



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS RECIFE
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

WODSON FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA

**CARTAS DE CONTROLE MULTIVARIADAS E SUA
IMPORTÂNCIA NO CONTROLE ESTATÍSTICO DE
QUALIDADE: ESTUDO DE CASO**

RECIFE
2023

WODSON FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA

**CARTAS DE CONTROLE MULTIVARIADAS E SUA
IMPORTÂNCIA NO CONTROLE ESTATÍSTICO DE
QUALIDADE: ESTUDO DE CASO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial à obtenção do título de
Bacharel de Estatística da Universidade Federal
de Pernambuco.

ORIENTADOR: PROF. GETÚLIO JOSÉ AMORIM DO AMARAL

RECIFE
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Wodson Fernando Oliveira da.

Cartas de controle multivariadas e suas importâncias no controle estatístico:
estudo de caso / Wodson Fernando Oliveira da Silva. - Recife, 2023.

19 p. : il., tab.

Orientador(a): Getúlio José Amorim do Amaral

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Estatística -
Bacharelado, 2023.

Inclui referências.

1. Carta de Controle Multivariada. 2. Controle Estatístico de Qualidade. 3.
Gráfico T^2 de Hotelling. I. Amaral, Getúlio José Amorim do. (Orientação). II.
Título.

510 CDD (22.ed.)

WODSON FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA

**CARTAS DE CONTROLE MULTIVARIADAS E SUA
IMPORTÂNCIA NO CONTROLE ESTATÍSTICO DE
QUALIDADE: ESTUDO DE CASO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial à obtenção do título de
Bacharel de Estatística da Universidade Federal
de Pernambuco.

Aprovado em: 19/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof^o. Dr. Getúlio José Amorim do Amaral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dra. Maria Cristina Falcão Raposo (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. Manoel Raimundo de Sena Júnior (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

O controle estatístico de qualidade é uma ferramenta fundamental para as empresas garantirem a consistência e a melhoria contínua de seus processos produtivos. Tradicionalmente, as cartas de controle univariadas têm sido amplamente utilizadas para monitorar características individuais de qualidade. No entanto, muitas vezes, os processos produtivos estão sujeitos a múltiplas variáveis simultaneamente, o que torna necessário o uso das cartas de controle multivariadas. Essas cartas permitem monitorar simultaneamente várias variáveis relacionadas ao processo, fornecendo uma visão abrangente e precisa do desempenho do sistema produtivo. Ao identificar padrões, tendências e relações entre as variáveis, as cartas multivariadas auxiliam na detecção precoce de problemas, implementação de ações corretivas efetivas e melhoria contínua dos processos. Este presente trabalho tem por objetivo fazer uma revisão bibliográfica sobre as cartas de controle multivariadas e realizar um estudo de caso aplicados

Palavra-chave: Carta de Controle Multivariada; Controle Estatístico de Qualidade; gráfico T^2 de Hotelling.

Abstract

Statistical quality control is a fundamental tool for companies to ensure consistency and continuous improvement in their production processes. Traditionally, univariate control charts have been widely used to monitor individual quality characteristics. However, production processes are often subject to multiple variables simultaneously, necessitating the use of multivariate control charts. These charts allow for the simultaneous monitoring of various process-related variables, providing a comprehensive and accurate view of the system's performance. By identifying patterns, trends, and relationships among the variables, multivariate charts assist in the early detection of problems, implementation of effective corrective actions, and continuous process improvement. This present work aims to conduct a literature review on multivariate control charts and present a case study application.

Keywords: Multivariate Control Chart; Statistical Quality Control; Hotelling's T^2 chart.

Sumário

Sumário	5
1 Introdução	6
2 Referencial Teórico	7
2.1 Controle Estatístico de Qualidade	7
2.2 Cartas de Controle	7
2.3 Carta de Controle Univariada	8
2.4 Carta de Controle Multivariada	9
3 Uso Prático de Cartas de Controle Multivariada	10
3.1 Caso 1	10
3.2 Caso 2	11
3.3 Caso 3	12
3.4 Caso 4	14
3.5 Caso 5	16
4 Conclusão	18
5 Referências	18

1 Introdução

O controle de qualidade teve seu início por volta de 1930, com W.A. Shewhart considerado o pai do controle estatístico de qualidade. Ele introduziu a técnica das cartas de controle. Além disso, Dodge e Romig contribuíram com a metodologia de Aceitação por Amostragem (Reis, 2001).

O Controle Estatístico de Qualidade (CEQ) é uma abordagem sistemática utilizada para monitorar e controlar a qualidade de um processo de produção ou fabricação. Constitui-se como uma ferramenta essencial para assegurar que os produtos ou serviços estejam em conformidade com os padrões e requisitos preestabelecidos de qualidade. Através da aplicação de técnicas estatísticas na coleta e análise de dados, as organizações conseguem embasar suas decisões por meio de uma análise objetiva. Isso possibilita a identificação e redução da variabilidade do processo, resultando na minimização de defeitos e na garantia de uniformidade na produção. Como consequência, há o aumento da satisfação do cliente e a manutenção de um elevado padrão de qualidade em todas as operações.

Uma variedade de cartas de controle está disponível, inclusive as cartas de controle multivariadas, que são aplicadas quando os dados apresentam variáveis correlacionadas. Estas cartas têm como objetivo ilustrar a interdependência entre as variáveis e demonstrar como elas afetam conjuntamente um processo ou resultado. A título de exemplo, uma carta de controle multivariada pode ser empregada para avaliar se a temperatura e a pressão atuam de forma conjunta no gerenciamento da produção de peças plásticas moldadas por injeção.

Se utilizarmos cartas de controle univariadas separadamente em uma situação multivariada, os erros do tipo I (rejeitar uma hipótese nula que é realmente verdadeira) e a probabilidade de um ponto ajustar-se corretamente dentro dos limites de controle não correspondem aos seus valores esperados. No entanto, as cartas de controle multivariadas apresentam uma complexidade maior na interpretação em comparação com as cartas de controle de Shewhart. Um exemplo disso é que a escala nas cartas de controle multivariadas não guarda relação com a escala de qualquer uma das variáveis. Adicionalmente, as cartas de controle multivariadas não fornecem indícios sobre qual variável (ou combinação de variáveis) causou o surgimento dos pontos fora de controle .

Este estudo tem como objetivo a análise das cartas de controle multivariadas, realizando uma breve comparação com as cartas de controle univariadas, com o propósito de destacar a importância dessa investigação no contexto do aprimoramento do monitoramento e otimização de processos.

2 Referencial Teórico

2.1 Controle Estatístico de Qualidade

O Controle Estatístico de Qualidade (CEQ) representa uma abordagem embasada na aplicação de técnicas estatísticas, com o propósito de monitorar, controlar e aprimorar a qualidade de produtos e processos, visando assegurar a qualidade dos itens ou serviços disponibilizados por uma organização. É uma ferramenta de considerável recorrência em variados setores industriais, destinada à redução da variabilidade, detecção de problemas e embasamento de decisões em dados concretos. De acordo com Montgomery (2009), o CEQ exerce um papel fundamental na garantia da conformidade dos produtos com os requisitos delineados, ao mesmo tempo que contribui para a diminuição de defeitos, o incremento da eficiência e a satisfação do cliente. Mediante a análise estatística dos dados obtidos durante o ciclo produtivo, o CEQ capacita a detecção de flutuações indesejáveis e a orientação de medidas corretivas, fornecendo um alicerce sólido para o contínuo aprimoramento da qualidade.

O Controle Estatístico de Qualidade desempenha um papel fundamental na eficaz gestão da qualidade, conforme destacado por Juran (1992). Através da aplicação de ferramentas estatísticas, tais como cartas de controle e análise de tendências, torna-se possível identificar variações atípicas, estabelecer limites de controle e adotar medidas corretivas de maneira oportuna. Isso contribui para a prevenção de defeitos, a redução do desperdício e a otimização dos processos de produção. Adicionalmente, o CEQ viabiliza a tomada de decisões embasadas em evidências, oferecendo uma abordagem sistemática e objetiva para a contínua melhoria da qualidade.

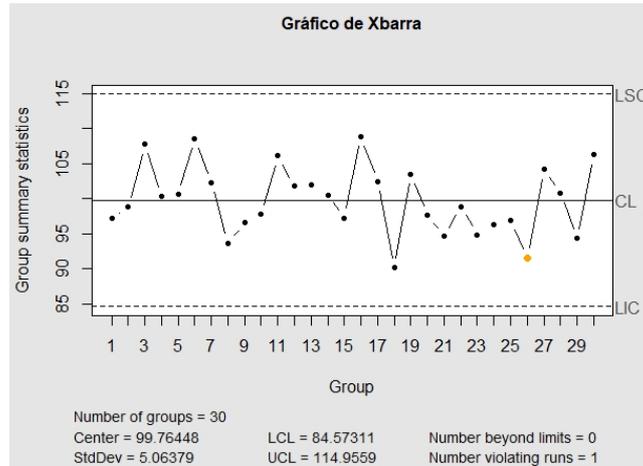
2.2 Cartas de Controle

Uma das principais técnicas empregadas no Controle Estatístico de Qualidade (CEQ) consiste na elaboração e análise de gráficos de controle. Estes gráficos possibilitam a monitorização visual do desempenho dos processos ao longo do tempo. Conforme destacado por Montgomery (2009), os gráficos de controle proporcionam uma representação visual dos dados coletados viabilizando a detecção de padrões, tendências e causas especiais de variação. Através da interpretação precisa dos gráficos de controle, é viável adotar medidas corretivas e preventivas visando assegurar a qualidade dos processos. Nesse contexto, o emprego do CEQ em conjunto com os gráficos de controle assumem um papel essencial na gestão da qualidade, fomentando a diminuição de falhas, a otimização dos procedimentos e a promoção da excelência organizacional.

De acordo com Maciel et al. (2014, p.3), "A carta de controle é uma representação gráfica de uma ou mais características de qualidade provenientes de amostras do processo." O gráfico da carta de controle é composto por três linhas horizontais distintas: a linha central (LC), que representa o valor médio da característica em análise; e os limites superior de controle (LSC) e inferior de controle (LIC). No intervalo entre esses limites, estão representadas as variações do processo, indicando que o mesmo está estatisticamente sob controle. Contudo, quando os pontos ultrapassam tais limites, isso aponta para a existência de causas especiais, demandando investigação adicional, visto que sugere que o processo não se encontra devidamente controlado (MONTGOMERY, 2009).

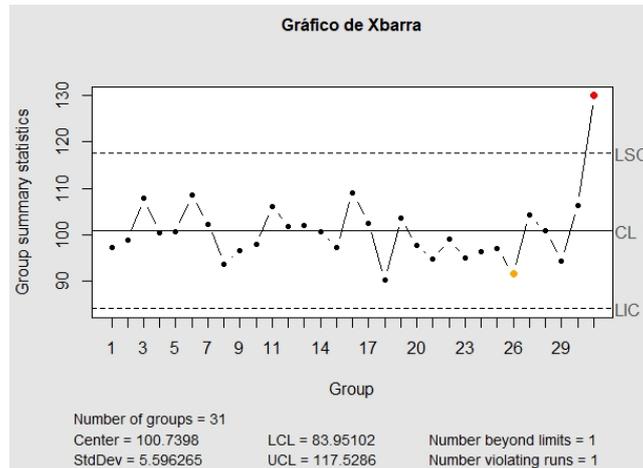
Nos gráficos, é possível visualizar os valores assumidos pela variável ao longo do tempo e os limites que ela deve obedecer. Pode-se representar todos os dados da variável analisada ou, alternativamente, calcular as médias de grupos desses dados para a representação gráfica. Abaixo, na Figura 1 e 2, são apresentados exemplos de carta de controle de Shewhart para médias (denominada carta \bar{X}).

Figura 1 – Exemplo de Cartas de Controle: sob controle



Fontes: Autoria Própria

Figura 2 – Exemplo de Cartas de Controle: fora de controle



Fontes: Autoria Própria

Na Figura 1, é ilustrado um exemplo em que o gráfico de carta de controle está indicando que o processo está sob controle. Já na Figura 2, é evidenciado um cenário no qual a variável não se encontra sob controle, é possível perceber que a amostra 30 ultrapassa o Limite Superior de Controle (LSC), indicando uma variação fora do padrão esperado.

Variáveis sujeitas a monitoramento e controle em um processo podem ser classificadas como independentes ou dependentes. No caso das variáveis independentes, é comum a utilização das cartas de controle univariadas desenvolvidas por Shewhart. Por outro lado, ao lidar com variáveis dependentes, aplicam-se as cartas de controle multivariadas. As seções 2.3 e 2.4 do presente documento apresentam, respectivamente, informações detalhadas acerca das cartas de controle univariadas e multivariadas.

2.3 Carta de Controle Univariada

Os gráficos de controle convencionais são univariados, uma vez que monitoram variáveis individuais e são empregados para acompanhar as características essenciais da qualidade do produto final. Conforme citado por Lazzarotto *et. al.*(2015), os gráficos de controle estatísticos univariados foram primeiramente propostos por W.A. Shewhart. O modelo geral consiste em estabelecer um intervalo

em torno da média de uma característica específica de qualidade na qual estamos interessados, conforme necessário para o monitoramento do processo.

As fórmulas básicas para calcular os limites de controle em um gráfico \bar{X} são as seguintes:

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{X} + A_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\LC &= \bar{X} \\LIC &= \bar{X} - A_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Em que, \bar{X} é a média amostral, A_2 é uma constante que depende do tamanho da amostra (geralmente 3), σ é o desvio padrão populacional e n é o tamanho da amostra.

Segundo Costa (2015), uma das limitações das cartas de controle univariadas consiste no fato de que elas são concebidas para analisar apenas uma variável do processo de cada vez. Quando a avaliação da qualidade do produto é realizada por meio de múltiplas variáveis, como acontece nos processos multivariados, torna-se necessário empregar diversas cartas de controle simultânea e separadamente, a fim de monitorar o processo. Entretanto, caso haja correlação entre essas variáveis, as cartas de controle univariadas não são capazes de incorporar essa relação, o que pode resultar em conclusões errôneas sobre a estabilidade do processo. Por essa razão, as cartas de controle multivariadas foram desenvolvidas para enfrentar essa limitação.

2.4 Carta de Controle Multivariada

As cartas de controle multivariadas foram desenvolvidas com o propósito de lidar de maneira eficiente com a correlação existente entre as variáveis de um processo, permitindo uma análise conjunta do referido processo. Ao considerar as interações e relações entre as variáveis, tais cartas proporcionam uma visão abrangente da qualidade do processo, identificando padrões e variações que poderiam passar despercebidos nas cartas de controle univariadas.

O procedimento mais utilizado para monitorar processos é a carta de controle T^2 de Hotelling. Essa abordagem é análoga ao gráfico de médias de Shewhart, porém aplicada a múltiplas variáveis. A carta de controle T^2 de Hotelling utiliza duas linhas horizontais que representam os limites de controle para a estatística T^2 . Essa estatística é empregada para monitorar e detectar desvios significativos nas médias e variações multivariadas do processo (Lowry e Montgomery (1995)).

O procedimento para a elaboração do gráfico de controle T^2 de Hotelling é realizado da seguinte maneira:

A equação utilizada para calcular a estatística T^2 de Hotelling para uma amostra é a seguinte:

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{x}_0)' S^{-1}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

Em que, n é o tamanho da amostra; \bar{x} é um vetor de médias amostrais para as variáveis; \bar{x}_0 é um vetor de médias de referência; S^{-1} é a matriz inversa de covariância amostral das variáveis

Existem duas etapas distintas no processo de elaboração dos gráficos de controle T^2 de Hotelling. Segundo a abordagem de Lowry e Montgomery (1995), a Fase I consiste na aplicação dos gráficos de controle para realizar uma avaliação retrospectiva da estabilidade do processo, assim que os primeiros "m" subgrupos são coletados. O propósito principal dessa fase é estabelecer um conjunto de dados em situação de controle, o qual servirá de base para a definição dos limites de controle. Esses limites de controle, por sua vez, constituem a base da segunda fase, na qual ocorre a avaliação contínua da estabilidade do processo ao longo da coleta dos subgrupos subsequentes durante o período da Fase II.

Os limites de controle para a carta T^2 de Hotelling são estabelecidos com base em distribuições estatísticas, tais como a distribuição F de Snedecor. Para efetuar o cálculo dos limites, é necessário considerar o tamanho da amostra, o número de variáveis e o nível de significância desejado. Conforme pode ser visto a seguir, quando a primeira fase é estabelecida:

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{(mn-m-p+1)} F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$$

$$LIC = 0$$

Na Fase II os novos limites de controle são:

$$LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{(mn-m-p+1)} F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$$

$$LIC = 0$$

Em que, m é o tamanho do subgrupo; n é o número de amostras; p é o número de variáveis; F é o valor tabelado da estatística de teste referente a distribuição F de Snedecor com grau de liberdade do numerador igual a α (equivalente a taxa de alarmes falsos), e do denominador igual a $\alpha, p, mn - m - p + 1$. Cabe ressaltar que este trabalho foca exclusivamente na análise da Fase I.

3 Uso Prático de Cartas de Controle Multivariada

3.1 Caso 1

No estudo conduzido por Petter *et al.* (2016), foram empregadas técnicas de gráficos de controle multivariados no processo de fabricação de pneus automotivos. Nesse contexto, foram utilizados gráficos multivariados para avaliar a viabilidade do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling.

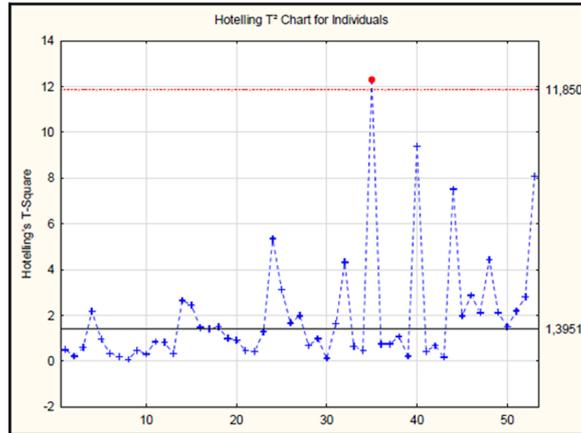
Inicialmente, foram coletados dados de 53 amostras, representando um lote de produção. Primeiramente, uma análise foi realizada por meio da plotagem de gráficos de controle univariados em dois momentos: durante o próprio processo de extrusão e imediatamente após a saída do material da extrusora.

No entanto, essa abordagem não proporcionou informações suficientes para tomar decisões acerca de melhorias no processo. Conseqüentemente, foi necessária uma análise mais específica e detalhada. Portanto, a abordagem avançou para a utilização do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling (essa abordagem requer, em primeiro lugar, a avaliação da significância da correlação entre as variáveis em análise, uma vez que essa análise só é válida se a correlação for estatisticamente significativa), e verificou-se a existência de correlação ao nível de 5%.

Em seguida, o gráfico T^2 de Hotelling foi plotado para comparar os pontos gerados nos dois momentos do processo de extrusão da banda de rodagem (figura 3). Nessa análise, a amostra 35 foi identificada como discrepante em relação às demais amostras, extrapolando o Limite Superior de Controle (LSC), o que caracteriza o processo como estatisticamente fora de controle.

Com isso, tornam-se evidentes as principais vantagens decorrentes da aplicação do gráfico multivariado T^2 de Hotelling.

Figura 3 – Carta T^2 de Hotelling



Fonte: Petter et al. (2016).

3.2 Caso 2

Maciel *et al.* (2014) propuseram um estudo dedicado à aplicação das cartas de controle multivariadas em vinícolas italianas, utilizando um conjunto de dados disponível no software R, por meio do pacote "HDclassif". Esse conjunto de dados contém 13 variáveis, 178 observações e 3 classificações diferentes para os tipos de vinho.

O objetivo dos pesquisadores foi investigar as disparidades entre o controle de qualidade univariado e multivariado para três categorias distintas de vinhos produzidos na Itália. Inicialmente, foram calculadas as correlações de Pearson entre todas as variáveis em pares. A análise dessas correlações revelou uma forte interdependência entre as variáveis Fenóis, Flavanóides, Proantocianidinas e Vinhos diluídos, indicando a necessidade de tratá-las de forma conjunta, em vez de individualmente.

No caso da Classe 1 de vinhos, uma abordagem utilizando controles univariados foi adotada. Essa análise identificou que a variável "Fenóis" apresentava duas causas especiais, enquanto as outras permaneciam sob controle estatístico, embora com diversos "pontos de atenção". No entanto, a análise multivariada indicou que, quando consideradas em conjunto, essas variáveis apresentavam apenas uma causa especial. É notável que os "pontos de atenção" anteriormente identificados não surgiram na análise multivariada, sugerindo que os "alarmes falsos" observados no controle individual poderiam ser influenciados pelas correlações entre as variáveis.

Na Classe 2 de vinhos, o controle individual identificou quatro causas especiais: 2 em "Flavanóides" e 2 em "Proanthocyanins". No entanto, ao analisar essas variáveis conjuntamente, constatou-se a presença de apenas duas causas especiais, indicando dois possíveis "alarmes falsos".

A Classe 3 de vinhos apresentou as discrepâncias mais notáveis nas análises. Ao serem examinados individualmente, os vinhos dessa classe pareciam estar completamente fora do controle estatístico. Isso se deve ao fato de que todas as variáveis apresentaram diversas causas especiais de variação e vários pontos de atenção. No entanto, uma abordagem multivariada revelou que todas essas causas especiais e desvios das regras de Shewart eram, na verdade, "alarmes falsos". Esses alarmes podem ser atribuídos à natureza multivariada do processo e à alta correlação entre as variáveis.

Esse resultado enfatiza a importância da abordagem multivariada e da implementação de controles multivariados utilizando a estatística T^2 . Essa abordagem proporciona uma avaliação mais

precisa e abrangente do processo, fornecendo "insights" mais confiáveis para a tomada de decisões e para aprimorar a qualidade do produto final. Além disso, ao evitar equívocos, o controle multivariado simplifica a análise, substituindo várias cartas individuais por uma única carta multivariada.

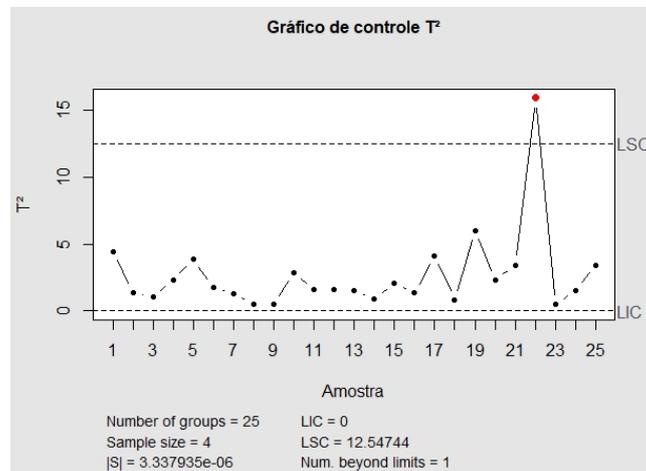
3.3 Caso 3

Arantes (2017) investigou o tema do controle estatístico multivariado de processos através da utilização do gráfico T^2 de Hotelling. O estudo de caso foi conduzido no âmbito do setor de embalagens. O principal propósito do artigo consistiu em aplicar e avaliar a eficácia do gráfico T^2 de Hotelling enquanto ferramenta para a supervisão da qualidade dos processos de embalagem.

Para o estudo, foram coletados dados de 25 amostras, abrangendo três variáveis: espessura máxima, espessura mínima e peso do produto. As amostras foram obtidas da seguinte maneira: um pedaço de sacola da bobina foi retirado, medido com uma régua e cortado em segmentos de 78 centímetros. Posteriormente, esses segmentos foram pesados em uma balança especialmente calibrada para pequenas medidas, permitindo a aferição do peso das amostras. Em seguida, utilizando um espectrômetro digital, a espessura máxima e mínima da amostra foram medidas ao longo de sua extensão.

Posteriormente, foi realizado o teste de correlação entre as características de qualidade, comparando-as para avaliar o grau de correlação existente entre elas. Observou-se que todas as características apresentam uma correlação forte entre si (superior a 0,7). Dado que as variáveis estão fortemente correlacionadas, os dados foram considerados apropriados para a construção do gráfico T^2 de Hotelling.

Figura 4 – Carta T^2 de Hotelling para o processo de Extrusão

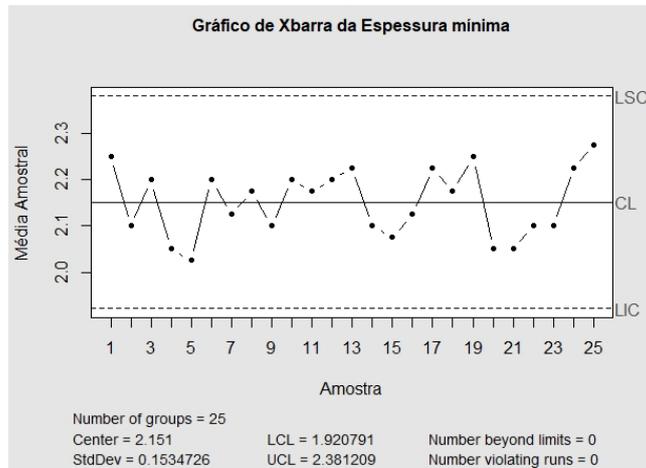


Fonte: Dados de Arantes (2017), Execução de Autoria Própria.

Na Figura 4, é possível identificar que a amostra 22 representa um (único) ponto fora dos limites. A fim de facilitar a identificação das possíveis causas desse valor atípico, foram elaborados gráficos de controle univariados para as 3 variáveis em estudo. Dado que a amostra 22 demonstrou estar além dos limites aceitáveis, recorreu-se aos gráficos univariados para realizar uma análise individual de cada uma das características em questão, como ilustrado nas Figuras 5, 6 e 7.

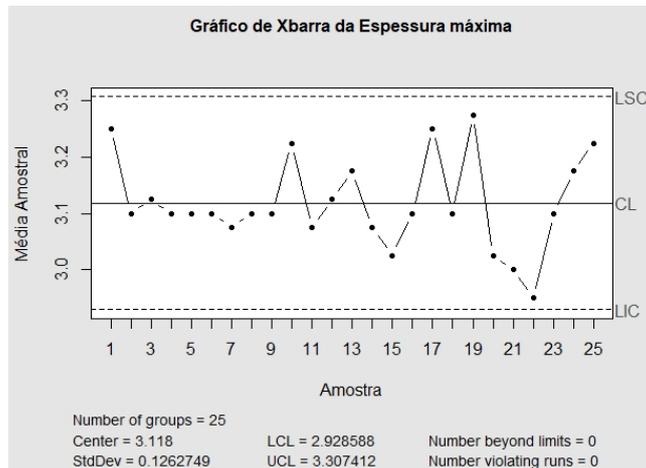
Os gráficos univariados evidenciam que todas as variáveis estão dentro de limites aceitáveis, ou seja, sob controle. A explicação para a presença do outlier multivariado na amostra 22 encontra sua justificativa ao analisar os gráficos univariados. Tal ocorrência pode ser atribuída ao cenário no qual a Espessura Mínima se encontra levemente abaixo da média, aproximando-se do valor 2,1. Essa circunstância, aliada ao Peso e Espessura Máxima notavelmente abaixo da média, culmina na

Figura 5 – Carta \bar{X} : Espessura Mínima



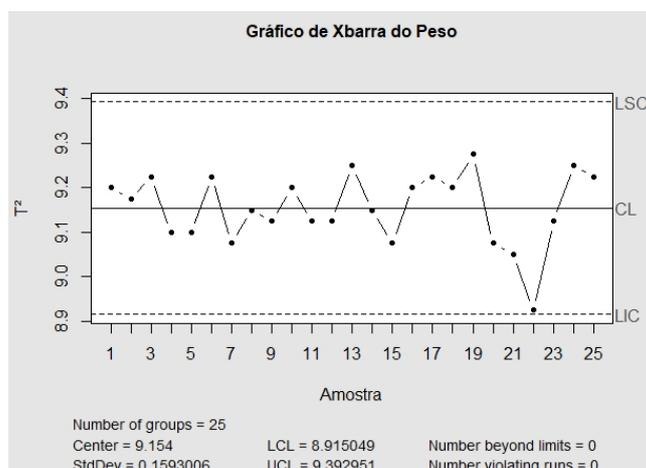
Fonte: Dados de Arantes (2017), Execução de Autoria Própria.

Figura 6 – Carta \bar{X} : Espessura Máxima



Fonte: Dados de Arantes (2017), Execução de Autoria Própria.

Figura 7 – Carta \bar{X} : Peso



Fonte: Dados de Arantes (2017), Execução de Autoria Própria.

detecção do outlier multivariado. Esse padrão "atípico" se manifesta de maneira singular somente na amostra 22.

Assim sendo, evidencia-se claramente que a abordagem conjunta dos gráficos univariados e multivariados, demonstrou sua eficácia na supervisão das variáveis em questão.

3.4 Caso 4

Este exemplo é retirado do livro do Ryan (2000, pag 323). Os dados utilizados estão dispostos na Tabela 1. Suponha que cada par de valores corresponda a uma observação das duas variáveis. Dessa forma, temos um total de 20 subgrupos (representados pelas 20 linhas da tabela), sendo que em cada subgrupo há quatro observações para cada variável.

Tabela 1: Dados para exemplo multivariado (p=2, k=20, n=4)

Números de subgrupos	Primeira variável				Segunda variável			
1	72	84	79	49	23	30	28	10
2	56	87	33	42	14	31	8	9
3	55	73	22	60	13	22	6	16
4	44	80	54	74	9	28	15	25
5	97	26	48	58	36	10	14	15
6	83	89	91	62	30	35	36	18
7	47	66	53	58	12	18	14	16
8	88	50	84	69	31	11	30	19
9	57	47	41	46	14	10	8	10
10	26	39	52	48	7	11	35	30
11	46	27	63	34	10	8	19	9
12	49	62	78	87	11	20	27	31
13	71	63	82	55	22	16	31	15
14	71	58	69	70	21	19	17	20
15	67	69	70	94	18	19	18	35
16	55	63	72	49	15	16	20	12
17	49	51	55	76	13	14	16	26
18	72	80	61	59	22	28	18	17
19	61	74	62	57	19	20	16	14
20	35	38	41	46	10	11	13	16

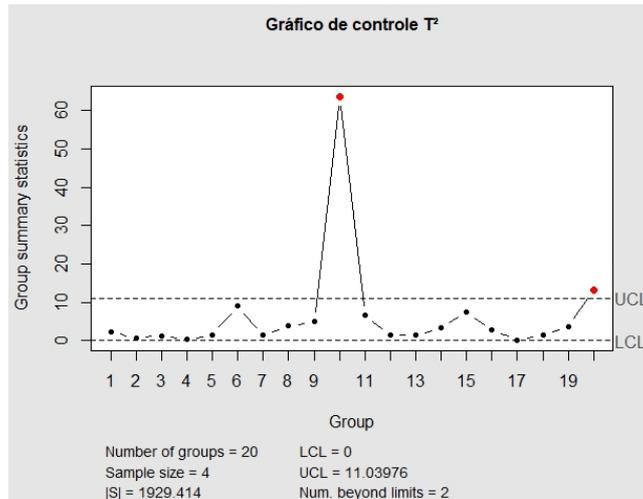
Fonte: Ryan (2000, Table 9.2)

Quando os valores deste conjunto de dados são plotados, o resultado é o gráfico ilustrado na Figura 8. Há dois pontos que ultrapassam o Limite Superior de Controle (LSC): 10 e 20; notavelmente, o valor do subgrupo 10 excede significativamente o LSC.

Quando se observam os gráficos individuais de \bar{X} , apresentados nas Figuras 9 e 10, deve-se notar que no ponto 10 de cada gráfico, a média traçada encontra-se dentro dos limites de controle. Assim, o uso de dois gráficos \bar{X} separados não teria identificado a condição fora de controle nesse ponto.

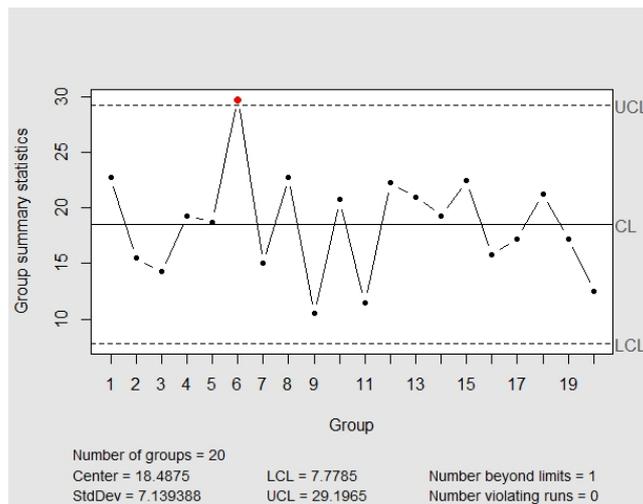
No ponto 10, as posições das duas médias diferem consideravelmente: uma encontra-se bem abaixo da linha média, enquanto a outra está um pouco acima dela. Se duas variáveis possuírem uma correlação positiva elevada, esperaríamos que suas posições relativas fossem aproximadamente as mesmas ao longo do tempo. Ou seja, ambos devem estar acima de suas respectivas linhas médias ou abaixo de suas linhas médias, e as distâncias até a linha média devem ser aproximadamente as mesmas em cada gráfico. Observe que isso vale para praticamente todos os outros subgrupos, exceto o ponto 10.

Figura 8 – Carta T² de Hotelling



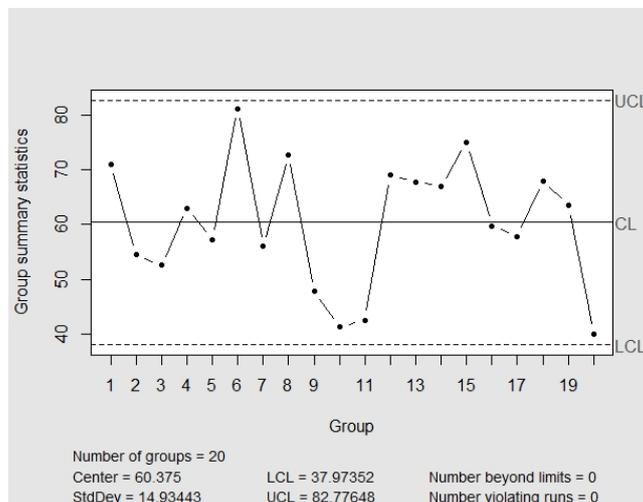
Fonte: Dados de Ryan (2000), Execução de Autoria Própria.

Figura 9 – Gráfico \bar{X} para dados da Tabela 1: primeira variável



Fonte: Dados de Ryan (2000), Execução de Autoria Própria.

Figura 10 – Gráfico \bar{X} para dados da Tabela 1: segunda variável



Fonte: Dados de Ryan (2000), Execução de Autoria Própria.

3.5 Caso 5

No presente trabalho, utilizou-se um exemplo do livro de Lauro *et. al.* (2012, p. 131) como base prática estudo. Este exemplo aborda um problema envolvendo quinze variáveis relacionadas à produção de para-choques de automóveis em uma fábrica. Os dados apresentados se referem a um para-choque de um veículo específico. Para cada uma das quinze medições, foram registradas dezoito amostras originais. Além disso, três pontos adicionais (amostras 19 a 21) foram incluídos para representar diferentes cenários de condições fora de controle no processo.

Para o escopo deste estudo, selecionamos aleatoriamente, dentre as quinze, três variáveis amostrais (X1, X2, X3) para análise mais detalhada. Os dados dessas três variáveis foram organizados em uma tabela que contém um total de dez subgrupos, sendo que em cada subgrupo há duas observações para cada variável (Tabela 2). Essa divisão foi realizada com o propósito de calcular as médias e construir gráficos de controle \bar{X} para a monitorização do processo.

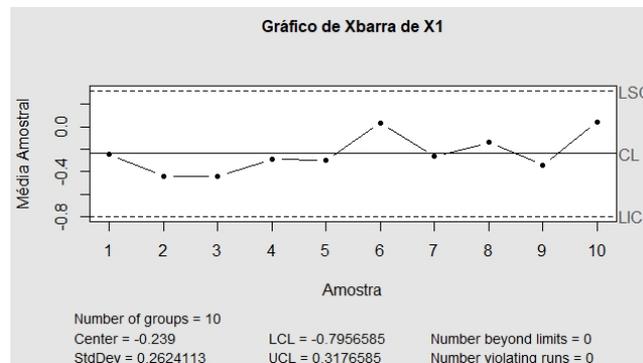
Tabela 2: Dados para-choques de carro.

Números de Amostras	X1	X2	X3
1	-0.39 -0.10	0.34 0.91	1.09 0.93
2	-0.32 -0.56	0.91 0.87	1.81 1.95
3	-0.50 -0.38	0.49 0.62	1.50 1.63
4	-0.54 -0.04	0.32 1.05	1.18 1.49
5	-0.23 -0.37	0.80 0.63	1.65 1.89
6	-0.08 0.15	0.90 0.95	1.08 1.78
7	-0.15 -0.38	0.82 0.57	1.57 1.53
8	-0.20 -0.08	0.67 1.15	1.39 1.17
9	-0.43 -0.26	0.60 1.08	1.95 1.37
10	-0.42 -0.10	0.55 1.50	1.82 1.62

Fonte: Dados de Lauro *et. al.* (2012), Autoria Própria

Com o auxílio do software RStudio, foram construídos gráficos de controle univariados para \bar{X} , conforme ilustrado nas Figuras 11, 12 e 13. É importante destacar que não foram identificados pontos fora de controle ao analisar as variáveis de forma individual.

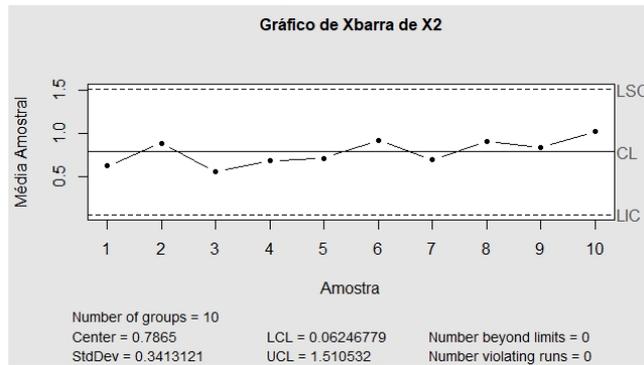
Figura 11 – Gráfico \bar{X} para dados da Tabela 2: X1



Fonte: Autoria Própria.

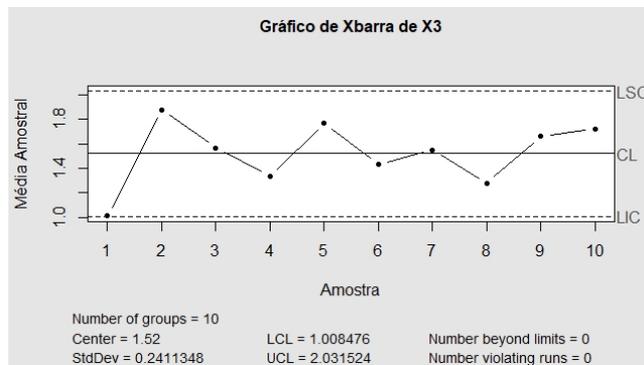
Seguindo a proposta de estudo, que envolve a comparação entre as cartas de controle univariadas e multivariadas, foi elaborado um gráfico de controle multivariado baseado em T^2 (conforme mostrado na Figura 14). Neste gráfico, identificamos a presença de um ponto fora de controle, o ponto 2.

Figura 12 – Gráfico \bar{X} para dados da Tabela 2: X2



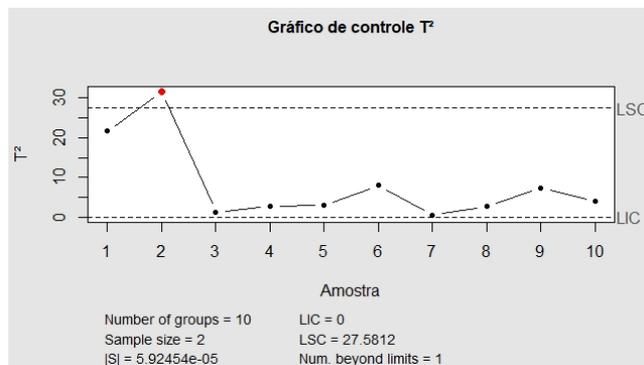
Fonte: Autoria Própria.

Figura 13 – Gráfico \bar{X} para dados da Tabela 2: X3



Fonte: Autoria Própria.

Figura 14 – Gráfico T^2 para dados da Tabela 2



Fonte: Autoria Própria.

Ao analisar os gráficos univariados \bar{X} , é importante notar que no ponto 2 de cada gráfico, as posições das médias divergem significativamente. Na variável X1, o ponto em questão está abaixo da média, enquanto nas outras variáveis, o ponto está acima da média esperada. Essa diferença nas médias explica a ocorrência do ponto fora de controle.

Dessa forma, reforça-se a importância do uso da carta de controle multivariada baseada em T^2 como uma ferramenta fundamental para a detecção de problemas e anomalias em processos que envolvem múltiplas variáveis simultaneamente.

4 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo expandir os conhecimentos das técnicas tradicionais de CEQ e analisar as diferenças de controle de qualidade univariado e multivariado e trazer vários casos comprovando as diferenças e vantagens das cartas de controle.

De maneira geral, o uso das cartas de controle multivariadas, especialmente a carta T^2 de Hotelling, proporciona um diagnóstico e uma precisão de análise significativamente mais elevados em comparação com as tradicionais cartas de controle univariadas.

Ao longo desta pesquisa, tornou-se evidente que as cartas de controle univariadas apresentam limitações devido sua capacidade de avaliar uma única variável por vez, deixando escapar informações importantes sobre as interações entre diferentes variáveis. Em contraste, as cartas de controle multivariadas permitem a análise simultânea de múltiplas variáveis, proporcionando uma visão mais completa e precisa do processo em monitoramento. Especificamente, a carta T^2 de Hotelling se destaca como uma ferramenta que possibilita identificar mudanças que envolvem combinações complexas de variáveis, tornando-a particularmente valiosa em cenários onde a correlação entre os dados é significativa.

5 Referências

ARANTES, Maisa Garcia. Controle estatístico multivariado de processos através do gráfico T^2 de Hotelling: um estudo de caso no setor de embalagens. 2017. 69 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Produção) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2017.

BEZERRA, A. K. G. Gráficos de Controle Multivariados de Somas Acumuladas (MCUSUM) e de Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MEWMA). Monografia (Graduação em Estatística) - Curso de Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

COSTA, A. L. B. de C. O gráfico de controle multivariado t^2 de Hotelling aplicado como instrumento de análise de processo em uma planta de sinterização. Universidade Federal de Minas Gerais, 2015

JURAN, Joseph M. Juran on quality by design: the new steps for planning quality into goods and services. Simon and Schuster, 1992.

LAZZAROTTO, E; GRAMANI, L. M.; NETO, A. C. Comparação de gráficos de controle univariados e multivariados aplicados a dados de instrumentação da usina hidrelétrica de Itaipu. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v.3, n.1, 2015.

LAURO, C.; ANTOCH, J.; VINZI, V. E.; SAPORTA, G. Multivariate Total Quality Control. Physica-Verlag, 2012.

LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. IIE Transactions, v.27, p.800-810, 1995.

MACIEL, T. H.; BRANCO, G. M.; WERNER, L. Cartas de controle multivariadas: Estudo de caso em vinícolas italianas. Cadernos do IME-Série Estatística, vol. 37, p. 01, 2014.

MONTGOMERY, D. C., Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, 4ª edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2009.

PETTER, R. R. H., VIEIRA, J. F. F., KAHMANN, A., & WERNER, L. Aplicabilidade das cartas de controle multivariadas em processos de menor complexidade. João Pessoa/PB, 2016.

REIS, M. M. *et. al.* Um modelo para o ensino de controle estatístico da qualidade. 2001.

RYAN, Thomas P. Statistical Methods for Quality Improvement. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

SCRUCCA, L. Quality Control Charts: Package 'qcc'. Version 2.3. Disponível em <http://cran.rproject.org/web/packages/qcc/qcc.pdf>. Acesso em 12 de agosto 2023.

YEN, C.-L.; SHIAU, J.-J. H. A multivariate control chart for detecting increases in process dispersion. *Statistica Sinica*, v. 20, pp. 1683–1707, 2010.