UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DINÂMICA CAÓTICA EM UM CIRCUITO ELETRÔNICO

por

Fábio Oikawa dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:
Prof. José Roberto Rios Leite (Orientador-UFPE)
Prof. Flávio Menezes de Aguiar (DF - UFPE)
Prof. Renato Mariz de Moraes (Escola Politécnica - UPE)

Recife - PE, Brasil
Dezembro - 2007

Santos, Fábio Oikawa dos
Dinâmica caótica em um circuito eletrônico / Fábio Oikawa dos Santos. - Recife : O autor, 2007.
viii, 87 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2007.

Inclui bibliografia, índice e apêndice.

1. Caos. 2. Bifurcação. 3. Diodo semicondutor. I. Título.

530.15 CDD (22.ed.) FQ2008-001

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
http://www.df.ufpe.br/pg e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Fábio Oikawa dos Santos

DINÂMICA CAÓTICA EM UM CIRCUITO ELETRÔNICO

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Roberto Rios Leite (Presidente e Orientador), Flávio Menezes de Aguiar, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Renato Mariz de Moraes, da Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco, consideram o candidato:

(X) Aprovado ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte de dezembro de 2007.

Prof. José Roberto Rios Leite
Presidente e Orientador

Prof. Flávio Menezes de Aguiar

Prof. Renato Mariz de Moraes

Agradecimentos

Agradeço a todos que tornaram possível este trabalho, principalmente aos pesquisadores do laboratório: Prof. Rios (orientador), Hugo, Jhon, Erika e Prof. Renato (em cooperação com o laboratório).

Resumo

A dinâmica de um circuito composto por Resistor, Indutor e Diodo conectados em série e alimentados por uma fonte de tensão senoidal pode apresentar uma rica variedade de fenômenos não-lineares, a depender dos parâmetros envolvidos, com bifurcações entre regimes de oscilações periódicas e caóticas.

Esta dissertação contém estudo experimental e numérico do circuito Resistor-Indutor-Diodo (RLD), forçado por uma tensão externa harmônica, cuja amplitude, freqüência ou deslocamento do zero (*offset*) atuam como parâmetros de controle da dinâmica. Numericamente fizemos simulação de alguns modelos propostos para o diodo, elemento responsável pela não-linearidade do circuito. Experimentalmente verificamos a biestabilidade (histerese) entre diferentes atratores, a tangência característica da intermitência tipo I em bifurcações de janelas periódicas e a multidimensionalidade do atrator. Também foram observados cascata de dobramento de período, escadas (*staircases*), adição de período com auto-replicação, saltos (*hopping*), crise interior e evidências de um fenômeno antes não visto na literatura, a saber: oscilações na estrutura fina da média com a chegada da bifurcação tangente em janelas periódicas, previstas inicialmente em modelos matemáticos de mapas unidimensionais. Uma breve descrição da instrumentação de controle e aquisição também é apresentada

Palavras-chaves: Bifurcações; Caos; Diodo Semicondutor.

Abstract

The dynamics of a driven series Resistor, Inductor and Diode circuit may display a rich variety of nonlinear phenomena, depending on the involved parameters, with bifurcations schemes between regular and chaotic oscillations.

This thesis contains experimental and numerical study of series Resistor-Inductor-Diode (RLD) circuit, driven by a sine wave voltage source, whose amplitude, frequency or DC offset act as parameters to control the dynamics. Numerically, we did simulation of models proposed for the diode, element responsible for the nonlinearity of the circuit. Experimentally we observed the bistability (hysteresis) between different attractors, the tangent Pomeau-Menneville intermittency bifurcation and multidimensionality of attractor. Also it has been observed cascade of period-doubling route to chaos, staircases, adding period with self-replicating structure, hopping, interior crises and evidence of a phenomenon not seen before in the literature, namely: fluctuations in the fine structure of the average with the arrival of tangent bifurcation at periodic windows, initially predicted on mathematical models of unidimensional maps. A brief description of the control and acquisition instrumentation is also presented.

Keywords: Bifurcations; Chaos; Semiconductor diode.

Prefácio

Inicialmente, no primeiro capítulo, uma revisão de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Caos é apresentada, com uma exposição dos conceitos fundamentais necessários às discussões subseqüentes; foi dividido em duas seções, sistemas de tempo contínuo (Seção 1.2) e de tempo discreto (Seção 1.3), porém com uma tênue divisão entre os dois, já que o tempo contínuo pode ser (na prática o é) discretizado. Cada seção enfatiza os tipos de bifurcações e as rotas para o caos. A parte seguinte trata especificamente o circuito RLD, sendo discutidos alguns modelos para o diodo (Seção 2.1), seguidos de alguns resultados de simulações (Seção 2.2) e comparações com experimentos (Capítulo 3.1), além de duas seções (Seções 3.2 e 3.3) contendo uma breve descrição de como a montagem e o sistema de controle e aquisição foram implementados. Por fim, a conclusão. No Apêndice A consta um resumo da história do nascimento dessa nova ciência[1].

[1] "Caos: O nascer de uma nova ciência", de James Gleick.

Sumário

Prefácio **i**

1 Revisão: Dinâmica Não-Linear e Caos **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Fluxos 2
1.2.1 Bifurcação 11
1.2.2 Caos em fluxos 17
1.3 Mapas 20
1.3.1 Bifurcação 23
1.3.2 Caos em mapas 26
1.3.3 Mapa Logístico 33

2 Circuito RLD **40**
2.1 Modelo 42
2.2 Análise Numérica 49

3 Experimentos com o circuito RLD **63**
3.1 Resultados e discussões 63
3.2 Montagem 71
3.3 Controle e aquisição de dados 74
3.3.1 VISA 76

Conclusão **79**

A Um pouco de História **80**

Referências Bibliográficas **82**

Índice Remissivo **85**

Lista de Tabelas

2.1 Modelos SPICE3 para diodo 1N4007. 49

Lista de Figuras

1.1 Trajetória num espaço de fase bidimensional. 3
1.2 Retrato de fase bidimensional. 3
1.3 (a) Nó estável e (b) instável em espaço bidimensional. 4
1.4 (a) Espiral estável e (b) instável em espaço bidimensional. . . 5
1.5 Ponto de sela em espaço bidimensional. 5
1.6 Ciclo limite (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável em espaço bidimensional. 6
1.7 O toro é construído colando-se os dois lados de um quadrado, preservando sua orientação. 7
1.8 A razão entre as freqüências é racional, nesse caso 1/2. 7
1.9 Representação no plano complexo dos autovalores de nó bidimensional (a) estável e (b) instável 9
1.10 Representação no plano complexo dos autovalores de espiral bidimensional (a) estável e (b) instável 10
1.11 Representação no plano complexo dos autovalores de ponto de sela bidimensional. 10
1.12 Os expoentes de Lyapunov para o espaço de estados de três dimensões são as taxas de expansão dos três eixos da elipse. . 11
1.13 Retratos de fase unidimensionais para bifurcação sela-nó (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação. 12
1.14 Diagrama de bifurcação sela-nó. 13
1.15 Retrato de fase para para o sistema bidimensional da equação 1.12: (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação sela-nó 13
1.16 Retratos de fase unidimensionais para bifurcação transcrítica (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação. 14
1.17 Diagrama de bifurcação transcrítica. 14
1.18 Retratos de fase unidimensionais para bifurcação forquilha (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação. 15
1.19 Diagrama de bifurcação forquilha (a) supercrítica e (b) subcrítica. 15
1.20 Retrato de fase para bifurcação Hopf supercrítica (a) antes e (b) depois da bifurcação. 16

1.21 Retrato de fase para bifurcação Hopf subcrítica (a) antes e (b) depois da bifurcação. 17
1.22 Seção de Poincaré para o espaço de estados de três dimensões. 18
1.23 Multiplicadores de Floquet no plano complexo para ponto fixo em mapa bidimensional (ou para ciclo limite em mapa de Poincaré planar). (a) Nó estável; (b) nó instável; (c) espiral estável; (d) espiral instável; (e) e (f) ponto de sela 21
1.24 Diagramas *stair-step* próximos do ponto fixo com $M'(x^*) > 0$: (a) $|M'(x^*)| < 1$ (estável); (b) $|M'(x^*)| > 1$ (instável). 22
1.25 Diagramas *stair-step* próximos do ponto fixo com $M'(x^*) < 0$: (a) $|M'(x^*)| < 1$ (estável); (b) $|M'(x^*)| > 1$ (instável). 22
1.26 Órbitas de período: (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4. 24
1.27 Mapas da primeira e segunda iterada (a) antes e (b) depois do dobramento de período. 24
1.28 Diagrama de bifurcação por dobramento de período. 25
1.29 Mapas antes (a) e depois (b) da bifurcação tangente. 25
1.30 Diagrama de bifurcação tangente. 26
1.31 Multiplicadores de Floquet no plano complexo para intermitência tipo (a) I, (b) II e (c) III. 29
1.32 Canal entre mapa e diagonal próximo à bifurcação para dois valores do parâmetro. Na figura da direita, o canal é mais estreito e o tempo médio da fase laminar é maior. 30
1.33 (a) Série de período 1 do mapa logístico. $r = 2{,}7$; (b) Mapa primeiro retorno do mapa logístico. $r_1 = 2{,}7$ e $r_2 = 3{,}4$. 35
1.34 (a) Série de período 2 do mapa logístico. $r = 3{,}4$; (b) Mapa de segundo retorno do mapa logístico. $r = 2{,}7$ e $3{,}4$. 36
1.35 (a) Série de período 4 do mapa logístico. $r = 3{,}5$; (b) Mapa de segundo retorno do mapa logístico. $r = 3{,}5$. 36
1.36 Caos. $r = 3{,}6$. Em (a) $x_0 = 0{,}1$; em (b) $x_0 = 0{,}10001$, mostrando a sensível dependência às condições iniciais da órbita caótica. 37
1.37 Mapa de retorno para três valores de r: (a) 3,5 (período 4); (b) 3,56 (período 8); (c) 3,9 (caos). 37
1.38 Diagrama de bifurcação e média do mapa logístico. 38
1.39 Ampliação do diagrama de bifurcação e sua média próximo à bifurcação tangente de janela 5. 38
1.40 Mapa de 5^a iterada próximo à bifurcação tangente da janela 5. 39

2.1 Esquema do circuito RLD. 40
2.2 Junção pn e as regiões que dão origem às capacitâncias de junção e difusão. 44

2.3 Modelo para o diodo baseado nas capacitâncias de difusão e de junção. A resistência r_s é freqüentemente desprezível. . . . 45
2.4 Característica $Q \times V$ do modelo do capacitor linear por partes. 45
2.5 Modelo de Rollins e Hunt (1982) para o diodo. Na condução há apenas uma bateria V_f; no corte, uma capacitância C. Após a inversão da tensão externa, porém, o diodo continua conduzindo por um tempo de recuperação τ_r. 47
2.6 Circuito RLD. (a) Diodo real; (b) O modelo da capacitância não-linear em paralelo com uma fonte de corrente controlada por tensão é utilizado para o diodo. 50
2.7 Capacitâncias de junção, de difusão e total do modelo da capacitância não-linear para o diodo. 52
2.8 Séries numéricas caóticas no circuito RLD para a tensão no diodo e a corrente. $C_{j0} = 18{,}5$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 0{,}22$ H, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 4{,}4$ V, $f = 50$ kHz, passo de integração: $10^{-}9$ 53
2.9 Séries numéricas de período 4 para a tensão no diodo e a corrente no circuito RLD. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 3{,}5$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: 2×10^{-9}. 54
2.10 Solução numérica de equações. As três curvas mostram a sensibilidade ao erro de arredondamento na integração. As diferenças nos cálculos são apenas no passo de integração. 55
2.11 Diagrama de bifurcação no circuito RLD para a tensão no diodo e a corrente. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 1{,}8 \sim 8$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: $0{,}5{\times}10^{-9}$. 56
2.12 Diagrama de bifurcação numérico para o máximo da corrente do circuito. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 1{,}8 \sim 8$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: $0{,}5{\times}10^{-9}$. 58
2.13 Diagrama de bifurcação simulado. Em (a), uma região é destacada pelo retângulo e ampliada em (b); novamente, uma região em (b) é destacada e ampliada em (c); idem para (c) e (d). 59
2.14 Diagrama de bifurcação da corrente e médias dos picos (acima) e da variável dinâmica (abaixo). 60
2.15 Diagrama de bifurcação obtido do modelo de Perez para o circuito RLD. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1 \sim 20$. 60

2.16 Ampliação de parte do diagrama de bifurcação da Figura 2.15. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}6 \sim 1{,}7$. 61
2.17 (a) Mapa da 5^a iterada na intermitência tipo I obtida do modelo de Perez para o circuito RLD; (b) Série numérica na intermitência tipo I. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}6402$. 61
2.18 (a) Ampliação de parte do diagrama de bifurcação da Figura 2.16. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}63 \sim 1{,}6404$; (b) Ampliação da média de (a), com sucessivas aproximações no ponto crítico. 62
2.19 Modelo do diagrama $(f, V_G, S/T)$ para todas as órbitas periódicas. Azul: período 1; amarelo: período 2; roxo: período 3; verde: período 4. 62

3.1 (a) Ressonâncias para o circuito RLD para várias amplitudes de controle. Os efeitos não-lineares neste circuito "nascem" para amplitudes entre 10 e 50 mV. (b) Ressonâncias para três DC *offsets* diferentes. A freqüência encontrada é aproximadamente 210 kHz, dando uma capacitância de cerca de 5,7 pF. $L = 100$ mH, $R = 1$ kΩ, diodo: 1N4007. $V_G = 100$ mV. 64
3.2 (a) Série temporal periódica para o circuito RLD. (b) Projeção de uma trajetória periódica (tridimensional) no plano $i(t) \times v_G(t)$ para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $V_G = 9\ V_{pp}$, $f = 150$ kHz e $V_{offset} = 0$ V. 65
3.3 (a) Série temporal caótica para o circuito RLD. (b) Projeção de uma trajetória periódica (tridimensional) no plano $i(t) \times v_G(t)$ para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $V_G = 9\ V_{pp}$, $f = 200$ kHz e $V_{offset} = 0$ V. 65
3.4 Diagramas de bifurcação experimentais para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 150$ kHz, $V_{offset} = 0$. (a) $V_G = 0{,}5 \sim 10\ V_{pp}$, 100 passos na variação do parâmetro, cada passo com aquisição de 10 mil pontos. (b) $V_G = 1 \sim 20\ V_{pp}$, 700 passos na variação do parâmetro, cada passo com aquisição de 10 mil pontos. A menos que especificado em contrário, todas as aquisição são feitas com 10 mil pontos. 66

3.5 (a) Diagrama de bifurcação experimental para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}5 \sim 5{,}5\ V_{pp}$, 100 passos. Em destaque, $V_G = 5{,}29 \sim 5{,}305\ V_{pp}$, 300 passos. O gerador está com saída em alta impedância. A menos especificado em contrário, todas as medidas nesse trabalho foram feitas com saída do gerador em 50 Ω. (b) Mapa de 5^a iterada para tensão no resistor em $V_G = 5{,}302$ V, evidenciando a bifurcação tangente. 67
3.6 (a) Diagrama de bifurcação experimental para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 2{,}25 \sim 3{,}15\ V_{pp}$, 200 passos. Em destaque, $V_G = 3{,}02 \sim 3{,}06\ V_{pp}$, 500 passos; (b) Mapa de 5^a iterada da tensão do resistor, evidenciando a bifurcação tangente. $V_G = 3{,}0555\ V_{pp}$. 67
3.7 Picos do sinal de corrente do circuito RLD na intermitência tipo I. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}0555\ V_{pp}$. 68
3.8 Diagrama de bifurcação para a corrente (em cima) e média dos picos (embaixo) no circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 2{,}3 \sim 3{,}16\ V_{pp}$, 2000 passos. 69
3.9 (a) Diagrama de bifurcação para a corrente (em cima) e média dos picos (embaixo) no circuito RLD próximos à bifurcação para a janela de período 5. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}019 \sim 3{,}058\ V_{pp}$, 800 passos. (b) Média dos picos, com subseqüentes zooms a fim de enfatizar a periodicidade (de período variável) existente. 70
3.10 Esquema do circuito utilizado no experimento. 71
3.11 Esquema geral de ligação entre os equipamentos utilizados. . . 74
3.12 Algoritmo de controle e aquisição implementado em LabVIEW 7.1. 75
3.13 (a) Tela do programa de controle e aquisição feito em LabVIEW; (b) Um exemplo de diagrama de bifurcação adquirido em tempo real. 76

Capítulo 1

Revisão: Dinâmica Não-Linear e Caos

1.1 Introdução

Dizem que as duas maiores revoluções da Física no século XX foram a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade Geral. Essas duas teorias mudaram a forma de o Homem ver a Natureza e propiciaram grandes avanços tecnológicos. Por que não incluir o Caos nesse seleto grupo, já que ele também provoca um radical impacto na crença determinística da Natureza? De fato, o Caos não pressupõe nenhum processo estocástico envolvido, ou seja, equações que modelam sistemas caóticos não necessitam conter nenhum termo estocástico (como num movimento browniano). Uma simples equação determinística pode ter seu comportamento temporal imprevisível a longo prazo. É algo inerente à dinâmica do sistema. Laplace, no início do século XIX, afirmava que bastava saber todas as forças e todos os estados do Universo num determinado instante para ser capaz de prever tudo. Isso seria verdade se a existência do caos não implicasse numa limitação de nossa capacidade de previsão. Na verdade, se tivéssemos como manipular números infinitos Laplace poderia estar certo. Porém, o infinito só existe como abstração da mente humana (ou não).

O caos é estudado dentro do contexto de *Sistemas Dinâmicos*, ou seja, sistemas *determinísticos* que evoluem no tempo descritos por um conjunto de *variáveis de estado* — variáveis que determinam completamente sua evolução e cujo número é único e igual à *dimensão* ou *ordem* do sistema. Dependendo da representação utilizada, podemos considerar o tempo contínuo ou discreto. Veja Strogatz (1998) e Ott (1997).

1.2 Fluxos

Para um sistema *autônomo*[1], N-dimensional (com N variáveis de estado) e de tempo contínuo, consideraremos o conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, ..., x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, ..., x_N), \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$. Normalmente, uma dependência temporal explícita em f_i é decorrente de uma entrada variável no tempo, daí a denominação sistema *não-autônomo*, sendo possível torná-lo autônomo fazendo-se $x_{N+1} = t$ em troca do aumento de sua dimensão para $N+1$. Uma notação mais compacta é dada pela forma vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

Supondo $\mathbf{f}$ e todas suas derivadas parciais $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ contínuas para $\mathbf{x}$ em algum conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, então, para uma dada condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D$, há uma única solução $\mathbf{x}(t)$ em algum intervalo $(-\tau, \tau)$ em torno de $t = 0$. Essa é a condição de existência e unicidade que, em outras palavras, dada uma condição inicial, garante uma única solução num intervalo de tempo se $\mathbf{f}$ é suave (Strogatz, 1998, p. 148).

De modo geral, as equações 1.1 (ou 1.2) são difíceis ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente, principalmente quando da existência de termos não-lineares, tais como $x_1 x_2$ ou $\cos x_1$. O sistema dinâmico é dito então ser *não-linear*, pois não obedece ao princípio da superposição: se $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são soluções, então qualquer combinação linear $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ também o é (Chen, 1998). Com o progresso computacional, elas passaram a ser analisadas numericamente, porém informações qualitativas são freqüentemente mais importantes e mais fáceis de se intuir que soluções particulares. Uma visão geométrica é natural e permite abstrair suas características mais interessantes.

Tomemos cada uma das N variáveis $x_1, \ldots, x_N$ como um eixo no *espaço de estados* ou *espaço de fase* de N dimensões. Logo, cada estado $\mathbf{x}(t)$ representa um único ponto nesse espaço, conhecido como *ponto de fase*, e sua evolução temporal descreve uma *trajetória* ou uma *órbita* (Figura 1.1). De acordo com o teorema da unicidade há apenas uma solução para uma dada condição

[1] Autônomo: em que não há dependência temporal explícita.

inicial. Como todo ponto em D pode ser uma condição inicial, as trajetórias não podem se cruzar (nem uma trajetória consigo mesma nem com outra distinta), pois senão no ponto de cruzamento haveria duas soluções possíveis para $\mathbf{x}(t)$.

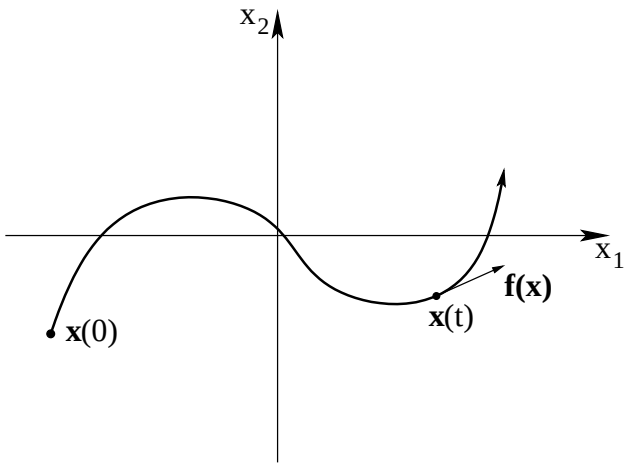


Figura 1.1: Trajetória num espaço de fase bidimensional.

Um modo de se visualizar o comportamento da equação 1.1 (ou 1.2) no espaço de fase é interpretá-la como um *campo vetorial* ou *fluxo*: cada ponto $\mathbf{x}$ de um fluido imaginário num espaço n-dimensional possui velocidade $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Portanto $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é tangente no ponto $\mathbf{x}$ à órbita com condição inicial $\mathbf{x}_0$. Representando as trajetórias para várias condições iniciais obtemos o *retrato de fase*, nosso principal "instrumento" para análise de sistemas não-lineares e caos (Figura 1.2).

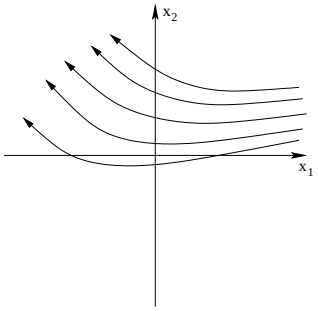


Figura 1.2: Retrato de fase bidimensional.

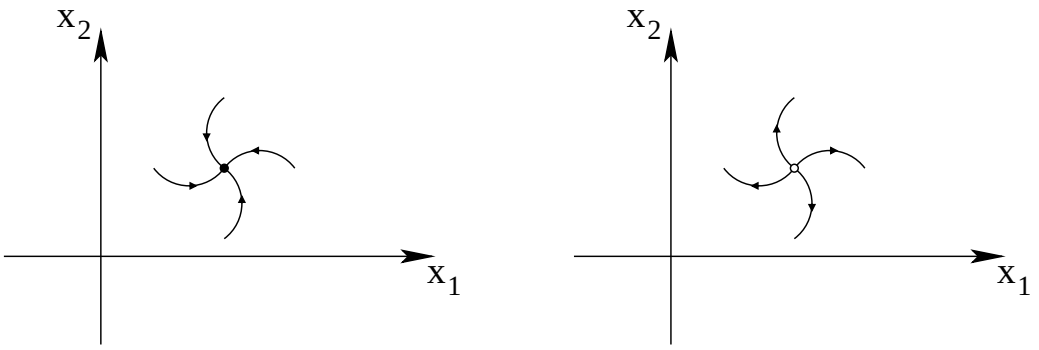
Em sistemas experimentais, dificilmente eliminamos completamente o atrito e outras formas de perda de energia. O sistema é dito então ser *dissipativo* ou *não-conservativo*; caso contrário é chamado *hamiltoniano* ou

conservativo. Nosso interesse reside sobretudo nos dissipativos. Eles perdem energia e portanto tendem a um comportamento estacionário. O volume V N-dimensional contido numa superfície S $(N-1)$-dimensional do espaço de fases sofre contração e eventualmente colapsa num espaço de dimensão menor que N. Portanto, seu volume tende a zero e as trajetórias tendem para os *atratores*. A evolução do volume $V(t)$ é dada por (Strogatz, 1998, p. 312):

$$\dot{V} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV \tag{1.3}$$

Se $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$ na média sobre o espaço de estados, então há contração e pelo menos um atrator. Observe que se $\nabla \cdot \mathbf{f}$ é negativo e aproximadamente constante, então o volume decresce exponencialmente. O conjunto de condições iniciais cujas trajetórias tendem para um atrator é chamada *bacia de atração* para aquele atrator. Se há mais de um atrator, a interface entre as bacias é chamada *separatriz*.

Existem pontos no retrato de fase determinantes na evolução de um sistema dissipativo: os *pontos fixos* (também chamados pontos *de equilíbrio*, *estacionários*, *críticos* ou *singulares*). Como o nome diz, são pontos de estagnação do fluxo, onde sua velocidade é nula — $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Utilizaremos a notação $\mathbf{x}^*$ para representar tais pontos. Portanto, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e, se a condição inicial do sistema é um ponto de equilíbrio, seu estado permanecerá o mesmo indefinidamente, isto é, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$.



(a) (b)

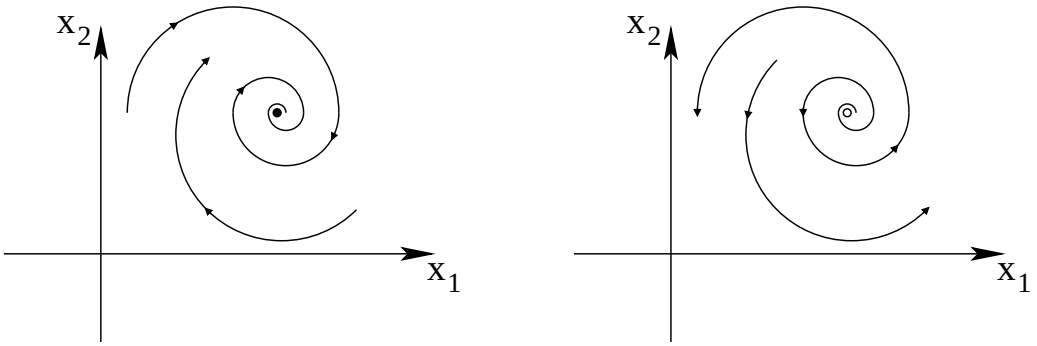
Figura 1.3: (a) Nó estável e (b) instável em espaço bidimensional.

A trajetória de um ponto de fase evolui de acordo com a estabilidade dos pontos fixos locais. Na prática, estamos interessados apenas em pontos fixos robustos a pequenas variações do campo vetorial, significando que pequenas perturbações na forma ou posição de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ não alteram a topologia do retrato de fase — neste caso chamado *estruturalmente estável*. Para tais casos, os pontos fixos são chamados *hiperbólicos* e podem ser classificados em:

- *Atratores* (ou *sorvedouros*): as trajetórias suficientemente próximas convergem para tais pontos. Em duas ou mais dimensões podem ser *nós estáveis* (Figura 1.3 (a)) ou *espirais estáveis* (Figura 1.4 (a)). Por convenção são representados por pontos cheios (•) ou linhas cheias nas figuras;

- *Repulsores* (ou *fontes*): as trajetórias suficientemente próximas divergem de tais pontos. Em duas ou mais dimensões podem ser *nós instáveis* (Figura 1.3 (b)) ou *espirais instáveis* (Figura 1.4 (b)). Por convenção são representados por pontos vazios (∘) ou linhas tracejadas nas figuras;

- *Pontos de sela*: as trajetórias convergem ou divergem para/de tais pontos, dependendo da região (Figura 1.5).



(a) (b)

Figura 1.4: (a) Espiral estável e (b) instável em espaço bidimensional.

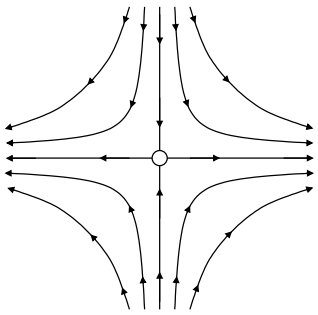
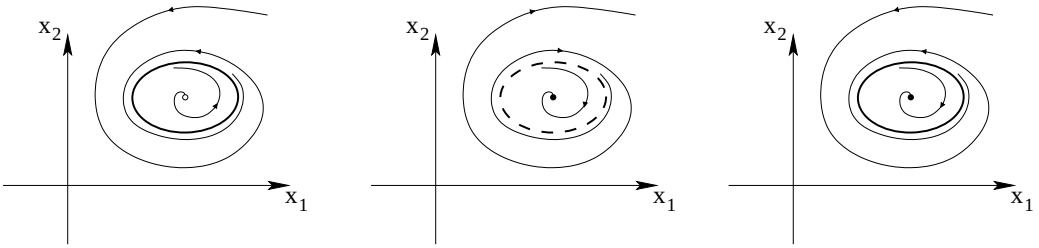


Figura 1.5: Ponto de sela em espaço bidimensional.

Em espaços de estado de duas ou mais dimensões é possível haver comportamento periódico, em que um ponto de fase "circula" continuamente por

uma órbita fechada chamada *ciclo*. Se o ciclo é isolado, ou seja, se as trajetórias vizinhas não são fechadas, temos um *ciclo limite*. Neste caso, se as trajetórias vizinhas se aproximam, o ciclo limite é *estável* (Figura 1.6 (a)); se se afastam, é *instável* (Figura 1.6 (b)); se as trajetórias de uma região (do "interior" do ciclo, por exemplo) se aproximam e as da outra se afastam, é *semi-estável* (Figura 1.6 (c)).



(a) (b) (b)

Figura 1.6: Ciclo limite (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável em espaço bidimensional.

Ciclos limite e pontos fixos esgotam as possibilidades dos atratores em espaços de fase bidimensionais (plano de fase). Mais precisamente, de acordo com o *Teorema de Poincaré-Bendixson*, qualquer trajetória que se inicia numa região R fechada, limitada e invariante[2] do plano de fase tende a um ponto fixo ou um ciclo limite quando $t \to \infty$. Essa idéia é "topologicamente intuitiva" e possui uma conseqüência marcante na Dinâmica Não-Linear: caos não é possível no plano de fase.

O espaço de fases não existe apenas em coordenadas retangulares. Um sistema bidimensional com movimento oscilatório no tempo, como o pêndulo, pode ser analisado num espaço de estados cilíndrico (Figura 1.7 (b)). Sistemas que apresentam duas freqüências de oscilação podem ser representados na superfície de um toro cilíndrico (Figura 1.7 (c)), com uma variável sendo o ângulo axial e a outra o ângulo da seção circular. Um modo equivalente mais simples de se visualizar é através de um quadrado com condições de contorno periódicas e lados correspondendo às variáveis angulares (Figura 1.7 (a)). Uma trajetória que atinge um lado do quadrado continua no lado diametralmente oposto com mesmo valor da variável. Vejamos o caso simples (Strogatz, 1998, p. 274)

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2.$$

[2]Região Invariante R: qualquer trajetória que se inicia em R permanece em R todo o tempo.

No "quadrado de fase", as trajetórias são compostas por retas com inclinação $d\theta_2/d\theta_1 = \omega_2/\omega_1$. Se a razão é racional, digamos p/q, então θ_2 completa p revoluções no momento que θ_1 completa q revoluções. O movimento é periódico e a órbita é fechada (Figura 1.8). No toro, a trajetória lembra um nó com laços simétricos. Quando a razão ω_2/ω_1 é irracional a trajetória não fecha nunca e cobre densamente todo[3] o toro. O fluxo é dito então *quasi-periódico*.

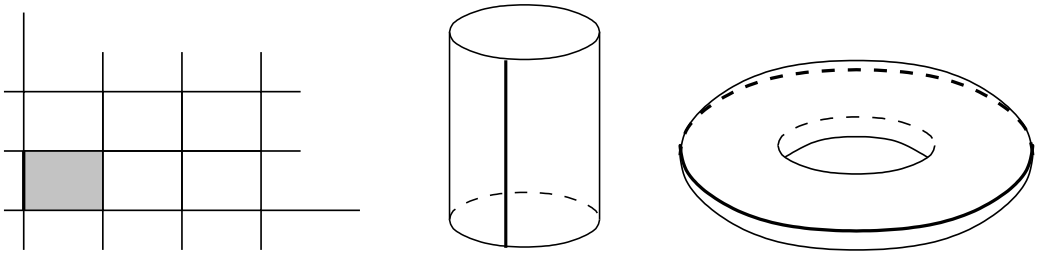


Figura 1.7: O toro é construído colando-se os dois lados de um quadrado, preservando sua orientação.

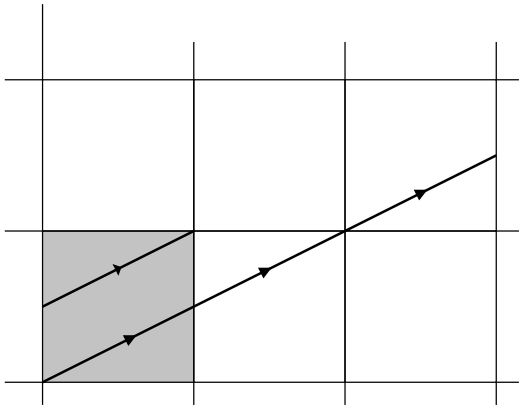


Figura 1.8: A razão entre as freqüências é racional, nesse caso 1/2.

Analisemos agora a estabilidade dos pontos fixos. Apesar de o poderoso ferramental oferecido pelos Sistemas Lineares não ser de muita utilidade em Sistemas Não-Lineares, temos como conseqüência do *Teorema de Hartman-Grobman*[4] que a estabilidade de um ponto fixo hiperbólico é equivalente à do

[3]Rigorosamente, não cobre todo, pois sempre há espaço entre trajetórias vizinhas, por menor a distância que houver.

[4]Teorema de Hartman-Grobman: "o retrato de fase local próximo a um ponto fixo é

sistema linearizado no ponto, sendo possível aplicar localmente os métodos de análise linear.

Para o caso unidimensional, a linearização é feita expandindo-se em série de Taylor a função $f(x)$ em torno do ponto fixo x^*:

$$\dot{\delta x} = \frac{d(x - x^*)}{dt} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + O[(\delta x)^2],$$

onde $\delta x = x - x^*$. Desde que x^* é um ponto fixo, $f(x^*) = 0$; desprezando os termos de ordem quadrada em δx, temos:

$$\dot{\delta x} = f'(x^*)\delta x, \tag{1.4}$$

cuja solução é

$$\delta x = \delta x_0 \, e^{\lambda t}, \tag{1.5}$$

com seu valor característico

$$\lambda \equiv f'(x^*). \tag{1.6}$$

Uma perturbação num sistema unidimensional que se encontra num estado estacionário é amplificada exponencialmente quando $\lambda > 0$ ou atenuada exponencialmente quando $\lambda < 0$x. No retrato de fase, as trajetórias se aproximam do ponto fixo — atrator — para $\lambda < 0$ ou se afastam — repulsor — para $\lambda > 0$. Caso $\lambda = f'(x^*) = 0$, x^* é um ponto *não-hiperbólico* ou *degenerado*, com retrato de fase estruturalmente instável, e é necessário analisar a segunda derivada $f''(x^*)$.

λ é chamado *expoente de Lyapunov*, e é válido apenas para uma região próxima do ponto fixo analisado. É possível generalizar sua definição para qualquer ponto do espaço de fase. Assim, para duas trajetórias inicialmente próximas distantes de δ_0, com separação $\delta(t)$ depois de um tempo t, define-se o expoente de Lyapunov λ como

$$\delta(t) = \delta_0 \, e^{\lambda t}. \tag{1.7}$$

Seu valor depende da condição inicial considerada ($\lambda = f'(x_0)$, com x_0 sendo o ponto inicial de uma das trajetórias). Na prática seu valor é uma média sobre uma dada trajetória e é fundamental para se quantificar a sensibilidade de um sistema dinâmico às condições iniciais, particularmente para caracterizar o comportamento caótico.

Para o caso N-dimensional, a generalização da Equação 1.4 é dada por:

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = J \left[\mathbf{f}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}^*} \delta \mathbf{x}, \tag{1.8}$$

topologicamente equivalente ao retrato de fase da linearização". Veja (Strogatz, 1998, p. 155)

com $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ e

$$J\left[\mathbf{f}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}^*} \equiv \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{array} \right)_{x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*} \tag{1.9}$$

é a matriz Jacobiana no ponto fixo $\mathbf{x}^*$. Como no caso unidimensional, a solução é exponencial e os valores característicos (autovalores) do Jacobiano são dados pelo determinante

$$\det\left(J - \lambda \mathrm{I}\right) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} - \lambda \end{array} \right|_{x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*} = 0. \tag{1.10}$$

Fizemos a simplificação de notação $J \equiv J\left[\mathbf{f}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}^*}$; I é a matriz identidade de ordem n. Os zeros do polinômio $\det\left(J - \lambda \mathrm{I}\right)$ de grau N determinam N autovalores λ_i, $i = 1, ..., N$. Os pontos fixos podem ser classificados de acordo com a localização dos λ_i no plano complexo:

- Nó estável: todos os autovalores são reais e negativos (Figura 1.9 (a));
- Nó instável: todos os autovalores são reais e positivos (Figura 1.9 (b));

Figura 1.9: Representação no plano complexo dos autovalores de nó bidimensional (a) estável e (b) instável

- Espiral estável: todos os autovalores possuem parte real negativa, porém há pelo menos um par complexo conjugado (com parte imaginária não nula) (Figura 1.10 (a));
- Espiral instável: todos os autovalores possuem parte real positiva, porém há pelo menos um par complexo conjugado (com parte imaginária não nula) (Figura 1.10 (b));

Figura 1.10: Representação no plano complexo dos autovalores de espiral bidimensional (a) estável e (b) instável

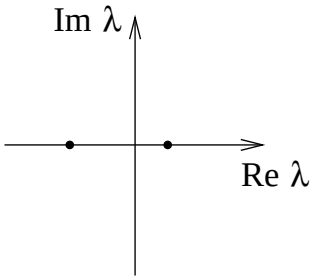


Figura 1.11: Representação no plano complexo dos autovalores de ponto de sela bidimensional.

- Ponto de sela: todos os autovalores são reais, algum(ns) positivo(s) outro(s) negativo(s) (Figura 1.11);

Sob outra perspectiva, λ_i também podem ser vistos como os pólos da transformada de Laplace de $\delta\mathbf{x}(t)$, dada por

$$\delta\mathbf{X}(s) \equiv \mathcal{L}\left[\delta\mathbf{x}(t)\right] = \left(s\mathrm{I} - J\right)^{-1}\delta\mathbf{x}(0),$$

e a análise é feita no domínio da freqüência complexa s (Torres, 2000; Chen, 1998).

Os expoentes de Lyapunov no caso multidimensional são definidos como a taxa de contração ou expansão dos eixos de uma hiper-esfera à medida que o tempo evolui. Seja δ_0 o raio inicial da esfera e δ_i o eixo principal i do hiper-elipsóide gerado pela deformação da hiper-esfera (Figura 1.12). Então

haverá N expoentes de Lyapunov definidos como[5]:

$$\delta_i(t) = \delta_0\, e^{\lambda_i t}, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N. \tag{1.11}$$

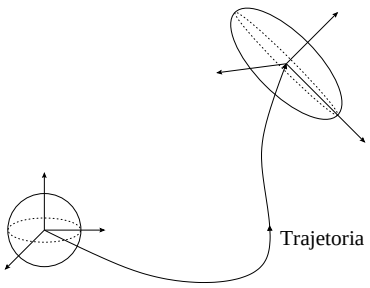


Figura 1.12: Os expoentes de Lyapunov para o espaço de estados de três dimensões são as taxas de expansão dos três eixos da elipse.

1.2.1 Bifurcação

A estrutura das órbitas de um fluxo pode mudar com a variação de um parâmetro. A isso dá-se o nome *bifurcação*. Existem basicamente dois tipos: *bifurcação local*, no qual pontos fixos e ciclos limites podem ser criados ou destruídos ou sua estabilidade pode mudar; e *bifurcação global*, que ocorre numa escala maior do espaço de fase, podendo envolver mudanças em bacias de atração, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas, ou outras estruturas que se extendem sobre regiões significantes do espaço de estados, não sendo suficiente a análise de estabilidade linear. Em ambos os casos, um valor do parâmetro para o qual seu retrato de fase não é estruturalmente estável é chamado *valor da bifurcação* e o fluxo é dito estar num *ponto de bifurcação*. Um modo de se "ver" a bifurcação consiste em plotar (quando possível) o retrato de fases para os três valores representativos do parâmetro: antes, no ponto da bifurcação e depois. Para o caso unidimensional, como o espaço de fase é uma linha, pode-se "condensar" infinitos retratos de fase com infinitos valores do parâmetro numa "pilha" contínua e o resultado é um *diagrama de bifurcação*. Mais precisamente, desenha-se curvas no plano $(r,\, x)$ representando os pontos de equilíbrio x^* para cada valor do parâmetro r; portanto, curvas que obedecem a equação $\dot{x} = f_r(x) = 0$ (o subscrito serve apenas

[5]Por conveniência de notação, a letra λ é mantida tanto para o expoente de Lyapunov como para o autovalor da matriz Jacobiana, porém são coisas distintas, pois o expoente é a taxa média de expansão sobre uma trajetória, enquanto o autovalor é a taxa de expansão próximo ao ponto fixo

para explicitar a dependência da função com r). Os pontos de equilíbrio estáveis são representados com linha cheia, enquanto os instáveis com curvas tracejadas.

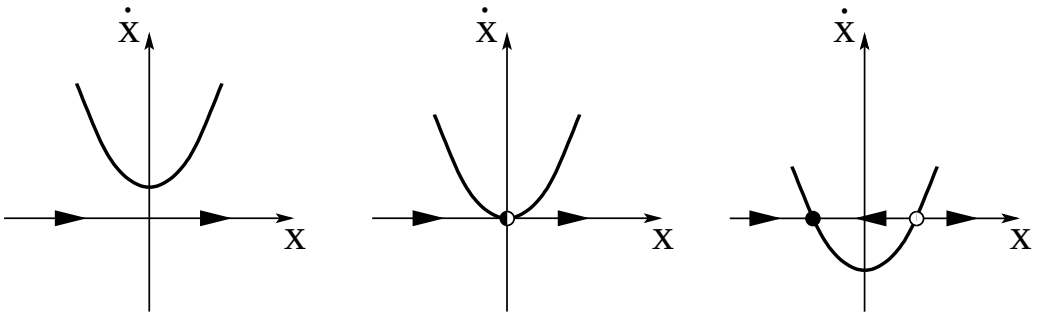
As equações que descrevem a dinâmica na vizinhança de um ponto fixo e próximo de uma bifurcação podem ser classificadas em formas padronizadas, chamadas *formas normais*. Pode-se chegar a elas a partir de um modelo do sistema e expandindo seus termos não-lineares em série de Taylor em torno do ponto fixo.

Os principais tipos de bifurcações são unidimensionais: sela-nó, transcrítica e forquilha. Além destas, uma importante bifurcação em dimensões maiores é a Hopf. Analisemos rapidamente cada uma.

A bifurcação sela-nó possui a forma normal

$$\dot{x} = r + x^2.$$

Para qualquer $r > 0$ não há pontos fixos e o fluxo é para a direira (Figura 1.13 (a)). Para $r = 0$ a origem é um ponto fixo não-hiperbólico ($f'(0) = 0$) *semi-estável* (Figura 1.13 (b)), com o fluxo para a direita em ambos os lados do ponto. Para $r < 0$ há dois pontos fixos: $-\sqrt{-r}$ (estável) e $\sqrt{-r}$ (instável), com o sentido do fluxo para a direita quando a "velocidade" $\dot{x} = f(x) > 0$ (ou seja, antes do primeiro ponto e após o segundo) e para a esquerda quando $\dot{x} = f(x) < 0$ (entre os dois pontos fixos na Figura 1.13 (c)). Qualquer pertubação no parâmetro quando $r = 0$ pode ocasionar dois pontos fixos ou nenhum: é um ponto de bifurcação, pois há mudança drástica do comportamento do sistema. Fazendo-se $r = -x^2$ pode-se contruir seu diagrama de bifurcação.



(a) (b) (c)

Figura 1.13: Retratos de fase unidimensionais para bifurcação sela-nó (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação.

A bifuração sela-nó também é chamada bifurcação dobra (*fold*), tangente, *turning point* ou mesmo céu-azul, pois, com a variação do parâmetro de

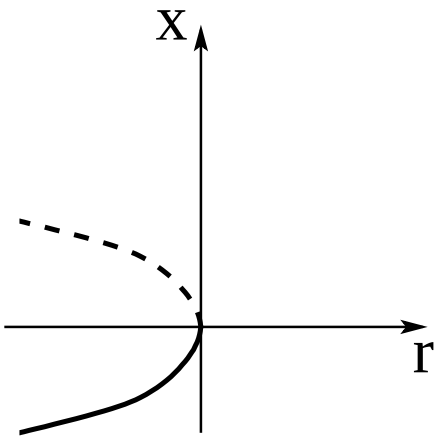
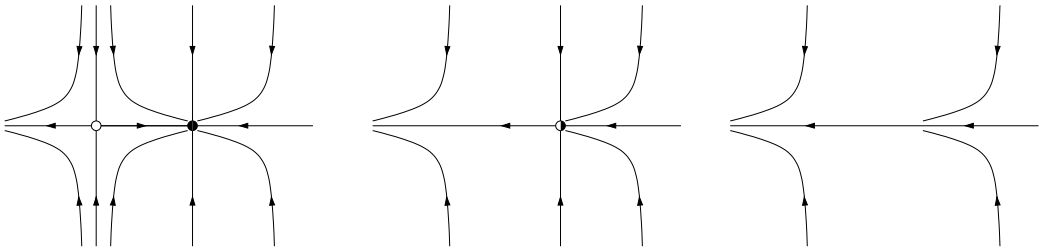


Figura 1.14: Diagrama de bifurcação sela-nó.

positivo para negativo, dois pontos fixos surgem "*out of the clear blue sky*". O nome sela-nó vem do sistema produto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

A segunda equaçào é linear, com $x_2 \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$. Logo, todas as órbitas se aproximam do eixo x_1 e a dinâmica é governada pela primeira equação. Quando $r < 0$, o ponto fixo estável do sistema unidimensional agora é um nó estável e o ponto instável torna-se um ponto de sela (Figura 1.15 (a)). Quando $r = 0$ os dois pontos coalescem em um (Figura 1.15 (b)) e desaparecem para $r > 0$ (Figura 1.15 (c)).



(a) (b) (c)

Figura 1.15: Retrato de fase para para o sistema bidimensional da equação 1.12: (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação sela-nó

.

A próxima bifurcação a ser analisada é a bifurcação transcrítica, que possui forma normal

$$\dot{x} = rx - x^2,$$

e caracteriza-se por mudança de estabilidade de um ponto fixo (Figura 1.17). Sua equação parece com a equação logística[6], mas sem a restrição do domínio, podendo assumir valores negativos e positivos.

A origem sempre é um ponto fixo. Para valores de $r < 0$, ela é estável, havendo outro ponto fixo em $x^* < 0$, porém instável (Figura 1.16 (a)). No ponto de bifurcação, $r = 0$, $x^* = 0$ é o único ponto fixo, semi-estável (Figura 1.16 (b)). Para $r > 0$ a origem agora é instável, com o outro ponto $x^* > 0$ estável (Figura 1.16 (c)).

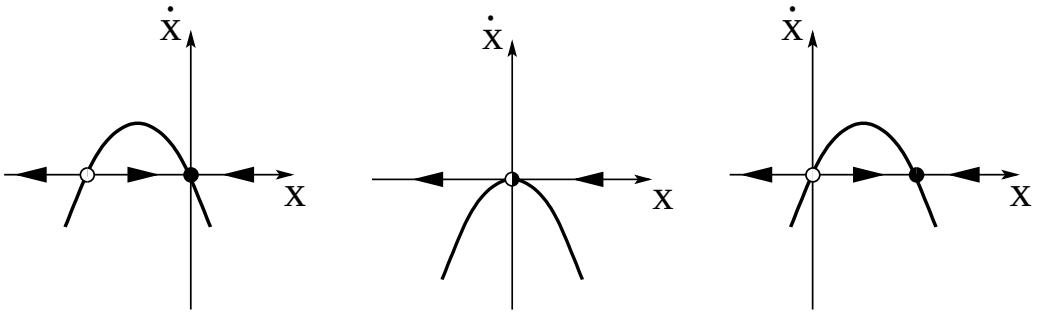


Figura 1.16: Retratos de fase unidimensionais para bifurcação transcrítica (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação.

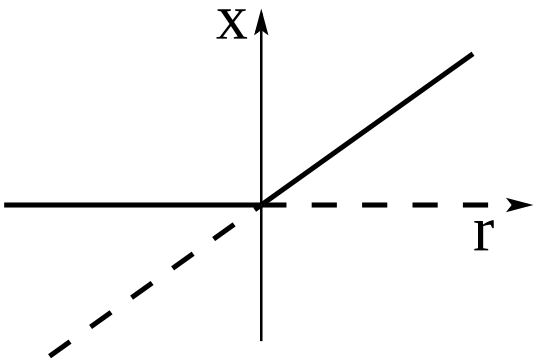


Figura 1.17: Diagrama de bifurcação transcrítica.

[6] $\dot{x} = rx(1 - x)$, $0 < x < 1$.

Outro tipo de bifurcação é a forquilha, e se apresenta sob duas formas: *supercrítica* e *subcrítica*. A supercrítica possui forma normal

$$\dot{x} = rx - x^3.$$

Com o valor do parâmetro r negativo, há apenas um ponto fixo $x^* = 0$, assintoticamente estável (Figura 1.18 (a)). O aumento do parâmetro equivale a mudar a inclinação na origem. Com $r = 0$ (o valor da bifurcação), o ponto fixo $x^* = 0$ é não-hiperbólico, mas ainda estável (Figura 1.18 (b)). Para $r > 0$, dois pontos fixos estáveis desdobram-se da origem, deixando-a instável (Figura 1.18 (c)). O nome "forquilha" vem do diagrama de bifurcação, apresentado na Figura 1.19.

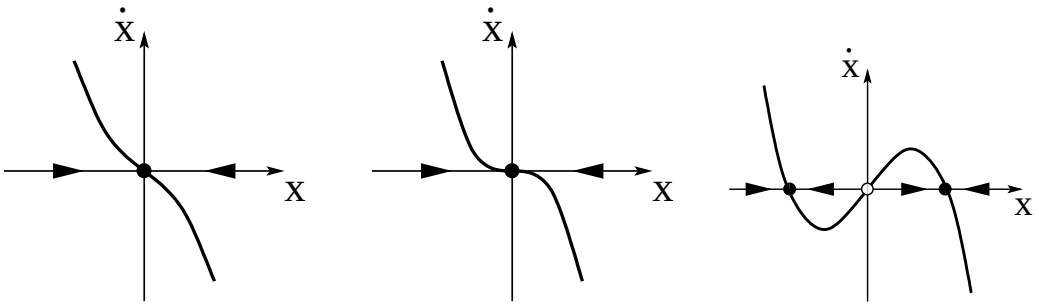


Figura 1.18: Retratos de fase unidimensionais para bifurcação forquilha (a) antes, (b) no instante e (c) depois da bifurcação.

A bifurcação forquilha subcrítica possui a forma normal

$$\dot{x} = rx + x^3. \tag{1.13}$$

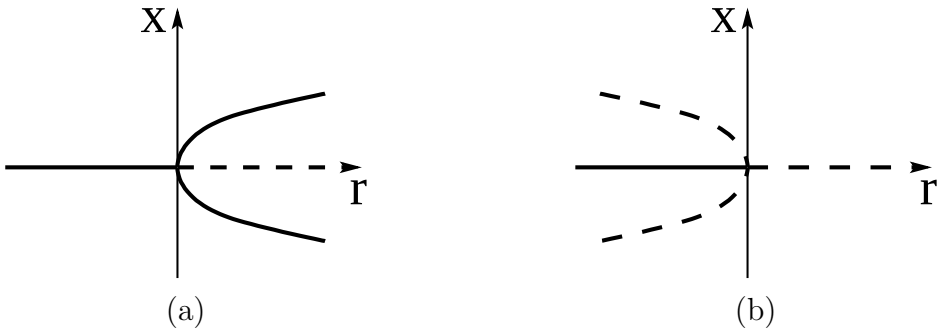


Figura 1.19: Diagrama de bifurcação forquilha (a) supercrítica e (b) subcrítica.

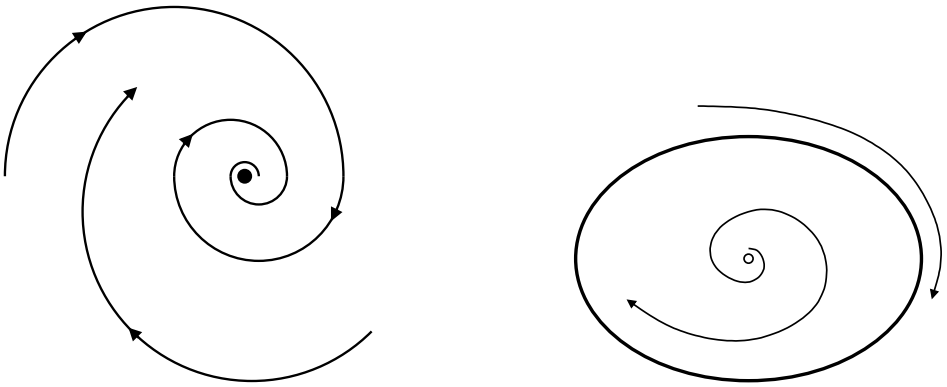


Figura 1.20: Retrato de fase para bifurcação Hopf supercrítica (a) antes e (b) depois da bifurcação.

De modo inverso ao supercrítico, com o parâmetro r negativo há três pontos fixos: a origem $x^* = 0$ estável e dois pontos simétricos instáveis. Com o aumento de r os pontos instáveis se aproximam da origem e a englobam para $r > 0$, deixando-a instável. Diferentemente do caso supercrítico, o fluxo diverge para o infinito se iniciar-se fora da região interna da parábola. Um modelo mais realista para sistemas físicos consiste em adicionar-se o termo estabilizador $-x^5$ à equação 1.13.

As bifurcações anteriores podem ocorrer no plano de fase ou em espaços com dimensões maiores, porém sempre com o essencial ocorrendo num espaço unidimensional. A bifurcação Hopf só é possível em dimensões maiores que 1. Consiste basicamente na passagem simultânea dos autovalores (complexos conjugados) do Jacobiano pelo eixo imaginário. No espaço de fase há uma colisão de um ciclo limite com um ponto fixo (ou, inversamente, o nascimento de um ciclo limite a partir de um ponto fixo), havendo transferência de estabilidade.

Como a bifurcação forquilha, a bifurcação Hopf existe nas formas supercrítica e subcrítica. Na supercrítica um ciclo limite estável nasce de um nó estável (Figura 1.20 (a)), deixando-o instável (Figura 1.20 (b)). Na subcrítica um ciclo instável colapsa num nó estável (Figura 1.21 (a)), restando apenas um nó instável (Figura 1.21 (b)). Após a bifurcação, as trajetórias tendem a se afastar abruptamente para um ponto fixo, ciclo limite ou, no caso de sistemas de dimensão 3 ou mais, para um atrator caótico. Isso é exemplificado no ciclo mais externo da Figura 1.21.

Figura 1.21: Retrato de fase para bifurcação Hopf subcrítica (a) antes e (b) depois da bifurcação.

1.2.2 Caos em fluxos

Nos últimos anos, surpreendentes progressos na Dinâmica Não-Linear revelaram que existe *caos na ordem* e *ordem no caos* (Nussenzveig, 1991). Sistemas aparentemente simples, com equações determinísticas, podem, sob certas condições, se comportar de modo imprevisível a longo prazo. Mesmo sem nenhum componente aleatório, sua evolução temporal pode parecer errática, "ruidosa", com largo espectro de potência. Dizemos então que a dinâmica é *caótica*.

Para sermos mais precisos (Strogatz, 1998), *caos* é um comportamento aperiódico em um sistema determinístico, de longa duração e com sensível (exponencial) dependência das condições iniciais. Conforme o Teorema de Poincaré-Bendixson, caos não é possível em fluxos com duas dimensões; como não há nenhuma restrição a partir daí, somente é possível à partir de fluxos com três dimensões.

"Comportamento aperiódico" significa que uma trajetória limitada num volume finito do espaço de fase não converge para um ponto fixo ou um ciclo periódico (ou quasi-periódico), mas sim para um *atrator estranho*, que se caracteriza por haver uma divergência exponencial entre duas trajetórias suficientemente próximas, traduzindo-se em pelo menos um expoente de Lyapunov (médio) positivo. Em sistemas dissipativos o volume de dimensão N no espaço de fase colapsa para uma "superfície", nesse caso o atrator estranho, de dimensão menor que N e, além disso, não-inteira, chamada *dimensão fractal*.

Boa parte dos processos naturais podem ser modelados utilizando-se tempo contínuo (equações diferenciais ou fluxos). Entretanto, em sistemas dissipativos multidimensionais limitados no espaço de fase se tornam efetivamente unidimensionais, pois o volume no espaço de fase diminui a diferentes taxas em diferentes direções de acordo com os expoentes de Lyapunov; a direção

da convergência mais lenta define uma curva unidimensional ou um conjunto finito de pontos que conterá o atrator. Isso permite reduzir a análise a mapas unidimensionais. Daí a *universalidade* na transição ou *rota para caos* quando da variação de um parâmetro de controle (Hilborn, 1994). Pode-se classificar essas rotas de acordo com o tipo de bifurcação: via *bifurcação local* ou via *bifurcação global*.

Abaixo segue uma tentativa de classificação dos vários tipos de rotas dentro dessas duas classes.

Via bifurcação local

- Cascata de dobramento de período de Feigenbaum
- Quasi-peridicidade
- Intermitências de Pomeau-Manneville
  - Tipo I: bifurcação tangente
  - Tipo II: bifurcação Hopf
  - Tipo III: bifurcação dobramento de período inverso

Via bifurcação global

- Transiente caótico
- Crise

Essas rotas para o caos serão melhor estudadas no contexto de sistemas de tempo discreto, na próxima seção. Por hora veremos formas de se reduzir a dimensão na análise de um sistema de tempo contínuo.

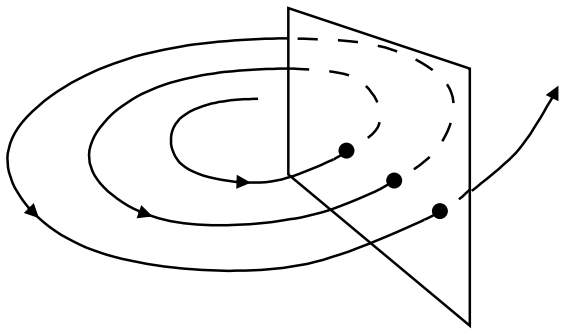


Figura 1.22: Seção de Poincaré para o espaço de estados de três dimensões.

Uma *seção de Poincaré* é uma superfície $(N-1)$-dimensional[7] na qual as trajetórias a interceptam transversalmente. O *mapa de Poincaré*, mape-

[7]Uma linha para um fluxo bidimensional, uma superfície para um fluxo tridimensional, etc.

amento entre as consecutivas interseções de uma trajetória com a seção de Poincaré, reduz a análise de um fluxo N-dimensional para a de um *mapa* $(N-1)$-dimensional (veja Seção 1.3).

De outra forma, Lorenz sugeriu utilizar os máximos da série temporal de uma das variáveis de estado (contínua) para se obter uma função $x_{n+1} = f(x_n)$, em que x_n são os máximos da variável contínua x. Na verdade, a função resultante descrevendo o mapa de próximo máximo não é exatamente bem definida, mas possui uma espessura não-nula decorrente da estrutura fractal do atrator. Esse método reduz um fluxo multidimensional a um mapa unidimensional (o mapa de Lorenz), valendo-se do fato descrito acima.

1.3 Mapas

Mapas, conhecidos também como *mapas iterados*, *equações diferenças* ou *relações de recursão*, são representações para sistemas de tempo discreto e possuem a forma geral (N-dimensional):

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}\left(\mathbf{x}_n\right). \tag{1.14}$$

Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0$, os pontos $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ... definem uma *órbita* ou *trajetória*.

A noção de ponto fixo em fluxo se estende para os mapas. Num ponto fixo não há movimento com a evolução (incremento de n) do sistema, isto é:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}\left(\mathbf{x}^*\right).$$

A estabilidade de um ponto fixo é analisada de modo semelhante à feita anteriormente no fluxo. O Jacobiano novamente é dado pela equação 1.9:

$$J\left[\mathbf{M}\left(\mathbf{x}\right)\right]_{\mathbf{x}^*} \equiv \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} & \frac{\partial M_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial M_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_1} & \frac{\partial M_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial M_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_N}{\partial x_1} & \frac{\partial M_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial M_N}{\partial x_N} \end{array} \right)_{x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*}. \tag{1.15}$$

Seus autovalores λ_i definem a estabilidade dos pontos fixos considerados e são denominados *multiplicadores de Floquet*. Se $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., N$, o ponto fixo é estável (Figuras 1.23 (a) e (c)); se $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, ..., N$, o ponto é repulsor (Figuras 1.23 (b) e (d)); caso contrário é um ponto de sela (Figuras 1.23 (e) e (f)); $|\lambda_i| = 1$ exige uma análise não-linear.

Um ciclo limite obviamente define um ponto fixo no mapa de Poincaré. Então, a estabilidade do ciclo limite pode ser estudada pela estabilidade de um ponto fixo num mapa.

Os valores dos multiplicadores de Floquet podem ser conjugados complexos. Graficamente, a órbita se aproximaria ou divergiria de modo oscilante em torno do ponto fixo. Num mapa de Poincaré planar, por exemplo, a órbita (pontos cruzando o plano) estaria rodeando o ponto fixo à medida que se aproxima ou diverge. A estabilidade, no entanto, ainda é dada da mesma forma, tomando os valores absolutos e comparando com a unidade, e podemos representar no plano complexo os vários tipos de pontos fixos.

Particularmente importantes são os mapas unidimensionais (ou escalares):

$$x_{n+1} = M\left(x_n\right). \tag{1.16}$$

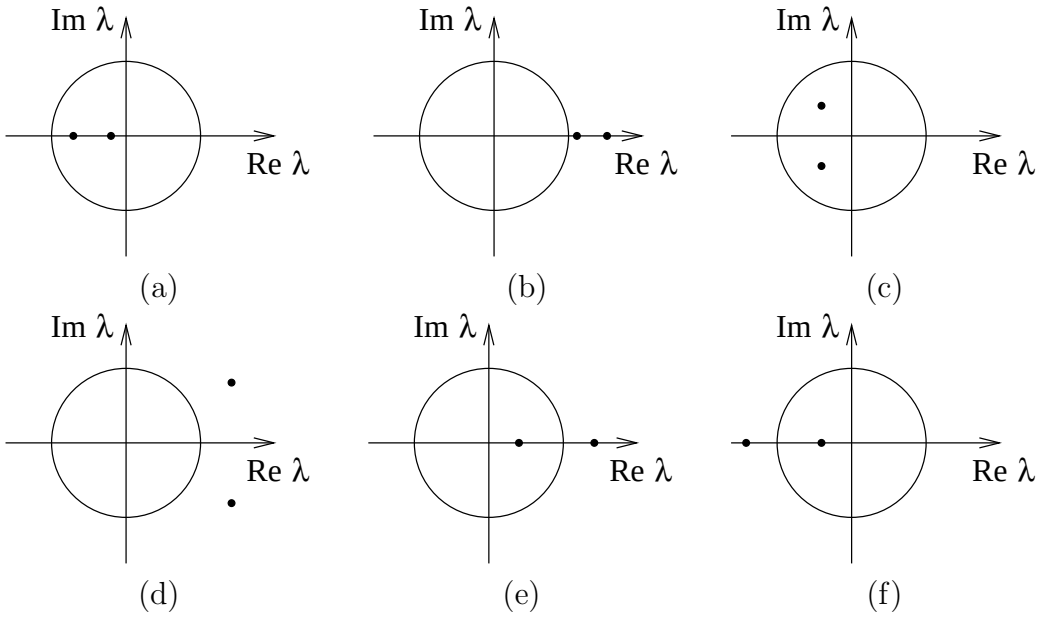


Figura 1.23: Multiplicadores de Floquet no plano complexo para ponto fixo em mapa bidimensional (ou para ciclo limite em mapa de Poincaré planar). (a) Nó estável; (b) nó instável; (c) espiral estável; (d) espiral instável; (e) e (f) ponto de sela

Em geral

$$x_{n+m} = \underbrace{M(M(M(\ldots(M}_{m \text{ vezes}}(x_n))))) \equiv M^m(x_n). \tag{1.17}$$

A existência de fronteiras limitando o espaço de estados disponível para as trajetórias convencionalmente se traduz no intervalo unitário [0, 1] para os mapas escalares, que são normalizados para se adequar a esse intervalo. Se o mapa é suave (contínuo e diferenciável) com $M(0) = M(1) = 0$ e possui um único máximo local (ou mínimo) dentro desse intervalo, chamado *ponto crítico*, então diz-se um *mapa unimodal*.

A solução de uma órbita com uma dada condição inicial pode ser obtida geometricamente por meio do *diagrama "stair-step"* (Hale e Koçak, 1991). Primeiro plotamos o gráfico da função $x_{n+1} = M(x_n)$ e a diagonal (a linha de 45^o). Acompanhe pelo gráfico da Figura 1.24 (a) ou 1.25 (a). A linha vertical partindo de x_0 encontra o gráfico de M em (x_0, x_1). A horizontal passando por este ponto intercepta a diagonal em (x_1, x_1). A vertical partindo deste ponto intercepta o eixo horizontal em x_1. Repetindo os mesmos passos podemos obter x_2, x_3, etc. É importante observar que os pontos fixos

da equação 1.16 correspondem aos pontos de interseção do gráfico de M com a diagonal.

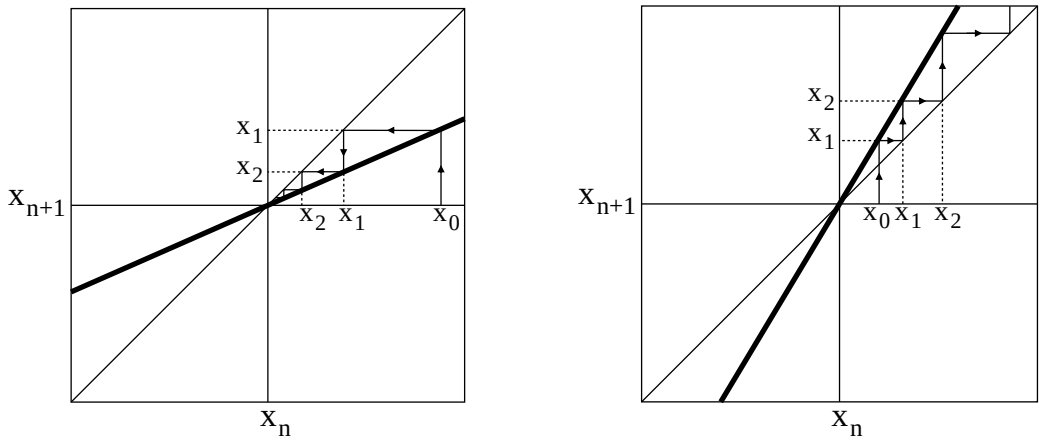


Figura 1.24: Diagramas *stair-step* próximos do ponto fixo com $M'(x^*) > 0$: (a) $|M'(x^*)| < 1$ (estável); (b) $|M'(x^*)| > 1$ (instável).

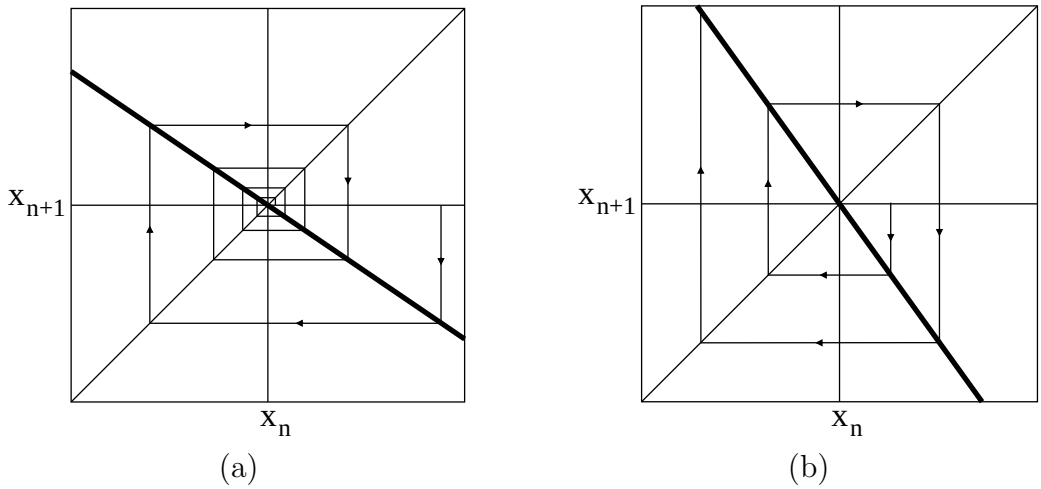


Figura 1.25: Diagramas *stair-step* próximos do ponto fixo com $M'(x^*) < 0$: (a) $|M'(x^*)| < 1$ (estável); (b) $|M'(x^*)| > 1$ (instável).

O estudo da estabilidade linear de um ponto fixo no mapa unidimensional é análogo ao caso contínuo e um caso particular do mapa multidimensional.

Dada sua importância, repetirei os passos aqui.

$$\begin{aligned} x_n &= x^* + \eta_n \\ x_{n+1} &= x^* + \eta_{n+1} = M\left(x^* + \eta_n\right) = M\left(x^*\right) + M'\left(x^*\right)\eta_n + O\left(\eta_n^2\right) \\ \eta_{n+1} &= M'\left(x^*\right)\eta_n + O\left(\eta_n^2\right) = \lambda\eta_n + O\left(\eta_n^2\right) \end{aligned}$$

onde λ é o multiplicador de Floquet para o caso unidimensional. Desprezando os termos de ordem quadrática em η_n, a solução é $\eta_1 = \lambda\eta_0$, $\eta_2 = \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0$, ..., $\eta_n = \lambda^n\eta_0$. O ponto fixo é *linearmente estável* quando $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que é possível apenas para $|\lambda| = |M'\left(x^*\right)| < 1$. Caso contrário, $|M'\left(x^*\right)| > 1$, o ponto fixo é *instável*. O caso marginal $|M'\left(x^*\right)| = 1$ é estruturalmente instável, x^* sendo chamado não-hiperbólico. Podemos evidenciar a estabilidade nas proximidades de um ponto fixo a partir do diagrama *stair-step* nas Figuras 1.24 e 1.25. Observe que $M'\left(x^*\right) < 0$ implica uma alternância direita/esquerda do ponto fixo, significando que o mapa não é monótono (Figura 1.25).

1.3.1 Bifurcação

Mapas escalares possuem riqueza não encontrada nas equações diferenciais unidimensionais. O fluxo unidimensional, por exemplo, não permite um ponto de fase oscilar em torno de um ponto fixo. Já para o mapa escalar, se o ponto fixo for instável, a trajetória divergirá. Para um mapa limitado, entretanto, essa divergência não deve acontecer indefinidamente, e a trajetória pode se aproximar de dois pontos, x_1^* e x_2^*. Como são pontos oscilantes da trajetória, devem satisfazer as relações $x_1^* = M\left(x_2^*\right)$ e $x_2^* = M\left(x_1^*\right)$. Portanto $x_1^* = M\left(M\left(x_1^*\right)\right) \equiv M^2\left(x_1^*\right)$. x_1^* (ou x_2^*) é dito ser um ponto periódico de período 2 (Figura 1.26 (b)).

A bifurcação no qual um ponto fixo estável, dito de período 1 (Figura 1.26 (a)), se torna instável concomitante ao surgimento de um ponto periódico de periodo 2 (Figura 1.26 (b)) é chamada bifurcação *flip*, *forquilha* ou por *dobramento de período* e ocorre para variações de um ponto fixo não-hiperbólico com $M'\left(x^*\right) = -1$ (Figuras 1.27).

Em geral, um ponto x^* é chamado periódico de período minimal n se $M^n\left(x^*\right) = x^*$, n sendo o menor inteiro positivo satisfazendo tal equação. Portanto x^* é um ponto fixo do mapa M^n e a análise de estabilidade feita anteriormente pode ser aplicada com a substituição de M por M^n. O conjunto de todas as iteradas de um ponto periódico é denominada *órbita periódica*.

Em mapas unimodais, além da flip existe mais um tipo geral de bifurcação, a *bifurcação tangente*

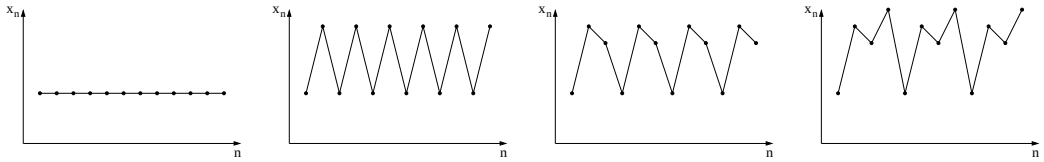


Figura 1.26: Órbitas de período: (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

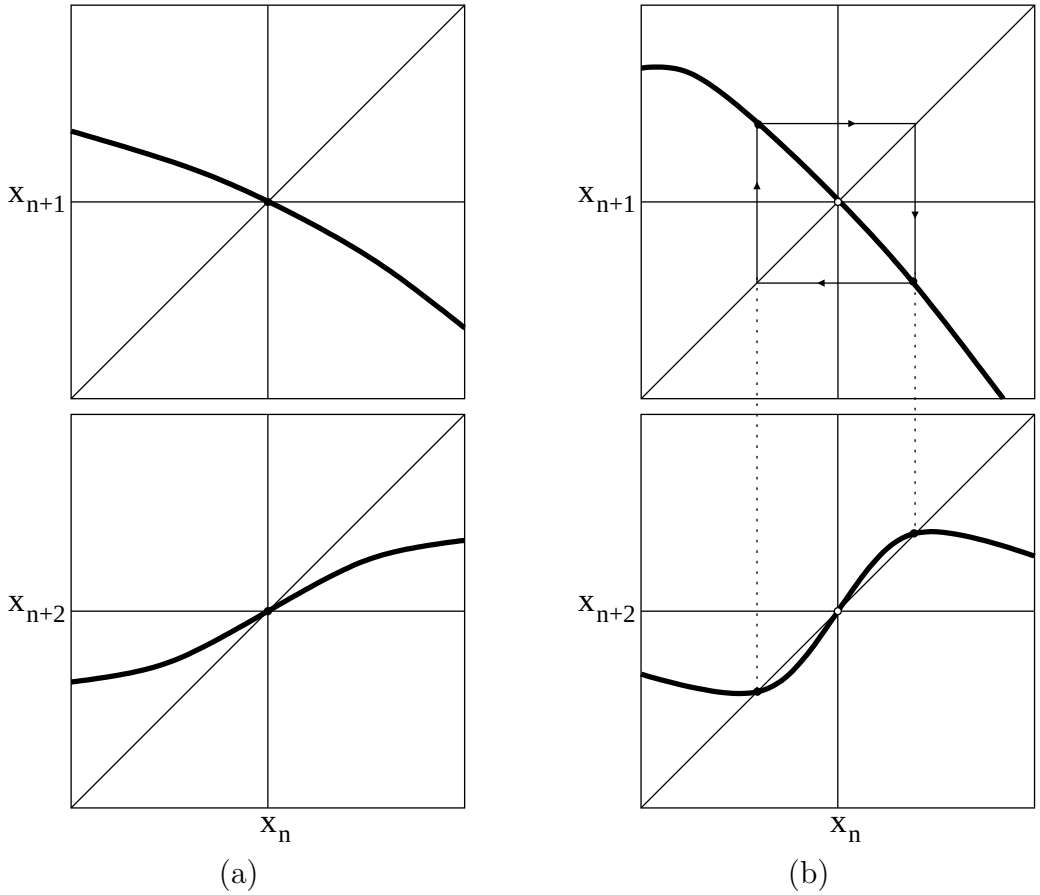


Figura 1.27: Mapas da primeira e segunda iterada (a) antes e (b) depois do dobramento de período.

A bifurcação tangente é análoga à bifurcação sela-nó vista anteriormente em fluxos. Conforme o parâmetro varia, a curva do mapa, inicialmente sem pontos fixos (Figura 1.29 (a)), intercepta a diagonal em um ponto com $M'(x) = 1$ (Figura 1.29 (b)) e, posteriormente, dois pontos fixos são criados, um estável e um instável.

Estendemos aqui para o mapa escalar o que foi feito na Seção 1.2 (Stro-

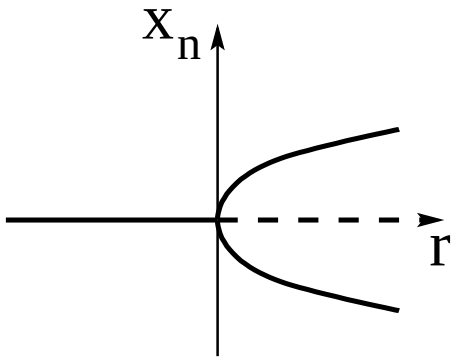


Figura 1.28: Diagrama de bifurcação por dobramento de período.

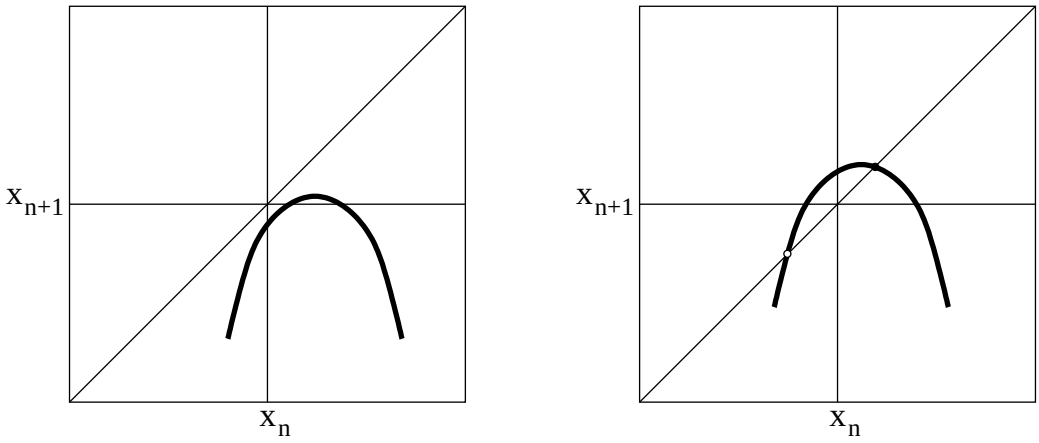


Figura 1.29: Mapas antes (a) e depois (b) da bifurcação tangente.

gatz, 1998; Hilborn, 1994) para derivar o expoente de Lyapunov.

Sejam x_0 e $x_0+\delta_0$ condições iniciais de duas órbitas com separação inicial $\delta_0 \to 0$. δ_n, a separação após a n-ésima iteração, é dada por

$$\delta_n = \left| M^n\left(x_0+\delta_0\right) - M^n\left(x_0\right)\right|.$$

Da definição de expoente de Lyapunov

$$\delta_n \equiv \delta_0\, e^{\lambda n},$$

temos que

$$\lambda = \frac{1}{n}\,\ln\frac{\left|M^n\left(x_0+\delta_0\right) - M^n\left(x_0\right)\right|}{\delta_0}.$$

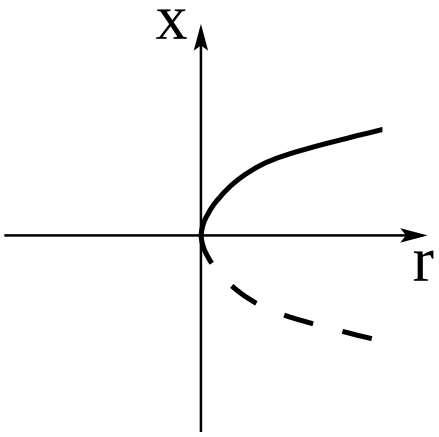


Figura 1.30: Diagrama de bifurcação tangente.

Tomando o limite $\delta_0 \to 0$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{n}\ln\left|\left(M^n\right)'(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{n}\ln\left|\prod_{i=0}^{n-1} M'(x_i)\right| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|M'(x_i)\right|.\end{aligned}$$

O expoente de Lyapunov para o mapa escalar é uma média logarítmica (do valor absoluto da derivada do mapa) desenvolvida em cada ponto da trajetória. O valor de n deve ser grande suficiente para haver convergência da média, porém não tão grande porque o intervalo de valores de x é limitado. λ depende de x_0, porém é o mesmo para uma dada bacia de atração. Na prática calcula-se a média para um conjunto de condições iniciais. Se seu valor é positivo, o atrator é caótico.

1.3.2 Caos em mapas

Mapas não possuem as restrições de continuidade encontradas nos fluxos, e podem apresentar caos já com apenas uma dimensão, contanto que sejam não-inversíveis. Para mapas inversíveis, caos só é possível em duas dimensões.

É bastante marcante o fato de uma ampla variedade de sistemas não-lineares (mesmo de alta dimensionalidade) apresentar transições para o caos *quantitativamente* semelhantes. Basta apresentar certas propriedades qualitativas, que e possível estimar propriedades quantitativas. "É suficiente es-

tudar o sistema mais simples exibindo este fenômeno para comprender o caso geral" (Feigenbaum, 1978). Essa *universalidade* é comparável às transições de fases em fenômenos críticos.

Conforme descrito na Seção 1.2, as rotas para o caos se dividem em duas grandes classes, via bifurcação global ou local. Vejamos as mais estudadas por bifurcação local.

Na cascata de dobramento de período, inicialmente um ponto fixo estável ($|M'| < 1$) se torna instável com o surgimento de um ponto periódico de período 2 equivalente a dois pontos fixo estáveis de M^2 ($|\,(M^2)'\,| < 1$). As inclinações $M' = -1$ e $(M^2)' = 1$ no ponto da bifurcação. Com a variação do parâmetro, a derivada de M^2 varia de 1 a -1, os dois pontos anteriormente estáveis em M^2 se tornam instáveis, e outra bifurcação por dobramento de período ocorre, de período 2 para período 4. Agora aparecem quatro pontos fixos estáveis no mapa M^4, com $(M^4)' = 1$ nos dois pontos da bifurcação. Esta seqüência de bifurcações por dobramento de período continua infinitamente.

Cada subseqüente intervalo Δ_n entre os valores dos parâmetros no qual a bifurcação para órbita de período 2^n ocorre é menor e diminui a uma taxa geométrica δ_n, que converge para o *número de Feigenbaum* δ. Esse parâmetro de convergência é universal, dado pelo valor

$$\delta \equiv \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = 4,66920161... \tag{1.18}$$

Feigenbaum originalmente derivou o valor de δ na equação 1.18 utilizando intervalos entre *ciclos super-estáveis* ao invés de intervalos entre bifurcações. Um ciclo super-estável ocorre quando o ponto fixo estável é o máximo do mapa ($M' = 0$), a meio caminho entre as bifurcações (que vai de 1 a -1). O parâmetro de ciclo super-estável é mais fácil de calcular em simulações, porém mais difícil em experimentos. No limite $n \to \infty$, as duas formas convergem. Entretanto, esses valores para δ são derivados apenas para mapas que podem ser aproximados localmente por uma função quadrática.

Outra observação de Feigenbaum é que a escala relativa de sucessivas bifurcações também tende para um número universal (Strogatz, 1998), com valor dado por $\alpha = 2,5029...$

A importância dos números de Feigenbaum é tamanha que Hilborn (1994) sugere chamá-los "Feigenvalores".

Essa cascata de dobramento de período culmina por fim numa órbita de período infinito: estamos no nascimento do caos. Isso significa que trajetórias suficientemente próximas divergem exponencialmente (expoente de Lyapunov positivo) ou que o espectro de potência é similar ao de um ruído

banda-larga. O aumento do parâmetro de controle, entretanto, não significa um "aumento" no caos (Cvitanović, 1989). Surpreendentemente há um número infinito de intervalos do parâmetro no qual o comportamento do sistema é periódico. Esses intervalos são denominados *janelas periódicas*. Em cada janela uma órbita periódica estável (junto com outra instável) nasce por bifurcação tangente e, com a variação do parâmetro, se bifurca por dobramento de período como antes, de acordo com os mesmos números de Feigenbaum. A maior dessas janelas surge com uma órbita de período 3, por isso dizemos ser uma *janela de período 3*.

Podemos analisar os pontos fixos de um mapa e de suas múltiplas iteradas em um diagrama de bifurcação como antes, representando as órbitas estáveis e as instáveis. Porém, para análise de dados numéricos ou experimentais, é mais fácil representar apenas os atratores. A representação do atrator com a variação do parâmetro é dada pelo *diagrama de órbita*, e facilmente podemos ver as cascatas de dobramento de período na rota para o caos e as janelas periódicas.

Seja a ordenação dos inteiros positivos da seguinte maneira (Hale e Koçak, 1991):

$$\begin{aligned} 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \ldots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \ldots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \ldots \\ \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \ldots \quad \ldots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1 \end{aligned} ,$$

onde $m \triangleright n$ significa m precede n. Expressamente, escreva todos os números ímpares exceto 1, seguidos por 2 vezes os números ímpares, 2^2 os números ímpares, 2^3 vezes, etc. Finalmente, escreva as potências de 2 em ordem decrescente, com 1 no fim. Essa lista inclui (Hale e Koçak, 1991), sem repetição, todos os inteiros positivos e é chamada *ordenamento de Sarkovskii*.

Suponha que o mapa M possui um ponto periódico de período minimal m. Se $m \triangleright n$ no ordenamento de Sarkovskii, então M também tem um ponto periódico de período minimal n. Como conseqüência, um mapa que apresenta órbita de período 3 para certo valor do parâmetro também possui infinitas órbitas periódicas de todos os possíveis períodos para o mesmo valor do parâmetro. Numa janela de período 3, entretanto, todas as outras órbitas são instáveis. Além disso, Li e York (1975) mostraram que "período 3 implica caos", significando que se uma órbita de período 3 existe, também existe um conjunto incontável e infinito de órbitas não-periódicas; se a órbita de período 3 for estável, essas órbitas não-periódicas são instáveis.

A rota para o caos por intermitência foi primeiro descrito por Manneville e Pomeau (1979); Pomeau e Manneville (1980), e, como a cascata de dobramento de período, é um comportamento universal no sentido de que qualquer sistema dissipativo de qualquer dimensionalidade pode ser modelado como

um mapa unidimensional. É caracterizado por períodos de regularidade interrompidos por irrupções caóticas.

Pouco antes do cenário caótico, com o sistema oscilando periodicamente, quando um parâmetro de controle é variado além de certo valor crítico começam a surgir ocasionalmente saltos abruptos de comportamento caótico imersos em "aparente periodicidade". Variando-se mais o parâmetro, esses períodos intermitentes de irregularidade demoram cada vez mais, ao mesmo tempo que se tornam mais freqüentes, até que finalmente o comportamento é "completamente" caótico[8]. O intervalo em que a órbita parece regular é chamado *fase laminar* e sua duração é aparentemente aleatória.

A passagem de uma órbita periódica para o caos significa que uma órbita estável é destruída ou se torna instável (Ott, 1997). Não obstante, não é substituída por outra órbita periódica estável nas proximidades, como ocorre na bifurcação por dobramento de período. As três possibilidades de bifurcações satisfazendo tais requisitos foram apresentadas por Manneville e Pomeau (1979): bifurcação tangente (ou sela-nó); bifurcação por dobramento de período inversa; e bifurcação Hopf subcrítica. Os três tipos podem ser distinguidos pela passagem de pelo menos um multiplicador de Floquet pelo círculo complexo unitário, respectivamente: pelo ponto real $+1$; -1; e simultaneamente por dois pontos conjugados complexos do círculo. Veja Figura 1.31. A cada um pode ser associado um tipo de intermitência, que os autores denominaram tipo I, II e III.

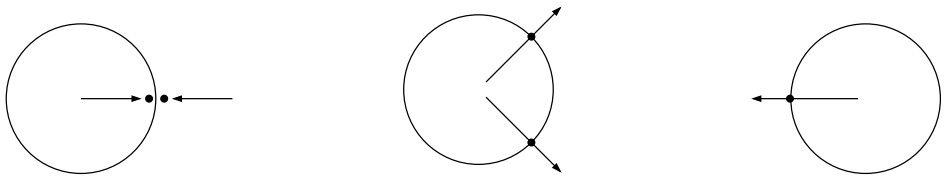


Figura 1.31: Multiplicadores de Floquet no plano complexo para intermitência tipo (a) I, (b) II e (c) III.

Na bifurcação tangente um autovalor instável real > 1 colide com um autovalor estável real < 1 no ponto $+1$. A intermitência então é dita ser do *tipo I*. Uma variável de estado em intermitência tipo I possui amplitude de oscilação na fase laminar aproximadamente constante, por isso também é chamada *intermitência estável*.

[8] As aspas em "aparente periodicidade" e "completamente" justificam-se por o sistema não estar em algo intermediário entre caos e ordem; simplesmente está caótico. De fato, o caos "surge" a partir do valor crítico do parâmetro.

Observando o mapa da m-ésima iterada para uma órbita de período m logo após a colisão dos pontos fixos (Figura 1.32), verifica-se a existência de um estreito canal entre o mapa e a diagonal, no qual as órbitas dispendem muitas iteradas ou muito tempo para atravessar. Os valores de x_n da órbita nesse canal são muito próximos, dando a impressão de um movimento periódico, até que a trajetória se afasta e percorre outras regiões do espaço de estados (não mostradas na figura), dando fim à fase laminar e início à "caótica". Eventualmente a trajetória retorna ao canal (não necessariamente o mesmo, podendo haver outros em outras regiões do espaço) e a fase laminar é reiniciada. Essa seqüência de reinjeção e irrupção caótica se repete indefinidamente, com período de fase laminar médio dependendo do parâmetro: infinito no momento da bifurcação e diminuindo à medida que o mapa se afasta da diagonal (Figura 1.32).

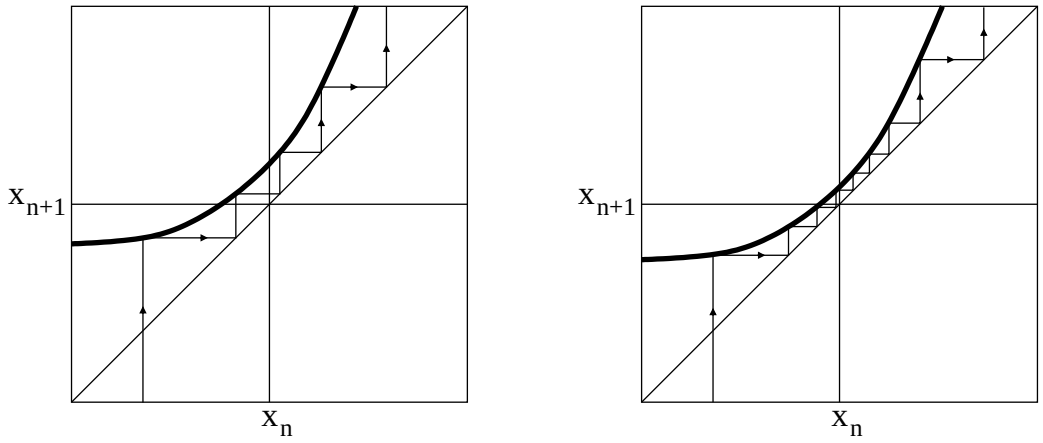


Figura 1.32: Canal entre mapa e diagonal próximo à bifurcação para dois valores do parâmetro. Na figura da direita, o canal é mais estreito e o tempo médio da fase laminar é maior.

A seguir deduziremos o número médio de iteradas $\bar{l}$ que a órbita passa dentro do canal para determinado valor do parâmetro r. $\bar{l}$ também é chamado comprimento médio das fases laminares. Essa dedução baseia-se em argumentos de escala (teoria de renormalização) apresentados por Guckenheimer e Holmes (1983) e Hirsch *et al.* (1982) e reproduzidos em Hilborn (1994) e vale apenas para mapas com aproximação parabólica. A idéia da teoria da renormalização é desenvolver a m-ésima iterada do mapa e reescalá-lo de volta à forma original. A função resultante da invariância por escala é universal.

Seja r_c o valor do parâmetro na bifurcação: a curva de f (a m-ésima iteração de um mapa M) toca a diagonal em um ponto fixo x^*, $x^* = f(x^*)$,

com derivada $df\left(x^{*}\right)/dx = 1$. Então, podemos aproximar a curva de f no canal por

$$\begin{aligned} f_r\left(x\right) &= f_{r_c}\left(x^{*}\right) + \frac{\partial f_{r_c}\left(x^{*}\right)}{\partial x}\left(x - x^{*}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{r_c}\left(x^{*}\right)}{\partial x^2}\left(x - x^{*}\right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial f_{r_c}\left(x^{*}\right)}{\partial r}\left(r - r_c\right) \\ &= x^{*} + \left(x - x^{*}\right) + a\left(x - x^{*}\right)^2 + b\left(r - r_c\right), \end{aligned}$$

com $a = \left(1/2\right)\partial^2 f_{r_c}\left(x^{*}\right)/\partial x^2$ e $b = \partial f_{r_c}\left(x^{*}\right)/\partial r$. Com a substituição de variáveis $a\left(x - x^{*}\right) \to \tilde{x}$ e $ab\left(r - r_c\right) \to \epsilon$, chegamos à forma normal

$$\tilde{x}_{n+1} \equiv \tilde{M}_{\epsilon}\left(\tilde{x}_n\right) = \tilde{x}_n + \epsilon + \tilde{x}_n^2. \tag{1.19}$$

Se iterarmos novamente o mapa, notamos que o comprimento da fase laminar de $\tilde{M}^2$ é reduzido pela metade, pois cada passo em $\tilde{M}^2$ equivalem a 2 passos em $\tilde{M}$. Considerando apenas termos lineares em ϵ e até segunda ordem em $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\epsilon}^2\left(\tilde{x}\right) &= \left(\tilde{x} + \epsilon + \tilde{x}^2\right) + \epsilon + \left(\tilde{x} + \epsilon + \tilde{x}^2\right)^2 \\ &\simeq \tilde{x} + 2\epsilon + 2\tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Fazendo as substituições de escala $2\epsilon \to \tilde{\epsilon}$ e $2\tilde{x} \to \tilde{\tilde{x}}$, obtemos

$$\tilde{\tilde{M}}_{\tilde{\epsilon}}\left(\tilde{\tilde{x}}\right) \equiv \tilde{\tilde{x}} + \tilde{\epsilon} + \tilde{\tilde{x}}^2 = 2\tilde{M}_{\tilde{\epsilon}/4}^2\left(\tilde{\tilde{x}}/2\right). \tag{1.20}$$

A Equação 1.20 significa que, na segunda iterada da forma normal da bifurcação tangente (Equação 1.19), para o canal manter as mesmas dimensões gráficas, o parâmetro ϵ deve ser multiplicado por um fator de 4. Como na segunda iterada o número de passos para atravessar o canal diminui pela metade, então o comprimento de fase laminar médio $\bar{l}\left(\epsilon\right)$ deve satisfazer a equação $\bar{l}\left(\epsilon\right)/2 = \bar{l}\left(4\epsilon\right)$. De modo geral, para a m-ésima iteração do mapa $\tilde{M}$,

$$\bar{l}\left(\epsilon\right)/2^m = \bar{l}\left(4^m\epsilon\right),$$

cuja solução é satisfeita para

$$\bar{l}\left(\epsilon\right) \propto \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \epsilon^{-1/2}. \tag{1.21}$$

Depois de repetido infinitamente o processo de iteração e reescala, praticamente toda informação sobre a forma global do mapa original é perdida, e

(da Equação 1.20) resta-nos a função universal $g(x)$, satisfazendo a equação (também universal).

$$g(x) = \alpha g^2(x/\alpha), \tag{1.22}$$

com condições de contorno

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad g'(0) = 1.$$

Essa equação descreve a vizinhança da tangente ao ponto fixo ampliada infinitas vezes com o fator de escala, no nosso caso, $\alpha = 2$. Incrivelmente a solução analítica é conhecida e dada por

$$g(x) = \frac{x}{1 - ax}, \tag{1.23}$$

a sendo uma constante arbitrária.

A Equação 1.21 é válida para mapas parabólicos, e pode ser generalizada para

$$\bar{l}\,(\epsilon) \propto \epsilon^{-(1-1/z)},$$

com a equação da forma normal da bifurcação tangente sendo

$$M(x) = x + \epsilon + |x|^z\,, \quad z > 1. \tag{1.24}$$

$\nu \equiv (1 - 1/z)$ é denominado *expoente crítico* para a intermitência tipo I, e depende da classe de universalidade do sistema; o caso $z = 2$, $\nu = 1/2$ deduzido acima é o mais comum.

Voltando para os outros tipos de intermitência, na bifurcação Hopf autovalores complexos conjugados atravessam o círculo unitário, dando origem à intermitência tipo II. Na bifurcação por dobramento de período inversa um autovalor real estável > -1 atravessa o ponto -1, com uma transição por intermitência tipo III. As duas possuem forma normal semelhantes, dadas por:

$$x_{n+1} = \pm(1 + \epsilon)x_n \pm ax_n^3,$$

onde a é um parâmetro positivo e os sinais correspondem intermitência tipo II para $+$ e tipo III para $-$. A relação característica (comprimento médio da fase laminar) para intermitência tipo II e $\epsilon > 0$ pode ser obtida integrando-se o comprimento laminar l com uma probabilidade P de reinjeção (de Siqueira, 2005):

$$\bar{l} = \int_{c_1}^{c_2} P(x_{in}) l(x_{in}) dx_{in},$$

onde $c_2 - c_1$ é a largura do canal e x_{in} é o ponto em que há a reinjeção. l pode ser integrada de dt, com $dx/dt = ax^3 + \epsilon x$ ($dx/dt \approx x_{n+1} - x_n$). Para a reinjeção uniforme, a relação encontrada é dada por

$$\bar{l}\,(\epsilon) \propto \epsilon^{-1/2}.$$

Caso o limite inferior c_1 seja pequeno, a relação é da forma

$$\bar{l}\,(\epsilon) \propto \epsilon^{-1}.$$

Analogamente pode-se calcular $\bar{l}$ para outras distribuições de probabilidades (Kim *et al.*, 1998), encontrando-se $\bar{l}\,(\epsilon) \propto \epsilon^{-\beta}$, $\beta \in [1/2; 1]$.

A média temporal é um método alternativo de se estudar propriedades estatísticas de bifurcações e do comportamento caótico. Possui a vantagem de ser mais robusto a ruídos e variações de parâmetros (de S. Cavalcante, 2003), além de ser mais facilmente medido. Para a análise da médias será considerada a hipótese ergódica, de que a média no *ensemble* $\langle x \rangle$ é igual à média temporal $\bar{x}$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{N} x_n P(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Na verdade um transiente é descartado, de modo a evitar pontos fora do atrator.

A tese de de S. Cavalcante (2003) e artigos de de S. Cavalcante e Rios Leite (2004, 2000); de S. Cavalcante *et al.* (2001) chamam a atenção para o fato de essas medidas estatísticas (média dos máximos, da variável dinâmica e do comprimento das fases laminares) apresentarem oscilações na intermitência tipo I. Sornette (1998) observa oscilações com periodicidade logarítmica em sistemas com invariância de escala perfeita. de S. Cavalcante (2003) complementa que comumente os mapas não possuem essa propriedade e, como conseqüência, variam sua freqüência com $\epsilon^{-1/2}$. Além disso, tais médias apresentam um espectro de freqüências mais largo, dando um aspecto mais ruidoso.

Todas as nossas análises a seguir serão feitas com o uso da média dos máximos, pelas razões expostas acima.

1.3.3 Mapa Logístico

Alguns sistemas se tornaram clássicos no estudo de caos. No caso de mapas unidimensionais, o mapa logístico é o paradigma absoluto, graças à sua simplicidade matemática e ao mesmo tempo riqueza e universalidade da

dinâmica. Em seu artigo memorável, May (1976) faz uma revisão descritiva do mapa logístico, reunindo numa mesma análise as principais características dos sistemas dinâmicos não-lineares até então conhecidos. O que farei nesta seção é um apanhado dos principais resultados observados no mapa logístico (baseado principalmente em May (1976)), com vistas à fixação e melhor exposição dos conceitos apresentados anteriormente, porém resumidos e bastante aquém dos textos originais. May (1976) e (Strogatz, 1998, capítulo 10) são leituras obrigatórias, seguidas por Feigenbaum (1978); Ott (1997), etc.

O mapa logístico surgiu originalmente como um modelo demográfico proposto por Pierre François Verhulst (Wikipedia, 2007). Posteriormente foi utilizado para explicar a dinâmica populacional de insetos (da região temperada) na presença de fatores limitantes, como escassez de alimento e doenças. Uma população pequena é suposta crescer a uma taxa proporcional à quantidade de indivíduos enquanto que adversidades diminuem a população numa taxa proporcional à diferença entre a capacidade do meio e a população atual. Matematicamente, a equação normalizada é dada por

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - x_n\right). \tag{1.25}$$

x_n pode ser visto como a população (normalizada) na geração n e r seria sua taxa de crescimento. x_n deve se restringir ao intervalo (0, 1), senão diverge para $-\infty$, significando que a população se extingue. Para haver solução não-trivial, r deve estar no intervalo (1, 4): se $r < 1$ a órbita é atraída para 0; se $r > 4$ novamente x_n diverge para $-\infty$; de qualquer forma ambas levam à extinção.

Antes de tudo, procuremos os pontos fixos e sua estabilidade. Fazendo $x_{n+1} = x_n = x^*$ e resolvendo a equação

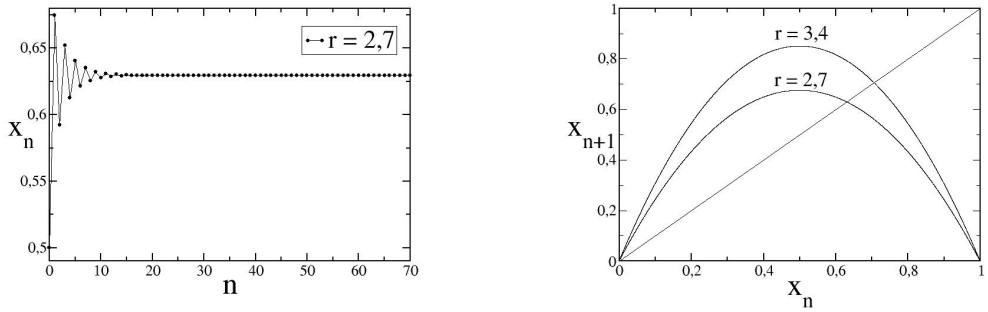
$$x^* = M(x^*) = r x^* \left(1 - x^*\right) \tag{1.26}$$

encontramos a solução trivial nula e a não-trivial $x^* = 1 - \frac{1}{r}$. Os pontos fixos também podem ser obtidos graficamente pelas interseções da função $M(x)$ com a função identidade. No nosso exemplo biológico, tais pontos representam populações que apresentam taxa de crescimento nula, com quantidade de indivíduos constante no tempo. A estabilidade dos pontos fixos depende da inclinação de $M(x)$ em x^* e é dada por

$$\lambda_1 \equiv \frac{dM(x^*)}{dx} = 2 - r. \tag{1.27}$$

O ponto fixo x^* é estável se e somente se $-1 < \lambda_1 < 1$, ou $1 < r < 3$. Veja na Figura 1.33 (a) uma série temporal que tende a um único valor (o ponto fixo) para $r = 2{,}7$. Os pontos foram ligados por linhas por questões de clareza. A

estabilidade pode ser vista no gráfico do mapa na Figura 1.33 (b), em que se observam dois valores de r: $r = 2{,}7$ com inclinação < 1 e $r = 3{,}4$ com inclinação > 1.



(a) (b)

Figura 1.33: (a) Série de período 1 do mapa logístico. $r = 2{,}7$; (b) Mapa primeiro retorno do mapa logístico. $r_1 = 2{,}7$ e $r_2 = 3{,}4$.

O que acontece quando $r > 3$ necessita ser analisado no mapa da segunda iterada, $x_{n+2} = M(M(x_n)) \equiv M^2(x_n)$. Os pontos fixos (agora de período 2) são dados da mesma forma:

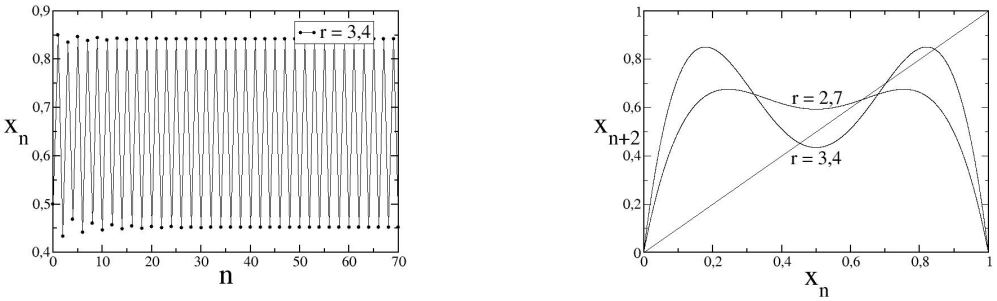
$$x_2^* = M^2(x_2^*). \tag{1.28}$$

O índice 2 é apenas para diferenciá-lo do ponto fixo da primeira iterada x^*. Claramente uma solução da Equação 1.26 também é solução da Equação 1.28. Um ponto fixo de período 1 também o é de período 2, 3, 4, etc. Entretanto, a inclinação agora é o quadrado da anterior:

$$\lambda_2 = \frac{dM^2(x_2^*)}{dx} = \left[\frac{d}{dx}M(M(x))\right]_{x=x_2^*} = \left\{\left[\frac{dM(x)}{dx}\right]^2\right\}_{x=x_2^*} = \lambda_1^2.$$

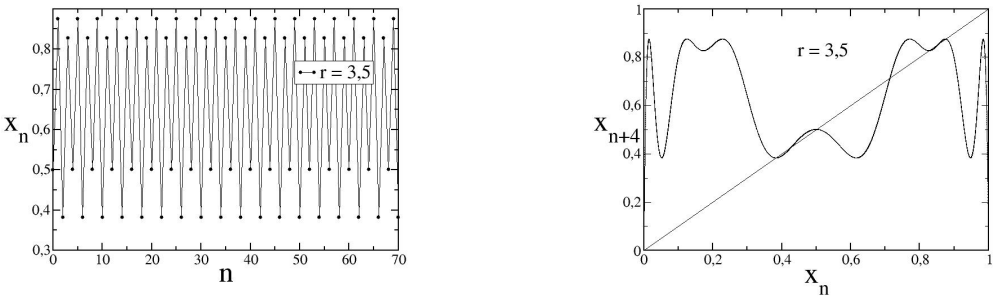
O penúltimo passo é a regra da cadeia $\frac{d}{dx}z(y) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$. Enquanto $|\lambda_1| < 1$, x^* é estável e, ao mesmo tempo, $0 < \lambda_2 < 1$. Conseqüentemente x_2^* também é estável. Quando $\lambda_1 < -1$, x^* se torna instável e λ_2 se torna > 1: M^2 forma um laço e dois novos pontos fixos estáveis de período 2 são criados (Figura 1.34 (b), para $r = 3{,}4$). A série oscila entre dois pontos (Figura 1.34 (a)).

A estabilidade desses dois pontos depende das suas inclinações no mapa de M^2, que pode ser provado serem iguais. No nascimento essa inclinação vale $+1$ e segue diminuindo de valor até chegar em -1 e se tornar instável, quando então no mapa M^4 (Figura 1.35 (b)) aparecem 4 pontos fixos estáveis e um



(a) (b)

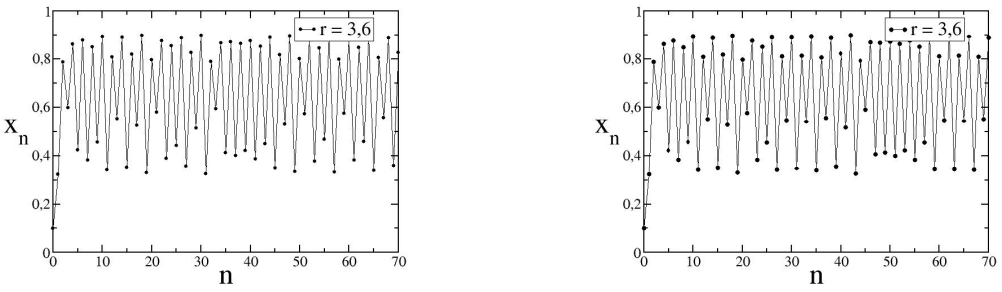
Figura 1.34: (a) Série de período 2 do mapa logístico. $r = 3{,}4$; (b) Mapa de segundo retorno do mapa logístico. $r = 2{,}7$ e $3{,}4$.



(a) (b)

Figura 1.35: (a) Série de período 4 do mapa logístico. $r = 3{,}5$; (b) Mapa de segundo retorno do mapa logístico. $r = 3{,}5$.

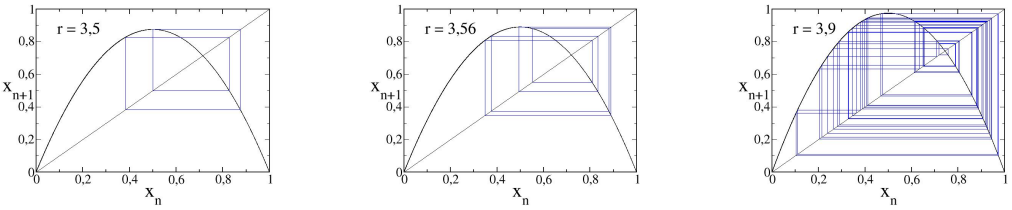
ciclo de período 4 nasce (Figura 1.35 (a)). Essa bifurcação de ciclos continua com 8, 16, 32,..., sempre um ciclo se tornando instável simultaneamente ao aparecimento de um ciclo estável de período dobrado. O intervalo de parâmetros entre as bifurcação diminui cada vez mais, convergindo para um ponto de acumulação de ciclos de período 2^n. Esse valor crítico é dado por $r_\infty = 3,5699...$ Após esse valor, infinitas órbitas de diferentes períodos coexistem. As trajetórias são aperiódicas e sensivelmente dependentes das condições iniciais, como pode ser visto na Figura 1.36. A isso Li e York (1975) deram o nome de caos. Até o momento, apenas períodos pares apareceram. Quando $r = 3,6786...$, o primeiro período ímpar aparece, muito grande a princípio (tendendo ao infinito), mas cada vez diminuindo até chegarmos à janela de período 3 em $r = 3,8284...$ Além desse ponto, há ciclos de todos os períodos.



(a) (b)

Figura 1.36: Caos. $r = 3{,}6$. Em (a) $x_0 = 0{,}1$; em (b) $x_0 = 0{,}10001$, mostrando a sensível dependência às condições iniciais da órbita caótica.

Essa rota para o caos também pode ser visualizada por meio do mapa de primeiro retorno. Uma órbita de período n orbita em apenas n pontos da parábola, como nas Figuras 1.37 (a) e (b) de período 4 e 8. No caos, toda a parábola é percorrida[9], porém com uma probabilidade não uniforme de taxa de visitação, visível por regiões mais escuras que outras numa trajetória longa.



(a) (b) (c)

Figura 1.37: Mapa de retorno para três valores de r: (a) 3,5 (período 4); (b) 3,56 (período 8); (c) 3,9 (caos).

O diagrama de bifurcação para o mapa logístico se tornou um símbolo para o Caos, e reproduzimo-lo na Figura 1.38 junto com sua média. Claramente, até o permitido pela resolução, vemos o ordenamento de Sarkovskii. Existe um ponto no qual duas bandas caóticas colidem e passam a parecer apenas uma. Esse ponto é chamado *ponto de Misiurewics* e ocorre para $r = 3{,}68$, aproximadamente. Observamos também que, antes de o parâmetro atingir o ponto de Misiurewics, a média nas janelas periódicas são como

[9]Rigorosamente isso não é verdade, pois entre quaisquer dois valores reais há uma quantidade infinita de números também reais.

platôs, enquanto que após esse ponto são mais parecidos com vales. Ampliamos a janela de período 5 na Figura 1.39 para evidenciar a estrutura fina das oscilações da média próximo à bifurcação tangente. A característica de auto-similaridade presente nos ramos do diagrama é observada nas oscilações da média, aparentemente se reproduzindo como numa estrutura fractal em qualquer escala de observação.

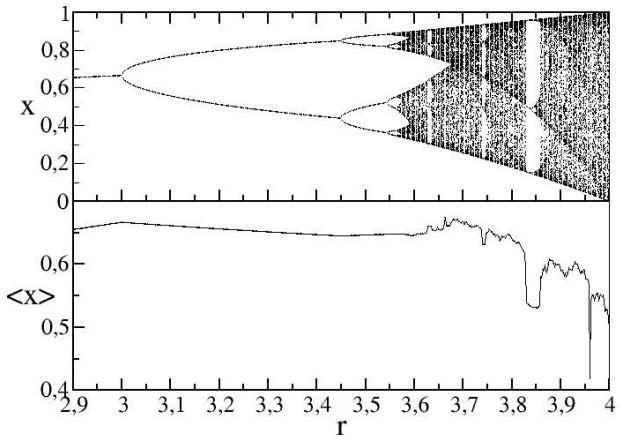
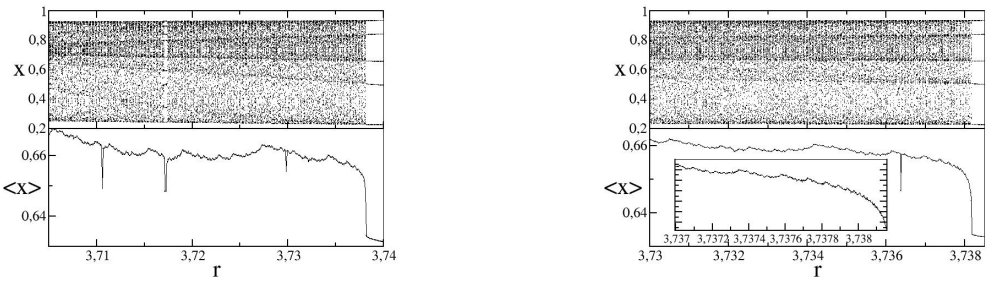


Figura 1.38: Diagrama de bifurcação e média do mapa logístico.



(a) (b)

Figura 1.39: Ampliação do diagrama de bifurcação e sua média próximo à bifurcação tangente de janela 5.

Para verificar que se trata de uma bifurcação tangente, o mapa de quinta iterada próximo da janela 5 é plotado na Figura 1.40. Em destaque, uma

ampliação de um dos canais com uma trajetória em fase laminar. Após seu escape, a trajetória segue caótica até uma eventual reinjeção, configurando uma intermitência tipo I. De fato, todas as janelas do mapa logístico nascem por bifurcação tangente e acabam numa crise. "A crise é uma mudança abrupta na dinâmica caótica, causada por uma colisão entre um atrator caótico e uma órbita periódica instável" (de S. Cavalcante, 2003). ´

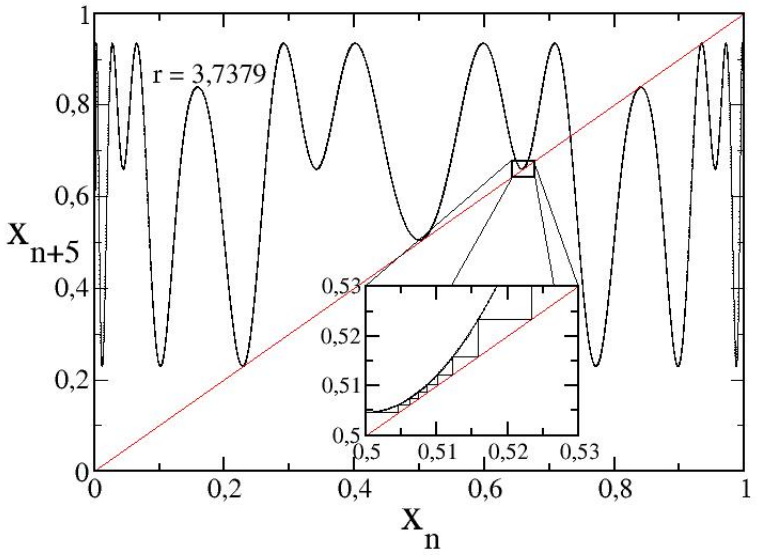


Figura 1.40: Mapa de 5^a iterada próximo à bifurcação tangente da janela 5.

Muitas outras propriedades de mapas e suas bifurcações encontram-se na literatura. Em particular, deixaremos de lado as propriedades de medida probabilística e ergodicidade e suas relações com intermitências (Ott, 1997). No próximo capítulo apresentamos estudos experimentais e numéricos de um sistema onde bifurcações e caos são estudados usando conceitos descritos nessa revisão.

Capítulo 2

Circuito RLD

O caos pode ser encontrado em inúmeros sistemas, mas focaremos nosso estudo num circuito eletrônico composto apenas por elementos passivos conectados em série — um resistor R, um indutor L e um diodo D — e alimentados por um sinal de tensão senoidal (Figura 2.1) $v_G = V_G \cos \omega t + V_{\text{offset}}$, $\omega = 2\pi f$. Sob determinados valores dos parâmetros as características elétricas do circuito (tensão v e corrente i) se comportam caoticamente, apresentando dobramento de período, caos, janelas periódicas, intermitências tipo I e III, crises, histerese, entre outros efeitos (Linsay, 1981; Jeffries e Perez, 1982; Rollins e Hunt, 1982). Trabalhos recentes (de Moraes e Anlage, 2003; Cho *et al.*, 2002; Kim *et al.*, 1998, 1997) mostram que a dinâmica caótica desse circuito e a física das junções semicondutoras ainda guardam problemas de pesquisa relevantes. Neste capítulo apresentamos estudo numérico e experimental do comportamento dinâmico do circuito RLD (resistor-indutor-diodo em série) forçado.

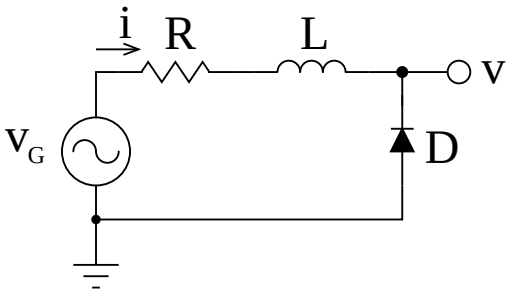


Figura 2.1: Esquema do circuito RLD.

Para certo conjunto de parâmetros o diodo atua de maneira ordinária, retificando a forma de onda de entrada. Ao se variar suavemente algum parâmetro de controle (amplitude V_G, freqüência f ou *offset* V_{offset} do sinal

de entrada) algo diferente ocorre: a onda retificada se desdobra em duas séries alternantes com alturas dos picos diferentes, ou seja, ocorre uma bifurcação por dobramento de período.

Variando-se mais o parâmetro de controle, há uma cascata de dobramento de período. O incremento no parâmetro de controle para cada nova bifurcação é sempre menor, diminuindo a uma taxa geométrica: δ_n converge para o número de Feigenbaum δ (Feigenbaum, 1978). Ao fim da cascata, surge o caos, entremeado de janelas periódicas. Para a corrente, é observado ainda o fenômeno de adição de período. Na tensão no diodo a adição é ocultada pela contração devido à retificação.

Experimentalmente, os diagramas de bifurcação são obtidos plotando-se os picos da tensão no diodo ou no resistor (que é proporcional à corrente de malha) à medida que se varia o parâmetro de controle. O diagrama se aproxima do mapa logístico quando uma grande dissipação (resistor de alto valor) e baixas amplitudes de tensão de entrada produzem o mapa de retorno experimental aproximadamente unidimensional. Na verdade o diagrama de bifurcação deve ser plotado num espaço de estados tridimensional, pois a dimensão do atrator é aproximadamente 2,1. Um esboço de como deve ser a estrutura geral do diagrama foi feito por Tanaka *et al.* (1996), reproduzido aqui na Figura 2.19

Já foram relatados nesse circuito intermitências tipo I e III e *on-off* (Kim *et al.*, 1997, 1998, 2004). O tipo II foi experimentalmente observado em circuitos acoplados (Huang e Kim, 1987) e em circuitos mais complexos (Batista e Caldas, 1999).

Nas próximas seções são feitas considerações dos modelos mais discutidos para o diodo no circuito RLD, algumas simulações com as principais características observadas e, por fim, alguns resultados experimentais. Os detalhes da montagem experimental e do sistema de controle e aquisição encontram-se nas Seções 3.2 e 3.3.

2.1 Modelo

Muito se discutiu sobre um modelo para o diodo que reproduzisse as características essenciais observadas experimentalmente no circuito RLD. Os debates de dois grupos dividiu a comunidade acadêmica: o primeiro (Testa *et al.*, 1982a,b), baseava-se na forte capacitância não-linear para explicar as bifurcações, os dobramentos de período e o caos; o segundo (Rollins e Hunt, 1982; Hunt e Rollins, 1984; Hunt, 1982), nos efeitos de memória da junção.

O diodo é um dispositivo eletrônico passivo de dois terminais que idealmente é um curto-circuito – possui resistência nula – para tensões diretas e um circuito aberto – possui resistência infinita – para tensões reversas. Ou seja, só permite a passagem da corrente num sentido (Rezende, 1996; Sedra e Smith, 2000). Os diodos semicondutores de junção p-n são os mais comumente encontrados, além dos de válvula com gás e os de contato metal-semicondutor.

Uma junção p-n consiste de uma pastilha de cristal semicondutor (substrato), tipicamente o silício ou o germânio (grupo 4A na tabela periódica), dopada com impurezas doadoras de elétrons numa região – tipo n – e aceitadoras em outra região – tipo p. Em pequenas quantidades, os elementos do grupo 5A da tabela periódica (P, As, Sb, etc) podem facilmente substituir átomos da rede cristalina, resultando na formação de elétrons fracamente ligados (termicamente ionizáveis para a banda de condução a temperaturas acima de 50 K). Portanto, o nível de energia da impureza está próximo da banda de condução do cristal e, a temperatura ambiente, seu "quinto" elétron está livre, ou seja, na banda de condução. A impureza doadora forma semicondutor tipo n. O mesmo ocorre para elementos do grupo 3A (B, Al, Ga, etc): para completar sua ligação covalente com a rede, um elétron da banda de valência do cristal é capturado, restando um buraco ou lacuna que tem mobilidade na banda de valência. A impureza aceitadora forma semicondutor tipo p.

Na região da junção, devido à diferença de concentração, elétrons (buracos) se difundem do lado n (p) para o lado p (n) – é a *corrente de difusão* – e se recombinam com buracos (elétrons) na interface, resultando em impurezas ionizadas ou descompensadas positivamente (negativamente) no lado n (p). Essas camadas de cargas (os íons) criam um campo elétrico de n para p que movimenta os elétrons e os buracos – é a *corrente de deriva* – contrariamente à corrente de difusão. Além disso, formam uma *capacitância de junção* dada por C_{j0}.

Essa região intermediária carregada, portanto, é livre de portadores majoritários (elétrons ou buracos) e é chamada *região de transição*, *de depleção* ou *de carga espacial*, sendo equivalente a uma barreira de potencial de altura

V_J.

Quando uma tensão externa v é aplicada na junção, positiva de p para n, a capacitância da junção é alterada para $C_j(v)$, dada por

$$C_j(v) = C_{j0}\left(1 - \frac{v}{V_J}\right)^{-m}. \tag{2.1}$$

C_{j0} é a capacitância de junção quando não há tensão aplicada ($10 \sim 100$ pF); V_J é o potencial da junção ($\approx 0{,}5$ V); e m é o coeficiente de graduação, sendo 0,33 para uma junção com concentração linearmente graduada e 0,5 para uma junção abrupta.

A grande diferença de concentração de portadores de carga entre a região de depleção e as regiões neutras implica uma grande diferença nas resistências dessas regiões. Logo, uma tensão aplicada na junção atua quase que inteiramente na barreira de potencial, somando-se a ela na *polarização reversa* (tensão do lado n maior que do lado p) e subtraindo-se na *direta* (tensão do lado p maior que do lado n). Simultaneamente, a espessura da região de depleção e o campo elétrico mudam correspondentemente. Essa variação da barreira de potencial permite um controle da difusão dos *portadores minoritários* – elétrons (ou buracos) que não se recombinaram e foram injetados no lado p (ou n) –, caracterizando o funcionamento do diodo: polarização direta (reversa) diminui (aumenta) a barreira de potencial, facilitando (dificultando) a injeção difusiva dos portadores minoritários. Ou seja, a corrente é controlada de forma não simétrica pela tensão externa. Supondo-se a região de depleção com recombinação desprezível e densidades de carga constantes em cada lado (p e n) e a região neutra com concentrações de portadores majoritários constantes e iguais ao de equilíbrio, pode-se mostrar (Sedra e Smith, 2000; Rezende, 1996) que

$$i = I_S\left(e^{\frac{v}{nV_T}} - 1\right). \tag{2.2}$$

Essa é a *equação do diodo* e foi deduzida por W. Shockley, um dos inventores do transistor e por isso ganhador do Prêmio Nobel de 1945.

I_S é a *corrente de saturação reversa*, pois a corrente no diodo tende a $-I_S$ na polarização reversa ($\sim$ 1 nA para junções de silício); $V_T \equiv \frac{k_B T}{e}$ é a *tensão térmica* ($\approx$ 26 mV a temperatura ambiente); n é o *coeficiente de emissão* e controla a inclinação da curva i/v, especialmente na região de alta injeção. n vale 1 quando a corrente de difusão domina e 2 quando corrente de recombinação domina e para alta injeção. A maioria dos diodos discretos possui n próximo de 2.

Os portadores minoritários injetados nas regiões neutras correspondem a cargas em excesso armazenadas. Se a tensão entre os terminais muda, essa

carga é modificada de maneira não-instantânea, ou seja, existe um atraso na resposta semelhante a de uma *capacitância de difusão*, C_d, distinta da formada pelas cargas espaciais na região de depleção, e é dada por

$$C_d = \tau_t \frac{di}{dv}, \tag{2.3}$$

em que τ_t é o tempo de trânsito médio e será explicado adiante. Utilizando a Equação 2.2 $i(v)$, obtemos

$$C_d = C_{d0}\, e^{\frac{v}{nV_T}} \tag{2.4}$$

Na Figura 2.2 apresentamos o símbolo do diodo (em cima) utilizado em circuitos elétricos e eletrônicos e uma visulização das regiões responsáveis pelas capacitâncias de junção e difusão.

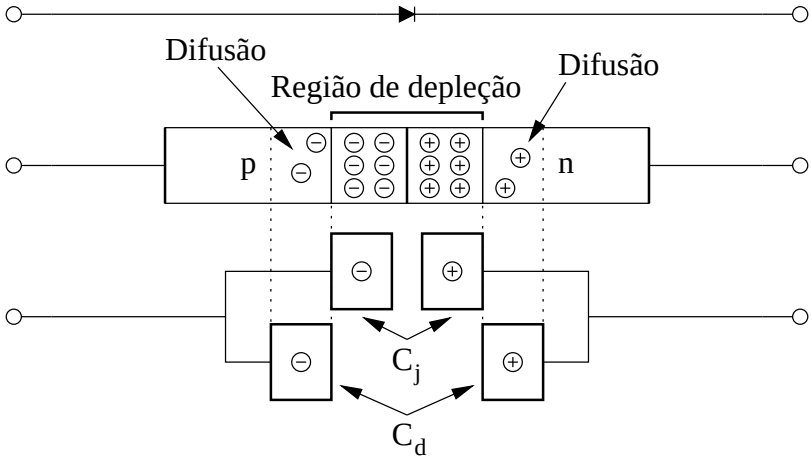


Figura 2.2: Junção pn e as regiões que dão origem às capacitâncias de junção e difusão.

Portanto, podemos modelar o diodo como uma fonte de corrente não-linear e controlada por tensão[1], em paralelo com duas capacitâncias não-lineares (junção e difusão). Os detalhes são vistos na Figura 2.3, em que $C = C_j + C_d$ e

$$i_D = I_S \left[\exp\left(v/nV_T\right) - 1\right].$$

r_s, que modela as resistências de contato das junção, tem valor desprezível e é freqüentemente negligenciado nos circuitos e equações com diodo.

[1]Vale salientar que o diodo é um elemento passivo. Ao invés de uma fonte de corrente controlada, poderíamos ter um resistor não-linear dependente da tensão com característica $i(v)$ dada pela 2.2. A derivada da curva $i(v)$ é a condutância, o inverso da resistência.

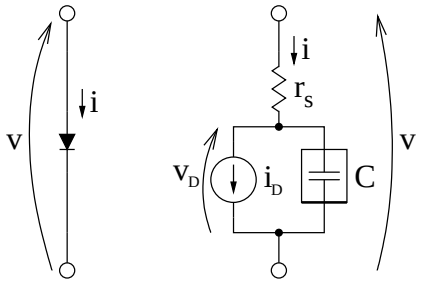


Figura 2.3: Modelo para o diodo baseado nas capacitâncias de difusão e de junção. A resistência r_s é freqüentemente desprezível.

Em geral, para os diodos retificadores $C_{j0} > C_{d0}$. A região de depleção possui comprimento variável com a tensão aplicada, e é apenas significativo na polarização reversa. Os portadores minoritários transportados por difusão, por outro lado, adquire importância na polarização direta. Logo, a capacitância de junção atua significativamente na polarização reversa e a capacitância de difusão na polarização direta. Essa característica pode ser aproveitada para simplificar o modelo de capacitâncias não-lineares por uma linear por partes, em que cada capacitor atua numa polarização (Matsumoto *et al.*, 1984). A Figura 2.4 mostra a relação $V \times Q$ no modelo linear por partes para uma junção típica, em que a transição entre os dois capacitores ocorre para uma tensão E_0 ($\sim$ 0,1 V).

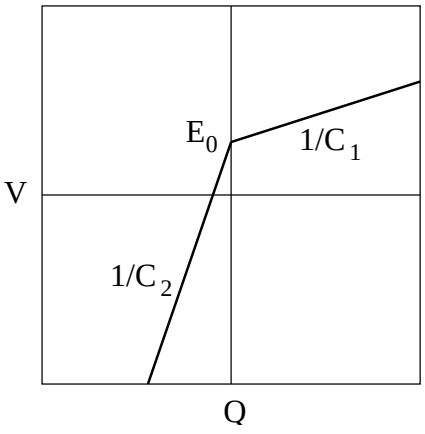


Figura 2.4: Característica $Q \times V$ do modelo do capacitor linear por partes.

A condução em regime estacionário com tensão aplicada direta consiste numa corente elétrica em que portadores minoritários são injetados e atravessam a região da junção. Quando a tensão aplicada a um diodo muda bruscamente da polarização direta para reversa, há uma período de tempo,

chamado *tempo de recuperação reversa* τ_{RR} ($\sim$ 700 nsmpara o diodo 1N4007), decorrido antes de o diodo deixar de conduzir (de Moraes e Anlage, 2003; Su *et al.*, 1989). Grande parte do tempo de recuperação é devido ao *tempo de "carregamento"* (*storage time*) τ_s, em que a carga elétrica da capacitância de difusão é descarregada para o circuito externo. Fisicamente, isso pode ser visto como o tempo que os portadores minoritários levam para atravessar a junção ou se recombinar, acabando por deixar nenhum excesso de carga em ambas as partes da junção. A corrente agora é suprida por cargas compensadas e a camada de depleção começa a se formar, com uma inércia associada a um *tempo de trânsito médio* τ_t. A camada depletada de cargas é intrinsecamente uma capacitância de junção. Tudo ocorre como se agora a capacitância de junção descarregasse. Esses três tempos característicos estão interligados pela Equação 2.5:

$$\tau_{RR} = \tau_s + \tau_t \tag{2.5}$$

A inclusão desses tempos no modelo do diodo vem sendo alvo de discussão desde a descoberta das propriedades não-lineares no circuito RLD. Alguns modelos incluem τ_{RR} explicitamente nas equações, enquanto outros nem mencionam sua existência. Testa *et al.* (1982a) alegam que a não-linearidade da capacitância do diodo é a responsável fundamental para explicar o comportamento do circuito. Matsumoto *et al.* (1984) vai além e propõe um modelo de capacitância linear por partes, reproduzindo razoavelmente bem os resultados experimentais. Rollins e Hunt (1982), por outro lado, indicam que o tempo de recuperação reversa e uma polarização direta finita do diodo são o conjunto mínimo de fatores procurados. Em seu modelo, o tempo de recuperação reversa τ_r depende da história recente dos picos da corrente, simulando um tipo de memória. O diodo não conduz até a tensão sobre ele ultrapassar a tensão de polarização V_f. Enquanto isso, ele atua como uma capacitância de valor fixo C. Após o início da condução, o diodo é modelado como uma fonte ideal de tensão V_f. Por fim, na transição de condução para corte, quando a tensão cai abaixo de V_f, o diodo continua a conduzir por um tempo τ_r, cujo valor é dado por

$$\tau_r = f\left(|I_m|\right), \tag{2.6}$$

com

$$f\left(I\right) = \tau_m \left[1 - \exp\left(-\frac{I}{I_c}\right)\right].$$

$|I_m|$ é a magnitude do pico da corrente direta no ciclo mais recente; I_c e τ_m são parâmetros descrevendo um diodo em particular.

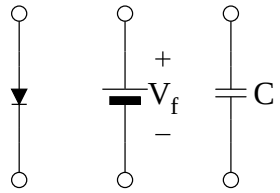


Figura 2.5: Modelo de Rollins e Hunt (1982) para o diodo. Na condução há apenas uma bateria V_f; no corte, uma capacitância C. Após a inversão da tensão externa, porém, o diodo continua conduzindo por um tempo de recuperação τ_r.

As equações do circuito podem ser obtidas dividindo o tempo em intervalos quando o diodo está conduzindo ou em corte e, aplicando as condições de contorno de modo a garantir a continuidade da tensão e da corrente, pode-se resolvê-las analiticamente Rollins e Hunt (1982).

O mapa de retorno $I_{n+1} \times I_n$, no qual $I_n = |I_m|_n$ é uma simplificação de notação para a magnitude do pico de corrente no n-ésimo ciclo, reduz-se a um mapa unidimensional e unimodal. Por conseguinte, não exibe histerese. Em observações experimentais, entretanto, o circuito apresenta histerese e seus mapas de retorno frequentemente não são unidimensionais (com ramos duplos). Para incluir tais características no modelo, Hunt e Rollins (1984) propuseram que o tempo de recuperação reversa (Equação 2.6) depende não apenas da magnitude do pico de corrente no ciclo mais recente $|I_m|_n$ como também da de ciclos anteriores, ponderados por termos de memória particulares para cada diodo e que diminuem com a distância do n-ésimo ciclo. Ou seja,

$$\tau_{r,n} = f\left(|I_m|_n\right) + \alpha_1 f\left(|I_m|_{n-1}\right) + \ldots + \alpha_k f\left(|I_m|_{n-k}\right).$$

Su *et al.* (1989) conseguiram simular a histerese e os ramos nos mapas de retorno com razoável precisão utilizando até α_3 e sugerem que o caos no circuito RLD "é devido a um mecanismo de realimentação atrasada provido pela lenta difusão e longo tempo de vida dos portadores minoritários em excesso próximos à junção p-n do diodo."

Os dois modelos supracitados reproduzem razoavelmente bem os mapas de retorno e os diagramas de bifurcação, entretanto são considerados mutuamente exclusivos em suas abordagens na tentativa de identificar as características mínimas essenciais para a descrição do circuito. Em publicação recente, de Moraes e Anlage (2003) parcialmente reconciliam esses dois modelos, corroborando a importância do tempo de recuperação reversa dependente da história recente do sistema e demonstrando que a capacitância não-linear possui implicitamente um fenômeno semelhante baseado no seu

tempo de descarga RC. Mesmo a simplificação da capacitância linear por partes apresenta um atraso após a reversão de polarização direta para reversa, composto por uma combinação dos tempos de descarga das duas capacitâncias presentes. Incrementando o modelo, o tempo de carregamento τ_s depende não apenas da magnitude dos máximos da corrente como também da resistência equivalente R do circuito, da freqüência f e do intervalo útil (*duty cycle*) do sinal de entrada e da tensão constante (DC *offset*) de polarização na junção. Foi observado que, após um período constante em baixas freqüências, $\tau_s \propto f^{-1/2}$. Com o aumento da freqüência, τ_s e C_d caem, aumentando $1/\tau_{RR}$ e $f_0 = 1/\left[2\pi \left(LC_j\right)^{1/2}\right]$, que é a freqüência de ressonância associada com a capacitância de junção C_j. Esse mecanismo de compensação mantém $f \sim f_0 \sim 1/\tau_{RR}$. Isso torna o dobramento de período e o caos mais robustos a mudanças de freqüência, pois os fenômenos não-lineares ocorrem facilmente para $f_0\tau_{RR} = 0{,}1 \sim 1$. Fora desse intervalo, o espaço de parâmetros (amplitude, freqüência e DC *offset*) em que se encontra efeitos não-lineares é muito restrito ou mesmo inexistente. Também vale destacar que a tensão de polarização (DC *offset*) modifica τ_s radicalmente. Uma polarização direta aumenta dramaticamente τ_s, ocorrendo o oposto para polarização reversa. Há uma variação de um fator de 10 em τ_s para uma variação de 2 V na tensão de polarização. Esse fato é útil para se localizar "boas"[2] regiões no espaço de parâmetros.

[2]Entenda-se "boa" a região apresentando dobramento de período e caos num intervalo de parâmetros acessível e conveniente.

2.2 Análise Numérica

Com um modelo apropriado para o diodo, o passo seguinte é a escolha dos valores adequados dos parâmetros de modo a ajustar a simulação com as observações experimentais em circuitos RLD. Inicialmente tomamos como base os valores disponibilizados (modelo SPICE3) pelos fabricantes, como a ON Semiconductor, Fairchild e Motorola. O diodo é o 1N4007, muito utilizado no estágio de retificação de fontes de alimentação DC. A tabela 2.1 ilustra alguns valores típicos para o 1N4007.

Parâmetro	**Fabricante**		
	ON	**Fairchild**	**Motorola**
IS	7,02767E-9	3,872E-9	14,11E-9
RS	3,41512E-2	1,66E-2	3,389E-2
N	1,80803	1,776	1,984
EG	1,05743	1,11	1,11
XTI	5	3	3
BV	1000	1000	1500
IBV	5E-8	1E-3	1E-5
CJO	1E-11	1,519E-11	2,589E-11
VJ	0,7	0,5928	0,3245
M	0,5	0,3554	0,44
FC	0,5	0,5	0,5
TT	1E-7		5,7E-6
KF	0		
AF	1		
ISR		1,356E-9	
NR		2,152	
IKF			94,81

Tabela 2.1: Modelos SPICE3 para diodo 1N4007.

Tentamos vários métodos para simular o circuito RLD numericamente, tanto utilizando *softwares* específicos para simulação eletrônica como escrevendo nossos próprios programas, e sempre tendo em vista otimização de desempenho. Como será visto adiante, as dificuldades estão relacionadas à

rigidez (*stiffness*) das equações do circuito RLD. As opções testadas foram: Spice, Python e C. O Spice (3f5) é um pacote de simulação digital de circuitos bastante versátil, com sua própria estrutura de programação, similar ao Fortran, com a facilidade de se poder simular qualquer circuito, inclusive programar a varredura de parâmetros. Porém seu desempenho para nosso propósito deixa muito a desejar. De forma mais restrita, podemos determinar as equações de estado do circuito (veja Seções 2.1 e 2.2) e utilizar uma linguagem de programação para resolvê-las. Para este caso, com o Python ocorre o mesmo que com o Spice: pequeno tempo de desenvolvimento do programa às custas de desempenho. A linguagem C, por ser de médio nível, dificulta a implementação dos programas, porém possui velocidade de processamento muito superior às demais. Em geral, ela possui menor tempo total, ou seja, para exame de muitos valores de parâmetros, o tempo de desenvolvimento do código-fonte mais o tempo de processamento dos dados resulta bem menor que os tempos totais usando pacotes fechados ou outras linguagens de mais alto nível. Portanto, após testar todas essas opções, implementamos[3] nossas simulações em linguagem C[4].

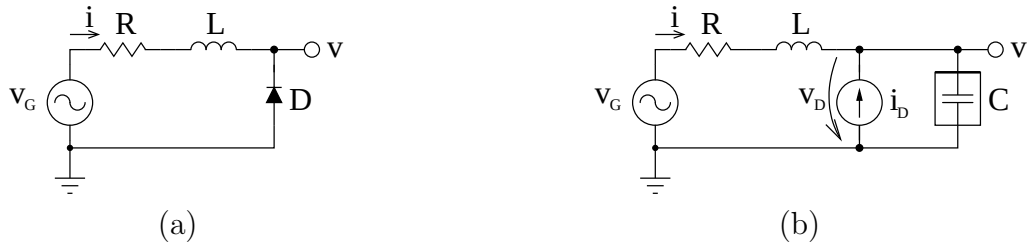


Figura 2.6: Circuito RLD. (a) Diodo real; (b) O modelo da capacitância não-linear em paralelo com uma fonte de corrente controlada por tensão é utilizado para o diodo.

Primeiramente, determinamos as equações do circuito utilizando o modelo descrito em van Buskirk e Jeffries (1985) (veja Seção 2.1). Pela lei das malhas de Kirchoff na Figura 2.6 (a):

$$v_G = Ri + L\frac{di}{dt} + v \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{v_G - Ri - v}{L} \ , \tag{2.7}$$

onde v é a tensão sobre o diodo e $v_G = V_G \,\mathrm{sen}\,(\omega t) + V_{\mathrm{offset}}$ é a tensão de entrada provida pelo gerador de sinais. Aplicando a lei dos nós:

[3]Compilador gcc – *the GNU Compiler Collection* – e Sistema Operacional FreeBSD ou Debian GNU/Linux, rodando em máquinas arquitetura i386 ou AMD64

[4]Comando de compilação: *gcc arquivo_fonte.c -O -lm -o arquivo_executável*.

$$i = C\frac{dv}{dt} - i_D \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i + i_D}{C} \ , \tag{2.8}$$

onde a fonte de corrente não-linear controlada por tensão é dada por

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{-v}{nV_t}} - 1 \right), \tag{2.9}$$

e C depende da tensão v sobre o diodo, e equivale à soma da capacitância de junção (ou depleção) com a capacitância de difusão:

$$C = C_j + C_d, \tag{2.10}$$

dadas por

$$\begin{aligned} C_j &= C_{j0} \left(1 + \frac{v}{V_j} \right)^{-m}, \ 1/3 \leq m \leq 1/2 \\ C_d &= \tau_t \left| \frac{di_D}{dv} \right| = C_{d0} \ e^{\frac{-v}{nV_t}}, \ C_{d0} = \frac{\tau_t I_S}{nV_t}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A capacitância de junção predomina em baixas amplitudes de tensão, enquanto a de difusão é preponderante em tensão mais alta, como pode ser visto na Figura 2.7. Matsumoto *et al.* (1984) sugere um modelo de capacitância linear por partes como simplificação do problema, porém inicialmente não o utilizaremos.

Portanto, temos um sistema dinâmico não-autônomo (v_G varia com o tempo) de duas equações em i e v. Podemos torná-lo um sistema autônomo de três dimensões (portanto consistente para termos caos) introduzindo a equação para a fase da tensão de controle:

$$\theta = \omega t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega \ , \tag{2.12}$$

onde $\omega = 2\pi f$ e f é a freqüência do sinal de entrada.

Temos finalmente o seguinte sistema dinâmico não-linear:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} &= \dfrac{v_G - Ri - v}{L} \\ \frac{dv}{dt} &= \dfrac{i + i_D}{C} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{cases} \ , \tag{2.13}$$

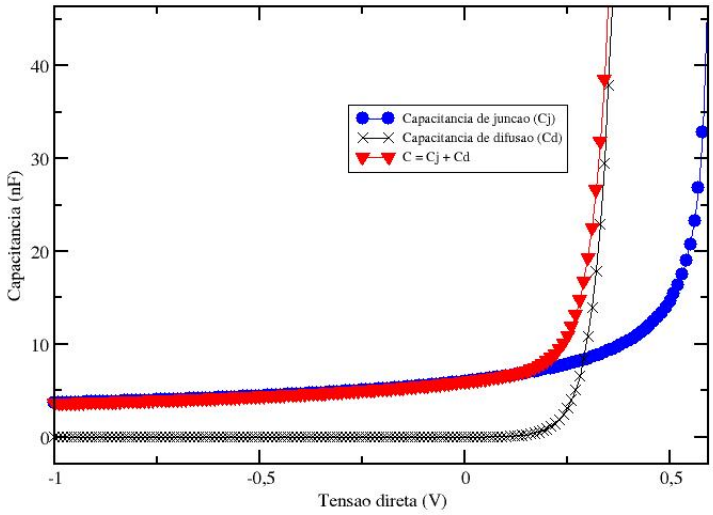


Figura 2.7: Capacitâncias de junção, de difusão e total do modelo da capacitância não-linear para o diodo.

com

$$
\begin{aligned}
i_D &= I_S \left(e^{\frac{-v}{nV_t}} - 1 \right) \\
C &= C_j + C_d \\
C_j &= C_{j0} \left(1 + \frac{v}{V_j} \right)^{-m}, \ 1/3 \leq m \leq 1/2 \\
C_d &= C_{d0}\ e^{\frac{-v}{nV_t}}, \ C_{d0} = \frac{\tau_t I_S}{nV_t}.
\end{aligned}
$$

Um método bastante popular para resolução de sistemas de EDO é o Runge-Kutta de 4^a ordem (veja Press *et al.* (2007); Numerical (2007)). Nosso sistema é "rígido" (*stiff*), ou seja, possui dois tempos característicos bastante distintos, visível pelo longo tempo da tensão próximo do nível zero (na verdade, da tensão direta de condução V_t) e pouco tempo (os picos ou *spikes*) fora dele. O passo de integração variável, portanto, é teoricamente mais eficiente, sendo tradicionalmente implementado com Runge-Kutta-Felhberg de ordem 4,5. O pacote *GNU Scientific Library* – GSL (GNU, 2007; GSL, 2007) para C possui essas implementações e muitas outras. Fizemos testes de performance e verificamos poucas diferenças no tempo de processamento entre as duas. Devido à versatilidade de se resolver sem o uso de pacote, além de

ser mais simples de implementar, resolvemos usar o método de Runge-Kutta de ordem 4.

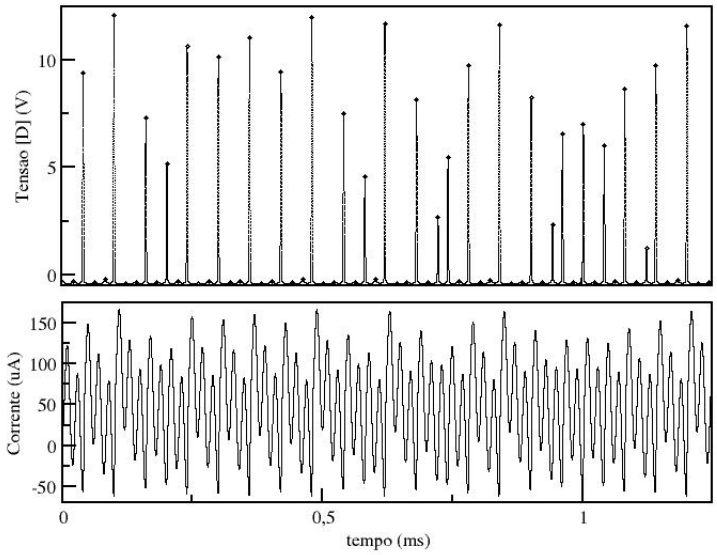


Figura 2.8: Séries numéricas caóticas no circuito RLD para a tensão no diodo e a corrente. $C_{j0} = 18{,}5$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 0{,}22$ H, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 4{,}4$ V, $f = 50$ kHz, passo de integração: $10^{-}9$

Na Figura 2.8 reproduzimos uma série caótica para a tensão v e a corrente i no diodo, calculadas com as Equações 2.13 e com separação de 1 ns entre pontos consecutivos. Um tratamento dos dados faz-se necessário para manipulação com mapas (unidimensionais). Um método comumente utilizado é a aquisição de pontos numa fase específica da tensão de controle, parecido com amostragem estroboscópica em intervalos fixos de tempo: sempre que a senóide de entrada assume determinada fase, um "gatilho" dispara e um ponto do sinal de saída é adquirido. Porém, o método de Lorenz, em que os picos (ou vales) locais são amostrados, é consagrado no nosso laboratório, devido principalmente à facilidade de computação (comparação entre pontos vizinhos) e de realização experimental. Na simulação da Figura 2.8, os pontos com informação para a dinâmica do sistema são os picos e foram evidenciados com circunferências. Eles são armazenados e tratados para posterior análise. Há uma correspondência entre os picos de tensão e de corrente, apesar de haver uma defasagem de fração de milissegundo. Uma série de período 4 é

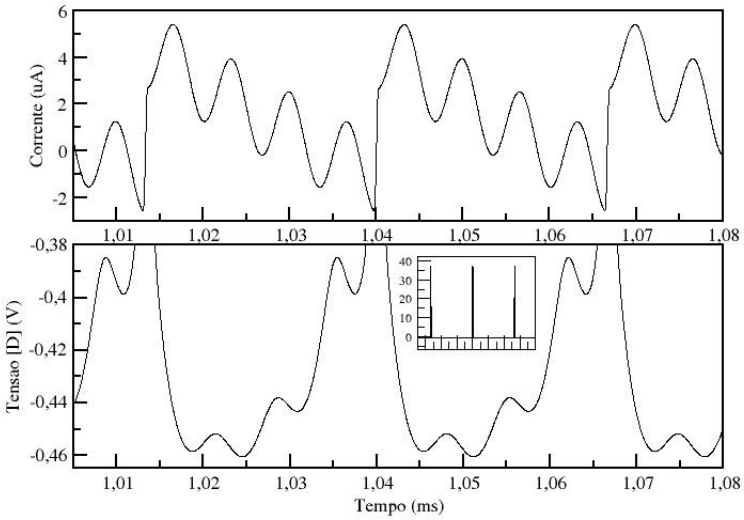


Figura 2.9: Séries numéricas de período 4 para a tensão no diodo e a corrente no circuito RLD. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 3{,}5$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: 2×10^{-9}.

apresentada na Figura 2.9. A forma de onda da corrente lembra uma escada (*staircase*) descendente e periódica com 4 degraus. Visto em escala panorâmica (veja o quadro em destaque), a tensão parece apresentar período 1, porém, dando-se um *zoom* no nível aparentemente constante, observamos outros períodos quase imperceptíveis, contraídos próximos à tensão limiar de condução, da ordem de 1000 (mil) vezes menor que os picos maiores.

A sensibilidade exponencial às condicões iniciais, comportamento característico de sistemas caóticos, é bastante marcante nesse circuito e, mesmo em simulações numéricas, aparece naturalmente, como se vê na Figura 2.10, em que três séries foram calculadas apenas com mudança no passo de integração, mantendo-se todos os outros parâmetros iguais.

Dessa sensibilidade surge uma dúvida cruel e freqüente: como garantir que as simulações com caos são fidedignas ou mesmo válidas como modelos representativos da realidade física? Afinal, não apenas há discretização temporal na integração das soluções como também um arrendondamento dos números reais (ponto flutuante) em todas as etapas de cálculo (inclusive na própria condição inicial), ambos inerentes aos computadores digitais. Existe um teo-

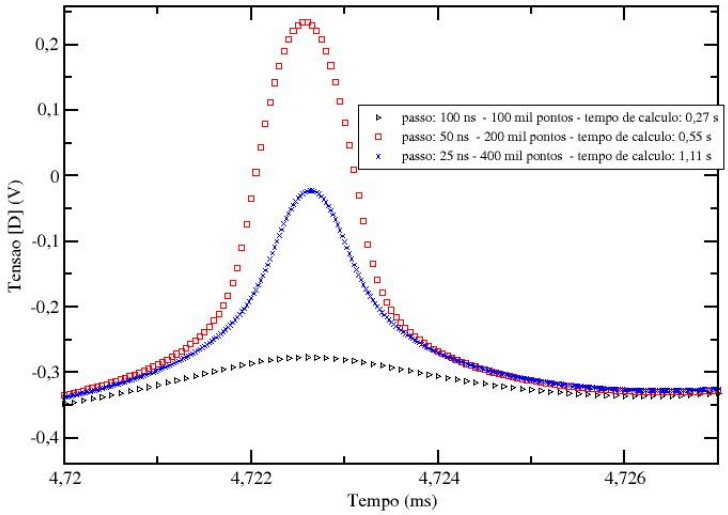


Figura 2.10: Solução numérica de equações. As três curvas mostram a sensibilidade ao erro de arredondamento na integração. As diferenças nos cálculos são apenas no passo de integração.

rema, chamado *Teorema do Sombreamento* (Ott, 1997), cujo formalismo vai além do escopo dessa dissertação, que garante matematicamente, dadas certas condições, que, "embora uma trajetória calculada numericamente divirja exponencialmente da trajetória verdadeira com a mesma condição inicial, há uma trajetória verdadeira (sem erro), com uma condição inicial levemente diferente, que fica próxima (sombras) à trajetória numérica."[5] Isso quer dizer que a trajetória calculada pode não ser a de condição inicial x_0, mas sim a de $x_0 + \delta x$. Para efeitos práticos, esse teorema valida as simulações numéricas de sistemas caóticos.

Construímos então o diagrama de bifurcação para a tensão e a corrente. Podemos variar tanto a amplitude como a freqüência (ou mesmo o *offset*) do sinal de entrada. Na Figura 2.11 fizemos variar a amplitude. Novamente, devido à escala, não é possível visualizar todas as órbitas do diagrama de tensão. Com um *zoom* (no quadro em destaque), verificamos a consistência de períodos entre os dois diagramas.

A estrutura dos atratores é bastante complexa, porém exibe características comuns às do mapa logístico, tais como cascata de dobramento de

[5]Tradução livre de Ott (1997), pág. 18-19.

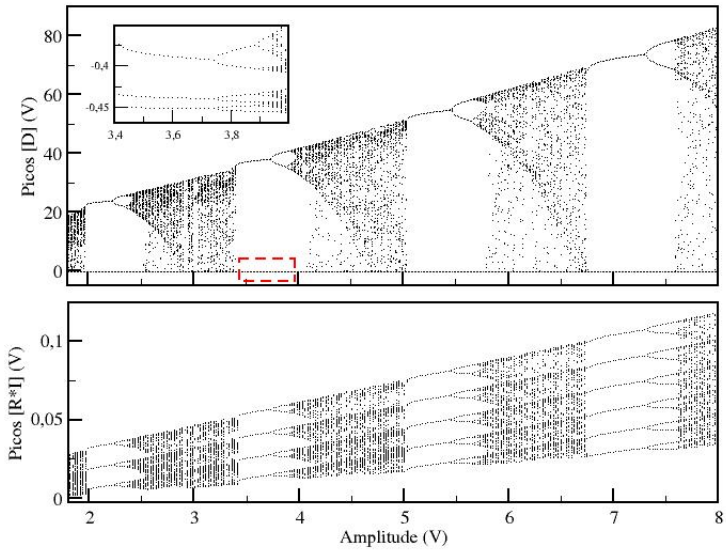


Figura 2.11: Diagrama de bifurcação no circuito RLD para a tensão no diodo e a corrente. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 1{,}8 \sim 8$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: $0{,}5{\times}10^{-9}$.

período, caos e janelas periódicas. Havendo forte dissipação (alto valor de resistência), o sistema é aproximadamente unidimensional e as teorias de Feigenbaum e de Metropolis (seqüência U) e o ordenamento de Sarkovskii são confirmados. Entretanto, caso haja pouca dissipação (baixo valor de resistência), o sistema não pode ser modelado por um mapa unidimensional. Logo, tais teorias não necessariamente se confirmam, como pode ser visto nas regiões de mais altos períodos, que não se incluem na seqüência U nem no ordenamento de Sarkovskii de mapas unidimensionais (Perez, 1985). Fato marcante é a seqüência de adição de período com o aumento da tensão de controle, com estrutura auto-replicante, isto é, a adição de período ocorre por uma duplicação da órbita, mantendo a mesma escala e orientação. Brorson *et al.* (1983) conjectura ainda que "essa estrutura se repete indefinidamente com o incremento da amplitude de controle e que um novo ramo é adicionado ao atrator somente quando uma transição para o caos por dobramento de período ocorrer. Essa repetição macroscópica do atrator é bem diferente da bem conhecida auto-similaridade microscópica de um mapa multidimensional

como o atrator de Henon."[6] Daí conluímos que o nível de dissipação é apenas um controle do fator de escala do diagrama, e que forte dissipação (aproximação unidimensional) significa que o intervalo de cobertura pela tensão de controle captura apenas o primeiro ramo do diagrama "infinito"; para baixas amplitudes, a adição de período não é observada e o atrator pode ser modelado razoavelmente bem por um mapa quadrático. Mesmo para grandes amplitudes, porém, o diagrama da tensão (Figura 2.11) parece não apresentar adição de período e, experimentalmente, a região contraída (tensão aproximadamente constante) fica ofuscada por ruído e precisão dos instrumentos. Também podem ser observadas da Figura 2.11 regiões caóticas surgindo de modo repentino após o dobramento de período, aproximadamente em 2,5 V, 4,1 V, 5,8 V e 7,6 V. Tais "mudanças repentinas nos atratores caóticos com variação do parâmetro [...] causadas pela colisão do atrator caótico com um órbita periódica instável" são chamadas *crises* (Ott, 1997). Nesse caso, "a órbita periódica com a qual o atrator colide está no interior de sua bacia", provocando aumento brusco no tamanho do atrator caótico, fenômeno denominado *crise interior*.

Apresentamos na Figura 2.12 uma imagem panorâmica da Figura 2.11 (b), com uma ampliação na região contendo quatro bandas de dobramento de período e caos. A auto-similaridade presente em estruturas fractais pode ser visualizada no diagrama da Figura 2.13: destacamos a região compreendida no retângulo da Figura 2.13 (a) e a ampliamos em (b); novamente destacamos uma região e a ampliamos mais duas vezes em (c) e (d), encontrando quatro ramos de bifurcações de mesmas características gerais que na imagem original. Essa invariância de escala, porém, não é perfeita (de S. Cavalcante, 2003), pois há perda de informação; a propriedade de auto-similaridade do diagrama é apenas aproximada.

Comumente se utiliza a média do comprimento das fases laminares como uma forma de se tentar "prever" a transição caos-ordem em uma bifurcação com intermitência. de S. Cavalcante e Rios Leite (2000) sugerem a utilização da média da variável dinâmica (ou de seus picos) como uma forma alternativa para se estudar o comportamento crítico do sistema na iminência da bifurcação. Como analisado em de S. Cavalcante *et al.* (2001), na intermitência tipo I as variáveis estatísticas apresentam oscilações na sua estrutura fina próximo ao ponto crítico. Tais oscilações não são puramente harmônicas, mas possuem aparência disforme e aumentam a freqüência com a proximidade do ponto de bifurcação. A média dos picos e a média contínua (Figura 2.14) são bastante semelhantes e podem ser tratados indistintamente. Das médias da Figura 2.14 podemos distinguir as regiões periódicas pelos platôs

[6] Tradução livre.

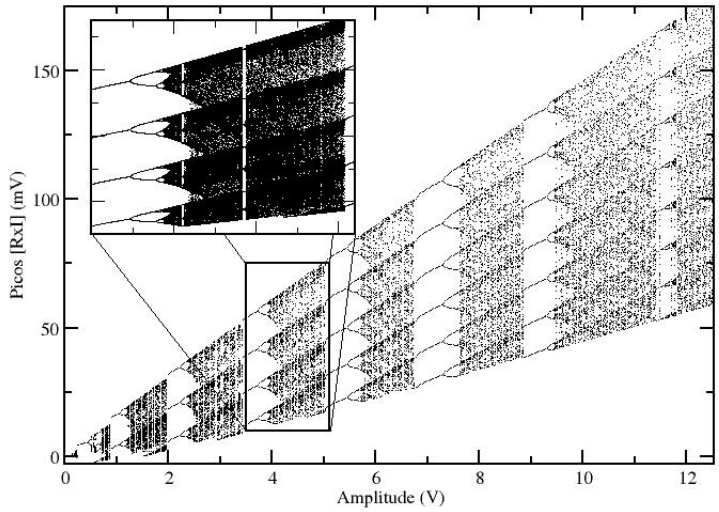


Figura 2.12: Diagrama de bifurcação numérico para o máximo da corrente do circuito. $C_{j0} = 6$ pF, $C_{d0} = 0{,}6$ pF, $I_S = 4{,}8$ nA, $nV_t = 42$ mV, $V_j = 0{,}75$ V, $L = 22$ mH, $R = 100\ \Omega$, $V_G = 1{,}8 \sim 8$ V, $f = 150$ kHz, passo de integração: $0{,}5{\times}10^{-9}$.

suaves. Na borda dos platôs ocorrem as bifurcações. Focamos então na região de baixas amplitudes (unidimensional) e na borda do platô (intermitência), procurando tais oscilações na média.

Podemos abstrair apenas o comportamento essencial do circuito, sem nos preocuparmos com os detalhes do modelo para o diodo. Perez (1985) propõe um mapa de retorno unidimensional para o diagrama da corrente, com parte linear e parte parabólica:

$$x_{n+1} = \begin{cases} Ax_n + F, & x_n \geq K \\ AK + F - L\left[(x_n - B)^2 - (K - B)^2\right], & x_n < K \end{cases}$$

A parte linear representa o mecanismo de carga e relaxação do capacitor de junção, enquanto a parábola representa a quantidade de carga minoritária injetada na junção sob pequenas amplitudes de controle. L é o parâmetro de controle. Utilizando os mesmos parâmetros de Perez (1985) obtemos o diagrama de bifurcação da Figura 2.15. Dada sua extrema simplicidade (e facilidade computacional), é impressionante a grande semelhança desse diagrama com os dados experimentais, porém fenômenos como salto e histerese

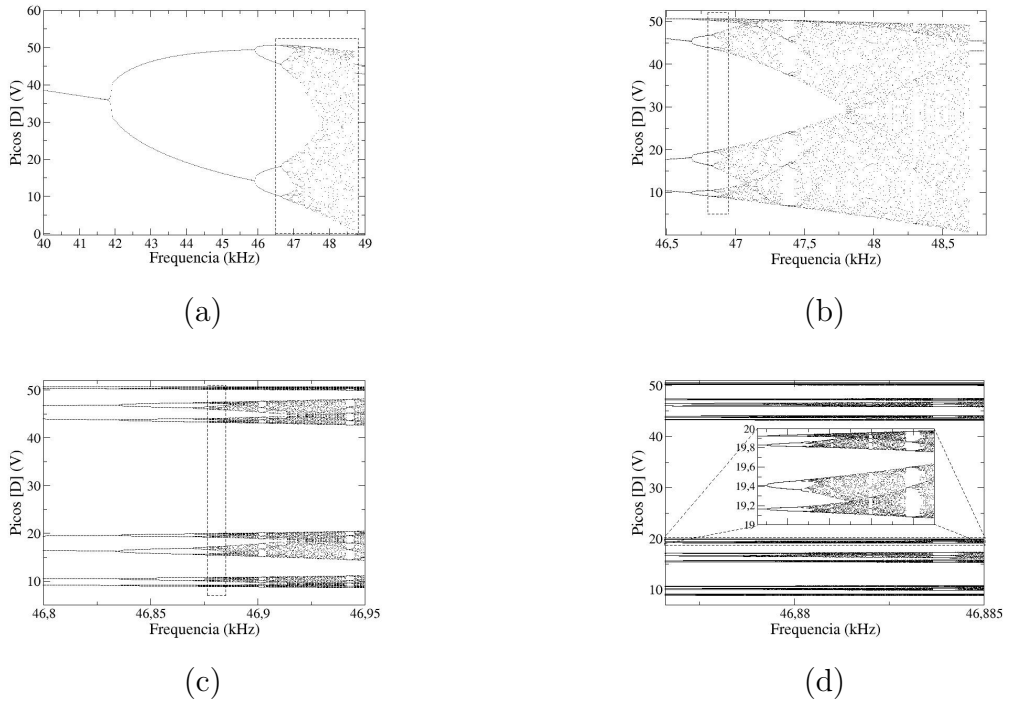


Figura 2.13: Diagrama de bifurcação simulado. Em (a), uma região é destacada pelo retângulo e ampliada em (b); novamente, uma região em (b) é destacada e ampliada em (c); idem para (c) e (d).

não aparecem, pois por princípio o atrator é suposto unidimensional.

Na Figura 2.16 ampliamos a região que engloba duas janelas de período 5 da Figura 2.15. Nota-se que na média há um vale entre as duas janelas. Provavelmente é outra janela de período maior. A bifurcação da primeira janela 5 ocorre aproximadamente para $L = 1{,}64$, e verificamos na Figura 2.17 (a) que se trata de uma bifurcação tangente, caracterizada por séries intermitentes (Figura 2.17 (b)). Chegando mais perto da bifurcação, podemos observar a estrutura fina da média e suas oscilações (Figura 2.18). Uma aparência ruidosa na média provavelmente é flutuação intrínseca à dinâmica do sistema, sendo um provável obstáculo à sua observação experimental.

Tanaka *et al.* (1996) analisam o problema de uma perspectiva (de bifurcação) global, em que no espaço de fase tridimensional "todos os atratores de determinado período e suas órbitas associadas instáveis de mesmo período constituem uma estrutura em folha no espaço $(f, V_G, S/T)$, e conseqüentemente pertencem à mesma família."[7] S e T são os tempos que a trajetória

[7]Tradução e adaptação de Tanaka *et al.* (1996).

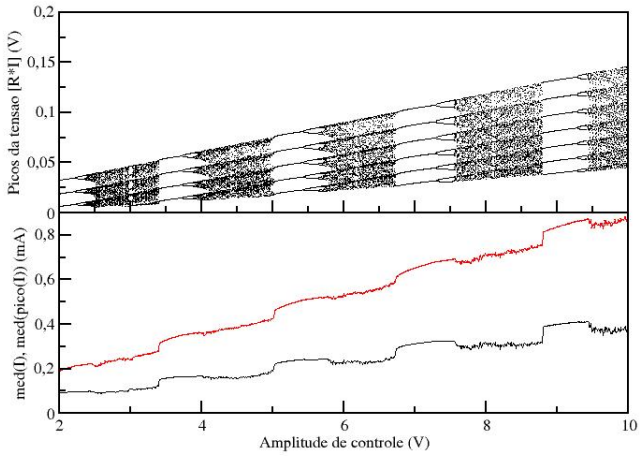


Figura 2.14: Diagrama de bifurcação da corrente e médias dos picos (acima) e da variável dinâmica (abaixo).

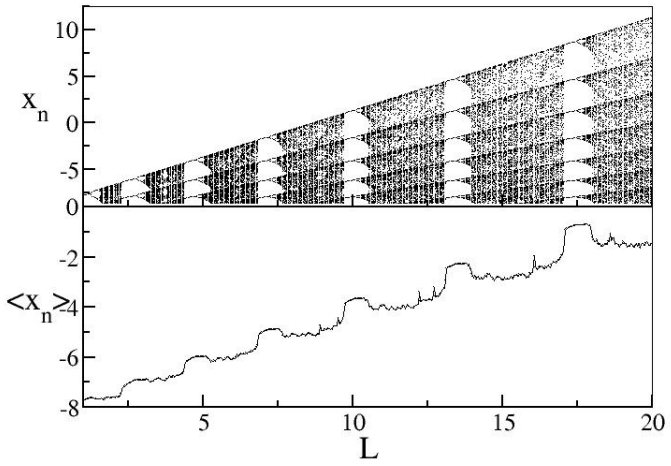


Figura 2.15: Diagrama de bifurcação obtido do modelo de Perez para o circuito RLD. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1 \sim 20$.

passa em cada sub-região da dinâmica linear por partes. Uma representação do diagrama de bifurcação nesse espaço é mostrada na Figura 2.19, retirada do artigo supracitado.

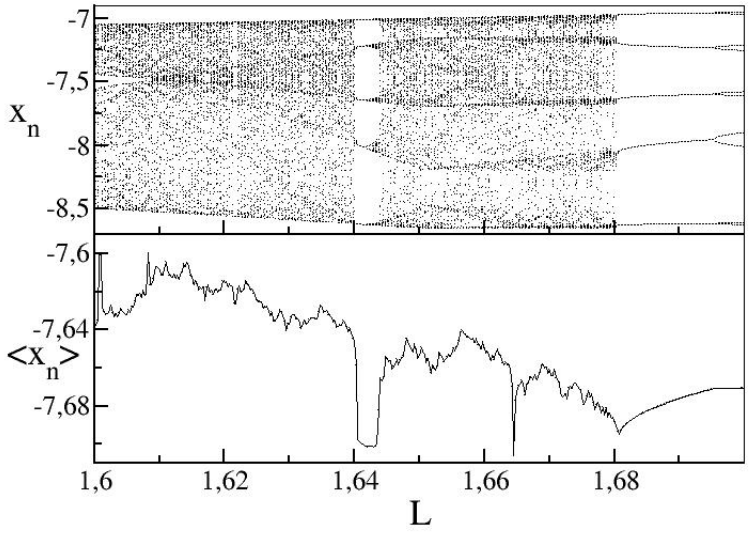
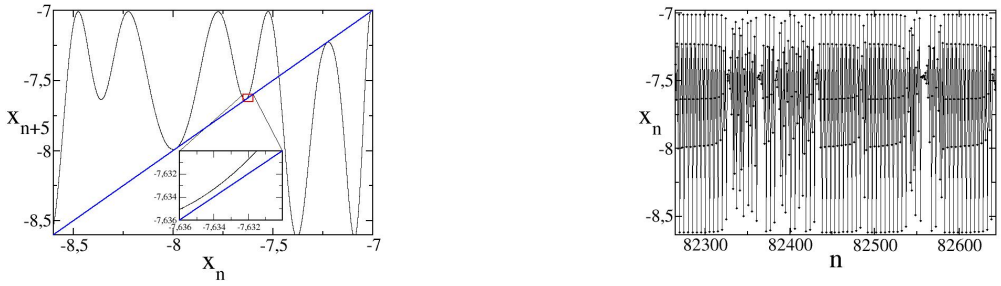
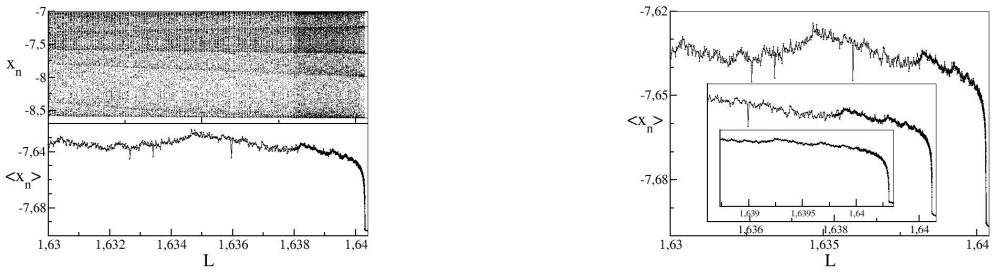


Figura 2.16: Ampliação de parte do diagrama de bifurcação da Figura 2.15. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}6 \sim 1{,}7$.



(a) (b)

Figura 2.17: (a) Mapa da 5^a iterada na intermitência tipo I obtida do modelo de Perez para o circuito RLD; (b) Série numérica na intermitência tipo I. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}6402$.



(a) (b)

Figura 2.18: (a) Ampliação de parte do diagrama de bifurcação da Figura 2.16. $A = 0{,}85$, $B = -8$, $F = -2{,}7$, $Q = -2$, $K = -7$ e $L = 1{,}63 \sim 1{,}6404$; (b) Ampliação da média de (a), com sucessivas aproximações no ponto crítico.

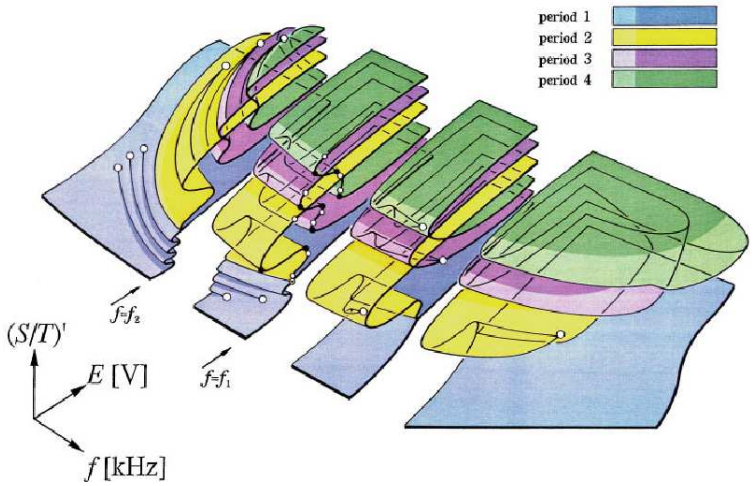


Figura 2.19: Modelo do diagrama (f, V_G, S/T) para todas as órbitas periódicas. Azul: período 1; amarelo: período 2; roxo: período 3; verde: período 4.

Capítulo 3

Experimentos com o circuito RLD

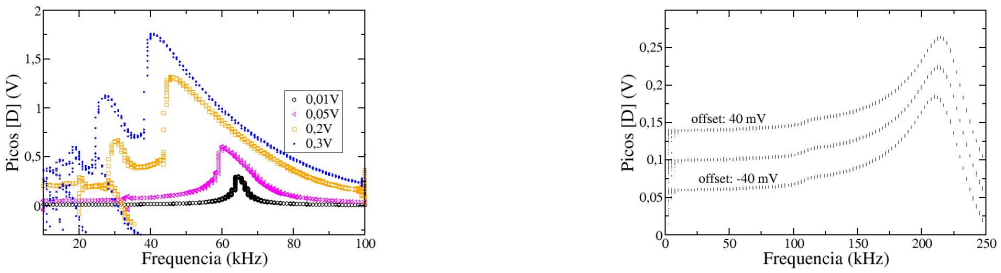
Nosso arranjo experimental é composto do circuito RLD, de uma etapa de isolamento composta por amplificadores operacionais em configuração de seguidor de tensão, dos equipamentos (gerador de sinais e osciloscópio digitais) e de um computador para controle, aquisição e armazenamento dos dados. Os detalhes de nossa montagem encontram-se na Seções 3.2 e 3.3.

A principal motivação para o estudo de caos no circuito eletrônico RLD é sua extrema simplicidade. Entretanto, dada a natureza da pesquisa, essa simplicidade revelou-se apenas aparente. Problemas com ruído, temperatura, taxa de amostragem, resolução e tempo de aquisição mostraram que as dificuldades (ou desafios) são inerentes à investigação científica.

3.1 Resultados e discussões

Esta seção expõe os principais resultados obtidos nas simulações apresentadas anteriormente, e é complementada pelas Seções 3.2 e 3.3. Todos os parâmetros e condições de aquisição são apresentados, com a intenção de uma posterior reprodução pelos possíveis leitores deste trabalho.

Antes de tudo, é necessário observar que o sistema pode ser considerado aproximadamente linear para baixas amplitudes de controle. De fato, o diodo se comporta como um capacitor quando polarizado reversamente (Matsumoto *et al.*, 1984; Rollins e Hunt, 1982). Veja a Seção 2.1. A tensão de transição E_0 do modelo do capacitor linear por partes, por exemplo, pode ser visto como o limite da aproximação linear. A Figura 3.1 (a) apresenta os picos da tensão no diodo versus a freqüência do sinal de controle e vemos que efeitos não-lineares começam a se tornar perceptíveis (com o aparecimento



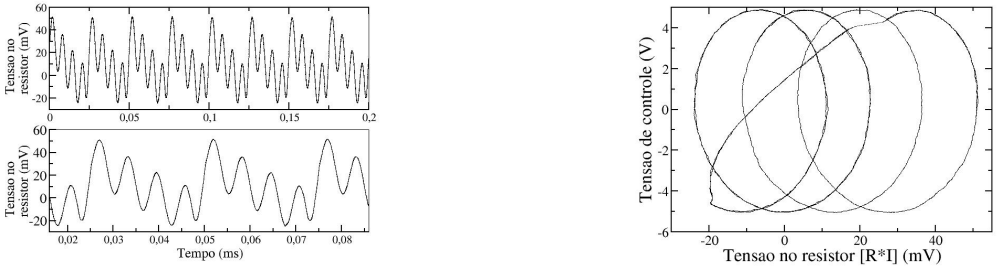
(a) (b)

Figura 3.1: (a) Ressonâncias para o circuito RLD para várias amplitudes de controle. Os efeitos não-lineares neste circuito "nascem" para amplitudes entre 10 e 50 mV. (b) Ressonâncias para três DC *offsets* diferentes. A freqüência encontrada é aproximadamente 210 kHz, dando uma capacitância de cerca de 5,7 pF. $L = 100$ mH, $R = 1$ kΩ, diodo: 1N4007. $V_G = 100$ mV.

da sub-harmônica) para amplitudes de controle em torno de 50 mV. Um aumento de amplitude implica um aumento da capacitância de junção (veja a Figura 2.7), que começa a operar na região não-linear com uma redução da freqüência de ressonância do circuito, como pode ser visto do deslocamento das faixas para a esquerda. Na Figura 3.1 (b) aplicamos uma tensão de amplitude constante e variamos a freqüência para três diferentes DC *offset* do gerador, -40 mV, 0 e 40 mV. Há um aumento da ressonância, porém quase imperceptível. Seu valor é cerca de 210 kHz, o que fornece uma capacitância de cerca de 5,7 pF. O *datasheet* da Fairchild reporta para o 1N4007 uma capacitância total de 15 pF em tensão reversa de 4 V e freqüência de 1 MHz.

Na Figura 3.2 (a) mostramos uma série da tensão no resistor (proporcional à corrente de malha) em regime periódico e a projeção de sua trajetória (tridimensional) no plano $i(t) \times v_G(t)$ (Figura 3.2 (b)). Dada a extrema compressão de informação para o sinal de tensão no diodo em torno da tensão direta ($\sim 0{,}6$ V), utilizaremos principalmente a corrente (tensão no resistor) nos nossos dados. Compare a Figura 2.9 com a série temporal em questão. Ambas possuem período 4 em forma de escada descendente, apesar de as regiões no espaço de parâmetros não serem as mesmas.

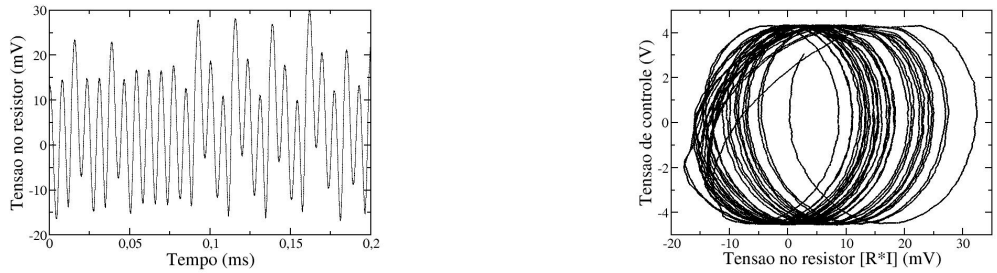
Modificando um pouco mais os parâmetros de amplitude e freqüência, há o dobramento de período e rapidamente caos, como na série da Figura 3.3 (a). A projeção da trajetória no plano $i(t) \times v_G(t)$ parece um borrão no osciloscópio (em modo *RUN*), significando caos. Para uma única aquisição de dez mil pontos (devido à memória limitada do TDS-3032B), não há pontos suficientes para mostrar que a trajetória nunca se fecha (nem se a memória fosse infinita



(a) (b)

Figura 3.2: (a) Série temporal periódica para o circuito RLD. (b) Projeção de uma trajetória periódica (tridimensional) no plano $i(t) \times v_G(t)$ para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $V_G = 9\ V_{pp}$, $f = 150$ kHz e $V_{offset} = 0$ V.

isso seria possível), como se observa da Figura 3.3 (b), em que uma órbita está ainda em construção. Essa figura foi feita com superposição de quatro séries tomadas em aquisições seqüenciais, porém em mesmas condições de parâmetros; possui, portanto, 40 mil pontos.



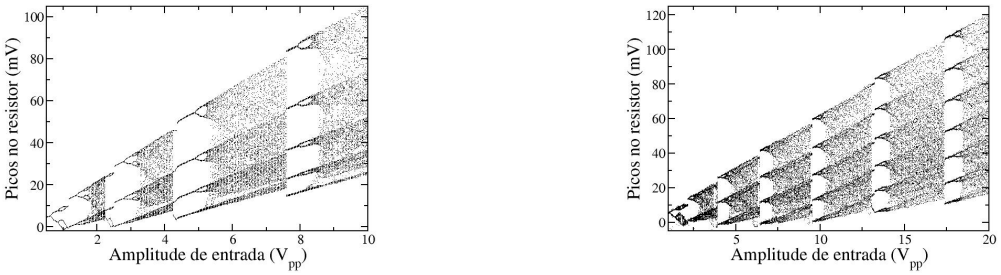
(a) (b)

Figura 3.3: (a) Série temporal caótica para o circuito RLD. (b) Projeção de uma trajetória periódica (tridimensional) no plano $i(t) \times v_G(t)$ para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $V_G = 9\ V_{pp}$, $f = 200$ kHz e $V_{offset} = 0$ V.

Variando a amplitude como parâmetro de controle e adquirindo a corrente (tensão no resistor), construímos diagramas de bifurcação como os da Figura 3.4. Muitas características marcantes podem ser observadas. Primeiro fato a se notar são as adições de período encontradas anteriormente nas simulações (Figuras 2.11 e 2.12). Em baixas amplitudes não chega a

aparecer caos, apenas dois dobramentos de período, o retorno de período 4 para 2 e em seguida um salto (*hopping*) descontínuo do ramo superior. Agora a cascata de Feiggenbaum tem início para cada um dos dois ramos. Após a banda caótica, ocorre a bifurcação para período 3, uma nova tentativa de dobramento frustrada, seguida de um salto descontínuo (*hopping*) dos dois ramos superiores e finalmente a cascata de dobramento de período. E assim segue de modo parecido *ad infinitum* (obviamente não apresentado aqui).

São bastante visíveis as descontinuidades nos contornos das janelas periódicas. "Esse comportamento é bem descrito por crises de contorno e interior do atrator. Tais descontinuidades são freqüentemente indicativos de histerese no sistema."[1] De fato, o parâmetro sendo percorrido em sentido inverso desloca o ponto da bifurcação das janelas periódicas. "Essas transições deslocadas mostram que o sistema tem múltiplas bacias de atração."[2]

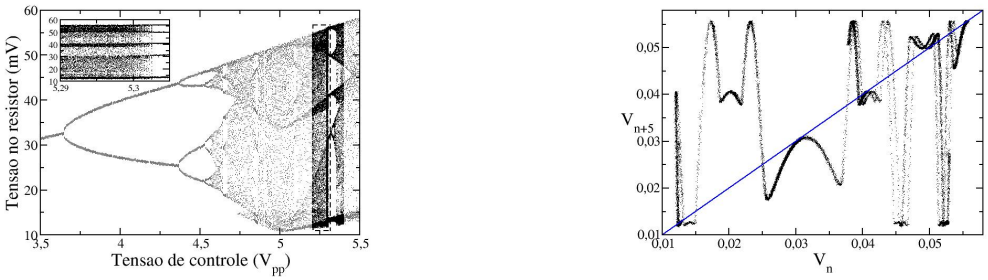


(a) (b)

Figura 3.4: Diagramas de bifurcação experimentais para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 150$ kHz, $V_{\text{offset}} = 0$. (a) $V_G = 0{,}5 \sim 10\ \text{V}_{\text{pp}}$, 100 passos na variação do parâmetro, cada passo com aquisição de 10 mil pontos. (b) $V_G = 1 \sim 20\ \text{V}_{\text{pp}}$, 700 passos na variação do parâmetro, cada passo com aquisição de 10 mil pontos. A menos que especificado em contrário, todas as aquisição são feitas com 10 mil pontos.

Como estamos interessados em fluxos que possam ser representados por mapas unidimensionais, restringimo-nos às regiões de baixa amplitude de controle, em que o diagrama ainda não apresentou adição de período, como na Figura 3.5 (a). Observe que a região apresenta forte semelhança com o mapa logístico até aproximadamente 5 V. A partir daí, há uma retração da região inferior, momento em que há o nascimento de um novo período por replicação. Em destaque, ampliação da transição caos/janela de período 5.

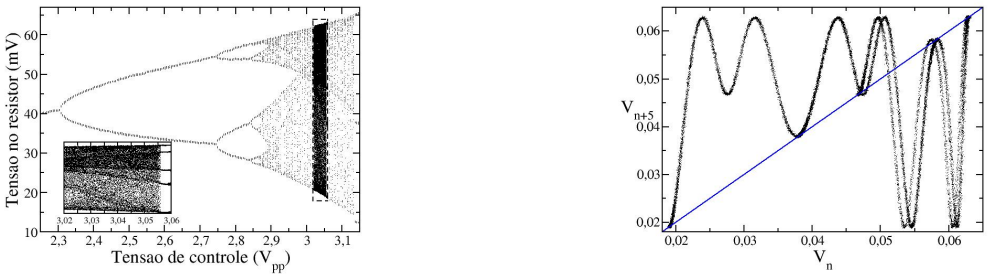
[1] Brorson *et al.* (1983).
[2] idem.



(a) (b)

Figura 3.5: (a) Diagrama de bifurcação experimental para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}5 \sim 5{,}5\ V_{pp}$, 100 passos. Em destaque, $V_G = 5{,}29 \sim 5{,}305\ V_{pp}$, 300 passos. O gerador está com saída em alta impedância. A menos especificado em contrário, todas as medidas nesse trabalho foram feitas com saída do gerador em 50 Ω. (b) Mapa de 5^a iterada para tensão no resistor em $V_G = 5{,}302$ V, evidenciando a bifurcação tangente.

A bifurcação ocorre próximo de 5,302 V. Um mapa de 5^a iterada nesse ponto mostra que essa é uma bifurcação tangente e nota-se muitos "fantasmas" presentes, evidenciando a multidimensionalidade do atrator.



(a) (b)

Figura 3.6: (a) Diagrama de bifurcação experimental para o circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 2{,}25 \sim 3{,}15\ V_{pp}$, 200 passos. Em destaque, $V_G = 3{,}02 \sim 3{,}06\ V_{pp}$, 500 passos; (b) Mapa de 5^a iterada da tensão do resistor, evidenciando a bifurcação tangente. $V_G = 3{,}0555\ V_{pp}$.

O diagrama da Figura 3.6 (a), parecido com o anterior (a única mudança foi a impedância do gerador) porém com maior semelhança com o mapa

logístico, possui uma janela de período 5 numa região mais favorável à unidimensionalidade, pois não sofre influência direta da adição de período. Seu mapa, portanto, mostrado na Figura 3.6 (b), assemelha-se com aquele obtido na simulação da Figura 2.17 (b), porém com os fantasmas característicos de um mapa multidimensional. Novamente é o mapa de uma bifurcação tangente, e sua série temporal começa a apresentar algumas fases periódicas (laminares) interrompidas por irrupções caóticas, até a total periodicadade no ponto de bifurcação. Na Figura 3.7 são mostrados apenas os picos do sinal intermitente adquiridos experimentalmente.

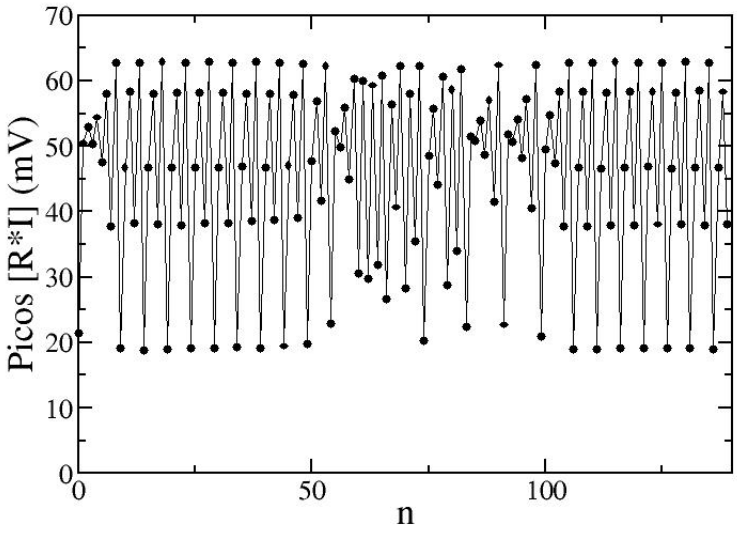


Figura 3.7: Picos do sinal de corrente do circuito RLD na intermitência tipo I. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}0555\ V_{\text{pp}}$.

Dado que o osciloscópio utilizado para as medições amostra apenas 10 mil pontos por aquisição, não é interessante estudar a média do comprimento das fases laminares, pois necessitaríamos de séries muito longas para uma boa confiabilidade dos dados na intermitência (na bifurcação o comprimento da fase laminar tende ao infinito). Optamos então pela média da variável contínua ou dos seus picos, esta última mais conveniente para o processo de aquisição. Obtemos um número razoável de séries num mesmo espaço de parâmetros e tiramos a média de seus picos digitalmente. Maiores detalhes encontram-se na Seção 3.3.

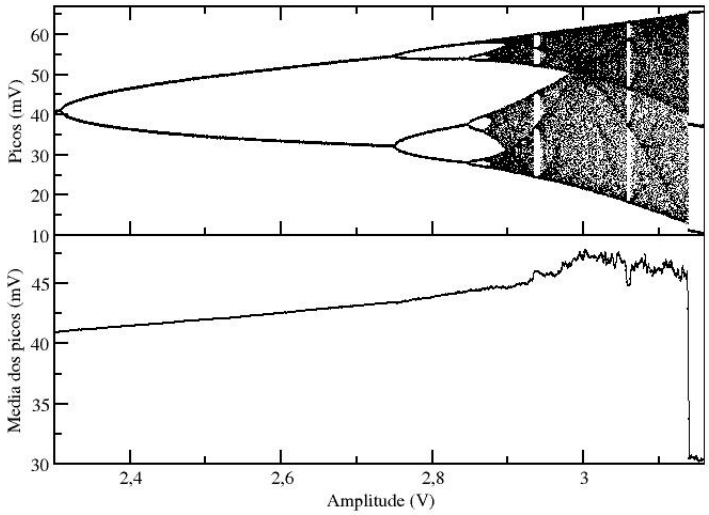
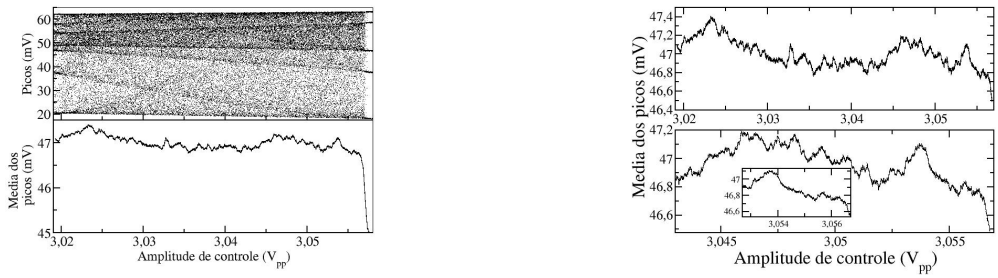


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação para a corrente (em cima) e média dos picos (embaixo) no circuito RLD. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 2{,}3 \sim 3{,}16\ V_{\text{pp}}$, 2000 passos.

Na Figura 3.8 mostramos o primeiro ramo do diagrama de bifurcação para a corrente e sua média. Sua semelhança com o diagrama do mapa logístico é impressionante, sendo verificada o ordenamento de Sarkovskii (veja Seção 1.3 e Figura 1.38). Coletamos os pontos de dobramento de período dessa Figura e obtivemos os valores de $\delta_4 = 4{,}53$ e $\delta_8 = 4{,}62$ para os números de Feigenbaum[3]. Devido à imprecisão dos dados experimentais, essa é uma boa estimativa para $\delta = 4{,}669...$ A média mostra claramente os pontos de bifurcação, porém essa escala não permite verificar uma estrutura fina contida na média. Em outra escala, apresentamos na Figura 3.9 o diagrama próximo à bifurcação tangente e sua média. Podemos observar alguma oscilação que diminui o período com a aproximação do ponto crítico. Observe que se parece muito com a Figura 2.18 do modelo de Perez.

[3] $V_2 = 2{,}3086$, $V_4 = 2{,}7506$, $V_8 = 2{,}8482$ e $V_{16} = 2{,}8693$.



(a) (b)

Figura 3.9: (a) Diagrama de bifurcação para a corrente (em cima) e média dos picos (embaixo) no circuito RLD próximos à bifurcação para a janela de período 5. $R = 100\ \Omega$, $L = 22$ mH, diodo: 1N4007. $f = 70$ kHz, $V_{\text{offset}} = -0{,}2$ V, $V_G = 3{,}019 \sim 3{,}058\ \text{V}_{\text{pp}}$, 800 passos. (b) Média dos picos, com subseqüentes zooms a fim de enfatizar a periodicidade (de período variável) existente.

3.2 Montagem

Abaixo está o circuito utilizado no experimento:

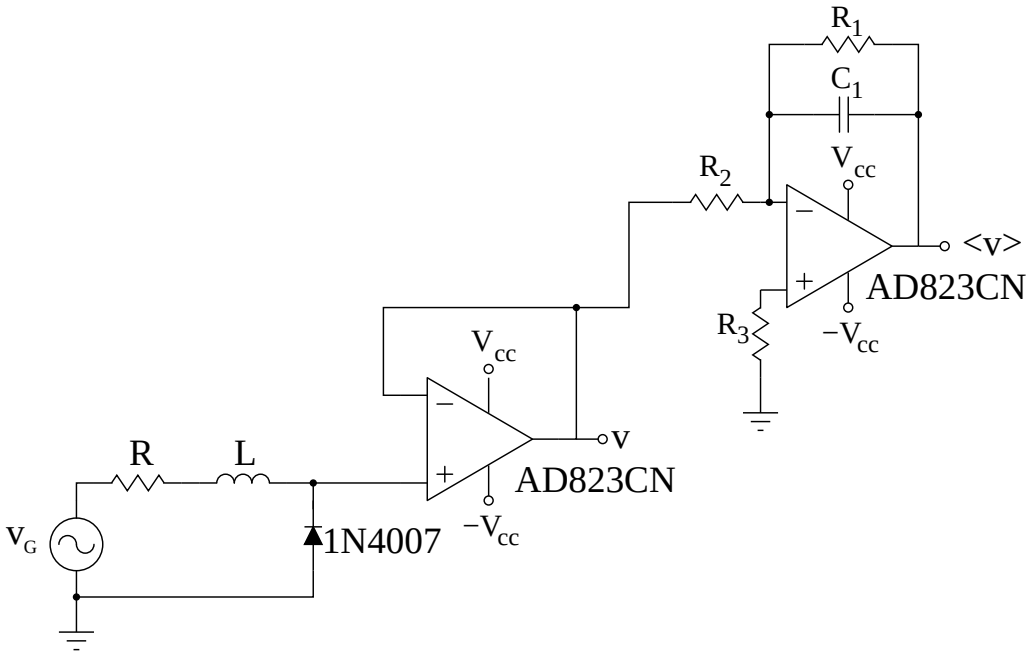


Figura 3.10: Esquema do circuito utilizado no experimento.

Entramos com um sinal do gerador de sinais e uma tensão contínua e simétrica (positiva e negativa) para alimentação dos amplificadores operacionais e saímos com um sinal do sistema (tensão no diodo ou corrente, caso se queira permutar resistor com diodo) e sua média analógica, na mesma placa. O resistor utilizado é de filme fino da ordem de 100 Ω; o indutor é tipo *choke* (muito mais fácil de manusear que o toroidal enrolado com fio de cobre esmaltado), de 22 mH; o diodo é o 1N4007. Para adquirir o sinal sem interferência na medição, utilizamos um *buffer* de alta impedância de entrada, composto por um amplificador operacional na configuração seguidor de tensão. Utilizamos o AD823CN (AD823, 2004). Para tirar uma média analógica implementamos um filtro passa-baixas de 1^a ordem, com freqüência de 3dB ($1/R_1C_1$) da ordem de 1 Hz e ganho DC ($-R_1/R_2$) em torno de -100. O resistor $R_3 = R_1//R_2$ serve para minimizar os efeitos da corrente de polarização de entrada (se bem que os amp-ops possuem transistores JFET no estagio diferencial de entrada). Maiores detalhes sobre amplificadores operacionais e suas configurações, veja Sedra e Smith (2000); Horowitz e Hill (1980).

Os seguintes cuidados devem ser observados no projeto:

- deve ser feita em placa de circuito impresso (PCI), preferencialmente de fibra de vidro (ao invés de fenolite);
- um plano-terra deve cobrir e circundar as trilhas;
- deve-se evitar fios: os conectores são soldados diretamente na placa;
- deve-se evitar soquetes;
- Amp-op: A escolha do operacional para o *buffer* (seguidor de tensão, isolador) é crítica, devendo possuir as propriedades de baixo ruído, alta impedância de entrada, alto *slew-rate*, baixa capacitância de entrada e alta largura de banda. O amp-op de melhor desempenho com encapsulamento DIP (*Dual In-line Package*) encontrado no laboratório é o AD823CN da Analog Devices (16 MHz de largura de banda, 24 V/μs de *slew-rate*, entrada diferencial JFET com 10 TΩ de impedância e 1,8 pF de capacitância de entrada). Dois capacitores de tântalo de 10 μF nos pontos de conexão das tensões DC (+12 e −12 V) com a placa de circuito impresso filtram o ruído da fonte DC e interferências do ambiente. Além disso, cada um dos amp-op deve ter capacitores de cerâmica de 10 a 100 nF ligados (próximos) a seus pinos de alimentação; isso evita ruídos de alta freqüência proveniente de outras partes do circuito e do ambiente.
- Indutor: Indutância de alto valor, da ordem de 1 a 100 mH, é necessária para se obter diagrama de bifurcação dentro de uma faixa de baixa freqüência (da ordem de 10 a 100 kHz). A disponibilidade no mercado é restrita, sendo encontrado apenas *chokes* de 22 mH ou tipo resistor de 1 mH. Maiores valores devem ser produzidos manualmente; para tal, deve-se enrolar fio de cobre esmaltado em torno de um núcleo de ferrite toroidal (encontrado em antigas fontes de alimentação de computador). O número de voltas N deve ser estimado utilizando-se da seguinte relação:

  $$L = k\,N^2.$$

  Mede-se L para um valor de N pequeno e descobre-se k. Então tem-se o número de voltas para a indutância que se quer.

  A medição da indutância pode ser feita com um multímetro; caso não haja precisão suficiente, utiliza-se um impedancímetro. Pode-se ainda montar um circuito LC e buscar sua freqüência de ressonância, dada por:

  $$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Como se conhece C, acha-se L. Outro método mais preciso porém mais trabalhoso consiste na utilização da ponte de Maxwell (Horowitz e Hill, 1980).

- Diodo: Diodos de chaveamento (dos tipo 1N4148) possuem alta velocidade (pequeno C_{j0}, menor que 2 pF) e portanto não permitem a existência de comportamento caótico ou mesmo bifurcação (Carroll e Pecora, 2002). Apenas diodos retificadores (séries 1N400x e 1N540x, por exemplo) servem para nosso propósito (1N4007, 2007).

3.3 Controle e aquisição de dados

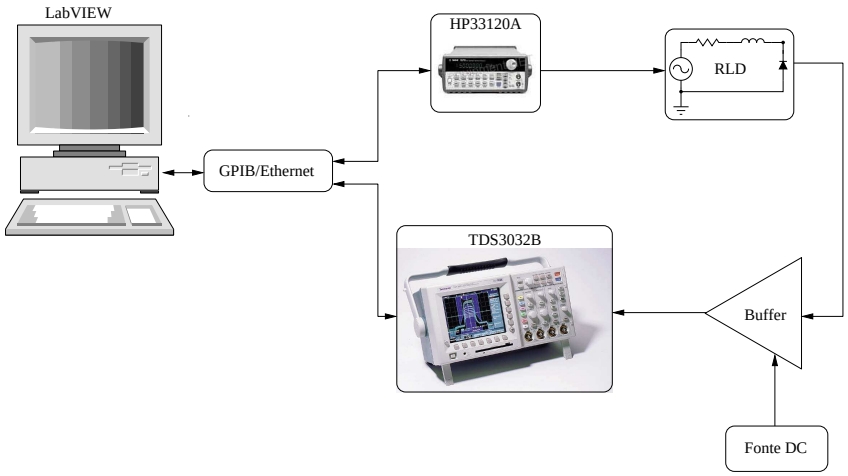


Figura 3.11: Esquema geral de ligação entre os equipamentos utilizados.

O sistema de controle e aquisição de dados é composto por um computador (controle, aquisição e armazenamento) rodando LabVIEW 7.1, um gerador de sinais e um osciloscópio. O computador possui uma placa GPIB (Adlink PCI-3488A) e uma placa Ethernet como interfaces de comunicação. Para nosso caso, utilizamos gerador de sinais HP 33120A (comunicando-se por GPIB) e osciloscópio Tektronix TDS-3032B (possui apenas comunicação por Ethernet). Um software em LabVIEW é responsável pelo controle, aquisição e armazenamento de todo o processo.

O algoritmo de controle segue o seguinte esquema geral:

1. Os equipamenos são inicializados, com endereços GPIB configurados; gerador ajustado com os parâmetros iniciais (amplitude, freqüência e *offset*) e osciloscópio pronto para enviar dados (trigger, escala, etc).

2. O gerador modifica o parâmetro para iteração i;

3. Um *delay* é aplicado para estabilização do circuito;

4. O osciloscópio envia os dados para o computador;

5. Os picos são extraídos dos dados e plotados em função do tempo;

6. Os picos são plotados e guardados com abcissa no i-ésimo parâmetro (diagrama de órbita);

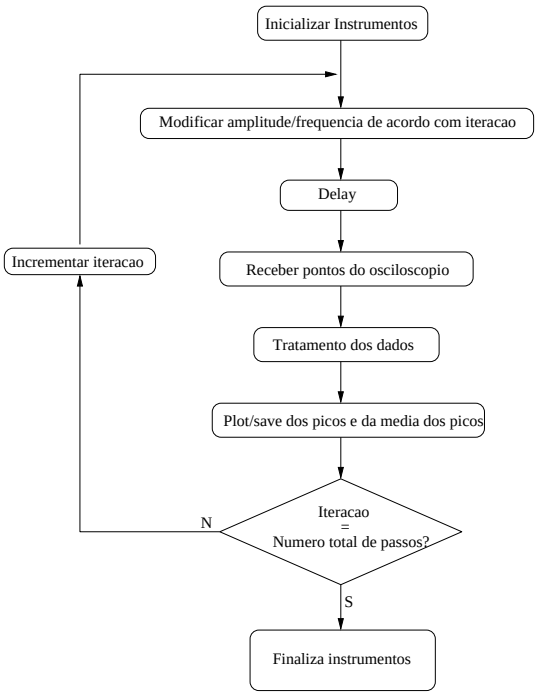


Figura 3.12: Algoritmo de controle e aquisição implementado em LabVIEW 7.1.

7. A média das fases laminares é efetuada;

8. A média dos picos é efetuada;

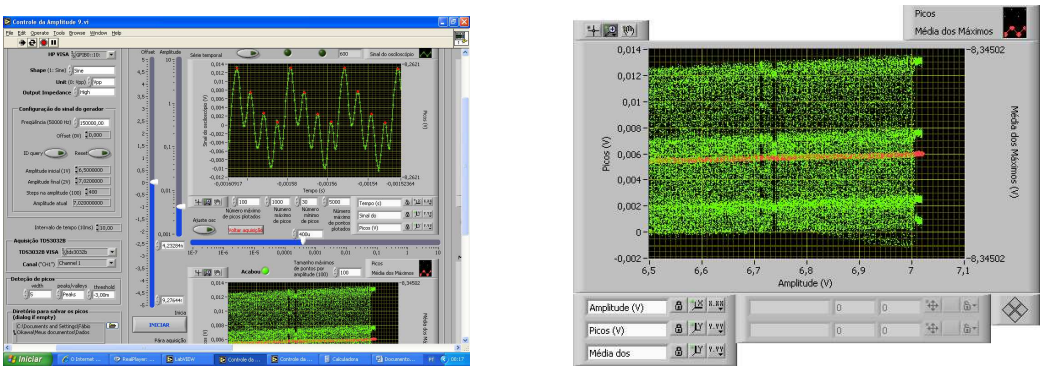
9. Incremento da iteração;

10. A iteração é comparada com o número de passos; se não chegou ao fim, volte para o passo 2; senão terminou.

O osciloscópio possui apenas 8 bits de resolução vertical, portanto deve-se utilizar a menor escala (toda a tela) possível para se ter um aproveitamento mais eficiente das divisões. Por exemplo, para um sinal de 1 V ocupando toda tela do osciloscópio, o intervalo vertical entre pontos consecutivos é necessariamente múltiplo de $1/(2^8 - 1) = 3{,}92$ mV. Caso se elimine todo o ruído, nosso erro mínimo cometido na conversão A/D será de 0,39%. A resolução horizontal depende da taxa de amostragem, que é no máximo de 2,5 GS/s[4]. Basicamente depende da resolução temporal e do número de pontos amostrados (máximo de 10 mil). Portanto, supondo 10 mil pontos e

[4]S: abreviação para *Sample*, ou seja, amostragem.

10 divisões de tempo na tela, a taxa é dada por $10000/(10 \times (\text{tempo/div})) = 1000/(\text{tempo/div})$. A largura de banda do TDS3032B é de 300 MHz, e é mais do que suficiente para nossas aplicações, que é da ordem de 100 kHz.



(a) (b)

Figura 3.13: (a) Tela do programa de controle e aquisição feito em LabVIEW; (b) Um exemplo de diagrama de bifurcação adquirido em tempo real.

O conceito de programação em LabVIEW é inovador, mas difere apenas aparentemente de outras linguagens tradicionais como C/C++ ou Java. Os conceitos de variáveis, condicionais, laços de controle, etc, são os mesmos. A diferença está na visualização do algoritmo, quase toda gráfica, e na programação orientada a eventos, em que um procedimento é executado apenas quando da ativação de um evento, por exemplo, um clique do *mouse* em um botão. Esse tipo de programação está presente em implementações de GUI (*Graphical User Interface*), freqüentemente disponíveis apenas como acessórios do C++ (GTK[5]) ou pacotes do Python (como Tkinter[6] ou pyGTK[7]).

3.3.1 VISA

A comunicação com os instrumentos não precisa ser especificada na programação. Existe um esforço de várias grandes empresas[8] na padronização de uma interface chamada VISA (*Virtual Instrument Software Architecture*)[9]. Conforme descrito no site acima citado, "VISA é a linguagem de software

[5] *Gimp ToolKit.*
[6] Nativo do Python.
[7] Adaptação do GTK para Python.
[8] National Instruments, GenRad, Racal Instruments, Tektronix e Wavetekna se uniram e fundaram a *VXIplug&play Systems Alliance* com tal objetivo.
[9] http://cnx.org/content/m12288/latest/

VXIplug&play I/O que é a base para os esforços de padronização do VXIplug&play Systems Alliance. VISA por si mesmo não provê capacidade de programar [o controle de] instrumentação. É um API de alto-nível que chama drivers baixo-nível. VISA pode controlar VXI, GPIB, serial ou instrumentos com plataforma no computador e faz a chamada apropriada do driver dependendo do tipo de instrumento usado." Na prática, VISA é um conjunto de funções na camada mais baixa do *software* servindo de interface de comunicação com o *hardware* (GPIB, serial, VXI, etc) através de um conjunto de *drivers* de instrumentos. Se um programa é escrito para se comunicar com um osciloscópio utilizando VISA, por exemplo, a conexão entre o computador e o osciloscópio poderá ser feita com GPIB, serial ou Ethernet, entre outros. O *driver* a ser utilizado é provido pelo VISA, sem precisar mudar nenhuma função ao se mudar a conexão.

Na terminologia de programação VISA, um **recurso** é "qualquer instrumento no sistema"[10], como a porta serial ou GPIB; uma **sessão** é a interface de comunicação utilizada, tendo de ser aberta sempre que se quiser comunicar com um recurso; e **descritor do instrumento** é o "nome exato do recurso, especificando o tipo de interface (GPIB, VXI, ASRL), o endereço do dispositivo (lógico ou primário) e o tipo de sessão VISA (INSTR ou Event). O descritor do instrumento é similar ao número de telefone, o recurso é similar à pessoa com quem se quer falar e a sessão é similar à linha de telefone. Cada chamada usa sua linha própria, e cruzar essas linhas resulta em um erro".[11]

No nosso caso, em que utilizamos osciloscópio da Tektronix e gerador de funções da HP, bibliotecas estão disponíveis no site da National Instruments[12] para as funções básicas e exemplos de utilização. Infelizmente, por ser de alto-nível, a velocidade de aquisição na biblioteca disponível para leitura não é otimizada (cada requisição de transferência possui um limite de pontos, tendo de ser feita mais de uma vez). Abrimos então a caixa-preta e personalizamos para melhora de performance.

O osciloscópio TDS3032B possui apenas interface de comunicação Eternet. A velocidade de transferência é cerca de 1,2 MB/s, aproximadamente a mesma da GPIB (IEEE 488.2). O gerador HP33120A não necessita de altas taxas de transferência de dados, mas utilizamos GPIB para a comunicação. Como sua programação é mais simples, não houve necessidade de alteração significativa da programação contida em sua biblioteca.

Nossa placa de aquisição GPIB é a Adlink PCI-3488A. Infelizmente, al-

[10] idem.
[11] ibidem.
[12] www.ni.com

guns procedimentos são necessários para seu correto funcionamento com o NI LabVIEW 7.1. Abaixo descrevo os passos dados pelo suporte técnico:

1. Instalar NI LabVIEW 7.1;
2. Remover NI 488.2 (Painel de controle → Alterar ou remover programas → National Instruments → Alterar → Remover NI 488.2;
3. Instalar NI VISA 3.3 ou superior;
4. Instalar driver Adlink GPIB PCI-3488A;
5. Painel de controle → Adicionar hardware → Deteção automática → Porta de comunicação PCI (com CD da Adlink na bandeja);
6. Testar abrindo o GBIB Utility no menu da Adlink com o gerador conectado e ligado. Se tudo correu bem, o nome do dispositivo está disponível. Se não, entre em contato comigo[13] ou com o suporte técnico da Adlink.

[13](81) 3268 9542, (81) 9650 8715 ou fabio.oikawa@gmail.com

Conclusão

O presente trabalho deu contribuições a uma melhor compreensão da dinâmica caótica em um circuito eletrônico composto por resistor, indutor e diodo (RLD), além de ajudar no aprimoramento da instrumentação e aquisição de dados do laboratório. Foram simulados e adquiridos experimentalmente diagramas de bifurcações, médias dos máximos e mapas de retornos do circuito RLD, dando ênfase nas bifurcações tangentes. Evidência qualitativas de um novo fenômeno foram encontradas: oscilações na estrutura fina de variáveis estatísticas presentes em sistemas físicos reais quando da intermitência de Pomeau-Manneville tipo I. Um refinamento da instrumentação e aquisição será efetuado para melhor caracterizar o caos e as oscilações na intermitência. O circuito RLD pode ser modelado apenas aproximadamente por um mapa unidimensional, e isso pode vir a atrapalhar a observação dessas oscilações. Além do qual seus parâmetros sofrem influência dramática de fatores externos como temperatura e ruído do ambiente. Apesar de tudo, esse sistema talvez seja o mais simples para se estudar Caos e Dinâmica Não-Linear e ainda continua sendo explorado como protótipo experimental para se comprovar qualquer teoria a respeito.

Apêndice A

Um pouco de História

A história envolvendo o termo "Caos" remonta aos mitos de criação antigos, em que uma tensão entre Ordem e Caos, ambos parte do Absoluto, origina o Universo. Entre os gregos antigos a palavra (que é derivada do grego $\chi\acute{\alpha}o\varsigma$) não possuía o significado que comumente se dá de "desordem" ou "destruição", mas sim o de "vazio primordial, espaço"; "a potencialidade de coexistência de todos os opostos, sem que sua existência individual possa se manifestar", fazendo parte do Absoluto, junto com a Ordem (Cosmos). Um texto de Ovidio (43 a.C.-18 d.C.), Metamorfoses, dá uma idéia da sua origem (Gleiser, 1999):

"Antes de o oceano existir, ou a terra, ou o firmamento,
A Natureza sem forma. Caos era chamada,
Com a matéria bruta, inerte, átomos discordantes
Guerreando em total confusão:
Não existia o Sol para iluminar o Universo,
Não existia a Lua, com seus crescentes que lentamente se preenchem;

...

Esse Deus, que do Caos
Trouxe ordem ao Universo, dando-lhe
Divisão, subdivisão, quem quer que ele seja,
Ele moldou a terra na forma de um grande globo,
Simétrica em todos os lados, e fez com que as águas se
Espalhassem e elevassem, sob a ação dos ventos uivantes [...]"

"[...] terra, sem dúvida, existia, , [...], mas terra onde nenhum homem pode andar [...]. No mesmo corpo, quente lutava contra frio, molhado contra seco, duro contra macio [...]". "E então Deus, cuja origem permanece inex-

plicável, aparece e organiza o Caos, separando os opostos e arranjando os elementos básicos (o fogo, o ar, a terra e a água) em seus devidos lugares, de acordo com a doutrina aristotélica" (texto retirado de Gleiser (1999)).

Entretanto, apenas no século XIX cientistas passaram a tratar o caos como parte da natureza a ser observada e estudada. Possivelmente, a primeira publicação relacionada ao tema é atribuída a Jacques Hadamard, que em 1898 mostrou que trajetórias de bolas bilhar numa superfície de curvatura constante negativa apresentava comportamento caótico, e que todas são instáveis e divergem exponencialmente umas das outras. Posteriormente, em 1900, Henri Poincaré se enveredou no problema dos três corpos e descobriu a possibilidade de existência de órbitas não-periódicas restritas no espaço, porém sem colapsar num ponto fixo. Desde então, contribuíram para a fundamentação da nova disciplina principalmente G. D. Birkhoff, A. N. Kolmogorov, M. L. Cartwright, J. E. Littlewood e Stephen Smale, até o desenvolvimento dos computadores digitais, quando então o meteorologista Edward Lorenz, fazendo simulações computacionais de tempo climático, percebeu que pequenas diferenças nas condições iniciais (ou no número de dígitos utilizados) alterava a evolução das trajetórias de modo surpreendente (Wikipedia, 2007). O Caos acabara de nascer.

Talvez a prioridade não caiba a um grande cientista, mas sim a um grande escritor, sir Edgar Alan Poe, numa passagem do seu livro *The Mystery of Marie Rogêt*:

Pois, no que diz respeito a este último ramo da suposição, deveria ser considerado que a mais insignificante variação nos fatos dos dois processos pode dar origem aos mais importantes erros, desviando completamente os dois cursos de eventos: similarmente, em aritmética, um erro que, em sua própria individualidade, pode ser inapreciável, produz, em longo prazo, com uma grande número de multiplicações em todos os pontos, um resultado extremamente em contradição com a verdade.[1]

[1]For, in respect to the latter branch of the supposition, it should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations, be diverting thoroughly the two courses of events: very much as, in arithmetic, an error which, in its own individuality, may be inappreciable, produces, at lenght, by dint of multiplication at all points, a result enormously at variance with truth.

Referências Bibliográficas

1N4007 (2007). *DataSheet 1N4007*. Diversos fabricantes: Motorola, Philips, Fairchild, ON Semiconductor.

AD823 (2004). *DataSheet AD823*. Analog Devices.

Batista, M. S. e Caldas, I. L. (1999). Type-II intermittency in the driven double scroll circuit. *Physica D*, **132**:325–338.

Brorson, S. D., Dewey, D., e Linsay, P. S. (1983). Self-replicating attractor of a driven semiconductor oscillator. *Physical Review A*, **28**(2):1201–03.

Carroll, T. L. e Pecora, L. M. (2002). Parameter ranges for the onset of period doubling in the diode resonator. *Physical Review E*, **66**:46219.

Chen, C.-T. (1998). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Oxford, 3rd edição.

Cho, J.-H., Ko, M.-S., Park, Y.-J., e Kim, C.-M. (2002). Experimental observation of the characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise. *Physical Review E*, **65**:036222.

Cvitanović, P. (1989). *Universality in Chaos*. Adam Hilger, 2nd edição.

de Moraes, R. M. e Anlage, S. M. (2003). Unified model and reverse recovery nonlinearities of the driven diode resonator. *Physical Review E*, **68**:026201.

de S. Cavalcante, H. L. D. (2003). *Bifurcações com Intermitência e Sincronismo de Sistemas Caóticos: Circuitos Eletrônicos e Lasers*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Pernambuco.

de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2000). Bifurcations and averages in the logistic map. *Dynamics and Stability of Systems*, **15**(1):35–41.

de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2004). Logarithmic periodicities in the bifurcations of type-I intermittent chaos. *Physical Review Letters*, **92**(25):254102.

de S. Cavalcante, H. L. D., Rios Leite, J. R., e Vasconcelos, G. L. (2001). Power law periodicity in the tangent bifurcations of the logistic map. *Physica A*, **295**:291–296.

de Siqueira, E. M. (2005). Caos intermitente em circuitos eletrônicos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco.

Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**:25.

Gleiser, M. (1999). *A Dança do Universo – dos mitos de criação ao Big Bang*. Companhia das Letras, São Paulo, 2a. edição.

GNU (2007). www.gnu.org. GNU is Not Unix.

GSL (2007). www.gnu.org/software/gsl/. GNU Scientific Library.

Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of vector fields*, volume 42. Springer-Verlag, Nova Iorque.

Hale, J. K. e Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcation*. Springer-Verlag.

Hilborn, R. C. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics – An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido.

Hirsch, J. E., Huberman, B. A., e Scalapino, D. J. (1982). Theory of intermittency. *Physical Review A*, **25**(1):519–532.

Horowitz, P. e Hill, W. (1980). *The Art of Eletronics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edição.

Huang, J.-Y. e Kim, J.-J. (1987). Type-II intermittency in a coupled nonlinear oscillator: experimental observation. *Physical Review A*, **36**(3):1496.

Hunt, E. R. (1982). Comment on a driven nonlinear oscillator. *Physical Review Letters*, **49**:1054.

Hunt, E. R. e Rollins, R. W. (1984). Exactly solvable model of a physical system exhibiting multidimensional chaotic behavior. *Physical Review A*, **29**(2):1000–2.

Jeffries, C. e Perez, J. (1982). Observation of a Pomeau-Manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Physical Review A*, **26**(4):2117–2122.

Kim, C.-M., Rim, S., Kye, W.-H., Lee, S.-Y., Choi, I.-H., Yin, G.-S., e Park, Y.-J. (2004). Experimental observation of on-off intermittency in electronic circuits. *Journal of the Korean Physical Society*, **45**:848–852.

Kim, C.-M., Yim, G.-S., Kim, Y. S., Kim, J.-M., e Lee, H. W. (1997). Experimental evidence of characteristic relations of type-I intermittency in an electronic circuit. *Physical Review E*, **56**(3):2573–77.

Kim, C.-M., Yim, G.-S., Ryu, J.-W., e Park, Y.-J. (1998). Characteristic relations of type-III intermittency in an electronic circuit. *Physical Review Letters*, **80**:5317.

Li, T.-Y. e York, J. A. (1975). Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, **82**:985–992.

Linsay, P. S. (1981). Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. *Physical Review Letters*, **47**:1349–1352.

Manneville, P. e Pomeau, Y. (1979). Intermittency and the Lorenz model. *Physics Letters*, **75A**:1–2.

Matsumoto, T., Chua, L. O., e Tanaka, S. (1984). Simplest chatic nonautonomous circuit. *Physical Review A*, **30**(2):1155.

May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, **261**:459.

Numerical (2007). www.nr.com. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.

Nussenzveig, H. M. (1991). *Complexidade & Caos*. Editora UFRJ/COPEA, 2a. edição.

Ott, E. (1993-1997). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.

Perez, J. M. (1985). Mechanism for global features of chaos in a driven nonlinear oscillator. *Physical Review A*, **4**(32):2513–16.

Pomeau, Y. e Manneville, P. (1980). Intermittent transitions to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, **74**:189.

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., e Flannery, B. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts, EUA, 3rd. edição.

Rezende, S. M. (1996). *A Física de Materiais e Dispositivos Eletrônicos*. Editora Universitária da UFPE.

Rollins, R. W. e Hunt, E. R. (1982). Exactly solvable model of a physical system exhibiting universal chaotic behavior. *Physical Review Letters*, **49**(18):1295–98.

Sedra, A. S. e Smith, K. C. (2000). *Microeletrônica*. Pearson Education do Brasil Ltda, São Paulo, 4a edição.

Sornette, D. (1998). Discrete-scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, **297**:239–270.

Strogatz, S. H. (1998). *Nonlinear Dynamics and Chaos – with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, EUA, 1st. edição.

Su, Z., Rollins, R. W., e Hunt, E. R. (1989). Simulation and characterization of strange attractors in driven diode resonator systems. *Physical Review A*, **40**(5):2698–2705.

Tanaka, S., ichi Higuchi, S., e Matsumoto, T. (1996). Sheet structure in global bifurcations of a driven r-l-diode circuit. *Physical Review E*, **54**(6):6014–28.

Testa, J., Pérez, J., e Jeffries, C. (1982a). Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator. *Physical Review Letters*, **48**(11):714–717.

Testa, J., Pérez, J., e Jeffries, C. (1982b). Testa, Pérez, and Jeffries respond. *Physical Review Letters*, **49**:1055.

Torres, G. L. (2000). *Sistemas de Controle (notas de aula)*. UFPE.

van Buskirk, R. e Jeffries, C. (1985). Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, **31**(5):3332–3357.

Wikipedia (2007). www.wikipedia.org. The free encyclopedia.

Índice Remissivo

Órbita, 2, 20
    Periódica, 23

Análise de estabilidade linear, 7
    em fluxo multidimensional, 8
    em fluxo unidimensional, 8
    em mapa unidimensional, 22
Atrator, 5
    Estranho, 17
Auto-similaridade, 38

Bacia de atração, 4
Bifurcação, 11, 23
    Forquilha, 14
      Subcrítica, 15
      Supercrítica, 15
    Global, 11, 27
    Hopf, 16
      Subcrítica, 29
    Local, 11, 27
    por dobramento de período, 23
    Sela-nó, 12, 29
    Tangente, 12, 23, 29
    Transcrítica, 13

Caos, 17, 26
Cascata de dobramento de período, 27
Ciclo limite, 5, 20
circuito RLD, 40
Crise, 39

Diagrama
    de Órbita, 28
Dimensão, 1
    Fractal, 17

Equação
    Diferença, 20
Espaço de Estados
    Cilíndrico, 6
Espaço de fase, 2
Espiral
    Estável, 5, 9
    Instável, 5, 9
Experimento, 63
Expoente crítico, 32
Expoente de Lyapunov
    em fluxo multidimensional, 10
    em fluxo unidimensional, 8
    em mapa unidimensional, 25

Fase laminar, 29
    Comprimento médio, 30
Fluxo, 3
Formas normais, 12
Fractal, 38

Hipótese ergódica, 33

Intermitência, 28
    Tipo I, 29
    Tipo II, 32
    Tipo III, 32

Jacobiano, 9, 20
Janela periódica, 28

Média temporal, 33

Mapa, 20
de Lorenz, 19
Escalar, 20
Iterado, 20
Logístico, 33
Unidimensional, 20
Unimodal, 21
Multiplicadores de Floquet, 20, 29

Nó
Estável, 5, 9
Instável, 5, 9
Número de Feigenbaum, 27

Ordem, 1
Ordenamento de Sarkovskii, 28

Ponto
Crítico, 4
de equilíbrio, 4
de sela, 5, 10
Estacionário, 4
Fixo, 4
Hiperbólico, 4
Não-hiperbólico, 23
Singular, 4
Princípio da Superposição, 2

Quasi-periodicidade, 6

Região Invariante, 6
Repulsor, 5
Retrato de fase, 3
Estruturalmente estável, 4
Estruturalmente instável, 23
Rota para o caos, 18
Runge-Kutta, 53

Seção de Poincaré, 18
Separatriz, 4
Sistema
Autônomo, 2
Conservativo, 3
de tempo contínuo, 2
de tempo discreto, 20
Dissipativo, 3
Não-autônomo, 2
Não-linear, 2
Stair-step, 21
stiff, 52

Teorema, Sombreamento55
da existência e unicidade, 2
de Hartman-Grobman, 7
de Poincaré-Bendixson, 6
Teoria
de renormalização, 30
Toro, 6
Trajetória, 2, 20

Universalidade, 18, 27

Variáveis de estado, 1