a 4.40% quando os erros seguem distribuição normal e igual a 5.22% quando os erros seguem distribuição t . Quando $\alpha = 10\%$, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 9.20% quando os erros são normalmente distribuídos e igual a 10.34% quando os erros seguem distribuição t , para o mesmo tamanho de amostra.

Sob heteroscedasticidade, o teste baseado no estimador 'invwu' é o que apresenta tamanhos empíricos mais próximos do nível nominal em pequenas amostras. Quando $n = 47$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo, o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 10.16%, enquanto o teste baseado no estimador 'wu' apresenta tamanho estimado igual a 12.22% para os mesmos valores de α e n . Para tamanhos de amostra maiores, entretanto, os testes baseados no estimador HC4 tipicamente apresentam tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais. Quando $n = 141$ e $\alpha = 5\%$, o tamanho empírico do teste baseado nesse estimador é igual a 5.56%, enquanto o tamanho empírico do teste baseado no estimador 'invwu' é 6.68%. Em relação ao caso em que os erros seguem distribuição normal, os tamanhos dos testes baseados nos estimadores considerados se apresentam ligeiramente menores quando $n = 47$ e os erros seguem distribuição t . Para esse tamanho de amostra, o teste baseado no estimador HC4, por exemplo, apresenta tamanho estimado igual a 13.08% quando $\alpha = 10\%$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição t o tamanho estimado do teste baseado nesse estimador é igual a 11.34%, para o mesmo valor de α e tamanho de amostra. Quando $n = 94$ e $n = 141$, os tamanhos dos testes

Tabela 3.11. Tamanho dos testes quasi- t para ‘dados2’ com erros t_3 .

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	47	10	10.68	12.90	10.86	10.76	10.62	11.18	8.86
		5	5.72	6.74	5.72	5.62	5.66	5.66	4.44
		1	1.42	1.82	1.44	1.50	1.54	1.42	1.04
	94	10	11.18	12.32	11.32	11.24	11.22	11.46	10.54
		5	5.58	6.54	5.96	5.88	5.86	6.14	5.38
		1	1.24	1.44	1.16	1.14	1.34	1.16	1.06
	141	10	10.66	11.52	10.90	10.84	10.62	10.94	10.34
		5	5.42	5.90	5.52	5.48	5.34	5.68	5.22
		1	1.26	1.22	1.18	1.16	1.18	1.14	1.04
hetero	47	10	16.46	13.96	11.90	11.34	16.60	12.22	10.16
		5	9.78	8.10	6.44	6.12	9.94	6.76	5.44
		1	3.38	2.44	1.78	1.68	3.36	2.12	1.52
	94	10	17.12	12.60	11.42	11.10	17.16	11.72	12.30
		5	10.54	6.98	6.20	6.06	10.42	6.42	6.26
		1	2.90	1.78	1.50	1.50	3.04	1.64	1.62
	141	10	17.18	11.96	11.32	11.14	17.30	11.54	12.50
		5	10.56	6.12	5.66	5.56	10.52	5.76	6.68
		1	3.20	1.38	1.30	1.24	3.32	1.36	1.36

baseados nos estimadores considerados se apresentam ligeiramente maiores quando os erros seguem distribuição t , como pode ser visto quando $n = 141$ e $\alpha = 10\%$, por exemplo. Nesse caso, o teste baseado no estimador HC3 apresenta tamanho estimado igual a 10.80% quando os erros seguem distribuição normal e 11.32% quando os erros seguem distribuição t . No que se refere aos testes baseados no estimador ‘invwu’, estes apresentam resultados ligeiramente diferentes quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros seguem distribuição normal. Quando $n = 94$ e $\alpha = 5\%$, o tamanho empírico do teste baseado no estimador ‘invwu’ é igual a 6.36% quando os erros seguem distribuição normal e 6.26% quando os erros seguem distribuição t . Outro exemplo pode ser dado quando $n = 141$ e $\alpha = 5\%$. Nesse caso, o tamanho empírico do teste baseado nesse estimador é igual a 6.04% quando os erros seguem distribuição normal e igual a 6.68% quando os erros seguem distribuição t .

As Tabelas 3.12 e 3.13 apresentam os resultados referentes aos vieses dos estimadores considerados. A Tabela 3.12 apresenta os vieses referentes ao conjunto de dados com alavancagem (‘dados1’), enquanto que a Tabela 3.13 apresenta os mesmos resultados para o conjunto de dados sem alavancagem (‘dados2’).

Sob homoscedasticidade e quando os pontos de alavanca estão presentes na amostra, os estimadores ‘ols’, HC3 e ‘wu’ são os que, tipicamente, apresentam os menores vieses. Quando

Tabela 3.12. Viés para ‘dados1’ com erros t_3 .

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’
homo	50	ω_1	0.01	-0.25	0.05	0.76	0.00	0.04	2.26
		ω_2	0.01	-0.28	0.06	0.87	0.00	0.05	2.60
		ω_3	0.01	-0.31	0.06	0.99	0.00	0.05	2.97
		total	0.03	0.84	0.17	2.62	0.00	0.14	7.83
	100	ω_1	0.09	-0.09	0.07	0.27	0.10	0.08	0.35
		ω_2	0.09	-0.10	0.08	0.31	0.10	0.09	0.40
		ω_3	0.09	-0.11	0.09	0.35	0.10	0.10	0.46
		total	0.27	0.30	0.24	0.93	0.30	0.27	1.21
	150	ω_1	0.06	-0.07	0.03	0.13	0.06	0.03	0.16
		ω_2	0.06	-0.08	0.03	0.15	0.06	0.03	0.18
		ω_3	0.06	-0.08	0.04	0.18	0.06	0.04	0.21
		total	0.18	0.23	0.10	0.46	0.18	0.10	0.55
hetero	50	ω_1	-0.58	-0.56	-0.16	0.91	-0.58	-0.18	2.37
		ω_2	-0.62	-0.58	-0.17	0.93	-0.63	-0.18	2.44
		ω_3	-0.66	-0.59	-0.18	0.96	-0.67	-0.19	2.51
		total	1.86	1.73	0.51	2.80	1.88	0.55	7.32
	100	ω_1	-0.53	-0.20	0.08	0.48	-0.53	0.10	0.29
		ω_2	-0.58	-0.21	0.08	0.49	-0.57	0.10	0.30
		ω_3	-0.62	-0.22	0.08	0.51	-0.62	0.10	0.31
		total	1.73	0.63	0.24	1.48	1.72	0.30	0.90
	150	ω_1	-0.54	-0.15	0.03	0.25	-0.54	0.03	0.04
		ω_2	-0.59	-0.15	0.03	0.25	-0.59	0.03	0.04
		ω_3	-0.63	-0.16	0.03	0.26	-0.63	0.03	0.04
		total	1.76	0.46	0.09	0.76	1.76	0.09	0.24

$n = 50$, por exemplo, esses estimadores apresentam vieses relativos totais iguais a 0.03, 0.17 e 0.14, respectivamente, enquanto o viés relativo total do estimador ‘invwu’, por exemplo, é 7.83. O estimador ‘invwu’ é o mais viesado dentre os estimadores considerados, seguido do estimador HC4. Quando $n = 100$, por exemplo, os vieses relativos totais desses estimadores são 1.21 e 0.93, respectivamente. Para esse mesmo tamanho de amostra, o viés relativo total do estimador ‘ols’, por exemplo, é 0.27. Em comparação ao caso em que os erros seguem distribuição normal, os estimadores considerados se apresentam mais viesados quando os erros seguem distribuição t , com exceção dos estimadores White e ‘invwu’. Quando $n = 50$, por exemplo, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é igual a 8.50 quando os erros seguem distribuição normal e 7.83 quando os erros seguem distribuição t . Por outro lado, o estimador HC4 apresenta viés relativo total igual a 2.19 quando os erros seguem distribuição normal e 2.62 quando os erros seguem distribuição t , para o mesmo tamanho de amostra. Apesar do

estimador ‘invwu’ ser o mais viesado dentre os estimadores considerados, seu viés diminui rapidamente à medida que o tamanho da amostra aumenta, também no caso em que os erros seguem distribuição t . Quando $n = 50$, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é igual a 7.83, conforme mencionado anteriormente. Esse valor diminui para 0.55 quando o tamanho da amostra aumenta para $n = 150$.

Sob heteroscedasticidade, os estimadores considerados, de uma forma geral, se apresentam mais viesados relativamente ao caso em que vigora homoscedasticidade, com exceção do estimador ‘invwu’. O estimador HC4, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.93 quando $n = 100$ e sob homoscedasticidade. Sob heteroscedasticidade, o viés relativo total desse estimador é igual a 1.48, para o mesmo tamanho de amostra. Por outro lado, o viés do estimador ‘invwu’ passa de 1.21 sob homoscedasticidade para 0.90 sob heteroscedasticidade quando $n = 100$, fazendo com que esse estimador deixe de ser um dos estimadores mais viesados e passe a ser um dos menos viesados dentre os estimadores considerados, quando o tamanho da amostra aumenta. Em ambos os casos, sob homoscedasticidade e sob heteroscedasticidade, os vieses dos estimadores considerados se apresentam ligeiramente diferentes quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. Por exemplo, quando $n = 50$ e sob heteroscedasticidade, o viés relativo total do estimador ‘naïve’ é igual a 1.89 quando os erros seguem distribuição normal e igual a 1.88 quando os erros seguem distribuição t . O estimador ‘invwu’ se apresenta um pouco mais sensível a essa mudança na distribuição dos erros. Quando $n = 100$, por exemplo, o viés relativo total do estimador ‘invwu’ é 1.59 quando os erros são normalmente distribuídos e 0.90 quando os erros seguem distribuição t , ainda sob heteroscedasticidade. Sob homoscedasticidade, o estimador ‘invwu’ apresenta viés relativo total igual a 0.81 quando os erros são normalmente distribuídos e $n = 150$. Quando os erros seguem distribuição t , o viés relativo total desse estimador é 0.55 para o mesmo tamanho de amostra.

Quando os pontos de alavanca não estão presentes na amostra (Tabela 3.13) e sob homoscedasticidade, os estimadores considerados se apresentam, tipicamente, menos viesados em relação ao caso em que os pontos de alavanca estão presentes, o que pode ser ilustrado, por exemplo, pelo estimador HC4. Quando $n = 50$, o viés relativo total do estimador HC4 é igual a 2.62 para ‘dados1’. Quando os pontos de alavanca não estão presentes na amostra (‘dados2’), o viés relativo total desse estimador é igual a 0.40, quando $n = 47$. Outro exemplo pode ser dado pelo estimador ‘invwu’. Quando $n = 100$, o viés relativo total desse estimador passa de 1.21 quando os pontos de alavanca estão presentes na amostra para 0.13 quando os pontos de alavanca estão ausentes. Em relação ao caso em que os erros seguem distribuição normal, os estimadores considerados tipicamente se apresentam mais viesados quando os erros seguem distribuição t , com exceção o estimador ‘invwu’. O estimador HC3,

Tabela 3.13. Viés para ‘dados2’ com erros t_3 .

	n	α	ols	white	hc3	hc4	naïve	wu	‘invwu’	
homo	47	ω_1	0.01	-0.03	0.09	0.12	0.00	0.09	0.11	
		ω_2	0.01	-0.02	0.11	0.13	0.00	0.10	0.12	
		ω_3	0.01	-0.01	0.12	0.15	0.00	0.11	0.14	
		total	0.03	0.06	0.32	0.40	0.00	0.30	0.37	
	94	ω_1	0.07	0.00	0.06	0.06	0.07	0.07	0.05	0.04
		ω_2	0.07	0.00	0.06	0.07	0.07	0.07	0.05	0.04
		ω_3	0.07	0.01	0.07	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05
		total	0.21	0.01	0.19	0.21	0.21	0.21	0.16	0.13
	141	ω_1	0.06	0.03	0.07	0.07	0.06	0.06	0.07	0.01
		ω_2	0.06	0.04	0.08	0.08	0.06	0.07	0.07	0.01
		ω_3	0.06	0.05	0.09	0.09	0.06	0.06	0.08	0.02
		total	0.18	0.12	0.24	0.24	0.18	0.22	0.22	0.04
hetero	47	ω_1	-0.15	0.09	0.28	0.37	-0.16	0.28	0.15	
		ω_2	-0.21	0.10	0.29	0.38	-0.21	0.29	0.15	
		ω_3	-0.26	0.10	0.30	0.39	-0.26	0.30	0.15	
		total	0.62	0.29	0.87	1.14	0.63	0.87	0.45	
	94	ω_1	-0.09	0.09	0.17	0.20	-0.09	0.15	-0.02	
		ω_2	-0.14	0.09	0.17	0.21	-0.14	0.15	-0.02	
		ω_3	-0.20	0.09	0.18	0.21	-0.20	0.16	-0.02	
		total	0.43	0.27	0.52	0.62	0.43	0.46	0.06	
	141	ω_1	-0.09	0.13	0.18	0.20	-0.09	0.17	-0.07	
		ω_2	-0.15	0.13	0.19	0.21	-0.15	0.18	-0.07	
		ω_3	-0.20	0.14	0.20	0.22	-0.20	0.19	-0.07	
		total	0.44	0.40	0.57	0.63	0.44	0.54	0.21	

por exemplo, é livre de viés quando $n = 47$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição t , o viés relativo total desse estimador é igual a 0.32, para o mesmo tamanho de amostra. O estimador ‘invwu’, por outro lado, apresenta viés relativo total igual a 0.41 quando os erros seguem distribuição normal e igual a 0.37 quando os erros seguem distribuição t , para $n = 47$.

Sob heteroscedasticidade, os estimadores considerados se apresentam mais viesados com relação ao caso em que há homoscedasticidade. O estimador de White, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.06 quando $n = 47$ e sob homoscedasticidade. Sob heteroscedasticidade, porém, o viés relativo total desse estimador é igual a 0.29. Considerando apenas o caso em que há heteroscedasticidade, o estimador HC4 é o que se mostra mais viesado, como pode ser visto quando $n = 94$. Para esse tamanho de amostra, o viés relativo total desse estimador é igual a 0.62, enquanto o viés do estimador ‘invwu’, por exemplo,

é igual a 0.06 para o mesmo tamanho de amostra. O estimador ‘invwu’ se mostra pouco viesado em relação aos demais estimadores considerados, especialmente quando $n = 94$ e $n = 141$. O viés relativo total desse estimador é igual a 0.21 quando $n = 141$, enquanto o viés do estimador ‘wu’, por exemplo, é igual a 0.54. Os vieses dos estimadores considerados são geralmente maiores quando os erros seguem distribuição t em relação ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. O estimador HC4, por exemplo, apresenta viés relativo total igual a 0.09 quando $n = 47$ e os erros são normalmente distribuídos. Quando os erros seguem distribuição t o viés relativo total desse estimador é igual a 1.14. Outro exemplo pode ser dado tomando-se o estimador ‘invwu’. Quando $n = 141$, o viés relativo total desse estimador é igual a 0.18 quando os erros seguem distribuição normal e 0.21 quando os erros seguem distribuição t . Diante dessas considerações, pode-se afirmar que a mudança na distribuição dos erros, de uma distribuição normal para uma distribuição t com três graus de liberdade, afeta os estimadores considerados de forma mais ou menos homogênea no que se refere a seus vieses. Em particular, o estimador ‘invwu’ se mostra mais sensível a tal mudança quando os pontos de alavanca não estão presentes na amostra.

3.5 Uma aplicação empírica

Com o objetivo de analisar o comportamento dos novos estimadores quando dados reais são utilizados, considerou-se o seguinte modelo de regressão:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_t^2 + u_t, \quad t = 1, \dots, 50.$$

Assim como nas seções anteriores, a variável y corresponde ao gasto per capita em escolas públicas nos Estados Unidos em 1979. As variáveis independentes x e x^2 representam a renda per capita por estado e o seu quadrado, respectivamente. O estado de Wisconsin foi retirado da amostra por apresentar informação incompleta. Em contrapartida, foi adicionado Washington, DC. Os dados estão apresentados em Greene (1997, Tabela 12.1, p.541) e sua fonte original é o Departamento de Comércio dos EUA.

Segundo Cribari–Neto & Zarkos (2004), as estimativas por mínimos quadrados ordinários dos parâmetros do modelo considerado são as seguintes: $\hat{\beta}_1 = 832.914$, $\hat{\beta}_2 = -1834.203$, $\hat{\beta}_3 = 1587.042$. É importante ressaltar que o teste de Breusch-Pagan-Godfrey rejeita, ao nível de 1%, a hipótese nula de homoscedasticidade, indicando a presença de heteroscedasticidade nos dados.

O que se pretende aqui é testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ contra a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \beta_3 \neq 0$, ou seja, pretende-se testar uma especificação linear contra uma especificação

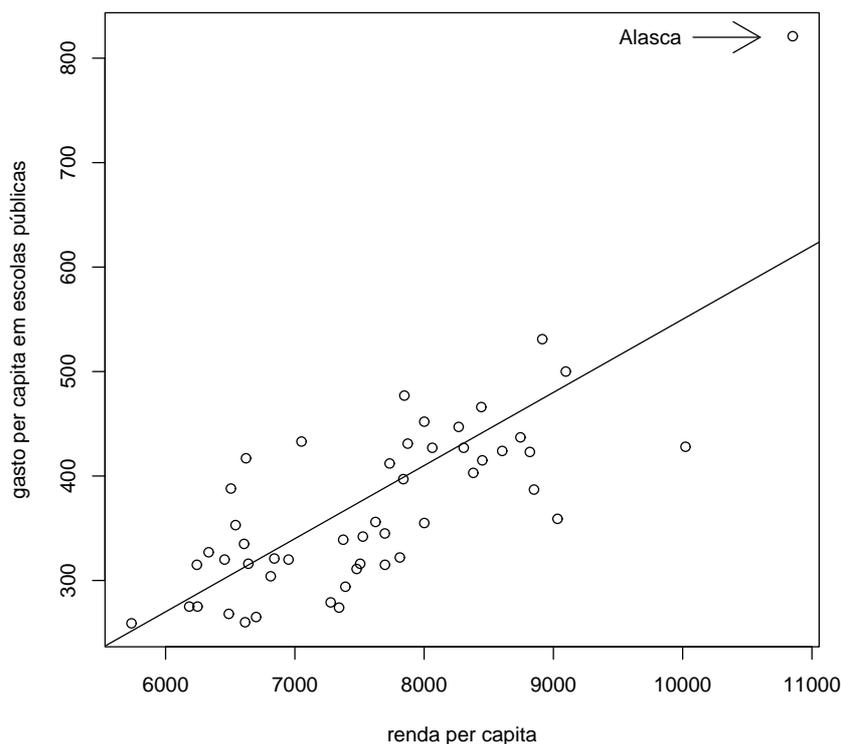
quadrática. A Tabela 3.5 apresenta os diferentes p -valores para esse teste. Para os estimadores baseados em esquemas de bootstrap, o número de réplicas utilizado foi 5000.

Tabela 3.5. p -valores dos testes quasi- t .

Teste	p -valor com Alasca	p -valor sem Alasca
OLS	0.0022	0.6495
White	0.0559	0.6162
HC3	0.4264	0.7758
HC4	0.7725	0.8923
wu	0.2082	0.6986
‘invwu’	0.6000	0.8450
‘invwu’2	0.6068	0.8432
‘invwu’3	0.5996	0.8444
‘invwu’4	0.5947	0.8444
‘invwu’5	0.5992	0.8448
‘invwu’6	0.6308	0.8421

Pode-se perceber que, no caso em que o Alasca está presente na amostra, a hipótese nula é rejeitada pelos testes baseados no estimador de mínimos quadrados e no estimador de White aos níveis de 1% e 10%, respectivamente (Cribari–Neto & Zarkos, 2004). Entretanto, ao se examinar a Figura 3.1, que apresenta graficamente os dados, pode-se perceber que os mesmos sugerem uma relação linear satisfatória, exceto quanto à observação referente ao Alasca. Conforme mencionado anteriormente, essa é uma observação com alto grau de alavancagem, com $h_{Alasca} = 0.651$ quando $3k/n = 0.180$. Quando se retira o Alasca da amostra e refazem-se as inferências, nenhum dos testes rejeita a hipótese nula aos níveis usuais de significância. Segundo Cribari–Neto & Zarkos (2004), apenas uma observação atípica está levando à rejeição da hipótese nula de uma especificação linear quando o teste considerado utiliza o estimador HC0. O teste que rejeita mais fortemente a hipótese nula é aquele baseado no estimador HC4, seguido daquele que se baseia no estimador ‘invwu6’, cuja probabilidade de seleção de resíduos é definida em (3.3). Quando o Alasca está presente na amostra, os p -valores dos testes baseados nesses estimadores são 0.7725 e 0.6308, respectivamente. Quando o Alasca não está presente na amostra, o teste baseado no estimador HC4 ainda é o que rejeita a hipótese nula mais fortemente, seguido do teste que se baseia no estimador ‘invwu’, desenvolvido por Cribari–Neto & Zarkos (2004). Quanto aos novos estimadores propostos, pode-se perceber que os testes baseados nesses estimadores mais uma vez apresentam resultados muito próximos entre si e próximos também do estimador ‘invwu’. Isso reforça a idéia de que o estimador ‘invwu’ é muito pouco sensível a diferentes formas de seleção de resíduos no esquema de reamostragem.

Figura 3.1. Gasto per capita em escolas públicas e renda per capita nos EUA.



3.6 Conclusões

Ao longo deste capítulo foram apresentados resultados referentes ao viés relativo total e ao tamanho dos testes quasi- t associados a diferentes estimadores consistentes da matriz de covariâncias do estimador de mínimos quadrados ordinários. O objetivo principal foi analisar a sensibilidade do estimador ‘invwu’ de Cribari–Neto & Zarkos (2004), em amostras finitas, a diferentes probabilidades de seleção de resíduos no esquema de reamostragem bem como sua sensibilidade a erros que não seguem distribuição normal. Para tanto, foram considerados casos com e sem pontos de alavanca, tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade.

No que se refere ao tamanho do teste quasi- t baseado no estimador ‘invwu’ pode-se dizer que na presença de pontos de alavanca e sob normalidade dos erros este teste apresenta precisão consideravelmente superior aos testes baseados em outros estimadores, quando há heteroscedasticidade. O mesmo pode ser dito de suas variantes, pois estas apresentam resultados muito próximos entre si e próximos também dos resultados do teste baseado no estimador original. Essa proximidade dos resultados se verifica também na ausência de pontos de alavanca, evidenciando a baixa sensibilidade do estimador ‘invwu’ a diferentes formas de reamostragem dos resíduos. Em relação aos vieses apresentados pelos estimadores, pode-

se afirmar que o estimador ‘invwu’ e suas variantes são os que tipicamente apresentam os maiores vieses, especialmente em pequenas amostras. Isso se verifica tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade, com e sem pontos de alavanca. Esses vieses, contudo, tendem a diminuir substancialmente à medida que cresce o tamanho da amostra.

Quanto às diferentes distribuições dos erros, o estimador ‘invwu’ se mostra pouco sensível a erros com distribuição assimétrica no que diz respeito ao tamanho dos testes associados. Quando os erros seguem distribuição exponencial com $\lambda = 1$, o comportamento do teste baseado no estimador ‘invwu’ é semelhante quando os erros são normalmente distribuídos, tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade, com e sem pontos de alavanca. No que diz respeito ao viés, todavia, o estimador ‘invwu’ se mostra mais sensível a erros assimétricos que os outros estimadores considerados. Quando os erros seguem distribuição exponencial, o estimador ‘invwu’ apresenta vieses maiores relativamente à situação onde os erros seguem distribuição normal.

Quando os erros seguem distribuição t com três graus de liberdade, os tamanhos dos testes baseados no estimador ‘invwu’ tipicamente se mostram mais próximos dos tamanhos nominais quando comparados ao caso em que os erros são normalmente distribuídos. A exceção é o caso em que há homoscedasticidade e os pontos de alavanca estão presentes na amostra. O estimador ‘invwu’ se mostra pouco mais sensível a erros com caudas longas do que a erros assimétricos em relação a erros normalmente distribuídos, sendo que o desempenho desse estimador é tipicamente melhor no primeiro caso, no que diz respeito ao tamanho do teste quasi- t associado. Quando o critério de avaliação é o viés dos estimadores, pode-se afirmar que o estimador ‘invwu’ se mostra tipicamente menos viesado que os outros estimadores considerados. Quando os erros seguem distribuição t , os vieses do estimador ‘invwu’ são próximos daqueles apresentados quando os erros são normalmente distribuídos, evidenciando a baixa sensibilidade desse estimador a erros com caudas longas, no que se refere ao viés.

Dessa forma, os resultados encontrados sugerem que, apesar do estimador ‘invwu’ ser mais viesado que os demais estimadores consistentes considerados, sua utilização conduz geralmente a testes com pequenas distorções de tamanho quando há pontos de alavanca na amostra, independentemente do fato dos erros seguirem ou não distribuição normal.

Apêndice

Neste apêndice será apresentado o programa em Ox utilizado para o cálculo dos vieses dos estimadores e dos tamanhos dos testes quasi- t a que eles conduzem.

```
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>

fbias(const test, const truevalue);
fmse(const estimatorvar, const estimator, const trueval);

fhii(const prob, const prob2, const prob3, const prob4, const prob5, const prob6,
      const emp_prob, const newemp_prob, const emp_prob2, const newemp_prob2, const emp_prob3,
      const newemp_prob3, const emp_prob4, const newemp_prob4, const emp_prob5,
      const newemp_prob5, const emp_prob6, const newemp_prob6, const obs, const rdraw);
rejection(const series, const criticalvalue, const nrepls);
dataread(const number);

main()
{

    decl et, Y, x11, x22, x1, x2, nrepls, nboots, nvar, obs, alpha_1, alpha_2, X,
    XtX, invXtX, M, P, Pt, H, systematic, beta, design, sample, num_samples,
    num_datasets, sigma, omega, w, bols_mc, resid, X_bt, Y_bt, invXX_bt,
    P_bt, M_bt, d_first, d_final, ratio, rndint, true_var, i, j, true,
    dataset, a_j, systemat, weigh_res, res_adj, Y_Wu, Y_Wu2, weight3,
    naive, wu, inv_wu, inv_wu2, inv_wu3, inv_wu4, inv_wu5, inv_wu6,
    var_naive, bias_naive, mse_naive,
    var_wu, bias_wu, mse_wu, var_‘invwu’, var_white, bias_‘invwu’, mse_‘invwu’,
    var_HC4, HC4_var, HC4, biasHC4, mseHC4, ols_var, biasOLS, olsvar_var, mseOLS,
    var_HC3, HC3_var, HC3, biasHC3, mseHC3, white_var, biasWhite, mseWhite, mse_white,
    white, relativebias, bias_all, mse_all, sum, t_beta_3, quasi_t_stat_cvs, kk,
    kkk, results, hii, hii1, hii2, hii3, hii4, hii5, hii6, Y_hii, X_hii, Xt_bt,
    XtX_bt, invXtX_bt, weigh2_res, d_t,
    var_denom, b_4bt, X_boot, Y_boot, weight4, weight_mix, Y_mix, weigh_mix,
    resid2, weight_22, weight_wu, resid_factor, limit1, limit2,
    Y_Wu222, Y_Wu223, Y_Wu224, Y_Wu225, Y_Wu226, Y_Wu227, estimators,
    data, g, weight_expon, gnew, coef, mix, gnew1,
    var_‘invwu’2, var_‘invwu’3, var_‘invwu’4, var_‘invwu’5, var_‘invwu’6,
    mse_‘invwu’2, mse_‘invwu’3, mse_‘invwu’4, mse_‘invwu’5, mse_‘invwu’6, bias_‘invwu’2,
    bias_‘invwu’3, bias_‘invwu’4, bias_‘invwu’5, bias_‘invwu’6, prob,
    emp_prob, newemp_prob, prob2, prob3, prob4, emp_prob2, newemp_prob2,
    emp_prob3, newemp_prob3, emp_prob4, newemp_prob4, emp_prob5, newemp_prob5,
    prob5, prob6, emp_prob6, newemp_prob6, rand, d, l, hiit,
    rdraw;

    /* Initialize the timer */
    et = timer();

    /* Random number generator */
    ranseed("GM");
```

```

// ----- Parameters to be set for simulation run -----
//
// 1st line: Monte Carlo and bootstrap replications
// 2nd line: initial and final designs to be used (1 through 2)
// 3rd line: sample sizes

nrepls = 1; nboots = 1;
d_first = 1; d_final = 2;
num_samples = 3; num_datasets = 2;

decl file = fopen("boot3_f4_t_stats.out", "w");

/* Especificando o modelo*/

estimators = 12;

bias_all = zeros(num_samples, estimators);
mse_all = zeros(num_samples, estimators);

results = zeros(estimators, 3);
t_beta_3 = zeros(nrepls, estimators);

for (dataset = 1; dataset <= num_datasets; ++dataset)
{
    [data, alpha_1, alpha_2]=dataread(dataset);
    x11 = data[][0] ./ 10000; x22 = x11 .^ 2;
    print("\nRandom seed George Marsaglia's: ", ranseed(0), "\n");

    /* Loop over designs: */
    for (design = d_first; design <= d_final; ++design)
    {
        /* Loop over different sample sizes */
        for (sample = 1; sample <= num_samples; ++sample)
        {
            x1 = vec(x11 * ones(1, sample));
            x2 = vec(x22 * ones(1, sample));
            X = 1~x1~x2;
            obs = rows(X);
            nvar = columns(X);
            XtX = X'*X;
            invXtX = invtsym(XtX);
            P = invXtX*X';
            Pt = P';
            M = X*P; /* Hat Matrix*/
            H = unit(obs) - M;
            beta = ones(nvar-1,1)|0;
            coef = 2;
            systematic = X*beta;
            var_denom = (1.0 / (obs-nvar)) .* invXtX;

            ols_var = zeros(nvar,nrepls); HC4 = ols_var; white = ols_var;
            HC3=white; mse_naive = HC4; mse_wu = HC4; mse_‘invwu’ = HC4;

```

```

var_naive = zeros(nvar,nrepls); var_wu = var_naive; var_‘invwu’ = var_naive;
naive = zeros(nvar,nboots); wu = naive; inv_wu = naive;
inv_wu2 = naive, inv_wu3 = naive, inv_wu6 = inv_wu5 = inv_wu4 = naive;
var_‘invwu’2 = var_naive, var_‘invwu’3 = var_naive, var_‘invwu’6;
var_‘invwu’5 = var_‘invwu’4 = var_naive;
mse_‘invwu’2 = HC4, mse_‘invwu’3 = HC4, mse_‘invwu’6 = mse_‘invwu’5 =
mse_‘invwu’4 = HC4;

/*Regression designs */
if (design == 1)
sigma = ones(obs,1);
else if (design == 2)
sigma = sqrt(exp(alpha_1*x1+alpha_2*x2));

/*True covariance matrix*/
omega = diag(sigma .^ 2);
true_var = P*omega*Pt;
true = diagonal(true_var)';

w = diagonal(M);
d = exp(w') / 1 + exp(w');

prob = 1 ./ w';
prob2 = 1 ./(w' .^ 0.5);
prob3 = 1 ./(w' .^ 0.75);
prob4 = 1 ./(w' .^ 1.25);
prob5 = 1 ./quanexp(w',1);
prob6 = 1 ./ probn(d);
emp_prob = prob .* (1.0 / double(sumc(prob)) );
emp_prob2 = prob2 .* (1.0 / double(sumc(prob2)) );
emp_prob3 = prob3 .* (1.0 / double(sumc(prob3)) );
emp_prob4 = prob4 .* (1.0 / double(sumc(prob4)) );
emp_prob5 = prob5 .* (1.0 / double(sumc(prob5)) );
emp_prob6 = prob6 .* (1.0 / double(sumc(prob6)) );

newemp_prob = 0.0|cumulate(emp_prob);
newemp_prob2 = 0.0|cumulate(emp_prob2);
newemp_prob3 = 0.0|cumulate(emp_prob3);
newemp_prob4 = 0.0|cumulate(emp_prob4);
newemp_prob5 = 0.0|cumulate(emp_prob5);
newemp_prob6 = 0.0|cumulate(emp_prob6);

g = ( obs .*w ) ./ nvar;
gnew1 = g .> 4 .? 4 .: g; /* Min {4,g} */
weight4 = sqrt( 1.0 ./ ((1.0-w') .^ gnew1') ); /* used for HC4 */
weight3 = sqrt( 1.0 ./ ((1.0-w') .^ 2) ); // used for HC3

resid_factor = sqrt( obs / (obs-nvar) );
limit1 = 2*nvar/obs;
limit2 = 3*nvar/obs;

/* adjusted weight bootstrap estimator*/
d_t = w .> limit1 .? 3 .: 1;
weight_wu = sqrt( 1.0 ./ (1.0-w') );
weight_22 = sqrt( 1.0 ./ ((1.0-w') .^ (d_t')) );

mix = w .> limit1 .? 2 .: 1;
mix = w .> limit2 .? 3 .: mix;

```

```

weight_mix = sqrt( 1.0 ./ ((1.0-w') .^ (mix')) );

/* Monte Carlo loop */
for (i = 0; i < nrepls; ++i)
{
    ranseed({2.0*i+50, 5.0*i+100});
    Y=systematic+sigma .* rann(obs,1);

    bols_mc = P*Y;
    resid = H*Y;
    resid2 = (resid .^ 2);

    /*ols estimator */
    ols_var[] [i]=diagonal( double(sumc(resid2)) * var_denom )';

    /*White estimator*/
    var_white = P * (resid2 .* Pt);
    white[] [i] = diagonal( var_white )';

    /*HC4*/
    var_HC4 = P * ( (resid2 .* weight4) .* Pt );
    HC4[] [i] = diagonal(var_HC4)';

    /*HC3*/
    var_HC3 = P * ( (resid2 .* weight3) .* Pt );
    HC3[] [i] = diagonal( var_HC3 )';

    systemat = X*bols_mc;

    /* Wu's bootstrap*/
    a_j = resid ./ sqrt( meanr((resid2)') );
    weigh_res = ( resid .* weight_wu ); // u / sqrt(1 - h_t)

    // new Wu's non-parametric boot
    weigh2_res = resid .* ( weight_22 );
    // new Wu's non-parametric boot
    weigh_mix = resid .* ( weight_mix );

    /* naive bootstrap*/
    res_adj = resid * resid_factor;

    /* bootstrap loop */
    for (j = 0; j < nboots; ++j)
    {
        ranseed({2.0*(i+j*555+1), i+j});
        rdraw= ranu(obs,1);
        rndint = rdraw*obs;

        /* Naive bootstrap*/
        naive[] [j] = P*( systemat+res_adj[rndint][0] );

        /* Wu's bootstrap */
        Y_Wu = systemat+(weigh_res .* a_j[rndint][0]);
        wu[] [j] = P*Y_Wu;
    }

    hii = fhii(prob, prob2, prob3, prob4, prob5, prob6, emp_prob,

```

```

newemp_prob, emp_prob2, newemp_prob2, emp_prob3, newemp_prob3,
emp_prob4, newemp_prob4, emp_prob5, newemp_prob5, emp_prob6,
newemp_prob6, obs, rdraw);
X_hii = X[hii] [];
Y_hii = Y[hii] [];

hii1 = hii [] [0];
hii2 = hii [] [1];
hii3 = hii [] [2];
hii4 = hii [] [3];
hii5 = hii [] [4];
hii6 = hii [] [5];
Y_Wu222 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii1] [0]); // this is boot222
inv_wu [] [j] = P*Y_Wu222;

Y_Wu223 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii2] [0]);
inv_wu2 [] [j] = P*Y_Wu223;

Y_Wu224 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii3] [0]);
inv_wu3 [] [j] = P*Y_Wu224;

Y_Wu225 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii4] [0]);
inv_wu4 [] [j] = P*Y_Wu225;

Y_Wu226 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii5] [0]);
inv_wu5 [] [j] = P*Y_Wu226;

Y_Wu227 = systemat+(weigh2_res .* a_j[hii6] [0]);
inv_wu6 [] [j] = P*Y_Wu227;

} /* End of the bootstrap loop*/

var_naive [] [i]=varr(naive);mse_naive [] [i]=fmse(var_naive [] [i],naive, beta);
var_wu [] [i]=varr(wu);mse_wu [] [i]=fmse(var_wu [] [i],wu,beta);
var_‘invwu’ [] [i]=varr(inv_wu);mse_‘invwu’ [] [i]=fmse(var_‘invwu’ [] [i],inv_wu,beta);
var_‘invwu’2 [] [i]=varr(inv_wu2);mse_‘invwu’2 [] [i]=fmse(var_‘invwu’2 [] [i],inv_wu2,beta);
var_‘invwu’3 [] [i]=varr(inv_wu3);mse_‘invwu’3 [] [i]=fmse(var_‘invwu’3 [] [i],inv_wu3,beta);
var_‘invwu’4 [] [i]=varr(inv_wu4);mse_‘invwu’4 [] [i]=fmse(var_‘invwu’4 [] [i],inv_wu4,beta);
var_‘invwu’5 [] [i]=varr(inv_wu5);mse_‘invwu’5 [] [i]=fmse(var_‘invwu’5 [] [i],inv_wu5,beta);
var_‘invwu’6 [] [i]=varr(inv_wu6);mse_‘invwu’6 [] [i]=fmse(var_‘invwu’6 [] [i],inv_wu6,beta);

t_beta_3[i] [0]= (bols_mc[coef] [0]-0.0)/sqrt(ols_var[coef] [i]);
t_beta_3[i] [1]= ( bols_mc[coef] [0]-0.0 ) / sqrt(var_naive[coef] [i]);
t_beta_3[i] [2]= ( bols_mc[coef] [0]-0.0 ) / sqrt(var_wu[coef] [i]);
t_beta_3[i] [3]= ( bols_mc[coef] [0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’ [coef] [i]);

```

```

t_beta_3[i][4]= (bols_mc[coef][0]-0.0)/sqrt(HC4[coef][i]);
t_beta_3[i][5]= (bols_mc[coef][0]-0.0)/sqrt(HC3[coef][i]);
t_beta_3[i][6]= (bols_mc[coef][0]-0.0)/sqrt(white[coef][i]);
t_beta_3[i][7]= ( bols_mc[coef][0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’2[coef][i]);
t_beta_3[i][8]= ( bols_mc[coef][0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’3[coef][i]);
t_beta_3[i][9]= ( bols_mc[coef][0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’4[coef][i]);
t_beta_3[i][10]= ( bols_mc[coef][0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’5[coef][i]);
t_beta_3[i][11]= ( bols_mc[coef][0]-0.0 ) / sqrt(var_‘invwu’6[coef][i]);

} /* End of Monte Carlo loop */

/* Estimator variances*/
olsvar_var = varr(ols_var);
mseOLS = fmse(olsvar_var, ols_var, true);

HC4_var = varr(HC4);
mseHC4 = fmse(HC4_var, HC4, true);

HC3_var = varr(HC3);
mseHC3 = fmse(HC3_var, HC3, true);

white_var = varr(white);
mseWhite = fmse(white_var, white, true);

mse_all[sample-1][ ] = sqrt(sumc((mseOLS)~
meanr(mse_naive)~meanr(mse_wu)~meanr(mse_‘invwu’)~(mseHC4)~(mseHC3)));

/*Bias*/
bias_naive = fbias(var_naive, true);
bias_wu = fbias(var_wu, true);
bias_‘invwu’ = fbias(var_‘invwu’, true);
bias_‘invwu’2 = fbias(var_‘invwu’2, true);
bias_‘invwu’3 = fbias(var_‘invwu’3, true);
bias_‘invwu’4 = fbias(var_‘invwu’4, true);
bias_‘invwu’5 = fbias(var_‘invwu’5, true);
bias_‘invwu’6 = fbias(var_‘invwu’6, true);
biasOLS = fbias(ols_var, true);
biasHC4 = fbias(HC4, true);
biasHC3 = fbias(HC3, true);
biasWhite = fbias(white, true);

relativebias=biasOLS~bias_naive~bias_wu~bias_‘invwu’~bias_‘invwu’2~
bias_‘invwu’3~bias_‘invwu’4~bias_‘invwu’5~bias_‘invwu’6~biasHC4~
biasHC3~biasWhite;
bias_all[sample-1][ ] = sumc(fabs(relativebias));

/* Printing results*/

print( "\n\t\t SIMULATION RESULTS: HETEROSKEDASTIC BOOTSTRAP");
print( "\n\t\t -----\n");

```

```

print( "\n\t\t OX PROGRAM: ", oxfilename(0) );
print( "\n\t\t OX VERSION: ", oxversion() );
print( "\n\t\t NUM. REPLICATIONS: ", nrepls );
print( "\n\t\t NUM. BOOT. REPLICATIONS: ", nboots );
print( "\n\t\t NUM. OBSERVATIONS: ", obs );
print( "\n\t\t DESIGN: ", design );
print( "\n\t\t DATASET: ", dataset );
if(dataset == 1) print(" * GREENE * ");
else if(dataset == 2) print(" * GREENE NO LEVERAGE * ");

print( "\n\t\t DATE: ", date() );
print( "\n\t\t TIME: ", time() );
print( "\n" );

format(200);

if (sample == 1)
{
print( "\n\nDesign: ", design );
print( "\nDesigns 1 and 2 are for normal errors.",
"\n(homoskedasticity and heteroskedasticity, respectively).");
print( "\n");
print( "\nAlpha's: ", alpha_1~alpha_2 );

}

print( "\n\nLeverage in X matrix:", min(w)~max(w) );
print( "\nLimits: 2p/n and 3p/n: ", limit1~limit2 );
print( "\nNumber of w's beyond limits: ", (sumr(w .> limit1))~
(sumr(w .> limit2)) );

if (dataset==1)
{
print("\nRMSE (N=", obs, ")", "%c",{ "OLS", "naive", "wu",
"'invwu'", "HC4", "HC3", "white", "'invwu'2", "'invwu'3", "'invwu'4",
"'invwu'5", "'invwu'6"},
"%12.3f", sqrt(meanr(mseOLS)~meanr(mse_naive)~meanr(mse_wu)~meanr(mse_'invwu')
~meanr(mseHC4)~meanr(mseHC3)~meanr(mseWhite)~meanr(mse_'invwu'2)
~meanr(mse_'invwu'3)~meanr(mse_'invwu'4)~meanr(mse_'invwu'5)
~meanr(mse_'invwu'6)));
}
else
{
print("\nRMSE (N=", obs, ")", "%c",{ "OLS", "naive", "wu",
"'invwu'", "HC4", "HC3", "white", "'invwu'2", "'invwu'3", "'invwu'4",
"'invwu'5", "'invwu'6"},
"%12.1f", sqrt(meanr(mseOLS)~meanr(mse_naive)~meanr(mse_wu)~meanr(mse_'invwu')
~meanr(mseHC4)~meanr(mseHC3)~meanr(mseWhite)~meanr(mse_'invwu'2)
~meanr(mse_'invwu'3)~meanr(mse_'invwu'4)~meanr(mse_'invwu'5)
~meanr(mse_'invwu'6)));
}

print("\nRelative bias (N=", obs, ")", "%c", { "OLS", "naive",
"w", "'invwu'", "'invwu'2", "'invwu'3", "'invwu'4", "'invwu'5", "'invwu'6",
"HC4", "HC3", "white"}, "%12.3f", relativebias);

```

```

/* Critical Values */

quasi_t_stat_cvs = < 1.644854, 1.959964, 2.575829 >;

for (kk = 0; kk < rows(results); ++kk)
{
  for (kkk = 0; kkk <= 2; ++kkk)
  {
    results[kk][kkk]=rejection(t_beta_3[][kk],quasi_t_stat_cvs[0][kkk],nrepls);
  }
}

fprintf(file, "%9.4f",t_beta_3[][2:6]);
print("\n* Estimated sizes of quasi-t tests: ", "%r", {"OLS","naive",
"wu","invwu","HC4","HC3","white","invwu'2", "invwu'3", "invwu'4",
"invwu'5","invwu'6"},
"%c", {"10%", "5%", "1%"}, "%10.3f", results );

} // End of sample size loop

print( "\n This is design ", design );

//Printing variance ratio
ratio = ( max(sigma) ./ min(sigma) ) ^2;
print( "\n Variance ratio (lambda) = ", ratio, "\n" );

// Two types of print format, for nicer presentation of the output
if (dataset==1)
{
print("\n* Aggregate RMSE of:", "%c", {"OLS", "naive", "wu","invwu","HC4",
"HC3","white","invwu'2","invwu'3","invwu'4","invwu'5", "invwu'6"},
"%r",{ "N = 50", "N = 100", "N = 150", "N = 200"}, "%12.3f", mse_all);
}
else
{
print("\n* Aggregate RMSE of:", "%c", {"OLS", "naive", "wu","invwu", "HC4",
"HC3","white","invwu'2","invwu'3","invwu'4","invwu'5","invwu'6"},
"%r",{ "N = 50", "N = 100", "N = 150", "N = 200"}, "%12.1f", mse_all);
}

print("\n* Aggregate relative bias of:", "%c", {"OLS","naive","wu","invwu",
"HC4","HC3","white","invwu'2","invwu'3","invwu'4","invwu'5","invwu'6"},
"%r",{ "N = 50", "N = 100", "N = 150", "N = 200"}, "%12.3f", bias_all );

} // End of the regression design loop

} // End of the loop over datasets

fclose(file);

print( "\n\nDate: ", date() );

```

```

        print( "\nTime: ", time() );
        print( "\nOx version: ", oxversion() );
        print( "\nExecution time: ", timespan(et) );

    }

/*Function used for bias evaluation*/

fbias(const test, const truevalue)
{
    return ((meanr(test)-truevalue) ./ truevalue);
}

//Function used for MSE evaluation

fmse(const estimatorvar, const estimator, const trueval)
{
    decl mse;
    mse = estimatorvar + ( (meanr(estimator)-trueval) .^ 2.0 );
    return mse;
}

//Function used for rejection ratios

rejection(const series, const criticalvalue, const nrepls)
{
    return (sumc( fabs(series) .> criticalvalue ) / nrepls)*100;
}

//Function used for reading data
dataread(const number)
{
    decl data, alpha_1, alpha_2;
    if (number==1)
    {
        data = loadmat("greene.mat");
        alpha_1 = 2; alpha_2 = 2;
    }
    else if (number==2)
    {
        // Greene's data w/o the influential observations
        data = loadmat("greene_no.mat");
        alpha_1 = 3.7; alpha_2 = 3.7;
    }
    return {data, alpha_1, alpha_2};
}

fhii(const prob, const prob2, const prob3, const prob4, const prob5,
      const prob6, const emp_prob, const newemp_prob, const emp_prob2,
      const newemp_prob2, const emp_prob3, const newemp_prob3, const emp_prob4,
      const newemp_prob4, const emp_prob5, const newemp_prob5, const emp_prob6,
      const newemp_prob6, const obs, const rdraw)

```

```

{
  decl test, i, j;

  test = zeros(obs, 6);

  for (j=0; j<obs; ++j)
  {
    for(i=0; i < obs; ++i)
    {
      if(newemp_prob[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob[i+1][0])
      {
        test[j][0] = i;
      }
      if(newemp_prob2[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob2[i+1][0])
      {
        test[j][1] = i;
      }

      if(newemp_prob3[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob3[i+1][0])
      {
        test[j][2] = i;
      }

      if(newemp_prob4[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob4[i+1][0])
      {
        test[j][3] = i;
      }

      if(newemp_prob5[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob5[i+1][0])
      {
        test[j][4] = i;
      }

      if(newemp_prob6[i][0] < rdraw[j][0] && rdraw[j][0] < newemp_prob6[i+1][0])
      {
        test[j][5] = i;
      }

    }
  }
  return test;
}

```

Referências bibliográficas

- [1] Bera, A.K., Suprayitno, T. & Premaratne, G. (2002). On some heteroskedasticity-robust estimators of variance-covariance matrix of the least-squares estimators. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 108, 121-136.
- [2] Chesher, A. & Austin, G. (1991). The finite-sample distributions of heteroskedasticity robust Wald statistics. *Journal of Econometrics*, 47, 153-173.
- [3] Chesher, A. & Jewitt, I. (1987). The bias of a heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator. *Econometrica*, 55, 1217-1222.
- [4] Cribari-Neto, F. (2004). Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics and Data Analysis*, 45, 215-233.
- [5] Cribari-Neto, F., Ferrari, S.L.P. & Cordeiro, G.M. (2000). Improved heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimators. *Biometrika*, 87, 907-918.
- [6] Cribari-Neto, F., Ferrari, S.L.P. & Oliveira, W.S.C. (2002). A numerical evaluation of testes based on different heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators. *Relatório Técnico RT-MAE-2002-13*, Departamento de Estatística, Universidade de São Paulo.
- [7] Cribari-Neto, F. & Galvão, N.M.S. (2003). A class of improved heteroskedasticity-covariance matrix estimators. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 32, 1951-1980
- [8] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S.G. (2001). Heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimation: White's estimator and the bootstrap. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 68, 391-411.
- [9] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S.G. (2004). Leverage-adjusted heteroskedastic bootstrap methods. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 74, 215-232.
- [10] Davidson, R. & Flachaire, E. (2001). The wild bootstrap, tamed at last. *Distributional Analysis Research Programme Papers*. DARP 58.
- [11] Davidson, R. & MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford University Press.

- [12] Davison, A.C. & Hinkley, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. New York: Cambridge University Press.
- [13] Doornik, J.A. (2001). *Ox: an Object-oriented Matrix Programming Language*, 4^a ed. Londres: Timberlake Consultants & Oxford: <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik>.
- [14] Draper, N. & Smith, H. (1980). *Applied Regression Analysis*. New York: Wiley
- [15] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- [16] Efron, B. & Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall.
- [17] Eicker, F. (1963). Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions. *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 447-456.
- [18] Eicker, F. (1967). Limit theorems for regressions with unequal and dependent errors. Em *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 59-82. Berkeley: University of California Press.
- [19] Greene, W.H. (1997). *Econometrics Analysis*, 3ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [20] Hinkley, D.V. (1977). Jackknifing in unbalanced situations. *Technometrics*, 19, 285-292.
- [21] Horn, S.D., Horn, R.A. & Duncan, D.B. (1975). Estimating heteroskedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 70, 380-385.
- [22] Imhof, J.P. (1961). Computing the distribution of a quadratic form in normal variates. *Biometrika*, 48, 419-426.
- [23] James, B. (1981). *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.
- [24] Long, J.S. & Ervin, L.H. (2000). Using heteroskedasticity-consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, 54, 217-224.
- [25] MacKinnon, J.G. (2002). Bootstrap inference in econometrics. Artigo apresentado no Annual Meeting of the Canadian Economics Association.

- [26] MacKinnon, J.G & White, H. (1985). Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite-sample properties. *Journal of Econometrics*, 29, 305-325.
- [27] Rothenberg, T. (1984). Approximate power functions for some robust tests of regression coefficients. *Research Papers in Economics* 84-1, University of California, Berkeley.
- [28] Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*. New York: Wiley.
- [29] White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct teste for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48, 817-838.
- [30] White, H. (2001). *Asymptotic Theory for Econometricians*, 2nd ed. Orlando: Academic Press.
- [31] Wooldridge, J.M. (2000). *Introductory Econometrics: a Modern Approach*. Cincinnati: South-Western College Publishing.
- [32] Wu, C.F.J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resample methods in regression analysis. *Annals of Statistics*, 14, 1261-1295.