



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

INFORMAÇÃO QUÂNTICA E EMARANHAMENTO: UMA ABORDAGEM USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

por

Roberto de Melo Dias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Orientador – UFPE)

Prof. José Roberto Rios Leite (DF – UFPE)

Prof. Fernando Jorge S. Moraes (DF – UFPB)

Recife - PE, Brasil
Fevereiro-2007

Dias, Roberto de Melo
Informação quântica e emaranhamento: uma
abordagem usando álgebra geométrica / Roberto de Melo
Dias – Recife : O autor, 2007.
xiii, 118 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Departamento de Física, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica quântica. 2. Informação quântica. 3. Computação
quântica. 4. Emaranhamento. 5. Álgebra geométrica. I. Título.

530.12

CDD (22.ed.)

FQ2007-09



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Roberto de Melo Dias

INFORMAÇÃO QUÂNTICA E EMARANHAMENTO: UMA ABORDAGEM USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), José Roberto Rios Leite, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e o professor Fernando Jorge S. Moraes da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato:

Aprovado com Distinção () Aprovado () Reprovado

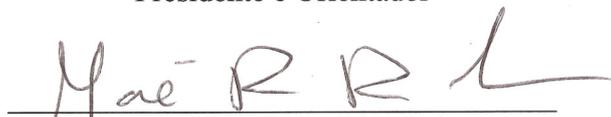
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e Seis de Fevereiro de 2007.



Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Presidente e Orientador



Prof. Fernando Jorge S. Moraes



Prof. José Roberto Rios Leite

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e da sabedoria, que me fez capaz de compreender um pouco da sua criação através da física. Em seguida aos meus pais, que durante tantos anos me apoiaram e investiram em minha educação, sem os quais eu não poderia chegar onde cheguei.

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu orientador, Antônio Murilo Santos Macêdo, pela sua grande dedicação e apoio. A sua enorme competência como professor, orientador e pesquisador motiva a todos que com ele trabalham para seguirem em frente em seus objetivos. Em seguida às minhas irmãs Cecília, Lília, Cristina e Catarina e a minha namorada Flaviana, pelo apoio e compreensão nos momentos em que tive que me distanciar um pouco para me dedicar a este trabalho de pesquisa bem como por tornar os momentos de descanso mais agradáveis.

Não poderia deixar de citar os três integrantes do quarteto da graduação, os amigos Rafael, Hermes e Fernando, por tornar o curso de física ainda mais divertido e prazeroso, em nome dos quais agradeço a todos os demais colegas, professores e funcionários da graduação e da pós-graduação do departamento de física da UFPE. Agradeço ainda a todos os meus professores de física da época colegial, os quais me incentivaram, apoiaram e despertaram o meu interesse.

Finalmente, agradeço ao CNPQ, pelo apoio a esta pesquisa.

“...porque, se eles possuíram luz suficiente para poder perscrutar a ordem do mundo, como não encontraram eles mais facilmente aquele que é seu Senhor?”

—SB 13,9.

Resumo

Nesta dissertação estudamos o emaranhamento quântico como ferramenta para a computação e informação quântica. Restringimo-nos ao emaranhamento bipartite existente entre dois qubits descritos por um hamiltoniano de Heisenberg. A escolha deste hamiltoniano deve-se ao fato de vários sistemas físicos distintos conseguirem simulá-lo, além de ser possível a construção de portas lógicas através dos controles de seus parâmetros por intervalos de tempos específicos. A restrição a dois qubits é motivada pelo objetivo central deste trabalho: compreender melhor o que é o emaranhamento. O estudo de casos simples favorece um posterior entendimento de situações mais complexas. Atacamos o problema por intermédio de diversos formalismos: o canônico (matricial), o de segunda quantização e por último através da álgebra geométrica. Os principais resultados consistem, primeiramente, na quantificação do emaranhamento de formação numa temperatura arbitrária para este sistema de dois qubits, sendo uma proposta para gerar emaranhamento sob demanda para uso em computação e informação quântica. Conseguimos, também, um avanço na compreensão (etapa crucial ao desenvolvimento desta área) do emaranhamento na linguagem de álgebra geométrica.

Palavras chaves: Informação quântica, computação quântica, emaranhamento, álgebra geométrica.

Abstract

We studied the quantum entanglement as a quantum computation and quantum information tool. This research focused on the bipartite entanglement found between two qubits of a Heisenberg hamiltonian. The choice of this hamiltonian was motivated by the fact that it can be simulated by many distinct physical systems. Besides, the control of its parameters during a specific amount of time, allows the construction of logical gates. The focus on two qubits systems is motivated by the core objective of this thesis: a better understanding of the quantum entanglement. The study of simple cases provides a better comprehension of complex situations. The problem was studied through different ways: canonical, second quantization and also through geometric algebra. The main results consist on the entanglement of formation quantification at an arbitrary temperature. This quantification allows the attainment of entanglement by demand for quantum computation and quantum information use. A new comprehension of entanglement on geometric algebra language was also achieved.

Keywords: Quantum information, quantum computation, entanglement, geometric algebra.

Sumário

| | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Digressão histórica | 1 |
| 1.2 | Vantagens da computação quântica | 3 |
| 1.3 | O algoritmo de Deutsch | 4 |
| 1.4 | Conclusões | 6 |
| 2 | Emaranhamento | 7 |
| 2.1 | Emaranhamento: uma visão experimental | 7 |
| 2.2 | Emaranhamento: uma visão histórica | 10 |
| 2.3 | Emaranhamento: uma visão formal | 14 |
| 2.4 | A utilidade do emaranhamento | 16 |
| 2.5 | Quantificadores de emaranhamento | 17 |
| 2.5.1 | Requisitos de um quantificador | 18 |
| 2.5.2 | Emaranhamento destilável | 19 |
| 2.5.3 | Custo de emaranhamento | 20 |
| 2.5.4 | Emaranhamento de formação | 20 |
| 2.5.5 | Emaranhamento de entropia relativa | 22 |
| 2.6 | Conclusões | 23 |
| 3 | Realização Experimental | 25 |
| 3.1 | Requisitos experimentais | 25 |
| 3.1.1 | Representatividade e escalonamento | 26 |
| 3.1.2 | Estado inicial | 26 |
| 3.1.3 | Tempo de descoerência | 27 |
| 3.1.4 | Portas lógicas universais | 28 |
| 3.1.5 | Medição | 28 |
| 3.1.6 | Conversão entre tipos de qubits | 29 |
| 3.1.7 | Transmissão de qubits móveis | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2 | Sistemas físicos | 30 |
| 3.2.1 | Dispositivos supercondutores | 30 |
| 3.2.1.1 | Quantização da Carga | 32 |
| 3.2.1.2 | Quantização do Fluxo | 34 |
| 3.2.1.3 | Propostas para implementar interação (portas com 2 qubits) | 35 |
| 3.2.2 | Métodos ópticos | 36 |
| 3.2.3 | Ressonância magnética nuclear | 38 |
| 3.2.4 | Pontos quânticos | 39 |
| 3.3 | Conclusões | 41 |
| 4 | Modelo de Heisenberg | 43 |
| 4.1 | Hamiltoniano | 43 |
| 4.2 | Diagonalização direta | 44 |
| 4.2.1 | Autoestados e autoenergias | 45 |
| 4.3 | Diagonalização por segunda quantização | 47 |
| 4.3.1 | Transformação de Jordan-Wigner | 47 |
| 4.3.2 | Transformação de Fourier | 50 |
| 4.3.3 | Transformação de Bogoliubov | 51 |
| 4.3.4 | Autoestados e autoenergias | 52 |
| 4.3.5 | Operadores densidade em segunda quantização | 52 |
| 4.4 | Temperatura nula | 53 |
| 4.4.1 | Caso não degenerado | 53 |
| 4.4.1.1 | Estado fundamental $ \Psi_g\rangle$ | 54 |
| 4.4.1.2 | Cálculo do emaranhamento | 55 |
| 4.4.1.3 | Funções de correlação | 59 |
| 4.4.2 | Caso degenerado | 60 |
| 4.4.2.1 | Cálculo dos operadores densidade | 60 |
| 4.4.2.2 | Cálculo do emaranhamento | 62 |
| 4.5 | Temperatura finita | 63 |
| 4.6 | Testes de consistência | 65 |
| 4.7 | Formulação Alternativa | 68 |
| 4.8 | Conclusões | 70 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Álgebra Geométrica | 71 |
| 5.1 | Introdução à AGSM | 71 |
| 5.2 | Sistema de um qubit | 74 |
| 5.2.1 | Produto interno | 76 |
| 5.2.2 | Operador densidade | 77 |
| 5.2.3 | Vetor de spin | 77 |
| 5.3 | Sistema de dois qubits | 78 |
| 5.3.1 | Produto interno | 79 |
| 5.3.2 | Construção da operação de spin-flip | 80 |
| 5.3.3 | Aplicação no cálculo da concorrência | 81 |
| 5.3.4 | Decomposição de Schmidt e ângulo de emaranhamento | 81 |
| 5.3.5 | Emaranhamento como rotação | 83 |
| 5.3.6 | Operador densidade de um sistema de N qubits | 84 |
| 5.4 | Traço parcial | 84 |
| 5.4.1 | Aplicação do traço parcial | 86 |
| 5.5 | Conclusões | 87 |
| 6 | Conclusões e Perspectivas | 88 |
| A | A Esfera de Bloch | 90 |
| B | Interpretação e medição experimental da concorrência | 95 |
| C | Introdução à Álgebra Geométrica | 98 |
| C.1 | Introdução histórica | 98 |
| C.2 | Conceitos fundamentais | 99 |
| C.2.1 | Aplicação em 3 dimensões | 101 |
| C.2.2 | Rotações | 103 |
| C.3 | Aplicações | 105 |
| C.3.1 | Quatérnions | 105 |
| C.3.2 | Álgebra de Pauli | 106 |
| C.3.3 | Trigonometria | 107 |
| C.3.4 | Lançamento oblíquo | 108 |
| | Referências Bibliográficas | 110 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Ilustração da lei de Moore, em que o número de transistores deveria duplicar a cada dois anos. | 2 |
| 1.2 | Esquema de um circuito para a realização reversível da porta lógica NAND. | 3 |
| 2.1 | Diagrama do experimento de fendas duplas de Young [113] com as fendas F_1 e F_2 . Na figura da esquerda (a) vemos o padrão de cada uma das fendas isoladas bem como o padrão resultante sem interferência. Na da direita (b) temos o padrão de interferência devido ao termo cruzado $2\psi_1\psi_2$. | 8 |
| 2.2 | Ilustração da construção de um par de fótons como no artigo de EPR [30] para testar experimentalmente as desigualdades de Bell [5]. Figura retirada da ref. [2] onde dois fótons são emitidos em direções contrárias e suas polarizações são medidas, nas direções de \vec{a} e \vec{b} , para se testar as correlações existentes. | 13 |
| 3.1 | Esquema de circuito utilizando uma junção Josephson para a representação de um qubit através da contagem do número n de pares de Cooper presentes numa determinada ilha. | 32 |
| 3.2 | Esquema de um dispositivo SQUID, formado por um anel supercondutor contendo uma junção Josephson (em preto na figura) sendo atravessado por um fluxo magnético Φ_x . | 34 |
| 3.3 | Modelo de Averin [3] para dois qubits interagentes acoplados via um capacitor C_{int} . | 35 |
| 3.4 | Modelo de Mooij [75] para qubits interagentes. | 36 |
| 3.5 | Montagem experimental baseada em pontos quânticos para um sistema de dois qubits formados por spins S_1 e S_2 de um gás de elétrons bidimensional com interação controlada eletrostaticamente pelo potencial eletrostático V . | 40 |
| 3.6 | Foto do ENIAC | 42 |
| 4.1 | Modelo experimental para o hamiltoniano da eq. (4.1). | 44 |

- 4.2 Gráfico do emaranhamento de formação no caso crítico ($\alpha = \alpha_c$) para $p = 1/2$. 63
- 4.3 Gráfico do emaranhamento de formação de um sistema de dois spins submetidos a um hamiltoniano do tipo expresso na eq. (4.1) com $h\beta \equiv 20T/J$. 66
- 4.4 Vista superior da figura 4.3, onde explicitamos a mudança de comportamento em $\alpha = \alpha_c$. 66
- A.1 Ilustração da esfera de Bloch, onde o qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ é representado pelo ponto na superfície da esfera com latitude θ e longitude ϕ , dadas pela transformação $\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$ e $\theta = 2\arccos(|\alpha|)$. 91
- A.2 Representação na esfera de Bloch de um estado misto ρ ilustrando duas de suas infinitas possíveis decomposições em estados puros. Cada corda da esfera que passa por ρ toca a sua superfície em dois estados puros que podem ser usados para decompô-lo. 94
- B.1 Medição experimental da concorrência de estados do tipo $\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$ como função de $|\alpha|$. A linha mostra o valor teórico $C = 2|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}$, de onde podemos perceber a confirmação experimental. 97
- C.1 Esquema do produto exterior $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e do produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} . 100
- C.2 Ilustração do vetor \mathbf{u} e suas componentes paralela \mathbf{u}_{\parallel} e perpendicular \mathbf{u}_{\perp} à direção de \mathbf{v} . 103
- C.3 Rotação do vetor \mathbf{u} por um ângulo θ feita através de duas reflexões, uma em cada um dos vetores \mathbf{v}_i . 104
- C.4 Representação de dois vetores unitários: $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \cos(\alpha) + \mathbf{e}_2 \sin(\alpha)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos(\beta) + \mathbf{e}_2 \sin(\beta)$. 107
- C.5 Representação geométrica do problema do lançamento oblíquo. Temos o vetor subtração de velocidades $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t$ e o vetor soma $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 = 2\mathbf{R}/t$, obtidos a partir das equações (C.31) e (C.32). 108

Lista de Tabelas

- | | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Relação dos tempos (em segundos) característicos nos diversos sistemas físicos, bem como o número esperado de operações lógicas possíveis. | 28 |
| 4.1 | Resultado da aplicação dos operadores de criação e aniquilação definidos em (4.13) nos estados definidos na eq. (4.19). | 49 |

CAPÍTULO 1

Introdução

O tema principal desta tese é o emaranhamento quântico. A grande motivação para estudá-lo vem das teorias da computação e informação quântica. Neste capítulo introdutório iremos apresentar os aspectos fundamentais destas duas teorias e como o emaranhamento surge como um recurso fundamental, sendo o grande responsável pela impossibilidade de que os algoritmos quânticos da computação sejam reproduzidos classicamente com a mesma eficiência.

No capítulo 2 abordaremos o conceito de emaranhamento em detalhes, apresentando o seu aparecimento no início do desenvolvimento da mecânica quântica e como este recurso pode ser quantificado. Em seguida, no capítulo 3, discutiremos diversos sistemas físicos capazes de gerar hamiltonianos de interação entre qubits¹ de acordo com o modelo de Heisenberg. Este modelo será apresentado em profundidade no capítulo 4, onde estudaremos um sistema de dois qubits e quantificaremos o emaranhamento existente entre eles. Na etapa final, capítulo 5, apresentaremos uma formulação alternativa para o estudo do emaranhamento: a álgebra geométrica. Conclusões e perspectivas são apresentadas no capítulo 6.

Neste capítulo introdutório discutiremos inicialmente um pouco da história da computação e da informação quântica, na seção 1.1. Em seguida, na seção 1.2, apresentaremos as principais vantagens da computação quântica, exemplificando com o algoritmo de Deutsch, na seção 1.3. Concluiremos na seção 1.4, fazendo uma análise geral dos temas discutidos.

1.1 Digressão histórica

A computação clássica, como a conhecemos hoje, teve o seu início com os trabalhos de Turing, em 1936 [96]. Ele apresentou um paradigma para a computação: a máquina universal de Turing, uma sequência de regras e símbolos que conseguiria reproduzir qualquer algoritmo lógico em computação. Esta construção serviu como pontapé inicial para a revolução

¹Nome dado a qualquer sistema quântico de dois níveis, sendo a base da computação quântica, em substituição ao bit clássico.

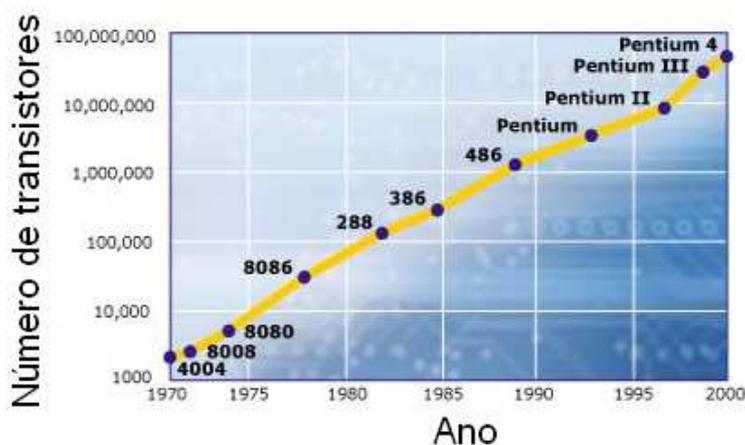


Figura 1.1 Ilustração da lei de Moore, em que o número de transistores deveria duplicar a cada dois anos.

tecnológica que vivenciamos hoje e permaneceu por muito tempo como a base para qualquer computação.

O surgimento dos transistores, em 1947, e a sua produção em tamanhos cada vez menores nas décadas seguintes, fez crescer num ritmo fortíssimo o poder dos computadores, seguindo sempre o esquema de Turing. Este fato levou Gordon Moore [76], em 1965, a propor uma lei empírica de que o número de transistores em um processador dobraria a cada dois anos, como ilustrado na figura 1.1.

O fato é que, com a diminuição do tamanho dos seus componentes, os computadores clássicos começam a sofrer problemas característicos do universo quântico, como tunelamentos e interferências. Este fato impõe um limite para esta miniaturização. A computação quântica entra neste contexto como um novo paradigma: uma nova maneira de processar informações que não pode ser reproduzida classicamente com eficiência.

Além deste ganho de eficiência, que será ilustrado na seção 1.3, a computação quântica se apresenta como um sistema ideal para a simulação de fenômenos quânticos, como proposto por Feynman [34]. Muito além de simplesmente tornar os computadores mais rápidos na execução de algoritmos, o estudo de informação e computação quântica tem gerado grandes avanços na teoria da informação, trazendo novos conceitos e criando possibilidades antes inexistentes, como será visto na seção seguinte.

1.2 Vantagens da computação quântica

Um primeiro ponto de grande diferença a ser considerado entre a computação clássica e a quântica é a reversibilidade. As leis macroscópicas que governam o processamento de dados clássicos vêm acompanhadas de dissipação que produz irreversibilidade nos algoritmos clássicos. Já as leis da mecânica quântica, e portanto os algoritmos quânticos, devem ser reversíveis. Um grande marco da teoria da informação, o princípio de Landauer [66], estabelece que perda de informação é, necessariamente, um processo dissipativo.

Um grande avanço neste sentido veio com o trabalho de Bennet [6], em 1973, provando que um computador clássico pode, em princípio, não dissipar nenhuma energia e ser, portanto, reversível. Este fato garante que qualquer computação clássica pode ser feita num computador quântico. Como exemplo temos a porta lógica (clássica) NAND, que associa o resultado $c = (a \times b) \oplus 1$ a um par (a, b) de estados lógicos binários (0 ou 1), onde \oplus indica a soma módulo 2. Esta porta é claramente irreversível, uma vez que, tendo o resultado c , não podemos descobrir quais são os valores de a e b . Neste exemplo, podemos tornar esta porta lógica reversível através da utilização de um terceiro bit, como na porta lógica Toffoli, que à triade $(a, b, 1)$ associa o resultado $(a, b, (a \times b) \oplus 1)$, gerando o resultado da porta NAND no terceiro bit e mantendo a reversibilidade do processo, como ilustrado na figura 1.2.

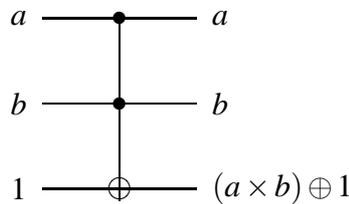


Figura 1.2 Esquema de um circuito para a realização reversível da porta lógica NAND.

O fato é que a computação quântica não apenas reproduz os resultados da clássica, mas é superior. Isto ocorre porque ela dispõe de recursos que não existem classicamente. O primeiro destes recursos é o *emaranhamento quântico*, tema central deste trabalho, que será visto no capítulo 2. O segundo recurso ao qual nos referimos é o chamado *paralelismo quântico*. Esta propriedade está ligada à diferença crucial da maneira como a informação é guardada num bit clássico ou num bit quântico, o qubit.

Para ilustrar esta diferença, pensemos num bit clássico como uma moeda, que pode estar em dois estados possíveis: cara ou coroa. Denotaremos estes estados por $|0\rangle_c$ e $|1\rangle_c$. Para o qubit, tomemos o estado de polarização de um spin eletrônico. Denotaremos a situação onde o spin aponta para cima no eixo de referência \hat{Z} como $|0\rangle$ e para baixo por $|1\rangle$. Vejamos as diferenças

entre esses dois sistemas numa situação bastante simples. Para o nosso bit clássico (a moeda) imaginemos que um juiz de futebol lança-a para cima e em seguida coloca-a entre suas mãos, sem que ninguém tenha visto o resultado ainda. Para o qubit, imaginemos que aplicamos um campo magnético na direção \hat{X} até que nosso spin se alinhe com ele.

Para o estado da moeda encoberta pelas mãos do juiz, poderíamos obter o estado $|0\rangle_c$ ou o $|1\rangle_c$, com 50% de chance para cada um. Para o elétron, a situação em princípio é a mesma. Após uma medição no eixo \hat{Z} o spin poderia estar no estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, também com 50% de chance. A grande diferença ocorre antes da medição. Para a moeda, o seu estado já está determinado desde o momento em que o juiz pega-a, apenas essa informação não está acessível; por isso atribuímos uma probabilidade de 50%. Para o elétron, antes da medição ele está numa superposição de estados. Como por exemplo $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, situação esta sem análogo clássico.

Como este estado de superposição ocorre antes da medida, poderíamos pensar ingenuamente que não teria nenhum efeito físico, porém este raciocínio está errado. Podemos fazer um sistema quântico evoluir para um estado de superposição, fazer manipulações nele enquanto neste estado, e só então realizar uma medida. Este procedimento possibilitaria a um algoritmo em computação quântica efetuar diversas operações simultaneamente, uma característica marcante do paralelismo, como ilustraremos na próxima seção.

1.3 O algoritmo de Deutsch

O primeiro algoritmo quântico que se mostrou superior em eficiência ao seu análogo clássico foi o proposto por David Deutsch em 1985 [23]. Apresentaremos nesta seção este algoritmo em detalhes, seguindo a ref. [80], o que difere um pouco da versão inicialmente elaborada por Deutsch.

O problema que este algoritmo se propõe a resolver é o seguinte: suponha que exista uma função $f(x)$, com domínio e contradomínio binário, i.e. $\{f(0), f(1)\} \in \{0, 1\}$. Como determinar se $f(1)$ é igual ou diferente de $f(0)$? Classicamente precisaríamos calcular a função $f(x)$ duas vezes, uma para a entrada 0 e outra para a entrada 1 e em seguida compará-las. O que Deutsch mostrou é que, utilizando a superposição quântica apresentada na seção anterior, existe um algoritmo quântico que resolve este problema em um único passo.

Apresentaremos o circuito lógico que resolve este problema aproveitando para introduzir diversas notações utilizadas na computação quântica. O circuito proposto é o seguinte:

$$\begin{array}{c} |0\rangle \\ |1\rangle \end{array} \begin{array}{c} \boxed{H} \\ \boxed{H} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{F} \\ \boxed{F} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{H} \\ \boxed{H} \end{array} \begin{array}{c} \text{Measurement} \\ \text{Measurement} \end{array} \quad (1.1)$$

Nos circuitos de computação quântica, a convenção utilizada é a de que o tempo corre da esquerda para a direita. Neste caso temos inicialmente dois qubits, preparados respectivamente nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, originando um estado inicial para o sistema $|\varphi_1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |01\rangle$. Estes qubits sofrem, em seguida, a evolução unitária descrita pela porta lógica de Hadamard, simbolizada com um H , que tem o efeito de criar uma superposição de estados da seguinte forma:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.2)$$

podendo ser representada matricialmente por:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde $|0\rangle = (1,0)^\dagger$ e $|1\rangle = (0,1)^\dagger$. Utilizamos a notação em que † indica o estado adjunto, matricialmente representado pelo transposto complexo conjugado.

Neste ponto o estado do sistema se torna $|\varphi_2\rangle = (H|0\rangle) \otimes (H|1\rangle)$. O próximo passo consiste na passagem destes qubits pela “caixa preta”² que calcula o valor da função $f(x)$ do primeiro qubit e transforma o segundo qubit fazendo a soma módulo 2 do resultado da função, i.e. $F|x,y\rangle = |x,y \oplus f(x)\rangle$. Aplicando F a $|\varphi_2\rangle$, após algumas contas chegamos em:

$$|\varphi_3\rangle \equiv F|\varphi_2\rangle = \begin{cases} \pm H|0\rangle \otimes (H|1\rangle) & \text{se } f(0) = f(1) \\ \pm H|1\rangle \otimes (H|1\rangle) & \text{se } f(0) \neq f(1), \end{cases} \quad (1.4)$$

como penúltimo passo temos a aplicação de mais uma porta de Hadamard ao primeiro qubit, resultando em:

$$|\varphi_4\rangle = \begin{cases} \pm(HH|0\rangle) \otimes (H|1\rangle) = \pm|0\rangle \otimes (H|1\rangle) & \text{se } f(0) = f(1) \\ \pm(HH|1\rangle) \otimes (H|1\rangle) = \pm|1\rangle \otimes (H|1\rangle) & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (1.5)$$

Para encerrar, fazemos uma medição no primeiro qubit, onde obteremos 0 se $f(0) = f(1)$ ou 1 caso contrário, o que soluciona o problema proposto em uma única etapa! Podemos perceber claramente a importância da superposição de estados na etapa intermediária: ela possibilita

²Não nos ateremos à construção explícita desta caixa preta. Para cada função $f(x)$ considerada precisaríamos de uma construção diferente.

o cálculo da função $f(x)$ simultaneamente para as duas entradas possíveis. Outro ponto importante é que, no momento da medição do primeiro qubit, este não mais se encontrava em uma superposição. Este fato possibilita um resultado determinístico que resolve o problema proposto.

1.4 Conclusões

Pudemos ver com o exemplo apresentado na seção anterior como a computação quântica oferece enormes vantagens sobre a clássica. Estas vantagens ficarão ainda mais evidentes no próximo capítulo, quando apresentaremos o emaranhamento quântico. Historicamente, o algoritmo de Deutsch foi apenas o início. Podemos ainda citar o algoritmo de busca de Groover [39] e o de fatoração de Shor [88] como os outros dois grandes algoritmos da computação quântica.

A computação quântica não apresenta apenas vantagens. Por trabalhar com sistemas quânticos extremamente sensíveis ao ambiente externo, ela representa um grande desafio experimental nos diversos campos da física, como será visto no capítulo 3. Avanços teóricos também têm contribuído neste sentido com a construção de protocolos de correção de erros. Um bom texto sobre este assunto pode ser encontrado na ref. [71].

Os estudos de informação quântica também levaram a grandes progressos na área da criptografia quântica [8, 58, 109] e na construção de canais quânticos de comunicação com capacidades superiores aos clássicos, a chamada codificação super-densa [9], onde 2 bits de informação clássica podem ser transmitidos a partir do envio de um único qubit (utilizando um estado emaranhado previamente construído entre a fonte e o receptor). Para dar continuidade ao nosso trabalho, dedicaremos o próximo capítulo ao estudo do emaranhamento e sua quantificação.

Emaranhamento

O tema deste capítulo está ligado a uma das características mais surpreendentes da natureza. Algo que foge completamente à nossa intuição e está no âmago da teoria quântica. Não há quem tenha tido contato com este fenômeno e que não tenha ficado apreensivo, inquieto... Mas como isto é possível? A natureza é mesmo assim? A resposta vem dela mesma: os experimentos são irrefutáveis e esse fenômeno realmente ocorre.

Afinal, o que é o emaranhamento quântico? Ao longo deste capítulo iremos apresentar três visões deste fenômeno. Na seção 2.1 descreveremos uma abordagem experimental para o emaranhamento quântico e perceberemos as suas principais características, através de um resultado experimental. Na seção 2.2 faremos um relato histórico do seu aparecimento, desde a sua constatação, no famoso paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [30] até a prova experimental [31] das desigualdades de Bell [5]. Por último, na seção 2.3, construiremos o formalismo matemático necessário para o seu estudo, formalismo este que será essencial para o resto deste trabalho.

2.1 Emaranhamento: uma visão experimental

Aproveitaremos esta seção para fazer uma rápida revisão de algumas idéias centrais na mecânica quântica. Começaremos pela dualidade onda-partícula até chegarmos ao emaranhamento quântico. Segundo Feynman [33]: “Nós escolhemos examinar um fenômeno que é impossível, absolutamente impossível, de se explicar por qualquer caminho clássico, o qual está no coração na mecânica quântica. Na realidade, ele contém seu único mistério.”

O início: Começamos o nosso experimento com o famoso aparato de fendas duplas de Young [113], ao qual Feynman se referia na citação acima. Ilustramos este experimento na figura 2.1. Nele podemos verificar a natureza ondulatória da luz, a partir da formação de um padrão de interferência entre os feixes de luz provenientes de cada uma das duas fendas e incidindo no

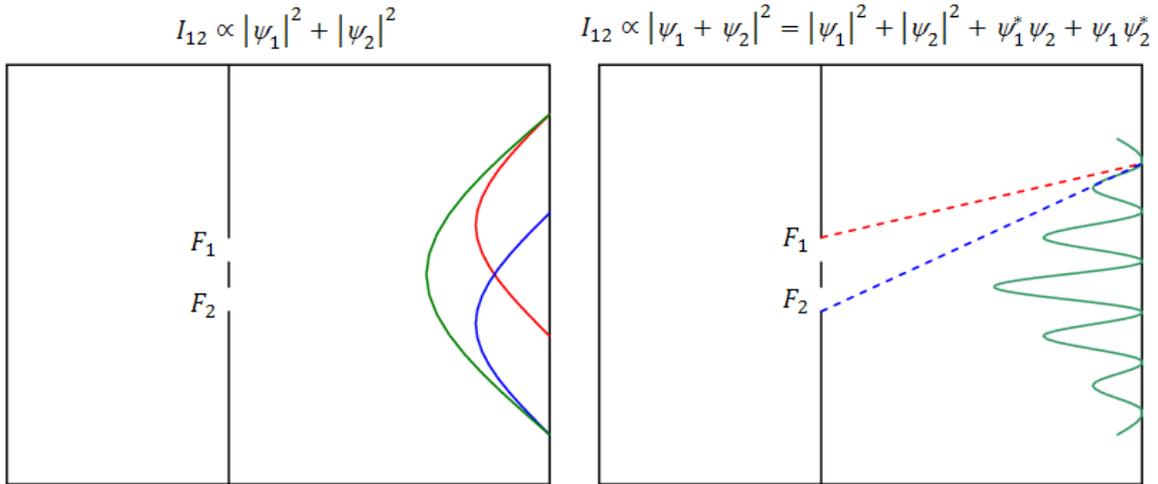


Figura 2.1 Diagrama do experimento de fendas duplas de Young [113] com as fendas F_1 e F_2 . Na figura da esquerda (a) vemos o padrão de cada uma das fendas isoladas bem como o padrão resultante sem interferência. Na da direita (b) temos o padrão de interferência devido ao termo cruzado $2\psi_1\psi_2$.

mesmo ponto de observação.

Com apenas uma das fendas abertas, a intensidade da luz em cada ponto é proporcional ao quadrado da função de onda proveniente desta fenda, e toma a forma ilustrada na figura 2.1a. Temos portanto que

$$I_1 \propto |\psi_1|^2, \quad I_2 \propto |\psi_2|^2, \quad (2.1)$$

onde I_1 e I_2 indicam as intensidades de luz incidente no anteparo devido a cada uma das duas fendas isoladamente e ψ_1 e ψ_2 são as respectivas funções de onda.

Num processo sem interferência, a intensidade resultante I_{12}^{si} é dada pela soma das intensidades individuais I_1 e I_2 , i.e.:

$$I_{12}^{si} \propto |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2. \quad (2.2)$$

Caso haja interferência entre os dois feixes, como no caso do experimento de Young, o resultado se torna:

$$I_{12}^{ci} \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*, \quad (2.3)$$

onde os últimos dois termos explicitam a interferência.

Imaginemos agora que possamos diminuir gradativamente a intensidade do feixe de luz incidente nas fendas. O que iremos observar no anteparo? Se a intensidade for baixa o suficiente, veremos cada fóton da luz chegando um a um (provando a natureza corpuscular da luz), mas após algum tempo o mesmo padrão de interferência irá se formar¹.

A questão central é: se apenas um único fóton por vez atravessa as fendas, com o que ele está interferindo? A resposta dada pela interpretação usual da teoria quântica é que a função de onda do fóton “passa” simultaneamente nas duas fendas, causando o padrão de interferência observado. Vamos, agora, tentar “enganar” a natureza: coloquemos um detector em uma das fendas, que acuse a passagem de um fóton sem alterar a sua trajetória, de forma que teremos acesso à informação de qual das fendas foi atravessada por ele. O resultado, como esperado, é que o fóton sempre passa por uma *ou* por outra fenda, mas só que desta vez algo de novo acontece: o padrão de interferência desaparece completamente! O fato de termos acesso à *informação* do caminho do fóton, “forçou-o” a escolher um, e somente um caminho, impedindo que o padrão de interferência ocorresse.

Poder-se-ia pensar, ingenuamente, que o detector de alguma forma altera a trajetória do fóton, sendo isto o responsável pela mudança no padrão formado. Esta suposição é falsa, pois, como veremos adiante, mesmo com o detector, é possível que o padrão de interferência se forme.

O emaranhamento: Vamos agora seguir para uma nova etapa no nosso experimento. Suponhamos que o detector esteja lá, determine por qual fenda o fóton passou, mas que esta informação fique gravada nele, sem ter sido transmitida para nenhum outro dispositivo. O que ocorrerá? A resposta é simples: nada. O padrão de interferência continuará sem aparecer.

Um fato novo ocorre ao se apagar de maneira irreversível a informação contida no detector após a passagem do fóton, porém antes dele colidir com o anteparo². Isso pode ser feito até instantes antes do momento de chegada do fóton ao anteparo que o resultado é o mesmo: o padrão de interferência volta a aparecer! Esta é uma descrição simplificada do famoso experimento do

¹Padrões de interferência com uma única partícula por vez atravessando as fendas já foram observados, inclusive com elétrons [73, 95].

²É possível apagar esta informação mesmo após a chegada do fóton ao anteparo, num experimento conhecido na literatura como *delayed choice quantum eraser*, que utiliza pares de partículas emaranhadas, obtendo a informação do caminho a partir de uma delas e a observação da interferência a partir da outra. Não abordaremos isto neste trabalho, pois estamos querendo apenas enfatizar o emaranhamento entre o detector e o fóton que o atravessa.

apagador quântico [63, 86, 106].

Como primeira conclusão, percebemos que a questão não é que o detector altera a trajetória do fóton, mas sim, se a informação de seu caminho existe ou não no momento de sua chegada ao anteparo³. O ponto importantíssimo aqui, é que podemos apagar esta informação numa fração de segundo anterior à chegada do fóton ao anteparo, de forma que a distância física entre o detector e o fóton impede que o fóton “saiba” se a informação do seu caminho foi apagada ou não. Como pode o fóton, então, “decidir” se formará ou não o padrão de interferência se ele não tem como saber se a informação do detector ainda existe ou não?

A resposta a esta pergunta é que **existe** uma correlação não-local entre o fóton e o detector, criada no instante em que ambos estavam juntos, e mantida mesmo à distância. Esta correlação é o que chamamos de emaranhamento quântico. Isto implica que o sistema emaranhado *fóton* + *detector* não pode ser tratado como a soma de duas partes isoladas, mas sim, como uma única entidade.

Escolhemos apresentar o emaranhamento inicialmente na forma de um resultado experimental por razões de motivação. Historicamente não foi desta maneira que o emaranhamento quântico surgiu na física. O seu nascimento foi bastante polêmico, motivo de grandes discussões, com Einstein sendo um dos protagonistas, como veremos na próxima seção.

2.2 Emaranhamento: uma visão histórica

Neste segundo contato com o emaranhamento quântico, faremos uma abordagem histórica. Começaremos pelos debates surgidos com o artigo de EPR [30], passando pela formulação matemática proposta por Bell [5] até concluir, com o experimento realizado por Aspect et al.[31].

Como veremos, o surgimento de correlações não-locais se tornou um tema central no desenvolvimento da teoria quântica. Os testes de sua ocorrência formam os pilares experimentais de toda a teoria, dando a ela enorme credibilidade. Enfatizamos que o que está em jogo não é *apenas* se o emaranhamento quântico existe ou não, mas se a mecânica quântica é ou não uma teoria consistente.

³No caso do *delayed choice quantum eraser*, referido na nota de rodapé anterior, esta informação existe, só não foi detectada ainda.

O paradoxo: A física se deparou com correlações quânticas não-locais pela primeira vez no famoso paradoxo de EPR, em 1935. O título deste artigo: *Pode a descrição da mecânica quântica da realidade física ser considerada completa?*, e a consequente resposta a esta pergunta, dada no transcórre do artigo, expressa a opinião dos autores de que a mecânica quântica não é uma teoria completa, a qual ainda estaria por vir.

Einstein et al. assim definiram realidade física: “Uma condição suficiente para que uma quantidade física seja real, é a possibilidade de predizê-la com certeza, sem perturbar o sistema”. Contudo, na mecânica quântica, o conhecimento completo de uma grandeza física, impede o conhecimento de outra que seja incompatível, i.e. que não comute, com a primeira. Ainda segundo Einstein et al., isto nos levaria a seguir um dentre dois caminhos: ou a descrição da realidade dada pela mecânica quântica não seria completa ou essas duas quantidades (incompatíveis) não podem ser simultaneamente reais. O artigo segue, demonstrando que a falsidade da primeira opção implicaria na falsidade também da segunda. Este raciocínio levou os autores a afirmarem que a primeira opção estaria correta, i.e. a mecânica quântica *não* forneceria uma descrição completa da realidade.

O ponto crucial do raciocínio de EPR é o seguinte: imagine duas partículas que pudessem interagir por um tempo finito e em seguida sejam separadas espacialmente. Far-se-ia, então, a medição de um observável qualquer na primeira partícula e, de acordo com a mecânica quântica, a escolha de qual observável fosse medido alteraria o estado da segunda. Isto seria incompatível com a noção de realidade local proposta por EPR. Vamos fazer uma rápida descrição matemática do que acabamos de escrever (seguindo o argumento apresentado no artigo de EPR [30]).

Na base $\{|u_n(x_1)\rangle\}$, das autofunções de um observável qualquer da primeira partícula, o estado total do sistema seria descrito por:

$$|\Psi(x_1, x_2)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_1)\rangle \otimes |\psi_n(x_2)\rangle, \quad (2.4)$$

com \otimes indicando o produto tensorial⁴. Isto implicaria que, após uma medição realizada na primeira partícula, dando como resultado o autovalor correspondente a $|u_k(x_1)\rangle$, o sistema 2 deveria estar no estado $|\psi_k(x_2)\rangle$. Porém, se escolhermos um outro observável para a primeira partícula, com autofunções $\{|v_n(x_1)\rangle\}$, o sistema ficaria descrito por:

⁴Estamos aqui, seguindo a notação atual da mecânica quântica, em oposição à notação de funções de ondas utilizada originalmente no artigo de EPR.

$$|\Psi(x_1, x_2)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x_1)\rangle \otimes |\varphi_n(x_2)\rangle, \quad (2.5)$$

e após a medição deste novo observável, tendo como resultado o autovalor correspondente a $|v_k(x_1)\rangle$, a outra partícula deveria estar no estado $|\varphi_k(x_2)\rangle$. Ou seja: o estado da partícula 2 dependeria de qual observável foi medido na partícula 1, mesmo que as duas estivessem bastante separadas espacialmente, o que seria, segundo EPR, um absurdo.

O artigo segue com o seguinte argumento: “...por outro lado, uma vez que no momento da medição as duas partículas não mais interagem, nenhuma mudança real pode acontecer na segunda partícula após a medição na primeira...”. Isto implicaria na incompletude da mecânica quântica.

As desigualdades de Bell: O *paradoxo* continuou, e deu origem à busca por variáveis locais escondidas, que pudessem explicar o questionamento de EPR. Os debates, porém, estavam mais no campo da filosofia do que da física. Somente após 30 anos, com os trabalhos de Bell [5] e suas famosas desigualdades, um avanço foi dado.

Foi estabelecido um teste quantitativo para essas duas hipóteses: ou a mecânica quântica era uma teoria incompleta, e deveriam existir variáveis ocultas que resolvessem o paradoxo, ou a suposição de EPR de que as partículas não estivessem mais correlacionadas estava falsa, i.e. deveriam existir correlações não-locais que afetassem instantaneamente o estado de uma das partículas ao se fazer uma medição na outra⁵.

Vamos agora fazer um resumo do resultado de Bell. Seguiremos os trabalhos de Rigolin [84] e Aspect [2], do qual retiramos a figura 2.2. Nela vemos uma fonte S que emite dois fótons correlacionados (v_1 e v_2) em direções opostas. Colocamos, então, dois detectores (I e II) para determinar o estado de polarização de cada um dos fótons (resultando em ± 1), segundo as direções dos detectores \vec{a} e \vec{b} , as quais são modificadas aleatoriamente, após a emissão dos fótons, num tempo menor do que o do vôo de um fóton entre eles, para impedir que um dos detectores “saiba” qual foi a direção escolhida pelo outro.

Os resultados das medições em cada detector podem depender, em princípio, de \vec{a} , \vec{b} e de um conjunto de outras variáveis locais que não podem ser controladas, mas que seriam necessárias para completar a descrição, que denotaremos coletivamente por E . Admitindo que a física é local, i.e. apenas \vec{a} e E determinam o resultado da medição no primeiro detector e \vec{b} e E no

⁵Há uma sutileza aqui que transcende o argumento de EPR. A existência de correlações lógicas não-locais não implica na existência de interação física não-local, o que obviamente violaria a teoria da relatividade.

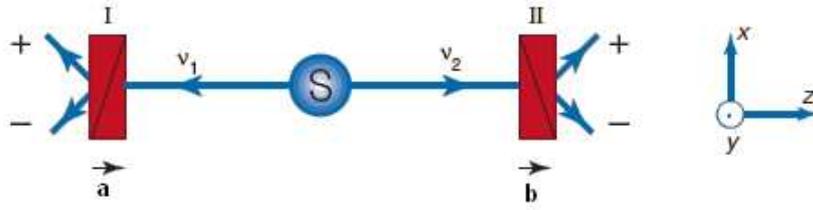


Figura 2.2 Ilustração da construção de um par de fótons como no artigo de EPR [30] para testar experimentalmente as desigualdades de Bell [5]. Figura retirada da ref. [2] onde dois fótons são emitidos em direções contrárias e suas polarizações são medidas, nas direções de \vec{a} e \vec{b} , para se testar as correlações existentes.

segundo, teríamos que:

$$\begin{aligned} M^I(\vec{a}, \vec{b}, E) &= M^I(\vec{a}, E) \quad \text{e} \\ M^{II}(\vec{a}, \vec{b}, E) &= M^{II}(\vec{b}, E), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $M^{I,II}$ indica o resultado da medição em cada detector. Em outras palavras, o conhecimento do valor de E estabelece a separabilidade do estado de dois fótons. Para cada par de partículas produzido, definimos a função de correlação $C(\vec{a}, \vec{b})$ integrando os resultados das medidas sobre todos os possíveis valores de E , com distribuição de probabilidade $p(E)$ ⁶, por:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \int M^I(\vec{a}, E) M^{II}(\vec{b}, E) p(E) dE \quad (2.7)$$

O passo seguinte ocorre quando cada detector varia a sua orientação. Temos então que

$$\begin{aligned} C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') &= \int M^I(\vec{a}, E) M^{II}(\vec{b}, E) p(E) dE - \\ &\quad \int M^I(\vec{a}, E) M^{II}(\vec{b}', E) p(E) dE \\ &= \int M^I(\vec{a}, E) M^{II}(\vec{b}, E) [1 - M^I(\vec{a}', E) M^{II}(\vec{b}', E)] p(E) dE - \\ &\quad \int M^I(\vec{a}, E) M^{II}(\vec{b}', E) [1 - M^I(\vec{a}', E) M^{II}(\vec{b}, E)] p(E) dE. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como $M^I \times M^{II} \leq 1$ e $p(E) \geq 0$, temos:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') \leq \int [1 - M^I(\vec{a}', E) M^{II}(\vec{b}', E)] p(E) dE -$$

⁶Satisfazendo $\int p(E) dE = 1$ e $p(E) \geq 0$.

$$\int [1 - M^I(\vec{a}', E)M^H(\vec{b}, E)]p(E)dE. \quad (2.9)$$

Podemos estimar um limitante superior do módulo do lado esquerdo da eq. (2.9) invertendo o sinal da segunda integral do lado direito, i.e.:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| \leq \int [1 - M^I(\vec{a}', E)M^H(\vec{b}', E)]p(E)dE + \int [1 - M^I(\vec{a}', E)M^H(\vec{b}, E)]p(E)dE, \quad (2.10)$$

o que nos leva ao resultado final:

$$S \equiv |C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| + C(\vec{a}', \vec{b}) + C(\vec{a}', \vec{b}') \leq 2. \quad (2.11)$$

Isto conclui nossa análise do trabalho de Bell. Caso algum experimento encontre $S > 2$, então a hipótese de que os resultados das medidas só dependem de variáveis locais é falso, e a natureza realmente exhibe correlações não-locais. Embora bastante elegante matematicamente, a idéia de Bell só foi possível de ser testada experimentalmente várias décadas depois, como veremos agora.

A prova experimental: Para completar essa discussão, em 1982, quase 50 anos após o artigo original de EPR, foi realizada uma experiência [31] que testou as desigualdades propostas por Bell. O resultado foi que Einstein estava errado, e que a mecânica quântica estava correta, mesmo admitindo correlações não-locais. Colocando nos termos atuais, dizemos que os dois fótons do *gedanken experiment* de Einstein estão num estado emaranhado, e sua realidade só pode ser entendida admitindo que eles formam um todo único, mesmo quando estão separados espacialmente.

O resultado central deste experimento é que as desigualdades de Bell são violadas por mais de 30 desvios padrões [2]. Isto ocorre mesmo quando a separação entre os detectores é da ordem de dezenas de quilômetros [94], confirmando, assim, a existência de correlações não-locais. Com isso concluímos a visão histórica do emaranhamento. Passemos agora à formulação matemática do mesmo.

2.3 Emaranhamento: uma visão formal

Vamos começar a construir as bases formais do emaranhamento quântico a partir de um exemplo bastante simples. Pensemos num sistema formado por duas partículas que podem

ocupar dois níveis ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$). Admita que seu estado é descrito como um par de EPR

$$|EPR\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.12)$$

onde o fator $\sqrt{2}$ aparece por questões de normalização. Em cada produto tensorial, o primeiro *ket* indica o estado da primeira partícula, enquanto o segundo *ket* indica o estado da segunda partícula. Vamos agora tentar escrever este estado nos moldes da equação (2.4), i.e. como um produto tensorial entre dois estados de uma única partícula.

$$|EPR\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle, \quad (2.13)$$

com $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$. É de imediata verificação⁷ que não existem coeficientes a , b , c e d que compatibilizem as equações (2.12) e (2.13). Isto implica que o par EPR **não** pode ser entendido como dois sistemas separados, mas sim como uma única entidade.

A interpretação física disto é simples: se fizermos uma medida na primeira partícula, encontraremos os valores 0 ou 1 com igual probabilidade, o mesmo ocorrendo ao fazermos uma medida na segunda partícula. Contudo, mesmo que essas partículas estejam a quilômetros de distância, se o resultado da medição na primeira partícula foi 0, então o da segunda também o será, o mesmo acontecendo com o resultado 1. Existe, portanto, uma correlação lógica não-local entre essas medições. Dizemos que estas partículas estão maximamente emaranhadas.

É importante lembrar que uma interpretação simplista destes resultados, na qual cada uma das duas partículas possui um estado bem definido, porém desconhecido, não é válida. Este foi o fato comprovado experimentalmente pela violação das desigualdades de Bell.

Definição: Um sistema quântico puro formado por n constituintes é dito emaranhado se não existir uma base $\{|\varphi^k\rangle\}$ dos n subsistemas de modo que ele possa ser representado numa forma fatorada:

$$|\Psi\rangle = |\varphi^1\rangle \otimes |\varphi^2\rangle \otimes \cdots \otimes |\varphi^n\rangle. \quad (2.14)$$

O termo *sistema quântico puro* é utilizado para diferenciar das misturas estatísticas, i.e. quando o sistema é formado por uma combinação de m estados $|\psi_i\rangle$ com respectivas proba-

⁷O coeficiente ad do termo $|01\rangle$ precisaria ser nulo na eq. (2.13), mas isto implicaria na anulação do termo $|00\rangle$ ou $|11\rangle$ da eq. (2.12).

bilidades (clássicas) p_i . Neste caso o sistema fica caracterizado por um operador densidade definido por:

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^m p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.15)$$

que será discutido em detalhes na seção 3.1.5. Nesta formulação, o sistema é dito não-emaranhado se ρ puder ser escrito como:

$$\rho = \sum_{i=1}^m p_i (\rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \cdots \otimes \rho_n^i). \quad (2.16)$$

Podemos perceber que a definição formal de emaranhamento quântico se faz por negação, i.e. definimos apenas o que é um sistema *não-emaranhado*. Vamos agora analisar o papel do conceito de emaranhamento na computação quântica.

2.4 A utilidade do emaranhamento

O emaranhamento não é apenas uma curiosidade, mas aparece como um grande recurso à disposição da computação e informação quântica. Como suas principais aplicações temos a codificação superdensa [9], a distribuição de chaves para protocolos de criptografia quântica [8] e a teleportação quântica de estados [10]. Uma visão geral destes tópicos pode ser encontrada nas notas de aula de Preskill, disponíveis on line na ref. [81].

- **Codificação superdensa:** O protocolo de codificação superdensa consiste na transmissão de 2 bits de informação clássica utilizando apenas um qubit. Entre o transmissor e o receptor deve existir um canal quântico de comunicação e um estado emaranhado.
- **Criptografia:** A utilização do emaranhamento torna possível a distribuição de chaves (utilizadas para decodificar a mensagem transmitida) inquebráveis, um grande feito da teoria da informação quântica.
- **Teletransporte:** Embora um estado quântico desconhecido não possa ser copiado [24, 110], o emaranhamento quântico permite que ele seja transmitido instantaneamente entre duas localidades separadas espacialmente⁸.

⁸É importante perceber que isto não corresponde à transmissão instantânea de informação.

Devido a sua enorme importância, faz-se necessário quantificar este recurso, i.e. construir um quantificador para o emaranhamento quântico. Este é o tema da nossa próxima seção e do resto dos resultados desta tese.

2.5 Quantificadores de emaranhamento

Neste ponto faremos um estudo detalhado do *emaranhamento bipartite*, i.e. o emaranhamento existente num sistema formado por duas partes, as quais chamaremos de A e B⁹. Para isso vamos definir inicialmente as medidas de entropia de Shannon e de von Neumann¹⁰.

Suponhamos que um certo evento ocorra de acordo com uma distribuição de probabilidade p . Qual seria a melhor maneira de quantificar a incerteza contida nesta distribuição? Uma opção seria dizer que a incerteza é maior, tanto quanto maior for a surpresa que teríamos ao observar o resultado de um evento. Esta surpresa pode ser expressa matematicamente por $1/p$, i.e. quanto menor for a probabilidade de um evento ocorrer, maior será a nossa surpresa pelo fato de ele ter ocorrido.

Embora matematicamente intuitiva, esta “definição” de surpresa não satisfaz o critério da aditividade. Dois eventos independentes que ocorrem com respectivas probabilidades p_1 e p_2 não satisfazem $1/(p_1 p_2) = 1/p_1 + 1/p_2$. Uma maneira de contornar este problema é redefinir a surpresa através de uma escala logarítmica, associando $\log(1/p) = -\log(p)$ à surpresa de um evento que ocorre com probabilidade p . Chegamos, então, num ponto onde podemos entender a definição da entropia de Shannon [87].

Definição: A uma coleção de estados a_i com respectivas probabilidades $p(a_i)$ associamos a entropia de informação (de Shannon):

$$S_S \equiv - \sum_i p(a_i) \log[p(a_i)], \quad (2.17)$$

que pode ser imediatamente interpretada como a média das surpresas entre todos os possíveis estados a_i . A base do logaritmo em estudos de informação quântica é usualmente escolhida como 2.

Embora classicamente a definição de entropia da equação (2.17) seja satisfatória, quanticamente a um estado arbitrário nós não temos uma única distribuição de probabilidades associ-

⁹Na literatura em inglês, essas partes são usualmente referidas como Alice e Bob.

¹⁰Esta introdução é baseada no trabalho de Vedral [102].

ada, mas sim uma distribuição diferente para cada observável desejado. Como podemos então definir uma medida de entropia?

Uma possibilidade seria utilizar o operador densidade ρ , definido na eq. (2.15). Este operador contém toda a informação associada a um sistema quântico. Podemos verificar isto realizando o cálculo do valor esperado de um operador A num sistema descrito pela mistura estatística de estados $|\psi_i\rangle$ com respectivas probabilidades p_i :

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i| A) = \text{Tr}(\rho A). \quad (2.18)$$

Podemos através de ρ definir uma nova medida de entropia, S_N , conhecida como entropia de von Neumann [78]. Esta medida é análoga à de Shannon, expressa pela eq. (2.17), mas utiliza o operador densidade no lugar das probabilidades.

$$S_N \equiv -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (2.19)$$

onde utilizamos novamente o logaritmo na base 2.

2.5.1 Requisitos de um quantificador

De posse da entropia de von Neumann, podemos iniciar o estudo dos quantificadores. As propriedades desejadas para um quantificador de emaranhamento quântico num sistema bipartite foram estabelecidas por Vedral et al. [100, 101, 102]. Vamos agora listá-las¹¹:

- Estados separáveis¹² devem ter emaranhamento nulo.

$$E \left(\sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \right) = 0 \quad (2.20)$$

- Uma operação local unitária não pode alterar o emaranhamento.

$$E \left(U_A \otimes U_B \rho^{AB} U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger \right) = E(\rho^{AB}) \quad (2.21)$$

- Operações locais com comunicação clássica (OLCC¹³) não podem aumentar o emaranhamento.

¹¹Estamos nos restringindo a um sistema *bipartite* AB , formado pelos subsistemas A e B .

¹²Definidos na eq. (2.16).

¹³Do inglês LOCC : Local operations with classical communication.

- O emaranhamento de um estado puro ρ^p é dado pela entropia de von Neumann (eq. 2.19) de cada uma das suas partes.

$$E(\rho^p) = S_N(\text{Tr}_A \rho^p) = S_N(\text{Tr}_B \rho^p), \quad (2.22)$$

onde Tr_A e Tr_B indicam operações de traço parcial em cada um dos subsistemas. O traço parcial de um operador consiste em se extrair as informações que estão contidas em cada uma de suas partes isoladamente, i.e. $\text{Tr}_A(\rho^{AB})$ indica a parcela da matriz densidade ρ^{AB} que está acessível apenas ao sistema B , excluindo a informação sobre A . Matematicamente temos¹⁴:

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.23)$$

onde $\{|a_i\rangle\}$ forma uma base para o subsistema A e $\{|b_i\rangle\}$ para o B , podemos constatar que esta operação (de traço parcial) reduz a dimensão do espaço, como deveria ser. Vejamos um exemplo do traço parcial, aplicado ao estado de EPR definido na eq. (2.12).

$$\begin{aligned} \rho &= |EPR\rangle\langle EPR| = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|) = \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|) \Rightarrow \\ &\text{Tr}_B(\rho) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}I, \end{aligned} \quad (2.24)$$

o que corresponde a uma situação completamente aleatória, com igual probabilidade do primeiro qubit (ou segundo) estar em qualquer estado.

Embora de interpretação simples, a definição do traço parcial como apresentada na eq. (2.23) é muitas vezes custosa no ponto de vista matemático, além de ser não intuitiva. Como veremos no capítulo 5, estas dificuldades desaparecem através da álgebra geométrica. Estamos agora prontos para introduzir formalmente alguns quantificadores de emaranhamento.

2.5.2 Emaranhamento destilável

O primeiro quantificador que apresentaremos trata da produção de pares de EPR a partir de pares menos emaranhados. A destilação do emaranhamento vem responder ao seguinte questionamento: suponhamos que dispomos de m cópias do estado ρ^{AB} . Quantos pares de EPR, i.e., pares maximamente emaranhados, podemos construir a partir deles? Chamando de n o número de pares de EPR resultante, o emaranhamento destilável é definido como:

¹⁴Definição retirada de [80], p.105.

$$E_D \equiv \sup_{OLCC} \left(\frac{n}{m} \right), \quad (2.25)$$

onde a operação de supremo é feita sobre todos os possível protocolos OLCC que levam as cópias de ρ^{AB} nos pares de EPR. Está implícito nesta definição que este supremo é calculado num processo assintótico, com $m \rightarrow \infty$.

2.5.3 Custo de emaranhamento

O segundo quantificador trata do problema inverso: quantas cópias m' de ρ^{AB} podemos construir através de protocolos de OLCC a partir de n' pares de EPR? Definimos, portanto, o custo do emaranhamento como o ínfimo sobre OLCC da razão entre estas duas quantidades.

$$E_C \equiv \inf_{OLCC} \left(\frac{n'}{m'} \right) \quad (2.26)$$

Percebemos, pelas definições apresentadas nas equações (2.25) e (2.26), que $E_D \leq E_C$. Já é conhecido que a igualdade ocorre em alguns casos específicos [11, 51]. Uma discussão sobre este assunto pode ser encontrada na ref. [22]. Observemos o papel fundamental dos protocolos de OLCC nas duas últimas definições. Isto ocorre pois estas são as operações mais gerais que podem ser feitas sem um canal de comunicação quântico entre os subsistemas.

2.5.4 Emaranhamento de formação

O próximo quantificador, o emaranhamento de formação, é uma extensão da definição de emaranhamento de um sistema puro, dada pela entropia de von Neumann, eq. (2.19). A extensão natural desta equação para sistemas gerais, descritos por um operador densidade arbitrário, é a combinação convexa dos emaranhamentos de cada realização pura descrita por $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, com pesos p_i , definida como segue:

$$E'_F(\{p_i, \rho_i\}) \equiv \sum_i p_i S_N(\rho_i). \quad (2.27)$$

O problema deste quantificador do emaranhamento de formação do sistema é que a decomposição mostrada na eq. (2.15) não é única! Este fato está detalhado no apêndice A, onde apresentamos a esfera de Bloch. O emaranhamento de formação fica, então, definido como o ínfimo sobre todas as decomposições possíveis, i.e.:

$$E_F \equiv \inf_{decomp.} E'_F(\{p_i, \rho_i\}). \quad (2.28)$$

Esta definição torna o emaranhamento de formação um quantificador não operacional, visto que não se consegue obter este ínfimo através de um procedimento sistemático. Contudo, para o caso de apenas 2 qubits, Wootters [111] chegou a uma expressão analítica para o emaranhamento de formação do sistema, como será visto adiante.

A fórmula de Wootters: Num artigo recente, Wootters [111] demonstra que o emaranhamento de formação de um sistema geral de dois qubits é dado por:

$$E_F(\rho) = f(C(\rho)), \quad (2.29)$$

onde $f(t) \equiv \hat{h}\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{2}\right)$, $C(\rho)$ é a concorrência do sistema, e a entropia binária $\hat{h}(x)$ é definida por:

$$\hat{h}(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x), \quad (2.30)$$

com o logaritmo tomado na base 2. A concorrência pode ser expressa através da seguinte operação:

$$C(\rho) = \max\{0, \Lambda_1^* - \Lambda_2^* - \Lambda_3^* - \Lambda_4^*\}, \quad (2.31)$$

com os Λ_i^* sendo as raízes quadradas dos autovalores do operador $\rho \rho^{flip}$, definidos nas eq. (2.15) e (2.32), e tomados em ordem decrescente, i.e. $\Lambda_1^* \geq \Lambda_2^* \geq \Lambda_3^* \geq \Lambda_4^*$. Uma interpretação física para a concorrência $C(\rho)$, bem como a sua determinação experimental, já foram alcançadas para um sistema de dois qubits nos trabalhos de Mintert [74], Horodecki [52] e Walborn et al. [107]. Este resultado está discutido no apêndice B e na seção 4.7.

A fórmula de Wootters faz uso de uma operação chamada “spin-flip”¹⁵, que para o caso de dois spins é definida por

$$\rho^{flip} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.32)$$

onde ρ^* é o complexo conjugado de ρ na base em que $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Voltaremos a falar da fórmula de Wootters no capítulo 4, onde calcularemos o emaranhamento de formação de um sistema específico de qubits.

¹⁵A operação recebe esta denominação pois sua atuação inverte a orientação dos spins do sistema.

2.5.5 Emaranhamento de entropia relativa

O último quantificador que discutiremos é baseado na medida de entropia relativa e foi proposto por Vedral et al. [100]. A idéia consiste em se estabelecer uma métrica para medir a “distância” entre duas matrizes densidade. A medida do emaranhamento, por sua vez, estaria ligada à distância entre a matriz densidade do sistema considerado e a do sistema separável mais próximo. Para introduzir este conceito começemos pela versão clássica.

Definição: [102] Suponhamos que nós temos dois conjuntos discretos de eventos a_i e b_i com respectivas distribuições de probabilidade $p(a_i)$ e $p(b_i)$. A entropia relativa destas duas distribuições é definida por:

$$S[p(a)||p(b)] \equiv \sum_i p(a_i) \log \frac{p(a_i)}{p(b_i)}, \quad (2.33)$$

e mede uma distância¹⁶ entre estas duas distribuições.

Tendo definido a entropia relativa de duas distribuições, passemos agora à idéia da informação mútua contida nelas. Como primeira definição, a informação mútua (de Shannon) entre duas distribuições é expressa por:

$$I(A : B) \equiv S_S[p(a)] + S_S[p(b)] - S_S[p(a, b)], \quad (2.34)$$

onde A e B são duas variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades marginais dadas respectivamente por $p(a)$ e $p(b)$ e distribuição conjunta $p(a, b)$ ¹⁷.

A conexão entre as definições das eq. (2.33) e (2.34) ocorre ao expressarmos a informação mútua como a entropia relativa existente entre $p(a, b)$ e $p(a) \times p(b)$, i.e.:

$$I(A, B) = S[p(a, b)||p(a) \times p(b)], \quad (2.35)$$

ou seja: a informação mútua que os sistemas A e B possuem é dada pela distância entre a distribuição conjunta de probabilidade e o produto das suas distribuições marginais. Este fato está de acordo com nossa intuição de que dois eventos independentes não possuem qualquer informação mútua.

Passando para a versão quântica, a informação mútua de von Neumann é definida por:

¹⁶Rigorosamente isto não estabelece uma métrica, visto que não é simétrica.

¹⁷As distribuições marginais podem ser obtidas a partir da distribuição conjunta por: $p(a_i) = \sum_j p(a_i, b_j)$ e $p(b_i) = \sum_j p(a_j, b_i)$.

$$I_N(\rho_A : \rho_B : \rho_{AB}) = S_N(\rho_A) + S_N(\rho_B) - S_N(\rho_{AB}), \quad (2.36)$$

e a respectiva entropia relativa é dada por

$$S_N(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr}[\rho_A(\log \rho_A - \log \rho_B)]. \quad (2.37)$$

Esta última definição nos dá uma medida da distinguibilidade entre os estados ρ_A e ρ_B . Estamos prontos, agora, para a definição do emaranhamento de entropia relativa. Como dissemos, a motivação da definição que segue é a de se quantificar emaranhamento como a distância entre o operador densidade que descreve o sistema conjunto ρ_{AB} e o estado separável mais próximo. Matematicamente temos:

$$E_R(\rho_{AB}) \equiv \min_{\rho_{sep}} S_N(\rho_{AB} || \rho_{sep}), \quad (2.38)$$

onde ρ_{sep} indica qualquer estado separável existente entre os dois subsistemas.

2.6 Conclusões

Ao longo deste capítulo, apresentamos a noção de emaranhamento quântico e como ela apareceu na física (seções 2.2 - 2.3). As suas propriedades sem análogo clássico são responsáveis pelas grandes vantagens da computação quântica sobre sua versão clássica, em particular protocolos como os de teletransporte quântico, codificação superdensa e criptografia quântica seriam impossíveis de se realizar sem a utilização de estados emaranhados.

Dado o seu importante papel, é imprescindível a caracterização e quantificação do emaranhamento quântico. Apresentamos diversos quantificadores (subseções 2.5.2 - 2.5.5) e observamos uma dificuldade presente em todos eles: a não operacionalidade do seu cálculo. Isto motiva a busca de novas ferramentas matemáticas, capazes de expressar as operações sobre os estados quânticos de maneira mais intuitiva e acessível matematicamente. Embora para o caso de dois qubits já exista uma fórmula matemática operacional, a fórmula de Wootters, acreditamos que a busca pela simplicidade na apresentação dos conceitos chave do emaranhamento servirão no futuro como pilares para o estudo de sistemas mais complexos. Este é o objetivo principal deste trabalho.

Seguiremos agora, no capítulo 3, com uma análise dos sistemas físicos capazes de simular operações em qubits. Nos capítulos 4 e 5 apresentaremos cálculos de emaranhamento, bem

como novos procedimentos para gerá-lo de forma controlada.

Realização Experimental

“Para uma tecnologia ser bem sucedida, a realidade deve preceder as relações públicas, uma vez que a natureza não pode ser enganada.” - Richard P. Feynman (1986)

O elemento base das teorias da informação e computação quântica é o qubit, análogo quântico para o bit. Em princípio, qualquer sistema quântico de dois níveis é um candidato a qubit, porém, como veremos adiante, existem várias outras propriedades que são necessárias para que se possa realmente fazer funcionar um computador quântico.

O que torna isto tudo um problema experimentalmente desafiador, é que várias destas propriedades são conflitantes, i.e. a otimização de uma vem junto com o detrimento de outra. Portanto, a questão não é *se* um computador quântico poderá ser construído, mas *quão bom* ele será [80].

Ao longo deste capítulo, discutiremos a realização experimental de um computador quântico. Faremos inicialmente uma discussão das características desejadas para um sistema físico poder funcionar como tal, e em seguida veremos um pouco dos principais sistemas atualmente estudados. Uma referência bastante completa do estado atual de pesquisa pode ser encontrado em [85], para uma visão geral dos sistemas físicos ver o capítulo 7 da ref. [80]. Este capítulo é, em grande parte, baseado nestes dois trabalhos.

3.1 Requisitos experimentais

As características necessárias para um sistema físico atuar como computador quântico foram estabelecidas em 2000 por DiVincenzo [26]. Elas se dividem em duas partes. A primeira, formada por cinco critérios, estabelece as condições para a construção de um único computador quântico.

- Um sistema físico escalonável, formado por qubits bem caracterizados.
- A habilidade de se construir um estado inicial arbitrário.

- Tempo de descoerência muito maior do que o tempo para se executar uma operação lógica fundamental (*quantum gate*).
- Construção de um conjunto universal de portas lógicas.
- A capacidade de se fazer uma medição em um qubit específico.

A segunda parte, formada por dois critérios, estabelece as condições para se construir uma rede de computadores, i.e. as condições para haver comunicação entre computadores quânticos distintos.

- A habilidade de converter qubits fixos em qubits móveis e vice-versa.
- A habilidade de transmitir qubits móveis entre localidades específicas.

Vamos agora discutir um pouco sobre cada um destes 7 requisitos.

3.1.1 Representatividade e escalonamento

Como condição primária para se construir um computador quântico, é necessário que o sistema tenha uma boa realização para o qubit. Como exemplos, temos o estado de polarização do fóton, a orientação do spin eletrônico/nuclear, o número de pares de Cooper numa ilha supercondutora, etc. Discutiremos estas e outras representações na próxima seção deste capítulo. O outro requisito trata da possibilidade de se expandir o número de elementos lógicos (qubits) do sistema de forma controlada. O sistema precisa ser escalonável.

São duas as principais dificuldades encontradas para o problema do escalonamento de um computador quântico. A primeira está relacionada à interação entre os qubits; é necessário que cada qubit interaja com outros qubits do sistema, e esta interação se torna mais difícil, à medida que se aumentam as distâncias entre eles. A segunda é ligada ao requisito 3.1.3, pois quanto maior o sistema, menor é o tempo de descoerência, i.e.: mais facilmente o ambiente externo irá destruir as correlações entre os qubits.

3.1.2 Estado inicial

Outro ponto necessário é a preparação de um estado arbitrário $|\psi\rangle_{in}$, a partir do qual se iniciará o processo de computação. Na prática, precisamos apenas contruir um estado inicial padrão, por exemplo: $|0\rangle^{\otimes n}$ e submetê-lo a uma evolução unitária apropriada.

$$|0\rangle^{\otimes n} \xrightarrow{U} |\psi\rangle_{in} \quad (3.1)$$

Quanto maior a fidelidade do estado inicial preparado, maior será a fidelidade do resultado final da computação. Cada sistema quântico tem uma maneira característica de se construir este estado inicial. Esta, porém, não é a situação de todos os sistemas, existem alguns, como o baseado em ressonância magnética nuclear que, devido à grande dificuldade de se preparar tal estado, uma formulação alternativa de computação é feita, o que será discutido na próxima seção.

3.1.3 Tempo de descoerência

Um fator crucial é a razão entre o tempo de descoerência e o tempo necessário para se executar uma porta lógica. A descoerência pode ser entendida como o resultado da interação do sistema com o meio externo. Se estivesse completamente isolado, o sistema evoluiria de maneira unitária (coerente), mas na prática é o conjunto (sistema + ambiente) que o faz. A evolução unitária deste conjunto causa uma evolução não-unitária do sistema¹, e isto implica em perda de coerência durante a dinâmica. Matematicamente isto pode ser expresso pelo aparecimento de fases relativas entre os diversos estados do sistema quântico em questão.

A figura de mérito em questão é quantas operações lógicas poderão ser feitas antes da descoerência do sistema. Que o sistema terá um tempo de descoerência finito é um fato inevitável, dado que não existe um sistema perfeitamente isolado². Na prática, o próprio aparato de medição introduzirá descoerência ao sistema. Na tabela 3.1, reproduzida da referência [25], vemos a relação entre esses tempos para diversos sistemas físicos distintos. Na primeira coluna temos o tempo de descoerência, na segunda o tempo para se realizar uma operação lógica e na terceira a razão entre esses dois, i.e. o número de operações que podem ser feitas antes da descoerência do sistema.

Construir um sistema isolado o suficiente para que o número de operações lógicas seja grande e ao mesmo tempo interagindo com o aparato de medição de maneira satisfatória é o grande desafio aqui.

¹Este fato será discutido com mais detalhes na seção 5.4.

²Salvo o universo completo, o que não é muito útil.

| Sistema | Descoerência | Operação | Número |
|------------------------|---------------|---------------------|------------------|
| Spin Nuclear | $10^2 - 10^8$ | $10^{-3} - 10^{-6}$ | $10^5 - 10^{14}$ |
| Spin Eletrônico | 10^{-3} | 10^{-7} | 10^4 |
| Armadilha de Íon (In) | 10^{-1} | 10^{-14} | 10^{13} |
| Ponto Quântico | 10^{-6} | 10^{-9} | 10^3 |
| Cavidade Óptica | 10^{-5} | 10^{-14} | 10^9 |
| Cavidade de Microondas | 10^0 | 10^{-4} | 10^4 |

Tabela 3.1 Relação dos tempos (em segundos) característicos nos diversos sistemas físicos, bem como o número esperado de operações lógicas possíveis.

3.1.4 Portas lógicas universais

Um processo de computação ocorre através de várias portas lógicas. É necessário, portanto, que o sistema físico seja capaz de realizá-las. Não é preciso, contudo, um procedimento para cada uma das portas lógicas possíveis. Existe um conjunto compacto de portas que geram todas as demais, essas são as chamadas *portas lógicas universais*. Mais precisamente, um conjunto de portas lógicas é definido como universal (para a computação quântica) se qualquer operação unitária puder ser obtida com precisão arbitrária por um circuito quântico formado apenas por essas portas. O objetivo, portanto, é construir um procedimento experimental para a realização de cada uma das portas universais. O que já foi em grande parte alcançado, como veremos na próxima seção.

Conforme demonstrado no capítulo 4 da ref. [80], portas lógicas que atuam em um único qubit (porta de fase, Hadamard e a porta $\pi/8$) mais a porta CNOT³ (ilustrada no circuito abaixo) formam um conjunto universal.

$$\begin{array}{c}
 |\psi\rangle \text{ --- } \bullet \text{ --- } |\psi\rangle \\
 |\phi\rangle \text{ --- } \oplus \text{ --- } |\phi\rangle \oplus |\psi\rangle
 \end{array} \quad (3.2)$$

3.1.5 Medição

Toda a computação só é relevante se existir algum procedimento de verificação de resultados. Isto ocorre através de um aparato de medição. O sistema quântico deve interagir (acoplar)

³Abreviatura para: *controlled not*, i.e. a porta efetua uma operação “not” em um qubit (alvo) se o primeiro qubit (controlador) for $|1\rangle$.

com algum sistema clássico e transmitir a ele a informação referente ao resultado da computação. A grande questão é que este acoplamento irá afetar o sistema quântico em questão, introduzindo novas fontes de erros. Vamos agora introduzir um formalismo de medição através do operador densidade que descreve o sistema. A maneira como se constroi um aparato de medição será discutida de maneira específica em cada sistema físico, na próxima seção.

Associado a um sistema quântico constituído por uma mistura estatística de N estados $|\psi_i\rangle$, com respectivas probabilidades p_i , temos o operador densidade

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3.3)$$

A probabilidade de se obter o valor x após uma medição através dos operadores de medição M_x ⁴ é dada por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^N p(x|i)p_i = \sum_{i=1}^N p_i \text{Tr} \left(M_x^\dagger M_x |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) = \text{Tr} \left(M_x^\dagger M_x \rho \right), \quad (3.4)$$

onde $p(x|i)$ indica a probabilidade da medição resultar no valor x , dado que o sistema se encontra no estado $|\psi_i\rangle$.

O operador densidade do sistema após a medição (com resultado x) se torna:

$$\rho_x = \frac{M_x \rho M_x^\dagger}{\text{Tr} \left(M_x^\dagger M_x \rho \right)}. \quad (3.5)$$

Observe que a transição de ρ para ρ_x não se dá através de uma evolução unitária, i.e. $\nexists U$ unitário tal que $\rho_x = U \rho U^\dagger$. Sabemos, através da mecânica quântica, que a evolução de um sistema físico **isolado** sempre pode ser descrita como uma evolução unitária. O que ocorre numa medição é que o conjunto (sistema + ambiente⁵) evolui unitariamente, conforme discutido na seção 3.1.1. Vamos agora passar para os dois últimos critérios, aqueles responsáveis por permitir a construção de redes de computadores quânticos.

3.1.6 Conversão entre tipos de qubits

Neste ponto, é necessário fazermos uma distinção entre dois tipos de qubits. Esta distinção se refere à mobilidade espacial do qubit. O primeiro, chamado de qubit fixo é aquele que tem uma posição específica dentro de um circuito quântico, como o spin nuclear ou a posição de um

⁴Esses operadores satisfazem a condição de completude: $\sum_x M_x^\dagger M_x = I$

⁵Aqui ambiente significa basicamente o aparato de medição.

ponto quântico. O segundo, chamado de qubit móvel é aquele que, conforme o nome indica, pode se mover, como no caso dos fótons.

Como veremos no requisito seguinte, é importantíssimo para uma rede de computadores a existência desses dois tipos de qubits, bem como um mecanismo para converter informação entre eles.

3.1.7 Transmissão de qubits móveis

Este último requisito trata da comunicação entre computadores quânticos separados espacialmente. É necessária a existência de um canal de comunicação quântico que possa transportar os qubits móveis entre os computadores distintos. Faz-se, portanto, necessária, a conversão da informação entre os dois tipos de qubits, como visto no critério anterior. Um computador quântico deve ser capaz de receber uma informação vinda através de um qubit móvel e convertê-la para um qubit fixo e vice-versa.

Tendo visto os requisitos experimentais para a construção do computador quântico, passemos agora a discutir os diversos sistemas físicos onde se faz computação quântica e como cada um desses sistemas atende a esses requisitos.

3.2 Sistemas físicos

Conforme foi dito anteriormente, existe uma diversidade enorme de candidatos a *hardware* para o computador quântico. O requisito inicial é apenas a realização de um sistema quântico de dois níveis, o que pode ser alcançado por inúmeros sistemas físicos. A maneira como cada um desses sistemas alcança (ou tenta alcançar) os requisitos apresentados anteriormente, porém, difere bastante. Devido à grande diversidade dessa área, cada grupo de pesquisa tentou adaptar o seu sistema de estudo para este novo propósito. Vamos agora discutir cada um dos principais candidatos.

3.2.1 Dispositivos supercondutores

O primeiro (e mais detalhado) sistema físico que falaremos utiliza fenômenos de supercondutividade para processar dados em computação quântica. Uma boa referência para os tópicos de supercondutividade que falaremos pode ser encontrada na ref. [93], enquanto que na ref.

[55] encontramos a ligação com computação quântica. A grande promessa desse sistema é a escalabilidade e a fácil integração em sistemas eletrônicos existentes. Há duas maneiras distintas de se representar qubits em um sistema supercondutor: a primeira consiste da contagem de cargas, aqui representadas por pares de Cooper com carga $2e$, através do *single-electron transistor* (SET) e a segunda consiste da medição do fluxo magnético Φ que atravessa um circuito SQUID⁶.

Antes de começarmos a ligação com computação quântica, vamos rever os resultados básicos de circuitos supercondutores com junções Josephson que utilizaremos adiante. As junções Josephson consistem basicamente de dois supercondutores ligados por uma pequena junção⁷. Em seu artigo [57] Josephson previu que, mesmo na ausência de uma voltagem aplicada, deveria existir uma corrente atravessando a junção dada pela equação

$$I = I_c \text{sen}(\Theta), \quad (3.6)$$

onde I_c indica a corrente máxima na junção enquanto que Θ representa a diferença dos parâmetros de ordem complexos dos supercondutores adjacentes à junção. Além disso, Josephson também previu que esta diferença de fase deveria evoluir de acordo com uma voltagem V aplicada ao circuito de acordo com:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (3.7)$$

Utilizando os resultados das equações (3.6) e (3.7) podemos calcular a energia de acoplamento E armazenada na junção para produzir a diferença de fase Θ :

$$E = \int IV dt = \int I_c \text{sen}\Theta \frac{\hbar}{2e} d\Theta = -\frac{\hbar I_c}{2e} \cos\Theta + \text{constante}, \quad (3.8)$$

desprezando o termo constante (no nosso modelo efetivo para o hamiltoniano) e definindo $E_J \equiv \frac{\hbar I_c}{2e}$ temos:

$$E = -E_J \cos\Theta. \quad (3.9)$$

Estamos prontos, agora, para estudar o primeiro tipo de computador quântico baseado em supercondutividade, i.e. aquele que utiliza a quantização da carga.

⁶Superconducting Quantum Interference Device - Basicamente um anel supercondutor com uma junção Josephson que aprisiona quanta de fluxos magnéticos, como será visto adiante.

⁷O tipo da junção, i.e. condutora, isolante ou supercondutora, caracterizará os diferentes tipos de junções Josephson.

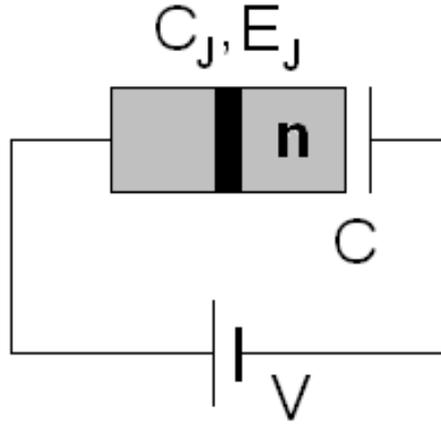


Figura 3.1 Esquema de circuito utilizando uma junção Josephson para a representação de um qubit através da contagem do número n de pares de Cooper presentes numa determinada ilha.

3.2.1.1 Quantização da Carga

A primeira maneira de se obter uma representação de qubit em dispositivos supercondutores que iremos analisar é através de dois estados quânticos distintos, que diferem entre si por um par de Cooper em uma determinada ilha do circuito [77, 104]. As portas lógicas da computação podem ser realizadas ajustando-se parâmetros do circuito como o campo magnético aplicado e a voltagem do sistema.

Na figura 3.1 ilustramos um modelo elementar para a representação de um único qubit utilizando este procedimento de quantização de carga. Nosso sistema consiste de uma ilha com n pares de Cooper conectada através de uma junção Josephson com capacitância C_J e energia de acoplamento E_J a um eletrodo supercondutor. Utilizamos ainda dois dispositivos de controle: um potencial V acoplado ao sistema e um capacitor C , que conecta esta voltagem à ilha. Operamos, então, em condições em que o gap de energia supercondutora Δ é muito maior do que a energia necessária para uma única carga entrar na ilha, i.e. $\Delta \gg \frac{e^2}{2(C+C_J)} \equiv E_c$. Nessas condições não há tunelamento de quasi-partículas, apenas de pares de Cooper. O hamiltoniano do sistema fica descrito pela soma da energia de carga de pares de Cooper na ilha com energia dada pela equação (3.9) relativa à fase. Temos portanto

$$H = H_c + H_J = 4E_c(n - n_0)^2 - E_J \cos(\Theta), \quad (3.10)$$

onde Θ é a variável conjugada ao número de pares na ilha, i.e. $n = -i\hbar\partial/\partial(\hbar\Theta)$; $[\Theta, n] = i$. O fator 4 multiplicando E_c vem da carga do par de Cooper ($2e$), enquanto que $n_0 \equiv CV/2e$,

pode ser ajustado para que os únicos termos relevantes sejam aqueles com $n = 0$ e $n = 1$ par de Cooper na ilha.

Vamos agora à construção do hamiltoniano na base $|n\rangle$, onde $|0\rangle \equiv (1, 0)^\dagger$ e $|1\rangle \equiv (0, 1)^\dagger$ na representação matricial. O termo H_c do nosso hamiltoniano, eq. (3.10), fica expresso por:

$$H_c = \sum_n \{4E_c(n - n_0)^2 |n\rangle \langle n|\}, \quad (3.11)$$

onde o termo $(n - n_0)^2$ pode ser simplificado para $(1 - 2n_0)n + n_0^2$, pois estamos tratando do subespaço $n = \{0, 1\}$. Substituindo isto e desprezando o termo constante n_0^2 temos:

$$H_c = \sum_n \{4E_c(1 - 2n_0)n |n\rangle \langle n|\} = 4E_c(1 - 2n_0) |1\rangle \langle 1| = 4E_c(1 - 2n_0) \frac{I - \sigma^z}{2}, \quad (3.12)$$

onde a matriz de Pauli σ^z está definida na eq. (4.3). Desprezando o termo constante $I/2$, chegamos em:

$$H_c = -\frac{1}{2} \{4E_c(1 - 2n_0)\sigma^z\} \equiv -\frac{1}{2} B_z \sigma^z. \quad (3.13)$$

Vamos agora reescrever o termo H_J do hamiltoniano da eq. (3.10).

$$H_J = -E_J \cos(\Theta) = -\frac{E_J}{2} \sum_n \{|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|\}, \quad (3.14)$$

pois $\cos(\Theta)$ na base $\{|n\rangle\}$ toma a forma $\frac{1}{2} \sum_n \{|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|\}$; visto que $e^{i\theta} |n\rangle = |n+1\rangle$. No subespaço $n = \{0, 1\}$, a expressão para H_J simplifica para:

$$H_J = -\frac{1}{2} E_J \{|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|\} = -\frac{1}{2} E_J \sigma^x \equiv -\frac{1}{2} B_x \sigma^x. \quad (3.15)$$

Podemos então reescrever o hamiltoniano completo do sistema descrito pela eq. (3.10) como:

$$H = -\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{B} = (B_x, 0, B_z). \quad (3.16)$$

Controlando-se os parâmetros B_x e B_z por intervalos de tempo específicos, podemos realizar todas as portas lógicas de um qubit desejadas [32], como será discutido adiante.

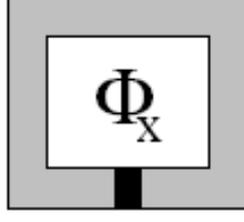


Figura 3.2 Esquema de um dispositivo SQUID, formado por um anel supercondutor contendo uma junção Josephson (em preto na figura) sendo atravessado por um fluxo magnético Φ_x .

3.2.1.2 Quantização do Fluxo

O segundo caminho para se gerar um sistema quântico de dois níveis em dispositivos supercondutores é através da quantização do fluxo magnético [36, 72] que passa através de um dispositivo SQUID, como mostrado na figura 3.2.

No circuito esquematizado, a diferença de fase através da junção, Θ , está relacionada com o fluxo Φ que a atravessa pela relação

$$\Theta = 2\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right), \quad (3.17)$$

com $\Phi_0 \equiv h/(2e)$ sendo o quantum de fluxo magnético e n um número inteiro qualquer. Podemos ainda aplicar um fluxo Φ_x para controlar parâmetros do hamiltoniano do sistema, que fica expresso pela soma dos termos referentes à fase Θ , à autoindutância L e à carga Q :

$$H = -E_J \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + \frac{(\Phi - \Phi_x)^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C_J}, \quad (3.18)$$

onde C_J é a capacitância da junção enquanto que Q é a variável canonicamente conjugada ao fluxo Φ , i.e. $Q = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \Phi}$.

A situação física de interesse ocorre quando $E_J > \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2$ e Φ_x se aproxima de $\Phi_0/2$, em baixas temperaturas. Isto implica no aparecimento de um potencial do tipo poço duplo próximo de $\Phi = \Phi_0/2$, no qual apenas os dois primeiros níveis energéticos são significativos e o hamiltoniano efetivo do sistema se torna igual ao da eq. (3.16), onde agora Φ_x e E_J controlam os coeficientes B_x e B_z .

Conforme mostrado em [32], o controle dos coeficientes de um hamiltoniano do tipo apresentado na eq. (3.16) possibilita a realização de qualquer porta lógica de um único qubit.

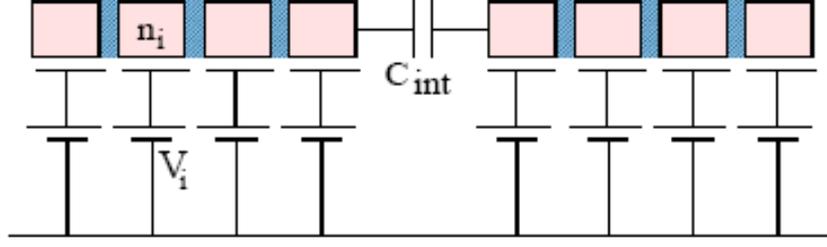


Figura 3.3 Modelo de Averin [3] para dois qubits interagentes acoplados via um capacitor C_{int} .

3.2.1.3 Propostas para implementar interação (portas com 2 qubits)

Para termos um sistema com vários qubits, necessitaríamos ainda de um termo de acoplamento entre eles como no modelo de Heisenberg, i.e.:

$$H_{int} = \sum_{i \neq j} \sum_{a,b} J_{ij}^{ab}(t) \sigma_i^a \sigma_j^b, \quad (3.19)$$

onde $J_{ij}^{ab}(t)$ indica a energia de acoplamento do sistema, i e j indicam os sítios correspondentes às posições dos qubits, enquanto que $\{a, b\} \in \{x, y, z\}$ rotulam as matrizes de Pauli. Vamos ilustrar duas propostas de sistemas com mais de um qubit interagindo por um hamiltoniano deste tipo.

Primeiramente temos a proposta de Averin [3], onde dois qubits feitos por quantização de carga interagem através de um capacitor colocado entre eles, como ilustrado na figura 3.3, retirada da ref. [55]. Para esse sistema Averin demonstrou que a interação poder ser modelada por

$$H_{int} = J^{zz}(t) \sigma_1^z \sigma_2^z, \quad (3.20)$$

onde a constante J^{zz} está relacionada à capacitância C_{int} colocada entre os qubits.

O segundo modelo que iremos apresentar foi proposto por Mooij et al. [75]. Os dois qubits são construídos por quantização de fluxo e interagem via acoplamento LC , como ilustrado na figura 3.4, retirada da ref. [55]. O hamiltoniano deste sistema também é um caso particular da formula geral apresentada na eq. (3.19) e fica expresso por

$$H_{int} \propto \sum_{i < j} J_{ij}^{yy}(t) \sigma_i^y \sigma_j^y, \quad (3.21)$$

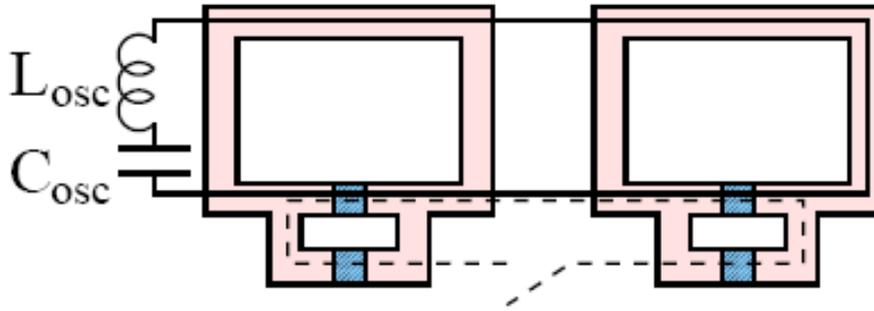


Figura 3.4 Modelo de Mooij [75] para qubits interagentes.

onde a constante $J_{ij}^{yy}(t)$ está relacionada à capacitância C_{osc} e à indutância L_{osc} colocada entre os qubits. Com isto concluímos a apresentação de sistemas supercondutores para a computação quântica.

3.2.2 Métodos ópticos

Os dois sistemas físicos que iremos estudar a partir de agora: fótons e cavidades ópticas são bastante parecidos em vários aspectos. A diferença ocorrerá na forma de interação entre os qubits, como veremos. Os fótons possuem várias características que os tornam fortes candidatos para a implementação da computação quântica. Em primeiro lugar, eles possuem uma boa representação para o qubit, quer seja a sua polarização (horária ou anti-horária) ou a sua localização espacial (numa cavidade ou em outra). Vamos agora discutir um pouco esta última maneira.

Uma representação para o qubit pode ser feita acoplando-se duas cavidades ópticas com energia total $\hbar\omega$, o que corresponde a um único fóton, com essa energia, contido no sistema formado pelas cavidades. Podemos então construir um estado $|01\rangle$ e outro $|10\rangle$, respectivamente relacionados com a situação do fóton estar contido em uma das cavidades ou na outra⁸. O passo seguinte é a criação de um único fóton para ser colocado neste sistema. Esta técnica já é bem estabelecida [50, 62] e consiste, basicamente, em se diminuir a potência de um LASER até que seja emitido um único fóton por vez. Uma vez construído o qubit, vamos agora fazer operações lógicas nele com os elementos disponíveis em um laboratório de óptica, i.e. fibras ópticas, deslocadores de fase e divisores de feixe.

As fibras ópticas formam o nosso canal de comunicação quântico, através das quais pode-

⁸Essa representação, chamada de duplo-trilho, está discutida na seção 7.4 da ref. [80].

mos transportar os nossos qubits móveis entre localidades distintas. Os deslocadores de fase e divisores de feixe são utilizados para a construção de portas lógicas em um único qubit. Vamos exemplificar este processo com a construção de uma porta de Hadamard.

Um deslocador de fase é simplesmente um material transparente com índice de refração n diferente do índice do meio n_0 . O seu efeito consiste em uma diferença de fase criada entre a propagação do fóton através dele e a propagação no meio inicial por um fator $e^{i(n-n_0)L/c} \equiv e^{i\Delta}$, com L indicando a extensão do deslocador de fase e c a velocidade da luz no vácuo. A atuação dele num estado que não contém um fóton ($|0\rangle$) não faz nada, enquanto que num estado de um fóton faz a transformação $|1\rangle \rightarrow e^{i(n-n_0)L/c} |1\rangle$.

Vamos agora atuar com o deslocador de fase (DF) num estado da nossa representação de duplo-trilho. Para isso faremos apenas o primeiro dos qubits da representação passar por um deslocador de fase. Temos portanto

$$DF(a|01\rangle + b|10\rangle) = a|01\rangle + e^{i\Delta}b|10\rangle = e^{i\Delta/2} \left(e^{-i\Delta/2}a|01\rangle + e^{i\Delta/2}b|10\rangle \right). \quad (3.22)$$

O que corresponde a uma rotação de Δ em \hat{Z} , a menos de uma fase global que não importa. Vamos agora à construção do divisor de feixe.

O divisor de feixe é um espelho que reflete uma fração ($\equiv \cos(\theta)$) da luz incidente e transmite a outra parte. Em termos de operadores na nossa representação duplo-trilho isso corresponde a uma rotação de θ em \hat{Y} , como ilustrado no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{l} |10\rangle \\ |01\rangle \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{DF} \\ \boxed{DF} \end{array} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} \cos(\theta)|10\rangle - \sin(\theta)|01\rangle \\ \sin(\theta)|10\rangle + \cos(\theta)|01\rangle \end{array} \quad (3.23)$$

Estes dois elementos nos permitem construir a porta de Hadamard, que consiste na aplicação de uma rotação em \hat{Y} de $\pi/4$ aos dois qubits aliado a uma rotação em \hat{Z} de π apenas ao primeiro, como ilustrado abaixo.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{DF} \\ \boxed{DF} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\pi} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.24)$$

Tendo visto como operar em um único qubit, resta agora ver como estes qubits podem interagir, dado que implementar uma interação entre fótons não é uma tarefa trivial. Existem duas maneiras principais de construir tal interação: a primeira através de dispositivos ópticos não lineares (baseados no efeito Kerr), que constitui o método dos fótons e a segunda através da mediação por átomos em cavidades, que forma o método das cavidades ópticas.

O efeito Kerr consiste da dependência do índice de refração de um meio com a intensidade I da radiação que o atravessa. Matematicamente isto pode ser expresso pelo termo n_1 da equação abaixo:

$$n(I) = n_0 + n_1 I. \quad (3.25)$$

Com esse efeito pode-se controlar, por exemplo, o termo Δ da equação (3.22) que atua em um fóton dependendo da passagem de um outro fóton (controlador) pelo meio. Isto corresponderia a um deslocador de fase controlado. Procedendo de maneira análoga poderíamos construir qualquer porta de interação entre qubits.

A grande dificuldade desta construção é encontrar um meio com o efeito Kerr satisfatório, i.e. um termo n_1 suficientemente grande e uma absorção baixa. Essa dificuldade já foi vencida em alguns casos particulares, como na realização dos algoritmos de Deutsch-Josza [91] e o de Grover [12]. Uma maneira de contornar este problema é através da utilização de cavidades ópticas, o segundo método óptico citado. O ponto forte aqui é a maneira como os dois fótons interagem. Em cavidades ópticas não mais precisamos de um meio óptico não linear para construir a interação entre os fótons, esta interação é agora mediada através de um átomo contido na cavidade. Passemos agora a um outro sistema físico.

3.2.3 Ressonância magnética nuclear

Sem dúvida os sistemas mais importantes e com mais resultados até hoje para a computação quântica são aqueles baseados em ressonância magnética nuclear (RMN). Já foi possível, inclusive, a realização experimental dos algoritmos quânticos mais relevantes como a fatoração [99]⁹, o algoritmo de busca de Grover [56] e o de Deutch-Josza [17]. A técnica de RMN utiliza o spin nuclear de átomos como ^1H , ^{13}C e ^{19}F para armazenar o qubit. Diferentes átomos numa mesma molécula atuam como sítios dos diversos qubits. O acoplamento entre dois qubits distintos se faz, predominantemente, através de interações via dipolo magnético ou mediadas por elétrons utilizados nas ligações químicas.

Existem duas formas distintas de se fazer computação quântica nesse sistema. A primeira é através de técnicas de estado-sólido [82] e a outra através de moléculas dissolvidas em um líquido [21, 108]. O aparato experimental consiste, basicamente, de um campo magnético estático e homogêneo fixo numa direção (usualmente denotada por \hat{Z}) e bobinas de Helmholtz

⁹Algoritmo proposto por Shor [88].

que geram campos oscilatórios (utilizando técnicas de radiofrequência - RF) nas duas direções perpendiculares (\hat{X} e \hat{Y}). A aquisição de dados e a construção de portas lógicas se dá através das bobinas de Helmholtz transversais. O grande obstáculo deste método origina no fraquíssimo sinal emitido por uma molécula, o que torna necessária a utilização de um grande ensemble de moléculas para amplificá-lo. Este fato traz algumas dificuldades tanto teóricas quanto experimentais.

Do ponto de vista teórico, a utilização de várias moléculas e sua utilização em temperatura ambiente implica na impossibilidade de se construir um estado inicial bem determinado (de baixa entropia com todos os spins aproximadamente alinhados na mesma direção). Outro fator complicador é que o resultado da medição aparecerá como uma média de ensemble, e não como uma distribuição, como requerem os algoritmos quânticos. Para superar esta dificuldade (a má construção do estado inicial) existem basicamente três técnicas distintas: a média espacial [14]; a média temporal [64] e o endereçamento lógico [98]. Sumariamente, essas técnicas conseguem simular um estado inicial desejado através de superposições de estados “indesejados”.

O mérito do método da RMN vem do grande conhecimento experimental existente nesta área. Os dois grandes obstáculos são a má construção do estado inicial, como discutido anteriormente, e a escalabilidade. A interação controlada entre spins nucleares (de uma mesma molécula) só é possível com as técnicas atuais para um número bastante reduzido de qubits. Em [68] temos uma realização experimental de um circuito com 7 qubits. Passemos agora ao último sistema físico estudado nesta tese.

3.2.4 Pontos quânticos

A idéia de se utilizar pontos quânticos para efetuar computação quântica teve início no trabalho pioneiro de Loss e DiVincenzo [69]. A grande motivação para este modelo é a escalabilidade desse sistema. O sistema de dois níveis (qubit) considerado é o spin de um elétron confinado a um ponto quântico formado por um gás de elétrons bidimensional. A figura 3.5, adaptada da ref. [103], ilustra este sistema para o caso de dois qubits.

Na figura vemos dois spins (S_1 e S_2) confinados numa camada bidimensional e aprisionados por barreiras eletrostáticas. As barreiras de potencial V da figura são usadas para controlar o acoplamento entre qubits adjacentes.

A inicialização de um estado padrão, com todos os spins alinhados, pode ser feita aplicando-se um campo magnético e resfriando-se o sistema até que todos os spins se alinhem com este campo. Matematicamente, isto requer uma temperatura que satisfaça: $k_B T \ll |g\mu_B B|$, i.e. a

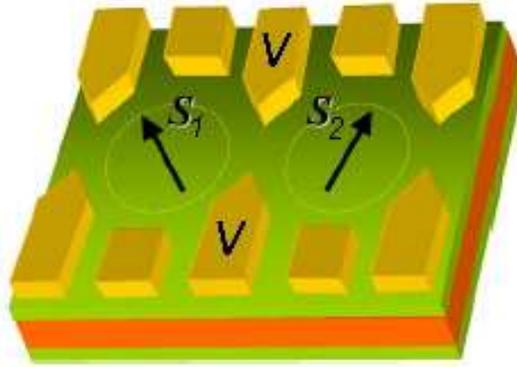


Figura 3.5 Montagem experimental baseada em pontos quânticos para um sistema de dois qubits formados por spins S_1 e S_2 de um gás de elétrons bidimensional com interação controlada eletrostaticamente pelo potencial eletrostático V .

energia relacionada à agitação térmica ($k_B T$) deve ser menor do que a energia Zeeman ($|g\mu_B B|$) de acoplamento com o campo magnético B aplicado.

A construção das portas lógicas universais divide-se em duas partes [4]: As portas de um único qubit podem ser realizadas controlando-se a interação Zeeman efetiva ou através de uma interação com fótons [20], enquanto que as portas de dois qubits podem ser feitas [105] ligando-se e desligando-se a interação entre eles [97]. Esse procedimento é possível ajustando-se a barreira eletrostática existente entre dois qubits adjacentes, de forma que a distância entre eles possibilite o *overlap* entre suas funções de onda apenas quando a interação for “ligada”.

Conforme visto em [13], ao se reduzir a voltagem da barreira que separa os dois qubits, a interação entre eles pode ser modelada através de um acoplamento de Heisenberg expresso por:

$$H(t) = J(t)\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad (3.26)$$

onde $J(t)$ indica a constante de acoplamento entre os spins e $\vec{S}_i \equiv (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ correspondem aos operadores de spin no sítio i .

Para ilustrar como as portas lógicas podem ser realizadas através de hamiltonianos deste tipo, tomemos a porta XOR¹⁰. Na referência [69] temos que esta porta pode ser expressa como a combinação de portas NOT de um único qubit mais um termo exatamente como o descrito na equação (3.26). Matematicamente temos:

¹⁰Abreviatura para: *ou* exclusivo.

$$U_{XOR} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_1^z + \sigma_2^z - 2\sigma_1^z\sigma_2^z), \quad (3.27)$$

com $\sigma_i^z = \hbar S_i^z/2$ significando a aplicação do referido operador de Pauli (σ^z) na partícula i . Detalhes da construção experimental de interações entre qubits em pontos quânticos como esta podem ser encontradas na referência [15], onde são realizadas diversas considerações sobre a modelagem do parâmetro $J(t)$ da equação (3.26) em função de variáveis acessíveis ao experimentador.

3.3 Conclusões

A busca por um sistema ideal para a realização da computação quântica ainda está longe de terminada. Vimos aqui apenas alguns dos caminhos que estão sendo seguidos. Existem ainda propostas de sistemas mistos, como o proposto por Imammoglu [53] onde se combina o sistema de cavidades ópticas com computação quântica em pontos quânticos e ainda um outro, proposto por Tian [92], que combina óptica quântica com dispositivos de estado sólido. Métodos como de armadilhas de ions [18, 61] e óptica linear [65] também têm sido implementados.

Embora ainda em desenvolvimento, técnicas experimentais já foram capazes de realizar¹¹ em laboratório [99] o algoritmo mais importante da computação quântica que é, sem dúvida, o procedimento de fatoração proposto por Shor [88]. Não podemos deixar de lembrar, mesmo que fora dos objetivos centrais desta dissertação, que as técnicas experimentais aliadas aos estudos teóricos em computação e informação quânticas já possibilitam a realização da chamada criptografia quântica [8].

As pesquisas continuam avançando pouco a pouco, e dentro das próximas décadas alguma versão do tão sonhado computador quântico poderá se tornar uma realidade, embora os mais céticos não concordem. Um fato inegável, porém, é que os estudos nesta área já trouxeram um grande avanço na compreensão do mundo quântico, o que, em última análise, está levando conceitos de teoria da informação a vários outros ramos da física.

A computação e a informação quântica são áreas bastante vastas e estão relacionadas com as mais diversas técnicas experimentais. Embora já existam importantes resultados, como vimos ao longo deste capítulo, este processo ainda está em fase inicial. Não podemos nos esquecer, contudo, do árduo caminho seguido até a construção do computador pessoal (clássico) que

¹¹Embora que num exemplo trivial: o número 15.

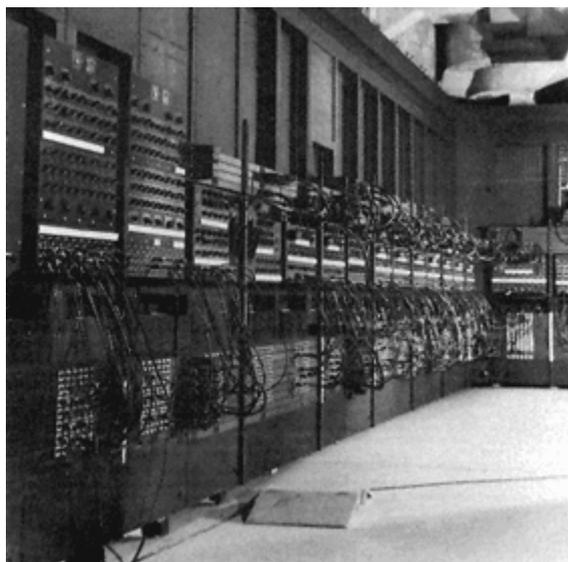


Figura 3.6 Foto do ENIAC

utilizamos hoje em dia. Em computação clássica, o avanço na velocidade e na capacidade de armazenamento de dados foi conseguido através das placas de silício, onde hoje se consegue colocar um número da ordem de 100 milhões de transistores em um único processador¹².

Uma mesa óptica que ocupa um laboratório completo e faz operações com 4 ou 5 qubits com certeza não será o candidato ideal a computador quântico. A busca por um sistema físico que possibilite a construção de um bom computador quântico ainda está longe de ser concluída, porém a grande diversidade de sistemas existentes nos dá uma grande esperança de que isto será possível algum dia. Para retomar o exemplo do computador clássico, no final da década de 40 o ENIAC¹³ tinha 30 toneladas e ocupava uma área de cerca de $170m^2$, não tendo sequer a capacidade de cálculo de uma simples máquina de calcular dos dias de hoje.

Como último comentário, é importantíssimo nos lembrarmos de que um dos caminhos mais promissores para os computadores quânticos não é simplesmente a superação dos seus pares clássicos na velocidade de cálculo de algoritmos como o de fatoração e busca, mas sim a simulação de sistemas quânticos, como profetizou Feynman [34] em 1982.

¹²Processadores como o *Core Duo - Intel* têm hoje cerca de 290 milhões de transistores em pouco mais de 140 milímetros quadrados de área.

¹³Electrical Numerical Integrator and Calculator.

Modelo de Heisenberg

Como vimos no capítulo 3, o hamiltoniano de Heisenberg é amplamente utilizado para modelar a interação entre qubits. Neste capítulo iremos apresentar o resultado do cálculo do emaranhamento de formação, definido no capítulo 2, de um sistema de dois qubits. Os nossos qubits serão representados por duas partículas de spins 1/2 descritas pelo hamiltoniano geral dos modelos XX e XY. Discutiremos todos os casos possíveis, i.e. temperatura nula com estado fundamental degenerado e não degenerado, bem como temperatura finita. A modelagem de um sistema de qubits por uma interação do tipo Heisenberg é amplamente discutida na literatura; além daqueles casos vistos no capítulo 3, podemos ainda citar os trabalhos [1, 59, 60, 79, 83, 84].

Na seção 4.1 apresentaremos o hamiltoniano de interação na forma proposta por Keating [60], no caso específico para duas partículas interagentes (qubits). Apresentaremos duas formas para a diagonalização deste hamiltoniano: na seção 4.2 faremos a diagonalização direta, resolvendo a equação de quarto grau resultante, enquanto que na seção 4.3 apresentaremos o método da segunda quantização para a diagonalização de hamiltonianos deste tipo. Após a diagonalização, partiremos para o cálculo do emaranhamento de formação nas seções 4.4 e 4.5, onde utilizaremos resultados do capítulo 2. Na seção 4.6 faremos testes de consistência dos resultados obtidos e na 4.7 uma formulação alternativa para a quantificação do emaranhamento. Concluiremos na seção 4.8 com uma análise geral do capítulo.

4.1 Hamiltoniano

O hamiltoniano geral dos modelos XX e XY de uma cadeia periódica ($\sigma_{n+1} = \sigma_1$) de n spins submetidos a um campo magnético h uniforme aplicado na direção \hat{Z} é expresso por $H = hH_\alpha$, com H_α dado por [60]:

$$H_\alpha = -\frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^n [(1 + \gamma)\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1 - \gamma)\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y] - \sum_{j=1}^n \sigma_j^z, \quad (4.1)$$

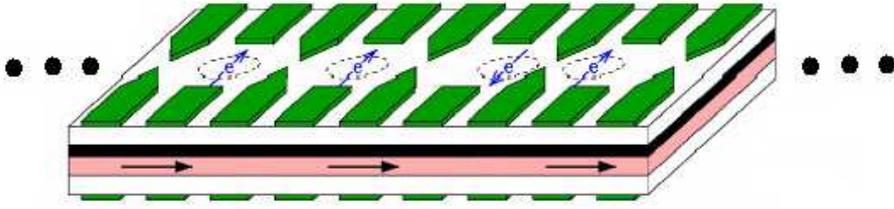


Figura 4.1 Modelo experimental para o hamiltoniano da eq. (4.1).

onde o parâmetro γ mede a anisotropia do meio, podendo variar entre 0 (modelo XX) e 1, α é a constante de acoplamento do sistema e σ_j^l corresponde ao operador de Pauli na direção $l \in \{x, y, z\}$ atuando apenas no j -ésimo spin (qubit). Este hamiltoniano efetivo leva em conta apenas interações entre primeiros vizinhos, nas direções \hat{X} e \hat{Y} . Ele corresponde a uma cadeia de spins, como ilustrado na figura 4.1, adaptada de [103], em que a separação espacial justifica a modelagem por primeiros vizinhos¹.

No nosso caso de interesse, $n = 2$, o hamiltoniano da eq. (4.1) simplifica para²:

$$H_\alpha = -\frac{\alpha}{2}[(1 + \gamma)\sigma_1^x \sigma_2^x + (1 - \gamma)\sigma_1^y \sigma_2^y] - (\sigma_1^z + \sigma_2^z). \quad (4.2)$$

Tendo apresentado o nosso hamiltoniano de estudo, vamos partir para a sua diagonalização.

4.2 Diagonalização direta

Como primeiro procedimento para a diagonalização do hamiltoniano da eq. (4.2), iremos representá-lo na forma matricial e diagonalizá-lo através do cálculo das raízes do polinômio característico de quarto grau resultante. Nesta representação temos

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

para as matrizes de Pauli e

¹Estamos na prática admitindo que as funções de onda de cada spin só apresentam região de *overlap* entre os spins mais próximos.

²É importante observar, para $n = 2$, a expressão (4.1) não deve levar em conta a periodicidade, visto que isto acarretaria numa duplicidade da contagem da interação spin-spin.

$$\sigma_j^l \equiv \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1} \otimes \sigma^l \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{n-j}, \quad l \in \{x, y, z\} \quad (4.4)$$

correspondem ao produto tensorial delas com a identidade, indicando sua atuação apenas no j -ésimo spin. Executando os produtos tensoriais e somando as parcelas, chegamos em

$$H = -h \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Iniciemos agora o processo de diagonalização com o cálculo do polinômio característico do hamiltoniano acima.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &\equiv \det(H - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2h - \lambda & 0 & 0 & -h\alpha\gamma \\ 0 & -\lambda & -h\alpha & 0 \\ 0 & -h\alpha & -\lambda & 0 \\ -h\alpha\gamma & 0 & 0 & 2h - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2h + \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -h\alpha & 0 \\ -h\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2h - \lambda \end{pmatrix} + (h\alpha\gamma) \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -h\alpha \\ 0 & -h\alpha & -\lambda \\ -h\alpha\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (2h + \lambda)(2h - \lambda) \det \begin{pmatrix} \lambda & h\alpha \\ h\alpha & \lambda \end{pmatrix} + (h\alpha\gamma)^2 \det \begin{pmatrix} \lambda & h\alpha \\ h\alpha & \lambda \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P(\lambda) = (\lambda^2 - (h\alpha)^2) (h^2(4 + \alpha^2\gamma^2) - \lambda^2). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Tendo achado o polinômio característico, passemos agora ao cálculo dos autovalores do hamiltoniano; o que matematicamente corresponde às suas raízes e fisicamente às autoenergias do sistema.

4.2.1 Autoestados e autoenergias

De posse dos resultados anteriores, com o polinômio $P(\lambda)$ fatorado na forma de dois polinômios de segundo grau, as suas raízes ficam imediatamente determinadas. Os 4 autovalores procurados são

$$\text{Autovalores} \begin{cases} \lambda_1 = -h\alpha \\ \lambda_2 = +h\alpha \\ \lambda_3 = -h\sqrt{4 + \alpha^2\gamma^2} \\ \lambda_4 = +h\sqrt{4 + \alpha^2\gamma^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

Os autovetores correspondentes ($H|i\rangle = \lambda_i|i\rangle$), já normalizados ($\langle i|i\rangle = 1$), são dados por:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde $a = \frac{2+\sqrt{4+\alpha^2\gamma^2}}{\alpha\gamma}$ e $b = \frac{2-\sqrt{4+\alpha^2\gamma^2}}{\alpha\gamma}$. Para simplificar ainda mais os cálculos, iremos redefinir estas duas variáveis posteriormente, na eq. (4.53). Estamos utilizando a notação matricial em que

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\downarrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $|\uparrow\rangle \equiv |0\rangle = (1,0)^\dagger$ e $|\downarrow\rangle \equiv |1\rangle = (0,1)^\dagger$.

Podemos ainda representá-los na base de simetria de rotação adaptada³ $\{|s,m\rangle\}$, em que $s(s+1)\hbar^2$ indica o autovalor do operador spin total S ao quadrado, enquanto que $m\hbar$ é o autovalor do operador spin total na direção \hat{Z} , S_z . Temos

³Uma discussão detalhada sobre esta base pode ser encontrada no capítulo 10 da ref. [19].

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = |1,0\rangle, & |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = |0,0\rangle, \\
|3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a|1,1\rangle + |1,-1\rangle) \quad \text{e} \\
|4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(b|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(b|1,1\rangle + |1,-1\rangle). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Como alternativa ao método de diagonalização direta que acabamos de efetuar, iremos mostrar na próxima seção um poderoso método de diagonalização, largamente usado na literatura [35, 67].

4.3 Diagonalização por segunda quantização

O procedimento completo de diagonalização por segunda quantização, para qualquer valor de n do hamiltoniano da eq. (4.1) é dividido em três partes⁴. Na primeira faz-se uma transformação de Jordan-Wigner, na segunda uma transformação de Fourier, e finalmente uma transformação de Bogoliubov. Implementaremos estas três etapas de forma analítica exata para o nosso caso de interesse $n = 2$. Reforçamos aqui o objetivo desta tese: estudando casos mais simples, entender conceitos e criar relações entre diferentes formulações que possam dar novas interpretações físicas às variáveis utilizadas e com isso facilitar a sua compreensão e o seu cálculo.

Pode parecer redundância realizarmos o mesmo cálculo (de diagonalização) novamente, mas estaremos introduzindo novos elementos conceituais (como os operadores de criação e aniquilação e o ângulo de Bogoliubov) que facilitarão a construção do funtor da álgebra geométrica no capítulo 5. Seguiremos, agora, aplicando a transformação de Jordan-Wigner no hamiltoniano de estudo.

4.3.1 Transformação de Jordan-Wigner

A transformação de Jordan-Wigner consiste em reescrever o hamiltoniano da eq. (4.1) em termos de operadores anticomutantes em qualquer sítio c_n ⁵. Estes operadores são definidos em

⁴Latorre et al. [67] seguiram essas etapas, porém estavam interessados no limite $n \rightarrow \infty$ e por isso desprezaram termos do hamiltoniano proporcionais a $1/n$ que não serão desprezíveis no nosso caso.

⁵Em oposição à anticomutação apenas em sítios distintos dos operadores de Pauli.

termos do operador *kink* K_n [35] e dos operadores de levantamento e abaixamento S^\pm . Vamos agora à formulação matemática.

O operador *kink* K_n , realiza uma rotação de π em torno de \hat{Z} em todos os sítios à esquerda do sítio n , ou seja

$$K_n \equiv \prod_{m < n} \sigma_m^z. \quad (4.11)$$

Os operadores de levantamento e abaixamento são dados por:

$$S^\pm(n) = \frac{\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y}{2}. \quad (4.12)$$

Finalmente, os operadores de criação, c_n^\dagger , e de aniquilação, c_n , são definidos por:

$$\begin{aligned} c_n &= K_n S_n^- = \left(\prod_{m < n} \sigma_m^z \right) \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2} \\ c_n^\dagger &= K_n S_n^+ = \left(\prod_{m < n} \sigma_m^z \right) \frac{\sigma_n^x + i\sigma_n^y}{2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

É importante observar que, ao contrário dos operadores $\sigma_n^{x,y,z}$, os operadores c_n são não-locais, no sentido de que atuam em mais de um sítio simultaneamente. Além disso, como dito anteriormente, eles satisfazem as relações de anticomutação:

$$\{c_m^\dagger, c_n\} = \delta_{m,n} \text{ e } \{c_m, c_n\} = \{c_m^\dagger, c_n^\dagger\} = 0, \quad \forall m, n, \quad (4.14)$$

como pode ser facilmente verificado. Antes de reescrever o hamiltoniano da eq. (4.1) em termos dos operadores c_n , vamos agrupar os seus termos da seguinte forma:

$$H_\alpha = \alpha \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y}{2} \right) + \alpha\gamma \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y}{2} \right) - \sum_{j=1}^n \sigma_j^z. \quad (4.15)$$

Aplicando a transformação de Jordan-Wigner obtemos

$$H_\alpha = \alpha \sum_{j=1}^n \left(c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1} \right) + \alpha\gamma \sum_{j=1}^n \left(c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + c_{j+1} c_j \right) - 2 \sum_{j=1}^n c_j^\dagger c_j + nI, \quad (4.16)$$

onde I indica o operador identidade. Fazendo uma análise rápida de cada um dos 4 termos deste hamiltoniano, vemos que os dois primeiros são formados por duas parcelas (não-locais)

| | $ \varphi_0\rangle$ | $ \varphi_1\rangle$ | $ \varphi_2\rangle$ | $ \varphi_3\rangle$ |
|---------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| c_1 | 0 | 0 | $ \varphi_0\rangle$ | $- \varphi_1\rangle$ |
| c_1^\dagger | $ \varphi_2\rangle$ | $- \varphi_3\rangle$ | 0 | 0 |
| c_2 | 0 | $ \varphi_0\rangle$ | 0 | $ \varphi_2\rangle$ |
| c_2^\dagger | $ \varphi_1\rangle$ | 0 | $ \varphi_3\rangle$ | 0 |

Tabela 4.1 Resultado da aplicação dos operadores de criação e aniquilação definidos em (4.13) nos estados definidos na eq. (4.19).

hermiticamente conjugadas, o terceiro termo já está na forma diagonal, enquanto que o último termo é apenas uma constante aditiva no espectro. Para o nosso caso de interesse ($n = 2$), a expressão (4.16) simplifica para:

$$H_\alpha = \alpha (c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1) + \alpha \gamma (c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1) - 2 (c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) + 2I. \quad (4.17)$$

Para criar uma nova base, vamos definir o estado de vácuo $|\varphi_0\rangle$, correspondente à situação onde os dois spins estão apontando para baixo ao longo do eixo \hat{Z} , i.e.

$$|\varphi_0\rangle \equiv |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (4.18)$$

Seguimos agora povoando o vácuo, o que corresponde (a menos de uma fase) a criar spins com orientações para cima em cada um dos dois sítios. Isto pode ser feito através dos operadores de criação c_1^\dagger e c_2^\dagger , temos então os seguintes estados:

$$\begin{aligned} |\varphi_0\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle, & |\varphi_1\rangle &= c_2^\dagger |\varphi_0\rangle = -|\downarrow\uparrow\rangle, & |\varphi_2\rangle &= c_1^\dagger |\varphi_0\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle \quad \text{e} \\ |\varphi_3\rangle &= c_2^\dagger c_1^\dagger |\varphi_0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A atuação dos operadores de criação e aniquilação em cada um dos estados definidos na eq. (4.19) se faz de maneira imediata. Os resultados estão compilados na tabela 4.1.

Tendo representado o hamiltoniano em termos dos operadores de criação e aniquilação, bem como explicitado a aplicação destes operadores nos quatro estados da eq. (4.19), podemos atuar com o hamiltoniano em cada um destes estados. Como resultado temos:

$$\begin{aligned}
H_\alpha |\varphi_0\rangle &= 2|\varphi_0\rangle - \alpha\gamma|\varphi_3\rangle, \\
H_\alpha |\varphi_1\rangle &= \alpha|\varphi_2\rangle, \\
H_\alpha |\varphi_2\rangle &= \alpha|\varphi_1\rangle \quad \text{e} \\
H_\alpha |\varphi_3\rangle &= -\alpha\gamma|\varphi_0\rangle - 2|\varphi_3\rangle.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Com isso concluímos a transformação de Jordan-Wigner.

4.3.2 Transformação de Fourier

A aplicação da transformação de Fourier explora a simetria translacional do Hamiltoniano da eq. (4.16) para introduzir os operadores d_k , $k \in \{1, \dots, n\}$. No nosso caso esta simetria é equivalente a uma reflexão, e os operadores d_k ficam expressos por

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 - c_1) \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 + c_1). \tag{4.21}$$

É importante lembrar que esta é uma transformação canônica, i.e. os operadores d_k satisfazem as mesmas operações de anticomutação dos operadores c_k

$$\{d_i, d_j\} = \{d_i^\dagger, d_j^\dagger\} = 0 \quad \text{e} \quad \{d_i, d_j^\dagger\} = \delta_{i,j}. \tag{4.22}$$

A base de Fourier (em analogia à apresentada na eq. (4.19)) é definida por

$$\begin{aligned}
|\tilde{\varphi}_0\rangle &= |\varphi_0\rangle, \quad |\tilde{\varphi}_1\rangle = d_2^\dagger |\tilde{\varphi}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle), \\
|\tilde{\varphi}_2\rangle &= d_1^\dagger |\tilde{\varphi}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) \quad \text{e} \quad |\tilde{\varphi}_3\rangle = d_1^\dagger d_2^\dagger |\tilde{\varphi}_0\rangle = |\varphi_3\rangle.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

De (4.20) e (4.23) temos que

$$H_\alpha |\tilde{\varphi}_1\rangle = \alpha |\tilde{\varphi}_1\rangle, \quad H_\alpha |\tilde{\varphi}_2\rangle = -\alpha |\tilde{\varphi}_2\rangle, \tag{4.24}$$

$$H_\alpha |\tilde{\varphi}_0\rangle = 2|\tilde{\varphi}_0\rangle - \alpha\gamma|\tilde{\varphi}_3\rangle \quad \text{e} \quad H_\alpha |\tilde{\varphi}_3\rangle = -\alpha\gamma|\tilde{\varphi}_0\rangle - 2|\tilde{\varphi}_3\rangle. \tag{4.25}$$

Em termos dos operadores d_k , definidos na eq. (4.21), o hamiltoniano da eq. (4.17) se torna

$$H_\alpha = \alpha \left(d_2^\dagger d_2 - d_1^\dagger d_1 \right) + \alpha\gamma \left(d_1^\dagger d_2^\dagger + d_2 d_1 \right) - 2 \left(d_1^\dagger d_1 + d_2^\dagger d_2 \right) + 2I. \tag{4.26}$$

É fácil verificar que as equações (4.24) e (4.25) continuam válidas quando usamos H_α dado pela eq. (4.26). Vamos agora à última etapa da diagonalização.

4.3.3 Transformação de Bogoliubov

Esta última etapa consiste na representação do hamiltoniano em termos dos operadores b_k definidos pela seguinte transformação canônica:

$$\begin{aligned} b_1 &= ud_1^\dagger + ivd_2, & b_1^\dagger &= ud_1 - ivd_2^\dagger, \\ b_2 &= ivd_1^\dagger + ud_2, & b_2^\dagger &= -ivd_1 + ud_2^\dagger, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $u = \cos(\frac{\theta_B}{2})$ e $v = \sin(\frac{\theta_B}{2})$. Podemos representar esta transformação em termos de uma matriz unitária U da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U &\equiv \begin{pmatrix} u & iv \\ iv & u \end{pmatrix}, & D &\equiv \begin{pmatrix} d_1^\dagger \\ d_2 \end{pmatrix} & e & B \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \\ & & & \Rightarrow B = UD. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Invertendo a eq. (4.28) temos $D = U^\dagger B$, o que implica que

$$\begin{aligned} d_1 &= ub_1^\dagger + ivb_2^\dagger; & d_1^\dagger &= ub_1 - ivb_2 \\ d_2 &= ub_2 - ivb_1; & d_2^\dagger &= ub_2^\dagger + ivb_1^\dagger \end{aligned} \quad (4.29)$$

A necessidade da introdução destes novos operadores b_k ficará evidente a seguir. Podemos reescrever o hamiltoniano da eq. (4.26) da seguinte forma

$$H_\alpha = -(\alpha + 2)d_1^\dagger d_1 + (\alpha - 2)d_2^\dagger d_2 + \alpha\gamma(d_1^\dagger d_2^\dagger + d_2 d_1) + 2I. \quad (4.30)$$

Esta expressão nos motiva a definir uma matriz M da seguinte forma

$$M \equiv \begin{pmatrix} \alpha + 2 & -\alpha\gamma \\ -\alpha\gamma & \alpha - 2 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

de modo que o hamiltoniano da eq. (4.30) toma a forma simples

$$H_\alpha = D^\dagger M D - \alpha I. \quad (4.32)$$

A escolha do ângulo de Bogoliubov θ_B satisfazendo $\tan(\theta_B) = \frac{\alpha\gamma}{2}$ torna M diagonal, i.e.

$$\Lambda = U M U^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha + \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2} & 0 \\ 0 & \alpha - \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Isto nos permite escrever o hamiltoniano na forma

$$\begin{aligned} H &= D^\dagger MD - \alpha I = B^\dagger U M U^\dagger B - \alpha I = B^\dagger \Lambda B - \alpha I \\ &\Rightarrow H = \lambda_+ b_1^\dagger b_1 + \lambda_- b_2^\dagger b_2 - \alpha I. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O que conclui o processo de diagonalização.

4.3.4 Autoestados e autoenergias

Com o resultado da última seção, podemos escrever diretamente os autoestados e as autoenergias do sistema. Faremos isto aplicando os operadores de criação de Bogoliubov b_i^\dagger ao estado de vácuo $|0\rangle_{vac}$ definido abaixo⁶. Temos então

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\tilde{\phi}_2\rangle \equiv |0\rangle_{vac} & ; & \quad \varepsilon_0 = -\alpha \\ |\psi_1\rangle &= b_2^\dagger |0\rangle_{vac} & ; & \quad \varepsilon_1 = \lambda_- - \alpha = -\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2} \\ |\psi_2\rangle &= b_1^\dagger |0\rangle_{vac} & ; & \quad \varepsilon_2 = \lambda_+ - \alpha = \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2} \\ |\psi_3\rangle &= b_2^\dagger b_1^\dagger |0\rangle_{vac} & ; & \quad \varepsilon_3 = \lambda_+ + \lambda_- - \alpha = \alpha, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Onde ε_i indica a autoenergia correspondente ao estado $|\psi_i\rangle$. Multiplicando estes valores pelo campo magnético h recuperamos os resultados obtidos na eq. (4.7). Com isso concluímos o processo de diagonalização por segunda quantização.

4.3.5 Operadores densidade em segunda quantização

Como primeiro passo, notemos que o conjunto $\{c, c^\dagger, cc^\dagger, c^\dagger c\}$ forma uma base para os operadores densidade de um sistema de um único spin⁷.

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & c^\dagger &\equiv \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ cc^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \\ c^\dagger c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

⁶Note que $b_1 |0\rangle_{vac} = b_2 |0\rangle_{vac} = 0$.

⁷O espaço das matrizes 2×2 .

Desta forma podemos expressar ρ_A , a matriz do subsistema A de um sistema AB, como

$$\rho_A = \rho_{\downarrow\downarrow} c_1 c_1^\dagger + \rho_{\uparrow\uparrow} c_1^\dagger c_1 + \rho_{\downarrow\uparrow} c_1 + \rho_{\uparrow\downarrow} c_1^\dagger = \text{Tr}_B(\rho_{AB}). \quad (4.37)$$

Os coeficientes podem ser imediatamente calculados [54] a partir do operador densidade total por

$$\rho_{\downarrow\downarrow} = \text{Tr}(\rho_{ABC_I} c_1^\dagger), \quad \rho_{\uparrow\uparrow} = \text{Tr}(\rho_{ABC_I^\dagger} c_1), \quad \rho_{\downarrow\uparrow} = \text{Tr}(\rho_{ABC_I}) \quad \text{e} \quad \rho_{\uparrow\downarrow} = \text{Tr}(\rho_{ABC_I^\dagger}). \quad (4.38)$$

Vamos agora definir os projetores R e \tilde{R} que serão utilizados adiante:

$$R \equiv |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| = c_2 c_1^\dagger \quad \text{e} \quad \tilde{R} \equiv |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| = c_1 c_2. \quad (4.39)$$

Passemos agora ao problema do emaranhamento do sistema nas diversas situações de interesse.

4.4 Temperatura nula

Iniciaremos agora a primeira parte dos resultados originais desta tese, onde calcularemos o emaranhamento de formação (definido na eq. (2.28)) para o modelo de Heisenberg apresentado nas seções anteriores. Vamos começar os cálculos na situação mais simples, i.e. temperatura nula ($T = 0$). Nessa situação o sistema estará em seu estado fundamental que pode ou não ser degenerado. Iniciaremos pelo caso não degenerado, que corresponde a um estado fundamental puro.

4.4.1 Caso não degenerado

Um resultado geral deste tipo de sistema para n spins foi apresentado por Keating [60], que estava interessado no limite $n \rightarrow \infty$ e em mudanças do comportamento do emaranhamento perto de uma transição de fase. Embora o hamiltoniano apresentado por ele seja geral para qualquer valor de n , o desenvolvimento analítico só foi feito neste limite $n \rightarrow \infty$. Vamos, nesta seção, calcular o emaranhamento de duas formas distintas: a primeira utilizará a representação matricial, enquanto que a segunda seguirá a representação em segunda quantização.

4.4.1.1 Estado fundamental $|\Psi_g\rangle$

Para encontrarmos o estado fundamental alcançado pelo sistema quando $T = 0$, precisamos encontrar o menor autovalor de H . Uma vez que já temos expressões fechadas para os 4 possíveis autovalores nas eq. (4.7) e (4.35), vamos aos casos possíveis. Para isso definiremos inicialmente o valor crítico de $\alpha \equiv \alpha_c$, que ocorre quando há degenerescência $|\lambda_{1,2}| = |\lambda_{3,4}|$, ou seja:

$$\sqrt{4 + \alpha_c^2 \gamma^2} = |\alpha_c| \Leftrightarrow |\alpha_c| = \frac{2}{\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (4.40)$$

Caso supercrítico $|\alpha| > |\alpha_c|$. Nesta situação a energia fundamental do sistema corresponde ao autovalor λ_1 ⁸ e o estado fundamental corresponde a $|1\rangle$, definido na eq. (4.8). A matriz densidade que descreve este estado é expressa por:

$$\rho_{AB} = |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Em segunda quantização temos:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \Rightarrow \\ \rho_{AB} &= \frac{1}{2} (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|) \\ &= \frac{1}{2} (RR^\dagger + R^\dagger R + R + R^\dagger) = \frac{1}{2} (c_1^\dagger c_1 c_2 c_2^\dagger + c_1 c_1^\dagger c_2^\dagger c_2 + c_2 c_1^\dagger + c_1 c_2^\dagger), \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde R está definido na equação (4.39).

Caso subcrítico $|\alpha| < |\alpha_c|$. Nesta situação o estado fundamental corresponde a $|3\rangle$ ⁹ e a matriz densidade que descreve o estado fundamental é expressa por:

⁸Estamos considerando $h > 0$, caso contrário o estado fundamental seria $|2\rangle$, mas os cálculos seguiriam de maneira idêntica.

⁹Novamente estamos considerando $h > 0$, caso contrário o estado fundamental seria $|4\rangle$, com os cálculos seguindo de maneira idêntica.

$$\rho_{AB} = |3\rangle\langle 3| = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Em segunda quantização temos:

$$\begin{aligned} |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (a|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \Rightarrow \\ \rho_{AB} &= \frac{1}{1+a^2} (a^2|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + u|\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + u|\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|) \\ &= \frac{1}{1+a^2} (a^2\tilde{R}\tilde{R}^\dagger + a(\tilde{R}^\dagger + \tilde{R}) + \tilde{R}^\dagger\tilde{R}) \\ &= \frac{1}{1+a^2} (c_1^\dagger c_1 c_2^\dagger c_2 + a^2 c_1 c_1^\dagger c_2 c_2^\dagger + a(c_1 c_2 + c_2^\dagger c_1)), \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde \tilde{R} está definido na equação (4.39).

4.4.1.2 Cálculo do emaranhamento

De posse das matrizes densidades que descrevem o sistema, o cálculo do emaranhamento de formação se faz imediatamente através da eq. (2.22). Aqui, estamos denotando por ρ_{AB} a matriz densidade completa dos dois spins (situados nos sítios A e B) e por ρ_A o traço parcial em B de ρ_{AB} , i.e. $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$.

Caso supercrítico :

No formalismo canônico usamos a expressão para a matriz densidade obtida na eq. (4.41) e o traço parcial como definido na eq. (2.23). Temos então

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I, \quad (4.45)$$

com isso o emaranhamento de formação (ver eq. (2.22)) do sistema se torna:

$$E_F = -\frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1. \quad (4.46)$$

Para efetuarmos este mesmo cálculo em segunda quantização, vamos utilizar as equações (4.37) e (4.38) para calcular $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$, com ρ_{AB} expresso na eq. (4.42). Como resultado temos

$$\rho_A = \frac{1}{2} (c_1^\dagger c_1 + c_1 c_1^\dagger) = \frac{1}{2} I, \quad (4.47)$$

o que é uma confirmação dos nossos cálculos. O fato do emaranhamento de formação ter resultado em 1 era esperado, uma vez que neste regime o estado fundamental $|1\rangle$ corresponde a um dos estados de Bell, que é maximamente emaranhado. Observemos também que este procedimento constitui uma receita experimental para a construção de um estado de Bell¹⁰.

Caso subcrítico :

A expressão para a matriz densidade do sistema está expressa na eq. (4.43). Temos:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \rho_A = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

com isso o emaranhamento do sistema se torna

$$E_F = -\frac{1}{1+a^2} \text{Tr} \begin{pmatrix} a^2 \log\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right) & 0 \\ 0 & \log\left(\frac{1}{1+a^2}\right) \end{pmatrix} = \hat{h}\left(\frac{1}{1+a^2}\right), \quad (4.49)$$

onde $\hat{h}(x)$ é a entropia binária definida na eq. (2.30).

Tendo achado o emaranhamento no formalismo matricial, seguimos da mesma forma que no caso anterior, calculando em segunda quantização. O estado do sistema ρ_{AB} está expresso na eq. (4.44). Após uma álgebra simples utilizando as equações (4.37) e (4.38) obtemos

$$\rho_A = \frac{1}{1+a^2} (c_1^\dagger c_1 + a^2 c_1 c_1^\dagger). \quad (4.50)$$

Para efetuar o cálculo do emaranhamento, definimos uma nova variável $v \equiv \frac{1-a^2}{1+a^2}$, em termo da qual o resultado da eq. (4.50) toma a forma mais simétrica

$$\rho_A = \frac{1}{2} \left((1+v) c_1^\dagger c_1 + (1-v) c_1 c_1^\dagger \right), \quad (4.51)$$

¹⁰Um sistema modelado pelo hamiltoniano da eq. (4.2) com $|\alpha\rangle > \frac{2}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ evoluirá para o estado de Bell $|1\rangle$ quando $T \rightarrow 0$.

desta forma o emaranhamento de formação expresso na eq. (2.22) pode ser imediatamente calculado¹¹. Como resultado temos:

$$E_F = e \left(1, \frac{1-a^2}{1+a^2} \right), \quad (4.52)$$

onde $e(x, y) \equiv -\frac{x+y}{2} \log \left(\frac{x+y}{2} \right) - \frac{x-y}{2} \log \left(\frac{x-y}{2} \right)$, com os logaritmos tomados sempre na base 2.

Este resultado corresponde, exatamente, ao encontrado anteriormente na eq. (4.49). Podemos também testar esta fórmula no limite $a \rightarrow 1$, ou seja, $\alpha\gamma \rightarrow \infty$. Neste caso o emaranhamento é dado por $h(\frac{1}{2}) = e(1, 0) = 1$. Isto é esperado pois com $a \rightarrow 1$ o estado fundamental do sistema também torna-se um dos estados de Bell.

Interpretação geométrica: Uma visão geométrica desta situação pode ser construída da seguinte forma: definamos as variáveis θ e $\tilde{\theta}$ tal que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 + \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}}{\alpha \gamma} \equiv \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad \text{e} \\ b &= \frac{2 - \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}}{\alpha \gamma} \equiv \tan \left(\frac{\tilde{\theta}}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

A concorrência C definida na eq. (2.31) para o caso do sistema $|\psi\rangle$ estar num estado puro toma a forma [49]:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \psi^{flip} \rangle|, \quad (4.54)$$

onde ψ^{flip} é o *spin-flip* do estado ψ , obtido invertendo-se a orientação de todos os spins. Aplicando este resultado ao nosso sistema (descrito pela equação (4.44) temos:

$$\begin{aligned} |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (a|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \Rightarrow |3^{flip}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (a|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) \\ \Rightarrow C &= |\langle 3 | 3^{flip} \rangle| = \frac{1}{1+a^2} (a \langle \uparrow\uparrow | + \langle \downarrow\downarrow |) (a |\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) = \frac{2a}{1+a^2} = \text{sen}(\theta). \end{aligned} \quad (4.55)$$

O emaranhamento de formação, definido pela fórmula de Wootters na equação (2.29), se torna:

$$E_F = \hat{h} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right) = \hat{h} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)}}{2} \right)$$

¹¹Procedimento análogo foi realizado por Keating [60].

$$= \widehat{h} \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right) = e(1, \cos(\theta)). \quad (4.56)$$

Comparando a equação (4.56) com a (4.52), podemos ver a equivalência entre esses resultados percebendo que:

$$v = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \cos(\theta). \quad (4.57)$$

Keating [60] deduziu que o emaranhamento de uma cadeia com N spins no estado fundamental descritos pelo mesmo hamiltoniano que estamos estudando tem a forma:

$$E_F = \sum_{i=1}^N e(1, v_i). \quad (4.58)$$

O que acabamos de mostrar é que este resultado pode ser interpretado geometricamente atribuindo um ângulo θ_i a cada sítio de uma das subcadeias do sistema bipartite. A passagem de um sítio para outro seria descrita por um deslocamento neste ângulo.

Interpretação geométrica com segunda quantização: Vamos agora refazer o cálculo da concorrência no formalismo de segunda quantização. A base de estados $\{\varphi_i\}$, com $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ está definida na eq. (4.19).

$$\begin{aligned} |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (a|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\downarrow\rangle \\ &= \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) c_2^\dagger c_1^\dagger + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] |\varphi_0\rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

O estado $|3^{flip}\rangle$ se torna

$$|3^{flip}\rangle = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) c_2^\dagger c_1^\dagger + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] |\varphi_0\rangle, \quad (4.60)$$

finalmente, a concorrência pode ser calculada como

$$\begin{aligned} C &= |\langle 3|3^{flip}\rangle| = \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \varphi_0|c_1 c_2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \varphi_0| \right] \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) c_2^\dagger c_1^\dagger |\varphi_0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\varphi_0\rangle \right] \\ &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \varphi_3|\varphi_3\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \varphi_0|\varphi_0\rangle = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Na seção 4.7 realizaremos o cálculo da concorrência numa forma já implementada experimentalmente por Walborn et al. [106] e discutida no apêndice B. Lá mostramos como ela pode

ser interpretada e quantificada a partir de cópias do sistema.

Relação entre θ e θ_B : Um resultado importante alcançado nesta tese vem da constatação de que este ângulo θ presente nas equações da concorrência (4.55) e do emaranhamento (4.56) é idêntico ao ângulo θ_B da transformação de Bogoliubov introduzida na seção (4.3.3). Vejamos a prova.

$$a = \frac{2 + \sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}}{\alpha \gamma} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{2a}{1 - a^2} = \frac{\alpha \gamma}{2} \Rightarrow \theta_B = \theta. \quad (4.62)$$

Isto nos permite obter o ângulo necessário para efetuar a rotação da transformação de Bogoliubov através da concorrência do sistema e vice-versa. Nos trabalhos de Keating [60], Jin et al. [54] e Latorre et al. [67] que estavam interessados num sistema formado por um grande número de qubits tal interpretação não foi percebida. O estudo de sistemas mais simples (neste caso com apenas dois qubits) possibilita portanto uma maior compreensão do fenômeno que pode em seguida facilitar o entendimento de casos mais complexos.

4.4.1.3 Funções de correlação

As correlações entre os spins são definidas como $C_{a,b} = \langle \Psi_g | S_1^a S_2^b | \Psi_g \rangle$, onde $a, b \in \{x, y, z\}$ e $S_i^a = \frac{\hbar}{2} \sigma_i^a$, onde $|\Psi_g\rangle$ é o estado fundamental do sistema. Elas são de grande importância experimental, uma vez estão relacionadas às funções respostas do sistema, que por sua vez são acessíveis ao experimentador¹². Vamos calculá-las nos dois casos de interesse considerando as três direções espaciais. Para isso, notemos inicialmente que:

$$C_{a,b} \equiv \langle \Psi_g | S_1^a S_2^b | \Psi_g \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \Psi_g | \sigma_1^a \sigma_2^b | \Psi_g \rangle. \quad (4.63)$$

Caso supercrítico: de (4.63) obtemos

$$|\Psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{xx} = \frac{\hbar^2}{4}, C_{yy} = \frac{\hbar^2}{4} \text{ e } C_{zz} = -\frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.64)$$

¹²Na física de muitos corpos, as funções de correlação desempenham um papel importante na teoria da resposta linear.

Uma interpretação deste resultado fica clara ao expressarmos o estado fundamental na base de autovetores de S^2 e S_z , definida na eq. (4.10), onde $|\Psi_g\rangle = |1,0\rangle$. Os operadores de spin satisfazem a identidade:

$$\begin{aligned}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= \frac{1}{2} \left[(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 \right] \\ \Rightarrow \langle \Psi | \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle \Psi | S^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \vec{S}_x^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \vec{S}_y^2 | \Psi \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[s(s+1)\hbar^2 - \frac{3}{2}\hbar^2 \right].\end{aligned}\quad (4.65)$$

Podemos verificar os nossos resultados notando que $\langle \Psi | \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 | \Psi \rangle = \sum_i C_{ii}$. No nosso caso $s = 1 \Rightarrow \sum_i C_{ii} = \hbar^2/4$, como pode ser imediatamente verificado na equação (4.64).

Caso subcrítico: novamente de (4.63) obtemos

$$|\Psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{xx} = \frac{a\hbar^2}{2(1+a^2)}, C_{yy} = \frac{-a\hbar^2}{2(1+a^2)} \text{ e } C_{zz} = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (4.66)$$

que também resulta em $\sum_i C_{ii} = \hbar^2/4$, conforme discutido anteriormente. Com isso concluímos a análise do sistema de dois qubits em $T = 0$, no caso do estado fundamental puro não degenerado. Vamos agora ao caso degenerado.

4.4.2 Caso degenerado

O caso degenerado ocorre quando $\sqrt{4 + (\alpha\gamma)^2} = |\alpha|$, ou seja: $\alpha = \alpha_c = \pm \frac{2}{\sqrt{1-\gamma^2}}$. Nesta situação as 4 autoenergias do sistema são dadas por: $\lambda_1 = -h\alpha$, $\lambda_2 = +h\alpha$, $\lambda_3 = -h|\alpha|$ e $\lambda_4 = +h|\alpha|$, o que nos leva a quatro casos distintos para o estado fundamental, dependendo do valor do campo magnético h e da constante de acoplamento α .

4.4.2.1 Cálculo dos operadores densidade

Como primeiro passo para o cálculo do emaranhamento, vamos calcular o operador densidade que descreve o sistema em cada um dos casos de interesse. Para isso notemos, primeira-

mente, que os parâmetros a e b definidos anteriormente tomam formas distintas, dependendo do sinal de α .

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{2 + \sqrt{4 + (\alpha\gamma)^2}}{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha-2}}, \text{ com } \alpha_c > 0 \text{ ou } -\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}, \text{ com } \alpha_c < 0 \text{ e} \\ b &\equiv \frac{2 - \sqrt{4 + (\alpha\gamma)^2}}{\alpha\gamma} = -\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}, \text{ com } \alpha_c > 0 \text{ ou } \sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha-2}}, \text{ com } \alpha_c < 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Analizaremos agora cada um dos quatro casos possíveis.

Caso 1a: $\alpha > 0$ e $h > 0$. Neste caso o estado fundamental é dado por uma mistura estatística dos estados $|1\rangle$ e $|3\rangle$, e a matriz densidade se torna: $\rho_{AB} = p|1\rangle\langle 1| + (1-p)|3\rangle\langle 3|$, onde p é a probabilidade do sistema estar no estado $|1\rangle$. Substituindo os autoestados chegamos em:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)a^2}{1+a^2} & 0 & 0 & \frac{(1-p)a}{1+a^2} \\ 0 & p/2 & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & p/2 & 0 \\ \frac{(1-p)a}{1+a^2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{1+a^2} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Caso 1b: $\alpha > 0$ e $h < 0$. Neste caso o estado fundamental é dado por uma mistura estatística dos estados $|2\rangle$ e $|4\rangle$, e a matriz densidade se torna: $\rho_{AB} = p|2\rangle\langle 2| + (1-p)|4\rangle\langle 4|$, onde p é a probabilidade do sistema estar no estado $|2\rangle$. Substituindo os autoestados chegamos em:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)b^2}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{(1-p)b}{1+b^2} \\ 0 & p/2 & -p/2 & 0 \\ 0 & -p/2 & p/2 & 0 \\ \frac{(1-p)b}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{1+b^2} \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Caso 2a: $\alpha < 0$ e $h > 0$. Neste caso o estado fundamental é dado por uma mistura estatística dos estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$, e a matriz densidade se torna: $\rho_{AB} = p|2\rangle\langle 2| + (1-p)|3\rangle\langle 3|$, onde p é a probabilidade do sistema estar no estado $|2\rangle$. Substituindo os autoestados chegamos em:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)a^2}{1+a^2} & 0 & 0 & \frac{(1-p)a}{1+a^2} \\ 0 & p/2 & -p/2 & 0 \\ 0 & -p/2 & p/2 & 0 \\ \frac{(1-p)a}{1+a^2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{1+a^2} \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Caso 2b: $\alpha < 0$ e $h < 0$. Neste caso o estado fundamental é dado por uma mistura estatística dos estados $|1\rangle$ e $|4\rangle$, e a matriz densidade se torna: $\rho_{AB} = p|1\rangle\langle 1| + (1-p)|4\rangle\langle 4|$, onde p é a probabilidade do sistema estar no estado $|1\rangle$. Substituindo os autoestados chegamos em:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)b^2}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{(1-p)b}{1+b^2} \\ 0 & p/2 & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & p/2 & 0 \\ \frac{(1-p)b}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{1+b^2} \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Tendo concluído a construção dos operadores densidade, vamos calcular o emaranhamento.

4.4.2.2 Cálculo do emaranhamento

O cálculo do emaranhamento neste caso é feito de forma completamente diferente do realizado na seção anterior. Estamos lidando agora não mais com um estado puro, mas com uma mistura estatística. Seguiremos, portanto, o trabalho de Wootters [111], sumarizados na equação (2.29). Após um cálculo algébrico levando em conta cada um dos casos particulares¹³, chegamos ao resultado de que as raízes dos autovalores de $\rho\rho^{flip}$ (ver equação (2.32)) são idênticas, independente do caso considerado. Esses valores são:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = p \text{ e } \Lambda_4 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{\alpha}(1-p). \quad (4.72)$$

Observe que γ não aparece mais nesses resultados, uma vez que estamos lidando com a situação crítica, na qual γ fica determinado pelo valor de α . Aqui chegamos em um ponto interessante: como temos apenas dois dos Λ_i não nulos, a nossa expressão para a concorrência $C(\rho)$ definida na eq. (2.31) simplifica para $C(\rho) = |\Lambda_3 - \Lambda_4| = \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{\alpha}(1-p) - p \right|$, e a expressão final do emaranhamento de formação do sistema se torna

$$E = \hat{h} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{\alpha}(1-p) - p \right)^2}}{2} \right), \quad (4.73)$$

onde \hat{h} indica novamente a entropia binária (2.30).

¹³1a, 1b, 2a e 2b.

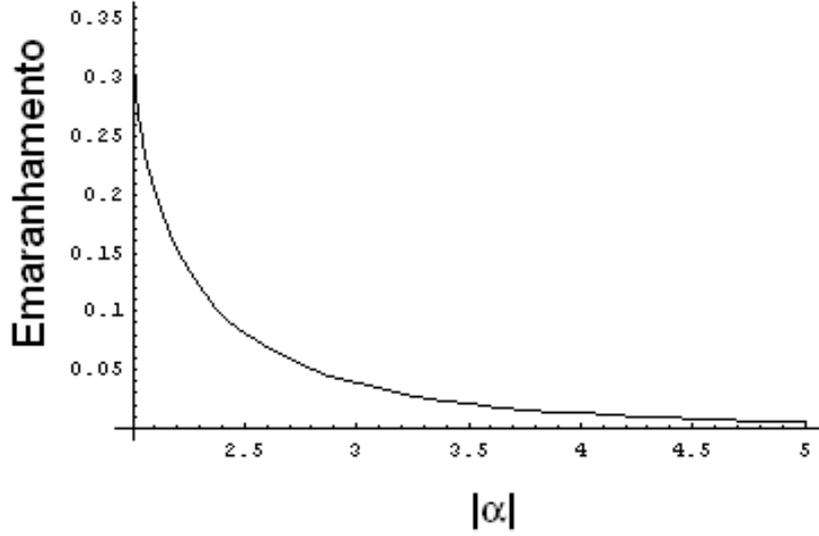


Figura 4.2 Gráfico do emaranhamento de formação no caso crítico ($\alpha = \alpha_c$) para $p = 1/2$.

Banho Térmico: Ainda no caso degenerado $\alpha = \alpha_c$, se o sistema estiver inicialmente em uma temperatura finita e for resfriado até $T \rightarrow 0$, ocorrerá que os dois estados possíveis serão equiprováveis, i.e. $p = \frac{1}{2}$. Neste caso, os Λ_i 's se tornam: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = \frac{1}{2}$ e $\Lambda_4 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{2\alpha}$, e a fórmula final do emaranhamento fica:

$$E_F = \hat{h} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{\alpha} - 1 \right)^2}}{2} \right). \quad (4.74)$$

O gráfico correspondente do emaranhamento encontra-se na figura 4.2, onde $E(|\alpha| \rightarrow 2) = \hat{h}[\frac{2+\sqrt{3}}{4}] \simeq 0.355$.

4.5 Temperatura finita

Como caso final, vamos analisar o nosso sistema de dois spins em uma temperatura arbitrária $T \neq 0$. Lembremos que o hamiltoniano, os seus autovetores e autovalores já são conhecidos (equações (4.7) e (4.8)). Numa temperatura finita arbitrária, o sistema é descrito por uma mistura estatística de estados puros, onde a probabilidade do sistema se encontrar em cada um dos estados possíveis é dada pela fórmula de Gibbs (ensemble canônico):

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad (4.75)$$

com $Z = \sum_{i=1}^4 e^{-\beta E_i}$ sendo a função de partição do sistema, $\beta = \frac{1}{k_b T}$ o fator de Boltzman e $E_i = \lambda_i$ as energias de cada estado. A matriz densidade do sistema é dada por : $\rho = \sum_{i=1}^4 p_i |i\rangle \langle i|$, que após algumas manipulações algébricas se torna:

$$\rho = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \frac{a^2 e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b^2 e^{-\Delta_c}}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{a e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b e^{-\Delta_c}}{1+b^2} \\ 0 & \cosh(\Delta) & \sinh(\Delta) & 0 \\ 0 & \sinh(\Delta) & \cosh(\Delta) & 0 \\ \frac{a e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b e^{-\Delta_c}}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{e^{-\Delta_c}}{1+b^2} \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

onde $\Delta \equiv h\beta\alpha$ e $\Delta_c \equiv h\beta\sqrt{4+\alpha^2\gamma^2}$.

Os parâmetros θ e $\tilde{\theta}$ definidos na eq. (4.53) nos ajudam a interpretar os coeficientes desta matriz. Temos

$$a = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad e$$

$$b = \tan\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \\ \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \tan\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right). \end{cases} \quad (4.77)$$

O spin-flip (definido na eq. (2.32)) de ρ segue imediatamente:

$$\rho^{flip} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \frac{e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{e^{-\Delta_c}}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{a e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b e^{-\Delta_c}}{1+b^2} \\ 0 & \cosh(\Delta) & \sinh(\Delta) & 0 \\ 0 & \sinh(\Delta) & \cosh(\Delta) & 0 \\ \frac{a e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b e^{-\Delta_c}}{1+b^2} & 0 & 0 & \frac{a^2 e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b^2 e^{-\Delta_c}}{1+b^2} \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Definindo agora novas variáveis:

$$P \equiv \frac{a^2 e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{b^2 e^{-\Delta_c}}{1+b^2}, \quad Q = \frac{ae^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{be^{-\Delta_c}}{1+b^2} \quad \text{e} \quad R = \frac{e^{\Delta_c}}{1+a^2} + \frac{e^{-\Delta_c}}{1+b^2}, \quad (4.79)$$

podemos expressar $\rho\rho^{flip}$ por:

$$\rho\rho^{flip} = \frac{1}{Z^2} \begin{pmatrix} PR+Q^2 & 0 & 0 & 2QP \\ 0 & \cosh(2\Delta) & \sinh(2\Delta) & 0 \\ 0 & \sinh(2\Delta) & \cosh(2\Delta) & 0 \\ 2QR & 0 & 0 & PR+Q^2 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Substituindo os termos definidos na eq. (4.79) e simplificando os resultados temos:

$$Q = \frac{(\alpha\gamma)\sinh(\Delta_c)}{\sqrt{4 + \alpha^2\gamma^2}}$$

e

$$PR = \frac{8 + (\alpha\gamma)^2 \cosh^2(\Delta_c)}{4 + \alpha^2\gamma^2}, \quad (4.81)$$

o que nos leva ao resultado das raízes quadradas dos autovalores de $\rho\rho^{flip}$.¹⁴ Após uma série de simplificações algébricas obtemos

$$\Lambda_1 = \frac{|Q - \sqrt{PR}|}{Z}, \quad \Lambda_2 = \frac{|Q + \sqrt{PR}|}{Z}, \quad \Lambda_3 = \frac{e^{-\Delta}}{Z} \quad \text{e} \quad \Lambda_4 = \frac{e^{\Delta}}{Z}, \quad (4.82)$$

com Q e PR dados na eq. (4.81).

De posse desses valores, o cálculo do emaranhamento é imediato através da fórmula de Wootters, eq. (2.29). Na figura 4.3 mostramos o gráfico do emaranhamento de formação como função de α e γ , com $h\beta \equiv 20T/J$. Podemos ver claramente duas regiões distintas, com uma acentuada mudança de comportamento. No lado esquerdo da figura 4.4 fizemos uma vista superior da figura 4.3, enquanto que no direito plotamos a função apresentada na eq. (4.40), que corresponde ao valor de α_c como função de γ , o que nos mostra que a mudança de comportamento do sistema ocorre justamente em $\alpha = \alpha_c$, como esperado.

4.6 Testes de consistência

De posse dos resultados da seção 4.5, podemos testar a solução geral no limite $T \rightarrow 0$. Com isso deveremos chegar nos três resultados obtidos na seção 4.4 para o emaranhamento:

¹⁴Ver equação (2.29), onde o papel deste operador é expresso na fórmula do Wootters.

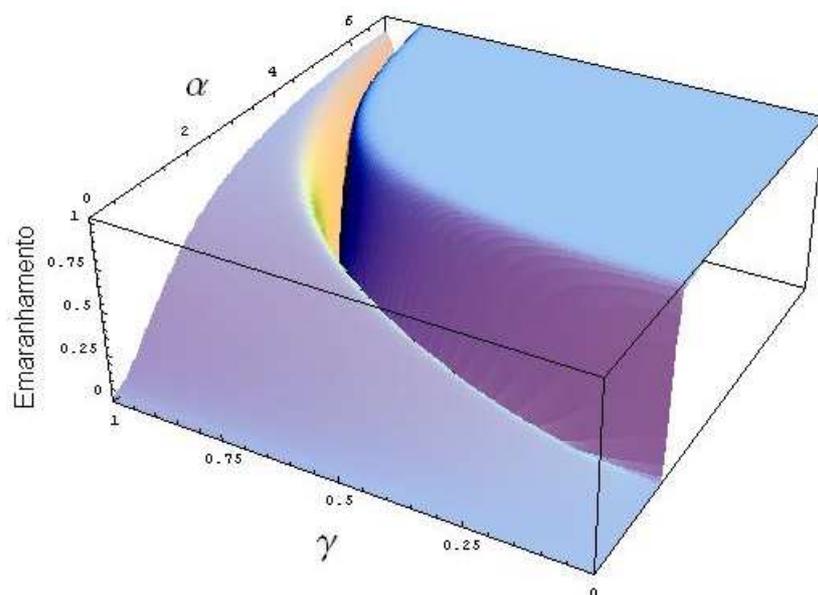


Figura 4.3 Gráfico do emaranhamento de formação de um sistema de dois spins submetidos a um hamiltoniano do tipo expresso na eq. (4.1) com $h\beta \equiv 20T/J$.

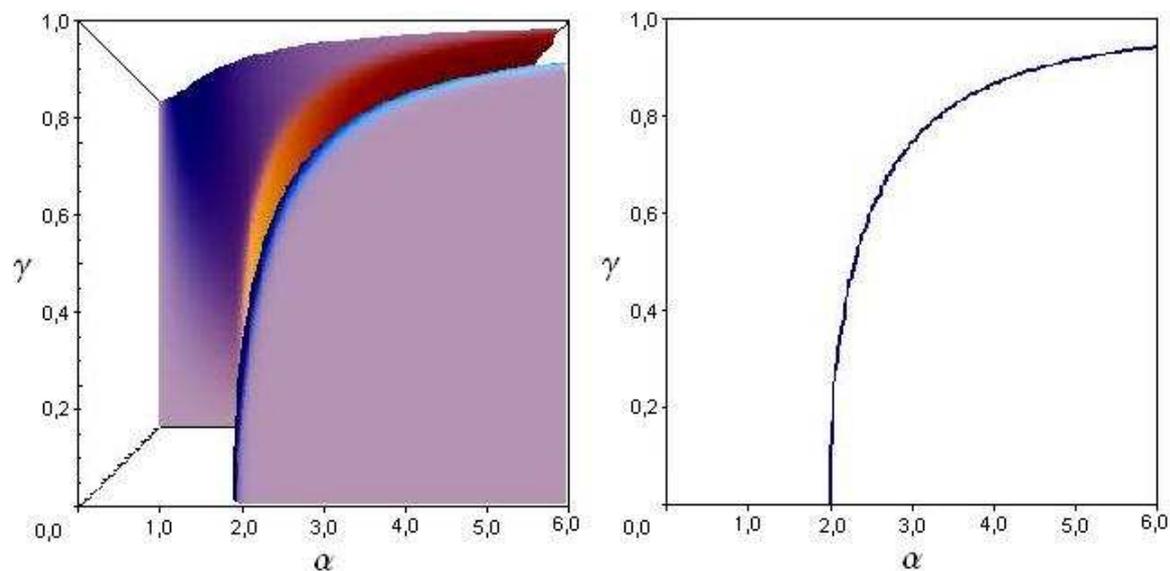


Figura 4.4 Vista superior da figura 4.3, onde explicitamos a mudança de comportamento em $\alpha = \alpha_c$.

caso não degenerado com $|\alpha| > |\alpha_c|$ e $|\alpha| < |\alpha_c|$ e o caso degenerado $|\alpha| = |\alpha_c|$. Este cálculo servirá também como um teste para a fórmula de Wootters [111], uma vez que, partindo do resultado em temperatura finita obtido com o uso de sua fórmula, tentaremos reproduzir os resultados do emaranhamento também no caso não degenerado, obtido de forma direta, sem utilizá-la.

Limite $T \rightarrow 0$: Como primeiro passo, vamos fazer o limite $\beta \rightarrow \infty$ nas equações (4.81). Obtemos

$$Z^\infty \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^4 e^{-\beta \lambda_i} = e^\Delta + e^{\Delta_c}, \quad (4.83)$$

$$Q^\infty \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(\alpha\gamma) \sinh(\Delta_c)}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}} = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}} \cdot \frac{e^{\Delta_c}}{2} \quad (4.84)$$

e

$$PR^\infty \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{8 + (\alpha\gamma)^2 \cosh^2(\Delta_c)}{4 + \alpha^2 \gamma^2} = \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4 + \alpha^2 \gamma^2} \cdot \frac{e^{2\Delta_c}}{4}. \quad (4.85)$$

Substituindo as equações (4.83), (4.84) e (4.85) na eq. (4.82) temos:

$$\Lambda_1 \rightsquigarrow 0, \Lambda_2 \rightsquigarrow \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}} \cdot \frac{e^{\beta h \alpha_c}}{e^{\beta h \alpha} + e^{\beta h \alpha_c}}, \Lambda_3 \rightsquigarrow 0 \text{ e } \Lambda_4 \rightsquigarrow \frac{e^{\beta h \alpha}}{e^{\beta h \alpha} + e^{\beta h \alpha_c}}. \quad (4.86)$$

Caso subcrítico : $|\alpha| < |\alpha_c|$

Neste caso $\Lambda_2 \rightsquigarrow \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}}$ e $\Lambda_4 \rightsquigarrow 0$, o que nos leva a apenas um dos Λ 's $\neq 0$. Substituindo este resultado na eq. (2.29) temos que:

$$C \rightsquigarrow \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}} \Rightarrow E_F = \hat{h} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{4 + \alpha^2 \gamma^2}} \right)^2}}{2} \right), \quad (4.87)$$

que corresponde exatamente ao obtido na equação (4.49). Vale ressaltar, mais uma vez, a importância deste resultado, uma vez que o resultado da eq. (4.49) foi obtido de forma direta, sem a utilização da fórmula de Wootters [111], e agora comprovamos o mesmo resultado com a utilização de sua fórmula. Partindo de uma situação onde o sistema se encontrava numa mistura

estatística pudemos, neste limite $T \rightarrow 0$, reproduzir o resultado do estado puro.

Caso supercrítico : $|\alpha| > |\alpha_c|$

Neste caso $\Lambda_2 \sim 0$ e $\Lambda_4 \sim 1$, o que nos leva novamente a apenas um dos Λ 's $\neq 0$. Substituindo este resultado na eq. (2.29) temos que:

$$C = 1 \Rightarrow E_F = \hat{h} \left(\frac{1}{2} \right) = 1, \quad (4.88)$$

que corresponde, exatamente, ao obtido em (4.46). Confirmando, mais uma vez, nossos cálculos.

Caso crítico : $|\alpha| = |\alpha_c|$

Neste caso $\Lambda_2 \sim \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{\alpha} \cdot (1 - \frac{1}{2})$ e $\Lambda_4 \sim \frac{1}{2}$. Comparando com o obtido na eq. (4.72) vemos que os resultados coencidem se fizermos $p = \frac{1}{2}$, o que corresponde à mistura estatística devido ao banho térmico, eq. (4.74). Esse resultado também serve para demonstrar o fato já conhecido de que os estados degenerados ficam equiprováveis.

4.7 Formulação Alternativa

Antes de concluir este capítulo vamos apresentar o cálculo da concorrência previamente obtido na eq. (4.55) de uma forma implementável experimentalmente. Estaremos nos baseando nos trabalhos de Walborn et al. [106], Horodecki [51] e Mintert et al. [74], que estão resumidos no apêndice B. Como primeiro passo considere um estado $|\psi\rangle$ dado por:

$$|\psi\rangle = \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) |\uparrow\uparrow\rangle + \text{cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (4.89)$$

similar ao estado $|3\rangle$, estudado na eq. (4.42). Escolhendo um outro grau de liberdade do sistema, como fizeram Walborn et al., podemos obter uma cópia de $|\psi\rangle$ expressa da seguinte forma¹⁵:

$$|\psi\rangle = \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) |00\rangle + \text{cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) |11\rangle. \quad (4.90)$$

O estado $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ torna-se

¹⁵Note que não há violação do teorema da não-clonagem [110], visto que os dois estados são obtidos de uma fonte independente e não um do outro.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle |00\rangle + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} |\uparrow\uparrow\rangle |11\rangle \\
&+ \frac{\text{sen}(\theta)}{2} |\downarrow\downarrow\rangle |00\rangle + \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\downarrow\rangle |11\rangle.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Vamos agora expressar o resultado da eq. (4.91) agrupando os graus de liberdade do primeiro qubit à esquerda e os do segundo à direita, i.e. $|\text{ab}\rangle |\text{cd}\rangle = (|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2) \otimes (|c\rangle_1 \otimes |d\rangle_2) \equiv (|a\rangle_1 \otimes |c\rangle_1) \otimes (|b\rangle_2 \otimes |d\rangle_2) \equiv |\text{ac}\rangle_1 \otimes |\text{bd}\rangle_2 \equiv |\text{ac}\rangle |\text{bd}\rangle$, onde o sub-índice indica a qual das partículas o estado se refere. Temos portanto

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow 0\rangle |\uparrow 0\rangle + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} |\uparrow 1\rangle |\uparrow 1\rangle \\
&+ \frac{\text{sen}(\theta)}{2} |\downarrow 0\rangle |\downarrow 0\rangle + \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow 1\rangle |\downarrow 1\rangle.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Seguindo os passos de Mintert et al. [74] e Walborn et al. [106], precisamos agora calcular a probabilidade de encontrar as duas cópias do primeiro qubit num estado antissimétrico. O estado em questão é o estado de Bell $|\psi^-\rangle$ dado por:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow 0\rangle - |\uparrow 1\rangle). \tag{4.93}$$

O operador de projeção M (ver eq. (B.2)) atua apenas no subespaço do primeiro qubit e é definido por:

$$M = |\psi^-\rangle \langle \psi^-| = \frac{|\downarrow 0\rangle \langle \downarrow 0| + |\uparrow 1\rangle \langle \uparrow 1|}{2} - \frac{|\uparrow 1\rangle \langle \downarrow 0| + |\downarrow 0\rangle \langle \uparrow 1|}{2}, \tag{4.94}$$

e sua atuação nos estados da base se torna:

$$M|\uparrow 0\rangle = 0, \quad M|\downarrow 0\rangle = \frac{|\downarrow 0\rangle - |\uparrow 1\rangle}{2}, \quad M|\uparrow 1\rangle = \frac{|\uparrow 1\rangle - |\downarrow 0\rangle}{2} \quad \text{e} \quad M|\downarrow 1\rangle = 0. \tag{4.95}$$

Para calcular a probabilidade $P_M = \langle \psi | \otimes \langle \psi | M | \psi \rangle \otimes | \psi \rangle$ do primeiro subsistema estar num estado antissimétrico, explicitemos inicialmente como o projetor atua no estado $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
M|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) M|\uparrow 0\rangle |\uparrow 0\rangle + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} M|\uparrow 1\rangle |\uparrow 1\rangle + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} M|\downarrow 0\rangle |\downarrow 0\rangle \\
&+ \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) M|\downarrow 1\rangle |\downarrow 1\rangle = \frac{\text{sen}(\theta)}{4} (|\uparrow 1\rangle |\uparrow 1\rangle - |\downarrow 0\rangle |\uparrow 1\rangle + |\downarrow 0\rangle |\downarrow 0\rangle - |\uparrow 1\rangle |\downarrow 0\rangle).
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Calculando agora P_M obtemos

$$\begin{aligned} P_M = \langle \psi | \otimes \langle \psi | M | \psi \rangle \otimes | \psi \rangle &= \frac{\text{sen}(\theta)}{4} \left(\frac{\text{sen}(\theta)}{2} \langle \uparrow 1 | \uparrow 1 \rangle \langle \uparrow 1 | \uparrow 1 \rangle + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} \langle \downarrow 0 | \downarrow 0 \rangle \langle \downarrow 0 | \downarrow 0 \rangle \right) \\ &= \frac{\text{sen}^2(\theta)}{4}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

A concorrência se torna, portanto (ver eq. B.1):

$$C = 2\sqrt{P_M} = 2\sqrt{\frac{\text{sen}^2(\theta)}{4}} = \text{sen}(\theta), \quad (4.98)$$

como previamente obtido na eq. (4.55).

4.8 Conclusões

Neste capítulo estudamos o hamiltoniano de Heisenberg, tão importante na computação quântica, de maneira exaustiva para o caso de 2 spins interagentes. Apresentamos dois procedimentos distintos para a sua diagonalização e encontramos seus autovalores e autovetores. De posse destes resultados, fizemos o cálculo do emaranhamento de formação do sistema em todas as situações possíveis, tanto de maneira direta quanto pela utilização da fórmula de Wootters (eq. (2.29)), comprovando a equivalência dos métodos nos casos em que ambos são aplicáveis.

Podemos também interpretar os resultados deste capítulo, em particular a figura 4.3, como uma receita para a obtenção de emaranhamento sob demanda através de um procedimento não unitário utilizando um reservatório térmico. Temos portanto um protocolo para a obtenção de qualquer valor do emaranhamento de formação para um sistema de dois qubits. É interessante também, perceber que mesmo este sistema aparentemente tão simples, formado apenas por 2 qubits, exibe um comportamento tão rico, com características bastante distintas dependendo dos valores dos parâmetros de controle α e γ .

Embora tenhamos feito um estudo de diversos casos, ainda estamos nos restringindo a sistemas formados por dois qubits. Isto reflete a intenção deste trabalho, que não é de simplesmente quantificar o emaranhamento em diversas situações distintas, mas sim tentar entendê-lo. Para avançar ainda mais neste caminho, faremos um estudo com uma nova ferramenta matemática: a álgebra geométrica.

Álgebra Geométrica

Neste capítulo vamos apresentar um estudo do emaranhamento através da álgebra geométrica do espaço-tempo de multipartículas (AGSM)¹. Esta abordagem utiliza uma linguagem completamente diferente da tradicional formulação matricial e visa introduzir novos elementos conceituais ao problema da quantificação do emaranhamento.

A construção de diferentes formalismos em física não é uma novidade, sendo comum encontrar áreas com formulações matemáticas bastante distintas porém equivalentes. Como exemplos, na mecânica clássica temos as formulações newtoniana vetorial, a lagrangeana e a hamiltoniana, enquanto que na mecânica quântica temos a formulação canonica e a de integrais de trajetórias. Podemos destacar duas grandes vantagens de se construir diferentes formulações para uma mesma teoria. Temos primeiramente uma vantagem em termos de cálculos: problemas difíceis em uma formulação podem ser mais fáceis ou até mesmo triviais na outra. Além disso, cada formulação traz consigo novos elementos e conceitos. Isto muitas vezes ajuda na compreensão dos fenômenos e na desvinculação do que é a realidade física do problema em questão dos elementos particulares de uma determinada formulação.

O roteiro para este capítulo é o seguinte: na seção 5.1 faremos uma introdução à AGSM, na 5.2 aplicaremos o formalismo da álgebra geométrica ao estudo de um único qubit, enquanto que na 5.3 faremos uma aplicação a sistemas de múltiplos qubits, introduzindo o conceito de *rotor de emaranhamento*. Apresentaremos uma nova formulação do traço parcial na seção 5.4, confrontando os resultados com os previamente obtidos no capítulo 4. Concluiremos, então, na seção 5.5.

5.1 Introdução à AGSM

Iniciaremos com uma breve apresentação da álgebra geométrica do espaço-tempo de multipartículas. Neste ponto estaremos utilizando diversos resultados da álgebra geométrica usual,

¹Tradução de *multiparticle spacetime algebra* - MSTA.

a qual apresentamos em detalhes no apêndice C. Esta formulação é uma extensão da teoria de Dirac para um espaço multidimensional [42] e foi construída inicialmente por Doran et al. [28]. Esta seção baseia-se neste trabalho e nas referências [29, 40, 41].

A álgebra geométrica do espaço-tempo, $G^{1,3}$, é construída de modo a ser compatível com o espaço de Minkowski de métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$, sendo uma generalização da definição apresentada na seção C.2. Podemos construir uma base para o subespaço de rank 1, $\langle G^{1,3} \rangle_1$, a partir dos vetores γ_μ , com $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ satisfazendo a relação:

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde o termo γ_0 é normalmente associado ao tempo no estudo de relatividade, enquanto que os outros três estão relacionados às direções do espaço x , y e z . A métrica de Minkowski indica, portanto, características diferentes para estes dois grupos de vetores ($\gamma_0^2 = -\gamma_1^2 = -\gamma_2^2 = -\gamma_3^2 = 1$).

O espaço completo dos multivetores pertencentes à álgebra $G^{1,3}$ possui dimensão igual a dezesseis. Sua base possui um elemento escalar, quatro vetores, seis bivectores, quatro trivetores e um tetravetor. Este último é o pseudo-escalar² da álgebra e é denotado por I , como discutido no apêndice C. Um multivetor ψ qualquer fica então expresso por:

$$\begin{aligned} \psi = & a_1 + a_2\gamma_0 + a_3\gamma_1 + a_4\gamma_2 + a_5\gamma_3 \\ & + a_6\gamma_1\gamma_0 + a_7\gamma_2\gamma_0 + a_8\gamma_3\gamma_0 + a_9\gamma_3\gamma_2 + a_{10}\gamma_1\gamma_3 + a_{11}\gamma_2\gamma_1 \\ & + a_{12}\gamma_3\gamma_2\gamma_1 + a_{13}\gamma_0\gamma_3\gamma_2 + a_{14}\gamma_0\gamma_1\gamma_3 + a_{15}\gamma_0\gamma_2\gamma_1 \\ & + a_{16}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

À primeira vista pode parecer confuso trabalhar com elementos de dezesseis componentes com características tão distintas, mas vamos melhorar a nossa notação para explicitar os conceitos por trás de cada uma destas componentes. Notemos, primeiramente, que os vetores γ_μ anticomutam quando em direções perpendiculares e comutam quando paralelos. Isto nos permite justificar a escolha da notação I , em analogia à unidade imaginária i , para o pseudo-escalar $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$:

$$I^2 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = \gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_3 = (1)(-1)(-1)(-1) = -1. \quad (5.3)$$

²O elemento de maior rank da álgebra recebe este nome pois é único, como é o caso do escalar.

Vamos agora utilizar o fato da sub-álgebra par³ de $G^{1,3}$, denotada por $G_+^{1,3}$, ser isomorfa à álgebra de Pauli G^3 , apresentada na seção C.3.2, para introduzir a notação $\sigma^k \equiv \gamma_k \gamma_0$,⁴ com $k \in \{1, 2, 3\}$. Este resultado foi originalmente obtido por Hestenes [43]. Vejamos a sua prova

$$\begin{aligned} (\sigma^k)^2 &= \gamma_k \gamma_0 \gamma_k \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_k \gamma_k \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_0 = 1 \quad \text{e} \\ \sigma^k \sigma^l &= \gamma_k \gamma_0 \gamma_l \gamma_0 = -\gamma_l \gamma_0 \gamma_k \gamma_0 = -\sigma^l \sigma^k, \end{aligned} \quad (5.4)$$

com $\{k, l\} \in \{1, 2, 3\}$. A equação (5.4) nos mostra que os elementos $\gamma_k \gamma_0 \in G_+^{1,3}$ satisfazem às mesmas relações que os elementos $\sigma^k \in G^3$. Este isomorfismo permite-nos simplificar a base de $G^{1,3}$ para

$$\{1, \gamma_\mu, \sigma^k, I\sigma^k, I\gamma_\mu, I\} \quad (5.5)$$

com $k \in \{1, 2, 3\}$ e $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Tendo visto a álgebra geométrica do espaço-tempo, vamos a sua generalização para multi-partículas. Isto se faz expandindo-se o nosso espaço $G^{1,3}$ para conter novos elementos γ_μ para cada um das novas partículas introduzidas no problema. Temos, então, a nova base de vetores $\{\gamma_\mu^i\}$, onde o índice μ continua indicando cada um dos quatro eixos 0, 1, 2, 3 enquanto que i indica a partícula a qual o vetor se refere. Como exemplo para o caso de duas partículas teríamos a base: $\{\gamma_0^1, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_3^1, \gamma_0^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2\}$. Estes elementos obedecem a relação:

$$\gamma_\mu^i \gamma_\nu^j + \gamma_\nu^j \gamma_\mu^i = 2\eta_{\mu,\nu} \delta_{i,j}, \quad (5.6)$$

o que implica que elementos em sítios distintos $i \neq j$ comutam.

Esta parte introdutória sobre a AGSM aliada ao apêndice C nos tornam aptos a começar a apresentação dos elementos da computação quântica neste novo formalismo. A grande vantagem da AGSM resulta da generalização dos conceitos geométricos usados na esfera de Bloch, apresentada no apêndice A, para um sistema de múltiplos qubits. Iniciaremos as aplicações do formalismo com o caso mais simples, i.e. um sistema formado por um único qubit.

³A sub-álgebra par consiste nos elementos de rank pares. No nosso caso isto significa os escalares e os bivectores.

⁴Ao longo do texto, σ^k é a notação tanto para as matrizes de Pauli no formalismo canônico quanto para o correspondente elemento geométrico pertencente à álgebra. O contexto onde ele aparece deixará claro a qual dos dois estamos nos referindo.

5.2 Sistema de um qubit

Como primeira aplicação da álgebra geométrica, vejamos como ela descreve o estado de um único qubit através do isomorfismo entre G_+^3 e a álgebra das matrizes de Pauli. Estaremos apresentando uma visão geométrica tanto dos estados possíveis de um qubit quanto dos operadores que nele atuam. Esta é a primeira novidade trazida pela álgebra geométrica: operadores e estados são descritos por elementos de um mesmo espaço. A construção apresentada nesta seção se baseia nos trabalhos originais de Hestenes [44, 45] e no capítulo 8 do livro de C. Doran [27].

O estado de um sistema quântico de dois níveis (qubit), pode ser descrito na forma matricial através do spinor $|\psi\rangle$ definido abaixo:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

onde ψ_1 e ψ_2 são dois números complexos satisfazendo a condição de normalização $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. A este spinor associamos o multivetor $\psi = a^0 + a^k I \sigma^k \in G_+^3$, $k \in \{1, 2, 3\}$ com a seguinte relação:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 \\ -a^2 + ia^1 \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \psi = a^0 + a^1 \sigma^2 \sigma^3 - a^2 \sigma^1 \sigma^3 + a^3 \sigma^1 \sigma^2 = a^0 + a^k I \sigma^k. \quad (5.8)$$

O motivo desta escolha ficará mais evidente quando construirmos os operadores e verificarmos que eles satisfazem os resultados esperados obtidos pelo formalismo canônico.

Tendo construído a representação de um estado como um multivetor, passemos à construção dos operadores. Notemos inicialmente que o conjunto formado pelas três matrizes de Pauli somado à matriz identidade forma uma base para os operadores que atuam em um único spin. Este fato implica que precisamos apenas da construção em álgebra geométrica da atuação dos operadores de Pauli num estado qualquer. A novidade conceitual neste ponto, como dita anteriormente, é que tanto os operadores quanto os estados são elementos do mesmo espaço, o que não ocorre na formulação canônica. A atuação dos operadores de Pauli é construída através do seguinte funtor

$$\sigma^k |\psi\rangle \leftrightarrow \sigma^k \circ \psi = \sigma^k \psi \sigma^3, \quad (5.9)$$

onde o primeiro termo está escrito na formulação canônica, e o segundo estabelece a definição da notação (\circ) que denota a atuação de um operador como um produto geométrico (ver eq. (C.5)). Neste ponto começamos a enxergar a enorme simplicidade com que operações são realizadas neste novo formalismo.

Vamos exemplificar o que acabamos de descrever com a construção, em álgebra geométrica, da atuação da porta de Hadamard H no estado lógico $|0\rangle$. Para isso notemos inicialmente que os dois estados lógicos que servem de base para os espinores, i.e. $|0\rangle = (1, 0)^\dagger$ e $|1\rangle = (0, 1)^\dagger$ são representados, em álgebra geométrica, pelos multivetores 1 e $-I\sigma^2$ respectivamente, como pode ser imediatamente verificado através da equação 5.8.

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 + \sigma^3)|0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 + \sigma^3) \circ (1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 1 \sigma^3 + \sigma^3 1 \sigma^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sigma^1 \sigma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - I\sigma^2) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde utilizamos o fato de que $(\sigma^3)^2 = 1$ e $\sigma^1 \sigma^3 = \sigma^1 \sigma^2 \sigma^2 \sigma^3 = -\sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 \sigma^3 = -I\sigma^2$.

O próximo passo consiste na construção dos números complexos na álgebra geométrica, que utiliza apenas coeficientes reais. Vejamos como exemplo a atuação de σ^2 no estado $|0\rangle$ no formalismo canônico:

$$\sigma^2 |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle. \quad (5.11)$$

Vejamos como este cálculo ficaria em álgebra geométrica:

$$\sigma^2 \circ \psi = \sigma^2 1 \sigma^3 = I\sigma^1. \quad (5.12)$$

A equivalência entre os resultados das equações (5.11) e (5.12) pode ser percebida da seguinte forma:

$$i|\psi\rangle \leftrightarrow I \circ \psi = (\sigma^1 \sigma^2 \sigma^3) \circ \psi = \sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 \psi \sigma^3 \sigma^3 \sigma^3 = I\psi \sigma^3 = \psi I\sigma^3, \quad (5.13)$$

uma vez que o pseudo escalar comuta com os elementos da álgebra. Retomando o resultado da eq. (5.11) temos:

$$i|1\rangle \leftrightarrow I \circ (-I\sigma^2) = -I^2 \sigma^2 \sigma^3 = \sigma^2 \sigma^3 = I\sigma^1, \quad (5.14)$$

como obtido na eq. (5.12). A equação (5.13) nos mostra que a atuação da unidade imaginária i num estado qualquer é representada em álgebra geométrica pela multiplicação, à direita, pelo

bivetor $I\sigma^3 \equiv j$. Estamos prontos, agora, para introduzir o produto interno nesta nova linguagem.

5.2.1 Produto interno

Vamos construir a representação do produto interno na álgebra geométrica. No formalismo canônico podemos separar as componentes reais e imaginárias do produto interno entre dois spinores da seguinte forma:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \text{Re} \langle \psi | \phi \rangle - i \text{Re} \langle \psi | i\phi \rangle. \quad (5.15)$$

Esta representação pode ser imediatamente transformada para a linguagem da álgebra geométrica. Temos então a relação

$$\langle \psi | \phi \rangle \leftrightarrow \langle \tilde{\psi} \phi \rangle - \langle \tilde{\psi} \phi j \rangle j, \quad (5.16)$$

onde $\tilde{\psi}$ indica a operação de reversão definida na eq. (C.7), $\langle \star \rangle \equiv \langle \star \rangle_0$ indica a parte escalar do multivetor \star , como definido na eq. (C.6), e $j = I\sigma^3$ corresponde a atuação do imaginário i .

Por se tratar de uma operação menos trivial do que as apresentadas anteriormente, vamos provar este resultado construindo o produto interno entre dois estados arbitrários nos dois formalismos. Sejam

$$\begin{aligned} |A\rangle &= \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \leftrightarrow a + dI\sigma^1 - cI\sigma^2 + bI\sigma^3 \quad e \\ |B\rangle &= \begin{pmatrix} A + iB \\ C + iD \end{pmatrix} \leftrightarrow A + DI\sigma^1 - CI\sigma^2 + BI\sigma^3, \end{aligned} \quad (5.17)$$

os spinores considerados. Temos:

$$\langle A | B \rangle = (a - ib, c - id) \begin{pmatrix} A + iB \\ C + iD \end{pmatrix} = (aA + bB + cC + dD) + i(aB - bA + cD - dC), \quad (5.18)$$

no formalismo canônico. Para o cálculo em álgebra geométrica temos:

$$\tilde{A}B = (a - dI\sigma^1 + cI\sigma^2 - bI\sigma^3)(A + DI\sigma^1 - CI\sigma^2 + BI\sigma^3). \quad (5.19)$$

Podemos, então, calcular os dois termos da equação (5.16). Temos:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{A}B \rangle &= aA + bB + cC + dD \quad e \\ \langle \tilde{A}BI\sigma^3 \rangle &= aB - bA + cD - dC,\end{aligned}\tag{5.20}$$

o que corresponde ao obtido na eq. (5.18) e conclui a nossa prova da equivalência entre os dois formalismos.

5.2.2 Operador densidade

Vamos agora apresentar o análogo em álgebra geométrica ao operador densidade, definido no formalismo canônico na eq. (2.15). A operação de tomar o vetor dual $(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$ no formalismo canônico é representada pela inversão, apresentada no apêndice C. Temos então

$$\rho = \sum_{i=1}^m p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \leftrightarrow \sum_i p_i \psi \tilde{\psi}.\tag{5.21}$$

Este resultado é apenas uma antecipação da formulação em álgebra geométrica do operador densidade de um sistema formado por múltiplos qubits, que será apresentado na seção 5.3.6.

5.2.3 Vetor de spin

Para concluir esta apresentação de um sistema de um único qubit, vamos mostrar uma outra maneira de caracterizá-lo. Usaremos os valores esperados dos operadores de Pauli nas três direções, como apresentado na eq. (A.9). O vetor de spin \vec{r} fica definido por:

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \hbar \vec{r},\tag{5.22}$$

com suas componentes definidas pela equação

$$r_k = \langle\psi| \sigma^k |\psi\rangle, \quad k \in \{1, 2, 3\}.\tag{5.23}$$

O estado de qualquer qubit, caracterizado pelo vetor \vec{r} , pode então ser obtido através do estado inicial alinhado na direção \hat{Z} sendo inicialmente rotacionado por um ângulo θ na direção \hat{Y} e depois por um ângulo ϕ na direção \hat{Z} . Isto resulta num ponto da esfera de Bloch como discutido no apêndice A. A álgebra geométrica entra neste contexto de forma natural pois rotações são facilmente implementadas, conforme discutido na seção C.2.2.

Vamos agora construir o rotor R responsável pela rotação desejada:

$$R_{\phi,\theta} \equiv e^{-\frac{\phi}{2}I\sigma^3} e^{-\frac{\theta}{2}I\sigma^2}, \quad (5.24)$$

onde o bivector $I\sigma^k$ define o plano de rotação, conforme vimos na eq. (C.18). O vetor \vec{r} , em álgebra geométrica, fica então representado por:

$$\vec{r} = R\sigma^3\tilde{R}, \quad (5.25)$$

onde \tilde{R} indica a operação de reversão realizada no bivector R , o que neste caso significa inverter o sinal do pseudo-escalar. O estado de um qubit ψ fica então completamente caracterizado pelo rotor $R_{\phi,\theta}$, que é uma representação da esfera de Bloch discutida no apêndice A. A álgebra geométrica permite a extensão deste resultado para múltiplos qubits, como veremos a seguir.

5.3 Sistema de dois qubits

O estado de dois qubits pode ser representado pela multiplicação, na AGSM, dos estados correspondentes a cada uma das partículas⁵. Isto nos permite construir em álgebra geométrica uma base para o espaço que descreve um sistema de dois qubits a partir do produto geométrico entre elementos das sub-álgebras pares correspondentes a cada um deles. A base considerada é:

$$\{1, I_1\sigma_1^k, I_2\sigma_2^k, I_1\sigma_1^j I_2\sigma_2^k\}, \quad (5.26)$$

onde os coeficientes j e k variam entre 1 e 3 representando as três componentes espaciais x, y, z .

A primeira característica do estudo de multipartículas é que o espaço tem uma dimensão maior do que a necessária. Em particular, para o caso de dois qubits, a base apresentada na equação (5.26) possui dezesseis elementos, em oposição aos oito parâmetros necessários para descrever um estado qualquer de dois qubits. Este fato está relacionado com a utilização de dois elementos distintos para a unidade imaginária, i.e. o termo $I\sigma^3$ de cada uma das partículas. Para solucionar este problema, precisamos impor a qualquer multivetor ψ que descreva um estado de dois qubits a seguinte propriedade:

$$\psi I_1\sigma_1^3 = \psi I_2\sigma_2^3 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}(1 - I_1\sigma_1^3 I_2\sigma_2^3). \quad (5.27)$$

⁵O produto tensorial do formalismo canônico é substituído pelo produto geométrico.

Isto nos motiva a definir o projetor E da seguinte forma:

$$E \equiv \frac{1}{2}(1 - I_1 \sigma_1^3 I_2 \sigma_2^3) = E^2, \quad (5.28)$$

e todo multivetor que descreve o estado de dois qubits deve ser multiplicado à direita por este projetor para ter uma representação única num espaço com a dimensão correta (oito). Alguns autores preferem a utilização do correlator C , definido por:

$$C \equiv \frac{1}{2}(1 - I_1 I_2), \quad (5.29)$$

de modo que $I_1 C = I_2 C = \frac{I_1 + I_2}{2}$.

A equação (5.8) que nos mostra como construir um estado de um único qubit em álgebra geométrica pode, então, ser imediatamente generalizada para o estado de dois qubits utilizando o fato de que o produto tensorial fica representado pelo produto geométrico⁶.

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1E, & |\uparrow\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -I\sigma_2^2 E. \\ |\downarrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow -I\sigma_1^2 E & \text{e} & |\downarrow\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow I\sigma_1^2 I\sigma_2^2 E, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde não mais indicamos a qual dos subespaços o pseudo-escalar I faz parte, uma vez que $I_1 E = I_2 E$.

O próximo passo consiste na generalização da equação (5.13), que mostra a atuação da unidade imaginária i em álgebra geométrica para um único qubit. Queremos que a atuação das unidades imaginárias dos dois espaços resultem no mesmo elemento. Temos portanto

$$\psi E I \sigma_1^3 = \psi E I \sigma_2^3 = \psi \frac{1}{2}(I\sigma_1^3 + I\sigma_2^3) \equiv \psi J, \quad (5.31)$$

onde introduzimos o bivector J , que atua como a unidade imaginária i da álgebra convencional, sendo uma generalização do j previamente definido. Observemos que J satisfaz $J^2 = -E$.

5.3.1 Produto interno

O produto interno entre dois estados de múltiplos qubits em álgebra geométrica segue da generalização imediata da eq. (5.16). Temos então

⁶Lembrando que $|0\rangle \leftrightarrow 1$ e $|1\rangle \leftrightarrow -I\sigma^2$.

$$\langle \psi | \phi \rangle \leftrightarrow \langle E \rangle^{-1} [\langle \tilde{\psi} E \phi \rangle - \langle \tilde{\psi} \phi J \rangle I \sigma^3], \quad (5.32)$$

como apresentado na seção 9.2 de [27]. O termo de normalização $\langle E \rangle^{-1}$ garante que o estado E tem norma 1.

5.3.2 Construção da operação de spin-flip

Estamos prontos para construir uma versão em álgebra geométrica da operação de spin-flip definida na equação (2.32) e utilizada na fórmula de Wootters para o cálculo do emaranhamento de formação. Esta operação efetua a inversão de todos os spins do sistema. Considere o estado geral de dois qubits $|\psi\rangle$. A operação do spin-flip é definida por

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle \Rightarrow |\psi^{flip}\rangle = a|\downarrow\downarrow\rangle + b|\downarrow\uparrow\rangle + c|\uparrow\downarrow\rangle + d|\uparrow\uparrow\rangle. \quad (5.33)$$

Em álgebra geométrica teríamos:

$$\psi = (a - bI\sigma_2^2 - cI\sigma_1^2 + dI\sigma_1^2I\sigma_2^2)E \Rightarrow \psi^{flip} = (aI\sigma_1^2I\sigma_2^2 - bI\sigma_1^2 - cI\sigma_2^2 + d)E \quad (5.34)$$

Propomos a seguinte maneira de implementar a transformação $\psi \rightarrow \psi^{flip}$:

$$\psi^{flip} = \sigma_1^3 \circ \sigma_2^3 \circ (\psi I \sigma_1^2 I \sigma_2^2), \quad (5.35)$$

que pode ser imediatamente verificada:

$$\begin{aligned} & \sigma_1^3 \circ \sigma_2^3 \circ (\psi I \sigma_1^2 I \sigma_2^2) \\ &= \sigma_1^3 \circ \sigma_2^3 \circ (aI\sigma_1^2I\sigma_2^2 + bI\sigma_1^2 + cI\sigma_2^2 + d) \\ &= \sigma_1^3 \sigma_2^3 (aI\sigma_1^2I\sigma_2^2 + bI\sigma_1^2 + cI\sigma_2^2 + d) \sigma_2^3 \sigma_1^3 \\ &= aI\sigma_1^2I\sigma_2^2 - bI\sigma_1^2 - cI\sigma_2^2 + d = \psi^{flip}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

A necessidade da multiplicação pelo fator $I\sigma_1^2I\sigma_2^2$ aparece imediatamente ao observarmos as expressões de ψ e ψ^{flip} da equação (5.34). O segundo passo consiste em encontrar uma maneira de se inverter o sinal dos dois termos intermediários, correspondentes aos estados onde os dois spins estão em direções opostas. A solução vem da constatação de que justamente esses

dois estados são formados por um número ímpar (um) de bivectores da forma $I\sigma_i^2$ enquanto que os outros dois estados são formados por um número par (zero ou dois). Por isso implementamos um procedimento que inverte o sinal dos bivectores. Para o estado que desejamos este sinal é invertido uma única vez e para os outros dois estados o sinal permanece o mesmo (ou muda duas vezes), como desejado.

5.3.3 Aplicação no cálculo da concorrência

De posse da operação de spin-flip, eq. (5.35), e do produto interno, eq. (5.32), podemos refazer o cálculo da concorrência (e conseqüentemente do emaranhamento) do sistema de dois qubits apresentado na eq. (4.55). O estado do nosso sistema é descrito por:

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a + I\sigma_1^2 I\sigma_2^2) \equiv \psi_3. \quad (5.37)$$

Aplicando a eq. (5.35) temos:

$$\psi_3^{flip} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1 + aI\sigma_1^2 I\sigma_2^2). \quad (5.38)$$

Observemos também que a operação de inversão, definida na eq. (C.7), não altera o nosso estado, i.e. $\tilde{\psi}_3 = \psi_3$. Substituindo todas estas informações na expressão para o produto interno obtemos

$$\begin{aligned} C &= |\langle 3|3^{flip}\rangle| \leftrightarrow 2 \left\langle \tilde{\psi}_3 E \psi_3^{flip} \right\rangle - \left\langle \tilde{\psi}_3 \psi_3^{flip} J \right\rangle I\sigma^3 = \\ &\left\langle \tilde{\psi}_3 \psi_3^{flip} \right\rangle = \frac{2a}{1+a^2} = \text{sen}(\theta), \end{aligned} \quad (5.39)$$

como já obtido anteriormente. Na próxima seção faremos a ligação entre este ângulo e o ângulo de emaranhamento ζ , definido a partir da decomposição de Schmidt.

5.3.4 Decomposição de Schmidt e ângulo de emaranhamento

Um estado geral $|\psi\rangle$ de um sistema de dois qubits pode ser expresso, no formalismo canônico, por

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle. \quad (5.40)$$

A decomposição de Schmidt afirma que é possível construir uma base $\{|i'\rangle\}$ na qual este estado toma a forma

$$|\psi\rangle = \sum_i \beta_i |i'\rangle \otimes |i'\rangle. \quad (5.41)$$

Uma decomposição possível é expressa através da utilização do ângulo de emaranhamento ζ da seguinte forma [27]:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \rho^{1/2} e^{i\chi} & \left[\cos(\zeta/2) e^{i\tau/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1/2) e^{-i\phi_1/2} \\ \sin(\theta_1/2) e^{+i\phi_1/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\theta_2/2) e^{-i\phi_2/2} \\ \sin(\theta_2/2) e^{+i\phi_2/2} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. \sin(\zeta/2) e^{-i\tau/2} \begin{pmatrix} \sin(\theta_1/2) e^{-i\phi_1/2} \\ -\cos(\theta_1/2) e^{+i\phi_1/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin(\theta_2/2) e^{-i\phi_2/2} \\ -\cos(\theta_2/2) e^{+i\phi_2/2} \end{pmatrix} \right]. \quad (5.42) \end{aligned}$$

Percebemos que o ângulo ζ está ligado à quantificação do emaranhamento, uma vez que $\zeta = 0$ implica que o estado pode ser escrito na forma de um produto direto entre estados de cada subespaço, o que implica que o sistema está não emaranhado.

Um dos resultados alcançados nesta tese foi uma interpretação para este ângulo de emaranhamento ζ . Primeiramente vamos apresentar este resultado no formalismo canônico, onde este ângulo está diretamente ligado à concorrência do sistema. Na próxima seção apresentaremos a interpretação alcançada dentro do contexto da álgebra geométrica, onde este ângulo representará uma rotação na AGSM.

Utilizando a expressão (4.54), vamos calcular a concorrência do estado $|\psi\rangle$ expresso na forma da decomposição de Schmidt na eq. (5.42). Primeiramente vamos representar o estado $|\psi^{flip}\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi^{flip}\rangle = \sigma^y |\psi^*\rangle = -\rho^{1/2} e^{i\chi} & \left[\cos(\zeta/2) e^{-i\tau/2} \begin{pmatrix} \sin(\theta_1/2) e^{-i\phi_1/2} \\ -\cos(\theta_1/2) e^{+i\phi_1/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin(\theta_2/2) e^{-i\phi_2/2} \\ -\cos(\theta_2/2) e^{+i\phi_2/2} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. \sin(\zeta/2) e^{+i\tau/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1/2) e^{-i\phi_1/2} \\ \sin(\theta_1/2) e^{+i\phi_1/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\theta_2/2) e^{-i\phi_2/2} \\ \sin(\theta_2/2) e^{+i\phi_2/2} \end{pmatrix} \right], \quad (5.43) \end{aligned}$$

onde $|\psi^*\rangle$ indica a conjugação complexa de $|\psi\rangle$. A concorrência do sistema se torna

$$C = |\langle \psi | \psi^{flip} \rangle| = |-\rho e^{-2i\chi} \sin(\zeta)| = \sin(\zeta), \quad (5.44)$$

onde utilizamos o fato de que, para sistemas puros, $\rho = 1$. Comparando com os resultados já obtidos anteriormente nas eq. (4.55) e (5.39) percebemos que o ângulo de emaranhamento ζ é o próprio ângulo θ definido anteriormente.

5.3.5 Emaranhamento como rotação

O estado de um único qubit pode ser representado pelo rotor $R_{\phi, \theta}$ apresentado na eq. (5.24). Para o estado de dois qubits, a representação da eq. (5.42) pode ser escrita na linguagem da álgebra geométrica através da expressão

$$\psi = \rho^{1/2} \left(\cos(\zeta/2) R_1 R_2 e^{J\tau/2} + R_1 R_2 \sin(\zeta/2) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2 e^{-J\tau/2} \right) e^{J\chi} E, \quad (5.45)$$

retirada de [27], onde R_i indica o rotor correspondente ao subespaço da i -ésima partícula, i.e. $R_i = e^{-\frac{\phi_i}{2} I\sigma_i^3} e^{-\frac{\theta_i}{2} I\sigma_i^2}$. Esta expressão pode ainda ser simplificada para

$$\psi = \rho^{1/2} R'_1 R'_2 (\cos(\zeta/2) + \sin(\zeta/2) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2) e^{J\chi} E, \quad (5.46)$$

onde $R'_i \equiv R_i e^{I\sigma_i^3 \tau/4}$.

Vamos agora fazer uma análise dos termos presentes na eq. (5.46). O termo ρ é igual a 1 para o caso puro, como dito anteriormente. Os termos R'_i são rotações nos subespaços de cada partícula, podendo ser interpretados como operações locais realizadas em cada qubit. Na parte final da expressão, temos o termo $e^{J\chi}$ correspondente a uma fase global do estado e o projetor E . Uma contribuição desta tese está na interpretação do termo central $\Gamma_\zeta \equiv \cos(\zeta/2) + \sin(\zeta/2) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2$.

Para construir esta interpretação, primeiramente notemos que a expressão para Γ_ζ pode ser simplificada com a utilização do correlator C definido na eq. (5.29).

$$I_1 \sigma_1^2 I_2 \sigma_2^2 C = -\sigma_1^2 \sigma_2^2 C = \frac{1}{2} (I_1 \sigma_1^2 I_2 \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2) \Rightarrow \Gamma_\zeta = \cos(\zeta/2) - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sin(\zeta/2). \quad (5.47)$$

comparando este resultado com a expressão (C.17) podemos pensar no elemento Γ_ζ como um rotor. Ele giraria o estado pelo ângulo de emaranhamento ζ no plano pertencente às duas partículas gerado pelo bivector $\sigma_1^2 \sigma_2^2$, caracterizando uma operação não-local geradora do emaranhamento.

Propomos então a seguinte representação para o estado de um sistema de dois qubits:

$$\psi = \rho^{1/2} R'_1 R'_2 \Gamma_\zeta e^{J\chi} E, \quad (5.48)$$

caracterizado por duas operações (rotações) locais R'_1 e R'_2 e uma operação não local de rotação Γ_ζ num plano pertencente ao subespaços de ambas as partículas. Contudo, é importante percebermos que o *rotor de emaranhamento* Γ_ζ não pode ser representado na forma $e^{-\sigma_1^2 \sigma_2^2 \frac{\zeta}{2}}$, como sugere a eq. (C.18). Temos, através da expansão em série de Taylor

$$\Gamma'_\zeta \equiv e^{-\sigma_1^2 \sigma_2^2 \frac{\zeta}{2}} = \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right). \quad (5.49)$$

O aparecimento das funções trigonométricas hiperbólicas se deve ao fato de que os vetores σ_1^2 e σ_2^2 comutam, mantendo os termos da expansão em Taylor com o mesmo sinal. O “rotor” Γ'_ζ indicaria uma rotação no espaço hiperbólico. Tendo concluído a interpretação geométrica completa do estado de dois qubits, passemos a sua descrição através do operador densidade.

5.3.6 Operador densidade de um sistema de N qubits

A generalização da eq. (5.21) que descreve em álgebra geométrica o operador densidade de um sistema de N qubits é [40]:

$$\rho = 2^N \sum_{j=1}^N p_j \psi_j E_+ \tilde{\psi}_j C, \quad (5.50)$$

onde C é o correlator definido na eq. (5.29), o termo 2^N garante a normalização desejada enquanto que E_+ é o operador idempotente definido por:

$$E_+ \equiv E_+^1 \cdots E_+^N, \quad E_\pm^i \equiv \frac{1}{2}(1 + \sigma_i^3). \quad (5.51)$$

A utilidade desta definição se tornará clara na próxima seção.

5.4 Traço parcial

Uma das principais vantagens técnicas da álgebra geométrica no estudo da computação quântica ocorre na operação de traço parcial, definida no formalismo canônico na eq. (2.23). Fisicamente esta operação representa a limitação do experimentador quanto ao tamanho do subsistema estudado, i.e. enquanto um sistema *bipartite* pode ter uma parte localizada em A e

outra em B , sendo descrito pelo operador densidade ρ_{AB} , um laboratório em A não terá acesso a toda a informação contida em ρ_{AB} , mas somente à presente em $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$, onde Tr_B indica esta exclusão do subsistema B , o traço parcial.

No estudo do emaranhamento, a operação de traço parcial aparece nos requisitos fundamentais. Isto pode ser encontrado na expressão (2.22), onde o emaranhamento de um estado puro é definido em termos do traço parcial. Uma outra grande aplicação do traço parcial é no formalismo das *operações quânticas*⁷, que descreveremos sucintamente abaixo.

Um sistema quântico isolado descrito pelo operador densidade ρ evoluirá sempre unitariamente, i.e. dado um operador unitário U , temos $\rho' = U\rho U^\dagger$, onde ρ' indica a evolução temporal de ρ . Ocorre que os sistemas físicos reais em geral não estão isolados, mas interagem com o ambiente. Esta interação pode ser modelada através da evolução unitária do sistema composto, tomando como estado inicial o produto tensorial entre o estado do sistema estudado ρ_{AB} e o estado do ambiente ρ_{amb} . Temos portanto

$$\rho' = U(\rho_{AB} \otimes \rho_{amb})U^\dagger \quad (5.52)$$

A evolução não unitária do sistema ρ_{AB} pode então ser descrita tomando-se o traço parcial da equação (5.52) sobre o ambiente, i.e.

$$\rho'_{AB} = \text{Tr}_{amb} \left[U(\rho_{AB} \otimes \rho_{amb})U^\dagger \right]. \quad (5.53)$$

Esta construção é de grande utilidade na descrição da dinâmica de sistemas quânticos dissipativos.

Tendo visto a enorme importância da operação de traço parcial, seria de grande utilidade a sua formulação de uma forma mais apropriada do que a apresentada na eq. (2.23). Esta definição apresenta dois problemas: o primeiro de caráter computacional e o segundo de caráter interpretativo. O custo computacional para se efetuar a operação de traço parcial no formalismo canônico cresce exponencialmente com o número de qubits do sistema, e a sua formulação matemática não é tão intuitiva quanto o seu efeito sugere. A álgebra geométrica resolve estes dois problemas, como discutiremos agora.

De posse do operador densidade do sistema, apresentado na eq. (5.50), o seu traço parcial se torna [89]:

$$\text{Tr}_i(\rho) = E_+^i \rho E_+^i + E_-^i \rho E_-^i + \sigma_i^1 (E_+^i \rho E_+^i + E_-^i \rho E_-^i) \sigma_i^1, \quad (5.54)$$

⁷Uma boa introdução a este assunto pode ser encontrada na seção 8.2 de [80].

onde E_{\pm}^i está definido na eq. (5.51). Isto corresponde simplesmente a eliminar todos os termos da expressão de ρ que contenham elementos no subespaço i , como a intuição da operação de traço parcial sugere. Na próxima seção vamos ilustrar a operação de traço parcial no problema de dois qubits estudado no capítulo 4.

5.4.1 Aplicação do traço parcial

O sistema de dois qubits estudado está apresentado na eq. (5.37). Temos então

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a + I\sigma_1^2 I\sigma_2^2) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2 = \tilde{\psi}_3. \quad (5.55)$$

O operador densidade se torna (ver eq. (5.50)):

$$\begin{aligned} \rho &= 4(\psi E_+ \psi)C \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2 \right] (1 + \sigma_1^3) (1 + \sigma_2^3) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I\sigma_1^2 I\sigma_2^2 \right] (1 - I_1 I_2). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para o cálculo do traço parcial $\text{Tr}_B(\rho)$, só precisamos dos termos que não contém nenhum elemento do subespaço dois. Rearrmando a expressão (5.56) temos:

$$\rho = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)\sigma_1^3] + O_2, \quad (5.57)$$

onde O_2 indica todos os demais termos que contém elementos do subespaço dois. O traço parcial se torna, portanto:

$$\text{Tr}_2(\rho) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)\sigma_1^3]. \quad (5.58)$$

Podemos ver a equivalência existente entre o resultado da eq. (5.58) e o previamente obtido no eq. (4.48) passando o primeiro para o formalismo matricial.

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)\sigma_1^z] \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 + \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde na última igualdade utilizamos os resultados da eq. (4.77).

5.5 Conclusões

Neste capítulo (somado ao apêndice C) apresentamos a álgebra geométrica como importante ferramenta matemática para a física. A introdução de conceitos geométricos ao estudo de emaranhamento ajuda a trazer intuição a respeito deste fenômeno, assim como a modelagem através da esfera de Bloch fez no caso de um único qubit. A construção de estados e operadores neste formalismo fica associada a rotações no espaço, aspecto implementado naturalmente na álgebra geométrica.

Pudemos refazer os cálculos de concorrência e do traço parcial neste novo formalismo. Esta última operação ganha uma simplicidade operacional e uma forma bastante intuitiva nesta nova álgebra. Como resultados tivemos a proposta de implementação da operação de spin-flip e uma interpretação do emaranhamento também como uma rotação. Rotação esta realizada de forma não-local, i.e. utilizando um plano pertencente simultaneamente aos subespaços dos dois qubits.

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos o emaranhamento quântico como ferramenta para a computação e informação quântica. Pudemos perceber a necessidade de uma maior compreensão desta característica fundamental da mecânica quântica através de suas inúmeras aplicações. No capítulo 2 apresentamos o emaranhamento tanto no contexto histórico nos princípios da teoria quântica quanto no desenvolvimento formal de seus quantificadores.

O capítulo 3 foi dedicado à apresentação de sistemas físicos onde já foi possível a construção e o controle de qubits. Percebemos que ainda estamos no início do que pode vir a ser uma grande revolução na transmissão e processamento de dados usando princípios da mecânica quântica. A possibilidade de utilizar todos os recursos que a natureza nos dispõe para conseguir uma computação mais eficiente motiva a busca por sistemas com o maior número possível de qubits controláveis.

O hamiltoniano de estudo foi apresentado no capítulo 4, onde nos restringimos ao emaranhamento *bipartite* existente entre dois qubits interagentes. Escolhemos um hamiltoniano realizável experimentalmente e capaz de gerar as portas lógicas da computação quântica [32]. Restringimo-nos ao estudo de dois qubits motivados pelo objetivo central deste trabalho: compreender melhor o que é o emaranhamento, visto que um entendimento de casos simples possibilitam um posterior entendimento das situações mais gerais. Neste capítulo atacamos o problema através dos formalismos canônico (matricial) e o de segunda quantização. Fomos capazes de calcular o emaranhamento de formação do sistema para qualquer temperatura e para todos os valores dos parâmetros descritos pelo hamiltoniano, dando interpretações dos resultados (inclusive geométricas) quando se aplicavam.

No capítulo final, o quinto, apresentamos o formalismo de álgebra geométrica para descrever o emaranhamento. As principais vantagens deste formalismo são a intuição geométrica alcançada e a fácil implementação de importantes operações matemáticas como o traço parcial. Pudemos refazer cálculos feitos no formalismo canônico através desta álgebra bem como dar novas interpretações ao emaranhamento.

Nossos principais resultados consistem na quantificação do emaranhamento de formação

numa temperatura arbitrária para este sistema de dois qubits como forma de gerar emaranhamento sob demanda para utilização em protocolos de computação e informação quântica e na maior compreensão das características fundamentais do emaranhamento, possibilitada pelos diferentes formalismos utilizados, com a introdução do rotor de emaranhamento Γ_ζ .

As perspectivas de ampliação dos nossos resultados são a interpretação geométrica de outros hamiltonianos como o modelo completo de Heisenberg e o cálculo com um número maior de qubits, na esperança de que os elementos geométricos introduzidos nesta tese possam ser generalizados. Outro possível parâmetro que poderia ser introduzido é um estudo da topologia da rede de spins, analisando a influência dela na intensidade do emaranhamento e no tempo de descoerência do sistema quando acoplado a um ambiente externo.

A Esfera de Bloch

A esfera de Bloch é uma representação geométrica do estado de um qubit. No caso deste qubit estar em um estado puro, teremos uma representação como um ponto na superfície da esfera, enquanto que para uma mistura estatística este ponto se aproximará do centro. Uma introdução a este tema (para o caso puro) pode ser encontrada em [38], enquanto que para as misturas estatísticas, o capítulo 2 de [80] e [22] são boas fontes.

Estado puro: Iniciemos a construção geométrica a partir do estado puro geral de um qubit:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde α e β são dois números complexos, indicando a existência de quatro parâmetros para a especificação do qubit. Escrevendo cada um destes coeficientes na forma polar temos:

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |1\rangle, \quad (\text{A.2})$$

com r_α , r_β , ϕ_α e ϕ_β reais.

Vamos agora absorver uma fase global, que não altera nenhum observável físico. Para isto multipliquemos a equação (A.2) pelo fator de fase $e^{-i\phi_\alpha}$, resultando em:

$$|\psi\rangle = r_\alpha |0\rangle + r_\beta e^{i\phi} |1\rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde $\phi \equiv \phi_\beta - \phi_\alpha$. Isto nos deixa com três parâmetros para a especificação do qubit. A próxima restrição vem da normalização $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Adotando $r_\beta e^{i\phi} = x + iy$ e $r_\alpha = z$ esta condição implica que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (\text{A.4})$$

o que corresponde, exatamente, a um ponto na superfície de uma esfera de raio 1. Adotando coordenadas esféricas: $x = \text{sen}(\theta)\cos(\varphi)$, $y = \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi)$ e $z = \cos(\theta)$ podemos escrever:

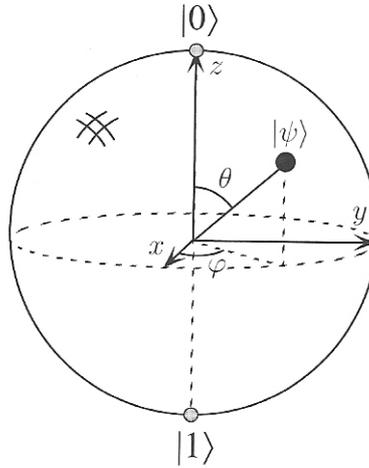


Figura A.1 Ilustração da esfera de Bloch, onde o qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ é representado pelo ponto na superfície da esfera com latitude θ e longitude ϕ , dadas pela transformação $\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$ e $\theta = 2\arccos(|\alpha|)$.

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta)|1\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Como último passo, percebamos que a representação da eq. (A.5) tem uma redundância de dois pontos para o mesmo qubit¹. Como exemplo $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ correspondem ao mesmo $|\psi\rangle = |0\rangle$, a menos de uma fase global que não importa. Para solucionar esta situação fazemos a mudança $\theta \rightarrow \frac{\theta}{2}$, resultando em:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (\text{A.6})$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Este é o resultado final, ilustrado na figura A.1, retirada de [80], em que o qubit é representado por um ponto na esfera de Bloch com latitude θ e longitude ϕ dados, em função dos coeficientes α e β definidos na eq. (A.1) por:

$$\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha) \quad \text{e} \quad \theta = 2\arccos(|\alpha|). \quad (\text{A.7})$$

¹Este fato é uma consequência do isomorfismo de 2 para 1 existente entre a representação de SU(2) e a de SO(3).

Misturas estatísticas: Vamos agora ampliar a nossa representação na esfera de Bloch para o caso do qubit estar numa mistura estatística de estados puros. Já vimos que nesta situação o estado fica melhor representado pelo operador densidade definido na eq. (2.15).

Para o caso de um único qubit, o operador densidade pode ser representado por uma matriz bidimensional. Tomemos como base do espaço das matrizes bidimensionais as três matrizes de Pauli, definidas na eq. (4.3), juntamente com a matriz identidade, que escreveremos aqui por completeza.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Podemos então escrever:

$$\rho = \frac{1}{2} (r_0 I + r_x \sigma^x + r_y \sigma^y + r_z \sigma^z) \equiv \frac{r_0 I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}. \quad (\text{A.9})$$

O coeficiente r_0 pode ser determinado usando-se o fato de que a matriz densidade deve ter traço igual a um², enquanto que os outros três coeficientes correspondem aos valores esperados dos operadores σ^i : $r_i = \langle \sigma^i \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma^i)$. Como as matrizes de Pauli possuem traço nulo, o coeficiente r_0 deve ser igual a 1. Temos, portanto:

$$\rho = \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}. \quad (\text{A.10})$$

O determinante de ρ fica imediatamente dado por [22]:

$$\det(\rho) = \frac{1}{4} (1 - |r|^2), \quad (\text{A.11})$$

que deve ser não-negativo³. Isto implica que $|r| \leq 1$.

Chegamos, portanto, numa representação geométrica para o estado de um qubit. Esta representação, de acordo com a equação (A.10) corresponde a um ponto com coordenadas r_x , r_y e r_z contido no interior da esfera de Bloch de raio 1.

Equivalência: Vamos agora mostrar a equivalência da representação da eq. (A.10) no caso de estados puros, com a representação previamente obtida na eq. (A.6). Da eq. (A.6) temos:

² $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1$.

³O operador densidade ρ é um operador positivo: $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \Rightarrow \rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi| \\
 &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle\langle 0| + \frac{e^{-i\phi}}{2}\sin(\theta)|0\rangle\langle 1| + \frac{e^{i\phi}}{2}\sin(\theta)|1\rangle\langle 0| + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\langle 1|. \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

Na formulação matricial, em que $|0\rangle = (1, 0)^\dagger$ e $|1\rangle = (0, 1)^\dagger$, temos:

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{e^{-i\phi}}{2}\sin(\theta) \\ \frac{e^{i\phi}}{2}\sin(\theta) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Podemos, agora, usar o fato de que $r_i = \text{Tr}(\rho\sigma^i)$ e calcular cada uma de suas componentes. Como resultado temos:

$$\langle\sigma^x\rangle = \sin(\theta)\cos(\phi), \quad \langle\sigma^y\rangle = \sin(\theta)\sin(\phi) \quad \text{e} \quad \langle\sigma^z\rangle = \cos(\theta), \quad (\text{A.14})$$

que são as coordenadas esféricas de um ponto arbitrário na superfície da esfera de Bloch. Isto completa a nossa prova da equivalência das duas representações no caso de um qubit no estado puro.

Decomposições distintas: Diante do resultado anterior, observemos que uma mistura estatística representada por um ponto no interior da esfera de Bloch pode ser obtido como soma de estados puros (vetores na superfície da esfera) de infinitas maneiras distintas.

Em particular, qualquer corda da esfera que passe pelo ponto definido por ρ toca a superfície da esfera em dois estados puros que podem ser usados para decompô-lo, como ilustra a figura A.2, onde vemos ilustradas duas decomposições distintas do operador densidade ρ : $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 = \alpha_3\rho_3 + \alpha_4\rho_4$. Esta ambiguidade na decomposição de ρ em estados puros tem conseqüências importantes na teoria quântica da informação, em particular os algoritmos de criptografia quântica dependem, diretamente, deste fato [7]. No cálculo do emaranhamento de formação, este fato justifica a operação de ínfimo presente na eq. (2.28).

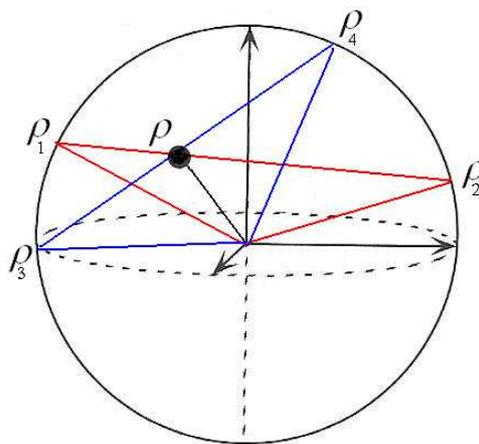


Figura A.2 Representação na esfera de Bloch de um estado misto ρ ilustrando duas de suas infinitas possíveis decomposições em estados puros. Cada corda da esfera que passa por ρ toca a sua superfície em dois estados puros que podem ser usados para decompô-lo.

Interpretação e medição experimental da concorrência

Neste apêndice iremos abordar uma maneira alternativa de se definir a concorrência C , apresentada na eq. (4.54). Esta formulação é baseada nos trabalhos de Mintert, Kus e Buchleitner (MKB) [74] e Horodecki [52]. A motivação se deve à recente realização experimental desta medida por Walborn et al. [107]. O grande avanço alcançado, como o título do trabalho de Walborn et al. sugere, é a capacidade de se obter uma única medida que leve diretamente ao cálculo da concorrência, sem a necessidade de se reconstruir completamente o estado a partir de processos de tomografia quântica.

O problema da quantificação do emaranhamento bipartite existente num sistema puro estaria completamente resolvido caso existisse algum operador linear hermitiano cujos valores esperados fossem positivos num estado emaranhado e nulo caso contrário. Devido à não unitariedade de operações como o spin-flip, utilizadas na definição da concorrência, tal objetivo não é possível. A solução apresentada por MKB consiste na utilização de duas cópias do estado $|\psi\rangle$ e o cálculo do valor esperado de um operador M específico. A fórmula proposta para o cálculo da concorrência é:

$$C = 2\sqrt{\langle\psi|\otimes\langle\psi|M|\psi\rangle\otimes|\psi\rangle}. \quad (\text{B.1})$$

O operador M utilizado para a medição da concorrência deve possuir a mesma propriedade de invariância sobre operações locais da medida da concorrência C . Uma solução é a utilização de projetores P_i^+ e P_i^- respectivamente nos subespaços simétricos e antisimétricos do espaço de Hilbert $H^i \otimes H^i$ da cópia do i -ésimo subsistema. Temos portanto:

$$M = \otimes_{j=1}^N P_j^{s_j}, \quad s_j = \pm, \quad (\text{B.2})$$

onde N indica o número de subsistemas¹.

¹No nosso caso $N = 2$.

No experimento realizado por Walborn et al. o operador de medição M foi escolhido como um projetor no subespaço antissimétrico, desta forma $\langle \psi | \otimes \langle \psi | M | \psi \rangle \otimes | \psi \rangle \equiv P_M$ indica a probabilidade de se observar as duas cópias do primeiro subsistema num estado antissimétrico. Foi construído um aparato experimental onde os graus de liberdade da polarização e do momento de um sistema de dois fótons foram utilizados para acomodar as duas cópias do estado do sistema e assim medir a sua concorrência. Utilizando a mesma notação do trabalho original [107], a base para os estados de polarização é dada pelos vetores $|H\rangle$ e $|V\rangle$ e a dos estados de momento por $|a\rangle$ e $|b\rangle$. Podemos formar os quatro estados de Bell nesta base da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|b\rangle - |V\rangle|a\rangle), \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|b\rangle + |V\rangle|a\rangle), \\ |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|a\rangle - |V\rangle|b\rangle) \quad \text{e} \\ |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|a\rangle + |V\rangle|b\rangle). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O próximo passo consiste do cálculo da probabilidade de se obter o primeiro fóton no estado antissimétrico $|\psi^-\rangle$. A solução apresentada por Walborn et al. foi a utilização de uma porta lógica CNOT, implementada experimentalmente com um interferômetro que efetua uma rotação no estado de polarização dependendo do estado de momento do fóton. Definindo estas novas direções de polarização como $|+\rangle$ e $|-\rangle$, a atuação da porta CNOT resulta em

$$\begin{aligned} \text{CNOT}(|V\rangle|a\rangle) &= |V\rangle|b\rangle ; \quad \text{CNOT}(|H\rangle|a\rangle) = |H\rangle|a\rangle ; \\ \text{CNOT}(|V\rangle|b\rangle) &= |V\rangle|a\rangle ; \quad \text{CNOT}(|H\rangle|b\rangle) = |H\rangle|b\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e portanto

$$\text{CNOT}|\psi^\pm\rangle = |\pm\rangle|b\rangle, \quad \text{e} \quad \text{CNOT}|\phi^\pm\rangle = |\pm\rangle|a\rangle. \quad (\text{B.5})$$

O detector utilizado no experimento era capaz de medir simultaneamente o estado de polarização e de momento do primeiro fóton, podendo assim calcular a frequência de ocorrência do estado $|\psi^-\rangle$ e desta forma obter P_M e a concorrência $C = 2\sqrt{P_M}$. A concordância entre o experimento e a teoria é excelente, como pode ser visto na figura B.1 retirada de [107]. Para uma revisão de como implementar as portas lógicas da computação quântica a partir de dispositivos ópticos, uma boa referência é [37].

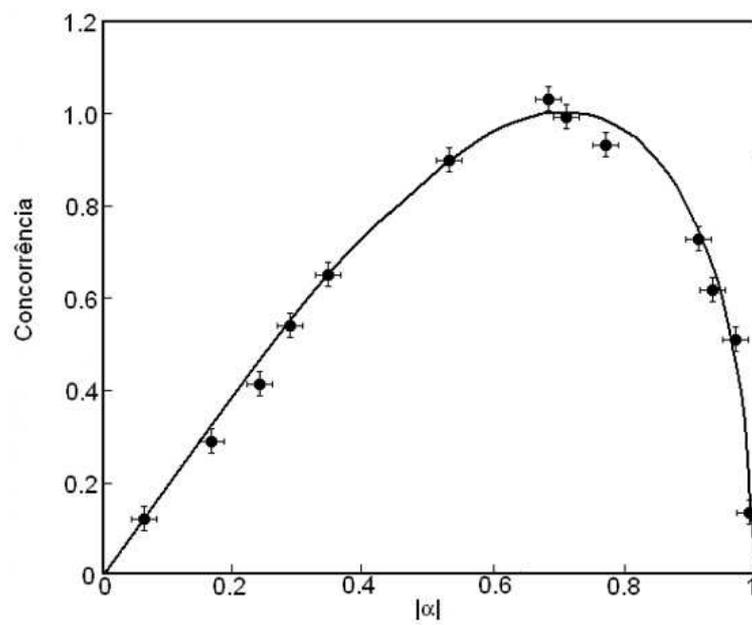


Figura B.1 Medição experimental da concorrência de estados do tipo $\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$ como função de $|\alpha|$. A linha mostra o valor teórico $C = 2|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}$, de onde podemos perceber a confirmação experimental.

Introdução à Álgebra Geométrica

Uma ferramenta matemática de grande importância para a física é a álgebra geométrica. Ela trás novos elementos à geometria como bivectores, trivetores, etc. além de caminhos para operar com elementos de diferentes tipos (ou ranks). Neste apêndice faremos uma introdução matemática ao assunto, enquanto que no capítulo 5 faremos a sua ligação com computação e informação quântica. Estaremos tratando neste apêndice apenas dos aspectos mais elementares desta teoria. Faremos isto com o intuito de ilustrar a sua grande importância conceitual, uma vez que muitos físicos ainda a desconhecem.

Textos introdutórios ao assunto podem ser encontrados nos trabalhos de Hestenes [47] e Suter [90], bem como nos livros de Lounesto [70] e Doran [27]. Hestenes e Doran fazem uma abordagem mais voltada para a física, enquanto que Suter e Lounesto mais para a matemática. Este capítulo é, em grande parte, baseado nestes materiais. Na seção C.1 faremos uma introdução histórica à álgebra geométrica, desde os seus primórdios até a sua grande revolução, iniciada por Hestenes [43, 46]. Continuaremos na seção C.2, onde introduziremos as idéias matemáticas fundamentais do assunto, fazendo algumas aplicações na seção C.3.

C.1 Introdução histórica

A álgebra geométrica surgiu no século XIX, com os trabalhos de William Clifford¹ e Hermann Grassman, como uma nova descrição geométrica de elementos como vetores, planos e outros objetos de dimensões (rank) ainda maiores. Após este início, a álgebra geométrica passou por um período de estagnação, com poucos trabalhos publicados a seu respeito e muitas vezes com uma visão distinta daquela inicialmente proposta por Clifford. Uma volta às idéias revolucionárias de Clifford, com sua visão inovadora dos diversos elementos geométricos apareceu em 1966, com Hestenes [43]. Este trabalho suscitou o interesse de vários outros físicos e matemáticos a explorar este campo.

¹Motivo pelo qual este tópico é tratado como *álgebra de Clifford* em muitos textos matemáticos.

A álgebra geométrica contém a álgebra dos números complexos, os quatérnions de Hamilton, as variáveis de Grassman e diversos outros elementos da geometria convencional. Tudo isto aliado à introdução de um novo produto associativo: o *produto geométrico*, consolida-a como uma importante ferramenta para o estudo da geometria. Na física, as idéias introduzidas por Hestenes e ampliadas por Doran [27] e outros, tornaram possível reescrever os mais diversos campos de estudos na linguagem da álgebra geométrica. Como pilar para esta nova construção da física temos o livro sobre mecânica clássica de Hestenes [46].

C.2 Conceitos fundamentais

Nesta seção vamos introduzir os conceitos fundamentais da álgebra geométrica, os quais serão a base para o capítulo 5. O elemento chave da álgebra é o multivetor. Ele consiste da soma de parcelas de naturezas distintas, começando por um termo escalar (rank-0), passando pelos vetores (rank-1) e assim sucessivamente até um rank arbitrário. O ponto fundamental é a nova operação existente entre esses elementos: o produto geométrico. Como caso mais, simples, e que serve para formalizar a álgebra, temos o produto geométrico entre um vetor e ele mesmo, resultando num escalar correspondente ao quadrado do seu módulo.

Definição: A álgebra geométrica de \mathfrak{R}_n é a álgebra associativa gerada por \mathfrak{R}_n sobre \mathfrak{R} tal que $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{R}_n$ [40].

Vamos agora estudar o produto geométrico entre vetores distintos. Para isso calculemos o quadrado da soma de dois vetores distintos \mathbf{u} e \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 &= \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} \equiv |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \\ \Rightarrow \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} &= |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Isto nos motiva a definir o número escalar resultante da parte simétrica do produto geométrico de dois vetores como o produto interno² entre eles, i.e.:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}) \equiv |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta), \quad (\text{C.2})$$

onde a última definição está ligada a noção geométrica do ângulo θ existente entre esses dois vetores e corresponde ao formalismo padrão de geometria analítica. Um elemento novo surge

²Também chamado de produto escalar.

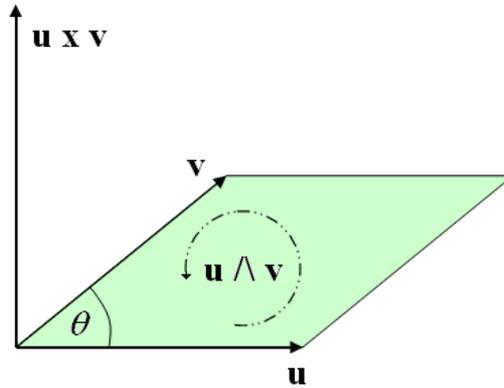


Figura C.1 Esquema do produto exterior $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e do produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} .

ao calcularmos a parte anti-simétrica do produto geométrico entre dois vetores. Para mostrar isto calculemos o seu quadrado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) \right)^2 &= \frac{1}{4} \left((\mathbf{u}\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}\mathbf{u})^2 - 2|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \right) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 = -|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \sin^2(\theta) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Isto mostra que a parte antissimétrica do produto geométrico não pode, em geral, ser um vetor. Definimos, então o *produto externo* entre \mathbf{u} e \mathbf{v} por:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}), \quad (\text{C.4})$$

resultando num elemento de rank 2 chamado *bivetor*. É importante não confundirmos o produto vetorial usual com o produto externo. O primeiro está associado a um vetor perpendicular aos dois vetores multiplicados, enquanto que o segundo representa uma área orientada, uma generalização de direção orientada no caso unidimensional. Para ilustrar este fato vemos na figura C.1 todos estes elementos.

Juntando-se as equações (C.2) e (C.4) podemos escrever o produto geométrico entre dois vetores como

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad (\text{C.5})$$

a qual constitui a equação chave da álgebra geométrica. Podemos ver nela características típicas desta nova álgebra, com a multiplicação entre dois vetores resultando numa parte escalar e em

um bivector. Para trabalhar com os subespaços da álgebra, denotemos por $\langle M \rangle_r$ a parcela do multivetor M com rank r , i.e.:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{uv} \rangle_0 &\equiv \langle \mathbf{uv} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \\ \langle \mathbf{uv} \rangle_1 &= 0 \quad \text{e} \\ \langle \mathbf{uv} \rangle_2 &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{C.6}$$

Para finalizar esta primeira parte, vamos definir o reverso de um multivetor M , denotado por \tilde{M} como o multivetor obtido ao invertermos a ordem de todos os produtos contidos em M . Vejamos um exemplo com $M = \mathbf{uv}$:

$$M = \mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \Rightarrow \tilde{M} = \mathbf{vu} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.\tag{C.7}$$

Tendo visto as suas características básicas, vamos desenvolver explicitamente os elementos da álgebra geométrica de três dimensões.

C.2.1 Aplicação em 3 dimensões

A álgebra geométrica em três dimensões, denotada por G^3 , é formada por elementos de 4 ranks distintos: os escalares, os vetores, os bivectores e um novo grupo de elementos: os trivetores. Este último consiste numa generalização da noção de vetor para o caso tridimensional, i.e. um volume orientado. Para construir uma base para multivetores nesta álgebra, precisamos de elementos específicos para cada subespaço correspondente aos elementos de cada rank. Temos inicialmente uma parcela escalar, com base 1, em seguida três vetores ortonormais³ que tomaremos como base de $\mathfrak{R}^3 = \langle G^3 \rangle_1$: \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , além dos bivectores e dos trivetores, que discutiremos agora.

Como base para a subespaço dos bivectores de G^3 , denotado por $\langle G^3 \rangle_2$, podemos construir os produtos geométricos entre os vetores \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \equiv \mathbf{e}_{ij},\tag{C.8}$$

onde $\{i < j\} \in \{1, 2, 3\}$. Qualquer bivector em G^3 pode ser escrito, portanto, como uma combinação linear entre \mathbf{e}_{12} , \mathbf{e}_{13} e \mathbf{e}_{23} . Como base para $\langle G^3 \rangle_3$ temos um único trivector, dado pelo produto dos três vetores \mathbf{e}_i :

³ $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$.

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_{123}. \quad (\text{C.9})$$

O subespaço de maior rank numa álgebra G^n possui sempre dimensão 1, como no caso de \mathbf{e}_{123} formando a base para $\langle G^3 \rangle_3$. Isto motiva a nomenclatura deste elemento da base como *pseudo-escalar* e é usualmente definido como I .

Tendo construído a base para cada subespaço, concluímos que G^3 possui dimensão 8, sendo uma dimensão escalar, três com rank 1, três com rank 2 e uma com rank 3. Um multivetor geral é expresso por⁴:

$$M = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_{12} + a_5\mathbf{e}_{13} + a_6\mathbf{e}_{23} + a_7I. \quad (\text{C.10})$$

Elementos expressos pela soma de parcelas tão distintas são comuns não apenas em álgebra geométrica, os números complexos e os quatérnions gozam desta mesma característica.

Para encerrar os estudos em G^3 , percebamos que podemos construir uma sub-álgebra, formada pelos elementos de rank par 0 e 2, e por isso chamada de sub-álgebra par, denotada por G_+^3 . Mostremos agora que este subespaço realmente forma uma álgebra fechada na multiplicação. Sejam os multivetores A e B dados por:

$$A = a_0 + a_4\mathbf{e}_{12} + a_5\mathbf{e}_{13} + a_6\mathbf{e}_{23} \quad \text{e} \quad B = b_0 + b_4\mathbf{e}_{12} + b_5\mathbf{e}_{13} + b_6\mathbf{e}_{23}. \quad (\text{C.11})$$

O produto (geométrico) entre eles se torna:

$$\begin{aligned} AB &= (a_0 + a_4\mathbf{e}_{12} + a_5\mathbf{e}_{13} + a_6\mathbf{e}_{23})(b_0 + b_4\mathbf{e}_{12} + b_5\mathbf{e}_{13} + b_6\mathbf{e}_{23}) \\ &= a_0b_0 + a_4b_4\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12} + a_5b_5\mathbf{e}_{13}\mathbf{e}_{13} + a_6b_6\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_{23} + \\ &\quad (a_0b_4 + a_4b_0)\mathbf{e}_{12} + (a_0b_5 + a_5b_0)\mathbf{e}_{13} + (a_0b_6 + a_6b_0)\mathbf{e}_{23} + \\ &\quad a_4b_5\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{13} + a_5b_4\mathbf{e}_{13}\mathbf{e}_{12} + a_4b_6\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{23} + a_6b_4\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_{12} + a_5b_6\mathbf{e}_{13}\mathbf{e}_{23} + a_6b_5\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_{13} \\ &= (a_0b_0 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6) + (a_0b_4 + a_4b_0 + a_6b_5 - a_5b_6)\mathbf{e}_{12} + \\ &\quad (a_0b_5 + a_5b_0 + a_4b_6 - a_6b_4)\mathbf{e}_{13} + (a_0b_6 + a_6b_0 + a_5b_4 - a_4b_5)\mathbf{e}_{23} \equiv \\ &\quad c_0 + c_4\mathbf{e}_{12} + c_5\mathbf{e}_{13} + c_6\mathbf{e}_{23} \in G_+^3, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

o que mostra o fechamento da sub-álgebra.

⁴É fácil perceber que G^n possui dimensão 2^n .

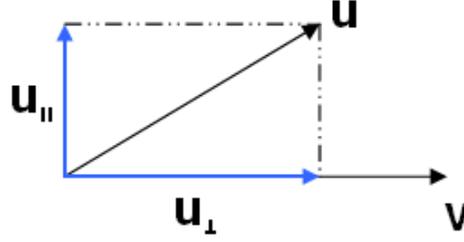


Figura C.2 Ilustração do vetor \mathbf{u} e suas componentes paralela \mathbf{u}_{\parallel} e perpendicular \mathbf{u}_{\perp} à direção de \mathbf{v} .

C.2.2 Rotações

Vamos ver agora como rotações são imediatamente implementadas no formalismo da álgebra geométrica. Primeiramente, notemos que o inverso de um vetor \mathbf{v} é expresso por: $\mathbf{v}^{-1} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$, visto que

$$\mathbf{v}\mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = 1. \quad (\text{C.13})$$

Como próximo passo para implementar a rotação, vejamos o que acontece ao conjugarmos um vetor \mathbf{u} com um vetor \mathbf{v} . O vetor \mathbf{u} será inicialmente decomposto em uma componente paralela \mathbf{u}_{\parallel} e uma componente perpendicular \mathbf{u}_{\perp} à direção de \mathbf{v} , como ilustra a figura C.2.

Vamos à definição de conjugação:

$$\mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp})\mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}\mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{v}\mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{\perp}, \quad (\text{C.14})$$

visto que vetores paralelos comutam e vetores ortogonais anticomutam.

A conjugação faz uma reflexão de \mathbf{u} em torno do plano perpendicular a \mathbf{v} . Lembremos da geometria elementar, na qual uma rotação pode ser obtida através de duas reflexões. Mais precisamente, dados dois vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 que formam entre si um ângulo $\theta/2$, duas reflexões sucessivas do vetor \mathbf{u} em relação ao plano perpendicular a cada um dos vetores \mathbf{v}_i resulta numa rotação do mesmo no plano $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ por um ângulo θ , como ilustra a figura C.3.

Considere a conjugação

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{v}_1\mathbf{u}'\mathbf{v}_1^{-1} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{u}\mathbf{v}_2^{-1}\mathbf{v}_1^{-1} = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\mathbf{u}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^{-1}, \quad (\text{C.15})$$

então

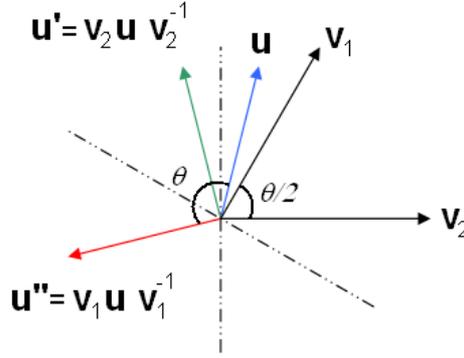


Figura C.3 Rotação do vetor \mathbf{u} por um ângulo θ feita através de duas reflexões, uma em cada um dos vetores \mathbf{v}_i .

$$\mathbf{u}'' = \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{u} (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{v}_1|^2 |\mathbf{v}_2|^2} \equiv (\check{\mathbf{v}}_1 \check{\mathbf{v}}_2) \mathbf{u} (\check{\mathbf{v}}_2 \check{\mathbf{v}}_1) \equiv R \mathbf{u} \tilde{R}, \quad (\text{C.16})$$

onde $\check{\mathbf{v}}_i$ é o vetor unitário $\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|$ e $R \equiv \check{\mathbf{v}}_1 \check{\mathbf{v}}_2 = \check{\mathbf{v}}_1 \cdot \check{\mathbf{v}}_2 + \check{\mathbf{v}}_1 \wedge \check{\mathbf{v}}_2$ é o gerador da rotação, o *rotor*.

Uma grande diferença da formulação de rotação em álgebra geométrica para as formulações usuais é que elas não mais são descritas através de um eixo de rotação, mas sim através de um plano de rotação. No caso do espaço cartesiano tridimensional R^3 isto não faz a menor diferença, uma vez que girar em torno do eixo \hat{Z} , por exemplo, é o mesmo que girar no plano $X \circ Y$. Para espaços com mais dimensões isto não é mais verdade. Como exemplo, num espaço quadridimensional gerado pelos vetores ortonormais $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ e \mathbf{x}^4 , a especificação de um eixo, como por exemplo \mathbf{x}^1 , não especifica em que plano, dentre os vários possíveis perpendiculares a este eixo, a rotação será realizada. A álgebra geométrica fornece, portanto, uma formulação simples para rotações em espaços de qualquer dimensão.

Vamos agora reescrever a expressão para o rotor R de uma forma ainda mais simples. Temos

$$R = \check{\mathbf{v}}_1 \check{\mathbf{v}}_2 = \check{\mathbf{v}}_1 \cdot \check{\mathbf{v}}_2 + \check{\mathbf{v}}_1 \wedge \check{\mathbf{v}}_2 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) B, \quad (\text{C.17})$$

onde $B \equiv (\check{\mathbf{v}}_2 \wedge \check{\mathbf{v}}_1)/(\text{sen}(\theta/2))$ é o bivector (unitário) gerador da rotação, definindo o plano onde ela é realizada. Esta expressão pode ser reduzida para

$$R = e^{-B \frac{\theta}{2}}, \quad (\text{C.18})$$

que pode ser imediatamente verificada através de uma expansão em série de Taylor. Esta última expressão tem a interpretação simples de que o vetor $R \mathbf{a} \tilde{R}$ corresponde à rotação de \mathbf{a} por um

ângulo θ no plano definido pelo bivector unitário B . Com isso concluímos a apresentação da operação de rotação em álgebra geométrica.

C.3 Aplicações

Faremos, agora, algumas aplicações tanto matemáticas quanto físicas do formalismo construído na seção anterior. Esta seção servirá como amostra do que faremos no capítulo 5, onde aplicaremos a álgebra geométrica no problema do emaranhamento quântico.

C.3.1 Quatérnions

Como primeira aplicação da álgebra geométrica, vamos mostrar como ela contém toda a álgebra dos quatérnions, descoberta por Hamilton em 1843. Para isto seguiremos de perto as seções 1.4 e 2.4.2 da ref. [27]. Os números complexos, representados por $x + iy$, com i sendo a unidade imaginária, i.e. $i^2 = -1$, podem ser vistos como vetores em \mathfrak{R}^2 com coordenadas x e y . O produto entre números complexos representa, portanto, a multiplicação de vetores em \mathfrak{R}^2 . O objetivo de Hamilton era generalizar isto para três dimensões, construindo um elemento da sua álgebra como $x + iy + jz$, com duas unidades complexas: $i^2 = j^2 = -1$. Após perceber que este sistema não poderia formar uma álgebra fechada, introduziu uma terceira unidade complexa k , satisfazendo:

$$i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1. \quad (\text{C.19})$$

Esta condição descreve a chamada álgebra dos quatérnions, com elementos expressos por: $x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, com $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \in \mathfrak{R}$. Vamos agora ver como a álgebra geométrica contém este sistema.

Adotando $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 como base para $\langle G^3 \rangle_1$, podemos construir os bivectores:

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{J} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \quad (\text{C.20})$$

Vamos agora calcular os seus quadrados.

$$\begin{aligned} I^2 &= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -1, \\ J^2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -1 \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$K^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = -1. \quad (\text{C.21})$$

Para finalizar, calculemos o trivetor IJK :

$$IJK = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = -1, \quad (\text{C.22})$$

o que nos mostra que a associação dos números complexos i, j, k com os bivectores I, J, K estabelece um isomorfismo entre a álgebra dos quaternions e G_+^3 .

C.3.2 Álgebra de Pauli

Um resultado que será bastante útil no nosso trabalho é que o produto geométrico entre os vetores de G^3 carregam as mesmas relações dos produtos matriciais obedecidos pelas matrizes de Pauli (ver eq. 4.3). Isto nos permite ver as matrizes de Pauli da mecânica quântica como vetores de G^3 . Um ganho de interpretação possibilitado pela álgebra geométrica. Note que as relações entre os elementos permanecem, enquanto que a forma de cada um muda radicalmente.

Para construir este isomorfismo, verifiquemos cada uma das relações obedecidas pelas matrizes de Pauli σ^i definidas na eq. (4.3). Em primeiro lugar, ambos os elementos elevados ao quadrado resultam em 1:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 = \sigma^i \sigma^i, \quad (\text{C.23})$$

em seguida, o número complexo i , obtido pela multiplicação das três matrizes de Pauli, é representado, em álgebra geométrica, pelo pseudo-escalar I^5 .

$$I^2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{123123} = -\mathbf{e}_{112233} = -1 \leftrightarrow i^2. \quad (\text{C.24})$$

Para finalizar temos, para $i \neq j$:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \quad (\text{C.25})$$

assim como ocorre com as matrizes de Pauli.

Este resultado mostra um caminho prático de se implementar computacionalmente os produtos da álgebra geométrica como produtos vetoriais. Contudo, conforme veremos, mais importante do que isto é a nova interpretação geométrica alcançada.

⁵Observe o que isto significa: a unidade imaginária é representada por um volume orientado. Temos, portanto, uma representação geométrica para ela.

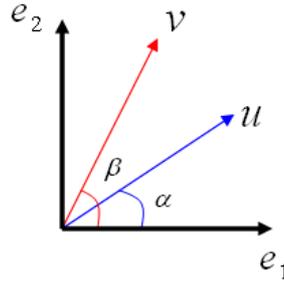


Figura C.4 Representação de dois vetores unitários: $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \cos(\alpha) + \mathbf{e}_2 \sin(\alpha)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos(\beta) + \mathbf{e}_2 \sin(\beta)$.

C.3.3 Trigonometria

Como aplicação da álgebra geométrica no estudo da trigonometria, iremos deduzir as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos (α e β). Estaremos nos baseando no trabalho de Calvet [16]. Para isto, tomemos inicialmente dois vetores unitários pertencentes a G^2 definidos por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \cos(\alpha) + \mathbf{e}_2 \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos(\beta) + \mathbf{e}_2 \sin(\beta), \quad (\text{C.26})$$

como ilustra a figura C.4.

O produto geométrico entre eles é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\mathbf{u} &= (\mathbf{e}_1 \cos(\beta) + \mathbf{e}_2 \sin(\beta))(\mathbf{e}_1 \cos(\alpha) + \mathbf{e}_2 \sin(\alpha)) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) + \mathbf{e}_{12}(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)), \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

com uma parte escalar e uma parte de bivector. Sem a utilização de coordenadas, podemos expressar o produto geométrico entre \mathbf{u} e \mathbf{v} por:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta) + \mathbf{e}_{12}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\theta), \quad (\text{C.28})$$

onde θ é o ângulo entre eles. No nosso caso $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ e $\theta = \alpha - \beta$. O que implica que:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \cos(\alpha - \beta) + \mathbf{e}_{12}\sin(\alpha - \beta). \quad (\text{C.29})$$

Comparando o resultado das equações (C.27) e (C.29), podemos igualar as componentes escalares e de bivector para obter:

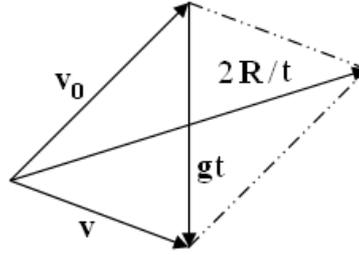


Figura C.5 Representação geométrica do problema do lançamento oblíquo. Temos o vetor subtração de velocidades $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t$ e o vetor soma $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 = 2\mathbf{R}/t$, obtidos a partir das equações (C.31) e (C.32).

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \quad \text{e} \\ \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha),\end{aligned}\tag{C.30}$$

o que conclui os nossos cálculos⁶.

C.3.4 Lançamento oblíquo

Como primeira aplicação física, estudaremos um problema de cinemática. Neste ponto estaremos nos baseando na ref. [48]. O problema em questão consiste em se calcular o alcance de um corpo lançado com velocidade inicial \mathbf{v}_0 , numa região de campo gravitacional uniforme \mathbf{g} . Para o vetor velocidade \mathbf{v} temos:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t,\tag{C.31}$$

enquanto que para o vetor posição \mathbf{x} temos:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.\tag{C.32}$$

Denotando por \mathbf{R} o vetor deslocamento total, i.e. $\mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, obtemos das equações (C.31) e (C.32) que $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 = 2\mathbf{R}/t$. Com isso podemos construir uma representação geométrica do problema⁷ como ilustrada a figura C.5.

Multiplicando os vetores soma e subtração definidos na fig. C.5 temos:

⁶Para o seno/cosseno da soma de dois ângulos, basta substituir β por $-\beta$, lembrando que o cosseno é uma função par enquanto que o seno é uma função ímpar.

⁷Sem a utilização de qualquer sistema de coordenadas.

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0\mathbf{v} = 2\mathbf{R}\mathbf{g}, \quad (\text{C.33})$$

mas $\mathbf{v}^2 = v^2$ e $\mathbf{v}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0$. Substituindo estes resultados temos:

$$v^2 - v_0^2 + 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0 = 2\mathbf{R}\mathbf{g}. \quad (\text{C.34})$$

Igualando as partes escalares e vetoriais temos:

$$v^2 - v_0^2 = 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{g} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{g}, \quad (\text{C.35})$$

onde a primeira igualdade pode ser vista como a equação de Torricelli da cinemática, enquanto que a segunda tem uma representação geométrica imediata, através da área do paralelograma da figura C.5.

Vamos nos ater ao caso em que o alcance \mathbf{R} é horizontal, i.e. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{g} = 0$. O caso geral pode ser encontrado na ref. [46]. Substituindo este resultado na eq. (C.35) temos:

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}||\mathbf{v}_0|\text{sen}(2\theta) = v_0^2\text{sen}(2\theta), \quad (\text{C.36})$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{v}_0 e \mathbf{R} . Temos ainda que

$$|\mathbf{R} \wedge \mathbf{g}| = Rg. \quad (\text{C.37})$$

Juntando estas duas últimas equações chegamos ao resultado final do alcance horizontal R :

$$v_0^2\text{sen}(2\theta) = Rg \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g}\text{sen}(2\theta). \quad (\text{C.38})$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. C. Arnesen, S. Bose and V. Vedral. Natural Thermal and Magnetic Entanglement in the 1D Heisenberg Model. *Phys. Rev. Lett.*, 87:17901, 2001.
- [2] A. Aspect. Bell's inequality test: more ideal than ever. *Nature*, 398:189, 1999.
- [3] D. V. Averin. Adiabatic quantum computation with Cooper pairs. *Solid State Commun.*, 105:659, 1998.
- [4] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin and H. Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 52:3457, 1995.
- [5] John S. Bell. On the EPR Paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [6] C. H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM F. Res. Dev.*, 17:525, 1973.
- [7] C. H. Bennett and G. Brassard. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing. *Proceedings of IEEE Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, India*, 175, 1984.
- [8] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail and J. Smolin. Experimental quantum cryptography. *Journal of Cryptology* 5:3, 1992.
- [9] C. H. Bennett and S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881, 1992.
- [10] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895, 1993.
- [11] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824, 1996.

- [12] N. Bhattacharya, H. B. van Linden van den Heuvell and R. J. C. Spreeuw. Implementation of quantum search algorithm using classical Fourier optics. *Phys. Rev. Lett.*, 88:137901, 2002.
- [13] M. Borhani and D. Loss. Cluster states from Heisenberg interactions. *Phys. Rev. A*, 71:34308, 2005.
- [14] N. Boulant, M. A. Pravia, E. M. Fortunato, T. F. Havel and D. G. Cory. Experimental concatenation of quantum error correction with decoupling. *Quantum Information Processing*, 1:135, 2002.
- [15] G. Burkard and D. Loss. Coupled quantum dots as quantum gates. *Phys. Rev. B*, 59:2070, 1999.
- [16] R. G. Calvet. Tratise of plane geometry throught geometric algebra. *On-line*: <http://campus.uab.es/PC00018>, 2001.
- [17] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung and S. Lloyd. Experimental realization of a quantum algorithm. *Nature*, 393:143, 1998.
- [18] J. I. Cirac and P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4097, 1995.
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. Quantum Mechanics. *Wiley-Interscience*, 2006.
- [20] S. Cortez, O. Krebs, S. Laurent, M. Senes, X. Marie, P. Voisin, R. Ferreira, G. Bastard, J-M. Gérard and T. Amand. Optically Driven Spin Memory in n-Doped InAs-GaAs Quantum Dots. *Phys. Rev. Lett.*, 89:207401, 2002.
- [21] D. G. Cory, A. F. Fahmy and T. F. Havel. Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy. *Proceedings of the National Academy of Science - USA*, 94:1634, 1997.
- [22] M. O. T. Cunha. Emaranhamento: dos Gatos de Schrödinger à Álgebra Multilinear. Texto apresentado na II Bienal da SBM. Salvador, 2004.
- [23] D. Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400:97, 1985.
- [24] D. Dieks. Communication by EPR devices. *Physics Letters A*, 92:271, 1982.

- [25] D. P. DiVincenzo. Quantum computation. *Science*, 270:255, 1995.
- [26] D. P. DiVincenzo. The Physical Implementation of Quantum Computation. arXiv.org:quant-ph/0002077, 2000.
- [27] C. Doran and A. Lasenby. Geometric Algebra for Physicists. *Cambridge University Press*, 2003.
- [28] C. J. L. Doran, A. N. Lasenby and S. F. Gull. States and operators in the spacetime algebra. *Found. Phys.* 23:1239, 1993.
- [29] C. J. L. Doran, A. N. Lasenby, S. F. Gull, S. S. Somaroo and A. D. Challinor. Spacetime algebra and electron physics. *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, ed., Academic Press, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [30] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. Can Quantum-Mecanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47:777, 1935.
- [31] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varing Analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804, 1982.
- [32] Falci, G., R. Fazio, G. H. Palma, J. Siewert and V. Vedral. Detection of geometric phases in superconducting nanocircuits. *Nature*, 407:355, 2000.
- [33] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands. The Feynman Lectures on Physics. Addison-Wesley, v.3, 1963.
- [34] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21:467, 1982.
- [35] E. Fradkin. Field theories of condensed matter systems. *Westview Press*, 1991.
- [36] J. R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo and J. E. Lukens. Quantum superposition of distinct macroscopic states. *Nature*, 406:43, 2000.
- [37] G. R. Fowles. Introduction to modern optics. *Dover Publications, New York*, 2ed. p.35, 1989.
- [38] I. Glendinning. The Bloch Sphere. QIA Meeting, TechGate, 2005.

- [39] L. K. Groover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, 79(2):325, 1997.
- [40] T. F. Havel and C. J. L. Doran. Geometric Algebra in Quantum Information Processing. *arXiv.org:quant-ph/000403*, 2000.
- [41] T. F. Havel, D. G. Cory, S. S. Somaroo and C. Tseng. Geometric algebra methods in quantum information processing by NMR spectroscopy. *Advances in Geometric Algebra with Applications*, Birkhauser, Boston MA, USA, 2000.
- [42] T. F. Havel and C. J. L. Doran. Interaction and Entanglement in the Multiparticle Space-time Algebra. *arXiv.org:quant-ph/0106063*, 2001.
- [43] D. Hestenes. Space-Time Algebra. *Gordon and Breach, New York*, 1966.
- [44] D. Hestenes. Real spinor fields. *J. Math. Phys.*, 8:798, 1967.
- [45] D. Hestenes. Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics. *Am. J. Phys.*, 39:1013, 1971.
- [46] D. Hestenes. New Foundations for Classical Physics *Kluwer, Dordrecht*, 1986. 2nd ed., 1999.
- [47] D. Hestenes. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *Am. J. Phys.*, 71:104, 2003.
- [48] D. Hestenes. Primer on Geometric Algebra for introductory mathematics and physics. *On-line: <http://modelingnts.la.asu.edu/pdf/PrimerGeometricAlgebra.pdf>*, 2005.
- [49] S. Hill and W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.*, 76:5022, 1997.
- [50] Hong, C. K., Z. Y. Ou and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044, 1987.
- [51] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki. Inseparable two spin - 1/2 density matrices can be distilled to a singlet form. *Phys. Rev. Lett.*, 78:574, 1997.
- [52] P. Horodecki. Measuring Quantum Entanglement without Prior State Reconstruction. *Phys. Rev. Lett.*, 90:167901, 2003.

- [53] A. Imamoglu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin and A. Small. Quantum Information Processing Using Quantum Dots Spins and Cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4201, 1999.
- [54] B. -Q. Jin and V. E. Korepin. Quantum Spin Chain, Toeplitz Determinants and Fisher-Hartwig Conjecture. arXiv:quant-ph/0304108, 2003.
- [55] Maklin, Y., G. Schön, and A. Shnirman. Quantum-state engineering with Josephson-Junction devices. *Rev. Mod. Phys.*, 73:357, 2001.
- [56] J. A. Jones, M. Mosca and R. H. Hansen. Implementation of a quantum search algorithm on a quantum computer. *Nature*, 393:344, 1998.
- [57] B. D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Phys. Lett.*, 1:251, 1962.
- [58] D. Kahn. Codebreakers: the Story of Secret Writing. *Scribnet, New York*, 1996.
- [59] G. L. Kamta and A. F. Starace. Anisotropy and Magnetic Field Effects on the Entanglement of a Two Qubit Heisenberg XY Chain. *Phys. Rev. Lett.*, 88:107901, 2002.
- [60] J. P. Keating and F. Mezzadri. Random Matrix Theory and Entanglement in Quantum Spin Chains. *Commun. Math. Phys.*, 252:543, 2004.
- [61] D. Kielpinski, C. Monroe and D. J. Wineland. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. *Nature*, 417:709, 2002.
- [62] J. Kim, O. Benson, H. Kan and Y. Yamamoto. A single-photon turnstile device. *Nature*, 397:500, 1999.
- [63] Yoon-Ho Kin, R. Yu, S. P. Kulik, Y. H. Shih and M. O. Scully. A Delayed Choice Quantum Eraser. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1, 2000.
- [64] E. Knill, I. L. Chuang and R. Laflamme. Effective pure states for bulk quantum computation. *Physical Review A.*, 57:3348, 1998.
- [65] E. Knill, R. Laflamme and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409:46, 2001.

- [66] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5:183, 1961.
- [67] J. I. Latorre, E. Rico, and G. Vidal. Ground state entanglement in quantum spin chains. *Quant. Inf. Comput.*, 4:48, 2004.
- [68] G. L. Long and L. Xiao. Experimental realization of a fetching algorithm in a 7-qubit NMR spin Liouville space computer. *Journal of Chemical Physics*, 119:8473, 2003.
- [69] D. Loss, and D. P. DiVincenzo. Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, 57:120, 1998.
- [70] P. Lounesto. Clifford Algebras and Spinors. *Cambridge University Press*, 2ed, 2001.
- [71] F. J. MacWilliams and N. J. Sloane. The Theory of Error-correcting Codes. *North-Holland, Amsterdam*, 1977.
- [72] J. M. Martinis, S. W. Nam, J. Aumentado and C. Urbina. Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 89:117901, 2002.
- [73] P. G. Merli, G. F. Missiroli and G. Pozzi. On the statistical aspect of electron interference phenomena. *Am. J. Phys.*, 44:306, 1976.
- [74] F. Mintert, M. Kus and A. Buchleitner. Concurrence of mixed multi-particle quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 95:260502, 2005.
- [75] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Wal and S. Lloyd. Josephson persistent current qubit. *Science*, 285:1036, 1999.
- [76] G. E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, V.38, 8, 1965.
- [77] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin and J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. *Nature*, 398:786, 1999.
- [78] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der quantenmechanik*. N.Y., Springer, 1932.
- [79] M. A. Nielsen. Quantum Information Theory. Tese de Doutorado. New Mexico, arXiv:quant-ph/0011036, 1998.

- [80] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. *Cambridge University Press*, 2000.
- [81] J. Preskill. Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. *On-line: <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/notes/book.ps>*, 1998.
- [82] C. Ramanathan, H. Cho, P. Cappellaro, G. S. Boutis and D. G. Cory. Encoding multiple quantum coherences in non-commuting bases. *Chemical Phys. Lett.*, 369:311, 2003.
- [83] G. Rigolin. Thermal Entanglement in the Two-Qubit Heisenberg XYZ Model. *Int. J. Quant. Inf.*, 2:393, 2004.
- [84] G. Rigolin. Estados Quânticos Emaranhados. Tese de Doutorado. Campinas, 2005.
- [85] The Quantum Information Science and Technology Roadmap Projec. *On-line: <http://qist.lanl.gov>*.
- [86] M. O. Scully and K. Drühl. Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and “delayed choice” in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 25:2208, 1982.
- [87] C. E. Shannon and W. Weaver. The Mathematical Theory of Communication. Urbana University of Illinois Press, 1949.
- [88] P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithm and factoring. *Proc. 35th Symp. on the Foundations of Computer Science*, p.124, 1994.
- [89] S. S. Somaroo, D. G. Cory and T. F. Havel. Expressing the operations of quantum computing in multiparticle geometric algebra. *Phys. Lett. A*, 240:1, 1998.
- [90] J. Suter. Geometric Algebra Primer. *On-line: <http://www.jaapsuter.com>* , 2003.
- [91] S. Takeuchi. Experimental demonstration of a three-qubit quantum computation algorithm using single photon and linear optics. *Physical Review A*, 62:032301, 2000.
- [92] L. Tian, P. Rabl, R. Blatt and P. Zoller. Interfacing Quantum-Optical and Solid-State Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 92:247902, 2004.
- [93] M. Tinkham. Introduction to superconductivity. 2ed, MGH, 1996.

- [94] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden and N. Gisin. Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3563, 1998.
- [95] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa. Demonstration of single-electron build-up of an interference pattern. *American Journal of Physics*, 57:117, 1989.
- [96] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem. *Proc. Lond. Math. Soc.* 2, 42:230, 1936.
- [97] W. G. van der Wiel, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha and L. P. Kouwenhoven. Electron transport through double quantum dots. *Rev. Mod. Phys.*, 75:1, 2003.
- [98] L. M. K. Vandersypen, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood and I. L. Chuang. Realization of logically labeled effective pure states for bulk quantum computation. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3085, 1999.
- [99] L. M. K. Vandersypen, M. Steffan, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 422:408, 2001.
- [100] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin and P. L. Knight. Quantifying Entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2275, 1997.
- [101] V. Vedral and M. B. Plenio. Entanglement measures and purification procedures. *Phys. Rev. A*, 57:1619, 1998.
- [102] V. Vedral. The role of relative entropy in quantum information theory. *Rev. Mod. Phys.*, 74:197, 2002.
- [103] C. Veronica, W. A. Coish, O. Gywat and D. Loss. Recipes for spin-based quantum computing. *Nanotechnology*, 16:R27, 2005.
- [104] D. Vion, A. Aassima, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve and M. H. Devoret. Manipulating the quantum state of an electrical circuit. *Science*, 296:886, 2002.
- [105] L. Xiaoqin, Y. Wu, D. Steel, D. Gammon, T. H. Stievater, D. S. Katzer, D. Park, C. Piermarocchi and L. J. Sham. An All-Optical Quantum Gate in a Semiconductor Quantum Dot. *Science*, 301:809, 2003.

- [106] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, 2002.
- [107] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert and A. Buchleitner. Experimental determination of entanglement with a single measurement. *Nature*, 440:1022, 2006.
- [108] W. S. Warren. The Usefulness of NMR Quantum Computing. *Science*, 277:1688, 1997.
- [109] S. Wiesner. Conjugate coding. *Sigact News*, 15:78, 1983.
- [110] W. K. Wootters and W.H. Zurek. A Single Quantum Cannot be Cloned. *Nature*, 299:802, 1982.
- [111] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245, 1998.
- [112] T. Yamamoto, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura and J. S. Tsai. Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits. *Nature*, 425:941, 2003.
- [113] T. Young. On the theory of light and colours. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 92:12, 1802.