



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

JENNYFER FRANCYELLE NASCIMENTO NUNES

DIVISIBILIDADE (IN)VISÍVEL: como os livros didáticos revelam os critérios de divisibilidade

Caruaru
2025

JENNYFER FRANCYELLE NASCIMENTO NUNES

DIVISIBILIDADE (IN)VISÍVEL: como os livros didáticos revelam os critérios de divisibilidade

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Desterro Azevedo da Silva

Caruaru
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Nunes, Jennyfer Francielle Nascimento.

DIVISIBILIDADE (IN)VISÍVEL: como os livros didáticos revelam os
critérios de divisibilidade / Jennyfer Francielle Nascimento Nunes. - Caruaru,
2025.

68 p. : il., tab.

Orientador(a): Maria do Desterro Azevedo da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura,
2025.

Inclui referências.

1. Critérios de Divisibilidade. 2. Livros Didáticos. 3. Tipos de Raciocínio.
4. Materiais Concretos. I. Silva, Maria do Desterro Azevedo da. (Orientação). II.
Título.

370 CDD (22.ed.)

JENNYFER FRANCYELLE NASCIMENTO NUNES

DIVISIBILIDADE (IN)VISÍVEL: como os livros didáticos revelam os critérios de divisibilidade

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 12/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria do Desterro Azevedo da Silva (Orientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Luan Soares de Sousa (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Luan Danilo Silva dos Santos (Examinador Externo)

Escola Estadual José Carlos Florêncio

Dedico estas páginas àqueles que, mesmo sem saber, acenderam luzes nos meus dias escuros e me lembraram que o conhecimento floresce melhor quando regado de afeto.

AGRADECIMENTOS

É curioso pensar como algumas das melhores histórias começam quase por acaso... e, transformam-se em capítulos inesquecíveis de nossas vidas. Este trabalho nasceu de encontros, de ideias que se entrelaçaram e de pessoas que, de formas distintas, deixaram marcas profundas no meu caminho.

Agradeço,

Ao universo, não apenas como metáfora, mas como reconhecimento da teia invisível de acontecimentos que, de forma quase imperceptível, direciona cada passo. Há encontros que não se explicam, há caminhos que se abrem sem aviso e há tempos que parecem se alinhar para que as coisas simplesmente aconteçam.

Ao meu pai, João Batista, pelo exemplo de determinação com que sempre me ensinou a enfrentar os desafios da vida. Sua confiança em mim foi, em muitos momentos, a força que me manteve firme durante essa jornada.

À minha mãe, Eliane Iraci, pelo cuidado em cada detalhe, pelo amor que me acompanhou em cada etapa desta caminhada e pela compreensão nos momentos que estive ausente. Sua presença é farol e refúgio, mesmo nas fases mais exigentes. Seus conselhos me acalmaram quando nada mais consegui.

À minha família, à minha irmã Mylena, à minha vó Iraci, ao meu avô Severino, que com amor e paciência, me sustentaram ao longo desta jornada, oferecendo apoio nos momentos de incerteza e incentivo nas horas de desafio.

À minha querida orientadora, professora Dra. Maria do Desterro, me faltam palavras para expressar a imensa gratidão que sinto por sua dedicação e comprometimento, que foram muito além da sala de aula. Cada encontro, cada aula, foi um marco, momentos únicos em que entrávamos para aprender um teorema e saíamos com um verdadeiro “balaio” de conselhos para a vida. Você não foi apenas uma professora, mas uma verdadeira guia. Obrigada por me ouvir, por me dar aqueles “puxões de orelha” que me colocaram no caminho certo e pelas conversas sinceras que valeram tanto quanto qualquer lição. Sua preocupação genuína e, sobretudo, o fato de acreditar em mim, mesmo quando eu mesma duvidava do meu potencial, fizeram toda a diferença. Você é, sem dúvida, uma inspiração para mim, tanto como profissional quanto como ser humano. Levarei seus ensinamentos e sua essência por toda a minha vida. Obrigada, Tia Desterro!

Ao professor Me. Luan Danilo, Sua influência foi fundamental por ressignificar completamente minha jornada acadêmica. Antes, eu a via como uma obrigação, cheia de desafios e sem um propósito claro, e foi diante da possibilidade de ser sua aluna que, de repente, eu me encontrei em uma nova era, onde o aprendizado deixou de ser uma tarefa e se tornou a maior aventura de todas. Sua influência, e a disciplina de cálculo 3, me mostraram que o caminho acadêmico é uma oportunidade de renovação constante e de descobertas incríveis. Um agradecimento especial por ter aceitado o convite para compor a banca examinadora deste trabalho.

À professora Dra. Cristiane Rocha (Cris), são poucas pessoas conseguem unir brilhantismo e alegria da forma como você faz. Foi uma honra aprender com você e, mais do que isso, testemunhar sua dedicação em cada detalhe, em especial, ver o cuidado com que o LEMAPE é organizado é uma verdadeira lição de comprometimento e paixão pelo que se faz. Sua energia e seu exemplo são um lembrete de que a excelência está nos pequenos gestos de amor e cuidado. Você é, sem dúvida, uma grande inspiração para mim.

Ao professor Dr. Ivanildo de Carvalho, por ter me apresentado ao LEMAPE durante a disciplina de etnomatemática. Mais do que isso, sou ainda mais grata por ter me incentivado a me inscrever para a monitoria. Essa simples sugestão abriu um mundo de oportunidades para mim, e sou muito feliz por ter aceitado o desafio.

À professora Dra. Josinalva Meneses, cursar uma disciplina com você foi uma das experiências mais marcantes da minha jornada. A sua leveza e seu jeito divertido transformaram cada aula em um momento de aprendizado prazeroso, e isso fez toda a diferença para mim. Além disso, sou imensamente grata pela sua orientação no PIBIC. Tenho certeza de que os conhecimentos adquiridos durante a pesquisa serão um alicerce sólido para o meu futuro acadêmico.

À professora Dra. Jaqueline Lixandrão, pelo carinho e cuidado com o qual coordena o curso de Matemática - Licenciatura. Nunca tive a oportunidade de pagar uma disciplina com Jaque, mas todas as trocas compartilhadas durante eventos e rodas de conversas serão lembradas.

Ao professor Dr. Luan Soares, que mesmo tendo chegado na minha reta final dentro da graduação, você marcou presença de uma forma inesquecível. Sua influência em minha formação foi profunda e inspiradora, e sou muito grata por ter participado do projeto de extensão OFMA, que me abriu portas para o mundo da Matemática Aplicada. Um agradecimento especial por ter aceitado o convite para compor a banca examinadora deste trabalho.

Aos professores: Dra. Ewellen Lima, Dra. Elizabeth Lacerda, Dra. Naralina Viana, Dra. Luciana Araujo, Me. Jamille Oliveira, Me. Janiely Siqueira, Me. Lidiane Carvalho, Dr. Valdir Bezerra, Dr. Márcio Ferreira, Dr. Edelweis Barbosa, Dr. Marcos Bessa, Me. Edson Sobral, Dr.

Lazaro Assis. Não há palavras para expressar o quanto cada um de vocês contribuiu para o meu crescimento. Quero agradecer de forma geral, mas não menos sincera, por cada aula, conversas e, acima de tudo, pela atenção que me foi dedicada. O que sou hoje, e o que serei, carrega um pedacinho de cada um de vocês.

Às professoras Dra. Maria do Desterro e Dra. Elizabeth Lacerda, queria expressar minha profunda gratidão pelas trocas que tivemos durante o projeto de extensão "Estudos Reais". Cada debate, cada discussão sobre os teoremas e as demonstrações, não foi apenas uma aula, mas um marco em minha trajetória. A forma como vocês conduziram esses momentos me fez enxergar a matemática de uma maneira mais bonita e profunda. Levarei esses ensinamentos e a paixão que vocês transmitem para sempre comigo.

Aos Três Mosqueteiros: À Malu e Isaac, vocês não têm ideia do quanto nossos jantares e fofocas significaram para mim. Cada risada, cada *Schueschueschue* que bebemos, foi um brinde à nossa amizade e aos momentos que compartilhamos. Essa amizade é um presente que levarei comigo para sempre.

Aos meus Amigos do BICT (EMPA): Julya, Alex, Camylle, Natália e Tawanny. Quem diria que, decidir assistir algumas aulas com vocês nos aproximaria tanto. Agradeço por todas as risadas, pela viagem para o VIII EMPA (essa rendeu momentos inesquecíveis) e por terem tornado essa jornada mais descontraída, mesmo com todos os momentos de "desespero".

À Malu, pelas conversas e pelos momentos que passamos "estudando" no LEMAPE, que pensando bem, talvez tenha sido justamente isso que nos aproximou e tornou essa jornada mais leve, em que, entre conversas, risadas e momentos de estudo, conseguimos momentos de respiro em meio à toda pressão. Você foi a amiga com quem pude dividir alegrias, conquistas e angústias. A amiga que quando as coisas não saíram como eu esperava, estava lá, me apoiando, com palavras de incentivo e me lembrando que tudo passa. Você tornou a vida acadêmica muito menos solitária e infinitamente mais divertida. Muito obrigada, Malu!

À Isaac, pela parceria constante, pela amizade sincera e por todos os momentos que tornaram a rotina acadêmica mais suportável. Obrigada pelas conversas, risadas e histórias que, sem dúvida, ajudaram a transformar o peso da faculdade em algo mais leve, onde, mais do que as lembranças compartilhadas, guardo a certeza de que a nossa amizade é daquelas que seguem para além da universidade.

À Julya, agradeço por todas as conversas, pelos momentos compartilhados e por todo apoio. Sua amizade é muito importante para mim, ela trouxe leveza a dias que poderiam ter sido muito mais difíceis. Por um acaso do destino, não nos conhecemos antes, mas sou grata por termos

cruzado caminhos no momento certo. Obrigada por estar presente, por ouvir, pelas risadas e por transformar a rotina da graduação em algo muito mais divertido.

À José Pedro, agradeço por ser essa pessoa incrível, dedicada e por se tornar um amigo que sempre arranca as risadas mais sinceras. Você é aquele tipo de amigo que está presente em todos os momentos, nos bons e, principalmente, nos mais difíceis. A sua dedicação, a forma como transforma qualquer situação pesada em algo mais suportável, fez toda a diferença nessa jornada. A sua amizade foi um dos grandes presentes que a faculdade me deu, e sou grata por cada conversa, cada piada e cada gesto de apoio.

À minha turma 2021.1, por cada momento vivido ao longo dessa jornada. Com vocês, os desafios se tornaram mais leves e as vitórias, muito mais comemoradas. Foram tantas histórias, risadas, trabalhos em grupo que viravam maratonas e, claro, aquele companheirismo que só quem compartilha a mesma luta entende. Cada um de vocês fez parte da construção dessas memórias que vou levar para sempre. Orgulho imenso de ter caminhado ao lado de pessoas tão incríveis e determinadas. Um agradecimento especial à Malu, José Pedro, Isabella, Lucas, Kalina, Ana Clara, Fernanda, Warlysson, Jaelson e Rayanne, pelas conversas aleatórias, pelas revisões pré-prova e pelas figurinhas que arrancaram risadas de todos. Se a faculdade foi desafiadora, com vocês ela também foi diversão garantida! Com vocês, cada desafio virou oportunidade de aprender. Obrigada por tornarem essa caminhada inesquecível!

Ao LEMAPE, o lugar onde encontrei inspiração, conhecimento e, acima de tudo, um lar dentro da UFPE. Nele, a matemática ganhou vida e se transformou em algo tangível e belo. O LEMAPE se tornou o meu lugar de paz, o meu ponto de encontro com a paixão pela educação e o palco de um crescimento que levarei para sempre.

À equipe do LEMAPE, por todo o acolhimento e por transformar o laboratório em muito mais do que um espaço de estudos. Ali, tivemos a oportunidade de trocar ideias, aprender juntos e criar laços. Entre estudos, jogos, planejamentos e aquelas conversas que só quem vive o LEMAPE entende, vocês fizeram toda a diferença na minha jornada. Obrigada pelo apoio e pela parceria. Levarei comigo não só o conhecimento adquirido, mas também grande satisfação por fazer parte desse grupo.

A mim mesma! Obrigada por se manter firme, mesmo quando as coisas estavam complicadas.

A você, que escolheu ler este trabalho, minha gratidão. Espero que cada página possa somar algo à sua jornada e que esta leitura seja, de alguma forma, significativa.

RESUMO

Os critérios de divisibilidade são frequentemente considerados “macetes” por alunos e professores, já que simplificam a resolução de exercícios e evitam cálculos extras. Contudo, é fundamental que os alunos não apenas memorizem essas regras, mas desenvolvam o raciocínio lógico para entender o porquê de cada critério, enriquecendo seu aprendizado em Matemática e fomentando habilidades essenciais, como a resolução de problemas e o pensamento analítico. Nesse sentido, este estudo tem como objetivo analisar os livros didáticos do 6º ano, aprovados no PNLD 2024, sob o viés do tipo de raciocínio empregado na apresentação dos critérios de divisibilidade e da indicação de materiais concretos para explicá-los. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa para: analisar os tipos de raciocínio, segundo Reid e Knipping, nas explicações dos critérios de divisibilidade; identificar atividades que promovam diferentes tipos de raciocínio; e identificar indicações de uso de materiais concretos. Os resultados revelaram que a abordagem predominante nos livros didáticos prioriza a transmissão de regras prontas (o visível), deixando em segundo plano as justificativas matemáticas subjacentes (o invisível). O raciocínio indutivo aparece como principal estratégia, enquanto o dedutivo foi encontrado em apenas um dos materiais analisados. Além disso, os livros não sugerem o uso de materiais manipuláveis para trabalhar os critérios. Esses resultados destacam a necessidade de abordagens que unam a praticidade das regras à descoberta de seus porquês matemáticos, combinando diferentes formas de raciocínio com materiais concretos. Assim, os critérios de divisibilidade podem se tornar não apenas ferramentas práticas, mas portas de entrada para o pensamento matemático profundo. Diante desse cenário, ao final deste trabalho, propomos uma abordagem alternativa que utiliza o material dourado como recurso didático para tanto favorecer a compreensão dos critérios de divisibilidade quanto mostrar como este pode ser usado para desenvolver o raciocínio dedutivo dos estudantes.

Palavras-chave: Critérios de Divisibilidade; Livros Didáticos; Tipos de Raciocínio; Materiais Concretos.

ABSTRACT

Divisibility rules are often regarded as “tricks” by students and teachers, since they simplify problem-solving and eliminate unnecessary calculations. However, it is crucial that students not only memorize these rules but develop logical reasoning to understand why each rule works, thereby enriching their Mathematics learning and cultivating essential skills such as problem-solving and analytical thinking. In this context, this study aims to analyze 6th grade textbooks approved by PNLD 2024, focusing on the types of reasoning employed in presenting divisibility rules and the recommendations for using concrete materials to explain them. The research adopts a qualitative approach to: analyze the types of reasoning (following Reid and Knipping’s framework) in explanations of divisibility rules; verify whether activities promote different forms of reasoning; and identify indications for using concrete materials. Findings revealed that the predominant approach in textbooks prioritizes transmitting ready-made rules (the visible), while relegating underlying mathematical justifications (the invisible) to secondary importance. Inductive reasoning emerges as the primary strategy, whereas deductive reasoning was found in only one of the analyzed materials. Furthermore, the textbooks fail to suggest the use of manipulatives for teaching divisibility criteria. These results underscore the need for instructional approaches that bridge rule application with discovery of mathematical reasoning, integrating diverse forms of logic with concrete materials. Thus, divisibility criteria can transform from mere practical tools into gateways for profound mathematical thinking. Given this scenario, at the end of this paper, we propose an alternative approach that uses the golden material as a teaching resource to both promote understanding of the criteria for divisibility and show how it can be used to develop students’ deductive reasoning.

Keywords: Divisibility Criteria; Textbooks; Types of Reasoning; Concrete Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Capa do L1	42
Figura 2	– Capa do L2	42
Figura 3	– Capa do L3	43
Figura 4	– Capa do L4	43
Figura 5	– Capa do L5	44
Figura 6	– Capa do L6	44
Figura 7	– Capa do L7	45
Figura 8	– Explicação do critério de divisibilidade por 7	46
Figura 9	– Notícia sobre a descoberta de um critério de divisibilidade por 7	47
Figura 10	– Critério de divisibilidade por 2	48
Figura 11	– Critério de divisibilidade por 3	49
Figura 12	– Critério de divisibilidade por 6	50
Figura 13	– Critério de divisibilidade por 4	51
Figura 14	– Critério de divisibilidade por 8	51
Figura 15	– Critério de divisibilidade por 9	52
Figura 16	– Direcionamento para a demonstração do critério de divisibilidade por 9	53
Figura 17	– Demonstração do critério de divisibilidade por 9	54
Figura 18	– Critério de divisibilidade por 5	55
Figura 19	– Critério de divisibilidade por 10, 100 e 1000	55
Figura 20	– Questão sobre os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000 extraída do Livro 4	57
Figura 21	– Questão sobre o critério de divisibilidade por 10 extraída do Livro 2	57
Figura 22	– Questão sobre os critérios de divisibilidade por 8 extraída do Livro 6	58
Figura 23	– Questão sobre os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5 extraída do Livro 5	58
Figura 24	– O número 135 representado no Material Dourado	61
Figura 25	– Marcação em blocos de 9 unidades do número 135 representado no Material Dourado	61
Figura 26	– Organização estratégica do material dourado para ilustrar a decomposição algébrica do número 135, expressa como $9 \cdot (11 + 3 + 0) + (1 + 3 + 5)$	62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tipos de Materiais Manipuláveis	21
Quadro 2 – Partes do Silogismo Aristotélico	22
Quadro 3 – Coleções selecionadas	40
Quadro 4 – Critérios de divisibilidade presentes nos livros	46
Quadro 5 – Distribuição de questões sobre critérios de divisibilidade por livro didático	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
MD	Material Dourado
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PLND	Programa Nacional do Livro e do Material Didático

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\exists$	Existe
$ $	Divide (ex: $a \mid b$ significa “ a divide b ”)
$\nmid$	Não divide (ex: $a \nmid b$ significa “ a não divide b ”)
$\Rightarrow$	Implica/Então (lógica)
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se (equivalência lógica)
$\neg$	Negação (lógica)
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\in$	Pertence
Σ	Somatório
$!$	Fatorial (ex: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$)

SUMÁRIO

1	O COMEÇO	16
2	A TEORIA	19
2.1	O LIVRO DIDÁTICO	19
2.2	MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	20
2.3	TIPOS DE RACÍOCÍNIOS SEGUNDO REID E KNIPPING	21
2.3.1	Dedutivo	23
2.3.2	Indutivo	24
2.3.3	Abduativo	25
2.3.4	Por Analogia	26
2.4	OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE	27
2.4.1	Notações e Resultados Preliminares	27
2.4.2	Demonstrações dos Critérios Usuais	28
2.4.3	Demonstrações dos Critérios em uma Base Arbitrária	31
3	A METODOLOGIA	38
3.1	A PESQUISA QUALITATIVA	38
3.2	A FONTE DE DADOS	39
4	O QUE OS DADOS CONTAM?	41
4.1	OS LIVROS DIDÁTICOS, A BNCC E O PNLD	41
4.2	REFLEXOS DO RACIOCÍNIO LÓGICO NOS LIVROS ANALISADOS	47
4.3	OS RACIOCÍNIOS INCENTIVADOS PELAS ATIVIDADES	56
4.4	MATERIAIS CONCRETOS: PRESENÇA OU AUSÊNCIA	59
5	PROPOSTA DE USO DO MATERIAL DOURADO PARA ESTIMULAR O RACIOCÍNIO DEDUTIVO DOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE	60
5.1	O MATERIAL DOURADO	60
5.2	EXPLORANDO O CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9 COM O MATERIAL DOURADO	60
6	O FIM?!	64
	REFERÊNCIAS	66

1 O COMEÇO

Uma mágica é uma performance que cria um encantamento de que algo extraordinário está acontecendo. Esse encantamento é construído a partir de uma dualidade entre o visível e o invisível: o que o público observa, como os efeitos impressionantes, e o que permanece oculto, como as técnicas e estratégias cuidadosamente planejadas. Na matemática, essa dualidade também aparece em alguns desafios matemáticos, frequentemente chamados de “matemágica”, assim como na utilização de atalhos que facilitam a resolução de problemas, conhecidos como “macetes”.

Entre os exemplos clássicos de macetes estão os critérios de divisibilidade. Eles são atalhos que permitem identificar se um determinado número natural é divisível por outro sem a necessidade de cálculos longos e demorados. Por exemplo, para verificarmos se 2025 é divisível por 3, somamos seus algarismos: $2 + 0 + 2 + 5 = 9$. Como 9 é divisível por 3, isso indica que 2025 também é. Essa eficiência, além de impressionar, pode ser um fator motivador para que o público, maravilhado com o truque, busque compreender a lógica que sustenta esses critérios.

A compreensão dos critérios de divisibilidade é uma das habilidades específicas a serem desenvolvidas por alunos do 6º ano do ensino fundamental, devendo ser construída por meio de investigações (Brasil, 2018). Nessa etapa, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza, de forma geral, a importância de introduzir os estudantes, de maneira progressiva, à compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Esse processo inclui a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do pensamento crítico em relação aos argumentos neles apresentados (Brasil, 2018).

Diante dessa discussão, surge a problemática desta pesquisa: como os livros didáticos do 6º ano, aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), apresentam os critérios de divisibilidade, tanto em relação ao raciocínio empregado nas explicações quanto à indicação de uso de materiais concretos?

Os livros didáticos se destacam como a principal fonte de acesso ao conteúdo. Segundo Barbosa (2011, p. 36), "os livros didáticos desempenham um papel essencial no sistema escolar", sendo motivo de inúmeras pesquisas acadêmicas. No cotidiano da sala de aula, tornaram-se uma ferramenta indispensável e, na maioria das vezes, a única ferramenta pedagógica disponível para o professor. No entanto, quando adotados como único recurso, podem restringir as possibilidades do processo educativo.

Essa reflexão revela a importância de analisar como os livros didáticos apresentam os critérios de divisibilidade, buscando verificar se as explicações se limitam à memorização de regras ou se, por outro lado, abrangem diferentes tipos de raciocínio para fundamentar tais critérios. A estruturação desse conteúdo é decisiva, pois pode influenciar diretamente se os estudantes alcançarão uma compreensão superficial ou aprofundada das propriedades matemáticas envolvidas.

No contexto educacional, a lógica matemática se configura como a base para o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico dos alunos, sendo algo fundamental para a formação de um raciocínio estruturado e preciso (Reid;Knipping, 2010). Ao dominar esses fundamentos, os alunos tornam-se capazes de identificar relações, sequências e padrões matemáticos, mobilizando os quatro tipos de raciocínio propostos pelos mesmos autores: dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia. Cada um desses tipos de raciocínio contribui de forma singular para o processo de aprendizagem.

A compreensão e a utilização desses tipos de raciocínio são essenciais não apenas para a resolução de problemas matemáticos, mas também para o desenvolvimento de habilidades que podem se estender a outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Rêgo e Rêgo (2022) destacam que abordagens visuais e didáticas aplicadas ao ensino da matemática exercem um impacto significativo, sobretudo quando são intencionalmente elaboradas para promover o raciocínio lógico dos estudantes.

Partindo dessa compreensão, esta pesquisa tem como objetivo geral analisar os livros didáticos do 6º ano (PNLD 2024) sob a perspectiva dos tipos de raciocínio utilizados na apresentação dos critérios de divisibilidade e da indicação de materiais concretos. Diante disso, os objetivos específicos incluem: (1) analisar os tipos de raciocínio (dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia) presentes na abordagem dos critérios de divisibilidade; (2) examinar alguns exercícios propostos que mobilizam diferentes formas de raciocínio; e (3) investigar sistematicamente as indicações de materiais concretos para o ensino desses critérios, incluindo suas características e contextos de uso sugeridos.

Para alcançar esses objetivos, o estudo adota uma abordagem qualitativa baseada em pesquisa bibliográfica. Essa metodologia consiste na seleção dos livros didáticos e triagem das seções que abordam os critérios de divisibilidade, na classificação das explicações quanto ao tipo de raciocínio, na catalogação dos exercícios, na listagem dos recursos materiais sugeridos e, por fim, na avaliação de como os tipos de raciocínio estão contemplados.

Para finalizar, apresentamos a estrutura deste documento. No Capítulo 2, que precede esta

introdução, construímos a base teórica necessária para analisar os livros didáticos. Nele, trazemos um pouco sobre o livro didático, seguido do contexto que explica a utilização de materiais manipuláveis no ensino de matemática. Em sequência, exploramos os quatro tipos de raciocínio propostos por Reid e Knipping (dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia) e apresentamos as demonstrações matemáticas dos critérios de divisibilidade que serão nosso foco de análise. No Capítulo 3, detalhamos a metodologia adotada, explicando passo a passo como conduzimos a pesquisa. Aqui, esclarecemos os critérios de seleção dos livros didáticos. O Capítulo 4 é dedicado à análise dos livros didáticos do 6º ano. Nele, investigamos como os critérios de divisibilidade são abordados, identificando quais tipos de raciocínio são privilegiados e como os materiais concretos são (ou não) incorporados às explicações. No Capítulo 5, propomos uma abordagem prática: o uso do Material Dourado como ferramenta para estimular o raciocínio indutivo e, a partir dele, motivar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Essa proposta busca conectar a experimentação concreta com a formalização matemática, tornando o aprendizado mais significativo. Por fim, no Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões, sintetizando as principais descobertas e reflexões deste estudo, além de apontar caminhos para futuras pesquisas e práticas pedagógicas.

Esperamos que esta organização facilite a navegação pelo trabalho e permita uma compreensão integral da nossa pesquisa.

2 A TEORIA

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica da pesquisa, começando por uma discussão sobre o livro didático e seu papel no contexto do PNLD. Em seguida, explora a relevância dos materiais concretos para o ensino de matemática, mostrando como eles facilitam a aprendizagem. A parte seguinte introduz os conceitos básicos da lógica matemática, essenciais para o pensamento formal, destacando os tipos de raciocínio de Reid e Knipping. Por fim, são demonstrados alguns critérios de divisibilidade que serão utilizados como base para as análises realizadas no estudo.

2.1 O LIVRO DIDÁTICO

Os livros didáticos têm um papel essencial no sistema escolar, servindo como guias estruturados para o ensino e a aprendizagem (Barbosa, 2011). Historicamente, esses materiais se consolidaram como ferramentas indispensáveis na educação, acompanhando a evolução dos métodos pedagógicos e das necessidades educacionais ao longo do tempo.

As discussões e conhecimentos contidos em um livro didático têm como objetivo principal promover o aprendizado do estudante, contribuindo significativamente para a formação do pensamento crítico e para a reflexão sobre os conhecimentos escolares, ampliando sua compreensão acerca da realidade (Barbosa, 2011). Além dessa função pedagógica, sua relevância se estende a um contexto cultural e social mais amplo, refletindo as transformações da sociedade. Nesse sentido:

O livro didático é um artefato cultural porque agrega tanto a historicidade sobre os meios e modos como seres humanos foram consolidando a sua existência, quanto por contemplar as novidades que circulam pelos contextos socioculturais atuais, por exemplo, as tecnologias digitais e os debates sobre as diversidades de raça-etnia, o respeito pelo outro e a sociedade democrática. Na condição de artefato cultural, o livro didático aciona uma multiplicidade de ideias, relações, conflitos, desejos emanados pelos atores que integram a dinâmica comunidade escolar. (Brasil, 2024, p.33)

No Brasil, o Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), criado como política pública para garantir o acesso de estudantes e professores a recursos didáticos de qualidade, transformou a realidade das escolas públicas de educação básica (Barbosa, 2011). O programa quebrou o paradigma de que o acesso a livros de qualidade estaria restrito à lógica mercadológica (oferta, demanda e lucro), ampliando seu alcance e impacto. Desde então, no Brasil, a seleção

e distribuição dos livros didáticos são reguladas pelo PNLD, que avalia, seleciona e distribui esses materiais para as escolas da rede pública, levando em consideração critérios pedagógicos, científicos e editoriais (Santos;Martins, 2011).

2.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

No contexto do ensino de Matemática na educação básica, os materiais didáticos têm sido, há algum tempo, apontados como recursos promissores para enfrentar os desafios que marcam a aprendizagem matemática (Cavalcanti, 2006). Dentre eles, destacam-se os materiais manipuláveis, cuja utilização surge como uma estratégia pedagógica potente, capaz de tornar conceitos abstratos mais acessíveis por meio da visualização, do toque e da experimentação (Brasil, 1997).

Esses recursos, ao promoverem a interação sensorial com os objetos de estudo, funcionam como pontes entre o pensamento abstrato e a experiência concreta. Assim, eles favorecem a construção ativa do conhecimento, potencializando a compreensão conceitual por meio da ação intencional (Rêgo;Rêgo, 2022). Mais do que ferramentas complementares, constituem-se como elementos centrais no processo educativo, ampliando a participação dos estudantes no processo de aprendizagem e desenvolvendo sua criatividade e autonomia (Facchi, 2022).

Essa abordagem, alinhada às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), valoriza a experiência concreta como ponto de partida para a construção de noções matemáticas mais complexas. Dessa forma, fortalece-se o elo entre ação, reflexão e simbolização (Brasil, 1997). Recursos como o material dourado, o tangram e o geoplano, exemplificam bem essa perspectiva, integrando manipulação, resolução de problemas e ludicidade no processo de aprendizagem.

Contudo, apesar do reconhecimento teórico dos benefícios proporcionados por essas práticas, muitos estudantes não têm acesso a esses materiais durante sua trajetória escolar. Entre os possíveis obstáculos estão a ausência de orientações nos materiais didáticos para os professores, as deficiências na infraestrutura das escolas e a permanência de abordagens pedagógicas tradicionais.

Nesse cenário, o papel do professor é decisivo, já que “cabe ao docente promover e criar contextos de aprendizagem, para que os alunos interajam entre si, comunicando e compartilhando ideias, de forma rica e diversificada, proporcionando experiências significativas na sala de aula” (Facchi, 2022, p.23). Como destacam Rêgo e Rêgo (2022) e Lorenzato (2006), o êxito dessa ação depende, sobretudo, de uma postura investigativa por parte do professor, que deve

promover desafios, estimular o pensamento crítico e abrir espaço para que o estudante questione, experimente e descubra. Ademais, Libâneo afirma que

A motivação dos alunos para a aprendizagem através de conteúdos significativos e compreensíveis para eles, assim como de métodos adequados é fator ponderante na atitude de concentração e atenção dos alunos. Se estes estiverem envolvidos nas tarefas, diminuirão as oportunidades de distração e de indisciplina. (Libâneo, 1990, p.253)

O engajamento discente com materiais manipuláveis transcende a manipulação física, abrangendo interação com o conteúdo, com os colegas e com o raciocínio matemático. Na perspectiva de Rabardel (1995), compreende-se que um artefato como o geoplano, o tangram ou o material dourado, não é em si um instrumento pedagógico pleno, mas torna-se instrumento à medida que é apropriado pelo sujeito e integrado a seus esquemas de uso.

Lorenzato (2006) sistematiza esses materiais em duas categorias (Quadro 1), destacando seu potencial para diferentes objetivos educacionais:

Quadro 1 – Tipos de Materiais Manipuláveis

Tipo de material	Descrição	Objetivos didáticos	Exemplos
Estático	Material cuja estrutura física não pode ser alterada por meio da manipulação. Permite observação e manuseio sem mudança de forma.	Desenvolver observação analítica, reconhecimento de propriedades e relações espaciais. Ideal para introdução de conceitos.	Blocos lógicos, réguas, sólidos geométricos, figuras planas de cartolina.
Dinâmico	Material cuja estrutura se modifica durante a manipulação. Permite transformar, reorganizar e ajustar as partes livremente.	Estimular experimentação, descoberta, raciocínio lógico e construção ativa do conhecimento.	Material dourado, tangram, geoplano, dobraduras, cubos encaixáveis, régua articulada.

Fonte: Autoria nossa, 2025.

A diferenciação entre materiais manipuláveis estáticos e dinâmicos, conforme proposto por Lorenzato (2006), evidencia a diversidade de possibilidades didáticas que esses recursos oferecem no ensino de Matemática. A diferenciação não amplia apenas o repertório do docente, mas também permite que seja realizada uma escolha direcionada aos objetivos de aprendizagem. Diante disso, ao compreender as especificidades de cada tipo de material, o docente pode implementar ações de aprendizagem mais significativas.

2.3 TIPOS DE RACÍOCINIOS SEGUNDO REID E KNIPPING

A matemática se constrói sobre alicerces invisíveis e rigorosos, em que nenhum é tão fundamental quanto a lógica. Desde os primeiros registros de demonstrações na Grécia Antiga

até os sistemas formais contemporâneos, a lógica tem sido a ferramenta que garante a solidez dos argumentos matemáticos. Aristóteles, considerado o pioneiro no estudo sistemático da lógica, desenvolveu um dos primeiros modelos de raciocínio formal: o silogismo. Como explica Morais Filho (2010, p.46), trata-se de “um argumento lógico-dedutivo estruturado em três partes”. Sua forma clássica pode ser representada como:

Quadro 2 – Partes do Silogismo Aristotélico

1. Premissa maior (afirmação geral)

Exemplo. “Todo número natural cujos dois últimos algarismos formam um número divisível por 4 é divisível por 4.”

2. Premissa menor (caso particular)

Exemplo. “O número 736 é um número cujos dois últimos algarismos (36) formam um número divisível por 4.”

3. Conclusão (decorrência lógica)

Exemplo. “Portanto, 736 também é divisível por 4.”

Fonte: Autoria nossa, 2025.

Na matemática, a lógica é um ramo que estuda os princípios da argumentação formal, estabelecendo regras e métodos para a construção de argumentos válidos. Ela é baseada em proposições, conectivos lógicos, quantificadores e regras de inferência que permitem analisar a veracidade ou falsidade de afirmações. Além de ser efetiva para a estruturação de demonstrações e no desenvolvimento do conhecimento formal. Segundo Morais Filho (2010), para a validação das afirmações apresentadas na matemática, é exigido que elas sejam devidamente demonstradas, pois a sua estrutura se baseia na lógica.

Compreender esse funcionamento nos leva a refletir sobre o modo como pensamos para chegar a conclusões. A esse processo damos o nome de raciocínio, e ele está diretamente relacionado à lógica. Ao resolver problemas ou construir argumentos, diferentes caminhos podem ser seguidos para se chegar a um resultado. Esses caminhos, ou formas de pensar, são classificados conforme a forma como utilizam casos particulares, regras gerais e conclusões.

Segundo Reid e Knipping (2010), existem quatro tipos principais: dedutivo, indutivo, abdu-tivo e por analogia. Cada um deles tem características próprias e aparece em diferentes contextos na matemática.

Na prática, compreender os diferentes tipos de raciocínio lógico se apresenta como essencial para a construção e a avaliação de argumentos matemáticos e científicos, já que cada forma de raciocínio desempenha um papel fundamental na formulação de teorias, na resolução de

problemas e na validação de conjecturas (Morais Filho, 2010). Assim, o domínio e compreensão acerca desses raciocínios não apenas fortalece a capacidade analítica, mas também aprimora a clareza e a precisão na comunicação de ideias dentro do campo da lógica e da matemática. A seguir exploraremos cada um desses tipos de raciocínios com mais detalhes, analisando suas características e aplicações.

2.3.1 Dedutivo

Segundo Reid e Knipping (2010, p. 84, tradução nossa), “[...] o raciocínio dedutivo é a base da demonstração, sendo um dos principais focos do estudo da lógica formal”. Fundamentado em regras estruturadas, esse tipo de raciocínio parte de princípios gerais para alcançar conclusões específicas, garantindo a validade dos argumentos apresentados. Diferente de métodos empíricos, ele não necessita de experimentação para validar suas conclusões, pois estas são logicamente derivadas das premissas assumidas (Ayalon; Even, 2008, p.1 *apud* Mazzi, 2018, p. 71).

A demonstração da validade de uma proposição T é construída a partir de uma hipótese H , por meio de uma sequência estruturada de inferências logicamente válidas. Essas inferências estabelecem uma relação coerente entre H e T , assegurando que os resultados expressos em T sejam uma consequência lógica direta das premissas contidas em H (Morais Filho, 2010). Em outras palavras, a demonstração permite provar que qualquer objeto matemático que satisfaça as condições estabelecidas na hipótese também atende ao que é afirmado na tese. Assim, esse caso assegura a validade de uma proposição implicativa do tipo $H \Rightarrow T$.

Dentre os diversos métodos de raciocínio dedutivo, destacamos aqui dois amplamente utilizados na lógica proposicional: *Modus Ponens* e o *Modus Tollens*, que formalizam inferências lógicas válidas (Mazzi, 2018).

No *Modus Ponens*, parte-se da veracidade de uma proposição condicional “Se H , então T ”. Se H é verdadeiro, então conclui-se que T também deve ser verdadeiro. Já o *Modus Tollens* lida com a negação da consequência. Ele afirma: se a proposição condicional $H \Rightarrow T$ é verdadeira, e se T é falso ($\neg T$), então H também deve ser falso ($\neg H$). Ou seja, se a consequência esperada não ocorreu, é porque a hipótese inicial não se sustenta. Essa estrutura é frequentemente usada para refutar hipóteses.

Esses dois métodos ilustram como o raciocínio dedutivo assegura conclusões apodícticas dentro de um sistema lógico bem definido (Reid; Knipping, 2010). Tal rigor é fundamental na construção de demonstrações matemáticas e na validação de argumentos em diversas áreas

do conhecimento, como a ciência, a tecnologia e o direito (Mazzi, 2018). Assim, a força do raciocínio dedutivo reside na capacidade de produzir conhecimento seguro e verificável, fornecendo a base para sistemas lógicos bem estruturados e para o avanço do pensamento racional (Reid; Knipping, 2010).

2.3.2 Indutivo

O raciocínio indutivo é outro tipo de raciocínio dentro dos pilares da construção do pensamento matemático, sendo amplamente utilizado na educação matemática, especialmente no processo de formulação de regras. Ele é reconhecido como um raciocínio não dedutivo, pois parte de situações particulares e conhecidas para formular uma regra ou princípio que ainda não foi evidenciado (Reid; Knipping, 2010).

- O raciocínio indutivo parte de um caso concreto para chegar a regras gerais.
 - O raciocínio indutivo utiliza o que é conhecido para concluir algo previamente desconhecido.
 - O raciocínio indutivo é apenas provável, não é certo.
- (Reid e Knipping, 2010, p. 88, tradução nossa)

Diante disso, esse raciocínio possibilita a descoberta de algo novo, ainda que suas conclusões sejam apenas possibilidades, e não certezas. É justamente esse caráter exploratório que torna tão significativo o processo de descoberta.

Um exemplo claro desse tipo de raciocínio pode ser observado na descoberta do critério de divisibilidade por 3. Ao analisar diversos números divisíveis por 3, como 12, 21, 30, 111, os estudantes podem perceber que a soma dos algarismos desses números também é divisível por 3 (por exemplo, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$, $3 + 0 = 3$, $1 + 1 + 1 = 3$). A partir da repetição dessa regularidade, pode-se formular a seguinte regra: um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos também for divisível por 3.

Essa generalização não parte de uma dedução formal, mas da repetição de casos particulares e da percepção de um padrão recorrente, o que caracteriza o raciocínio indutivo. Posteriormente, essa regra pode ser formalizada e justificada com base na estrutura do sistema de numeração decimal, mas sua origem está no processo empírico de observação.

Assim, o raciocínio indutivo serve como um instrumento de descoberta, ao qual o vínculo entre caso e resultado leva à construção de uma regra que, embora não ofereça garantias absolutas, orienta novas interpretações e permite avanços no entendimento matemático (Reid e Knipping, 2010).

2.3.3 Abduativo

Diante de um resultado inesperado, ao buscar uma possível explicação que o torne compreensível, surge o raciocínio abduativo. Se diferenciando da dedução e indução, este raciocínio busca uma hipótese que possa justificar a ocorrência observada, ou seja, parte de um resultado conhecido e de um caso possível, para então formular uma regra possível (Reid e Knipping, 2010). O raciocínio abduativo é reconhecido como o inverso do dedutivo, ou o “raciocínio de trás pra frente” como afirma Sherlock Holmes em *A Study in Scarlet* (Reid e Knipping, 2010, p. 100, tradução nossa):

A maioria das pessoas, se lhes descrevermos uma série de acontecimentos, dirá-nos qual será o resultado. Elas podem juntar esses eventos nas suas mentes e argumentar a partir deles que algo vai acontecer. No entanto, são poucas as pessoas que, se lhes dissesse o resultado, seriam capazes de descobrir, a partir da sua própria consciência interior, quais foram os passos que levaram a esse resultado. É a este poder que me refiro quando falo de raciocínio para trás. (Doyle, 2009, p. 111, tradução nossa)

Esse “raciocínio de trás pra frente” descrito por Holmes, ilustra de forma literária a essência do raciocínio abduativo. Ao partir de um efeito conhecido para uma causa provável. Dessa forma visualiza-se seu valor, na formulação de hipóteses iniciais que podem posteriormente podem ser testadas e refinadas (Souza, 2016). É um tipo de raciocínio que se destaca em ramos investigativos, mas também é bastante presente na matemática, tendo um foco especial em momentos de descobertas e explicação, mesmo que a primeira vista não pareça tão evidente (Reid e Knipping, 2010).

Diante de seu papel na investigação, a abdução incita significativa contribuição no desenvolvimento da criatividade do estudante (Gonzalez e Haselager, 2002). Peirce destaca que o ponto de partida é o sentimento de surpresa, uma anomalia que desafia crenças previamente construídas, exigindo uma reorganização do pensamento (Peirce, 1867 *apud* Reid e Knipping, 2010). Assim, o estudante é impulsionado a formular hipóteses explicativas que possam “normalizar” a anomalia, transformando o inesperado em compreensível (Gonzales e Haselager, 2002). Sendo essa uma das potências por trás da abdução, a produção do conhecimento matemático, que por muitas vezes passa despercebido na matemática dedutiva (Mazzi, 2018).

Para Mason (1996), “a parte complicada da abdução é localizar ao mesmo tempo a regra apropriada e o caso conjecturado” (p. 37 *apud* Reid e Knipping, 2010). Essa complexidade é intensificada à medida que as incertezas aumentam em torno da escolha da regra ou da construção do caso a que ela se relaciona.

Um exemplo que ilustra o raciocínio abdutivo pode ser observado na formulação de critérios de divisibilidade. Suponha que um estudante perceba que o número 84 é divisível por 3 e, em seguida, note que a soma de seus algarismos, $8 + 4 = 12$, também é divisível por 3. Com base nesse fato isolado, o estudante levanta a hipótese: "Talvez a divisibilidade por 3 esteja relacionada à soma dos algarismos".

Essa suposição representa uma explicação plausível para o fenômeno observado, embora ainda não tenha sido testada em outros casos ou transformada em uma regra geral. Nesse contexto, o estudante está exercendo um raciocínio abdutivo, ao propor a melhor explicação possível diante de um dado inesperado ou curioso.

2.3.4 Por Analogia

Entre os caminhos que a mente percorre na construção do conhecimento, o raciocínio por analogia se apresenta como um fio invisível que conecta o familiar ao desconhecido. Reid e Knipping (2010) afirmam que este raciocínio “envolve fazer uma conjectura baseada em semelhanças entre dois casos, um bem conhecido (a fonte) e outro, normalmente menos bem compreendido (o alvo)” (Reid e Knipping, 2010, p.110, tradução nossa). Trata-se de um processo em que ao reconhecer semelhanças entre duas situações distintas, o sujeito associa o conhecimento sobre um determinado assunto, para explicar outro ainda não desvendado.

Esse é um tipo de raciocínio que não garante conclusões necessariamente verdadeiras, porém suas contribuições são válidas para a visualização, construção e análise de distintos conceitos, assim como para reflexões decorrentes de suas apreensões (Santos, 2014). Nesse sentido, Reid e Knipping levantam a discussão acerca da diferença entre metáfora e analogia, pontuando que existem inúmeros casos em que os estudantes as confundem. Por sua vez, eles explicam que “enquanto no estudo da linguagem a metáfora é frequentemente considerada um tipo de analogia, a analogia é geralmente apresentada como diferente da metáfora no contexto da educação matemática” (Reid e Knipping, 2010, p. 110). Diante disso, Sfard (1997) explica:

O ponto principal a ter em conta é que a metáfora tem um poder constitutivo e, por isso, funciona a priori: traz o conceito-alvo à existência, em vez de apenas lançar uma nova luz sobre uma noção já existente. Este não é necessariamente o caso da analogia, que é normalmente entendida como o resultado de uma comparação entre dois conceitos já construídos (é claro que o falante estaria normalmente mais familiarizado com um destes conceitos e usaria a sua semelhança com o outro para ter uma melhor noção do menos familiar). Tendo em conta a discussão anterior, parece útil fazer a seguinte distinção entre os termos analogia e metáfora: A analogia entra em cena quando nos apercebemos

de uma semelhança entre dois conceitos que já foram criados; o próprio ato de criação é uma questão de metáfora. (Sfard, 1997, p.344-345 *apud* Reid e Knipping, 2010, p.110)

Ao comparar, por exemplo, o critério de divisibilidade por 4 com o de divisibilidade por 8, em que ambos envolvem a observação dos algarismos finais do número, mas com distintos níveis de exigência, o aluno é convidado a perceber um padrão entrelaçado, uma progressão lógica que facilita a compreensão de um critério com base na familiaridade do outro. Assim, o raciocínio analógico atua como um elo cognitivo, mais do que um gesto criador, é um movimento de associação para a estruturação de um conhecimento novo (Pinto, Souza e Silva, 2022; Abdounur, 2007; grifo nosso). Ainda assim, Mazzi (2018) conclui que, mesmo que esse raciocínio não ofereça validação matemática, ele é importante para fazer conjecturas.

2.4 OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Nesta seção, apresentamos as demonstrações formais de alguns critérios de divisibilidade comumente abordados no Ensino Fundamental, utilizando exclusivamente definições e propriedades aritméticas relacionadas ao conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, -2, 0, 1, 2, \dots\}$, presentes no livro de Hefez (2022). Por último, como complemento e curiosidade, incluímos demonstrações dos critérios de divisibilidade em uma base numérica qualquer, ampliando assim a perspectiva do leitor sobre o tema.

2.4.1 Notações e Resultados Preliminares

Para demonstrar os critérios de divisibilidade, partimos do sistema de numeração decimal, em que todo número natural N pode ser expresso como:

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_q \cdot 10^q = \sum_{i=0}^q a_i \cdot 10^i,$$

em que $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ são os algarismos do número.

Essa forma de escrita decorre da estrutura do sistema de numeração decimal posicional, onde cada algarismo está associado a uma potência de 10, de acordo com sua posição. Com base nessa representação, é possível analisar a divisibilidade de N por diferentes números, considerando as propriedades básicas da divisibilidade, entre elas.

Definição 2.4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b quando existir um inteiro r tal que $b = a \cdot r$. Escrevemos $a|b$ e também dizemos que a é divisor de b , fator de b ou, ainda, que b é divisível por a .*

Quando a não divide b , escrevemos $a \nmid b$.

Exemplos. Note que $3|15$, pois existe um inteiro $r = 5$, tal que $15 = 3 \cdot 5$. Por outro lado, veja que $4 \nmid 9$, pois não existe um inteiro r , tal que $9 = 4 \cdot r$.

As afirmações seguintes são imediatas da definição de divisibilidade e suas demonstrações podem ser encontradas em Hefez (2022).

Proposição 2.4.1. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Então:*

1. $1|a, \quad a|a, \quad a|0$;
2. Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$;
3. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$.

2.4.2 Demonstrações dos Critérios Usuais

Para analisar os livros didáticos, é necessário compreender a estrutura lógica que fundamenta os critérios de divisibilidade. Por esse motivo, esta seção apresenta as demonstrações matemáticas desses critérios. No entanto, para simplificar e tornar as demonstrações mais acessíveis, iremos nos restringir à análise de números com quatro algarismos.

Apresentaremos os critérios de divisibilidade para os números 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, e 100, utilizando apenas a definição elementar de divisibilidade, isto é, a relação $a|b$. Essa abordagem permitirá uma compreensão clara e rigorosa dos fundamentos desses critérios, essenciais para uma análise crítica dos materiais didáticos. As demonstrações dos critérios de divisibilidade usuais apresentadas a seguir são inspiradas em Santos (2009) e podem ser consultadas em sua obra.

Considere um número

$$N = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0,$$

no qual $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Proposição 2.4.1 (Critério de divisibilidade por 2). *O número N é divisível por 2 se, e somente se, a_0 for divisível por 2.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 10(100a_3 + 10a_2 + a_1) + a_0.$$

Seja $A = 100a_3 + 10a_2 + a_1$, então $N = 10A + a_0$. Queremos demonstrar que

$$2|N \Leftrightarrow 2|a_0.$$

Inicialmente, suponha que $2|N$. Então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $N = 2m$. Como $N = 10A + a_0$, temos: $2|(10A + a_0)$. Sabemos que $2|10$, logo $2|10A$. Além disso, como $2|(10A + a_0)$ e $2|10A$, concluímos que $2|[(10A + a_0) + (-1)(10A)]$, isto é $2|a_0$. Reciprocamente, suponha que $2|a_0$. Como já vimos que $2|10A$, e agora temos também $2|a_0$, podemos novamente aplicar a propriedade de divisibilidade para concluir que $2|(10A + a_0)$, isto é, $2|N$. Portanto, finalmente concluímos que N é divisível por 2 se, e somente se, a_0 é divisível por 2. $\square$

Proposição 2.4.2 (Critério de divisibilidade por 3). *O número N é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ for divisível por 3.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$\begin{aligned} N &= (99 + 1)a_3 + (99 + 1)a_2 + (9 + 1)a_1 + a_0 \\ &= (999a_3 + 99a_2 + 9a_1) + (a_3 + a_2 + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Note que $3|9$, $3|99$ e $3|999$, logo $3|(999a_3 + 99a_2 + 9a_1)$. Seja $A = 999a_3 + 99a_2 + 9a_1$, então $N = A + (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$. Queremos demonstrar que

$$3|N \Leftrightarrow 3|(a_0 + a_1 + a_2 + a_3).$$

Suponha que $3|N$. Como $3|A$, então $3|N - A$, ou seja, $3|(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$. Reciprocamente, suponha que $3|(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$. Como $3|A$, então $3|[A + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)]$, ou seja, $3|N$. Portanto, N é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3. $\square$

Como a demonstração do critério de divisibilidade por 9 é análoga à do critério por 3, optamos por apresentar apenas esta última.

Proposição 2.4.3 (Critério de divisibilidade por 9). *O número N é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ for divisível por 9.*

Proposição 2.4.4 (Critério de divisibilidade por 4). *O número N é divisível por 4 se, e somente se, os dois últimos algarismos $10a_1 + a_0$ formarem um número divisível por 4.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 100(10a_3 + a_2) + 10a_1 + a_0.$$

Seja $A = 10a_3 + a_2$, então $N = 100A + 10a_1 + a_0$. Como $4|100$, temos $4|100A$. Queremos demonstrar que

$$4|N \Leftrightarrow 4|(10a_1 + a_0).$$

Suponha que $4|N$. Como $4|100A$, então $4|(N - 100A)$, ou seja, $4|(10a_1 + a_0)$. Reciprocamente, se $4|10a_1 + a_0$ e $4|100A$, então $4|(100A + 10a_1 + a_0)$, ou seja, $4|N$. Portanto, N é divisível por 4 se, e somente se, o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4. $\square$

Proposição 2.4.5 (Critério de divisibilidade por 5). *O número N é divisível por 5 se, e somente se, seu último algarismo a_0 for 0 ou 5.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 10(100a_3 + 10a_2 + a_1) + a_0.$$

Seja $A = 100a_3 + 10a_2 + a_1$, então $N = 10A + a_0$. Como $5|10$, temos $5|10A$. Queremos demonstrar que

$$5|N \Leftrightarrow 5|a_0.$$

Suponha que $5|N$. Como $5|10A$, então $5|(N - 10A)$, isto é, $5|a_0$. Como $a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, os únicos valores possíveis que satisfazem $5|a_0$ são $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$. Reciprocamente, se $a_0 = 0$ ou 5, então $5|a_0$ e, como $5|10A$, temos $5|N$. Portanto, N é divisível por 5 se, e somente se, termina em 0 ou 5. $\square$

Proposição 2.4.6 (Critério de divisibilidade por 6). *O número N é divisível por 6 se, e somente se, for divisível por 2 e por 3 simultaneamente.*

A demonstração do critério de divisibilidade por 6 não será apresentada neste trabalho, pois ela se baseia diretamente nos critérios já discutidos para os números 2 e 3.

Proposição 2.4.7 (Critério de divisibilidade por 8). *O número N é divisível por 8 se, e somente se, os três últimos algarismos $100a_2 + 10a_1 + a_0$ formarem um número divisível por 8.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 1000a_3 + (100a_2 + 10a_1 + a_0).$$

Seja $A = a_3$, $B = 100a_2 + 10a_1 + a_0$, então $N = 1000A + B$. Como $8|1000$, temos $8|1000A$. Queremos demonstrar que

$$8|N \Leftrightarrow 8|B.$$

Suponha que $8|N$. Como $8|1000A$, então $8|(N - 1000A)$, isto é, $8|B$. Reciprocamente, se $8|B$ e $8|1000A$, então $8|N$. Assim, N é divisível por 8 se, e somente se, os três últimos algarismos formam um número divisível por 8. $\square$

Proposição 2.4.8 (Critério de divisibilidade por 10). *O número N é divisível por 10 se, e somente se, seu último algarismo a_0 for zero.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 10(100a_3 + 10a_2 + a_1) + a_0.$$

Seja $A = 100a_3 + 10a_2 + a_1$, então $N = 10A + a_0$. Como $10|10A$, temos

$$10|N \Leftrightarrow 10|a_0.$$

Como $a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, isso só ocorre se $a_0 = 0$. Portanto, N é divisível por 10 se, e somente se, termina em 0. $\square$

Proposição 2.4.9 (Critério de divisibilidade por 100). *O número N é divisível por 100 se, e somente se, os dois últimos algarismos $10a_1 + a_0$ forem zeros.*

Demonstração. Reescrevemos N como:

$$N = 100(10a_3 + a_2) + 10a_1 + a_0.$$

Seja $A = 10a_3 + a_2$, então $N = 100A + 10a_1 + a_0$. Como $100|100A$, temos

$$100|N \Leftrightarrow 100|(10a_1 + a_0).$$

Como $10a_1 + a_0 < 100$, isso só ocorre se $10a_1 + a_0 = 0$, ou seja, $a_1 = 0$ e $a_0 = 0$. $\square$

2.4.3 Demonstrações dos Critérios em uma Base Arbitrária

Embora o sistema decimal (base 10) seja o mais comum e com o qual estamos mais familiarizados, é possível representar números em outras bases numéricas, como a base 2 (binária),

base 16 (hexadecimal), entre outras. A ideia é sempre a mesma: escrevemos o número como uma soma de potências da base escolhida, cada uma multiplicada por um dígito correspondente.

Por exemplo, quando escrevemos o número 345 na base 10, o que estamos realmente dizendo é: “temos 3 centenas, 4 dezenas e 5 unidades”, ou seja, $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Esse modo de escrever os números, no qual o valor de cada algarismo depende da posição em que ele está, é chamado de *representação posicional*.

De modo geral, dada uma base $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$, um número natural N pode ser expresso como:

$$N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$$

no qual cada dígito $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Esta representação posicional generalizada nos permite estender alguns critérios de divisibilidade para qualquer base.

Para isso, um resultado clássico e de grande relevância na álgebra que entra em cena é o *Binômio de Newton*. Ele descreve a expansão de potências de uma soma.

Proposição 2.4.10. *Sejam a e b números reais e $n \in \mathbb{N}$. Então:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (2.1)$$

em que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o coeficiente binomial.

Essa proposição desempenha um papel fundamental na demonstração dos critérios de divisibilidade em bases numéricas genéricas que serão apresentados nas proposições a seguir. As demonstrações referenciadas encontram-se em Braga e Zini (2010), trabalho que serve de fundamentação teórica para este estudo.

Proposição 2.4.11. *Seja $N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$ um número inteiro escrito em uma base numérica k . O inteiro N é divisível por k se, e somente se, a_0 for.*

Demonstração. Seja N um número natural com $q + 1$ algarismos, escrito na forma:

$$N = a_q k^q + a_{q-1} k^{q-1} + \dots + a_1 k + a_0 = \sum_{i=0}^q a_i k^i,$$

em que $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Para analisar a divisibilidade de N por k , observamos que:

$$N = a_0 + k \left(a_1 + a_2 k + a_3 k^2 + \dots + a_q k^{q-1} \right) = a_0 + k \left(\sum_{i=1}^q a_i k^{i-1} \right).$$

Assim,

$$N = a_0 + kA,$$

com $A = \sum_{i=1}^q a_i k^{i-1}$. Como $k|kA$, segue da propriedade da divisibilidade (se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$) que:

$$k|N \Leftrightarrow k|a_0.$$

Portanto, um número N é divisível por k se, e somente se, o seu algarismo das unidades a_0 também for divisível por k . $\square$

Sabendo que cada $a_i \in \mathbb{N} \cup 0$, com $0 \leq a_i < k$, a única possibilidade de k dividir a_0 é quando $a_0 = 0$, pois $a_0 < k$. Isso explica o critério de divisibilidade por 10 na base decimal.

Proposição 2.4.12. *Seja $N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$ um número inteiro escrito em uma base numérica k . Se $p \in \mathbb{N}$ e $m = \frac{k}{p}$ é um divisor inteiro de k , então N é divisível por m se, e somente se, a_0 for.*

Demonstração. Seja $m = \frac{k}{p}$, com $p \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $k = pm$. Substituindo k por pm na expressão do número N , escrito em base k , obtemos:

$$N = \sum_{i=0}^q a_i (pm)^i = \sum_{i=0}^q a_i p^i m^i.$$

Nosso objetivo é verificar se N é divisível por m . Para isso, reescrevemos N destacando o fator m :

$$N = m \left(\sum_{i=1}^q a_i p^i m^{i-1} \right) + a_0.$$

Note que o termo entre parênteses é um número inteiro, pois a_i , p e m são inteiros. Portanto, temos:

$$m|m \left(\sum_{i=1}^q a_i p^i m^{i-1} \right),$$

o que implica que:

$$m|N \Leftrightarrow m|a_0.$$

Logo, concluímos que N é divisível por m se, e somente se, o algarismo das unidades a_0 também for divisível por m . $\square$

Observa-se que, ao fixarmos a base $k = 10$ e atribuirmos os valores inteiros 1, 2 e 5 à p , podemos extrair uma série de conclusões específicas que se relacionam com os critérios de divisibilidade usuais. Podemos concluir que:

- Para $k = 10$ e $p = 1$ temos $m = \frac{10}{1} = 10$. Isso nos garante que um número é divisível por 10 se, e somente se, seu último algarismo for divisível por 10.
- Para $k = 10$ e $p = 2$ temos $m = \frac{10}{2} = 5$. Isso nos garante que um número é divisível por 5 se, e somente se, seu último algarismo for divisível por 5.
- Para $k = 10$ e $p = 5$, então $m = \frac{10}{5} = 2$. Diante disso, temos que um número é divisível por 2 se, e somente se, seu último algarismo for divisível por 2.

Proposição 2.4.13. *Sejam $N \in \mathbb{Z}$ escrito em uma base k na forma $N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$ e $r = \frac{k-1}{n}$ tal que $n \in \mathbb{N}$ um divisor inteiro de $k-1$. Então $r|N$ se, e somente se, $r|\sum_{i=0}^q a_i$.*

Demonstração. Sejam $N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$ e $r = \frac{k-1}{n}$. Observamos que:

$$r = \frac{k-1}{n} \Rightarrow nr = k-1 \Rightarrow nr+1 = k.$$

Substituindo na expressão de N , obtemos:

$$N = \sum_{i=0}^q a_i (nr+1)^i.$$

A expansão binomial nos diz que

$$(x+y)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j y^{i-j}.$$

Assim, em particular,

$$(nr+1)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (nr)^j 1^{i-j},$$

Como $1^{i-j} = 1$, temos

$$(nr+1)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (nr)^j. \quad (3.1)$$

Consequentemente, podemos reescrever (3.1) da seguinte forma

$$(nr + 1)^i = 1 + \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (nr)^j, \quad (3.2)$$

pois para $j = 0$ temos

$$\binom{i}{0} (nr)^0 = 1.$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (3.2) por a_i , concluimos

$$a_i (nr + 1)^i = a_i \left(1 + \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (nr)^j \right) = a_i + a_i \left(\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (nr)^j \right).$$

Em seguida, somando sobre todos os índices i , temos

$$N = \sum_{i=0}^q \left[a_i + a_i \left(\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (nr)^j \right) \right] = \sum_{i=0}^q a_i + \sum_{i=0}^q a_i \left(\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (nr)^j \right). \quad (3.3)$$

Colocando r em evidência no segundo membro de (3.3) vemos que

$$N = \sum_{i=0}^q a_i + r \left[\sum_{i=0}^q a_i \left(\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} n^j r^{j-1} \right) \right].$$

Finalmente, podemos concluir que $r|E$ se, e somente se,

$$r \left| \sum_{i=0}^q a_i. \right.$$

□

Nesse caso, para uma base $k = 10$ os valores possíveis para n são 1 e 3 de modo a obtermos valores inteiros em r . Essas situações nos possibilitam visualizar mais dois critérios usuais:

- Ao tomarmos $n = 1$, então $r = \frac{10-1}{1} = 9$. Logo, um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.
- Para $n = 3$, temos $\frac{10-1}{3} = 3$. Portanto, um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3.

Observação. Quando $n = 9$ em base numérica 10, o valor de r , conforme estabelecido na proposição anterior, é igual a 1. No entanto, como todo número dividido por 1 é ele mesmo, fica aqui essa breve explicação a respeito desse caso.

Como curiosidade, apresentamos a seguir um critério geral de divisibilidade por $k + 1$ (onde k é a base numérica). No caso particular da base decimal ($k = 10$), obtemos o critério específico para divisibilidade por 11.

Proposição 2.4.14. *Sejam $N \in \mathbb{Z}$ escrito em uma base k na forma $N = \sum_{i=0}^q a_i k^i$ e $r = k + 1$. Então N será divisível por r se a soma dos coeficientes que estão em posição ímpar subtraída da soma dos que estão em posição par for divisível por r , ou seja,*

$$r \mid \sum_{i=0}^q (-1)^i a_i.$$

Demonstração. Como $r = k + 1$, temos $k = r - 1$ e, portanto,

$$N = \sum_{i=0}^q a_i k^i = \sum_{i=0}^q a_i (r - 1)^i.$$

Aplicando o Binômio de Newton à expressão $(r - 1)^i$, obtemos

$$(-1 + r)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j r^{i-j}.$$

Assim, substituindo na expressão anterior em N , temos

$$N = \sum_{i=0}^q a_i \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j r^{i-j} \right).$$

Veja que ao reagruparmos os termos, separando as parcelas que não possuem nenhum fator r ,

$$N = \sum_{i=0}^q (-1)^i a_i + \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^j r^{i-j} \right). \quad (4.1)$$

Agora, evidenciando r no segundo somatório do segundo membro da equação (4.1), segue que

$$N = \sum_{i=0}^q (-1)^i a_i + \sum_{i=1}^q a_i \left[r \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^j r^{i-j-1} \right) \right].$$

Assim, todo o segundo somatório é divisível por r , isto é,

$$r \mid \sum_{i=1}^q a_i \left[r \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^j r^{i-(j+1)} \right) \right],$$

Portanto, N será divisível por r se, e somente se, o primeiro termo também for divisível por r , ou seja,

$$r|N \quad \Leftrightarrow \quad r|\sum_{i=0}^q (-1)^i a^i.$$

□

Essas demonstrações revelam que diversos critérios conhecidos na base decimal são casos particulares dessa abordagem, evidenciando a íntima relação entre a estrutura algébrica da base e os critérios de divisibilidade. Esse entendimento proporciona uma visão mais profunda da estrutura dos números e das operações, desenvolvendo o pensamento algébrico e a capacidade de generalização.

3 A METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos os aspectos metodológicos adotados para a realização da pesquisa, ou seja, são descritos os procedimentos necessários para cumprir com os objetivos (geral e específicos) apresentados previamente. Para tanto, adotamos uma metodologia de pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico, já que propomos a realizar uma análise sistemática de livros didáticos de matemática.

3.1 A PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa é uma abordagem essencial na investigação científica, pois possibilita uma compreensão profunda, bem como interpretativa dos fenômenos estudados. Diferenciando-se da pesquisa quantitativa, que foca na mensuração e análise estatística dos dados, essa abordagem metodológica prioriza a exploração dos aspectos subjetivos de contextos sociais, culturais e individuais (Guerra et al., 2024). Por isso, ela é ideal para analisar relações humanas complexas, significados atribuídos por pessoas e até mesmo materiais didáticos.

A riqueza da pesquisa qualitativa está na vasta quantidade de métodos e estratégias de análise de dados, como a análise de conteúdo, que fornece descrições detalhadas sobre os fenômenos investigados (Mazzi, 2018). Assim, essa abordagem nos permite um exame aprofundado das experiências e percepções sobre os livros didáticos, objetos de estudo desta pesquisa.

Para garantir a credibilidade em uma pesquisa qualitativa, é essencial que a análise de dados siga um rigor metodológico, evitando que a subjetividade comprometa a validade dos resultados. Além da escolha dos métodos e técnicas de análise, o pesquisador deve adotar uma postura reflexiva e interpretativa. Como destaca Minayo (2001), a pesquisa qualitativa não se limita à descrição de fenômenos, mas busca compreendê-los em sua totalidade, considerando suas múltiplas dimensões.

A apresentação dos resultados deve ser clara e bem estruturada, evidenciando relações e padrões identificados ao longo da análise. A organização cuidadosa das categorias analíticas e o uso de trechos significativos dos dados auxiliam na construção de uma argumentação sólida (Fávero e Belfiore, 2017). Assim, conduzida com rigor metodológico, a pesquisa qualitativa não apenas aprofunda a compreensão dos fenômenos estudados, mas também contribui significativamente para o campo científico ao oferecer reflexões sobre o conteúdo estudado.

Tais considerações orientaram a estruturação desta investigação, e, para maior clareza, retomamos os três objetivos centrais que guiam este estudo: (1) analisar os tipos de raciocínio (dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia) presentes na abordagem dos critérios de divisibilidade; (2) examinar alguns exercícios propostos que mobilizam diferentes formas de raciocínio; e (3) investigar sistematicamente as indicações de materiais concretos para o ensino desses critérios, incluindo suas características e contextos de uso sugeridos.

Para concretizar esses objetivos, elaboramos um caminho metodológico com cinco passos sequenciais:

1. Seleção dos livros didáticos e triagem das seções que abordam os critérios de divisibilidade, com a listagem dos diferentes critérios;
2. Classificação sistemática das explicações matemáticas segundo os tipos de raciocínio de Reid e Knipping;
3. Contagem de todos os exercícios que versam sobre os critérios de divisibilidade, com análise de algumas questões e identificação dos tipos de raciocínio que podem ser mobilizados para sua resolução.
4. Listagem e categorização dos recursos materiais sugeridos (material dourado, jogos, etc.);
5. Avaliação do equilíbrio na distribuição dos diferentes tipos de raciocínio.

Assim, para cumprir com os objetivos da pesquisa, a análise dos dados seguirá todas essas etapas, desde a seleção do material até a avaliação final. Na seção a seguir são dados detalhes sobre como ocorreu a seleção dos livros didáticos.

3.2 A FONTE DE DADOS

Foram selecionados sete livros didáticos de matemática aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático de 2024, uma vez que esse foi o último ciclo de aprovação vigente no momento do início desta pesquisa. O foco recaiu sobre os livros do 6º ano do Ensino Fundamental, série em que se trabalha os critérios de divisibilidade conforme previsto na BNCC (habilidade EF06MA05): “Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecendo relações entre números expressas pelos termos ‘é múltiplo de’, ‘é divisor de’ e ‘é fator de’, além

de determinar, através de investigações, os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.” (BRASIL, 2018, p. 301).

Esta análise concentrou-se nos manuais do professor, que incluem elementos essenciais ausentes nos livros dos alunos, tais como: orientações pedagógicas detalhadas, fundamentações teóricas e propostas de atividades complementares. Como critério adicional, priorizamos obras com versões digitais acessíveis (para *download* ou consulta *online*), garantindo assim a viabilidade da análise.

Por fim, o quadro abaixo apresenta as coleções de livros didáticos selecionadas, organizadas para facilitar a consulta das informações básicas de cada obra. Nele constam: um código identificador (utilizado ao longo do texto para simplificar a referência a cada livro), o nome da coleção, a editora responsável pela publicação e o(s) autor(es) do conteúdo. Ressalta-se que todas as obras analisadas foram publicadas no ano de 2022.

Quadro 3 – Coleções selecionadas

Código	Coleção	Editora	Autores
L1	A Conquista Matemática	FTD	José Ruy Giovanni Junior
L2	SuperAÇÃO: Matemática	Moderna	Obra coletiva, concebida e desenvolvida pela Moderna
L3	Matemática Bianchini	Moderna	Edwaldo Roque Bianchini <i>et al</i>
L4	Desafios da Matemática	Moderna	Ênio Ney de Menezes Silveira
L5	Araribá Conecta Matemática	Moderna	Obra coletiva, concebida e desenvolvida pela Moderna
L6	Matemática e Realidade	Saraiva	Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; Antonio Machado
L7	Geração Alpha Matemática	SM	Carlos N. C. Oliveira; Felipe Fugita; Isabella S. A. dos Santos

Fonte: Autoria nossa, 2025.

4 O QUE OS DADOS CONTAM?

Neste capítulo buscamos compreender como os critérios de divisibilidade são tratados em diferentes livros didáticos do 6º ano, estabelecendo um diálogo entre as orientações da BNCC. O objetivo gira em torno de não apenas verificar a presença, ou a ausência, dos critérios no livro didático, mas também observar de que forma a apresentação do conteúdo e as atividades propostas estimulam os diferentes tipos de raciocínio.

4.1 OS LIVROS DIDÁTICOS, A BNCC E O PNLD

Antes de iniciar a análise, é necessário apresentar os protagonistas, os livros selecionados. Cada obra tem em suas páginas um roteiro característico, com escolhas metodológicas, sequências de conteúdo e diferentes formas de conduzir o olhar do estudante para os critérios de divisibilidade. Assim como num show de mágica, em que cada ilusionista traz seu estilo particular, os livros revelam semelhanças e singularidades que ajudam a compor o cenário sobre o qual o conhecimento é revelado.

Baseados nas resenhas do *Guia do PNLD 2024*, de modo geral, todas as coleções demonstram alinhamento consistente com a BNCC, ao articularem as Competências Gerais da Educação Básica com propostas interdisciplinares. Considerando o foco desta pesquisa nos diferentes tipos de raciocínio, apresenta-se, a seguir, o panorama geral sobre como esse aspecto é abordado em cada coleção. Ao final, é dado destaque à lista dos critérios de divisibilidade contemplados, em comparação com o que é previsto pela BNCC na habilidade EF06MA05.

Na coleção “A Conquista Matemática” (Figura 1) as atividades seguem objetivos de aprendizagem bem definidos, incentivando o letramento matemático, o pensamento computacional e a argumentação. Em especial, são observadas sugestões para a utilização de recursos analógicos que possibilitem que os estudantes tenham papel mais ativo na manipulação de materiais concretos.

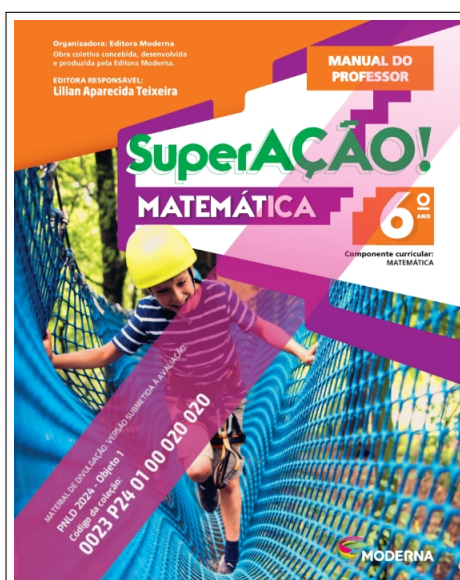
Figura 1 – Capa do L1



Fonte: FTD, 2022.

A abordagem metodológica da segunda coleção, “SuperAÇÃO! Matemática” (Figura 2), é “[...] baseada em evidências científicas busca favorecer a curiosidade, a investigação científica, a necessidade de resolver problemas, desenvolver o raciocínio lógico, a dedução e a verificação de propriedades matemáticas.” (BRASIL, 2024, p.160).

Figura 2 – Capa do L2



Fonte: Moderna, 2022.

A terceira coleção, “Matemática Bianchini” (Figura 3), propõem atividades que envolvem os estudantes em experiências significativas, conforme descrito: “As atividades engajam os(as)

estudantes e provocam situações que desenvolvam a imaginação, a curiosidade, a experimentação e o raciocínio lógico, por meio de práticas e experimentos significativos e adequados ao ano escolar, visando à formalização e à sistematização dos conhecimentos.” (BRASIL, 2024, p.152).

Figura 3 – Capa do L3



Fonte: Moderna, 2022.

A quarta coleção, “Desafios da Matemática com Ênio Silveira” (Figura 4), propõe atividades, alinhadas aos conteúdos de cada capítulo, que “buscam promover o envolvimento dos(as) estudantes na elaboração, na experimentação e na resolução de problemas, objetivando o desenvolvimento do raciocínio lógico-científico” (BRASIL, 2024, p.136).

Figura 4 – Capa do L4



Fonte: Moderna, 2022.

A abordagem da quinta coleção, “Araribá Conecta Matemática” (Figura 5), “visa fomentar uma formação com foco nos aspectos cognitivos”, estimulando o raciocínio lógico por meio de situações que envolvem investigação e colaboração (BRASIL, 2024, p.124).

Figura 5 – Capa do L5



Fonte: Moderna, 2022.

Na sexta coleção, “Matemática e Realidade” (Figura 6, “são indicadas sugestões de ações com vistas ao desenvolvimento do pensamento computacional, da capacidade de argumentação, de resolução de problemas, e sugestões de ações para a diversificação da avaliação em sala de aula.” (BRASIL, 2024, p.148).

Figura 6 – Capa do L6



Fonte: Saraiva, 2022.

Por fim, dentre os objetivos da sétima coleção, “Geração Alpha Matemática” (Figura 7), destaca-se a valorização do raciocínio lógico e da argumentação como parte do processo formativo dos(as) estudantes: “A coleção traz ainda propostas de atividades relacionadas a contextos reais e hipotéticos; projetos e investigações [...] visando mobilizar as competências gerais e específicas, as habilidades a elas vinculadas e os Temas Contemporâneos Transversais – TCTs” (BRASIL, 2024, p.140).

Figura 7 – Capa do L7



Fonte: SM, 2022.

De modo geral, as coleções analisadas procuram estimular o raciocínio lógico com propostas que envolvem desafios, investigações, uso de materiais concretos e situações do cotidiano. As atividades incentivam os alunos a pensar, argumentar e experimentar, de forma alinhada ao que a BNCC propõe para uma aprendizagem mais ativa, reflexiva e conectada à realidade.

Agora, daremos continuidade à análise com foco na habilidade EF06MA05, que propõe: “[...] determinar, através de investigações, os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.” (BRASIL, 2018, p.301).

A seguir, no quadro 4, é possível observar quais critérios estão presentes em cada um dos livros do 6º ano analisados, bem como a ordem em que são apresentados nos livros.

Quadro 4 – Critérios de divisibilidade presentes nos livros

Código	Critérios de divisibilidade
L1	2, 3, 6, 4, 8, 9, 5, 10, 100, 1000
L2	2, 3, 6, 9, 4, 8, 5, 10, 100, 1000
L3	2, 5, 10, 3, 6, 9, 4
L4	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100, 1000
L5	2, 3, 6, 9, 5, 10, 100, 1000, 4, 8
L6	2, 3, 6, 5, 4, 8, 9, 10, 7
L7	2, 5, 10, 4, 8, 3, 9, 6, 100, 1000

Fonte: Autoria nossa, 2025.

os sete livros analisados, cinco contemplam integralmente os critérios de divisibilidade previstos pela BNCC para o 6º ano. Já os demais, L3 e L6, não apresentam explicações sobre os critérios de divisibilidade por 100 e 1000. Além disso, o L3 também omite o critério de divisibilidade por 8, porém ele o aborda de forma indireta ao solicitar, no exercício 42, a elaboração de um fluxograma que represente a divisibilidade de um número natural por 8.

Contudo, considerando que os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000 se baseiam em raciocínios semelhantes, relacionados à análise das terminações numéricas no sistema decimal, entendemos que a ausência dos critérios por 100 e 1000 pode ser justificada pela sua similaridade estrutural com o critério de divisibilidade por 10.

Embora não contemple todos os critérios previstos pela BNCC, o L6 é o único que reserva um espaço para a explicação do critério de divisibilidade por 7 (Figura 8).

Figura 8 – Explicação do critério de divisibilidade por 7

Proposta para o professor

Na seção *Na mídia*, é apresentada uma proposta envolvendo o critério de divisibilidade por 7; no entanto, apresentamos aqui outra sugestão:

Um número é divisível por 7 se o dobro do seu último algarismo subtraído do número sem o último algarismo resulta em um número divisível por 7. Se a diferença ainda é grande, repetimos o processo até verificar a divisão por 7.

Exemplo 1: 176 456 é divisível por 7 pois, aplicando o critério apresentado, temos:

Número sem o último algarismo: 17 645
Dobro do último algarismo: $2 \cdot 6 = 12$

Diferença entre o número sem o último algarismo e o dobro do último algarismo: $17\,645 - 12 = 17\,633$

Como a diferença ainda é grande, repetimos sucessivamente o processo com a diferença obtida no processo anterior até que seja possível verificar se o resultado é um múltiplo de 7.

Assim, temos: $17\,633 - 6 = 17\,577$; $17\,577 - 14 = 17\,563$; $17\,563 - 6 = 17\,557$; $17\,557 - 14 = 17\,543$; $17\,543 - 6 = 17\,537$; $17\,537 - 14 = 17\,523$; $17\,523 - 6 = 17\,517$; $17\,517 - 14 = 17\,503$; $17\,503 - 6 = 17\,497$; $17\,497 - 14 = 17\,483$; $17\,483 - 6 = 17\,477$; $17\,477 - 14 = 17\,463$; $17\,463 - 6 = 17\,457$; $17\,457 - 14 = 17\,443$; $17\,443 - 6 = 17\,437$; $17\,437 - 14 = 17\,423$; $17\,423 - 6 = 17\,417$; $17\,417 - 14 = 17\,403$; $17\,403 - 6 = 17\,397$; $17\,397 - 14 = 17\,383$; $17\,383 - 6 = 17\,377$; $17\,377 - 14 = 17\,363$; $17\,363 - 6 = 17\,357$; $17\,357 - 14 = 17\,343$; $17\,343 - 6 = 17\,337$; $17\,337 - 14 = 17\,323$; $17\,323 - 6 = 17\,317$; $17\,317 - 14 = 17\,303$; $17\,303 - 6 = 17\,297$; $17\,297 - 14 = 17\,283$; $17\,283 - 6 = 17\,277$; $17\,277 - 14 = 17\,263$; $17\,263 - 6 = 17\,257$; $17\,257 - 14 = 17\,243$; $17\,243 - 6 = 17\,237$; $17\,237 - 14 = 17\,223$; $17\,223 - 6 = 17\,217$; $17\,217 - 14 = 17\,203$; $17\,203 - 6 = 17\,197$; $17\,197 - 14 = 17\,183$; $17\,183 - 6 = 17\,177$; $17\,177 - 14 = 17\,163$; $17\,163 - 6 = 17\,157$; $17\,157 - 14 = 17\,143$; $17\,143 - 6 = 17\,137$; $17\,137 - 14 = 17\,123$; $17\,123 - 6 = 17\,117$; $17\,117 - 14 = 17\,103$; $17\,103 - 6 = 17\,097$; $17\,097 - 14 = 17\,083$; $17\,083 - 6 = 17\,077$; $17\,077 - 14 = 17\,063$; $17\,063 - 6 = 17\,057$; $17\,057 - 14 = 17\,043$; $17\,043 - 6 = 17\,037$; $17\,037 - 14 = 17\,023$; $17\,023 - 6 = 17\,017$; $17\,017 - 14 = 17\,003$; $17\,003 - 6 = 16\,997$; $16\,997 - 14 = 16\,983$; $16\,983 - 6 = 16\,977$; $16\,977 - 14 = 16\,963$; $16\,963 - 6 = 16\,957$; $16\,957 - 14 = 16\,943$; $16\,943 - 6 = 16\,937$; $16\,937 - 14 = 16\,923$; $16\,923 - 6 = 16\,917$; $16\,917 - 14 = 16\,903$; $16\,903 - 6 = 16\,897$; $16\,897 - 14 = 16\,883$; $16\,883 - 6 = 16\,877$; $16\,877 - 14 = 16\,863$; $16\,863 - 6 = 16\,857$; $16\,857 - 14 = 16\,843$; $16\,843 - 6 = 16\,837$; $16\,837 - 14 = 16\,823$; $16\,823 - 6 = 16\,817$; $16\,817 - 14 = 16\,803$; $16\,803 - 6 = 16\,797$; $16\,797 - 14 = 16\,783$; $16\,783 - 6 = 16\,777$; $16\,777 - 14 = 16\,763$; $16\,763 - 6 = 16\,757$; $16\,757 - 14 = 16\,743$; $16\,743 - 6 = 16\,737$; $16\,737 - 14 = 16\,723$; $16\,723 - 6 = 16\,717$; $16\,717 - 14 = 16\,703$; $16\,703 - 6 = 16\,697$; $16\,697 - 14 = 16\,683$; $16\,683 - 6 = 16\,677$; $16\,677 - 14 = 16\,663$; $16\,663 - 6 = 16\,657$; $16\,657 - 14 = 16\,643$; $16\,643 - 6 = 16\,637$; $16\,637 - 14 = 16\,623$; $16\,623 - 6 = 16\,617$; $16\,617 - 14 = 16\,603$; $16\,603 - 6 = 16\,597$; $16\,597 - 14 = 16\,583$; $16\,583 - 6 = 16\,577$; $16\,577 - 14 = 16\,563$; $16\,563 - 6 = 16\,557$; $16\,557 - 14 = 16\,543$; $16\,543 - 6 = 16\,537$; $16\,537 - 14 = 16\,523$; $16\,523 - 6 = 16\,517$; $16\,517 - 14 = 16\,503$; $16\,503 - 6 = 16\,497$; $16\,497 - 14 = 16\,483$; $16\,483 - 6 = 16\,477$; $16\,477 - 14 = 16\,463$; $16\,463 - 6 = 16\,457$; $16\,457 - 14 = 16\,443$; $16\,443 - 6 = 16\,437$; $16\,437 - 14 = 16\,423$; $16\,423 - 6 = 16\,417$; $16\,417 - 14 = 16\,403$; $16\,403 - 6 = 16\,397$; $16\,397 - 14 = 16\,383$; $16\,383 - 6 = 16\,377$; $16\,377 - 14 = 16\,363$; $16\,363 - 6 = 16\,357$; $16\,357 - 14 = 16\,343$; $16\,343 - 6 = 16\,337$; $16\,337 - 14 = 16\,323$; $16\,323 - 6 = 16\,317$; $16\,317 - 14 = 16\,303$; $16\,303 - 6 = 16\,297$; $16\,297 - 14 = 16\,283$; $16\,283 - 6 = 16\,277$; $16\,277 - 14 = 16\,263$; $16\,263 - 6 = 16\,257$; $16\,257 - 14 = 16\,243$; $16\,243 - 6 = 16\,237$; $16\,237 - 14 = 16\,223$; $16\,223 - 6 = 16\,217$; $16\,217 - 14 = 16\,203$; $16\,203 - 6 = 16\,197$; $16\,197 - 14 = 16\,183$; $16\,183 - 6 = 16\,177$; $16\,177 - 14 = 16\,163$; $16\,163 - 6 = 16\,157$; $16\,157 - 14 = 16\,143$; $16\,143 - 6 = 16\,137$; $16\,137 - 14 = 16\,123$; $16\,123 - 6 = 16\,117$; $16\,117 - 14 = 16\,103$; $16\,103 - 6 = 16\,097$; $16\,097 - 14 = 16\,083$; $16\,083 - 6 = 16\,077$; $16\,077 - 14 = 16\,063$; $16\,063 - 6 = 16\,057$; $16\,057 - 14 = 16\,043$; $16\,043 - 6 = 16\,037$; $16\,037 - 14 = 16\,023$; $16\,023 - 6 = 16\,017$; $16\,017 - 14 = 16\,003$; $16\,003 - 6 = 15\,997$; $15\,997 - 14 = 15\,983$; $15\,983 - 6 = 15\,977$; $15\,977 - 14 = 15\,963$; $15\,963 - 6 = 15\,957$; $15\,957 - 14 = 15\,943$; $15\,943 - 6 = 15\,937$; $15\,937 - 14 = 15\,923$; $15\,923 - 6 = 15\,917$; $15\,917 - 14 = 15\,903$; $15\,903 - 6 = 15\,897$; $15\,897 - 14 = 15\,883$; $15\,883 - 6 = 15\,877$; $15\,877 - 14 = 15\,863$; $15\,863 - 6 = 15\,857$; $15\,857 - 14 = 15\,843$; $15\,843 - 6 = 15\,837$; $15\,837 - 14 = 15\,823$; $15\,823 - 6 = 15\,817$; $15\,817 - 14 = 15\,803$; $15\,803 - 6 = 15\,797$; $15\,797 - 14 = 15\,783$; $15\,783 - 6 = 15\,777$; $15\,777 - 14 = 15\,763$; $15\,763 - 6 = 15\,757$; $15\,757 - 14 = 15\,743$; $15\,743 - 6 = 15\,737$; $15\,737 - 14 = 15\,723$; $15\,723 - 6 = 15\,717$; $15\,717 - 14 = 15\,703$; $15\,703 - 6 = 15\,697$; $15\,697 - 14 = 15\,683$; $15\,683 - 6 = 15\,677$; $15\,677 - 14 = 15\,663$; $15\,663 - 6 = 15\,657$; $15\,657 - 14 = 15\,643$; $15\,643 - 6 = 15\,637$; $15\,637 - 14 = 15\,623$; $15\,623 - 6 = 15\,617$; $15\,617 - 14 = 15\,603$; $15\,603 - 6 = 15\,597$; $15\,597 - 14 = 15\,583$; $15\,583 - 6 = 15\,577$; $15\,577 - 14 = 15\,563$; $15\,563 - 6 = 15\,557$; $15\,557 - 14 = 15\,543$; $15\,543 - 6 = 15\,537$; $15\,537 - 14 = 15\,523$; $15\,523 - 6 = 15\,517$; $15\,517 - 14 = 15\,503$; $15\,503 - 6 = 15\,497$; $15\,497 - 14 = 15\,483$; $15\,483 - 6 = 15\,477$; $15\,477 - 14 = 15\,463$; $15\,463 - 6 = 15\,457$; $15\,457 - 14 = 15\,443$; $15\,443 - 6 = 15\,437$; $15\,437 - 14 = 15\,423$; $15\,423 - 6 = 15\,417$; $15\,417 - 14 = 15\,403$; $15\,403 - 6 = 15\,397$; $15\,397 - 14 = 15\,383$; $15\,383 - 6 = 15\,377$; $15\,377 - 14 = 15\,363$; $15\,363 - 6 = 15\,357$; $15\,357 - 14 = 15\,343$; $15\,343 - 6 = 15\,337$; $15\,337 - 14 = 15\,323$; $15\,323 - 6 = 15\,317$; $15\,317 - 14 = 15\,303$; $15\,303 - 6 = 15\,297$; $15\,297 - 14 = 15\,283$; $15\,283 - 6 = 15\,277$; $15\,277 - 14 = 15\,263$; $15\,263 - 6 = 15\,257$; $15\,257 - 14 = 15\,243$; $15\,243 - 6 = 15\,237$; $15\,237 - 14 = 15\,223$; $15\,223 - 6 = 15\,217$; $15\,217 - 14 = 15\,203$; $15\,203 - 6 = 15\,197$; $15\,197 - 14 = 15\,183$; $15\,183 - 6 = 15\,177$; $15\,177 - 14 = 15\,163$; $15\,163 - 6 = 15\,157$; $15\,157 - 14 = 15\,143$; $15\,143 - 6 = 15\,137$; $15\,137 - 14 = 15\,123$; $15\,123 - 6 = 15\,117$; $15\,117 - 14 = 15\,103$; $15\,103 - 6 = 15\,097$; $15\,097 - 14 = 15\,083$; $15\,083 - 6 = 15\,077$; $15\,077 - 14 = 15\,063$; $15\,063 - 6 = 15\,057$; $15\,057 - 14 = 15\,043$; $15\,043 - 6 = 15\,037$; $15\,037 - 14 = 15\,023$; $15\,023 - 6 = 15\,017$; $15\,017 - 14 = 15\,003$; $15\,003 - 6 = 14\,997$; $14\,997 - 14 = 14\,983$; $14\,983 - 6 = 14\,977$; $14\,977 - 14 = 14\,963$; $14\,963 - 6 = 14\,957$; $14\,957 - 14 = 14\,943$; $14\,943 - 6 = 14\,937$; $14\,937 - 14 = 14\,923$; $14\,923 - 6 = 14\,917$; $14\,917 - 14 = 14\,903$; $14\,903 - 6 = 14\,897$; $14\,897 - 14 = 14\,883$; $14\,883 - 6 = 14\,877$; $14\,877 - 14 = 14\,863$; $14\,863 - 6 = 14\,857$; $14\,857 - 14 = 14\,843$; $14\,843 - 6 = 14\,837$; $14\,837 - 14 = 14\,823$; $14\,823 - 6 = 14\,817$; $14\,817 - 14 = 14\,803$; $14\,803 - 6 = 14\,797$; $14\,797 - 14 = 14\,783$; $14\,783 - 6 = 14\,777$; $14\,777 - 14 = 14\,763$; $14\,763 - 6 = 14\,757$; $14\,757 - 14 = 14\,743$; $14\,743 - 6 = 14\,737$; $14\,737 - 14 = 14\,723$; $14\,723 - 6 = 14\,717$; $14\,717 - 14 = 14\,703$; $14\,703 - 6 = 14\,697$; $14\,697 - 14 = 14\,683$; $14\,683 - 6 = 14\,677$; $14\,677 - 14 = 14\,663$; $14\,663 - 6 = 14\,657$; $14\,657 - 14 = 14\,643$; $14\,643 - 6 = 14\,637$; $14\,637 - 14 = 14\,623$; $14\,623 - 6 = 14\,617$; $14\,617 - 14 = 14\,603$; $14\,603 - 6 = 14\,597$; $14\,597 - 14 = 14\,583$; $14\,583 - 6 = 14\,577$; $14\,577 - 14 = 14\,563$; $14\,563 - 6 = 14\,557$; $14\,557 - 14 = 14\,543$; $14\,543 - 6 = 14\,537$; $14\,537 - 14 = 14\,523$; $14\,523 - 6 = 14\,517$; $14\,517 - 14 = 14\,503$; $14\,503 - 6 = 14\,497$; $14\,497 - 14 = 14\,483$; $14\,483 - 6 = 14\,477$; $14\,477 - 14 = 14\,463$; $14\,463 - 6 = 14\,457$; $14\,457 - 14 = 14\,443$; $14\,443 - 6 = 14\,437$; $14\,437 - 14 = 14\,423$; $14\,423 - 6 = 14\,417$; $14\,417 - 14 = 14\,403$; $14\,403 - 6 = 14\,397$; $14\,397 - 14 = 14\,383$; $14\,383 - 6 = 14\,377$; $14\,377 - 14 = 14\,363$; $14\,363 - 6 = 14\,357$; $14\,357 - 14 = 14\,343$; $14\,343 - 6 = 14\,337$; $14\,337 - 14 = 14\,323$; $14\,323 - 6 = 14\,317$; $14\,317 - 14 = 14\,303$; $14\,303 - 6 = 14\,297$; $14\,297 - 14 = 14\,283$; $14\,283 - 6 = 14\,277$; $14\,277 - 14 = 14\,263$; $14\,263 - 6 = 14\,257$; $14\,257 - 14 = 14\,243$; $14\,243 - 6 = 14\,237$; $14\,237 - 14 = 14\,223$; $14\,223 - 6 = 14\,217$; $14\,217 - 14 = 14\,203$; $14\,203 - 6 = 14\,197$; $14\,197 - 14 = 14\,183$; $14\,183 - 6 = 14\,177$; $14\,177 - 14 = 14\,163$; $14\,163 - 6 = 14\,157$; $14\,157 - 14 = 14\,143$; $14\,143 - 6 = 14\,137$; $14\,137 - 14 = 14\,123$; $14\,123 - 6 = 14\,117$; $14\,117 - 14 = 14\,103$; $14\,103 - 6 = 14\,097$; $14\,097 - 14 = 14\,083$; $14\,083 - 6 = 14\,077$; $14\,077 - 14 = 14\,063$; $14\,063 - 6 = 14\,057$; $14\,057 - 14 = 14\,043$; $14\,043 - 6 = 14\,037$; $14\,037 - 14 = 14\,023$; $14\,023 - 6 = 14\,017$; $14\,017 - 14 = 14\,003$; $14\,003 - 6 = 13\,997$; $13\,997 - 14 = 13\,983$; $13\,983 - 6 = 13\,977$; $13\,977 - 14 = 13\,963$; $13\,963 - 6 = 13\,957$; $13\,957 - 14 = 13\,943$; $13\,943 - 6 = 13\,937$; $13\,937 - 14 = 13\,923$; $13\,923 - 6 = 13\,917$; $13\,917 - 14 = 13\,903$; $13\,903 - 6 = 13\,897$; $13\,897 - 14 = 13\,883$; $13\,883 - 6 = 13\,877$; $13\,877 - 14 = 13\,863$; $13\,863 - 6 = 13\,857$; $13\,857 - 14 = 13\,843$; $13\,843 - 6 = 13\,837$; $13\,837 - 14 = 13\,823$; $13\,823 - 6 = 13\,817$; $13\,817 - 14 = 13\,803$; $13\,803 - 6 = 13\,797$; $13\,797 - 14 = 13\,783$; $13\,783 - 6 = 13\,777$; $13\,777 - 14 = 13\,763$; $13\,763 - 6 = 13\,757$; $13\,757 - 14 = 13\,743$; $13\,743 - 6 = 13\,737$; $13\,737 - 14 = 13\,723$; $13\,723 - 6 = 13\,717$; $13\,717 - 14 = 13\,703$; $13\,703 - 6 = 13\,697$; $13\,697 - 14 = 13\,683$; $13\,683 - 6 = 13\,677$; $13\,677 - 14 = 13\,663$; $13\,663 - 6 = 13\,657$; $13\,657 - 14 = 13\,643$; $13\,643 - 6 = 13\,637$; $13\,637 - 14 = 13\,623$; $13\,623 - 6 = 13\,617$; $13\,617 - 14 = 13\,603$; $13\,603 - 6 = 13\,597$; $13\,597 - 14 = 13\,583$; $13\,583 - 6 = 13\,577$; $13\,577 - 14 = 13\,563$; $13\,563 - 6 = 13\,557$; $13\,557 - 14 = 13\,543$; $13\,543 - 6 = 13\,537$; $13\,537 - 14 = 13\,523$; $13\,523 - 6 = 13\,517$; $13\,517 - 14 = 13\,503$; $13\,503 - 6 = 13\,497$; $13\,497 - 14 = 13\,483$; $13\,483 - 6 = 13\,477$; $13\,477 - 14 = 13\,463$; $13\,463 - 6 = 13\,457$; $13\,457 - 14 = 13\,443$; $13\,443 - 6 = 13\,437$; $13\,437 - 14 = 13\,423$; $13\,423 - 6 = 13\,417$; $13\,417 - 14 = 13\,403$; $13\,403 - 6 = 13\,397$; $13\,397 - 14 = 13\,383$; $13\,383 - 6 = 13\,377$; $13\,377 - 14 = 13\,363$; $13\,363 - 6 = 13\,357$; $13\,357 - 14 = 13\,343$; $13\,343 - 6 = 13\,337$; $13\,337 - 14 = 13\,323$; $13\,323 - 6 = 13\,317$; $13\,317 - 14 = 13\,303$; $13\,303 - 6 = 13\,297$; $13\,297 - 14 = 13\,283$; $13\,283 - 6 = 13\,277$; $13\,277 - 14 = 13\,263$; $13\,263 - 6 = 13\,257$; $13\,257 - 14 = 13\,243$; $13\,243 - 6 = 13\,237$; $13\,237 - 14 = 13\,223$; $13\,223 -$

Figura 9 – Notícia sobre a descoberta de um critério de divisibilidade por 7

Menino de 12 anos descobre regra de divisibilidade por 7

O jovem nigeriano Chika Ofili, de 12 anos, descobriu [em 2019] uma fórmula matemática que facilita o estudo da divisão. A descoberta permite mostrar rapidamente se um número [...] é divisível por sete. Para isso, basta pegar o último dígito de qualquer número, multiplicar por 5 e adicionar à parte restante, assim terá um novo número obtido. Se esse novo número é divisível por 7, o número original é divisível por 7.

[...]

A professora Miss Mary Ellis, também chefe do departamento de matemática da *Westminster Under School*, escola de Londres, em que Chika estuda, disse em um artigo no jornal educacional que o aluno descobriu a fórmula após um trabalho passado para as férias.

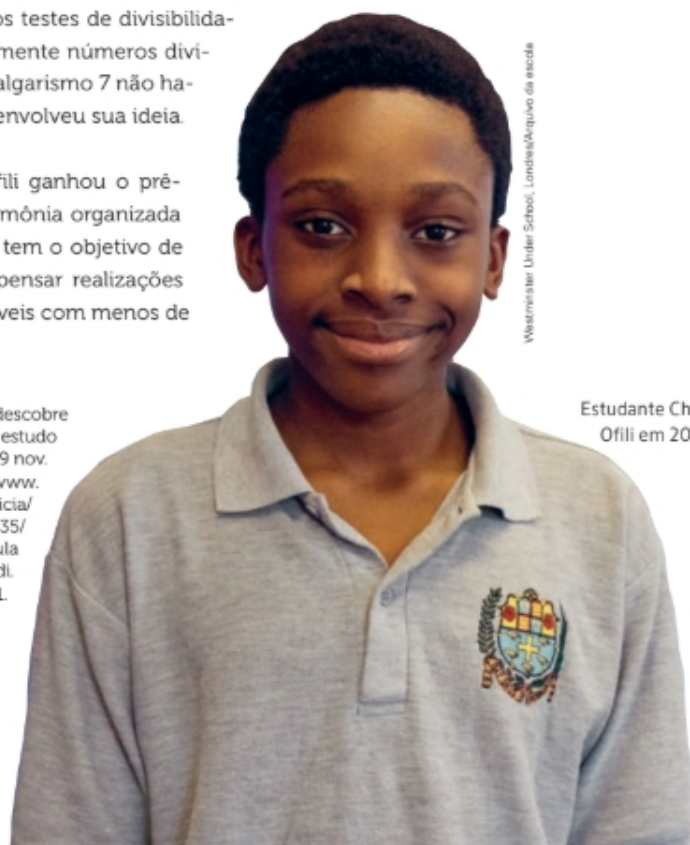
No trabalho, Chika teve que estudar o livro *First steps for problem solvers*, em tradução livre, Primeiros passos para resolvidores de problemas, publicado pela United Kingdom Mathematics Trust (UKMT). No livro, são apresentados testes de divisibilidade usados para solucionar rapidamente números divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, mas o algarismo 7 não havia teste simples, assim Chika desenvolveu sua ideia.

[...]

Graças à descoberta, Chika Ofili ganhou o prêmio *TruLittle Hero Awards*, na cerimônia organizada pela Cause4Children Limited, que tem o objetivo de reconhecer, comemorar e recompensar realizações notáveis de crianças e jovens notáveis com menos de 17 anos no Reino Unido.

[...]

PESTANA, Lucas. Menino de 12 anos descobre fórmula matemática que ajuda o estudo da divisão. *Correio Braziliense*, 19 nov. 2019. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/mundo/2019/11/19/interna_mundo,807535/menino-de-12-anos-descobre-formula-matematica-que-ajuda-o-estudo-da-divisao. Acesso em: 2 dez. 2021.



Westminster Under School, Londres/Arquivo da escola

Estudante Chika Ofili em 2019.

Fonte: Matemática e Realidade, 6º ano - Saraiva, 2022, p.127.

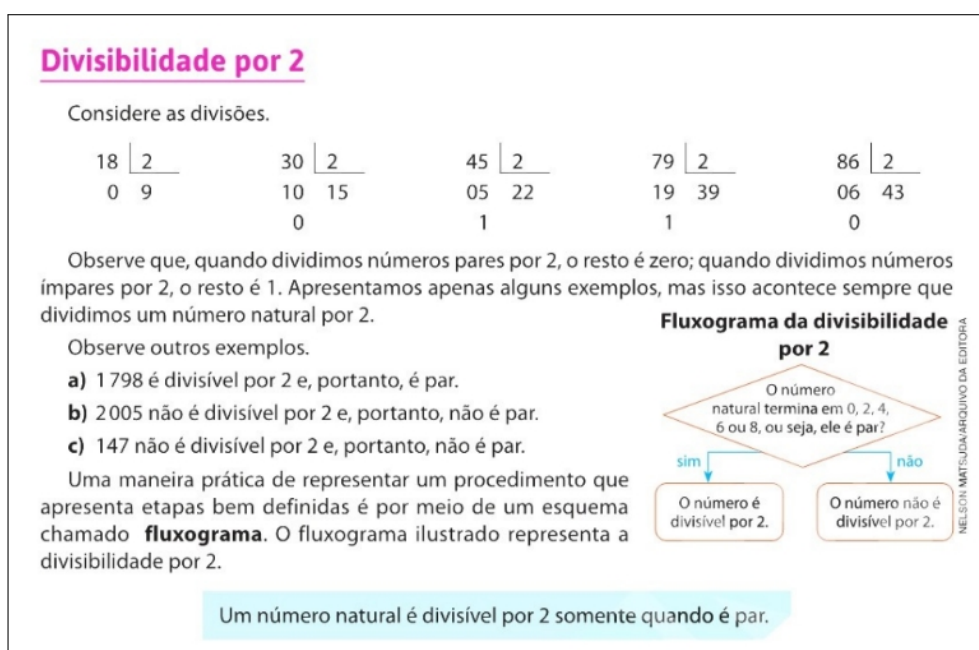
4.2 REFLEXOS DO RACIOCÍNIO LÓGICO NOS LIVROS ANALISADOS

Nesta seção, são apresentados os critérios de divisibilidade que são comuns às orientações da BNCC, em consonância com as características dos tipos de raciocínios conforme explicam

Reid e Knipping. Os critérios foram organizados em uma ordem lógica visando favorecer melhor compreensão do tema. Selecionamos uma explicação por livro didático, a menos de L4 no qual foram escolhidos duas explicações, de modo a ilustrar suas propostas sem perder a diversidade de raciocínios presentes nas obras.

A abordagem do critério de divisibilidade por 2 nos livros didáticos analisados é construída a partir de exemplos e da distinção entre números pares e ímpares (Figura 10). Os livros apresentam inicialmente uma sequência de números, levando o estudante a observar que todos esses números possuem uma característica comum: terminam em algarismos pares. A partir dessa observação reiterada, o estudante é induzido a perceber um padrão, o que favorece a formulação da regra geral de maneira intuitiva, ou seja, conclui-se que um número é divisível por 2 se, e somente se, for par.

Figura 10 – Critério de divisibilidade por 2



Fonte: Matemática Bianchini, 6º ano - Moderna, 2022, p.92.

Esse processo caracteriza-se como um raciocínio indutivo, em que, por meio da repetição e análise de exemplos concretos, o estudante constrói a generalização da regra. Além disso, ao recorrer aos conceitos de paridade, os livros exploram conhecimentos já familiares ao estudante, facilitando a compreensão do critério. Além disso, alguns livros complementam essa abordagem com o algoritmo da divisão, mostrando que, ao dividir um número par por 2, o quociente é inteiro e o resto é zero.

Ao explicar o critério de divisibilidade por 3 os livros também utilizam o raciocínio indutivo

como principal estratégia. Por meio de exemplos, apresentam números já divisíveis por 3 e solicitam que o estudante some seus algarismos, observando que o resultado também é divisível por 3. A partir dessa repetição, espera-se que o estudante perceba o padrão e compreenda a generalização da regra: um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos também for. Embora o Livro 1 não apresente múltiplos exemplos, ele deixa claro ao leitor que o padrão observado, a divisão exata de um número natural por 3, se mantém em todos os casos (Figura 11).

Figura 11 – Critério de divisibilidade por 3

DIVISIBILIDADE POR 3

Vamos verificar se 62124 é divisível por 3.
Fazendo a divisão:

62124	3	
021	20708	
024		
0		

62124 é divisível por 3.

Vamos conhecer outra forma de verificar se 62124 é divisível por 3.
Primeiro, adicionamos os algarismos de 62124 e, em seguida, dividimos a soma por 3.

$6 + 2 + 1 + 2 + 4 = 15$	15	3
	0	5

Observe que as duas divisões são exatas.
Esse fato se repete sempre que a divisão de um número natural por 3 for exata. Então, dizemos que:

Um número será divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for um número divisível por 3.

Assim:

- 7092 é divisível por 3, pois $7 + 0 + 9 + 2 = 18$, e 18 é divisível por 3.
- 6413 não é divisível por 3, pois $6 + 4 + 1 + 3 = 14$, e 14 não é divisível por 3.

Fonte: A Conquista Matemática, 6º ano - FTD, 2022, p.107.

A metodologia empregada por L1 para explicar o critério de divisibilidade por 3, utiliza exemplos numéricos comuns, recorrendo ao algoritmo da divisão de Euclides como aporte teórico.

No Quadro 4 é visto que 4 livros optam por apresentar o critério de divisibilidade por 6 imediatamente após a explicação dos critérios de divisibilidade por 2 e 3. Assim, ao adotar essa sequência, as obras podem favorecer uma compreensão mais plena do assunto proposto, já que o estudante é induzido a perceber que um número só será divisível por 6 se atender simultaneamente às condições de divisibilidade por 2 e 3.

Esse tipo de sequência se apresenta como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas

e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”, uma vez que não apenas organiza os conteúdos de forma lógica, mas também os articula de maneira intencional para alcançar objetivos claros de aprendizagem (ZABALA, 1998, p.18 *apud* UGALDE; ROWEDER, 2020, P.2).

Figura 12 – Critério de divisibilidade por 6

Divisibilidade por 6

No quadro a seguir, os múltiplos de 2 estão destacados com um traço **vermelho** na parte inferior e os múltiplos de 3, com um traço **verde**. Observe.

<u>0</u>	1	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	<u>9</u>
<u>10</u>	11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19
<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>	23	<u>24</u>	25	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	29
<u>30</u>	31	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	35	<u>36</u>	37	<u>38</u>	<u>39</u>
<u>40</u>	41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	<u>45</u>	<u>46</u>	47	<u>48</u>	49
<u>50</u>	<u>51</u>	<u>52</u>	53	<u>54</u>	55	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	59
<u>60</u>	61	<u>62</u>	<u>63</u>	<u>64</u>	65	<u>66</u>	67	<u>68</u>	<u>69</u>
<u>70</u>	71	<u>72</u>	73	<u>74</u>	<u>75</u>	<u>76</u>	77	<u>78</u>	79
<u>80</u>	<u>81</u>	<u>82</u>	83	<u>84</u>	85	<u>86</u>	<u>87</u>	<u>88</u>	89
<u>90</u>	91	<u>92</u>	<u>93</u>	<u>94</u>	95	<u>96</u>	97	<u>98</u>	<u>99</u>

Agora, vamos organizar em ordem crescente os números que apresentam traço vermelho e traço verde ao mesmo tempo.

0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96

Você notou que esses números fazem parte da sequência dos múltiplos de 6? **Resposta pessoal.**

Ao observar essa sequência, podemos notar um padrão: se um número é múltiplo de 2 e de 3 ao mesmo tempo, ele também é múltiplo de 6. Assim, para verificar se um número natural é divisível por 6, é preciso verificar se ele é múltiplo de 2 e de 3 ao mesmo tempo. Se isso ocorrer, então ele é divisível por 6.

Veja um esquema que permite verificar se um número é divisível por 6.

```

graph TD
    A[Número dado] --> B{Esse número é par?}
    B -- Não --> C[O número não é divisível por 6.]
    B -- Sim --> D{A soma dos algarismos desse número é um múltiplo de 3?}
    D -- Não --> C
    D -- Sim --> E[O número é divisível por 6.]
  
```

Você faria um esquema diferente para verificar se um número é divisível por 6? Converse com os colegas e o professor.
Resposta pessoal.

PAUSE E REFLETA

Um número ímpar pode ser divisível por 6?

Não, pois um número ímpar não é divisível por 2.

Fonte: Geração Alpha matemática, 6º ano - SM, 2022, p.115.

O processo de análise de casos particulares, seguido da generalização da regra, exemplifica o que Reid e Knipping (2010) descrevem como um raciocínio baseado em padrões e regularidades, indutivo, no qual a formulação de conjecturas precede uma eventual formalização dedutiva. Assim, ao conduzir o aluno a descobrir que a divisibilidade por 6 é uma consequência

direta da combinação de outros dois critérios, os materiais favorecem uma aprendizagem mais investigativa, em que o conhecimento é construído a partir da experiência e reflexão sobre o assunto estudado.

O critério de divisibilidade por 4 é usualmente introduzido nos livros didáticos a partir de observações ou perguntas que induzem que um número será divisível por 4 se os dois últimos algarismos formarem um número divisível por esse mesmo divisor (Figura 13). Da mesma forma, o critério para 8 segue uma lógica análoga, porém considerando os três últimos algarismos, como mostrado na Figura 14.

Figura 13 – Critério de divisibilidade por 4

Critério de divisibilidade por 4
Observe alguns números divisíveis por 4 a partir do 100.

100	104	108	112	116	120	124	128
132	136	140	144	148	152	156	160
164	168	172	176	180	184	188	192
196	200	204	208	212	216	220	224

Para analisar Para analisar: Respostas e comentários em *Orientações*.

- Os dois dígitos destacados em azul em cada número divisível por 4 acima formam um número. Esse número é divisível por 4?
- E os números que terminam em 00, são divisíveis por 4?
- Suas observações sugerem qual critério para saber se um número natural é divisível por 4?

Fonte: Araribá Conecta Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.103.

Figura 14 – Critério de divisibilidade por 8

Um número natural maior do que 1000 é divisível por 8 quando os 3 últimos algarismos formam um número divisível por 8.

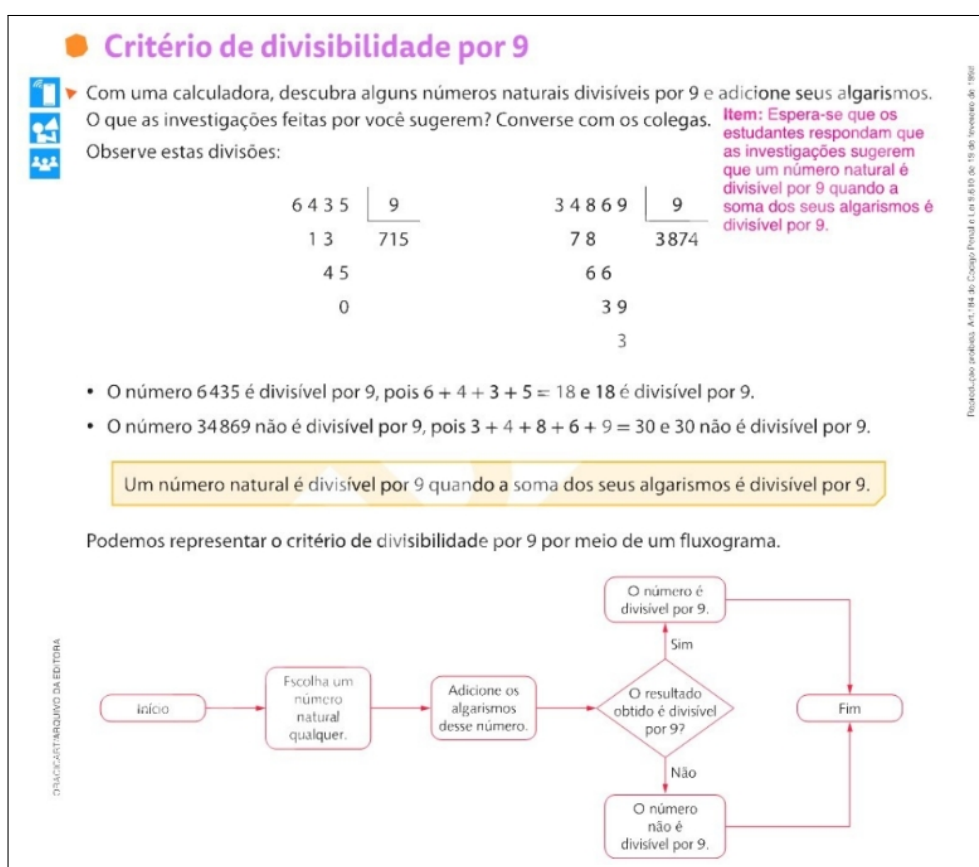
Fonte: Matemática e Realidade, 6º ano - Saraiva, 2022, p.126.

Em ambos os casos, prevalece o uso do raciocínio indutivo, já que, após a repetição de exemplos e a identificação de padrões, a regra é apresentada ao estudante como uma generalização decorrente dessas observações. No caso do critério apresentado pela Figura 14, ele só é apresentado após a realização de alguns exercícios, possibilitando a observação de regularidades nos resultados obtidos. À medida que os estudantes identificam que, em todos os exemplos resolvidos, os números cujos três últimos algarismos formam um número divisível por 8 também são divisíveis por 8, constrói-se uma generalização empírica. Assim, a construção do conhecimento

permanece no campo da experiência empírica, sem transição para um raciocínio dedutivo mais estruturado.

O critério de divisibilidade por 9, semelhante ao por 3, destaca que um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é também divisível por 9. Nos livros analisados a explicação se limita à observação de exemplos que permitem ao aluno identificar o padrão de maneira intuitiva, usufruindo mais uma vez do algoritmo da divisão como analogia para explicar o critério, sem recorrer a justificativas formais, como pode-se ver na Figura 15.

Figura 15 – Critério de divisibilidade por 9



Fonte: Desafios da Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.108.

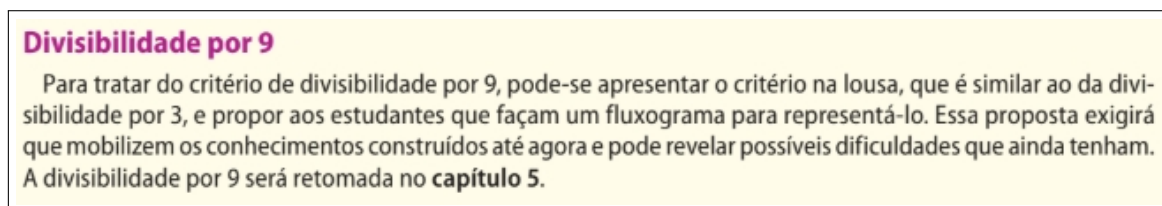
O fluxograma apresentado na Figura 15 organiza o critério referido de forma sequencial, contribuindo para a compreensão do processo por meio de etapas lógicas. Esse recurso didático transforma o raciocínio verbal em um esquema estruturado, em que cada decisão conduz a um próximo passo, reforçando de forma estruturada o raciocínio matemático (SILVA, 2020). Sua construção parte do raciocínio abdutivo.

Percebemos que essa abordagem dialoga diretamente com as competências e habilidades previstas pela BNCC, segundo a habilidade EF06MA04, especialmente aquelas que incenti-

vam o uso de diferentes representações para compreender conceitos matemáticos e resolver problemas. A habilidade EF06MA06 propõe o reconhecimento e a aplicação dos critérios em diferentes contextos. Ademais, a construção e análise de fluxogramas mantém-se como única abordagem envolvendo recursos didáticos proposta nos livros analisados. Essa limitação contraria as diretrizes da BNCC, que orienta a promoção de múltiplas formas de raciocínio para ampliar a compreensão conceitual e o pensamento crítico dos estudantes.

Indo além do raciocínio indutivo, L3 se destaca por ser o único livro que, dentre os analisados, destina um espaço a explicar com rigor matemático o critério de divisibilidade por 9. A demonstração encontra-se no Capítulo 5, intitulado *Um pouco de álgebra*, na seção *Validando informações*. A Figura 16 apresenta o direcionamento para a seção referida que contém a demonstração do critério de divisibilidade por 9 para números com quatro algarismos.

Figura 16 – Direcionamento para a demonstração do critério de divisibilidade por 9



Fonte: Matemática Bianchini, 6º ano - Moderna, 2022, p.95.

Os argumentos apresentados na Figura 17 ilustram claramente o raciocínio dedutivo para números com quatro algarismos, já que este “é considerado como um meio de estabelecer certeza”, no qual se parte de uma hipótese específica para chegar à validação da tese, sem depender apenas da observação de exemplos (REID;KNIPPING, 2010, p.87).

Figura 17 – Demonstração do critério de divisibilidade por 9

Lembre-se: se as duas parcelas de uma soma forem divisíveis por um número, então essa soma também será divisível por esse número.

$$\begin{aligned}
 abcd &= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d \\
 abcd &= (999 + 1) \cdot a + (99 + 1) \cdot b + (9 + 1) \cdot c + d \\
 abcd &= 999 \cdot a + 1 \cdot a + 99 \cdot b + 1 \cdot b + 9 \cdot c + 1 \cdot c + d \\
 abcd &= 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c + (a + b + c + d) \\
 abcd &= 9 \cdot (111 \cdot a + 11 \cdot b + c) + (a + b + c + d)
 \end{aligned}$$

parcela divisível por 9 outra parcela

Para quaisquer valores de a, b, c e d , a primeira parcela é divisível por 9 porque ela é um número múltiplo de 9. Se a outra parcela $(a + b + c + d)$, que é a soma dos valores absolutos dos algarismos, também for, então a soma delas, isto é, o número $abcd$, será divisível por 9.

Assim, fica demonstrado que:

Quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de um número de quatro algarismos é divisível por 9, esse número é divisível por 9.

Para um número com mais ou com menos algarismos, o procedimento é o mesmo.

Por exemplo, 42507 é divisível por 9 porque $4 + 2 + 5 + 0 + 7 = 18$, que é divisível por 9. Verifique efetuando a divisão de 42507 por 9.



Fonte: Matemática Bianchini, 6º ano - Moderna, 2022, p.112.

Ao adotar essa abordagem, a obra permite que o estudante compreenda não apenas que a regra funciona, mas também por que ela é verdadeira. Mesmo limitando a demonstração a números de quatro algarismos, a preocupação em tê-la colocado no livro mostra a preocupação em introduzir um pouco o estudante ao rigor matemático envolvido nos critérios de divisibilidade.

O critério de divisibilidade por 5 é um dos mais intuitivos. A regra é geralmente apresentada de forma indutiva, por meio da observação de diversos múltiplos de 5, o que permite ao estudante perceber o padrão: números terminados em 0 ou 5 são sempre divisíveis por 5. De modo geral, todos os livros analisados trazem listas de números com destaque visual para o algarismo final, favorecendo a identificação do padrão e estimulando a percepção dos estudantes. Enquanto a obra L4 se diferencia por apresentar detalhes das divisões por meio do algoritmo da divisão, a obra L2 (Figura 18) busca motivar o estudante, por meio de perguntas, a identificar regularidades a partir da repetição sistemática de exemplos, conduzindo-o à generalização da regra.

Figura 18 – Critério de divisibilidade por 5

Divisibilidade por 5

Considere a sequência a seguir dos múltiplos naturais de 5.

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...

Questão 18. Escreva no caderno os próximos três números dessa sequência.
Questão 18. Resposta: 50, 55 e 60.

Questão 19. Os números 95 e 100 pertencem a essa sequência? E o número 108? Justifique sua resposta.
Questão 19. Respostas: Sim, pois as divisões de 95 e de 100 por 5 são exatas. Não, pois a divisão de 108 por 5 não é exata.

Questão 20. O que podemos perceber em relação ao algarismo das unidades dos números dessa sequência?
Questão 20: Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é sempre 0 ou 5.

Questão 21. Copie no caderno e complete a frase a seguir substituindo as letras A e B pelos algarismos corretos.

Um número natural é divisível por 5 quando o algarismo da unidade for A ou B.

Questão 21. Resposta: Um número natural será divisível por 5 quando o algarismo da unidade for 0 ou 5.

Fonte: SuperAÇÃO: Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.78.

Diferente dos critérios de divisibilidade por 3 ou 9, que exigem uma análise mais acentuada (a soma dos algarismos), o padrão dos múltiplos de 5 está diretamente associado à estrutura final do número. Essa regularidade confirma que a indução ocorre em diferentes níveis de complexidade, sempre partindo da experiência concreta para a formulação de uma regra geral, conforme afirmam Reid e Knipping (2010).

Os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000 são apresentados de forma conjunta na maioria dos livros analisados, pois compartilham uma lógica semelhante vinculada à estrutura do sistema decimal, como vê-se na Figura 19:

Figura 19 – Critério de divisibilidade por 10, 100 e 1000

● Critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000

Observe o quadro abaixo.

Números divisíveis por 10	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, ...
Números divisíveis por 100	100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000, 1 100, ...
Números divisíveis por 1 000	1 000, 2 000, 3 000, 4 000, 5 000, 6 000, 7 000, 8 000, 9 000, 10 000, 11 000, ...

Primeiro item: Espera-se que os estudantes percebam que os números divisíveis por 10 terminam em 0, os números divisíveis por 100 terminam em 00 e os números divisíveis por 1 000 terminam em 000.

Segundo item: Um número natural é divisível por 10 se terminar em 0, é divisível por 100 se terminar em 00 e é divisível por 1 000 se terminar em 000.

Que padrão você observa nos números divisíveis por 10 acima? E nos números divisíveis por 100? E nos divisíveis por 1 000?

O padrão que você observou anteriormente sugere os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1 000. Escreva esses critérios em seu caderno.

Fonte: Desafios da Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.109.

Novamente contata-se a presença do raciocínio indutivo, em que esse não se dá apenas pela

observação repetida, mas pela percepção de um crescimento lógico na regra, mostrando que o critério para números maiores decorre do número anterior, reforçando a ideia de estruturação gradual do conhecimento por meio da identificação de padrões.

Diante do exposto, percebe-se que os livros didáticos analisados apresentam os critérios de divisibilidade de forma predominantemente intuitiva, priorizando exemplos e atividades que permitem o estudante a identificar padrões e construir regras por meio do raciocínio indutivo, como explicam Reid e Knipping (2010).

4.3 OS RACIOCÍNIOS INCENTIVADOS PELAS ATIVIDADES

Nessa seção, buscamos identificar questões presentes nos livros didáticos que mobilizam os diferentes raciocínios matemáticos sob a perspectiva exposta por Reid e Knipping (2010). Embora a metodologia inicial não previsse um levantamento quantitativo, julgamos relevante apresentar um levantamento do número total de questões relacionadas ao tema. O Quadro 5 apresenta a distribuição de questões estudadas, por obra:

Quadro 5 – Distribuição de questões sobre critérios de divisibilidade por livro didático

Livro	Quantidade de questões
L1	9
L2	53
L3	17
L4	17
L5	15
L6	28
L7	16
Total	155

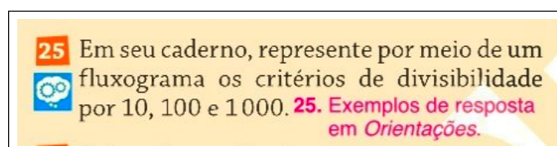
Fonte: Autoria nossa, 2025.

Destaca-se, no Quadro 5, o número significativamente elevado de questões presentes no Livro 2, que totaliza 53 atividades relacionadas aos critérios de divisibilidade. Esse volume expressivo se justifica pelo fato de que a obra, ao abordar cada critério, apresenta sequências de três a quatro questões que convidam o estudante a observar padrões em listas de números divisíveis pelo número em questão.

Apresentaremos algumas questões que podem mobilizar os raciocínios trabalhados por Reid e Knipping, especialmente o raciocínio indutivo, que envolve a identificação de padrões e a generalização a partir de exemplos. Inicialmente, destacamos duas questões que exploram esse tipo de pensamento.

A primeira atividade propõe a construção de um fluxograma que represente os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000 (Figura 20). Como o livro já apresentou diversos fluxogramas em seções anteriores, o aluno terá modelos para se orientar. Além disso, é fornecida uma lista de números para que o estudante observe o padrão e confirme os critérios antes de elaborar o diagrama. Construindo assim a generalização a partir de casos particulares, característica central do raciocínio indutivo.

Figura 20 – Questão sobre os critérios de divisibilidade por 10, 100 e 1000 extraída do Livro 4



Fonte: Desafios de Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.109.

A segunda questão (Figura 21) também mobiliza o raciocínio indutivo, mas em vez de um fluxograma, apresenta uma lista de exercícios com números para que o aluno identifique padrões e formule intuitivamente o critério de divisibilidade por 10.

Figura 21 – Questão sobre o critério de divisibilidade por 10 extraída do Livro 2

Divisibilidade por 10

Considere a sequência numérica a seguir dos múltiplos naturais de 10.

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, ...

Questão 22. Qual é o próximo número dessa sequência? *Questão 22. Resposta: 110.*

Questão 23. Escreva no caderno um número que pertence a essa sequência e outro que não pertence a ela. *Questão 23. Sugestão de resposta: 120; 131.*

Questão 24. Escreva no caderno algumas multiplicações de um número natural por 10. *Questão 24. Sugestões de resposta: $6 \cdot 10 = 60$; $8 \cdot 10 = 80$; $13 \cdot 10 = 130$.*

Questão 25. Todos os resultados dessas multiplicações são divisíveis por um mesmo número natural. Que número é esse? *Questão 25. Resposta: 10.*

Questão 26. O que podemos perceber em relação ao algarismo das unidades dos múltiplos de 10?

Questão 27. Copie no caderno a frase a seguir substituindo a letra A pelo algarismo correto.

Questão 26. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o algarismo das unidades é sempre 0.

Um número natural é divisível por 10 quando o algarismo da unidade for A.

Questão 27. Resposta: Um número natural é divisível por 10 quando o algarismo da unidade for 0.

Fonte: SuperAÇÃO: Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.79.

Diferentemente das demais questões analisadas, a da Figura 22 mobiliza o raciocínio dedutivo, pois parte de uma proposição já validada para chegar a uma conclusão geral sobre todos os números terminados em 000. Nessa atividade, não é necessário que o estudante realize testes repetitivos para verificar a veracidade do enunciado; ainda assim, a manipulação de exemplos

numéricos pode contribuir para a formulação e aplicação da lógica formal. Espera-se, assim, que o estudante recorra a conhecimentos prévios como base para deduzir a resposta solicitada.

Figura 22 – Questão sobre os critérios de divisibilidade por 8 extraída do Livro 6

33. O número 1000 é divisível por 8. Podemos provar esse fato fazendo a divisão. Sabendo disso, sem efetuar a divisão, explique por que todo número terminado em 000 é divisível por 8.

Como 1000 é divisível por 8, todo número terminado em 000 também é, porque é obtido adicionando parcelas de 1000.

1000	8
20	125
40	
0	

Fonte: Matemática e Realidade, 6º ano - Saraiva, 2022, p.125.

Ao retratar questões desse tipo, o livro estimula a capacidade argumentativa dos estudantes, junto ao desenvolvimento da habilidade de concluir matematicamente seus argumentos.

A próxima questão (Figura 23) permite que o estudante explore combinações de critérios de divisibilidade. Além disso, essa tarefa, de caráter semiaberto, permite diferentes abordagens de resolução, o que amplia suas possibilidades pedagógicas.

Figura 23 – Questão sobre os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5 extraída do Livro 5



6. Elabore uma atividade em que um número deve ser divisível por 2, por 3 e por 5.

6. Resposta pessoal.

Fonte: Araribá Conecta Matemática, 6º ano - Moderna, 2022, p.106.

Caso o aluno opte por identificar todos os números que satisfazem a condição proposta, elaborando uma regra geral que permita reconhecer outros números divisíveis por 2, 3 e 5, essa abordagem amplia as possibilidades de raciocínio. Nesse processo, o estudante pode transitar entre diferentes raciocínios: o indutivo, ao pensar em exemplos e padrões; o raciocínio por analogia, ao relacionar a nova situação com exemplos previamente estudados; o abduutivo, ao levantar hipóteses plausíveis para compor uma atividade que atenda simultaneamente aos três critérios de divisibilidade; por último, o dedutivo, ao estruturar uma justificativa lógica para a validade da atividade criada.

De modo geral, os casos apresentados nos livros optam por exigir do estudante o raciocínio indutivo, enquanto apenas algumas situações mais específicas surgem propostas que alternam entres os raciocínio dedutivo.

4.4 MATERIAIS CONCRETOS: PRESENÇA OU AUSÊNCIA

O mapeamento proposto no objetivo específico (3) buscou identificar, nos livros analisados, indícios de uso de materiais concretos que pudessem apoiar o processo de ensino e aprendizagem dos critérios de divisibilidade. No entanto, não foram encontradas propostas que sugerissem o uso de materiais manipuláveis. O único recurso identificado com potencial didático foram os fluxogramas. No entanto, trata-se de um recurso estático, que não se enquadra na categoria de material manipulável, conforme definido por Lorenzato (2006).

Essa ausência de materiais manipuláveis nas coleções analisadas revela uma limitação no tratamento didático do conteúdo, especialmente considerando que tais recursos podem contribuir para uma aprendizagem mais significativa. Diante dessa lacuna, este trabalho apresenta, no Capítulo 5, uma proposta didática utilizando o material dourado, com o objetivo de favorecer o ensino dos critérios de divisibilidade por meio de uma abordagem mais concreta e interativa.

5 PROPOSTA DE USO DO MATERIAL DOURADO PARA ESTIMULAR O RACIOCÍNIO DEDUTIVO DOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

5.1 O MATERIAL DOURADO

O Material Dourado (MD), criado por Maria Montessori, tem como objetivo tornar os conceitos numéricos mais concretos, visuais e manipuláveis, contribuindo para a compreensão do sistema decimal desde a infância. Sua idealização nasceu da observação de que as crianças, mesmo muito pequenas, sentiam-se atraídas por objetos brilhantes e ordenados, e, ao manuseá-los, despertavam o interesse espontâneo pela composição e decomposição dos números (Daltoé;Strelow, 2012).

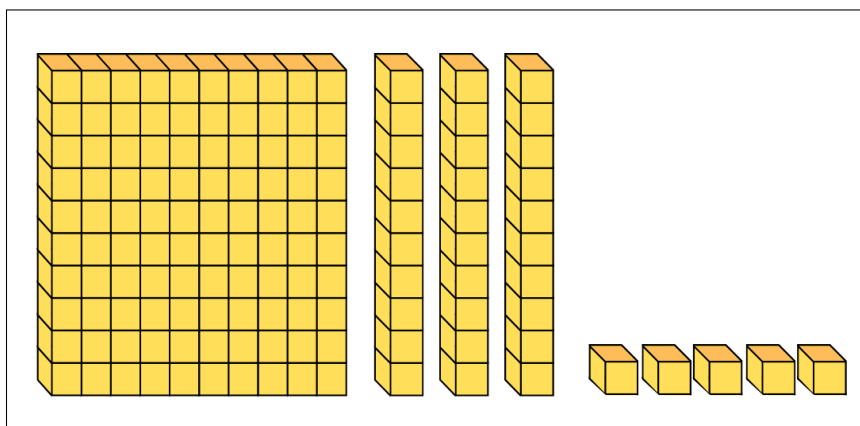
O MD é composto por peças com quatro tipos de tamanhos distintos. Os cubos unitários são as menores peças, representando a unidade. Um pouco maiores, as barras reúnem dez desses cubos alinhados, simbolizando a dezena. As placas, por sua vez, formam uma superfície quadrada organizada em uma matriz de 10 por 10 cubos, totalizando cem unidades e representando a centena. Por fim, o bloco maciço reúne mil cubos, correspondendo ao milhar e permitindo visualizar concretamente a relação entre as diferentes ordens numéricas.

Além de facilitar o aprendizado da aritmética, o MD mantém os princípios centrais da abordagem montessoriana, promovendo “[. . .] a independência, confiança em si mesma, a concentração, a coordenação e a ordem”, em um processo no qual o estudante é encorajado a descobrir e corrigir seus próprios erros, despertando a curiosidade deste com base nas experiências concretas que, gradualmente, conduzem à abstração (Daltoé;Strelow, 2012, p.2). Essa perspectiva favorece o raciocínio dedutivo, conforme descrito por Reid;Knipping (2010).

5.2 EXPLORANDO O CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9 COM O MATERIAL DOURADO

A partir da manipulação do Material Dourado, é possível explorar de forma concreta o critério de divisibilidade por 9, favorecendo um ambiente investigativo no qual os alunos desenvolvem hipóteses com base em observações empíricas. Para isso, propõe-se a análise do número 135, representado no MD por 1 placa de centena, 3 barras de dezenas e 5 cubos unitários (Figura 24).

Figura 24 – O número 135 representado no Material Dourado



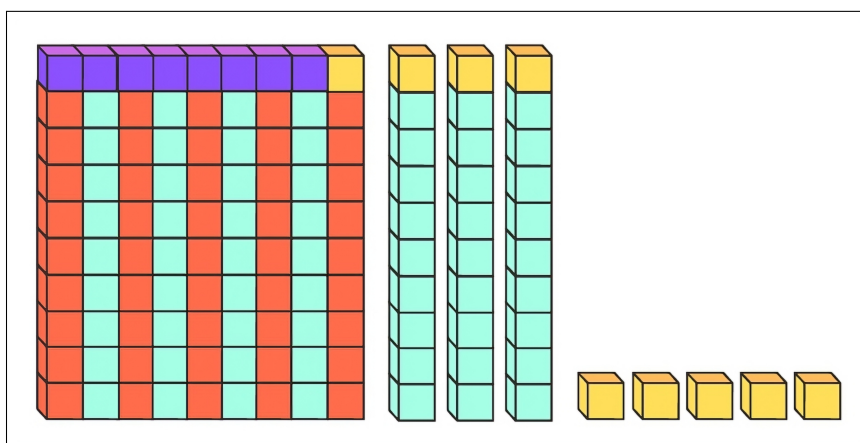
Fonte: Autoria nossa, 2025.

Essa experiência pode ser traduzida simbolicamente da seguinte forma:

$$135 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5.$$

Com esse material em mãos, o aluno é convidado a formar conjuntos de 9 unidades em cada ordem: agrupar os 100 cubos da placa em blocos de 9, depois fazer o mesmo com os 30 das dezenas e, por fim, com as 5 unidades. Em cada etapa, o aluno observa quantos blocos de 9 podem ser feitos e o que sobra (Figura 25).

Figura 25 – Marcação em blocos de 9 unidades do número 135 representado no Material Dourado



Fonte: Autoria nossa, 2025.

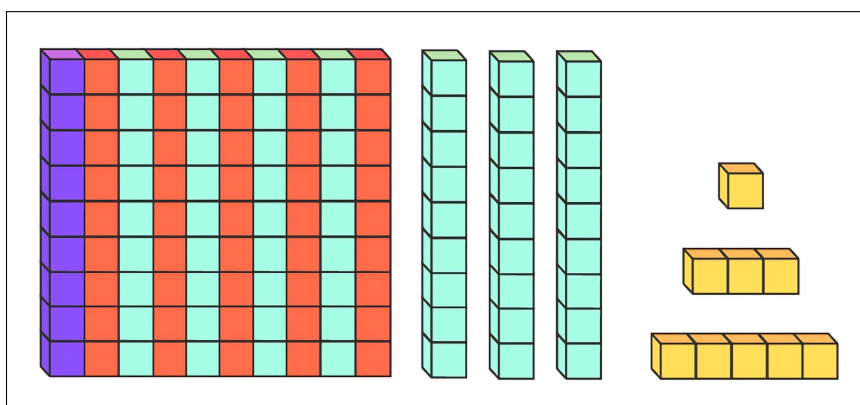
Em símbolos, agrupando por 9, escrevemos cada parcela como uma combinação de múltiplos de 9 e restos:

$$100 = 9 \cdot 11 + 1, \quad 30 = 9 \cdot 3 + 3 \quad \text{e} \quad 5 = 9 \cdot 0 + 5.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 135 &= 100 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5 \\
 &= (9 \cdot 11 + 1) + (9 \cdot 3 + 3) + (9 \cdot 0 + 5) \\
 &= 9(11 + 3 + 0) + (1 + 3 + 5).
 \end{aligned}$$

Figura 26 – Organização estratégica do material dourado para ilustrar a decomposição algébrica do número 135, expressa como $9 \cdot (11 + 3 + 0) + (1 + 3 + 5)$



Fonte: Autoria nossa, 2025.

O procedimento algébrico revelou que, ao considerar quantas unidades restam em cada ordem após as divisões por 9, os restos correspondem justamente à soma dos algarismos do número: $1 + 3 + 5 = 9$, como pode ser observado na figura 26. Como essa soma é divisível por 9, o aluno constata que o número 135 também é.

A partir dessa experiência concreta e da representação algébrica correspondente, estimula-se que os alunos repitam o procedimento com outros números, como 243, 567 ou 729, representando-os com o MD e realizando a mesma análise de agrupamento por 9 em cada ordem. À medida que mais exemplos são explorados, os estudantes começam a perceber um padrão: se a soma dos algarismos é divisível por 9, então o número inteiro também é. Trata-se de um processo de raciocínio indutivo, no qual o aluno generaliza a regra com base em diversos casos particulares observados concretamente, construindo aos poucos uma conjectura sobre o critério.

O critério por 9 foi escolhido como ponto de partida porque sua demonstração formal para números de quatro dígitos foi apresentada no Livro 3. Assim, após a experiência exploratória e a construção de uma regra por raciocínio indutivo com o Material Dourado, o professor pode conduzir a turma à retomada da demonstração geral, favorecendo a transição do concreto para o abstrato e promovendo a articulação entre diferentes registros de representação.

Embora estejamos tratando especificamente do critério de divisibilidade por 9, essa abordagem pode ser aplicada a outros critérios de divisibilidade. Em cada caso, são realizados ajustes pontuais no tipo de agrupamento. Por exemplo, o critério de divisibilidade por 5 pode ser associado à contagem das unidades em grupos de 5 e à observação dos algarismos finais do número, enquanto o critério por 3 repete o raciocínio do critério por 9, com a diferença apenas no divisor considerado.

Assim, esta proposta pode não apenas reforçar os princípios montessorianos de autonomia, autoconfiança e aprendizagem ativa, mas também integrar diferentes formas de raciocínio, do indutivo ao dedutivo (Daltoé;Strelow, 2012; Reid;Knipping, 2010). Desse modo, concluímos que o Material Dourado, longe de ser apenas um recurso manipulativo, assume um papel formativo na construção do pensamento matemático.

Vale destacar que, dependendo do material utilizado no material dourado (como plástico ou madeira), pode não ser possível fazer marcações diretamente nele. Nessas situações, podem ser oferecidos adesivos, uma folha com a representação geométrica do material para registro ou outras alternativas que o professor julgue adequadas. Além disso, existe a possibilidade de desenvolver um material dourado com peças desmontáveis, permitindo que as unidades sejam separadas. Isso tornaria o recurso mais dinâmico e manipulável para os alunos.

6 O FIM?!

Em nossa investigação, examinamos como os critérios de divisibilidade são apresentados nos livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental, considerando tanto as abordagens de raciocínio quanto o uso de materiais concretos. Para essa análise, nos baseamos na classificação dos raciocínios matemáticos proposta por Reid e Knipping (2010), que distingue quatro formas principais de pensar: o raciocínio dedutivo, o indutivo, o abduutivo e o raciocínio por analogia.

O estudo evidenciou que, na apresentação do conteúdo dos critérios de divisibilidade, prevalece a transmissão direta de regras, o visível, enquanto o invisível (as justificativas matemáticas) fica oculto. Essa abordagem, que transforma o conteúdo em um truque de mágica, tende a favorecer apenas a memorização e limitar a construção ativa do conhecimento. Quando se propõem situações que permitem a observação de padrões e a formulação de hipóteses, o raciocínio indutivo emerge como ponto de partida natural. Já o raciocínio dedutivo, essencial para revelar o invisível por trás das regras, aparece de forma restrita (apenas um livro). Os raciocínios abduutivo e por analogia também se mostraram ausentes.

Diante desse cenário, nossos resultados apontam para a necessidade de ampliar a diversidade metodológica nas práticas pedagógicas, tornando visível o que está invisível. Entendemos que a inclusão de materiais manipuláveis, recursos visuais e estratégias que favoreçam a problematização pode transformar o ensino dos critérios de divisibilidade em uma oportunidade de desenvolvimento do pensamento matemático no estudante. O caminho? Promover um diálogo entre diferentes modos de raciocinar e aproximando a sala de aula da natureza investigativa da matemática.

Outro ponto relevante que emerge desta pesquisa é o papel dos livros didáticos como mediadores do processo de ensino. Embora cumpram uma função estruturante no planejamento das aulas, eles, por si só, não garantem a mobilização de raciocínios mais complexos. Nesse contexto, destaca-se a importância da formação docente, que deve oferecer ao futuro professor não apenas domínio dos conteúdos matemáticos, mas também instrumentos teóricos e didáticos para mediar aprendizagens significativas.

Nesse aspecto, disciplinas como Teoria dos Números, presente, por exemplo, na matriz curricular do curso de Matemática-Licenciatura de uma universidade Pública do interior pernambucano, desempenham papel fundamental nesse processo. De modo geral, é nesse tipo

de disciplina que se aprofundam os conhecimentos necessários para compreender por que os critérios funcionam, indo além da memorização de regras.

Por fim, este estudo se insere em um debate mais amplo sobre a necessidade de aproximar o ensino escolar da natureza dinâmica e investigativa da matemática enquanto ciência. Ao reconhecer o valor dos diferentes modos de raciocinar e articulá-los ao ensino de regras fundamentais, como os critérios de divisibilidade, contribuímos para uma visão mais abrangente e reflexiva da disciplina, superando a percepção de que a matemática se resume a um conjunto estático de regras e procedimentos.

Contudo, reconhecemos as limitações deste estudo, que se restringiu à análise de materiais e não avançou para uma aplicação direta em contexto escolar. Nesse sentido, investigações futuras podem aprofundar-se na elaboração e testagem de propostas didáticas que explorem intencionalmente os quatro tipos de raciocínio, avaliando seu impacto na aprendizagem.

Assim, este trabalho não se encerra em si mesmo, mas abre caminhos para novas reflexões sobre o ensino de matemática, convidando professores e pesquisadores a repensarem suas práticas e a considerarem a diversidade de estratégias cognitivas como elemento central na formação matemática.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, Oscar J. *Matemática, Corpo e Língua: uma Viagem Numérica por meio da Imaginação*. 2007. Disponível em:
<<https://www.portcom.intercom.org.br/pdfs/bcc6d058feb6076505b94b401b2d6f04.pdf>>.
Acesso em: 28/03/2025.
- BARBOSA, Edelweis J. T. *Equações do Primeiro Grau em Livros Didáticos sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2011.
- BECKENBACK, Ana C. S.; LOUREIRO, Arthur L. M.; SANTOS, Nelitiane S.; FREITAS, Fabrício M. *Os benefícios na utilização de jogos e materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem de matemática no ensino presencial e remoto*. In: Anais no XIV Encontro Gaúcho de Educação Matemática (EGEM) - A educação Matemática do presente e do futuro: resistência e perspectiva, 2021.
- BRAGA, Clézio A.; ZINI, Jhoni M. Critérios de divisibilidade em bases numéricas genéricas. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 10, n. 2, p. 29–42, 2021. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/54056>>. Acesso em: 2 de fev. 2025.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília : MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Guia do Livro Didático: Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2024*. Brasília: MEC, 2024.
- CAVALCANTI, LIALDA B.; *O uso de material concreto com representações retangulares na construção do conceito de decomposição multiplicativa*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, Recife, PE, 2006.
- DALTOÉ, Karen; STRELOW, Sueli. *Trabalhando com material dourado e blocos lógicos nas séries iniciais* [em linha]. jun. 2012.

DOYLE, Arthur C. *A Study in Scarlet and The Adventure of the Speckled Band*. New York: HarperCollins Publishers, 2009.

ECO, Umberto; SEBEOK, Thomas A. (Ed.). *The Sign of Three: Dupin, Holmes, Peirce*. Bloomington: Indiana University Press, 1983.

FACCHI, Maria G.; *A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática*. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, PR, 2022.

FÁVERO, Luiz P.; BELFIORE, Patrícia. *Manual de análise de dados: estatística e modelagem multivariada com Excel, SPSS e Stata*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

GONZALEZ, Maria E. Q.; HASELAGER, Willem F. G. *Raciocínio Abdução, Criatividade e Auto-organização*. Cognitio, São Paulo, n. 3, p. 22–31, nov. 2002.

GUERRA, Avaetê de L. e R.; STROPARO, Telma R.; COSTA, Michel da; CASTRO JÚNIOR, Francisco P. de; LACERDA JÚNIOR, Orivaldo da S.; BRASIL, Melca M.; CAMBA, Mariangela. *Pesquisa qualitativa e seus fundamentos na investigação científica*. Revista de Gestão e Secretariado, v. 15, n. 7, 2024.

HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 3ª ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

LORENZATO, Sérgio A. *Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis*. In: LORENZATO, Sérgio (org.). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

MAZZI, Lucas C. *As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria*. Campinas, SP: [s.n.], 2018.

MENDES, Iran A. *História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula*. Revista Cocar, n. 3, p. 145-166, 2017.

MINAYO, Maria C. de S.; DESLANDES, Suely F.; CRUZ NETO, Otávio; GOMES, Romeu. *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. 19. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORAIS FILHO, Daniel C. de. *Um convite à Matemática: Fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades*. 3. ed. Campina Grande: Edição do autor,

Fábrica de Ensino, 2010.

PEREIRA, Joana M.; PONTE, João P. *Raciocínio Matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos do 9º ano*. Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto – CMUP, 2008.

PINTO, Mariana C.; SOUZA, Renan P.; SILVA, Patrícia N. *George Polya e aspectos da matemática indutiva*. Cadernos do IME - Série Matemática, 2022.

REID, David A.; KNIPPING, Christine. *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Wolfville, Canadá: Sense Publishers, Universidade Acadia, 2010.

RÊGO, Rogéria G. do; RÊGO, Rômulo M. do. *Matematicativa*. Campinas: Autores Associados, 2022.

RODRIGUES, RENATO DE O. N. *Material Dourado no ensino das quatro operações básicas*. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(unesp), São José do Rio Preto - São Paulo, 2012.

SANTOS, José P. de O. *Introdução à Teoria dos Números*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

SANTOS, Vanessa dos A. dos; MARTINS, Liziane. *A importância do livro didático*. Salvador – BA: Centro Universitário Jorge Amado – UNIJORGE, 2011.

SILVA, Ana F. U. da. *Fluxogramas: uma nova linguagem para trabalhar divisibilidade no Ensino Básico..* Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(unesp), Rio Claro - São Paulo, 2020.

SOUZA, Jesaías da S. *Raciocínio Abdução: investigação e produção de conhecimento matemático*. Anais do XX EBRAPEM, Curitiba, 2016.

UGALDE, Maria C. P.; ROWEDER, Charlys. Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, v. 6, p. e99220-e99220, 2020.