UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

ANA CLARA NASCIMENTO OLIVEIRA

NÍVEIS DE VAN HIELE E A COMPREENSÃO DE DEMONSTRAÇÕES EM SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Caruaru
2025

ANA CLARA NASCIMENTO OLIVEIRA

NÍVEIS DE VAN HIELE E A COMPREENSÃO DE DEMONSTRAÇÕES EM SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em matemática do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Profª Drª Josinalva Estacio Menezes

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Oliveira, Ana Clara Nascimento .
Níveis de Van Hiele e a compreensão de demonstrações em semelhança de triângulos na Geometria Euclidiana / Ana Clara Nascimento Oliveira. - Caruaru, 2025.
70 p.

Orientador(a): Josinalva Estacio Menezes
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

1. Demonstrações. 2. Geometria euclidiana. 3. Semelhança de triângulos. 4. Ensino superior. I. Menezes, Josinalva Estacio. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

ANA CLARA NASCIMENTO OLIVEIRA

NÍVEIS DE VAN HIELE E A COMPREENSÃO DE DEMONSTRAÇÕES EM SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Aprovada em: 07/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Josinalva Estacio Menezes (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Drª. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Edson Carlos Sobral de Sousa (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho a todos que sempre acreditaram em mim.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer, primeiramente, à força que me sustentou durante toda a graduação: Deus. Obrigada por ter me apoiado até aqui!

Gostaria, além de parabenizar, agradecer a mim mesma. Só eu sei tudo o que passei e o quanto tive que segurar as minhas próprias mãos em momentos em que duvidei de mim. Obrigada por tanto! Espero que possa sempre me reerguer com a mesma força.

À minha mãe, Cida, que sei o quanto batalhou para que eu pudesse estar aqui. Não mensuro a sua força. Mesmo sem estudo, ela sempre fez de tudo para que eu pudesse caminhar em busca dos meus objetivos e sonhos, me guiando com amor e sabedoria. Essa conquista não é só minha, é sua também! Parabéns para a gente.

À minha tia Zelda, que é o meu encontro nesta vida: obrigada por ser minha segunda mãe, por todos os chás quando eu estava mal, por todos os abraços em meio aos choros. Obrigada por toda a paciência. Sou grata todos os dias por sua vida!

Aos meus irmãos mais velhos, Rafael e Diego, por quem expresso uma grande admiração. Somos totalmente diferentes, e isso nos completa. Vocês sempre serão um grande apoio.

Ao meu namorado, Mathias Vagner, o meu porto seguro. Obrigada por nunca sair do meu lado, por me ajudar e me apoiar mesmo quando eu duvidei de mim. Obrigada por acreditar em mim quando nem eu mesma acreditava. Espero poder segurar sua mão por toda a vida.

À família do meu namorado, aos meus sogros Leide e Adilson, minha gratidão por sempre me apoiarem e por se tornarem uma segunda família para mim. Obrigada por tornarem os momentos mais leves, especiais e cheios de carinho. Sou muito grata por todo o incentivo e acolhimento.

À minha orientadora, Josinalva Estacio Menezes, que além de abraçar o meu trabalho, transformou essa experiência em algo incrível. Sua mente é extremamente brilhante. Desde o primeiro contato, sempre deixei claro o quanto a admiro. Obrigada por me guiar durante esse processo.

Agradeço profundamente à minha banca examinadora, composta pelo professor Edson Sobral, a quem admiro imensamente. Sou muito grata pelas nossas trocas, tanto nos jogos quanto em sua atuação como docente. O senhor é extremamente bom em tudo que se propõe a fazer, espero que seu conhecimento o leve cada vez mais longe. À professora Naralina, um verdadeiro gênio em tudo o que faz, agradeço pela honra de ter sido sua aluna. Obrigada pela confiança depositada em mim, a senhora está sempre será uma inspiração para mim.

Aos professores que me marcaram durante todo o curso de Licenciatura em Matemática – e fora dele também: Josinalva Estacio Menezes, Marcus Bessa de Menezes, Luan Danilo, Simone Queiroz, Luana Rafaela, Edson Sobral, Cristiane Rocha, Janiely Siqueira, Jamile Oliveira, Edelweis Tavares, Maria do Desterro e Manuela Dias. Cada um de vocês tornou minha experiência universitária inesquecível. Espero, um dia, chegar a 1% do que vocês foram para mim.

Ao “MALLIK”: Maria Luiza, Lucas Verçosa, José Lucivaldo (Josi), Isabella Carvalho e Kaliva Gouveia, minha família da graduação. Vocês me deram forças para passar por tudo que aconteceu nesses quatro anos. Obrigada por terem sido a minha maior base no curso, obrigada por todas as risadas e trocas de conhecimento. Eu sou, e sempre vou ser, a fã n°1 por onde for. Sempre estarei torcendo e vibrando por cada conquista de vocês. Voem alto!

Malu, eu tenho uma admiração enorme por você. Eu acho incrível o quanto você torna tudo ao seu redor completamente leve, e isso é mágico! Obrigada por me ensinar tanto. Você é uma mente brilhante. Sempre será um exemplo de luz e santidade para mim. Parabéns pelo seu caminho percorrido. Você é extremamente capaz de muita coisa!

Lucas, você é GIGANTE (literalmente)! Eu fico muito admirada com o quanto você cresceu durante o curso e se tornou um homem admirável. A sua força e inteligência já traçaram um caminho incrível para você. Você é extremamente capaz. Te vejo sempre no topo! Além de tudo, obrigada por tornar tudo mais leve com o seu humor duvidoso. Você é incrível!

Josi, eu ainda fico impressionada com como tudo mudou. Você chegou como um menino e, do nada, se tornou um homem, pai de família — que pulo! Gostaria de agradecer por proporcionar momentos de leveza para mim, pelas risadas indevidas, pelos jogos, pelas conversas. Obrigada pela nossa sobrinha, Maria Helena. Tenho certeza que ela não poderia ter um pai melhor.

Isabella, acho que não há linhas suficientes para te agradecer. Obrigada por tanto!!! Eu gostaria de ressaltar sempre o quanto você é um exemplo. Uma menina pequena e de muita força e coragem. Que inteligência, que capacidade! Você chegou grandona e terminou grandona, não poderia ser diferente vindo de você. Obrigada por todos os conselhos, risadas, puxões de orelha e, acima de tudo, obrigada por ter sido um apoio para mim. Onde eu for, sempre irei comentar sobre você.

K, obrigada por sempre mostrar que tudo é possível quando se tem determinação. Gostaria que você soubesse o quão capaz você é, mesmo em meio ao seu caos. Eu aprendi muito com você durante todo esse tempo e tenho um carinho muito genuíno por você. Você vai muito longe na vida. Você é capaz de tudo que sonhar. Obrigada por ter sido minha risada frouxa e por ter sido o motivo das minhas crises de riso!

Agradeço também à minha turma de Matemática – Licenciatura 2021.1, a turma mais unida de todas as graduações! Tenho certeza absoluta de que, independentemente dos caminhos que forem percorridos, todos alcançarão grandes conquistas. Em especial, gostaria de agradecer a alguns que fizeram diferença para mim: José Warllyson, Jennyfer Nunes, Fernanda Vasconcelos, Gustavo Henrique e Gustavo Sobral.

Ao Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID), por ter me proporcionado experiências que nunca serão esquecidas. Minha trajetória como futura docente sempre terá como base esse início. Gostaria de agradecer especialmente à professora Micaela Santos, que, em meio ao seu trabalho, nos acolheu e tornou tudo melhor com seus ensinamentos. Obrigada, professora!

Por fim, agradeço a todos que acreditaram em mim e traçaram esse caminho junto comigo.

So I'm daydreamin'— Ariana Grande

RESUMO

Nos cursos de licenciatura em Matemática, disciplinas com demonstrações são desafiadoras devido às dificuldades na abstração, na compreensão lógica e na construção rigorosa de argumentos, inclusive nas disciplinas de geometria. Diante disso, torna-se relevante analisar o pensamento geométrico dos alunos com base na Teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Van Hiele, especialmente nos argumentos utilizados em demonstrações de conteúdos específicos da Geometria Plana, com ênfase na semelhança de triângulos. Dessa forma, ao se compreender como os alunos estruturam esses argumentos, pode-se identificar suas dificuldades. A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi realizada com estudantes do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA) na disciplina de Geometria Plana, e utilizou um questionário como instrumento para identificar como os níveis do pensamento da teoria dos Van Hiele se manifestam nos argumentos utilizados em demonstrações sobre semelhança de triângulos, permitindo refletir sobre as dificuldades encontradas e apontar caminhos para investigações futuras.

Os resultados revelaram que a maioria dos licenciandos avaliados permanece em níveis iniciais de pensamento geométrico segundo a teoria de Van Hiele, apresentando dificuldades na compreensão de demonstrações envolvendo a semelhança de triângulos. Essa constatação evidencia lacunas na formação geométrica dos futuros professores e aponta para a importância de estratégias pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento de níveis mais elevados de raciocínio matemático.

Palavras-chave: Geometria; Van Hiele; pensamento geométrico, ensino superior, educação matemática, formação de professores.

ABSTRACT

In undergraduate mathematics programs, courses involving demonstrations are challenging due to the difficulties in abstraction, logical understanding, and rigorous argument construction, including in geometry. Therefore, it becomes relevant to analyze students' geometric thinking based on Van Hiele's Theory of the Development of Geometric Thinking, especially in the arguments used in demonstrations of specific plane geometry content, with an emphasis on triangle similarity. Thus, by understanding how students structure these arguments, their difficulties can be identified. The qualitative research was conducted with fifth-year students of the undergraduate mathematics program at the Federal University of Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA) in the Plane Geometry course. A questionnaire was used to identify how the levels of thought in Van Hiele's theory manifest themselves in the arguments used in demonstrations of triangle similarity, allowing reflection on the difficulties encountered and pointing to avenues for future research.

The results revealed that most of the undergraduate students evaluated remain at the initial levels of geometric thinking according to Van Hiele's theory, presenting difficulties in understanding demonstrations involving the similarity of triangles. This finding highlights gaps in the geometric training of future teachers and highlights the importance of pedagogical strategies that foster the development of higher levels of mathematical reasoning.

Keywords: Geometry; Van Hiele; geometric thinking, higher education, mathematics education, teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana, além de fundamentar o pensamento lógico-matemático, representa um dos principais desafios na formação docente, especialmente quando envolve a construção de demonstrações formais. Provas e demonstrações geométricas são ferramentas essenciais nesse processo, pois requerem que os alunos articulem conceitos e teoremas de forma coerente e dedutiva.

No entanto, muitos estudantes de Licenciatura em Matemática estão sujeitos a enfrentar dificuldades na compreensão e elaboração de demonstrações, o que pode indicar lacunas na construção de seu pensamento geométrico. Essa realidade reflete os desafios apontados nas fases iniciais de formação universitária por Masola e Allevato (2016), que destacam deficiências estruturais no domínio dos conteúdos matemáticos entre alunos ingressantes.

Dentre os diversos tópicos da Geometria Euclidiana, a semelhança de triângulos se destaca como um conceito fundamental, amplamente utilizado na resolução de problemas e na estruturação de demonstrações. O domínio desse tema requer a compreensão de relações de proporcionalidade e a aplicação de critérios específicos para estabelecer a semelhança entre triângulos. A teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo os Van Hiele propõe cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

No contexto do ensino, a dificuldade em lidar com esses conceitos pode refletir limitações nos níveis de pensamento geométrico descritos pela teoria. Segundo Van de Walle[1] cada nível descreve os processos de pensamento utilizados em contextos geométricos, mais do que a quantidade de informação que se possui, o que impacta diretamente a capacidade dos alunos de compreender e construir provas matemáticas.

Esses níveis oferecem um modelo para compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e podem ser utilizados tanto como ferramenta diagnóstica quanto como suporte para o ensino da geometria. Considerando que a lógica matemática se manifesta de diferentes formas, como a lógica computacional e a lógica formal, este trabalho adotará o modelo lógico-dedutivo, que é a base para a

[1] Não confundir com Van Hiele. Van de Walle é autor de livros didáticos de Matemática e utiliza conceitos da Teoria dos níveis de Van Hiele, criada por Pierre e Diana Van Hiele

construção de conceitos matemáticos e a elaboração de demonstrações na Geometria Euclidiana.

Diante desse contexto, este estudo buscou analisar as relações entre as dificuldades dos licenciandos em matemática na compreensão de provas e demonstrações geométricas, sobre semelhança de triângulos e os diferentes níveis de pensamento descritos pela teoria dos Van Hiele. A análise dessas dificuldades pode contribuir para a compreensão de obstáculos específicos enfrentados por licenciandos em relação à compreensão e à produção de demonstrações no contexto do ensino de geometria. Logo, elaboramos a seguinte pergunta de pesquisa: Como os níveis de Van Hiele se manifestam nas demonstrações de semelhança de triângulos elaboradas por estudantes de licenciatura em matemática? A análise recai sobre a forma como os níveis de Van Hiele se evidenciam nas justificativas e demonstrações construídas por estudantes de Licenciatura em Matemática ao tratarem da semelhança de triângulos.

1.1. JUSTIFICATIVA

A escolha pelo tema deste trabalho se deu em função da trajetória acadêmica da autora, marcada por dificuldades na compreensão de provas e demonstrações em geometria plana, o que despertou o interesse em investigar as possíveis razões dessas limitações. Ao conhecer a teoria, obteve pelo interesse em compreender o processo de conexão entre os níveis dos Van Hiele e as demonstrações euclidiana.

No âmbito profissional, a relevância deste estudo reside na possibilidade de que, ao aplicar o modelo dos Van Hiele, possam ser propostas intervenções pedagógicas que contribuam para o aprimoramento do ensino de geometria nos cursos de licenciatura e na educação básica, colaborando com a formação de futuros professores. Os resultados da pesquisa podem oferecer aos educadores elementos que os auxiliem a abordar a geometria de forma mais alinhada às necessidades dos alunos. A compreensão dos níveis dos Van Hiele pode contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais adequadas, favorecendo a superação de dificuldades específicas no ensino e na aprendizagem da geometria.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Geral

Analisar as relações entre as dificuldades dos licenciandos em matemática na compreensão de provas e demonstrações geométricas, sobre semelhança de triângulos e os diferentes níveis de pensamento descritos pela teoria dos Van Hiele.

1.2.2 Específicos

1. Identificar os níveis de pensamento geométrico que se manifestam nas resoluções de problemas de estudantes de Licenciatura em Matemática, à luz da teoria dos Van Hiele.
2. Analisar possíveis relações entre os níveis de pensamento geométrico e as possíveis dificuldades identificadas na construção de demonstrações sobre semelhança de triângulos.

2 A GEOMETRIA E AS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

A geometria constitui uma das áreas mais antigas da matemática, com raízes que remontam à Antiguidade, quando surgiu a necessidade de resolver problemas concretos como medir terras, construir abrigos e observar os astros. A origem prática da geometria está refletida no próprio significado etimológico do termo, que deriva do grego *geo* (terra) e *metria* (medida), significando literalmente “medição da terra”. Essa explicação é discutida por diversos autores que tratam da história da matemática, como Boyer (1996) e Eves (2004), ao analisarem as origens utilitárias desse campo do saber.

A geometria evoluiu para se tornar uma ciência fundamentada no raciocínio dedutivo, oferecendo soluções lógicas e sistemáticas para problemas do cotidiano. Embora seu caráter prático seja evidente, é necessário aprender a reconhecer como a geometria está presente em diversos aspectos da vida. No dia a dia, lidamos com conceitos geométricos fundamentais, como paralelismo, congruência, semelhança, proporcionalidade e simetria. Além disso, utilizamos medições relacionadas ao volume, comprimento e área em atividades cotidianas, como planejar espaços, construir objetos ou calcular distâncias.

Esses conceitos estão presentes em diferentes contextos: nas atividades de lazer, como ao montar quebra-cabeças ou apreciar obras de arte; no trabalho, ao projetar construções ou desenvolver tecnologias; na comunicação, ao interpretar gráficos e mapas; e, claro, nos estudos, onde se desenvolve um entendimento mais profundo dessas relações.

No contexto educacional, ela desempenha um papel essencial na formação do pensamento lógico e espacial, contribuindo para que os estudantes compreendam relações, estruturas e propriedades presentes no mundo à sua volta colaborando que seja um método de formação para um pensamento também crítico, pois, como comenta Lorenzato, a geometria é '[...] a mais bela página do livro dos saberes matemáticos [...]' (1995, p.4). Além de estimular o raciocínio visual, sua contribuição vai além, servindo como base para a compreensão de outras disciplinas, como a física e a engenharia, e promovendo uma abordagem mais ampla e interligada do conhecimento. Parte fundamental dessa base é a lógica interna da Geometria Euclidiana, expressa por meio das demonstrações, que serão discutidas a seguir.

2.1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

A Geometria Euclidiana é um dos ramos mais antigos e estruturados da matemática, sendo formalizada por Euclides no século III a.C., em sua obra *Os Elementos*. Sua trajetória está ligada à cidade de Alexandria, no Egito, onde foi um dos fundadores da Escola Real de Alexandria. Na antiguidade, Alexandria era um importante centro intelectual e cultural, tendo sido fundada em 331 a.C.

Apesar das suas coletâneas de estudos e aprimoramentos em relação aos seus conhecimentos, Euclides não foi o primeiro a tentar buscar resultados e respostas para tais problemas. Como destaca Vaz (2010), a maior parte dos teoremas e demonstrações apresentados nos *Elementos* já era conhecida por outros estudiosos. O mérito de Euclides, portanto, foi estruturar esse conteúdo de maneira clara e rigorosa, selecionando axiomas, definindo conceitos e organizando demonstrações de forma dedutiva e lógica. A sistematização de Euclides permanece como base do ensino de geometria, e seu valor pedagógico reside na clareza lógica de sua estrutura, ainda que hoje se reconheça a necessidade de abordagens mais interativas.

> [...] fora de disputa, no entanto, está no fato de que a grande maioria - se não totalidade - dos resultados de suas perspectivas demonstrações já era de domínio comum entre os estudiosos da época. Assim, a boa reputação de Euclides deve-se basicamente à sistematização destes conhecimentos e sua apresentação da maneira mais clara possível. De qualquer modo, cabe notar que alguns detalhes da obra devem-se ao próprio Euclides, como é o caso da escolha dos axiomas e do ordenamento das demonstrações, da demonstração do teorema de pitágoras, e da formulação do axioma das paralelas. De maneira original ou não, o mérito dos *Elementos* está em apresentar a geometria de maneira sistemática, dedutiva e com base em um número reduzido de princípios [...] (Vaz, 2010,p. 20 *apud* Diniz, 2020, p. 33)

Nesse tratado, Euclides estabeleceu um sistema axiomático que se tornou a base para o estudo da geometria por séculos. A Geometria Euclidiana caracteriza-se pelo estudo das propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço tridimensional, fundamentando-se em um conjunto de definições, postulados e proposições que permitem a construção de demonstrações rigorosas.

Antes da sistematização feita por Euclides, diversos povos já utilizavam conhecimentos geométricos de forma empírica. Os egípcios, por exemplo, aplicavam regras práticas para medir terrenos e construir monumentos, enquanto os babilônios possuíam tabelas numéricas relacionadas a relações geométricas. No entanto, essas abordagens eram baseadas em procedimentos específicos sem uma organização formal. O grande mérito de Euclides foi estruturar esse conhecimento de maneira lógica e dedutiva, garantindo que todas as proposições derivassem de um pequeno conjunto de axiomas fundamentais.

Os Elementos é composto por 13 livros que tratam de diferentes aspectos da matemática, desde noções básicas de geometria plana até estudos sobre números primos e proporções. Entre os conceitos fundamentais apresentados, destaca-se o sistema axiomático que inclui definições, postulados e teoremas. Boyer (1996, p. 73 *apud* Guimarães, 2015, p. 10) menciona que, nos manuscritos de *Os Elementos*, são encontradas as dez pressuposições a seguir:

> Postulados. Seja postulado o seguinte:
> 1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
> 2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> 3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> 4. Que todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas infinitamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.
>
> Noções comuns:
> 1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
> 3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
> 4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
> 5. O todo é maior que a parte. b

Um dos pontos mais debatidos da obra é o quinto postulado, conhecido como o Postulado das Paralelas, que estabelece que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe exatamente uma reta paralela à primeira passando por esse ponto. Esse enunciado gerou discussões ao longo da história, levando ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas nos séculos XIX e XX.

Além das demonstrações e postulados, a Geometria Euclidiana se destaca pelo papel que desempenha na construção do pensamento lógico. A necessidade de compreender e relacionar diferentes representações, como diagramas e argumentos verbais, é um aspecto essencial desse estudo. Segundo Duval (1995), a articulação entre registros de representação é fundamental para a aprendizagem matemática, pois possibilita a interpretação e manipulação de conceitos de maneira estruturada. Dessa forma, a Geometria Euclidiana não apenas fornece ferramentas para o estudo das formas, mas também desenvolve habilidades cognitivas essenciais para o raciocínio matemático.

A sistematização proposta por Euclides foi decisiva para transformar o conhecimento geométrico em um corpo lógico-dedutivo. Esse modelo ainda estrutura o ensino da geometria hoje, o que justifica sua presença nos cursos de Licenciatura em Matemática. Nesse contexto, o domínio das demonstrações torna-se fundamental, pois elas expressam a lógica interna desse sistema e sustentam a validade dos resultados geométricos.

2.2. SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES

De acordo com Barbosa (2023), o caminho que levou à formulação do método axiomático em matemática não é totalmente conhecido, mas foi certamente longo e estreitamente vinculado ao desenvolvimento matemático da Grécia Antiga. Nesse contexto, atribui-se a Tales de Mileto (séc. VII a.C.) a formulação de propriedades geométricas como enunciados estruturados, marcando um importante passo rumo à sistematização do conhecimento geométrico. Segundo Proclo:

> Tales foi o primeiro a ir para o Egito e a levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e revelou para seus sucessores os princípios subjacentes a muitas outras, valendo-se de métodos gerais em alguns casos e em outros de métodos empíricos” (Proclo, séc.V, *apud* Barbosa., 2023, p. 51).

Percebe-se, portanto, que a geometria passou por um processo significativo de evolução, partindo para uma abordagem mais estruturada e fundamentada logicamente. Esse movimento se intensificou com o desenvolvimento do método axiomático, que possibilitou a introdução das demonstrações matemáticas e, consequentemente, a transição do raciocínio empírico para o raciocínio dedutivo.

As contribuições de Tales de Mileto foram fundamentais nesse processo, uma vez que ele foi um dos primeiros a formular proposições geométricas com base em princípios mais gerais, ainda que de maneira rudimentar. Seu trabalho influenciou diretamente os pensadores que o sucederam, estabelecendo as bases para a formalização do pensamento geométrico.

Esse processo culminou na consolidação da geometria euclidiana, cuja sistematização foi realizada por Euclides por meio da obra *Os Elementos*. Até os dias atuais, a geometria euclidiana constitui a base do ensino de geometria nas escolas, demonstrando a força e a permanência do raciocínio lógico-dedutivo no campo matemático.

Atualmente, a compreensão das demonstrações geométricas ainda representa um desafio para muitos estudantes. O estudo de Santos (2014) aponta que tais dificuldades estão frequentemente relacionadas à falta de familiaridade com o raciocínio lógico-formal e à limitação no trânsito entre diferentes níveis de abstração, conforme discutido no modelo de Van Hiele. A aprendizagem das demonstrações requer uma compreensão sólida dos conceitos geométricos e a prática constante da argumentação lógica, o que reforça a importância de metodologias que favoreçam o desenvolvimento dessas habilidades, tais como a resolução de problemas e o ensino por investigação.

Por exemplo, ao demonstrar que dois triângulos são semelhantes pelo critério AA (Ângulo-Ângulo), é necessário identificar ângulos congruentes com base em teoremas, como os ângulos correspondentes formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Contudo, essa articulação não é trivial para muitos estudantes, pois exige que diferentes registros — visual, verbal e simbólico — sejam integrados em um raciocínio coerente, o que nem sempre é incentivado nos modelos tradicionais de ensino. Nesse sentido, Gouvêa (1998) afirma:

> O ensino das demonstrações deve trazer mais do que a prova, deverá trazer fundamentalmente o convencimento pelo entendimento. Assim, ao ser levado a demonstrar teoremas, o aluno constrói explicações para si próprio e as reelabora na escrita, processo que deverá levar à compreensão e ao esclarecimento. (Gouvêa, 1998, p. 32).

Segundo Duval (1995), o aprendizado da geometria envolve três componentes cognitivos essenciais que atuam de forma integrada: a visualização, a construção e o raciocínio. Essa distinção é fundamental para o ensino, pois muitos alunos permanecem em níveis visuais de compreensão, dificultando a construção de justificativas formais em temas como semelhança de triângulos. Além disso, é importante distinguir os diferentes tipos de argumentação utilizados no ensino de Geometria. De acordo com Gouvêa (1998), a justificativa informal baseia-se em observações empíricas ou intuições visuais, típicas dos níveis iniciais de Van Hiele. Já a demonstração formal exige a organização lógica de proposições a partir de axiomas e definições, demandando domínio da linguagem matemática e do raciocínio dedutivo estruturado que são características dos níveis mais avançados. Essa distinção é fundamental para analisar as respostas dos estudantes à luz da Teoria de Van Hiele.

Uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos, segundo o autor, está relacionada às formas de interpretar e registrar as figuras geométricas. No contexto das demonstrações, também se observa a dificuldade em diferenciar os processos de raciocínio argumentativo e dedutivo. Este último organiza proposições de forma estruturada, permitindo uma sequência lógica de enunciados, análoga às operações algébricas.

Duval (1995) também ressalta que a resolução de problemas geométricos se apoia em diferentes formas de representação espacial, que permitem interpretações variadas da figura. Essas formas de apreensão são classificadas pelo autor em quatro tipos: apreensão sequencial, que compreende a figura como uma sucessão de passos ou construções; apreensão discursiva, em que a figura é compreendida por meio de uma descrição verbal ou textual; apreensão perceptiva, baseada na observação direta da forma visual da figura; e apreensão operatória, que permite a manipulação da figura, seja mentalmente ou por construções geométricas, possibilitando ajustes por meio da chamada "reconfiguração intermediária".

Entre os maiores desafios na assimilação de conceitos geométricos, destaca-se a distinção entre apreensão perceptiva e discursiva. As informações presentes em uma figura nem sempre são evidentes apenas por sua observação visual. Assim, a apreensão operatória exerce um papel decisivo, ao permitir a reorganização da figura com vistas à resolução do problema proposto.

Por fim, Duval (1995) enfatiza que a análise e interpretação das figuras geométricas exigem a articulação entre múltiplos registros de representação. Essa articulação é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, sendo a linguagem natural um dos principais instrumentos nesse processo. A compreensão das demonstrações em geometria resulta, portanto, da interação entre representações visuais e discursivas, as quais possibilitam a identificação e a definição de objetos matemáticos. A construção do conhecimento geométrico ocorre, assim, pela integração de diferentes formas de representação que se complementam na organização das demonstrações e na formação dos conceitos.

3 O ENSINO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA NO CURSO SUPERIOR

A formação docente na área da Matemática pode enfrentar diversos desafios, especialmente no que tange à Geometria. Apesar de sua relevância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da visualização espacial e da capacidade de argumentação e habilidades fundamentais para o exercício da docência, a Geometria segue sendo um dos componentes menos valorizados no ensino básico e, por consequência, apresenta lacunas significativas na formação dos futuros professores de Matemática. Segundo Lorenzato (1995, p. 3), “a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula”, situação que ele atribui à fragilidade da formação inicial dos docentes, que muitas vezes não dominam os conhecimentos geométricos necessários para ensiná-la. O autor também alerta para o ciclo vicioso em que a falta de ensino de Geometria nas escolas forma professores despreparados, que, por sua vez, acabam reproduzindo essa ausência em sua prática profissional, perpetuando o problema ao longo do tempo.

Segundo Lima (2014), muitos licenciandos ingressam no ensino superior com uma base fragilizada em Geometria, o que impacta diretamente a aprendizagem dos conteúdos ministrados no curso. O autor destaca que determinados conteúdos, essenciais à formação docente, sequer foram ministrados durante a Educação Básica, dificultando, assim, o acompanhamento das disciplinas universitárias. Esta constatação é corroborada por Lorenzato (1995), ao identificar que muitos professores da Educação Básica evitam abordar a Geometria de maneira aprofundada devido à própria insegurança conceitual, bem como à excessiva dependência de livros didáticos que apresentam a disciplina de forma descontextualizada, limitada a definições e fórmulas.

O cenário descrito por Lima (2014) e Lorenzato (1995) é ampliado por Masola e Allevato (2016), que analisam as dificuldades de aprendizagem matemática entre alunos ingressantes na Educação Superior. Os autores destacam que o acesso massivo às universidades, fruto de políticas de democratização do ensino, fez com que as salas de aula se tornassem cada vez mais heterogêneas, com estudantes de diferentes idades, experiências escolares e níveis de conhecimento matemático. Essa diversidade acentuou o desafio dos docentes universitários, que se deparam com alunos cujas deficiências de formação básica em matemática, especialmente em tópicos de Geometria, comprometem significativamente o progresso acadêmico.

Tais dificuldades não apenas comprometem a leitura de textos, mas também limitam a elaboração de argumentos formais, habilidade essencial para construir demonstrações como as exigidas na semelhança de triângulos.

Outro ponto relevante trazido pelos autores refere-se à ausência de práticas pedagógicas que favoreçam a aprendizagem ativa e significativa da Matemática. Em muitas instituições, os cursos de Licenciatura ainda seguem modelos tradicionais de ensino, nos quais o conteúdo é transmitido de forma expositiva, com pouca ou nenhuma articulação com a prática docente. Como resultado, os licenciandos não apenas enfrentam dificuldades na assimilação dos conceitos geométricos, como também carecem de estratégias didáticas eficazes para o ensino dessa área. Essa limitação compromete a formação de professores capazes de romper com o ciclo de reprodução de um ensino de Geometria meramente instrumental.

Ainda que a realidade revele desafios, há práticas pedagógicas que apontam caminhos para superação. Lorenzato (1995) propõe que o professor, ao abordar conteúdos geométricos, estimule a reflexão dos alunos por meio de perguntas como: *"Por que você pensa assim? Como você chegou a essa conclusão? Isso vale para outros casos?"*, entre outras. Tais questionamentos promovem uma postura investigativa, incentivando o pensamento crítico e a argumentação, fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos. Com isso, os estudantes deixam de ser receptores passivos do conteúdo e passam a construir significados, o que favorece o aprendizado de forma mais duradoura e significativa.

Apesar da importância da Geometria, seu ensino foi sendo gradualmente abandonado nas últimas décadas, especialmente nas escolas públicas. Kusma (2004) observa que esse processo se intensificou após a promulgação da Lei 5.692/71, que concedeu autonomia curricular às escolas. Muitos docentes, inseguros e pouco preparados para lidar com conteúdos geométricos, optaram por postergá-los ou evitá-los completamente, restringindo sua abordagem a momentos finais do ano letivo. Em contrapartida, Pavanello (2004) evidencia a preocupação de professores que, mesmo diante de desafios, continuam a valorizar e ensinar Geometria, reconhecendo sua relevância para a formação integral dos alunos.

O ensino de Geometria pode se dar de formas variadas. Como aponta Kusma (2004), há docentes que iniciam pela teoria e depois partem para a construção; outros, ao contrário, privilegiam inicialmente as atividades práticas e só então formalizam os conceitos; e há, ainda, aqueles que mesclam ambas as abordagens.

Independentemente da sequência adotada, o essencial é que o conteúdo seja trabalhado de maneira concreta e significativa, favorecendo a aprendizagem.

Em pesquisa intitulada *"Por que não ensinar Geometria?"*, Lorenzato (1995, p.3) constatou, a partir de uma amostra de 255 professores, que apenas 8% afirmaram tentar ensinar Geometria em sala de aula. Na ocasião, os participantes foram submetidos a um conjunto de oito questões geométricas, totalizando 2.040 respostas, das quais todas estavam incorretas. Esses resultados evidenciam que, frequentemente, os conteúdos geométricos são ensinados sem uma compreensão adequada, ou em muitos casos, nem sequer são abordados. Para reverter esse cenário, o autor defende que o professor aprofunde seus conhecimentos e adote estratégias que tornem os conceitos visuais, manipuláveis e concretos, de modo a facilitar a compreensão por parte dos estudantes.

A Teoria dos Níveis do Pensamento Geométrico de Van Hiele oferece subsídios importantes para compreender e superar tais dificuldades. A partir dessa teoria, compreende-se que o desenvolvimento do pensamento geométrico ocorre de forma gradual, em níveis que vão desde o reconhecimento visual das formas até o domínio rigoroso de sistemas axiomáticos. No entanto, para que os licenciandos alcancem os níveis mais elevados de raciocínio dedutivo, é necessário que o ensino da Geometria seja planejado de forma a respeitar as etapas cognitivas dos aprendizes. Tal perspectiva contrasta com a prática observada em muitos cursos, nos quais se espera que os estudantes compreendam e elaborem demonstrações formais sem que tenham passado pelas fases prévias de análise e dedução informal.

Masola e Allevato (2016) também chamam atenção para a importância de metodologias que favoreçam a construção ativa do conhecimento, como o uso de erros como estratégia didática, o trabalho colaborativo em sala de aula e a integração de tecnologias digitais. Essas recomendações dialogam com a necessidade de uma reformulação do ensino de Geometria nos cursos de Licenciatura, que deve se orientar menos pelo tecnicismo e mais pela articulação entre teoria, prática e contextos reais.

No entanto, para que essas transformações ocorram de forma efetiva, é necessário que os Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPCs) considerem não apenas o perfil do profissional a ser formado, mas também o perfil dos alunos ingressantes, como propõe a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e reforçam as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs). Tais documentos orientam que a formação docente deve ser ampla, crítica e capaz de desenvolver competências que extrapolam o domínio técnico da disciplina, promovendo a reflexão, a ética e a atuação responsável frente aos desafios educacionais contemporâneos.

Diante de todas essas questões, compreendemos que a fragilidade na formação geométrica dos licenciandos em Matemática decorre de uma cadeia de fatores interligados: formação deficiente na Educação Básica, abordagem inadequada no ensino superior, ausência de práticas pedagógicas eficazes e lacunas nos próprios projetos formativos. A superação desse quadro exige ações integradas que envolvam tanto a reformulação curricular quanto a valorização da Geometria como componente central da formação matemática, alinhada a metodologias que respeitem os processos de aprendizagem e estimulem a autonomia intelectual dos futuros docentes. Diante dessas dificuldades evidenciadas na formação docente, torna-se pertinente recorrer a referenciais teóricos capazes de explicar como se desenvolve o pensamento geométrico. Um dos mais utilizados nesse contexto é a Teoria dos Van Hiele, que será apresentada a seguir.

4 A TEORIA DOS VAN HIELE

A teoria dos Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado dos educadores, também casal Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, no ano de 1957. Dina, infelizmente, morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, mais tarde, terminou de desenvolver a teoria. Inicialmente, os autores consideravam a teoria suficiente para a aprendizagem, mas depois enfatizaram a importância da mediação didática. Posteriormente, ao longo de suas publicações houve uma inovação ao dizer que a aprendizagem acontecia em níveis cognitivos. Então, somente no ano de 1970 a sua tese obteve interesse dos Estados Unidos, vindo a ser publicada no ano de 1980.

Segundo Van de Walle (2009), todas as pessoas têm a capacidade de aprimorar habilidades de raciocínio em contextos geométricos. No entanto, a maneira como cada indivíduo compreende e processa conceitos geométricos varia, pois cada pessoa possui formas distintas de pensar. Nesse sentido, os estudos realizados pelos educadores holandeses Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof trouxeram contribuições significativas para entender essas variações no pensamento geométrico e os fatores que influenciam seu desenvolvimento. Segundo este autor,

> [...] descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar/operar geometricamente. (Walle, 2009, p.440 *apud* Alquino, 2017, p.23).

Ainda segundo este autor, os níveis de aprendizagem estabelecidos são, em sequência, visualização, análise, dedução informal, dedução formal e abstração.

> Cada um dos cinco níveis descreve os processos de pensamento usados em contextos geométricos. Os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. (Van de Walle, 2009, p. 440 *apud* Araújo, 2018, p.17).

Os pesquisadores Van Hiele identificaram cinco propriedades gerais que estruturam seu modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico: a sequencialidade dos níveis, a progressão hierárquica, a influência de fatores internos e externos, o papel da linguagem e os riscos de combinações inadequadas entre níveis. Conforme apontado por Crowley (1994, p.4) “ [...] essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino". Porém, com relação a esta pesquisa, tais propriedades não se tornam relevantes, pois não temos como objetivo a orientação de estudantes, mas sim analisar como eles se comportam.

Crowley (1994, p. 6) destaca que, segundo os Van Hiele, o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico está mais relacionado à qualidade da instrução oferecida do que à idade ou maturidade dos estudantes. Com base nessa perspectiva, o casal Van Hiele propôs um modelo composto por cinco fases sequenciais de aprendizagem: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

Entretanto, o foco deste estudo está centrado nos níveis de raciocínio geométrico propostos pela Teoria de Van Hiele e na forma como esses níveis são mobilizados pelos estudantes durante a resolução de situações que envolvem a semelhança de triângulos.

Compreende-se, a partir disso, que a aplicação dessa teoria exige a identificação das características específicas de cada nível, bem como dos fatores que influenciam a transição de um estágio de pensamento para outro. No caso específico da semelhança de triângulos, observa-se que estudantes em níveis iniciais tendem a reconhecer lados e ângulos visualmente, mas apresentam dificuldades para justificar por que dois triângulos são semelhantes, uma vez que ainda não articulam essas propriedades em uma estrutura dedutiva.

4.1 OS NÍVEIS DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Os cinco níveis de raciocínio da Teoria de Van Hiele estão enumerados de 0 a 4 e serão apresentados nos tópicos a seguir, tomando como base os estudos de Crowley (1994) e Van de Walle (2009).

4.1.1 Nível 0: Visualização

Neste nível, conforme Crowley (1994), os alunos percebem as formas geométricas como um todo, ou seja, baseiam-se exclusivamente na aparência e nas características mais gerais e visuais das figuras. São capazes de reconhecê-las, nomeá-las e reproduzi-las, mas não conseguem identificar suas propriedades, como ângulos retos ou lados opostos paralelos. De acordo com Kaleff *et al*. (1994, p. 24 *apud* Alquino, 2017, p.17),

> Neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes". "Van de Walle (2009) observa que estudantes no nível 0 se baseiam na aparência das figuras. Isso explica por que muitos licenciandos classificam triângulos sem considerar medidas, o que compromete suas justificações em demonstrações de semelhança.

O foco está nas características globais. Nesse estágio, a congruência pode ser mal interpretada: alunos podem considerar dois triângulos como congruentes apenas por "parecerem" iguais, mesmo sem analisar medidas de lados e ângulos. Por exemplo, ao olhar dois triângulos em posições diferentes, podem dizer que não são iguais, mesmo que sejam congruentes por isometria. O fato de as aparências dominarem neste nível faz com que elas prevaleçam sobre as propriedades das formas, como explica Walle (2009, p. 440). Assim, nesse nível, os alunos reconhecem um triângulo entre outras figuras, mas não conseguem classificá-lo adequadamente quanto aos seus lados e ângulos. Todo triângulo é igual, pois seu formato é percebido como semelhante, sem uma análise mais aprofundada.

4.1.2 Nível 1: Análise

No Nível 1 do modelo de Van Hiele, os indivíduos começam a reconhecer e descrever as propriedades das figuras geométricas, embora ainda encontrem dificuldades para estabelecer relações entre elas. Os estudantes passam a identificar características específicas das formas e utilizá-las na classificação dos objetos geométricos. No entanto, apesar de conseguirem listar propriedades de figuras como quadrados, retângulos e paralelogramos, não percebem que estas pertencem a uma hierarquia maior, em que todas as figuras compartilham atributos comuns. Por exemplo, neste nível, os alunos já são capazes de perceber que dois triângulos têm "lados iguais" ou "ângulos iguais", mas ainda não compreendem os critérios de congruência formalmente. Por exemplo, podem reconhecer que dois triângulos são congruentes porque ambos "têm três lados iguais", mas não associam isso ao critério Lado-Lado-Lado (LLL).

> Os estudantes operando no Nível 1 podem ser capazes de listar todas as propriedades de quadrados, retângulos e paralelogramos, mas não percebem que esses são subclasses de outra classe, que todos os quadrados são retângulos e todos os retângulos são paralelogramos (Van de walle, 2009, p. 441).

A transição do Nível 0 para o Nível 1 exige não apenas a aquisição de um vocabulário matemático adequado, mas também um processo de refinamento conceitual. De acordo com Villiers (2010, p. 400 *apud* Alquino, 2017, pág. 25) afirma que para haver a transição

> [...] envolve mais do que simplesmente a aquisição de linguagem, ela envolve o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes.

Dessa forma, o aprendizado geométrico não ocorre apenas por meio da memorização de definições, mas sim através da reconstrução e ampliação do conhecimento existente. Van Hiele (1989, p. 33) também defende que:

> Um aluno que possui um raciocínio no nível 1 reconhece certas formas diferenciadas sem prestar atenção às suas partes componentes. Por exemplo, pode ser um retângulo reconhecido, porque parece "como uma porta" e não porque tem quatro lados retos e quatro ângulos retos como não há nenhuma apreciação dessas propriedades. Forma é importante e figuras podem ser identificadas pelo nome.

Além disso, a forma como os estudantes analisam figuras no Nível 1 ainda é bastante individualizada, ou seja, eles observam cada figura como um objeto isolado e não como parte de um sistema de classificações interconectadas. Isso os leva a listar diversas propriedades de uma forma específica sem perceber que um conjunto reduzido dessas características já seria suficiente para identificá-la corretamente. Assim, mesmo sendo capazes de aplicar conceitos geométricos para nomear e diferenciar figuras, a compreensão hierárquica das propriedades ainda não está plenamente desenvolvida. Esse aspecto do pensamento geométrico é essencial para o avanço aos níveis seguintes, nos quais os estudantes passarão a estabelecer conexões mais abstratas e generalizar as relações entre as formas geométricas.

4.1.3 Nível 2: Dedução Informal

No Nível 2 do desenvolvimento do pensamento geométrico, os estudantes começam a estabelecer relações entre as propriedades das figuras, permitindo a classificação em diferentes categorias. Esse avanço ocorre porque deixam de analisar figuras isoladamente e passam a perceber conexões entre suas características. Segundo Van de Walle (2009), nesse estágio, os alunos identificam propriedades comuns entre figuras geométricas distintas e reconhecem padrões que possibilitam a formulação de generalizações.

> O estudante descobre propriedades/regras de uma classe de formas empiricamente, tais como dobramento, medição, analisa figuras em termos de seus componentes e relacionamentos entre os componentes. A este nível, os componentes e seus atributos são usados para descrever e caracterizar as figuras. Por exemplo, um estudante que está raciocinando analiticamente diria que um quadrado tem quatro lados iguais "e" quatro cantos "quadrados". O mesmo estudante, no entanto, não pode acreditar que uma figura pode pertencer a diversas classes gerais e tem vários nomes, por exemplo, o aluno não pode aceitar que um retângulo é um paralelogramo. A figura a este nível se apresenta como uma totalidade de suas propriedades. Um estudante pode ser capaz de afirmar uma definição, mas não terá entendimento (Van Hiele,1986, p. 33).

Crowley (1994) destaca que, ao observar e interligar propriedades, os estudantes constroem argumentos informais para justificar tais relações, conferindo significado às definições geométricas previamente aprendidas. No entanto, embora sejam capazes de acompanhar demonstrações matemáticas, ainda não possuem uma compreensão plena do processo dedutivo formal, o que os impede de elaborar provas rigorosas. De maneira semelhante, nesse nível, os alunos já conseguem formar definições abstratas e estabelecer conexões lógicas entre as propriedades das figuras. Agora, os estudantes começam a compreender os critérios de congruência de forma mais estruturada, como o LAL (Lado-Ângulo-Lado) ou o ALA (Ângulo-Lado-Ângulo), e podem usá-los para justificar informalmente que dois triângulos são congruentes. Por exemplo, conseguem argumentar que “como os dois triângulos têm um lado e os ângulos adjacentes iguais, então eles são iguais”.

Os primeiros contatos com demonstrações matemáticas ocorrem nesse estágio, permitindo que os alunos utilizem resultados conhecidos para deduzir novas propriedades. Van de Walle (2009) enfatiza que o principal produto deste nível é a construção de relações entre propriedades geométricas, tornando possível, por exemplo, compreender que todo triângulo equilátero também é isósceles, pois possui três lados iguais, e que, em um triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto à base coincide com a altura e a mediana. Esse amadurecimento lógico representa um passo importante para o pensamento dedutivo mais formal exigido nos níveis seguintes do desenvolvimento matemático.

4.1.4 Nível 3: Dedução formal

No Nível 3 do pensamento geométrico, os estudantes desenvolvem uma compreensão mais profunda da estrutura lógica da geometria, permitindo-lhes inter-relacionar conceitos fundamentais como axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados. Diferentemente dos níveis anteriores, em que as propriedades das figuras eram analisadas de forma isolada, neste nível os alunos começam a reconhecer a necessidade de um sistema lógico estruturado, onde proposições podem ser deduzidas a partir de um conjunto mínimo de suposições (Crowley, 1994).

Os estudantes tornam-se aptos a construir demonstrações formais, compreendendo que há diferentes caminhos para chegar a uma prova, desde que sejam respeitadas as condições necessárias e suficientes para sua validade. Nesse estágio, os alunos podem desenvolver provas rigorosas envolvendo congruência, como demonstrar que dois triângulos são congruentes pelo critério LAL (lado,ângulo,lado), utilizando definições, postulados e teoremas. Eles compreendem que a congruência é uma consequência lógica de determinadas condições estabelecidas no sistema geométrico. Por exemplo, podem provar que dois triângulos são congruentes ao mostrar que os lados e os ângulos correspondentes satisfazem o critério de congruência adequado. Nesse sentido, os Van de Walle (2009, p. 443) destaca que os alunos nessa etapa conseguem trabalhar com sentenças abstratas, estabelecendo conclusões baseadas predominantemente na lógica, em detrimento da intuição. Além disso, passam a apreciar a importância da dedução como método fundamental na construção do conhecimento geométrico, reconhecendo que a validade de suas proposições deve ser sustentada por argumentos rigorosamente estruturados. Para ele:

> Os estudantes começam a apreciar a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de suposições e do qual, outras verdades possam ser derivadas. O estudante neste Nível é capaz de trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição (Van de walle, 2009, p.443 *apud* Araujo, 2018, p.19).

Kaleff (1992) ressalta que, nesse estágio, os estudantes começam a organizar sequências lógicas de afirmações, deduzindo novas proposições a partir de outras previamente estabelecidas. Esse avanço permite que desenvolvam um pensamento mais crítico em relação às conjecturas que formulam, questionando sua veracidade e refinando seus raciocínios por meio da análise de argumentos formais. Conforme Van de Walle (2009), essa transição do raciocínio informal para o formal exige que os alunos passem a considerar a estrutura lógica da geometria como um sistema completo e coerente, no qual axiomas e definições são fundamentais para a derivação de teoremas e corolários.

A necessidade de um raciocínio lógico-dedutivo se torna evidente quando os estudantes começam a realizar demonstrações mais sofisticadas. Por exemplo, ao traçarem segmentos entre os pontos médios dos lados adjacentes de um quadrilátero qualquer, conseguem demonstrar a formação de um paralelogramo, utilizando argumentos matemáticos rigorosos. Esse nível de pensamento é essencial para a construção e compreensão dos sistemas axiomáticos, sendo a Geometria Euclidiana um dos principais modelos explorados no ensino da Geometria Plana e Espacial.

Dessa forma, pode-se afirmar que, no Nível 3, os alunos não apenas dominam as propriedades geométricas, mas também desenvolvem um olhar crítico sobre os fundamentos da geometria. Eles reconhecem que a validade de uma proposição não depende apenas da observação empírica, mas sim da consistência lógica de sua demonstração dentro de um sistema estruturado. Isso representa um avanço significativo na formação do pensamento matemático, preparando os estudantes para o entendimento de teorias mais complexas e abstratas no campo da geometria e além.

4.1.5 Nível 4: Rigor

No Nível 4 do pensamento geométrico, os estudantes conseguem operar em um plano abstrato, analisando e comparando diferentes sistemas axiomáticos, incluindo as geometrias não euclidianas. Crowley (1994) destaca que, nesse estágio, os alunos desenvolvem a capacidade de trabalhar com sistemas dedutivos distintos, avaliando suas estruturas e características. Neste nível, é possível comparar os critérios de congruência em diferentes sistemas geométricos, como a geometria euclidiana e a hiperbólica. Estudantes podem refletir sobre quais critérios permanecem válidos em sistemas não euclidianos, ou como a congruência se manifesta em contextos abstratos. Esse tipo de análise é característico de investigações matemáticas mais sofisticadas. Van de Walle (2009) observa que esse nível é típico de especialistas em matemática no ensino superior, onde a geometria é abordada como um ramo da ciência matemática.

Nagata (2016) ressalta que poucos alunos atingem esse nível, devido à complexidade e irregularidade do processo de aprendizagem. Van Hiele também aponta as dificuldades inerentes à progressão nesse estágio, tornando a discussão sobre sua assimilação um desafio. Kaleff (1992) complementa que “Neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos” (Kaleff, 1992, p.25 *apud* Alquino, 2017, p.27)

Embora Van Hiele tenha dedicado grande parte de seu trabalho até o Nível 3, Crowley (1994) observa que o Nível 4 recebe menos atenção, pois seu aprofundamento se dá essencialmente no meio acadêmico, entre profissionais da matemática. O desenvolvimento nesse estágio está diretamente ligado ao estudo formal e à aplicação avançada do raciocínio lógico em contextos geométricos diversos.

Ensinar semelhança de triângulos vai além da aplicação mecânica de fórmulas. Trata-se de uma oportunidade para desenvolver o pensamento geométrico de forma progressiva. Ao considerar os níveis de Van Hiele, observa-se que o raciocínio envolvido na identificação de critérios de semelhança (como AA, LAL, LLL) exige operações mentais que vão do reconhecimento visual à compreensão de relações dedutivas. Isso reforça a importância de alinhar a abordagem didática à estrutura cognitiva dos alunos.

A compreensão dos níveis de raciocínio propostos pela Teoria de Van Hiele é essencial para analisar como os alunos constroem argumentos geométricos em tópicos específicos. Dentre esses tópicos, a semelhança de triângulos será o foco deste estudo, por ser um conteúdo que exige, progressivamente, a aplicação de propriedades, relações métricas e justificativas lógicas. No próximo capítulo, será explorado os conceitos fundamentais sobre triângulos que servirão de base para a análise das demonstrações elaboradas pelos licenciandos.

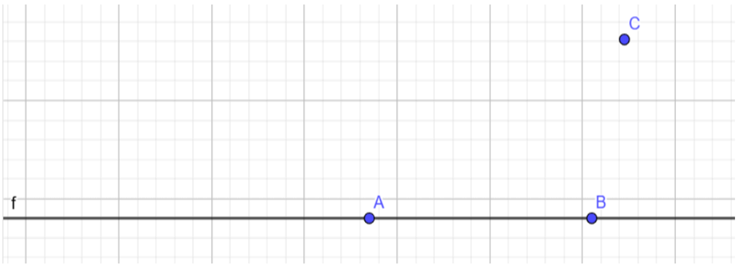
5 TRIÂNGULOS: CONCEITOS E PROPRIEDADES

O triângulo, por sua simplicidade estrutural e riqueza de propriedades, é uma figura central no estudo da Geometria Euclidiana Plana. Além de ser o polígono de menor número de lados, suas características servem de base para a construção de outras figuras e para o desenvolvimento do pensamento dedutivo nos estudantes, especialmente em tópicos como congruência, proporcionalidade e semelhança. Sua estrutura geométrica serve como base para a construção de múltiplas formas, tornando-o um elemento central na compreensão das relações planas e espaciais.

O triângulo é considerado a figura poligonal mais simples da Geometria Euclidiana. Composto por três lados, três vértices e três ângulos internos, ele delimita a menor região fechada possível no plano, servindo como base estrutural para a construção de figuras mais complexas. Embora o triângulo pareça simples à primeira vista, sua estrutura permite múltiplas abordagens, desde a observação visual até o raciocínio dedutivo formal, o que o torna ideal para analisar a progressão cognitiva descrita pela Teoria de Van Hiele.

Do ponto de vista formal, um triângulo é uma figura geométrica formada por três lados e três vértices. Em outras palavras, é o polígono de menor número de lados possível, composto por três segmentos de reta que se interseccionam, formando uma área fechada no plano. Segundo Lima & Carvalho (2010), conforme citado por Pacheco *et al*. (2020, p. 4), "um triângulo é formado a partir de três pontos não colineares, A, B e C, que são conectados pelos segmentos de reta AB, BC e CA", estabelecendo as condições mínimas para que uma figura possa ser considerada um triângulo. Essa definição elementar, embora simples, esconde uma série de propriedades geométricas fundamentais para o entendimento de conceitos mais complexos.

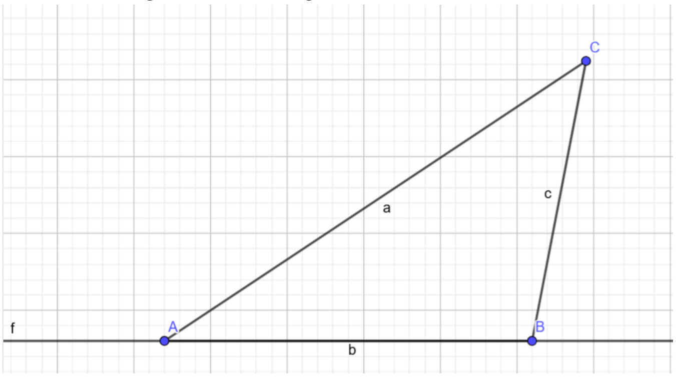
Figura 1 - Três pontos A,B e C não colineares



Fonte: Elaboração própria.

Esses três pontos — A, B e C — são denominados vértices do triângulo, e os segmentos AB, BC e CA são os lados. A reunião desses segmentos delimita uma região do plano chamada de região triangular. De acordo com Rodrigues (2015, p. 33), "três pontos não colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois".

Figura 2 - Triângulo ABC de vértices A, B e C



Fonte: elaboração própria.

Outra maneira de definir a existência de um triângulo é por meio da chamada desigualdade triangular, a qual estabelece que, para que três segmentos possam formar um triângulo, a soma das medidas de quaisquer dois lados deve ser sempre maior que a medida do terceiro lado, Silva [s.d]. Essa condição assegura que os segmentos de reta se conectem de forma a delimitar um espaço fechado, evitando a colinearidade dos pontos.

Os triângulos sempre fascinaram não só os matemáticos, mas também as pessoas em geral. Eles estão presentes na Matemática, na arte, na arquitetura, na mecânica e no misticismo, entre outros Pitombeira (2013). Essa presença demonstra como uma figura simples pode ter significados profundos e aplicações diversas.

Na Matemática, os triângulos são essenciais para o estudo da Geometria, sendo a base para o entendimento de conceitos mais complexos como semelhança, congruência e trigonometria. Eles são também a chave para a decomposição de formas geométricas mais complicadas, como quadriláteros e polígonos, tornando-se uma ferramenta indispensável para cálculos e demonstrações.

Segundo Ching (2015, p. 40), "a forma triangular é estruturalmente estável, em contraste com outras formas que podem se deformar sem elementos adicionais de reforço” [tradução nossa]. O famoso triângulo de força é um exemplo de como o uso inteligente dessa forma pode ser determinante para o sucesso estrutural.

A simplicidade estrutural do triângulo esconde a complexidade lógica envolvida na demonstração de suas propriedades. Por isso, seu estudo é ideal para investigar como se desenvolve o raciocínio dedutivo nos estudantes. Aqui vão ser destacados apenas os elementos relativos ao conteúdo necessário para a compreensão da pesquisa.

5.1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DO TRIÂNGULO

Nesta seção apresenta-se as principais propriedades dos triângulos, com ênfase nas relações métricas e angulares. Com isso, Guedes (2025) traz as seguintes propriedades fundamentais:

5.1.1 Soma dos ângulos internos

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Essa propriedade é válida para todos os triângulos no plano euclidiano e é amplamente utilizada na resolução de problemas envolvendo ângulos desconhecidos.

5.1.2 Ângulos externos

Cada ângulo externo de um triângulo é suplementar ao ângulo interno adjacente, ou seja:

$$\text{ângulo externo} = 180° - \text{ângulo interno adjacente}$$

Além disso, a soma dos ângulos externos de um triângulo, considerando um ângulo externo por vértice, é sempre igual a 360°.

Outro aspecto importante é que um ângulo externo também é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Assim, para o ângulo γ,

$$\text{Ângulo externo a } \gamma = \alpha + \beta$$

Essa propriedade é frequentemente utilizada em demonstrações e na resolução de exercícios.

5.1.3 Desigualdade triangular

A desigualdade triangular estabelece que a medida de qualquer lado de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados:

$$|b - c| < a < a + c|$$

Essa condição é necessária para que três segmentos de reta possam formar um triângulo e constitui um critério de existência dessa figura.

5.1.4 Segmentos notáveis

Os *triângulos* possuem quatro tipos principais de segmentos notáveis:

- *Mediana*: segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.
- *Altura*: segmento perpendicular a um lado, partindo do vértice oposto.
- *Bissetriz*: segmento que divide um ângulo interno ao meio.
- *Mediatriz*: reta perpendicular ao lado do triângulo, passando por seu ponto médio.

A interseção desses segmentos origina pontos notáveis como o baricentro, *ortocentro, incentro* e *circuncentro*. O *baricentro* é o ponto de interseção das *medianas* de um triângulo, segmentos que ligam cada vértice ao ponto médio do lado oposto e corresponde ao centro de gravidade da figura, dividindo cada mediana na razão 2:1. O *ortocentro* é o ponto em que se encontram as alturas do triângulo, que são os segmentos perpendiculares traçados de cada vértice ao lado oposto (ou seu prolongamento). Já o *incentro* resulta da interseção das *bissetrizes* internas dos ângulos do triângulo e é o centro da circunferência inscrita, que tangencia os três lados internamente. Por fim, o *circuncentro* é o ponto de encontro das *mediatrizes* dos lados do triângulo e corresponde ao centro da circunferência circunscrita, ou seja, aquela que passa pelos três vértices da figura.

5.1.5 Classificação dos triângulos

A classificação dos triângulos pode ser feita com base nas medidas dos lados e das medidas dos ângulos:

- Quanto às medidas dos lados:
    - *Equilátero*: três lados congruentes;
    - *Isósceles*: dois lados congruentes;
    - *Escaleno*: três lados com medidas distintas.

- Quanto às medidas dos ângulos:

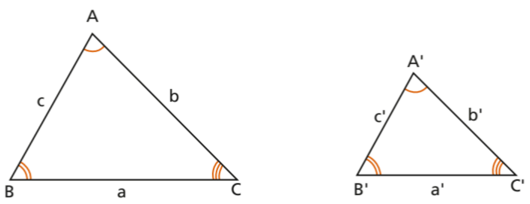
    - *Acutângulo*: três ângulos agudos (menores que 90° e maiores que 0°);
    - *Retângulo*: um ângulo reto (90°);
    - *Obtusângulo*: um ângulo obtuso (maior que 90°).

Essas classificações ajudam na identificação e análise de diferentes tipos de triângulos, servindo de base para estudos mais aprofundados. A seguir, serão abordadas as relações de semelhança entre triângulos, conceito essencial na geometria e que depende do reconhecimento de ângulos e lados correspondentes entre figuras.

5.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A semelhança de triângulos pode ocupar um lugar importante na Geometria Euclidiana, especialmente por sua aplicação no estudo das propriedades métricas das figuras planas. Dolce e Pompeo (2011, p. 196) propõem a seguinte definição: “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais”. A partir dessa definição, compreende-se que figuras semelhantes mantêm a forma, embora possam diferir em tamanho.

Figura 3 - Semelhança de triângulos



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \left(\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right)$$

$\sim$: semelhante

Fonte: Dolce e Pompeo, p.192

A imagem acima apresenta uma análise realizada pelos autores a respeito de dois triângulos semelhantes, evidenciando a correspondência entre seus ângulos e lados. A notação △ABC~△A′B′C indica que os triângulos possuem a mesma forma, ou seja, seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados homólogos estão em proporção. As igualdades $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, combinadas com a proporção entre os lados a/a′=b/b′=c/c′, expressam a definição formal de semelhança entre triângulos.

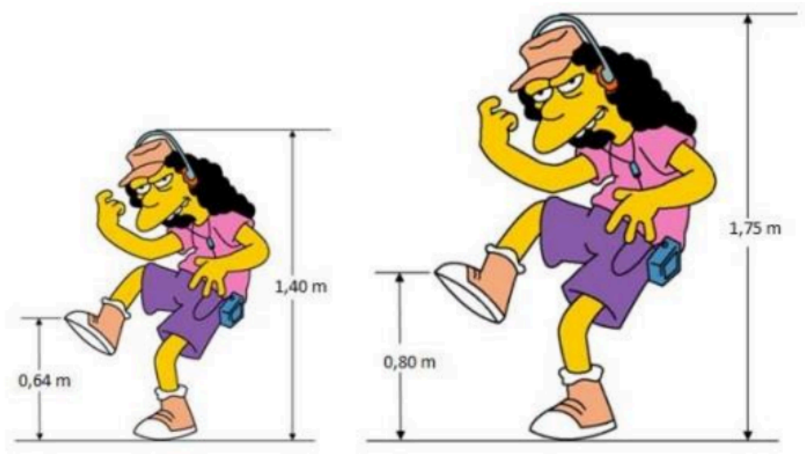
Esse tipo de representação reforça o entendimento de que a semelhança é uma relação de correspondência entre elementos das figuras, não se restringindo à igualdade de medidas, mas à proporcionalidade dos lados e conservação dos ângulos. Além disso, ela prepara o terreno para a aplicação prática dos critérios de semelhança (AA, LAL e LLL), permitindo que se reconheça a semelhança mesmo sem o conhecimento completo de todos os elementos dos triângulos.

Para Vieira (2018) Isso significa que uma figura pode ser obtida a partir da outra por meio de transformações geométricas como ampliação, redução ou reprodução em diferentes escalas, tanto no plano quanto no espaço. Seja a razão de semelhança k entre os lados homólogos, temos então que k é chamado “razão da semelhança de triângulos”, Dolce e Pompeo (2011, p. 193).

$$a/a' = b/b' = c/c' = k$$

Essa relação é ilustrada na figura a seguir:

Figura 4: Semelhança entre figuras



Fonte: Silva,2013,p. 10 apud Vieira,2019,p. 14

A imagem acima ilustra, de forma lúdica, o conceito de semelhança entre figuras geométricas. Nela, observam-se duas representações da mesma figura em escalas diferentes: uma com altura de 1,40 m e comprimento da perna de 0,64 m; outra com altura de 1,75 m e comprimento da perna de 0,80 m. Essas medidas mantêm a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes, o que caracteriza a semelhança entre as figuras. De fato, ao calcularmos a razão entre os lados correspondentes, temos:

$$\frac{1.75}{1,40} = 1,25 \ e \ \frac{0,80}{0,64} = 1,25$$

Como a razão de semelhança é constante, conclui-se que uma figura pode ser obtida a partir da outra por meio de uma ampliação com fator k=1,25. Isso reforça a ideia de que figuras semelhantes têm a mesma forma, embora apresentem tamanhos diferentes, e exemplifica a definição apresentada no começo da seção, que relaciona a semelhança com ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais.

A verificação da semelhança entre triângulos baseia-se em critérios específicos que dispensam o conhecimento de todos os elementos da figura. Segundo Dolce e Pompeo (2011), os principais critérios são:

- Ângulo-Ângulo (AA): dois triângulos são semelhantes se dois ângulos correspondentes forem congruentes;
- Lado-Ângulo-Lado (LAL): dois lados correspondentes em proporção e o ângulo entre eles congruente garantem a semelhança;
- Lado-Lado-Lado (LLL): se os lados correspondentes de dois triângulos estão na mesma razão, eles são semelhantes.

Uma demonstração mais rigorosa destes casos de semelhança pode ser lida em Dolce e Pompeo (2009, p. 198-200), reproduzido no apêndice A.

Com base nesses critérios, é possível resolver problemas de forma mais eficiente, utilizando relações proporcionais sem necessidade de medir todos os elementos envolvidos.

Embora relacionados, os conceitos de semelhança e congruência possuem distinções importantes. A semelhança preserva a forma, mas permite variações de escala; já a congruência envolve igualdade total de forma e tamanho. Enquanto a congruência pode ser reconhecida visualmente e de forma imediata, a semelhança exige operações mentais mais elaboradas, como a identificação de proporções, situando-se em níveis mais avançados da Teoria de Van Hiele, especialmente a partir do Nível 2.

Ensinar semelhança de triângulos, portanto, não deve se restringir à memorização de casos ou à aplicação direta de critérios. Trata-se de uma oportunidade para desenvolver o raciocínio geométrico em sua dimensão mais ampla, contribuindo para uma formação matemática crítica, autônoma e alinhada aos desafios cognitivos dos estudantes.

No ambiente escolar, o estudo da semelhança pode favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico, estimulando a percepção espacial, o raciocínio lógico e a compreensão de proporções, habilidades fundamentais para a resolução de problemas matemáticos e a construção de argumentos dedutivos. A abordagem desse conteúdo, quando bem estruturada, favorece a aplicação de conhecimentos em contextos variados, como em leituras de mapas, escalas gráficas e representações ampliadas ou reduzidas.

A exposição das propriedades e critérios de semelhança dos triângulos neste capítulo fornece os elementos conceituais necessários para a análise que se seguirá. A partir daqui, investigaremos como os licenciandos mobilizam esses conhecimentos em suas justificativas e demonstrações, à luz dos níveis de pensamento propostos por Van Hiele.

6 METODOLOGIA

Este trabalho adotou uma abordagem qualitativa que permite explorar significados, valores e processos que não podem ser reduzidos a variáveis mensuráveis, conforme destacado por Minayo *et al*. (1994, p. 21. Ele também afirma que:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações [...]

Segundo Lüdke e André (1986, p. 11), essa abordagem tem como principal característica o contato direto do pesquisador com o objeto de estudo, permitindo um aprofundamento na análise dos fenômenos investigados. Dessa forma, a metodologia adotada visa interpretar e compreender o tema abordado, ampliando a visão sobre o ensino e a aprendizagem da geometria.

6.1 Universo e amostra

Nesta seção, são detalhados a organização e o desenvolvimento da pesquisa, apresentando os instrumentos utilizados, o perfil dos participantes e os critérios adotados para a composição dos grupos, além de descrever as atividades realizadas durante a pesquisa de campo.

Para realizar a pesquisa, escolheu-se uma universidade pública do estado, a Universidade Federal de Pernambuco-UFPE.

O campo de pesquisa foi o curso de licenciatura em Matemática no Centro Acadêmico do Agreste-CAA, pertencente ao Núcleo de Formação Docente-NFD.

Os participantes desta pesquisa foram estudantes do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Fundamentos da Geometria Plana (FGP). Essa disciplina pode representar, para os alunos, a primeira experiência com demonstrações de matemática formal dentro do curso, sendo um componente curricular obrigatório cujo conteúdo abrange tópicos fundamentais da Geometria Euclidiana. Esse cenário ofereceu um contexto propício para investigar como os discentes constroem argumentos matemáticos e lidam com processos de demonstração.

6.2 Instrumentos de coletas de dados

A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário aplicado presencialmente durante uma aula regular da disciplina, previamente cedida pelo professor responsável. A aplicação durou, em média, 1h30min, tempo suficiente para que todos os presentes concluíssem a atividade. A turma era composta por 35 estudantes, dos quais 23 estavam presentes no dia e responderam ao questionário.

A escolha pelo questionário como instrumento de coleta de dados se deu pela praticidade e pelo alcance que ele permite, viabilizando a participação de um número significativo de estudantes e possibilitando flexibilidade na aplicação. O questionário foi construído a partir dos objetivos específicos da pesquisa e estruturado de forma lógica, visando captar percepções, conhecimentos e representações dos alunos sobre os conteúdos da disciplina. Conforme aponta Miranda (2020), esse tipo de instrumento é eficaz para acessar dados sobre crenças, experiências e saberes de determinados grupos.

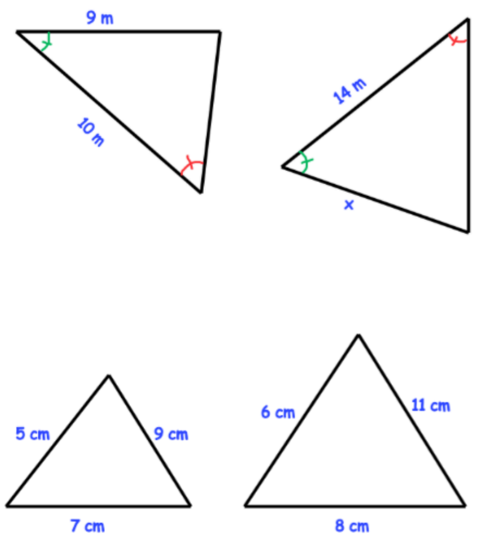
É sabido que a elaboração de um bom questionário exige cuidados metodológicos. Embora pareça simples, esse processo envolve atenção à clareza das perguntas, adequação ao público e coerência com os objetivos. Medeiros, Neto e Zotto (2000) destacam que o desenvolvimento de um questionário passa por uma série de etapas que exigem reflexão e refinamento. Vieira (2009) reforça que construir um questionário é fácil, difícil é fazer um bom questionário, logo, Gil (2008) propõe etapas fundamentais para essa construção, como: definição precisa dos objetivos da pesquisa, identificação das variáveis, adequação da linguagem ao público, estruturação lógica do instrumento, realização de um pré-teste e, por fim, a aplicação.

Para a coleta de informações, utilizou-se o procedimento de levantamento, técnica que consiste em interrogar diretamente os sujeitos de interesse da pesquisa, buscando obter dados relevantes sobre o tema em estudo Gil (2008).

6.2.1 Descrição do questionário

O questionário construído para esta pesquisa foi desenvolvido com o intuito de investigar os níveis do pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele, tendo como foco específico a compreensão da semelhança de triângulos. O instrumento é composto por cinco questões abertas, organizadas de modo a contemplar progressivamente os cinco níveis propostos pela teoria de Van Hiele: Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução Formal e Rigor. A seguir, será feita uma análise descritiva e interpretativa de cada item.

Na primeira página, cada nível foi resumidamente explicado para que o participante entenda que as perguntas foram elaboradas com base nessa progressão, desde o reconhecimento visual até a demonstração formal e o rigor matemático. Também é destacado que todas as respostas serão utilizadas apenas para fins acadêmicos e tratadas com sigilo, garantindo o anonimato dos participantes. Essa introdução pode ajudar a contextualizar o instrumento de pesquisa e preparar os discentes para as questões que virão a seguir.

<table>
<tr><th>Questão 1</th><th>Classificada como nível 0: visualização</th></tr>
<tr><td colspan="2">Observe as figuras abaixo. Quais pares de triângulos parecem ser semelhantes? Explique sua resposta com base nas observações das formas.


</td></tr>
</table>

Com essa questão, almeja-se saber se o estudante pode reconhecer a semelhança entre triângulos com base apenas na percepção visual das formas apresentadas. Segundo a Teoria de Van Hiele, o nível 0, denominado *visualização*, é caracterizado pela identificação global das figuras, sem distinção de propriedades formais. O respondente, nesse nível, reconhece a semelhança pela aparência como paralelismo aproximado, ângulos parecidos visualmente, ou proporcionalidade intuitiva, sem necessariamente mencionar medidas, ângulos ou lados.

Dessa forma, essa primeira questão oferece uma base inicial para compreender como os estudantes percebem visualmente as figuras geométricas e se conseguem identificar alguma relação de semelhança sem recorrer a justificativas mais elaboradas. A resposta esperada nesse nível não exige precisão conceitual, mas sim reconhecimento visual e comparações perceptuais.

Questão 2	**Esperava-se respostas baseadas no nível 1: análise**
Um estudante afirma que dois triângulos são semelhantes porque ambos possuem um ângulo de 40°. Essa afirmação é suficiente para garantir a semelhança? Explique sua resposta utilizando propriedades geométricas.	

Com esta questão, pretende-se verificar se o estudante pode refletir sobre propriedades geométricas isoladas dos triângulos, especificamente a presença de um ângulo comum, e analisá-las criticamente. No nível 1 da teoria de Van Hiele, a análise, os indivíduos já reconhecem e nomeiam propriedades geométricas, embora ainda não compreendam suas inter-relações.

A pergunta demanda que o discente utilize algum conhecimento geométrico formal, por exemplo, critérios de semelhança como AA (ângulo-ângulo) para refutar ou confirmar a afirmação. Espera-se que o aluno reconheça que apenas um ângulo comum não é suficiente para garantir a semelhança entre dois triângulos, sendo necessário ao menos mais um ângulo congruente ou a proporcionalidade entre lados. Assim, a questão permite identificar se o sujeito ultrapassa a visualização e já opera com propriedades geométricas elementares.

Questão 3	**Esperava-se respostas baseadas no nível 2: dedução informal**
O teorema de Tales é frequentemente utilizado para justificar a semelhança de triângulos. Explique como esse teorema pode ser aplicado para demonstrar que dois triângulos são semelhantes.	

Nesta etapa, busca-se compreender se o discente pode estabelecer relações entre propriedades geométricas distintas e argumentar de maneira lógica, ainda que informal. O nível 2, dedução informal, corresponde ao estágio em que o indivíduo começa a estabelecer conexões entre as propriedades das figuras, sendo capaz de justificar relações por meio de argumentos coerentes, mas ainda não rigorosamente formais.

Ao mencionar o Teorema de Tales, a questão estimula o estudante a recorrer à ideia de paralelismo e proporcionalidade entre segmentos. Espera-se, por exemplo, que o participante consiga explicar que, ao se traçar uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, forma-se outro triângulo semelhante ao original, devido à congruência dos ângulos correspondentes e à proporcionalidade dos lados. A clareza e a articulação entre esses elementos revelam o grau de dedução informal alcançado pelo estudante.

Questão 4	**Esperava-se respostas baseadas no nível 3: dedução formal**
Dado um triângulo ABC, considere uma reta paralela ao lado BC que intercepta os lados AB e AC em pontos D e E, respectivamente. Demonstre formalmente que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.	

A quarta questão propõe uma situação em que é necessário aplicar propriedades geométricas para construir uma demonstração formal. Este tipo de questão é característico do nível 3 da teoria de Van Hiele, no qual os estudantes são capazes de organizar sequências de argumentos lógicos, recorrendo a propriedades previamente conhecidas e estruturando suas justificativas com base em relações dedutivas. O discente, para alcançar sucesso nesta questão, pode, por exemplo, reconhecer a formação de ângulos correspondentes pela presença da reta paralela e argumentar sobre a proporcionalidade dos lados. Ao fazer isso, já demonstra domínio de raciocínio mais estruturado, próximo ao formalismo exigido em provas matemáticas. A ausência de justificativas bem conectadas, ou a utilização de apenas observações empíricas, pode indicar que o estudante ainda não consolidou esse estágio da dedução formal.

Questão 5	**Esperava-se respostas baseadas no nível 4: rigor**

Demonstre que se dois triângulos possuem dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses pares forem congruentes, então os triângulos são semelhantes.

A quinta e última questão trata-se de uma proposição abstrata, que exige do estudante a elaboração de uma demonstração formal do critério de semelhança conhecido como Lado-Ângulo-Lado (LAL). Diferente das tarefas que envolvem apenas reconhecimento visual ou aplicação direta de regras, esta questão demanda uma compreensão sistêmica da geometria euclidiana, incluindo o uso articulado de definições, postulados e teoremas previamente estabelecidos.

O objetivo da questão, portanto, não é verificar se o estudante sabe o critério de semelhança, mas sim se é capaz de demonstrá-lo, partindo de propriedades fundamentais da geometria. Espera-se que o aluno organize uma prova dedutiva rigorosa, na qual mostre que a congruência de ângulos e a proporcionalidade entre lados levam, necessariamente, à semelhança dos triângulos.

O questionário apresentado foi elaborado com base nos cinco níveis da teoria de Van Hiele, respeitando a sequência lógica da progressão do pensamento geométrico. Cada questão foi cuidadosamente pensada para provocar respostas que revelassem o estágio em que o respondente pode se encontrar, indo desde o reconhecimento visual de figuras até a elaboração de argumentos rigorosos.

Essa estrutura progressiva contribuiu diretamente para os objetivos da pesquisa, permitindo não apenas mapear o nível de compreensão dos licenciandos em relação à semelhança de triângulos, mas também identificar lacunas e avanços em sua formação geométrica. As perguntas cobrem desde a observação empírica até a argumentação formal, possibilitando uma análise mais rica das estratégias cognitivas utilizadas pelos participantes.

6.3 Procedimento para análise dos dados

A análise das respostas dos licenciandos foi conduzida com base na Teoria de Van Hiele, buscando identificar indícios dos diferentes níveis de raciocínio geométrico presentes nas resoluções de questões envolvendo demonstrações sobre a semelhança de triângulos. Para isso, adotou-se uma abordagem qualitativa, fundamentada em categorias analíticas correspondentes aos cinco níveis propostos por Van Hiele: visual (nível 0), análise (nível 1), ordenação informal (nível 2), dedução formal (nível 3) e rigor (nível 4).

A categorização das respostas foi realizada a partir desses critérios, permitindo traçar um panorama do raciocínio geométrico demonstrado pelos participantes. Tal procedimento visa estruturar a análise dos dados à luz da fundamentação teórica adotada neste estudo.

6.4 Trajetória metodológica da pesquisa

A pesquisa foi estruturada em quatro etapas, cada uma orientada pelos objetivos específicos previamente definidos.

A primeira etapa consistiu na realização de uma revisão bibliográfica, com o intuito de fundamentar teoricamente a investigação. Foram consultadas obras acadêmicas como livros, artigos científicos, teses e dissertações — que abordam a teoria dos níveis de Van Hiele e sua aplicação no ensino da Geometria, bem como estudos sobre provas e demonstrações matemáticas, com foco na semelhança de triângulos. Essa etapa está diretamente relacionada ao terceiro objetivo específico, que busca verificar se há práticas de estudo baseadas na lógica dedutiva por parte dos licenciandos.

Na segunda etapa, foi elaborado um questionário composto por perguntas abertas, orientadas pelos níveis da teoria de Van Hiele. As questões foram planejadas para permitir a identificação dos níveis de pensamento geométrico expressos nas respostas dos estudantes. Esta etapa visa atender ao primeiro objetivo específico, que é investigar os níveis de pensamento geométrico manifestados pelos estudantes.

A terceira etapa correspondeu ao contato com os alunos participantes da pesquisa. Buscando maior familiaridade com a turma e com os conteúdos abordados, a pesquisadora foi monitora da disciplina antes da aplicação do instrumento. Essa experiência favoreceu tanto a revisão dos temas quanto uma aproximação mais significativa com os alunos, permitindo acompanhar de forma mais próxima seu desenvolvimento e identificar as principais dúvidas e dificuldades. A partir dessa convivência prévia e do conhecimento construído ao longo da monitoria, foi possível interpretar com mais profundidade as respostas obtidas na atividade proposta.

Antes da aplicação da atividade da pesquisa, foi feita uma apresentação à turma para estabelecer um momento de conversa informal com os estudantes. Na ocasião, buscou-se conhecer um pouco melhor o perfil da turma e compreender como os alunos estavam reagindo ao conteúdo da disciplina de Geometria. A maioria dos alunos relatou que aquele era o primeiro contato mais sistemático com o estudo da geometria no curso, especialmente com temas que envolviam definições formais, axiomas e postulados. Esse aspecto ficou evidente nas falas que expressavam insegurança diante da linguagem e da lógica envolvida nos conteúdos, especialmente no que se refere à compreensão de demonstrações.

A quarta etapa envolveu a aplicação do questionário aos estudantes da amostra descrita. A aplicação foi realizada no final do período letivo, quando os alunos já haviam cursado conteúdos relacionados à semelhança de triângulos e demonstrações matemáticas. Essa etapa permitiu reunir dados empíricos para cumprir o segundo objetivo específico, que propõe analisar as relações entre os níveis de Van Hiele e as dificuldades na construção de demonstrações geométricas.

Na quinta e última etapa, os dados coletados foram analisados qualitativamente, com o objetivo de identificar padrões de compreensão, dificuldades recorrentes e estratégias utilizadas pelos estudantes, conforme a descrição dada no tópico anterior.

7 ANÁLISE DOS DADOS

Esta seção apresenta a análise das 23 respostas obtidas a partir da atividade aplicada na pesquisa. O foco está em verificar como os estudantes argumentam e justificam suas respostas, e em que medida conseguem mobilizar conhecimentos conceituais e procedimentos dedutivos.

7.1 ANÁLISE DA QUESTÃO 1

Apresenta-se, a seguir, a distribuição dos níveis de Van Hiele identificados nas respostas à primeira questão do questionário.

7.1.1 Distribuição dos níveis

Quadro 1 – Distribuição dos níveis dos alunos à questão 1

Os níveis dos Van Hiele	N° de estudantes
nível 0	3
nível 1	4
nível 1.5[2]	1
nível 2	12
sem resposta	3

Fonte: A autora

Vale lembrar que a questão 1 foi elaborada com o objetivo de investigar se os estudantes atingiriam o nível 0 da Teoria de Van Hiele, que corresponde à visualização, ou seja, à capacidade de reconhecer figuras semelhantes com base em aspectos perceptivos, como forma e orientação.

Observa-se, então, que parte dos licenciandos respondeu de maneira compatível com esse nível, demonstrando que ainda operam com base em impressões visuais. No entanto, observou-se que uma proporção significativa dos estudantes ultrapassou esse patamar inicial, mobilizando argumentos mais estruturados com uso de termos como “ângulos correspondentes”, “proporcionalidade” e até menções ao critério ângulo-ângulo (AA), o qual estabelece que, se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, então esses triângulos são semelhantes.

[2]A expressão “nível 1,5” é uma categoria interpretativa proposta pela autora para indicar respostas que se situam entre os níveis 1 (Análise) e 2 (Dedução informal) da Teoria de Van Hiele

Esse avanço pode ser compreendido à luz das discussões apresentadas por Duval (1995), que destaca a importância da articulação entre registros visuais, discursivos e simbólicos para a construção do pensamento geométrico. O fato de alguns estudantes conseguirem transcender a simples percepção visual e apresentar justificativas que articulam linguagem e conceitos sugere que estão em processo de reorganização cognitiva, o que se alinha à ideia de transição de níveis proposta por Van Hiele. Cabe considerar, ainda, que o fato de os participantes estarem inseridos no contexto do ensino superior pode ter favorecido a presença de um número expressivo de respostas no nível 2, mesmo em uma questão cuja expectativa inicial era a de manifestações no nível 0. Isso indica que, embora ainda persistam dificuldades conceituais, já há indícios de avanços na forma de pensar geometricamente.

Dessa forma, a análise da questão 1 revela não apenas a funcionalidade do item como ponto de partida para a investigação, mas também evidencia movimentos importantes de progressão no raciocínio dos estudantes, o que reforça a necessidade de propor, nas etapas seguintes da atividade, questões que explorem níveis mais elevados da Teoria de Van Hiele e promovam o amadurecimento do pensamento geométrico.

Considerando que as respostas dos estudantes se distribuíram entre diferentes níveis da Teoria de Van Hiele, destacam-se a seguir aquelas que melhor representam cada estágio identificado.

7.1.2 Exemplos de respostas por nível obtido

No nível 0 (visualização), observa-se a resposta do discente Luiz Gonzaga[3]: *"Visualmente ambos parecem iguais"*. Essa afirmação revela uma percepção baseada unicamente na aparência, sem articulação com propriedades geométricas, o que corresponde ao pensamento perceptivo descrito por Van de Walle (2009).

No nível 1 (análise), a discente Lana Del Rey afirmou: *"Os primeiros pares parecem ser semelhantes, pois pela representação dos ângulos, através dos traços"*. Aqui já se observa a atenção a propriedades geométricas representadas graficamente, como a marcação dos ângulos, indicando um raciocínio analítico incipiente, ainda sem estrutura formal.

[3] Para preservar a identidade dos participantes da pesquisa, foram utilizados nomes de pessoas famosas nos exemplos de respostas apresentados.

Um exemplo de transição entre os níveis 1 e 2 (nível 1,5) pode ser identificado na fala do discente Neymar: *“Parece ser semelhante, porque possui 2 ângulos iguais, então o terceiro ângulo será igual também”*. Apesar da ausência de uma formulação técnica rigorosa, essa resposta aponta para um raciocínio que considera relações entre os elementos da figura, conforme descrito no nível 2, onde os estudantes começam a justificar com base em propriedades dedutivamente articuladas por Van De Walle, 2009; Duval,1995.

A fala do discente Pelé: *“Como no desenho, pelo caso A.A.A o triângulo ABC ~ DCE, pois* $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}\ e\ \hat{C} = \hat{C}$ *(pois eles compartilham o mesmo ângulo)”* — indica que ele opera no nível 2 da teoria de Van Hiele, ao aplicar corretamente um critério formal de semelhança. Nesse nível, o estudante já reconhece relações entre propriedades geométricas, superando a simples percepção visual.

Essas respostas ilustram a diversidade de níveis de pensamento geométrico entre os participantes, evidenciando desde a identificação de propriedades isoladas até a mobilização de critérios mais estruturados. A seguir, passa-se à análise da terceira questão do questionário, que propõe uma situação mais complexa e exige do estudante maior articulação entre conceitos para justificar a semelhança entre triângulos.

7.2. ANÁLISE DA QUESTÃO 2

Apresenta-se, a seguir, a distribuição dos níveis de Van Hiele identificados nas respostas à segunda questão do questionário.

7.2.1 Distribuição dos níveis

Quadro 2 – Distribuição dos níveis dos alunos à questão 2

Os níveis dos Van Hiele	N° de estudantes
nível 1	3
nível 2	17
sem resposta	3

Fonte: da própria autora (2025)

A Questão 2 foi elaborada com o objetivo de verificar se os estudantes reconheciam que a indicação de apenas um ângulo não é suficiente para garantir a semelhança entre triângulos. Essa habilidade pressupõe, inicialmente, um raciocínio situado no nível 1 da Teoria de Van Hiele onde os alunos identificam propriedades geométricas de forma isolada, sem necessariamente estabelecer conexões entre elas.

No entanto, as respostas indicaram que a maioria dos licenciandos demonstrou um entendimento mais avançado ao que a questão exigia, mobilizando critérios sobre semelhança de triângulos, porém, sem relacioná-las. Dos 23 participantes, 3 se situaram no nível 1 (análise) e 17 no nível 2 (dedução informal) e apenas 3 questões sem resposta.

Esse resultado revela que os participantes foram além da simples descrição de elementos, demonstrando a capacidade de reconhecer a insuficiência de um único ângulo e de argumentar com base na necessidade de múltiplos elementos, algo que, conforme a teoria, exige um raciocínio mais elaborado e o início da compreensão de definições geométricas. Para Duval (1995), esse avanço está relacionado à articulação entre diferentes registros de representação, como o simbólico, o verbal e o visual, o que permite ao aluno reconhecer propriedades invariantes e justificá-las com base em critérios dedutivos.

Apesar disso, um pequeno grupo de estudantes permaneceu no nível 1, evidenciando algumas dificuldades em estabelecer essas conexões entre propriedades geométricas. Assim, os resultados da Questão 2 apontam que, embora a proposta esperasse uma manifestação do nível 1, a maioria dos estudantes operou cognitivamente em um patamar superior, o que evidencia não apenas um avanço na compreensão da semelhança de triângulos, mas também o amadurecimento do pensamento geométrico em direção à dedução informal.

Considerando que as respostas dos estudantes se distribuíram entre diferentes níveis da Teoria de Van Hiele, destacam-se a seguir aquelas que melhor representam cada estágio identificado.

7.2.2 Exemplos de respostas por nível obtido

No nível 1, observa-se a resposta da discente Blackpink: "*Sim, pois a semelhança de triângulos é definida também pelos ângulos iguais.*" A estudante reconhece uma propriedade relevante, indicando atenção às características conceituais da figura. Contudo, a ausência de explicitação do número de ângulos necessários, bem como a falta de articulação entre os elementos, demonstra que seu raciocínio ainda não está estruturado de forma dedutiva. A estudante, portanto, opera no estágio de análise, pois reconhece propriedades, mas ainda não as utiliza para construir uma justificativa fundamentada.

Já o discente Maluma apresenta um raciocínio mais elaborado, próprio do nível 2, ao afirmar: “*Não, pois para serem semelhantes, é necessário que os seus ângulos correspondentes sejam iguais, ou os proporcionais*”. Nesse caso, o estudante mobiliza critérios corretos de semelhança, como a correspondência de ângulos e a proporcionalidade, e demonstra consciência de que múltiplos elementos são necessários para validar a semelhança entre triângulos.

7.3 ANÁLISE DA QUESTÃO 3

Apresenta-se, a seguir, a distribuição dos níveis de Van Hiele identificados nas respostas à terceira questão do questionário.

7.3.1 Distribuição dos níveis

Quadro 3 - Distribuição dos níveis dos alunos à questão 3

Os níveis dos Van Hiele	N° de estudantes
nível 1	5
nível 2	8
sem resposta	10

Fonte: A autora (2025)

A distribuição dos estudantes nos diferentes níveis da Teoria de Van Hiele revela aspectos importantes sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico no contexto investigado. Dos 23 participantes, 5 se situaram no nível 1 (análise), 8 no nível 2 (dedução informal) e 10 deixaram a questão sem resposta.

O grupo classificado no nível 1 sinaliza que parte dos licenciandos é capaz de identificar propriedades geométricas relevantes, como ângulos e lados, mas ainda não estabelece conexões. Os estudantes nesse nível muitas vezes se apoiam em elementos visuais marcados na figura, como traços indicando ângulos, mas não avançam para uma justificativa baseada em critérios estruturados, o que aponta para a necessidade de intervenções pedagógicas que favoreçam a transição ao nível seguinte.

Já os 8 estudantes classificados no nível 2 apresentaram justificativas mais elaboradas, evidenciando a capacidade de relacionar propriedades geométricas e construir argumentos dedutivos informais, conforme descrito por Crowley (1994). Neste nível, segundo o autor, o estudante já compreende definições geométricas como construções lógicas e não apenas como listas de características. Esses estudantes mobilizaram critérios corretos de semelhança, como o A.A. (ângulo-ângulo), L.A.L. (lado-ângulo-lado) e L.L.L. (lado-lado-lado), evidenciando que operam no nível 2. O predomínio de respostas nesse nível evidencia um avanço no desenvolvimento do raciocínio dedutivo, porém não satisfazendo ao nível indicado da questão.

Com isso, os dados revelam um cenário preocupante: nenhuma resposta alcançou esse nível de elaboração, e dez estudantes deixaram a questão em branco. Essa ausência de resposta pode indicar não apenas dificuldades pontuais com a questão, mas também uma fragilidade no domínio dos conceitos formais da geometria a construção lógica de argumentos. Segundo a teoria, estudantes no nível 3 são capazes de realizar deduções e justificar propriedades com base em relações entre definições e teoremas. O silêncio registrado, portanto, não é neutro: ele sugere que esses alunos ainda não transitaram plenamente nem mesmo pelo nível 2, revelando um distanciamento preocupante entre o ensino proposto e o nível de compreensão efetivamente alcançado.

7.3.2 Exemplos de respostas por nível obtido

No nível 1 (análise), observa-se a resposta do discente Cristiano Ronaldo: "*Porque através dele podemos utilizar os ângulos opostos pelo vértice*". Embora o raciocínio apresentado esteja correto do ponto de vista geométrico, já que os ângulos opostos pelo vértice são de fato congruentes, ele não responde adequadamente ao que a questão propõe, que é a justificativa da semelhança entre triângulos com base no Teorema de Tales. Isso indica que seu raciocínio ainda não articula as propriedades geométricas de forma dedutiva, caracterizando uma compreensão "fragmentada".

A estudante utiliza termos que apontam para a congruência de ângulos e proporcionalidade dos lados, ainda que de forma concisa. A referência a "retas paralelas" sugere um entendimento implícito do Teorema de Tales. Embora a explicação não esteja formalmente organizada, demonstra articulação entre propriedades geométricas e uma tentativa de justificar a semelhança entre triângulos.

7.4 ANÁLISE DA QUESTÃO 4

Apresenta-se, a seguir, a distribuição dos níveis de Van Hiele identificados nas respostas à quarta questão do questionário.

7.4.1 Distribuição dos níveis

Quadro 4 – Distribuição dos níveis dos alunos à questão 4

Os níveis dos Van Hiele	N° de estudantes
nível 1	1
nível 2	2
nível 3	2
sem resposta	17

Fonte: Da própria autora (2025)

A Questão 4 exigia que os estudantes construíssem uma demonstração formal de semelhança entre triângulos, a partir da aplicação de propriedades como a congruência de ângulos e a proporcionalidade de lados formados por retas paralelas. A intenção era verificar se os licenciandos atingiriam o nível 3 da Teoria dos Van Hiele, correspondente à dedução formal. Nesse nível, segundo Van de Walle (2009), o aluno compreende que a geometria é um sistema lógico estruturado, em que teoremas devem ser deduzidos com base em axiomas, definições e propriedades previamente estabelecidas.

Os dados revelam que apenas 2 estudantes alcançaram plenamente esse nível, articulando de forma lógica os elementos geométricos e organizando suas justificativas com base em argumentos dedutivos, conforme se espera no nível em questão. Outros 2 estudantes permaneceram no nível 2, apresentando raciocínios consistentes, mas ainda sem o rigor formal exigido para caracterizar uma demonstração completa. Um estudante permaneceu no nível 1, oferecendo uma justificativa vaga, baseada em elementos desconectados da estrutura lógica esperada.

No entanto, o alto índice de omissão com 17 estudantes deixando a questão em branco, sem apresentar qualquer tentativa de resolução, revela um quadro preocupante. Essa ausência de resposta, em um item que exigia a construção de uma demonstração formal com base em propriedades previamente conhecidas, evidencia uma dificuldade que vai além da complexidade da questão em si. O fato de os estudantes sequer iniciarem um raciocínio ou esboçarem justificativas revela não apenas a falta de domínio sobre o conteúdo, mas, principalmente, a fragilidade no desenvolvimento de estratégias de argumentação dedutiva.

No entanto, a grande maioria não demonstrou sequer familiaridade com esse tipo de raciocínio formal, sugerindo uma lacuna significativa em sua formação anterior. Essa omissão, longe de ser um fenômeno pontual, dialoga com o diagnóstico feito por Lorenzato (1995) e Lima (2014), ao apontarem que muitos licenciandos ingressam no ensino superior com uma formação matemática superficial, centrada na memorização de regras e fórmulas, sem a vivência de situações que exijam reflexão, argumentação ou elaboração autônoma de demonstrações.

A ausência de resposta por parte dos estudantes, portanto, não deve ser lida como simples "não saber", mas como um indicativo mais profundo de suas próximas práticas com alunos e futuros docentes. Diante disso, torna-se fundamental repensar as estratégias de ensino da Geometria nos cursos de licenciatura, favorecendo práticas que articulem a compreensão conceitual com o desenvolvimento da linguagem matemática e do pensamento lógico-dedutivo.

7.4.2 Exemplos de respostas por nível obtido

No nível 1 (análise), observa-se a resposta da discente Blackpink: *"ambos possuem um ângulo de 90°"*. A estudante identifica uma característica visual evidente, a presença de ângulos retos, o que indica um raciocínio ainda restrito à observação direta das figuras. Entretanto, a resposta carece de articulação com os critérios que fundamentam a semelhança entre triângulos, como a congruência de ângulos correspondentes ou a proporcionalidade de lados. Conforme Van de Walle (2009), esse nível é marcado pela enumeração de atributos geométricos isolados, sem que o estudante compreenda suas relações lógicas. A resposta, portanto, reflete uma análise superficial da figura, sem estrutura dedutiva.

Já a discente Ariana Grande apresenta um raciocínio compatível com o nível 2, ao afirmar: "*São semelhantes, pois os ângulos do triângulo ABC e ADE são respectivamente os mesmos. ABC ~ ADE*". Ainda que a explicação seja breve, a estudante demonstra reconhecer a correspondência entre ângulos e invoca, mesmo que de maneira implícita, o critério AA (ângulo-ângulo) para justificar a semelhança. Segundo Van de Walle (2009), no nível 2 os estudantes começam a conectar propriedades geométricas e a justificar informalmente suas conclusões, ainda sem recorrer a uma linguagem matemática formalizada. A resposta evidencia essa transição: há uso de termos corretos e um raciocínio coerente, embora não estruturado em uma demonstração rigorosa.

Por fim, o discente The Weeknd apresenta uma justificativa que se enquadra claramente no nível 3 (dedução formal): "*Basicamente mostramos o Teorema de Tales. AD/DB = AE/EC = DE/BC. O ângulo 2 é comum aos dois triângulos. 4 e 5 são congruentes por alternos internos e 3 e 1 são por opostos pelo vértice, logo 1 e 4 são congruentes*". O estudante mobiliza conceitos fundamentais, como o Teorema de Tales e propriedades de ângulos, para construir uma argumentação lógica e estruturada. Além de apresentar as razões de proporcionalidade entre os lados, identifica corretamente a congruência entre os ângulos por diferentes critérios (ângulos alternos internos e opostos pelo vértice), demonstrando domínio da linguagem matemática e habilidade para articular múltiplos elementos em uma prova formal. Segundo Van de Walle (2009), esse nível exige que o estudante compreenda a geometria como um sistema dedutivo, o que é evidenciado na resposta analisada.

7.5 ANÁLISE DA QUESTÃO 5

Apresenta-se, a seguir, a distribuição dos níveis de Van Hiele identificados nas respostas à terceira questão do questionário.

7.5.1 Distribuição dos níveis

Quadro 5 - Distribuição dos níveis dos alunos à questão 5

Os níveis dos Van Hiele	N° de estudantes
sem resposta	23

Fonte: Da própria autora (2025)

A ausência total de respostas a essa questão, que propunha a demonstração da semelhança de triângulos com base no critério Lado-Ângulo-Lado revela uma possível dificuldade significativa por parte dos estudantes em lidar com representações formais e argumentações dedutivas.

Trata-se de uma tarefa que exige não apenas o domínio de propriedades geométricas, mas também a capacidade de construir uma cadeia lógica de implicações, articulando conceitos de proporção, congruência angular e igualdade de razões. Tal operação, no contexto da Teoria de Van Hiele, situa-se no nível 4, correspondente ao raciocínio dedutivo formal, o qual pressupõe a compreensão da estrutura lógica da Geometria e o domínio da linguagem demonstrativa.

A total ausência de tentativas sugere que os estudantes não apenas não alcançaram esse nível, mas também não demonstram segurança nas etapas anteriores, como o nível 3, voltado à dedução informal. De fato, elaborar uma demonstração envolve transitar entre definições, teoremas e justificativas com base em um sistema axiomático, o que requer uma maturação cognitiva que, como aponta Kaleff (1992), raramente é plenamente alcançada mesmo entre estudantes do ensino superior. A autora destaca que o domínio das estruturas formais exige práticas pedagógicas consistentes e intencionais, que geralmente não fazem parte da formação tradicional em cursos de Licenciatura.

Van Hiele (1986) já alertava que a progressão entre os níveis de pensamento geométrico não é automática, sendo fortemente dependente da mediação docente e das oportunidades de aprendizagem oferecidas. A ausência de qualquer resposta não deve, portanto, ser interpretada como mero desinteresse ou omissão, mas como indicador de uma lacuna formativa: muitos estudantes ainda não dominam as competências necessárias para operar com argumentos demonstrativos, especialmente aqueles que envolvem a articulação entre diferentes representações matemáticas.

Esse dado corrobora os apontamentos do referencial teórico quanto às fragilidades na formação geométrica dos licenciandos e à escassez de experiências escolares que promovam a construção progressiva do raciocínio dedutivo. Como defendem Van de Walle (2009) e Kaleff (1992), o desenvolvimento do pensamento geométrico exige intervenções pedagógicas sistemáticas, que respeitem as fases cognitivas dos alunos e favoreçam a construção gradual da linguagem matemática.

Assim, o desempenho observado,ou melhor, a ausência de desempenho,deve ser lido como um sinal de alerta formativo. Demonstrações como a solicitada na questão deveriam fazer parte da rotina didática da formação docente em Matemática, não como mera formalidade, mas como estratégia de fortalecimento da argumentação, da precisão conceitual e da compreensão profunda das propriedades geométricas. Repensar as práticas pedagógicas no ensino superior, nesse contexto, torna-se uma necessidade urgente para garantir que futuros professores não apenas conheçam conteúdos geométricos, mas saibam justificá-los e comunicá-los com clareza e rigor.

8 CONCLUSÃO

Esta pesquisa analisou como os tipos de níveis de pensamento geométrico, conforme a Teoria de Van Hiele, se manifestam nas justificativas e demonstrações produzidas por licenciandos em Matemática diante de questões relacionadas à semelhança de triângulos. A análise evidenciou que, mesmo em nível de ensino superior, muitos estudantes apresentam dificuldades na elaboração de argumentos dedutivos formais, permanecendo em níveis mais elementares de raciocínio.

Entre as respostas analisadas, observou-se uma frequência significativa de justificativas incompletas, uso restrito de argumentos visuais e ausência de critérios formais de semelhança. De modo particular, chama atenção o fato de que a maior parte das omissões ocorreu nas questões que exigiam definições formais e maior rigor lógico, o que pode indicar uma dificuldade específica nesse tipo de atividade demonstrativa. Esses elementos sugerem indícios de fragilidade na apropriação da lógica dedutiva e dos conceitos geométricos fundamentais, o que tende a comprometer a construção de uma base mais consistente para o ensino da Geometria. Tal cenário aponta para a necessidade de refletir sobre como experiências formativas mais progressivas e estruturadas podem favorecer o desenvolvimento da argumentação matemática entre licenciandos.

Verificou-se, ainda, uma possível incongruência entre o nível de complexidade exigido pelas tarefas de demonstração e o estágio de desenvolvimento cognitivo dos licenciandos, conforme os níveis descritos por Van Hiele (1986). A ausência de um percurso didático que favoreça a progressão consciente entre os níveis pode dificultar a consolidação do raciocínio geométrico e da argumentação matemática, essenciais à prática docente.

Nesse sentido, os dados analisados apontam para a importância de repensar a formação inicial em Matemática, valorizando estratégias didáticas que promovam a compreensão conceitual e o raciocínio espacial. A adoção de metodologias ativas, atividades investigativas e mediações que considerem os níveis de Van Hiele como referência para o planejamento pedagógico pode contribuir para a superação de obstáculos conceituais e o fortalecimento das habilidades argumentativas dos licenciandos.

Além disso, torna-se pertinente refletir sobre o espaço destinado ao ensino de Geometria nos cursos de Licenciatura, muitas vezes reduzido ou fragmentado. Uma formação que contemple de maneira mais estruturada o desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico pode favorecer a construção de competências essenciais à atividade docente, como o domínio de demonstrações, a clareza conceitual e a capacidade de adaptação às dificuldades dos futuros alunos.

A Teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, descrito pelos Van Hiele, nesse contexto, oferece não apenas um modelo descritivo do pensamento geométrico, mas também uma ferramenta interpretativa que permite compreender as dificuldades enfrentadas por estudantes na área. Sua incorporação no contexto formativo pode tornar o ensino mais alinhado às reais possibilidades cognitivas dos licenciandos, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa.

Como limitação desta pesquisa, destaca-se o tamanho reduzido da amostra e o recorte específico sobre semelhança de triângulos, o que não permite generalizações amplas. Estudos futuros podem ampliar a variedade de conteúdos geométricos abordados, bem como aprofundar a análise longitudinal do desenvolvimento dos licenciandos ao longo do curso.

Em síntese, os achados deste trabalho sugerem que a formação inicial em Matemática deve considerar o desenvolvimento do raciocínio geométrico como um processo gradual, que exige mediação intencional, tempo, prática e estratégias didáticas alinhadas às etapas cognitivas dos estudantes.

REFERÊNCIAS

AGOSTINI, Fernanda Cristine Guimarães; FERREIRA, Francinildo Nobre. *Ensino de semelhança de triângulos via Metodologias Ativas*. 20 dez. 2024. Material didático – Portal eduCapes, Brasil. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/918453. Acesso em: 20 jul. 2025.

ALQUINO, Andreson da Silva. *Demonstrações em geometria plana: investigando os níveis do pensamento geométrico dos alunos, nas construções dos argumentos lógicos, sob a ótica da Teoria de Van Hiele*. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

ARAÚJO, Gilvaneide E. S. *Investigando o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico durante a disciplina Fundamentos da Geometria Plana*. 2018. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2018.

BARBOSA, Lara Martins. *Construção de narrativas matemáticas na exploração de problemas históricos com o GeoGebra*. 2023. 178 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2023. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/barbosa_lm_dr_rcla.pdf. Acesso em: 13 jul. 2025.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CHING, Francis D. K. *Architecture: form, space, & order*. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015.

CROWLEY, Mary L. The van Hiele model of the development of geometric thought. In: FUYS, David; GEDDES, Dorothy; TISCHLER, Rosamund. *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1994.

DINIZ, Alex. Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides. 2020. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ProfMat) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana*. Vol. 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 2011.

DUVAL, Raymond. *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 1, p. 35-53, 1995.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2004.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOUVÊA, Fernando Antônio Teixeira. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental*. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

GUEDES, Franciely Jesus. *Soma dos ângulos internos de um triângulo*. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/soma-dos-angulos-internos-um-triangulo.htm. Acesso em: 23 jul. 2025.

GUIMARÃES, Viviane Guerra. *Ensinando a geometria euclidiana no ensino fundamental por meio de recursos manipuláveis*. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, 2015.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.; HENRIQUES, A. S.; FIGUEIREDO, L. G. *Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele*. *Bolema (Rio Claro)*, Rio Claro-SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

KUSMA, C. *Inclusão e exclusão na geometria no Ensino Fundamental*. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

LIMA, J. F. L. de. *Formação do professor de Matemática: um olhar sobre a construção dos saberes da pesquisa*. 2014. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br. Acesso em: 20 jul. 2025.

LORENZATO, Sérgio. *Por que não ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. *Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior*. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 2, n. 1, p. 64–74, 30 mar. 2016.

MEDEIROS, Carolina Beltrão de; STEINER NETO, Pedro José; ZOTTO, Ozir Francisco de Andrade. Usando questionários virtuais em pesquisas quantitativas. In: *BALAS 2000 CONFERENCE*, 1., 2000, Caracas. Anais [...]. Caracas: Balas Conference, 2000. p. 1–3.

MINAYO, Maria Cecília de Souza; DESLANDES, Suely Ferreira; CRUZ NETO, Otávio; GOMES, Romeu (orgs.). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. 1. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994. Acesso em: 20 jul. 2025.

MIRANDA, Gilberto José. Elaboração e aplicação de questionários. In: NOVA, Silvia Pereira de Castro Casa et al. (org.). *Trabalho de Conclusão de Curso: uma abordagem leve, divertida e prática*. São Paulo: Saraiva Educação, 2020. p. 216–229.

NAGATA, Rosenilda de Souza. *Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo Van Hiele*. 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1615. Acesso em: 20 jul. 2025.

PACHECO, Allana Larissa Silva dos Santos; PEREIRA, Aline Cristine; SANTOS, Amanda Karoline dos. *Geometria no cotidiano: uma proposta de ensino para o 8º ano do ensino fundamental*. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Vitória de Santo Antão, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/53456. Acesso em: 15 jul. 2025.

PEREIRA, Maria do Perpétuo Socorro Calado. O desafio do professor como mediador na construção do conhecimento. *Revista Realize*, out. 2019. Disponível em: https://editorarealize.com.br. Acesso em: 20 jul. 2025.

PITOMBEIRA, J. B. São três lados, são três lados de um triângulo. *Geometria em sala de aula*, p. 55–62, 2013.

SANTOS, Laura C. *Geometria de demonstração: contribuindo para a formação do professor nas séries finais da educação básica*. 2014. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2014.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é a condição de existência de um triângulo? *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-a-condicao-existencia-um-triangulo.htm. Acesso em: 5 mar. 2025.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, Pierre M. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press, 1986.

VIEIRA, Sônia et al. *Como elaborar questionários*. São Paulo: Atlas, 2009. 175 p.

APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES DOS CASOS DE SEMELHANÇA

185. 1º caso

> "Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

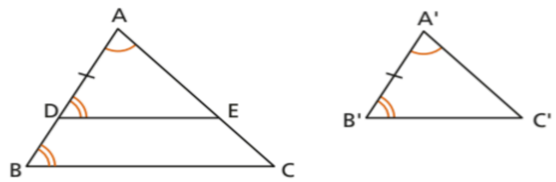
Hipótese / Tese

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC,\ \triangle A'B'C' \\ \hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Demonstração:

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado $\overline{AC}$.



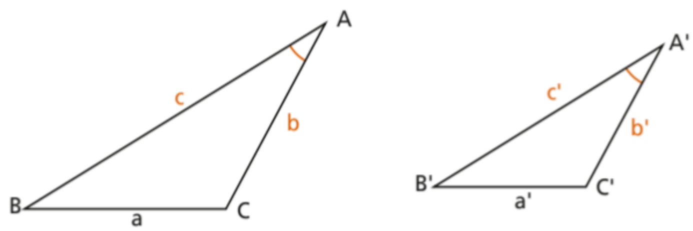
$$\left.\begin{array}{l}(\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \overline{AD} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{D} \equiv \hat{B}') \overset{ALA}{\Rightarrow} \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C' \\ \left.\begin{array}{l}\hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{B}' \equiv \hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

187. 2º caso

> "Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

A demonstração é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:



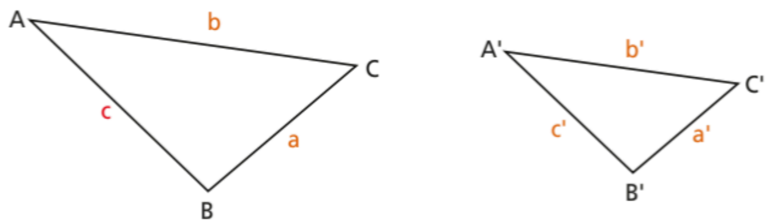
$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \left(\dfrac{a}{a'} = k,\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\right)$$

188. 3º caso

> "Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LLL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \Rightarrow \quad (\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}')$$