



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO EXPONENCIAL PARA OPÇÕES: APLICAÇÕES AO ÍNDICE IBOVESPA

por

Antônio Mário de Torres Ramos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador-UFPE)
Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF - UFPE)
Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan (IF - UFAL)

Recife - PE, Brasil

Abril – 2007

Ramos, Antônio Mário de Torres

Modelo exponencial para opções: aplicações ao índice Ibovespa / Antônio Mário de Torres Ramos .

- Recife: O autor, 2007.

xiii, 78 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2007.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Física estatística. 2. Processo estocástico. 3. Econofísica. I. Título.

530.13
0025

CDD (22.ed.)

FQ2007-



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pgp> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Antônio Mário de Torres Ramos

MODELO EXPONENCIAL PARA OPÇÕES: APLICAÇÕES AO ÍNDICE IBOVESPA

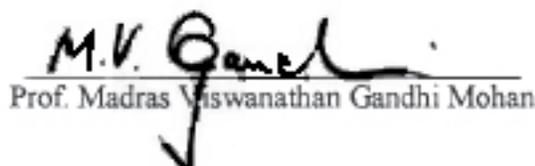
A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovani Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Madras Viswanathan Gandhi Mohan, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato:

() Aprovado com Distinção Aprovado () Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e sete de abril de 2007.


Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Presidente e Orientador


Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes


Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Aos meus pais

Agradecimentos

Quero agradecer a todos que ajudaram em minha formação pessoal, bem como os que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração deste trabalho.

Primeiramente quero agradecer a minha mãe, Magnolia Gomes de Torres, e a meu pai Antônio Mário da Silva Ramos, as pessoas a quem eu devo ser e existir.

À Gabriela, minha companheira, pelo apoio e acima de tudo pelo seu amor.

Agradeço aos meus tios e tias pelas lições de vida: Lala, Dadá, Zilka, Carlos, Zezé, Moacir, Netinha, Maire, Tonho, Miralva, Babá, Fred, Zélia, Zé Augusto e Maridite. Aos meus primos e primas: Manuela, Tatiana, Casilda, Gildo, Tawanne, Adriana, Sol, Estrela, Mauro, Magnólia, Ana, Cinara, Tetela, Junior, Matheus, Dudu, Neto, Thor, Anita, Moema, Moara, Maira, Gabriel.

Agradeço a Luiza e Yasmim por provar que não é preciso ter idade para se ensinar.

Agradeço aos amigos do DF: Gerson (amigão do DF), a turma da sala 315-A: Augusto (Marion), Leonardo (Leozin Futeborzin), Priscila, Karla (litedileite), Patrícia, Bernardo. Ao Marcus (Dudinha), Max, Fabio (Sakurai), João, Renê, Rogério, Rogério Lima, Hallan, Toinho, Vladimir (Né), Manoel (Harry Potter), Douglas (Gaúcho), Sergio (Cubano), Ernesto, Krishnamurti, Fernando (Negão), Sérgio (Materiais), Reginaldo, André (Zangado), Tâmara, Eroni, Licolm, Dani & Everton, Hermes, Rafael, Fernando (Maçã), Roberto, Pedro Hugo, Antônio de Pádua. Agradeço, também, aos amigos que já passaram pelo DF: José Augusto (Guga), José Augusto (Cuquinha), Artur (oxe vei), Antonius, Vladimir, Erms, Ricardo, Mathias, David, Carlos (Limoeiro).

Aos eternos amigos: Danilo (Gulosa), Vera, Dedé, Yuska, Rose, Marivânia, Marlene, Tiago, Gabriel, Dona Juliana, Rita, Anita, Dona Sila, Alice, Dona Ana, Danilo (Danvalho), Mônica, Betânia, Luis, Marcelo (Shell), Dona Geresa, Dona Fátima, Artur (Tchutchucu), Carol, Sandra, Fredinho, Marcelo, Deco, Eduardo (Negão), Claudio, Alexandre (Xandinho), Rafael (Balrog), Rafael (Pequeno), Carlos (Mestre), Michele, Fabiana, Mariana, Vitor Ramos, Vitor Otávio, e muitos outros maravilhosos amigos que cultivei ao longo de minha vida.

Agradeço a todos os mestres da Física que contribuíram para minha formação. Ao professor Erivaldo Montarroyos por lembrar-me como a física é bela. E ao professor Giovani

Vasconcelos, pelos ensinamentos, pela dedicação e por sua paciência.

Finalmente, agradeço a CAPES e ao Departamento de Física da UFPE por possibilitar o suporte de minha formação acadêmica.

*Meu herói é preguiçoso
Minha geração é modista, anti-nacionalista,
Sem conquista e sem contestação.
Anarquista sem razão.
"Paz e Amor" é passado.
Somos sem emancipação!
—TIAGO DOS SANTOS*

Resumo

Este trabalho foi inicialmente dividido em duas etapas: Num primeiro momento realizamos a análise estatística do índice bovespa, e em seguida estudamos o contrato de opção cujo ativo de referência é o próprio índice bovespa.

Na primeira etapa, foram feitas análises das densidades de probabilidade dos retornos para diferentes escalas de tempo, gerados a partir das séries temporais do fechamento diário do índice bovespa e de cotações intradiária a cada 15 minutos também do índice bovespa. Mostramos que os retornos do índice bovespa seguem não uma distribuição gaussiana mas sim uma função exponencial. Esse tipo de comportamento é observado para retornos gerados em escalas de tempo variando de um a trinta dias, em conformidade com o resultado obtido em um recente trabalho [1]. Além disso, para retornos de alta frequência, tais como os retornos de 15 minutos gerados a partir da cotação a cada 15 minutos do índice bovespa, notou-se que os extremos da distribuição caem mais lentamente do que uma função exponencial, o que sugere um comportamento do tipo lei de potência. Com o objetivo de caracterizar a melhor forma funcional que ajusta os dados empíricos, testamos as distribuições que decaem como uma lei de potência, tais como a distribuição de Levy e a chamada distribuição q-Gaussiana. A partir dessas distribuições, realizamos um estudo detalhado da análise empírica dos retornos de alta frequência e indicamos qual a forma funcional que melhor ajusta as distribuições de retornos de alta-frequência, através do método dos mínimos quadrados.

Na segunda etapa, nos concentramos na análise estatística das séries históricas das cotações diárias das opções de compra sobre o índice bovespa para os anos de 2005 e 2006. Por compreender que os retornos diários são os mais relevantes para a formação dos preços dos contratos de opção, e sabendo que a distribuição de retornos diários é melhor descrita pelo modelo exponencial, nos atemos na análise desse modelo para precificação da opção do índice bovespa. Em seguida, comparamos o modelo exponencial de precificação das opções com o modelo já estabelecido, o modelo de Black-Scholes que assume que a distribuição dos retornos tem comportamento gaussiano. Para tanto, realizamos uma comparação detalhada dos preços praticados no mercado de opções com os preços gerados usando os modelos de precificação

exponencial e o gaussiano. Finalmente, através do método dos mínimos quadrados, indicamos qual dos modelos melhor descreve os preços de mercado das opções para determinado intervalo de tempo antes da expiração do contrato.

Palavras-chave: Econofísica; Mercado financeiro; Modelo de precificação de opção; Processo estocástico; Retornos de alta-freqüência

Abstract

In this thesis we perform an empirical analysis of the Brazilian stock and options markets. In the first part of our study we carry out a statistical analysis of the Ibovespa stock index of the São Paulo Stock Exchange. It is shown that the daily returns of Ibovespa follow not a Gaussian distribution but rather an exponential law, in addition, this exponential distribution remains valid for returns calculated for time scales varying from one day up to 30 days. Using intraday quotes on the Ibovespa (15 minute intervals), it is found that this exponential distribution holds true for returns down to a 3 hours intervals, in agreement with previous study performed in our group. However, for short time scales, it is observed that the empirical distributions exhibit a less-than-exponential decay, with strong evidences of power-law tails. We then tested two important theoretical distributions that exhibit power-law decay, Levy distribution and the so called q-Gaussian distribution (also known as Tsallis distribution), to see which of them best matches the empirical data for the 15 minutes returns of the Ibovespa. It was found that the q-Gaussian distribution gave a better fit in the least-square sense. In the second part of the thesis, we study two relevant models of option pricing, namely, the standard Black-Scholes model and an empirical model that assumes an exponential distribution for the returns. Both models yield an analytical solution for the price of a European call option, which can be easily compared with the quoted market prices. More specifically, we make a comparative study between the market prices for call options on the Ibovespa stock and the corresponding predictions of both the Black-Scholes model and exponential model. It is shown that the exponential model gives a better fit to the empirical data for times close to the option expiration date, whereas for longer periods before expiration the Gaussian (Black-Scholes) model gives a better description of the market prices. This finding is in agreement with the results found in the first part of the thesis, where it was observed that for short time scales the Ibovespa returns obeys an exponential distribution.

Keywords: Econophysics; Financial Markets; Option Price Model

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelos Matemáticos para Fenômenos Sociais	1
1.2	O Mercado	3
1.2.1	O Índice Bovespa	4
1.3	Organização da Dissertação	6
2	Distribuição dos retornos	8
2.1	Dinâmica dos preços	8
2.2	Distribuição exponencial	12
2.3	Distribuição com Lei de Potência	14
2.3.1	Distribuição de Levy	14
2.3.2	Distribuição de Tsallis	15
2.4	Análise Estatística dos Retornos do Ibovespa	17
2.4.1	Retornos Diários	19
2.4.2	Retornos Intra-diários	23
3	Opções	28
3.1	Introdução	28
3.2	Mercado de Opções	30
3.2.1	Opção Européia de Compra	31
3.2.2	Opção Européia de Venda	32
3.3	Modelo de Black-Scholes	34
3.3.1	Hipóteses Básicas	34
3.3.2	Fórmula de Black-Scholes	36
3.3.3	Abordagem "Risk-Neutral"	39
3.4	Modelo Exponencial Para Precificação de Opções	41
3.4.1	Abordagem "Risk-Neutral"	41

4	Análise Estatística das Opções Sobre o Índice Bovespa	45
4.1	Opções sobre o Ibovespa	45
4.2	Análise empírica dos dados	47
4.3	Volatilidade Implícita	56
4.4	Análise da Variância	61
5	Conclusões e Perspectivas	64
5.1	Conclusões	64
5.2	Perspectivas	66
A	Dedução da Fórmula de Black-Scholes	67
B	Abordagem Via Dinâmica Estocástica	70
B.1	Dinâmica da Distribuição Exponencial	72
	Referências Bibliográficas	76

Lista de Figuras

- 1.1 Série histórica do índice Bovespa de janeiro de 1968 a dezembro de 2006 deflacionada pelo IGP-DI. 6
- 2.1 Série temporal do retorno logarítmico diário do índice Bovespa de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004. 18
- 2.2 Histograma comparando retornos de 1 dia, 5 dias, 10 dias, 30 dias e 100 dias, em escala semi-log. 19
- 2.3 (a) Histograma dos retornos de 60 dias e ajuste de uma distribuição gaussiana (curva sólida). O ajuste proporciona um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.0597$;
(b) Histograma dos retornos de 1 dia ajustados por uma distribuição gaussiana. O ajuste proporciona um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.4886$. 20
- 2.4 Valor mínimo do resíduo, R_{min}^2 , usando a distribuição gaussiana como ajuste, em função da escala de tempo dos retornos. 21
- 2.5 Histograma dos retornos de 1 dia ajustados por uma curva exponencial com parâmetros $A = 0.6854$, $\gamma = 1.4382$ para $x < 0$, $B = 0.7578$, $\nu = 1.4275$ para $x > 0$, esses parâmetros nos fornecem um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.2969$. 22
- 2.6 Ajuste exponencial para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 3 horas, com $\gamma = 1.5233$ para $x < 0$ e $\nu = 1.6265$ $x > 0$; esses parâmetros proporcionam um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.2182$. 23
- 2.7 Densidade de Probabilidade dos retornos de 15 minutos, 30 minutos e 1 hora. 24
- 2.8 Para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 15 minutos, temos em vermelho o ajuste com a distribuição de Levy com parâmetros $\gamma = 0.3389$ $\alpha = 0.98$, com esses parâmetros conseguimos um resíduo de $R^2 = 0.1538$. 25
- 2.9 Para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 15 minutos, temos em azul o ajuste com a função de Tsallis resulta no parâmetro $q = 1.5923$ que proporciona um resíduo de $R^2 = 0.1483$. 26

- 3.1 (a) Diagrama para valor da opção de compra no dia do vencimento; (b) Diagrama para valor da opção de venda no dia do vencimento. 32
- 3.2 (a) Diagrama de lucro proporcionado por: I - contrato de compra no mercado a termo, II - contrato de compra no mercado de opções (opção de compra); (b) Diagrama de lucro proporcionado por: I - contrato de venda no mercado a termo, II - contrato de venda no mercado de opções (opção de venda). 34
- 4.1 Série de opções no dia 19/10/06 a 36 dias antes do vencimento dia 13/12/06, onde a cotação do índice no dia foi $S = 38919.75$ e com taxa de juros $r = 0.000534$ ao dia, obtemos os ajustes: a) gaussiano com volatilidade $\sigma = 0.015$, e valor mínimo de $R = 49.72$; b) exponencial com parâmetros $v = 16.665$, $\gamma = 12.526$, e valor mínimo de $R = 70.89$. 49
- 4.2 Comparação entre os modelos de preço de uma opção de compra com os preços praticados no mercado no dia 19/10/06, a 36 dias para o vencimento da série IBOVL. Em azul vemos o ajuste segundo o modelo gaussiano, e em vermelho o ajuste segundo o modelo exponencial. A reta indica o valor implícito da opção, ou seja, o valor da opção se o dia de vencimento do contrato fosse nesse dia, com o índice valendo $S = 38919.75$. 50
- 4.3 Comparação entre os modelos de preço de uma opção de compra com os preços praticados no mercado no dia 23/11/06, a 14 dias para o vencimento da série IBOVL, onde a cotação do índice no dia foi $S = 42069.83$. Em azul vemos o ajuste segundo o modelo gaussiano, proporcionando um valor mínimo de $R = 74.58$; e em vermelho o ajuste segundo o modelo exponencial, proporcionando um valor mínimo de $R = 26.89$. 51
- 4.4 Valor mínimo da função desvio padrão versus dias até o vencimento para a série de opções IBOVL, cujo o vencimento foi dia 13 de dezembro de 2006. 52
- 4.5 Valor mínimo da função desvio padrão versus dias até o vencimento para todas as série de opções, num período de janeiro de 2005 a dezembro de 2006. Em azul é o valor mínimo da função R_{gaus} usando o modelo gaussiano, com média $\bar{R}_{gaus} = 144.10$. Em vermelho é o valor mínimo da função R_{exp} usando o modelo exponencial, com média $\bar{R}_{exp} = 133.30$. 54
- 4.6 Valor mínimo da função R_{exp} usando o modelo exponencial **menos** o valor mínimo da função R_{gaus} usando o modelo gaussiano versus os dias que faltam para o vencimento. 55

- 4.7 Comportamento genérico do gráfico da volatilidade implícita em função da razão do preço de exercício pela cotação do índice no dia da negociação. 57
- 4.8 Volatilidade implícita calculada para série IBOVL (vencimento no dia 13/12/06) no dia 23/11/06, 14 antes do vencimento através do: a) modelo gaussiano b) modelo exponencial. As linhas tracejadas mostram os respectivos valores da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** nesse dia, conforme visto na seção 4.1. 59
- 4.9 Volatilidade implícita calculada para série IBOVJ (vencimento no dia 18/10/06) no dia 23/08/06, 38 antes do vencimento através dos modelos: a) modelo gaussiano e b) modelo exponencial. As linhas tracejadas mostram os respectivos valores da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** nesse dia, conforme visto na seção 4.1. 60
- 4.10 Variância calculada usando o modelo gaussiano de precificação de opções, em função do tempo até o vencimento. Onde a reta é um ajuste do tipo $var = c\Delta t^{2H}$, com $2H = 0.9866$. 62
- 4.11 Variância calculada usando o modelo exponencial de precificação de opções, em função do tempo até o vencimento. Onde a reta é um ajuste do tipo $var = c\Delta t^{2H}$, com $2H = 0.9773$. 63

Introdução

1.1 Modelos Matemáticos para Fenômenos Sociais

Há muito tempo pesquisadores das ciências exatas se interessam por fenômenos que acontecem na sociedade. Esse interesse se deve certamente ao benefício proporcionado por modelos matemáticos que reproduzem eventos observados na sociedade de maneira quantitativa. Além disso, o acesso a uma grande quantidade de dados observada em certos sistemas sociais, como a Economia em geral e o mercado financeiro em particular, possibilita uma rica análise do ponto de vista estatístico. Motivados por essa grande quantidade de dados, os cientistas vêm usando análises tipicamente estatísticas para extrair informações sobre as relações dos indivíduos de uma sociedade.

Como exemplo, podemos citar o primeiro uso de uma distribuição de probabilidade do tipo lei de potência, ou lei de escala, elaborada em 1897 pelo economista social italiano Vilfredo Pareto. Ele sugeriu que a probabilidade de um indivíduo ter uma renda x escala com a seguinte expressão:

$$p(x) = x^{-v}. \quad (1.1)$$

Isto é, o número de pessoas com uma certa renda mensal diminui conforme essa renda x vai aumentando de acordo com uma lei de potência. Essa lei é caracterizada por um índice, conhecido como o "índice Pareto", representado pelo expoente v . Esse índice é estimado em diversos casos em 1,5. [2]

Outro exemplo de ciência social explorada por pesquisadores das ciências exatas são as finanças. Esta área é amplamente estudada por físicos e matemáticos por sua enorme disponibilidade de dados financeiros obtidos por instituições públicas e privadas. Essa grande quantidade de dados serve de suporte para a criação de modelos matemáticos que descrevem a evolução dos preços de ativos financeiros.

Na verdade, a primeira teoria científica que descreve o comportamento dos preços de um ativo de risco foi realizada em 1900 por um matemático chamado Louis Bachelier [3], em sua tese de doutorado intitulada "La Théorie de la Spéculation". O principal objetivo desse traba-

Isto era determinar uma expressão que proporcionasse o preço de um instrumento financeiro daquela época, similar aos contratos de derivativos de hoje em dia, cujo o ativo de referência eram os títulos públicos do governo francês. Para realizar seu objetivo, Bachelier supôs que os incrementos dos preços do ativo de referência são estatisticamente independentes, conseqüentemente a série temporal dos preços é semelhante a um processo do tipo caminhante aleatório. Esse estudo foi feito 5 anos antes da descrição de Einstein do movimento browniano, baseado no movimento errático das minúsculas partículas suspensas em um fluido [4].

A hipótese de que os preços de ativos financeiros seguem um processo do tipo caminhante aleatório é, em essência, o que hoje se conhece como a hipótese do mercado eficiente. Elaborada por Eugene Fama em um paper de finanças publicado em 1970 [5], a hipótese do mercado eficiente, em sua premissa essencial, assume que todas as informações passadas e presentes de um certo ativo financeiro foram completamente processadas e estão refletidas no preço desse ativo. Além disso, assume-se também, que os movimentos sucessivos de preços são estatisticamente independentes.

A idéia de que o preço de um ativo segue um movimento Browniano (Random-Walk gaussiano) tornou-se realmente popular na década de 60, com o trabalho de Osborne [6] e Samuelson [7]. Esse modelo afirma que os retornos, ou variações relativa dos preços, são distribuídos de acordo com uma distribuição gaussiana. Porém, ainda na década de 60, essa hipótese foi desafiada por Mandelbrot [8] em seu estudo sobre a cotação diária do preço do algodão negociado em diversas bolsas dos EUA. Nesse trabalho Mandelbrot, observou que os retornos mais extremos ocorrem com maior probabilidade do que o previsto por uma gaussiana, a partir dessa observação ele introduziu um modelo alternativo que afirma que a distribuição dos retornos em alguns casos não seguem uma gaussiana, mas sim uma lei de potência, ou lei de escala, similar a (1.1).

Outro trabalho importante em Finanças é certamente o trabalho de Fisher Black, Robert C. Merton e Myron Scholes [9] de 1973, que propõem um modelo para determinar o preço justo a se pagar por um instrumento financeiro chamado de derivativo. Trata-se do modelo de precificação de derivativo mais aceito atualmente, proporcionando a seus autores¹ o prêmio Nobel em Economia. Devido a sua grande importância no mercado, esse trabalho será estudado com mais detalhes nos capítulos seguintes.

Os físicos também tem contribuído muito para o desenvolvimento dessa interdisciplina-

¹Fisher Black morreu 1995. Merton e Scholes receberam por esse trabalho o Prêmio Nobel em Economia em 1997.

ridade, propondo modelos para explicar fenômenos sociais a partir de conceitos tipicamente físicos tais como métodos de mecânica estatística, transição de fase, caos e complexidade, entre outros. Esse interesse por parte dos físicos é bastante recente, tendo ficado evidente numa conferência de sistemas complexos em 1995, realizada na cidade de Calcutá na Índia. Nesta conferência foi adotado pela primeira vez o termo econofísica, somente sendo adotado oficialmente mais tarde em 1997 dando nome a um workshop na Hungria.

1.2 O Mercado

Antes de nos aprofundarmos nesta dissertação, vale a pena definir alguns termos do mercado financeiro que serão bastante usados. Primeiro, precisamos saber que as "mercadorias" negociadas nos mercados são chamadas de ativos financeiros. De maneira geral um ativo é definido como sendo qualquer coisa que tenha valor econômico [10]. Os ativos podem ser divididos em ativos de risco e ativos livre de risco. Os ativos livre de risco são definidos como um investimento que oferece uma taxa de retorno perfeitamente previsível. Um exemplo de ativo livre de risco é a caderneta de poupança. Já o investimento em ativos de risco não garante ao investidor um retorno previsto. Portanto, o investimento nesse tipo de ativo implica, como o próprio nome sugere, em assumir um risco, de maneira que a rentabilidade do ativo de risco pode ser menor que a de um ativo livre de risco, sendo até mesmo negativa. Mas, em contrapartida, sua rentabilidade pode também ser maior que a de um ativo livre de risco. Alguns exemplos de ativos de risco são:

ação - Bem que representa a menor parcela em que se divide o capital social de uma sociedade por ações (S/A).

commodities - Tipo de produto, geralmente agrícola ou mineral, de valor econômico relevante. Exemplo: café, algodão, soja, cobre, aço, petróleo, etc.

taxa de câmbio - Valor para conversão entre duas moedas estrangeiras.

É importante definir também, os instrumentos que indicam o comportamento médio do mercado, esses instrumentos são os chamados **índices**. Eles indicam a variação média dos preços de um conjunto de bens, em relação a um período tomado como referência. Um exemplo é o índice de ações, que representa o preço médio de um conjunto de ações. Um dos objetos de estudo deste trabalho será um índice da Bolsa de Valores de São Paulo, em particular o índice Bovespa; voltaremos a tratar desse índice com mais detalhes adiante.

Outra informação relevante para contextualizar nosso estudo é a de que o mercado finan-

ceiro é dividido em diferentes tipos de mercado [11], caracterizados dentre outras formas, pelo tipo de mercadoria negociada ou pela forma que são liquidados os negócios. Dentre todos os mercados, o mais popular é certamente o **mercado à vista**, onde as operações financeiras são liquidadas no ato da negociação. Existem outros tipos de mercado que se diferenciam do mercado à vista em diversos aspectos. Um deles é o **mercado de derivativos**. Os derivativos são instrumentos financeiros cujo valor deriva do preço de um outro ativo, o chamado ativo de referência, tais como ações, commodities, taxa de câmbio, entre outros. De maneira geral, esses contratos, permitem definir-se com antecedência a que preço o respectivo ativo de referência será negociado numa data futura. Um dos tipos de derivativos mais comum são as opções de compra ou de venda. Uma opção de compra é um instrumento que dá ao seu portador o direito de comprar um determinado ativo de referência por um preço específico antes ou na data de vencimento. Já uma opção de venda é um instrumento que dá ao seu portador o direito de vender um determinado ativo de referência por um preço especificado em um data futura.

A determinação de modelos que descrevam bem os preços desses contratos é muito importante, pois os contratos de opção são amplamente usados e movimentam bilhões de dólares em todo o mundo [12]. Só na Bovespa, de todo volume financeiro R\$ 4,4 bilhões registrado em 14/12/05, R\$ 1.159.290.000,00 devem-se ao vencimento de opções sobre o índice Bovespa. Do volume das opções exercidas, R\$ 1.152.490.000,00 representaram operações com opções de compra e R\$ 6.800.000,00 opções de venda, em um total de 39.585 contratos [13]. Por esse motivo outro objeto de estudo deste trabalho será o contrato de opção de compra sobre o índice Bovespa. Uma abordagem mais detalhada desse tipo de contrato de derivativo será feita nos capítulos 3 e 4.

1.2.1 O Índice Bovespa

A escolha desse índice como objeto de estudo se deve ao fato do Ibovespa ser o principal indicador do desempenho médio das cotações do mercado acionário brasileiro, sendo assim, o melhor termômetro para se aferir a eficiência desse mercado. O índice é definido como o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações, que em conjunto, representam 80% do volume negociado no mercado à vista num período de 12 meses anteriores à formação da carteira. Como critério adicional, exige-se que cada ação que compõe a carteira teórica obedeça individualmente os itens abaixo:

1. A Bovespa calcula o índice de negociabilidade¹ (IN) para cada uma das ações nela negociadas nos últimos doze meses. Os IN 's de cada uma das ações são colocados em uma tabela em ordem decrescente, em seguida soma-se todos os IN 's obtendo assim IN_{total} . Calcula-se então, do maior para o menor, a participação de cada IN individual em relação à IN_{total} , listando-se as ações até que a soma dos IN 's de suas participações atinja 80% de IN_{total} .
2. A ação precisa ter volume de negócios superior a 0.1% do total negociado na bolsa.
3. A ação precisa ter no mínimo 80% de presença nos pregões.

A carteira que compõe o índice é atualizada quadrimestralmente, sempre com base nos 12 meses anteriores. Satisfeito esses requisitos, o índice é determinado, através da seguinte expressão:

$$Ibovespa_t = \sum_{i=1}^k P_{it} q_{it}, \quad (1.3)$$

onde:

$Ibovespa_t$ = Índice Bovespa no tempo t .

k = número total de ações que compõem a carteira teórica.

P_{it} = Preço da ação i no tempo t .

q_{it} = Quantidade teórica da ação i na carteira no tempo t .

Na Fig. 1.1 mostramos a série histórica do índice Bovespa de janeiro de 1968 a dezembro de 2006 deflacionada pelo IGP-DI², destacando os principais eventos políticos e econômicos

¹O Índice de negociabilidade é obtido com base no período dos últimos 12 meses, a partir da seguinte expressão [13]:

$$IN = \sqrt{\frac{n_i v_i}{N V}} \quad (1.2)$$

IN = índice de negociabilidade.

n_i = número de transações com a ação i no mercado à vista no período.

N = número de transações com todas ações do mercado à vista no período.

v_i = valor da ação i negociada no mercado à vista no período.

V = volume financeiro total do mercado à vista da BOVESPA no período

²Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna, da FGV, índice que tenta refletir as variações mensais de preços, pesquisados do dia 01 ao último dia do mês corrente. Ele é formado pelo IPA (Índice de Preços por

que aconteceram no Brasil e no mundo e que de certa forma influenciaram no valor do índice Bovespa.

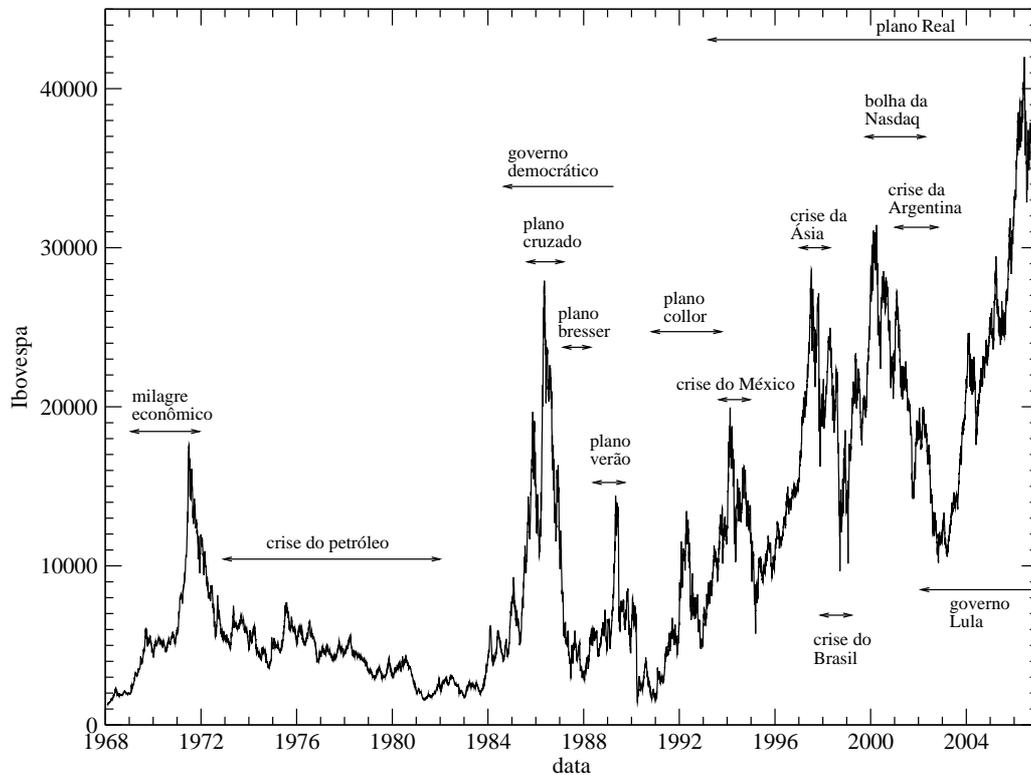


Figura 1.1 Série histórica do índice Bovespa de janeiro de 1968 a dezembro de 2006 deflacionada pelo IGP-DI.

1.3 Organização da Dissertação

Como já foi mencionado, estaremos interessados em analisar o contrato de opção de compra sobre o índice Bovespa. Esse tipo de instrumento financeiro será o cerne desse trabalho. Porém, antes de nos aprofundarmos no estudo dos contratos de opção sobre o Ibovespa, será preciso um bom entendimento do comportamento probabilístico do ativo de referência, ou seja, do próprio índice Bovespa. Com esse objetivo dividimos a dissertação em duas etapas: em um primeiro Atacado), IPC (Índice de Preços ao Consumidor) e INCC (Índice Nacional do Custo da Construção), com pesos de 60%, 30% e 10%, respectivamente. O índice apura as variações de preços de matérias-primas agrícolas e industriais no atacado e de bens e serviços finais no consumo.

momento realizamos a análise estatística das cotações do Ibovespa, e em seguida estudamos o contrato de opção cujo preço deriva do valor desse índice.

Dessa forma, a dissertação foi estruturada da seguinte maneira: No segundo capítulo, é discutido modelos teóricos que propõem formas funcionais para densidade de probabilidade com o objetivo de descrever o comportamento das distribuições de retorno do Ibovespa em escala de tempo diária e intra-diárias. Em seguida, a partir dos dados empíricos obtidos da série temporal do fechamento diário desse índice no período de 1968 a 2004, e da série contendo a cotação a cada 15 minutos do índice Bovespa num período de 1998 a 2001, realizamos análises sobre as distribuições dos retornos em escala de tempo diária, bem como efetuamos análises sobre as distribuições dos retornos em escala de tempo intra-diária, escala que varia de 15 minutos até 7 horas.

Como já foi dito, o objetivo principal desse estudo é a análise estatística da cotação dos contratos de opção de compra sobre o valor do índice Bovespa. Portanto, é preciso um bom conhecimento dos modelos teórico existentes que representam o preço justo a se pagar por esse tipo de contrato. Com essa finalidade, apresentaremos no terceiro capítulo o embasamento teórico necessário para o entendimento dos dois modelos para o preço de um contrato de opção que serão utilizados no quarto capítulo desta dissertação. São eles: o modelo de Black-Scholes [9] ou modelo gaussiano, e o modelo empírico para o preço de opção [14], também chamado de modelo exponencial.

No quarto capítulo, nos concentramos na análise estatística das séries históricas das cotações diárias das opções de compra sobre o índice Bovespa entre os anos de 2005 e 2006. Realizamos uma comparação detalhada dos preços praticados no mercado de opções com os preços gerados tanto pelo modelo exponencial de precificação das opções como pelo modelo de Black-Scholes. Indicamos, através do método da minimização do desvio padrão, qual dos modelos melhor descreve os preços de mercado das opções para determinado intervalo de tempo antes da expiração do contrato.

Finalmente, no quinto capítulo, indicaremos nossas conclusões, bem como vamos expor as principais perspectivas para novos estudos.

Distribuição dos retornos

2.1 Dinâmica dos preços

Quando olhamos o preço de um ativo financeiro de risco cotado hoje, é inevitável a seguinte pergunta: O que acontecerá amanhã, o preço subirá ou cairá?

Afim de tentar responder essa pergunta os investidores dispõem de diversas técnicas. Algumas delas utilizam a análise de séries temporais de um determinado ativo de risco para prever qual será o preço de amanhã. Porém, o fato é que é praticamente impossível determinar o preço futuro de um ativo. Como já havíamos mencionado, as ações de uma empresa negociadas no mercado à vista são um exemplo de ativo de risco. Teoricamente uma ação representa a menor parcela do capital social de uma sociedade por ações (S/A) [13]. O preço da ação de uma determinada empresa representa, portanto, o valor presente da empresa, bem como as expectativas que os investidores têm em relação ao futuro dessa empresa. Dessa forma, a expectativa de compradores e vendedores guiaria a dinâmica dos preços dessa ação no mercado à vista levando a um comportamento imprevisível, portanto, um modelo determinístico para evolução dos preços de um ativo de risco é impossível de ser obtido. Porém, como já foi mencionado na seção 1.1, muito se tem feito a fim de determinar uma expressão que explique, de um ponto de vista estatístico a evolução dos preços desse tipo de ativo. Antes de analisar os modelos probabilísticos para ativos de risco, é instrutivo relembrar a evolução temporal do preço de um ativo livre de risco.

A descrição de um modelo para a dinâmica do preço M de um ativo livre de risco é obtida de forma bem simples, pois o rendimento proporcionado por esse ativo é perfeitamente determinístico. Investir nesse ativo seria equiparável a investir em uma caderneta de poupança cujo valor cresce com uma taxa de juros r . A sua variação relativa pode ser descrita de forma completamente determinística através da equação

$$\frac{dM}{M} = rdt, \quad (2.1)$$

ou dito de outra forma:

$$dM = rMdt. \quad (2.2)$$

Portanto, a evolução do valor desse ativo livre de risco cresce segundo

$$M(t) \propto e^{rt}. \quad (2.3)$$

Por outro lado, os ativos financeiros negociados em bolsa possuem um risco inerente. Dessa forma, em função da imprevisibilidade do preço desse ativo, é razoável supor que o preço S de um ativo tenha uma variação relativa esperada que possa ser decomposta em uma parte determinística, que reflete a expectativa de valorização desse ativo, e outra estocástica que reflete todos os fatores externos responsáveis pelo comportamento aleatório dos preços [15]. Portanto, podemos descrever essa variação relativa pela equação diferencial estocástica (EDE) abaixo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW,$$

ou alternativamente

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdW, \quad (2.4)$$

onde μ é uma constante associada a parte determinística do preço, σ é uma constante associada a aleatoriedade do preço e a diferencial dW representa a variação aleatória do preço. Matematicamente dW é definido como o incremento em um intervalo de tempo dt do processo de Wiener ou movimento Browniano $W(t)$, ou seja,

$$dW = W(t + dt) - W(t). \quad (2.5)$$

O movimento Browniano, ou processo de Wiener, por sua vez é o processo estocástico definido pelas seguintes propriedades [16]:

1. $W(0) = 0$
2. os incrementos de dW são contínuos.
3. os incrementos $W(t) - W(t_0)$, onde $t > t_0$, possuem densidade de probabilidade normal $N(0, \sqrt{t - t_0})$. Em particular, isso significa que $\langle W(t) - W(t_0) \rangle = 0$, $\text{var}[W(t) - W(t_0)] = (t - t_0)$, onde $\langle \rangle$ denota média e var a variância: $\text{var}[f(w)] = \langle f(w)^2 \rangle - \langle f(w) \rangle^2$. No limite de $\Delta t \rightarrow dt$ temos $\langle dW \rangle = 0$ e $\text{var}[dW] = dt$,

Usando as propriedades de $W(t)$ em (2.4) podemos afirmar que

$$\langle dS(t) \rangle = \mu S dt. \quad (2.6)$$

Logo podemos interpretar μ como sendo a taxa de retorno médio esperado do ativo. A constante σ , como veremos a seguir, é uma medida da volatilidade do respectivo ativo.

Nosso objetivo agora é determinar, a partir de (2.4), a distribuição de probabilidade do preço $S(t)$ do ativo. Para esse fim, ao invés de estudar a variável $S(t)$, é interessante considerar $\ln S(t)$ como a variável independente, escrevendo-a na forma de uma EDE. No entanto, sabendo que S é um processo estocástico não podemos obter a EDE para $\ln S$ a partir da relação direta entre S e $\ln S$ como se fossem grandezas determinísticas [17], ou seja, $\frac{dS}{S} \neq d(\ln S)$. De fato, para obter a expressão diferencial de uma função $f(S)$, que dependa de um processo estocástico $S(t)$ precisaremos aplicar o Lema de Itô [15]. Este lema é similar à expansão de uma função em séries de Taylor, com a diferença de que essa função depende de uma variável estocástica. O objetivo é chegar numa EDE para $f(S)$ sabendo que $S(t)$ é um processo estocástico descrito pela EDE (2.4).

A partir da expressão em série de Taylor chegamos a,

$$df(S) = \frac{df}{dS} dS + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS^2 + \dots \quad (2.7)$$

Substituindo agora (2.4) em (2.7), obtemos

$$df(S) = \mu S \frac{df}{dS} dt + \sigma S \frac{df}{dS} dW + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} (\mu S)^2 (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} \mu \sigma S^2 dt dW + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} (\sigma S)^2 (dW)^2.$$

No limite $dt \rightarrow 0$ pode-se mostrar que a ordem de magnitude de $(dW)^2$ é dt . Então, desprezando os termos maiores que dt , chegamos à expressão

$$df(S) = \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt + \sigma S \frac{df}{dS} dW, \quad (2.8)$$

que constitui o lema de Itô. Para o caso da função de interesse $f(S) = \ln S$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}. \quad (2.10)$$

Agora, substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), chegamos na EDE para $f(S) = \ln S$:

$$df = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW. \quad (2.11)$$

Podemos agora obter a média e a variância para a função $f(S)$ integrando em t a EDE acima,

$$f(S) - f(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \sigma dW(s),$$

onde $S = S(t)$ e $S_0 = S(t_0)$, efetuando a definição de média em ambos os lados da equação acima temos

$$\langle f(S) - f(S_0) \rangle = \langle \ln \frac{S}{S_0} \rangle = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \sigma \langle dW(s) \rangle,$$

como $\langle dW(s) \rangle = 0$, chegamos a

$$\langle f(S) - f(S_0) \rangle = \langle \ln \frac{S}{S_0} \rangle = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0). \quad (2.12)$$

Para o cálculo da variância devemos fazer $(f(S) - f(S_0))^2$ de maneira que

$$(f(S) - f(S_0))^2 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 (t - t_0)^2 + 2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) \int_{t_0}^t \sigma dW(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \sigma^2 dW(s)dW(s'),$$

efetuando a definição de média em ambos os lados da equação acima temos

$$\langle (f(S) - f(S_0))^2 \rangle = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 (t - t_0)^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \sigma^2 \langle dW(s)dW(s') \rangle,$$

sabendo que $dW(s)dW(s') = \sqrt{ds ds' \delta(s - s')}$ chegamos a

$$\langle (f(S) - f(S_0))^2 \rangle = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 (t - t_0)^2 + \sigma^2(t - t_0), \quad (2.13)$$

finalmente, usando 2.13 e 2.12 obtemos

$$\text{var}[f(S) - f(S_0)] = \sigma^2(t - t_0). \quad (2.14)$$

Vamos agora definir uma função retorno $x(S)$, como sendo

$$x(S) = f(S) - f(S_0) = \ln \frac{S}{S_0}. \quad (2.15)$$

Dessa maneira, obtivemos acima que $x(S)$ pode ser representado como um processo gaussiano que possui média e variância, respectivamente, dadas por

$$\langle x(S) \rangle = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0),$$

$$\text{var}[x(S)] = \text{var}\left[\ln \frac{S}{S_0}\right] = \sigma^2(t - t_0),$$

de modo que a distribuição de probabilidade da função $x(S) = \ln S/S_0$ é a distribuição normal com a média e a variância acima, ou seja,

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right), \quad (2.16)$$

A equação diferencial estocástica (2.11) para df , é caracterizada como um processo de Wiener generalizado [16], também conhecido como movimento browniano com drift, significando que a média é não nula e variância é não unitária.

Para obter a forma da distribuição de probabilidade para o preço $S(t)$, devemos usar a propriedade

$$\tilde{p}(S) = \frac{p(\ln S)}{S}.$$

Usando (2.16) na expressão acima, obtemos que

$$\tilde{p}(S) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \frac{1}{S} \exp\left(-\frac{[\ln S/S_0 - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right), \quad (2.17)$$

Essa distribuição é conhecida como log-normal, e sua dinâmica associada dS representa um movimento Browniano geométrico.

Até agora verificamos que a distribuição de probabilidade do preço $S(t)$, descrito pela EDE (2.4), é dada pela distribuição log-normal (2.17). E que a distribuição de probabilidade dos retornos x , é a distribuição normal (2.16), também conhecida como distribuição gaussiana. No entanto, observando empiricamente os retornos definidos como na função (2.15), nota-se que nem sempre a distribuição dos retornos tende a seguir uma distribuição gaussiana. Por esse motivo, é necessário apresentar outros tipos de distribuições com a finalidade de modelar a distribuição dos retornos em situações em que a distribuição gaussiana não se aplica.

2.2 Distribuição exponencial

Estudos realizados anteriormente [1] corroboram que as distribuições dos retornos do índice Bovespa, gerados em uma escala de tempo particular, não são bem descritas por uma distribuição gaussiana, e sugere-se como descrição alternativa da distribuição empírica dos retornos uma função exponencial [14], com a seguinte forma funcional

$$f(x, t-t_0) = \begin{cases} Ae^{\gamma(x-\delta)} & \text{se } x < \delta \\ Be^{-\nu(x-\delta)} & \text{se } x > \delta, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde x é o retorno, descrito de maneira similar a função retorno (2.15), isto é, $x(S) = \ln \frac{S}{S_0}$, onde $S = S(t)$ e $S_0 = S(t_0)$.

Usando a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\delta} A e^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\infty} B e^{-\nu(x-\delta)} dx = 1,$$

chegamos à relação

$$\frac{A}{\gamma} + \frac{B}{\nu} = 1. \quad (2.20)$$

Com o intuito de usar essa função exponencial para ajustar a distribuição de retornos, e tendo em mente que essa função possui descontinuidade em δ , é bastante conveniente definir para a função exponencial que a média dos retornos seja

$$\langle x \rangle = \delta, \text{ de maneira que,} \quad (2.21)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \delta,$$

$$\int_{-\infty}^{\delta} A x e^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\infty} B x e^{-\nu(x-\delta)} dx = \delta,$$

usando as condições (2.20) e (2.21) podemos determinar os valores de A e B como sendo:

$$A = \frac{\gamma^2}{\gamma + \nu}, \quad (2.22)$$

$$B = \frac{\nu^2}{\gamma + \nu}. \quad (2.23)$$

Agora, afim de calcular a variância dos retornos, vamos calcular $\langle x^2 \rangle$ da seguinte maneira

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx,$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\delta} A x^2 e^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\infty} B x^2 e^{-\nu(x-\delta)} dx,$$

$$\langle x^2 \rangle = \delta^2 + \frac{2}{\gamma\nu},$$

dessa forma é possível mostrar que a variância da distribuição exponencial (2.18) é dada por

$$\text{var}[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2,$$

$$\text{var}[x] = \frac{2}{\gamma\nu}. \quad (2.24)$$

Uma das principais características da distribuição exponencial é a de que, à medida que nos afastamos do valor médio da variável x , a distribuição exponencial decai mais lentamente do que a distribuição gaussiana. No entanto, existem outros tipos de distribuições que possuem esse tipo de comportamento, e decaem ainda mais lentamente do que a distribuição exponencial, evidenciando, longe da média, um comportamento conhecido como "caudas pesadas" [8]. Essas distribuições são chamadas de distribuições com lei de potência. Algumas dessas distribuições serão abordadas neste trabalho, são elas: a distribuição de Levy e a distribuição de Tsallis.

2.3 Distribuição com Lei de Potência

2.3.1 Distribuição de Levy

A distribuição de Levy surge de uma expressão desenvolvida por Levy e Khintchine [18] que reproduzem toda a classe de distribuições de um processo estável. Sendo a distribuição de Levy, um caso particular que assume que a distribuição é simétrica e tem média zero, resultando na expressão

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|k|^\alpha} \cos(kx) dk, \quad (2.25)$$

onde x é o retorno, γ e α são parâmetros que tem origem da expressão geral de Levy e Khintchine, e que na expressão (2.25) estão sujeitos às seguintes restrições: γ é um fator de escala chamado de expoente de estabilidade, que possui valor positivo e $0 < \alpha \leq 2$, vale ressaltar que a distribuição de Levy não é definida para $\alpha > 2$, porque, neste caso, a função obtida a partir de (2.25) não é positiva para todos os valores de x .

Observa-se que para as classes de distribuições estáveis, os momentos $E\{|x|^n\}$ divergem para $n \geq \alpha$ quando $\alpha < 2$. Em particular, apenas dois valores de α permitem que a integral de (2.25) seja calculada explicitamente. O valor de $\alpha = 1$ nos proporciona a distribuição de Cauchy, e o valor $\alpha = 2$ nos proporciona a distribuição gaussiana. Infelizmente, não podemos encontrar expressões fechadas para as distribuições estáveis com qualquer outro valor de α , se não aqueles. Além do mais, observa-se que para qualquer outro valor de $\alpha < 2$, a distribuição de Levy decai como uma lei de potência para grandes valores de x de acordo com $P_L(|x|) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$. Portanto a distribuição de Levy (2.25) não possui uma escala característica, sendo

assim, a variância desta distribuição é infinita. Por esse motivo, ao se tentar ajustar os dados dos retornos empíricos, é preciso que se "trunque" a distribuição de Levy.

Um dos critérios usado para descrever as distribuições empíricas através da distribuição de Levy é o truncamento abrupto [19] da distribuição de Levy, de maneira que

$$P_{TL}(x) = P_L(x)\theta(x_c - |x|), \quad (2.26)$$

onde θ é a função de Heavyside definida como

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

e x_c é um valor arbitrário.

2.3.2 Distribuição de Tsallis

A distribuição de Tsallis é a distribuição de probabilidade de um sistema não extensivo encontrar-se num certo estado x que maximiza a entropia generalizada desse sistema, a entropia de Tsallis [20].

A entropia de Tsallis surge como uma generalização para a entropia de Boltzmann [21] e é descrita, num sistema discreto, como

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{x=1}^N p_x^q}{q - 1},$$

onde N é o número de microestados acessíveis ao sistema, p_x^q é a probabilidade de o sistema encontrar-se em um estado x e k é uma constante similar a constante de Boltzmann. E para um sistema contínuo, temos

$$S_q = k \frac{1 - \int P_T(x,t)^q dx}{q - 1},$$

onde $P_T(x,t)$ é chamada distribuição q-Gaussiana, também conhecida como distribuição de Tsallis [22], é a distribuição de probabilidade do sistema se encontrar em um estado x . O parâmetro q caracteriza a não-extensividade da entropia, isto pode ser visto claramente na seguinte relação

$$\frac{S_q^{A \cup B}}{k} = \frac{S_q^A}{k} + \frac{S_q^B}{k} + \frac{(1 - q)S_q^A S_q^B}{k},$$

para o caso particular $q = 1$ a extensividade da entropia é recuperada.

Para obter a expressão da distribuição de Tsallis é preciso definir a expressão do valor esperado como sendo

$$\langle f(x) \rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P_T(x, t) dx,$$

além disso, é preciso sujeitar a distribuição de Tsallis aos vínculos

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_T(x, t) dx = 1, \quad (2.28)$$

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) P_T(x, t) dx = 0, \quad (2.29)$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P_T(x, t) dx = \sigma(t)^2. \quad (2.30)$$

Dessa forma, encontramos a expressão para a distribuição de Tsallis

$$P_T(x, t) = \frac{1}{Z(t)} \left[1 - \beta(t)(1 - q)(x - \langle x \rangle)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.31)$$

O primeiro vínculo (2.28) é uma condição de normalização; as outras duas condições (2.29) e (2.30) corresponderão, respectivamente, a média e a variância de x apenas no caso em que $q = 1$; as expressões $Z(t)$ e $\beta(t)$ são multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos (2.28) e (2.30), respectivamente, sendo descritos por

$$Z(t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3-q}{2q-2})}{\Gamma(\frac{1}{q-1}) \sqrt{(q-1)\beta(t)}}, \quad (2.32)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2\sigma(t)^2 Z(t)^{q-1}}. \quad (2.33)$$

Para a distribuição (2.31) a variância é dada por [23]

$$\sigma(t)^2 = \begin{cases} \frac{1}{(5-3q)\beta(t)} & \text{se } q < \frac{5}{3} \\ \infty & \text{se } q \geq \frac{5}{3}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Observa-se que os valores mais extremos da distribuição de Tsallis para $q > 1$ decrescem com uma lei de potencia do tipo $P_T(x, t) \sim x^{-\frac{2}{q-1}}$.

Em nosso estudo analisaremos a distribuição dos retornos normalizados ao desvio padrão, de modo que nos interessa somente os valores do parâmetro q em que a variância é finita, dessa forma, forçamos a expressão (2.34) a ser igual a um, o que resulta em

$$\beta(t) = \frac{1}{5-3q} \quad \text{se } q < \frac{5}{3} \quad (2.35)$$

e a expressão (2.31) passa a ser

$$P_T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \sqrt{\frac{q-1}{5-3q}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3-q}{2q-2}\right)} \left[1 - \left(\frac{1-q}{5-3q} \right) (x - \langle x \rangle)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.36)$$

Agora que apresentamos os modelos teóricos das distribuições de probabilidade. Vamos usar esses modelos para estudar as distribuições dos retornos em diversas escalas de tempo, gerados a partir dos dados da série das cotações diárias do índice Bovespa e da série das cotações intra-diárias do índice Bovespa.

2.4 Análise Estatística dos Retornos do Ibovespa

Primeiramente vamos definir qual variável iremos usar em nosso estudo das flutuações. À primeira vista, poderia parecer que o natural seria usar a série das cotações dos preços $S(t)$ e considerar variações $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, onde Δt dependeria da escala de tempo de interesse, por exemplo, $\Delta t = 1 \text{ dia}$ para série diária dos preços e $\Delta t = 15 \text{ minutos}$ para a série intra-diária. No entanto, a variável ΔS dependerá da unidade monetária (Real, Dólar, etc.).

Poderíamos resolver esse problema estudando não as variações absolutas do preço do ativo, mas a diferença relativa dos preços, expresso pela relação $[S(n+1) - S(n)]/S(n)$. Contudo, usando essa variável, nos deparamos com um outro problema: não conseguiremos gerar a série dos retornos em outra escala de tempo a partir da série dos retornos fundamental (a série diária, ou a série intra-diária de 15 minutos), pois a diferença relativa dos preços não possui aditividade.

Porém, se escolhermos para análise os retornos definidos como a diferença logarítmica dos preços do ativo,

$$x_\tau(n) = \ln S(n + \tau) - \ln S(n), \quad (2.37)$$

teremos uma grandeza que é adimensional. Além disso, a expressão (2.37) é extensiva, ou seja, podemos gerar retornos para qualquer escala de tempo τ a partir da série dos retornos fundamental $\tau = 1$, segundo a expressão

$$x_\tau(n) = \sum_{i=1}^{\tau} x_1(i + n - 1), \quad (2.38)$$

$$\text{onde } x_1(n) = \ln S(n + 1) - \ln S(n).$$

Portanto, será conveniente usar os retornos definidos como a diferença logarítmica dos preços do ativo como variável a ser analisada. Dessa forma, usamos a expressão (2.37) para gerar a

série dos retornos na escala de tempo $\tau = 1$, isto é, $\{x_1(n)\}$, a partir das cotações do índice Bovespa mencionadas. Como exemplo, podemos ver na Fig. 2.1, a série dos retornos diários do Ibovespa, nesse caso $\tau = 1$ representa um dia. Depois disso, conseguiremos gerar a série dos retornos em qualquer escala de tempo $\{x_{\tau>1}(n)\}$, a partir da série dos retornos $\{x_1(n)\}$, usando a expressão (2.38).

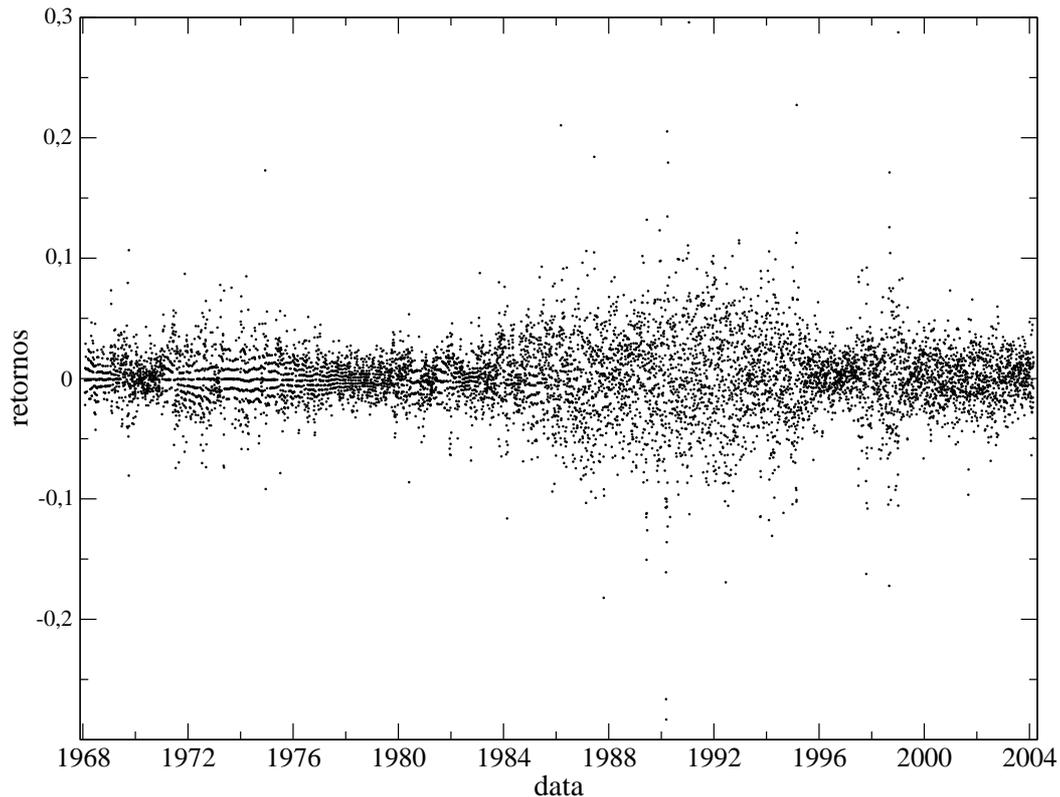


Figura 2.1 Série temporal do retorno logarítmico diário do índice Bovespa de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004.

A série dos retornos do índice Bovespa são de grande importância não só no estudo desse índice em si, mas também no entendimento de contratos derivativos cujo preço dependem do valor desse índice. Nos capítulos 3 e 4 estudaremos alguns desses contratos com mais detalhes. Nesta seção faremos uma análise dos dados empíricos, ou seja os retornos gerados a partir das cotações diárias e intra-diárias do índice Bovespa. Então, a partir da cotação diária do índice num período de janeiro de 1968 à fevereiro de 2004 totalizando 8889 pontos, geramos a série dos retornos diários, usando (2.37). Então usando (2.38), geramos as série de retornos de 1 dia a 100 dias. Em seguida, realizamos o estudo da densidade de probabilidade dos retornos para diversas escalas de tempo.

Num segundo momento, a partir da cotação do índice a cada 15 minutos num período de 1998 a 2001, totalizando 19995 pontos, geramos a série de retorno de 15 minutos usando a expressão (2.37). Depois disso, usando a expressão (2.38), podemos gerar retornos para outras escalas intra-diárias de tempo, como por exemplo retornos de 1 hora. Em seguida estudaremos a densidade de probabilidade das série de retorno intra-diárias.

2.4.1 Retornos Diários

Como já havíamos mencionado, a partir da cotação diária do Ibovespa de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004, podemos gerar a série de retornos diário utilizando a expressão (2.37). O resultado pode ser visto na Fig. 2.1. E como foi mencionado anteriormente, usando a expressão (2.38) geramos as séries de retornos para escalas diárias de tempo maiores que 1 dia.

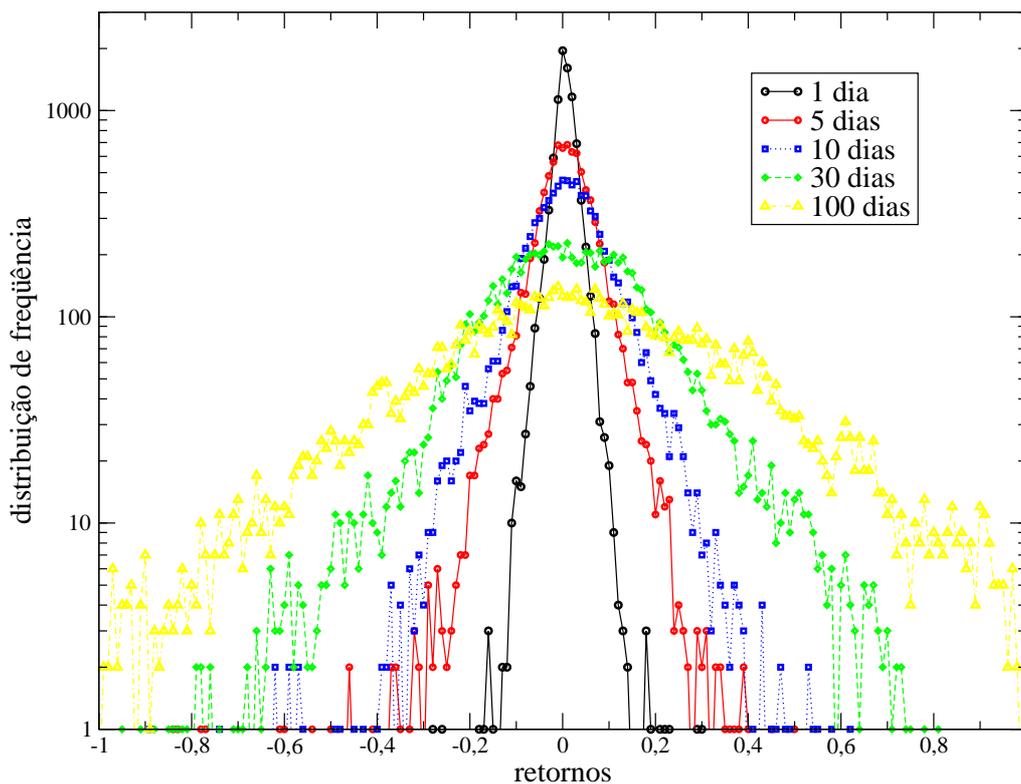


Figura 2.2 Histograma comparando retornos de 1dia, 5 dias, 10 dias, 30 dias e 100 dias, em escala semi-log.

A Fig. 2.2 mostra a distribuição dos retornos (histograma dos retornos) em escalas semi-log para retornos com escalas de tempo de 1, 5, 10, 30, 100 dias. Esses histogramas são construídos

para retornos contidos no intervalo $[-1, 1]$, este intervalo é dividido em 200 intervalos menores, que chamaremos de intervalo de retorno. Indicamos no eixo vertical o número de incidência de retornos contidos no respectivo intervalo de retorno. Nessa figura, nota-se claramente que a forma da distribuição muda para os retornos com diferentes escalas de tempo. Pode-se perceber que a medida que aumentamos a escala de tempo, a distribuição dos retornos se alarga, isto é, a variância aumenta, como esperado.

Para facilitar a análise das distribuição dos retornos, vamos normalizar os retornos à variância, ou seja, vamos dividir os retornos pelo desvio padrão da série dos retornos, de modo que as novas séries terão variância unitária. Então, até o fim deste capítulo, quando nos referirmos aos retornos, estaremos tratando dos retornos normalizados.

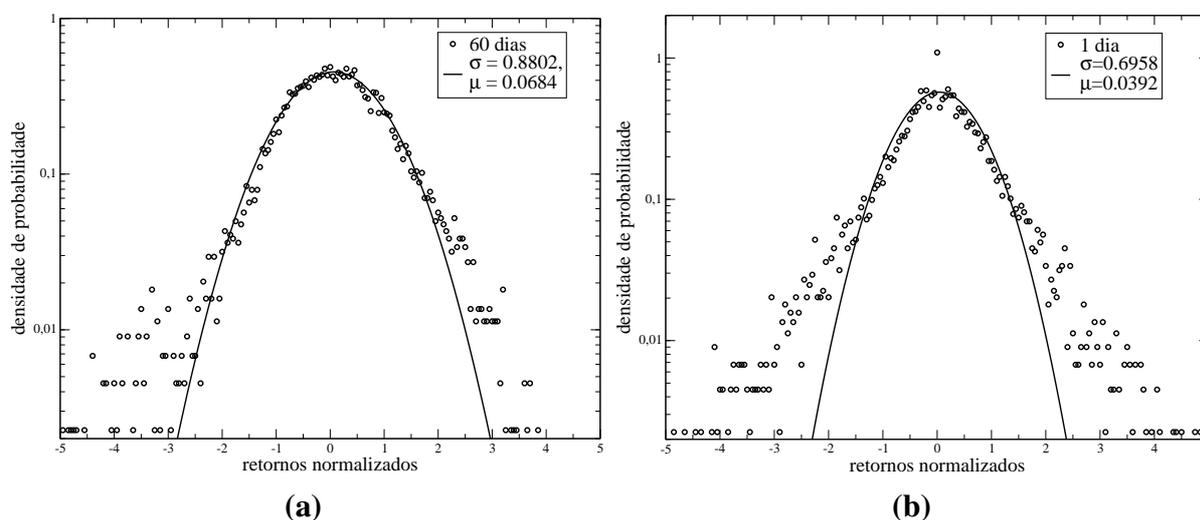


Figura 2.3 (a) Histograma dos retornos de 60 dias e ajuste de uma distribuição gaussiana (curva sólida). O ajuste proporciona um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.0597$; (b) Histograma dos retornos de 1 dias ajustados por uma distribuição gaussiana. O ajuste proporciona um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.4886$.

O estudo mais detalhado do comportamento da distribuição dos retornos será feito ajustando os modelos teóricos propostos anteriormente as distribuições empírica dos retornos. O ajuste será realizado de forma a minimizar o valor da função resíduo [24]. A função resíduo é a soma dos quadrados da diferença entre os dados empíricos e os resultados teóricos. Nesse método definimos a função resíduo, R^2 , através da relação

$$R^2 = \sum_{i=1}^N (H_i - P_i)^2, \quad (2.39)$$

onde H_i é o valor da densidade de probabilidade do i -ésimo retorno, P_i é o valor do modelo a ser ajustado para o mesmo i -ésimo retorno e N é a quantidade de pontos. O método consiste em achar os parâmetros dos respectivos modelos teóricos que minimizam a função R^2 .

Na Fig. 2.3a podemos observar, no gráfico em escala semi-log, que a distribuição dos retornos de 60 dia pode ser bem representada por uma parábola na região central da distribuição, embora apresente "caudas pesadas" nas extremidades. Através do método de ajuste apresentado acima obtemos para a distribuição dos retornos de 60 dia, um valor mínimo do resíduo de $R^2 = 0.0597$ usando como modelo a distribuição gaussiana. Na Fig. 2.3b temos a distribuição dos retornos diários, nessa figura fica evidente que a distribuição gaussiana não é tão boa em ajustar os dados. Através do método de ajuste obtemos para a distribuição dos retornos diários, um valor mínimo do resíduo de $R^2 = 0.4886$ usando como modelo a distribuição gaussiana.

O resultado acima indica que, devemos ter uma piora no ajuste gaussiano à medida que a escala de tempo diminui. Isso pode ser comprovado na Fig. 2.4, onde temos o valor mínimo do resíduo R_{min}^2 usando a distribuição gaussiana como ajuste, em função da escala de tempo dos retornos.

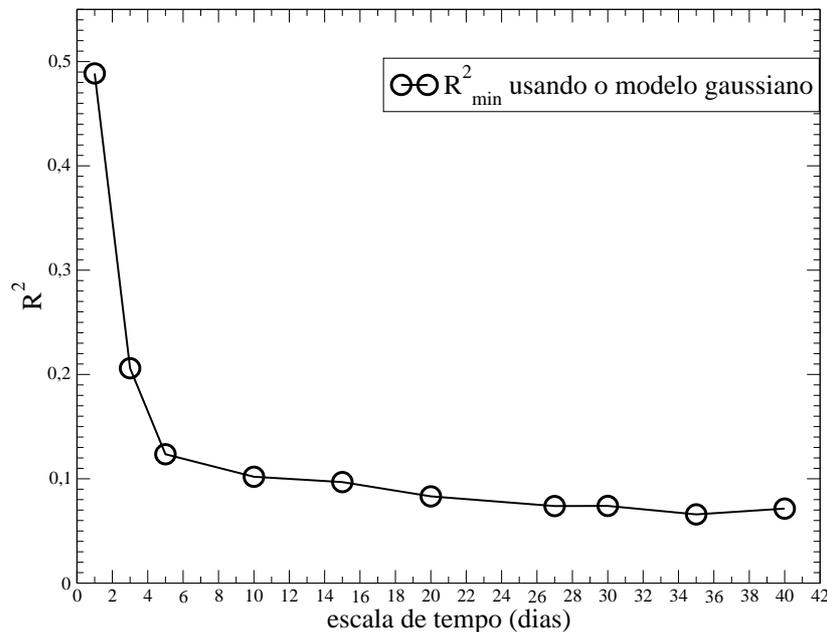


Figura 2.4 Valor mínimo do resíduo, R_{min}^2 , usando a distribuição gaussiana como ajuste, em função da escala de tempo dos retornos.

O fato de a distribuição gaussiana não ajustar tão bem a distribuição dos retornos em escalas de tempo pequenas, serve de motivação para testar outros tipos de funções que ajustem de forma

satisfatória a distribuição dos retornos nessas escalas de tempo. Um dos modelos propostos é o que assume que a distribuição dos retornos pode ser bem descrita por uma função exponencial (2.18). Mais uma vez, o ajuste da distribuição dos retornos diários, consiste em minimizar a função resíduo (2.39) usando, agora, a função exponencial. O resultado pode ser visto na Fig. 2.5, onde podemos comprovar a eficácia do modelo exponencial frente ao modelo gaussiano, Fig. 2.3b, em ajustar a distribuição dos retornos diários. Isso pode ser comprovado, também, comparando o valor mínimo do resíduo, usando como ajuste a distribuição gaussiana $R^2 = 0.4886$, com o valor mínimo do resíduo, usando como ajuste a distribuição exponencial $R^2 = 0.2969$. De maneira geral, reparamos que outras distribuições de retornos com escalas de tempo entre 1 a 30 dias são bem descritos por uma função exponencial, resultado que concorda com um estudo recente [1].

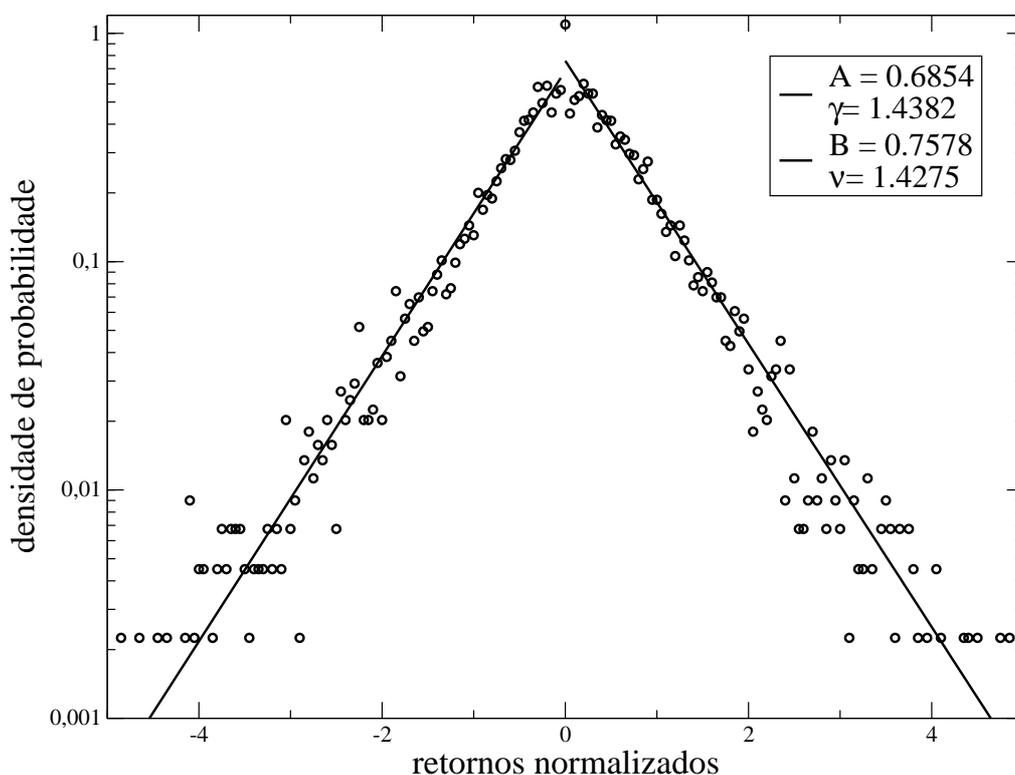


Figura 2.5 Histograma dos retornos de 1 dia ajustados por uma curva exponencial com parâmetros $A = 0.6854$, $\gamma = 1.4382$ para $x < 0$, $B = 0.7578$, $\nu = 1.4275$ para $x > 0$, esses parâmetros nos fornecem um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.2969$.

2.4.2 Retornos Intra-diários

Nesta seção analisaremos o comportamento dos chamados retornos de alta frequência, ou seja, os retornos auferidos ao longo do pregão, que via de regra possui duração de 7 horas. Para isso, usaremos a expressão (2.37) para gerar, inicialmente, a série de retornos de 15 minutos obtidos a partir da série da cotação do índice Bovespa a cada 15 minutos, no período de 1998 até 2001. Em seguida, usando a expressão (2.38), geramos a série de retornos de diversas escalas de tempo nesse período. Na Fig. 2.6 temos a distribuição dos retornos com escala de tempo de 3 horas, a essa distribuição ajustamos uma função exponencial através de (2.39) obtendo um valor mínimo do resíduo de $R = 0.2182$. Analisando as distribuição dos retornos

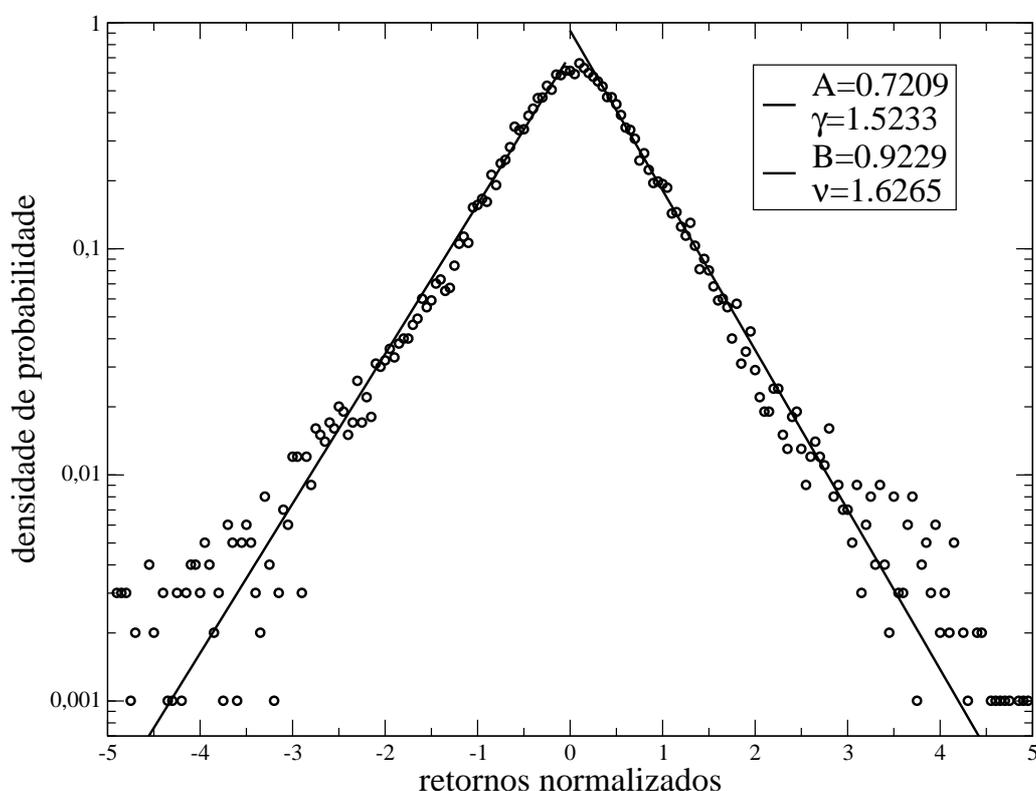


Figura 2.6 Ajuste exponencial para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 3 horas, com $\gamma = 1.5233$ para $x < 0$ e $v = 1.6265$ $x > 0$; esses parâmetros proporcionam um valor mínimo do resíduo $R^2 = 0.2182$.

para outras escalas de tempo, notamos que o ajuste usando a distribuição exponencial se aplica de forma eficaz para a distribuição de retornos intra-diários com escalas de tempo entre 3 e 7 horas, também de acordo com [1].

Porém, podemos verificar no gráfico em escala semi-log na Fig. 2.7 que para escalas de

tempo menores que 1 hora nota-se um desvio do comportamento linear. Em particular, as

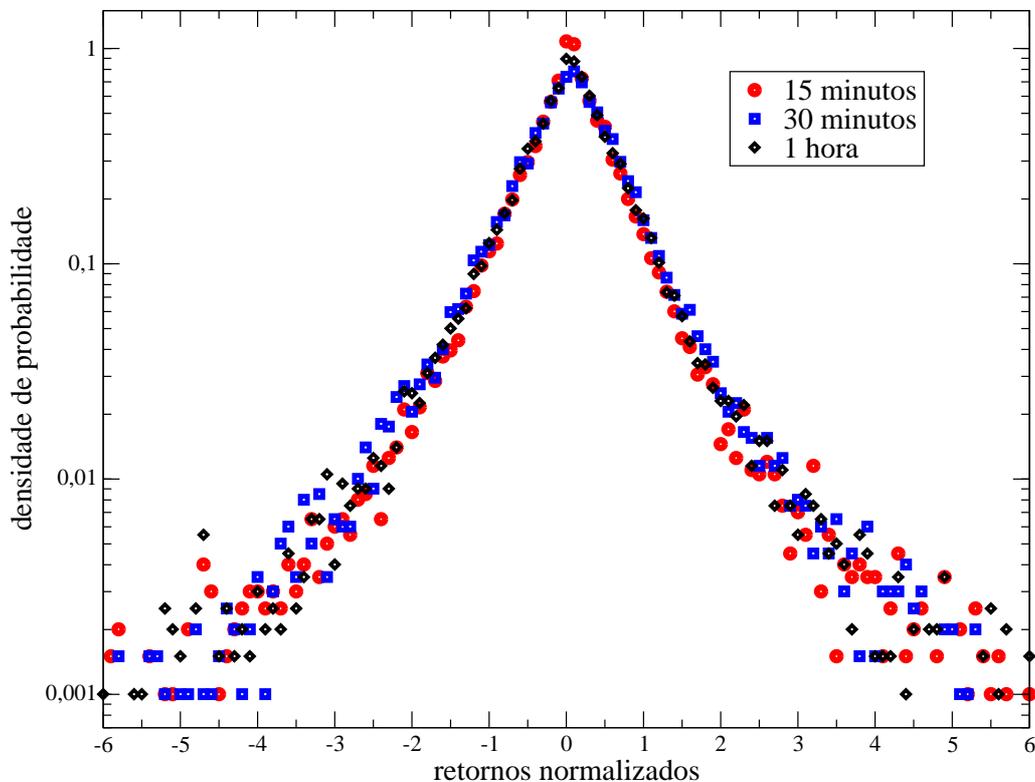


Figura 2.7 Densidade de Probabilidade dos retornos de 15 minutos, 30 minutos e 1 hora.

distribuição dos retornos de 15 minutos, apresentam um decaimento mais lento do que o de uma função exponencial, aumentando ligeiramente a probabilidade dos retornos mais extremos da distribuição, acentuando mais ainda o surgimento das "caudas pesadas". Esse comportamento, nas extremidades da densidade de probabilidade dos retornos de alta-freqüência do Ibovespa, sugere que o comportamento das distribuições para essas escalas de tempo possa ser descrito de melhor forma por uma expressão do tipo lei de potência [25]. Vale a pena ressaltar que, além do índice Bovespa, esse tipo de comportamento também é observado para índices de outros mercados acionários [26]. Com o intuito de caracterizar a forma funcional que melhor ajusta essas distribuições dos retornos de 15 minutos, vamos comparar duas distribuições teóricas, as chamadas distribuição de Tsallis (2.36) e a distribuição de Levy (2.25).

Com a finalidade de descrever o comportamento da distribuição do retornos normalizados de 15 minutos inicialmente usamos como ajuste a distribuição de Levy (2.25). Para encontrar o melhor ajuste utilizamos, como anteriormente, o método da minimização da função resíduo (2.39). Para isso, tivemos que encontrar quais os valores dos parâmetros da distribuição de

Levy, γ e α , que satisfazem a seguinte expressão,

$$\begin{cases} \frac{\partial R^2}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial R^2}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Como a distribuição de Levy possui dois parâmetros a serem determinados, a minimização de (2.39) é obtida através do método Downhill Simplex [27] para duas dimensões. Como resultado, encontrados os parâmetros $\gamma = 0.3389$ e $\alpha = 0.98$ que satisfazem a expressão acima. Esses parâmetros resultam em um valor mínimo da função resíduo $R^2 = 0.1538$. A curva de ajuste pode ser vista na Fig. 2.8.

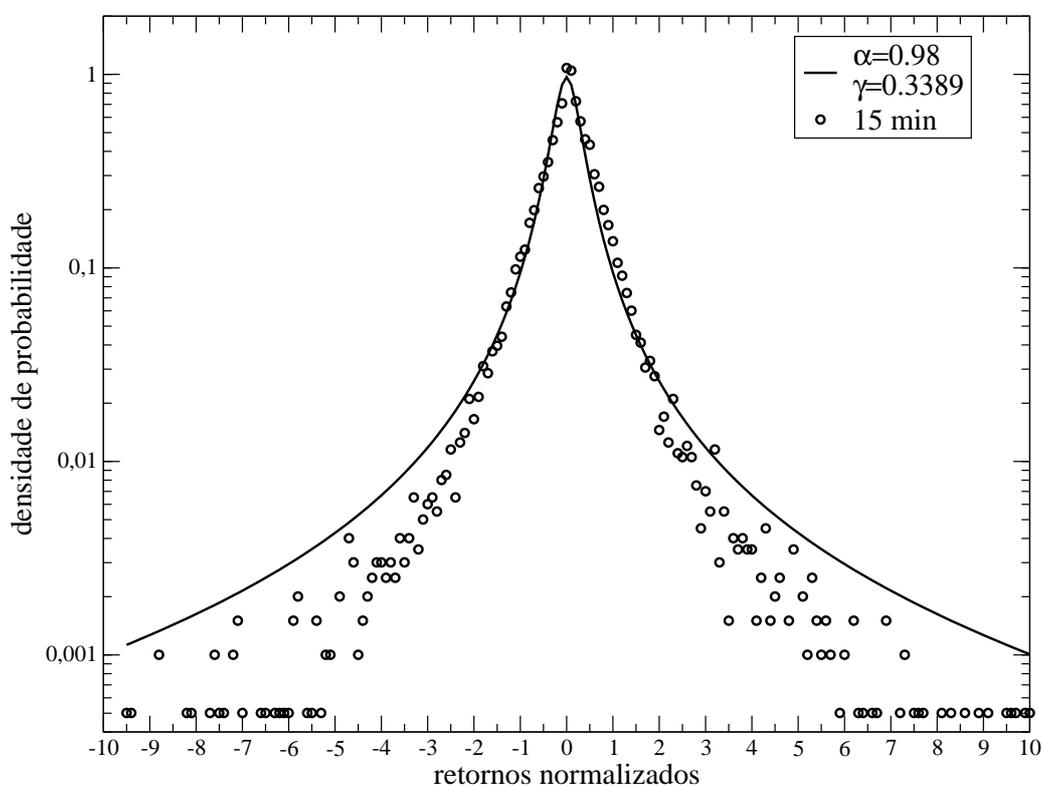


Figura 2.8 Para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 15 minutos, temos em vermelho o ajuste com a distribuição de Levy com parâmetros $\gamma = 0.3389$ $\alpha = 0.98$, com esses parâmetros conseguimos um resíduo de $R^2 = 0.1538$.

Vamos agora ajustar da distribuição dos retornos normalizados de 15 minutos usando a distribuição de Tsallis. Estamos interessados em ajustar uma curva de variância unitária, então de acordo com (2.35) teremos que ajustar apenas o parâmetro q , de maneira a proporcionar o melhor ajuste dos dados empíricos. Para determinar este parâmetro usamos, mais uma vez, o

método da minimização da função resíduo (2.39). Porém, como desta vez temos que encontrar apenas um parâmetro de maneira a satisfazer

$$\frac{\partial R^2}{\partial q} = 0,$$

usaremos o método golden section [27], que é bastante similar ao método da bisseção. O resultado encontrado que satisfaz a expressão acima é o valor $q = 1.59$. Esse valor de q proporciona o valor mínimo para a função resíduo $R^2 = 0.1483$. A curva de melhor ajuste pode ser vista na Fig. 2.9.

Ambas expressões (2.25) e (2.36) descrevem bem a distribuição dos retornos de 15 minutos na região central dos dados, com destaque para a distribuição de Tsallis que melhor ajusta os dados, obtendo menor valor para a função resíduo, além de possuir uma variância finita para o valor de q que proporciona o melhor ajuste, já que $q < \frac{5}{3}$. Foi mostrado recentemente por

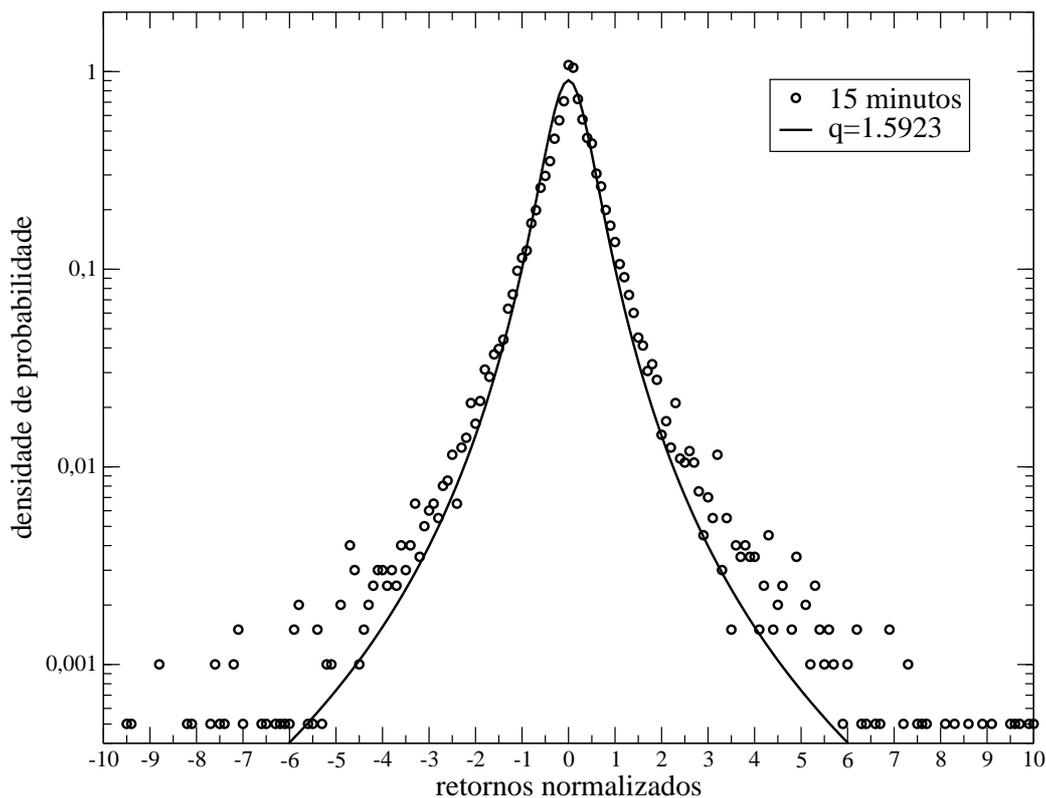


Figura 2.9 Para a densidade de probabilidade de retornos normalizados de 15 minutos, temos em azul o ajuste com a função de Tsallis resulta no parâmetro $q = 1.5923$ que proporciona um resíduo de $R^2 = 0.1483$.

Cortines e Riera [28], que os retornos de 1 minuto do Ibovespa também são bem descritos

por uma distribuição de Tsallis. Nossa análise acima mostra que essa distribuição também é observada para os retornos de 15 minutos permanecendo válida até a escala de tempo de 1 hora aproximadamente; vide Fig. 2.7.

Em resumo, vimos que para escalas de tempo maiores que 20 dias a distribuição de probabilidade dos retornos do índice Bovespa possui um comportamento tipicamente gaussiano. Porém, para retornos com escalas de tempo entre 3 horas e 20 dias o comportamento das distribuições de probabilidade desses retornos é melhor descrito por uma distribuição exponencial. No entanto, quando analisamos a distribuição dos retornos na escala de tempo de 15 minutos, observa-se o aparecimento de um comportamento do tipo lei de potência, motivo que nos impeliu a testar as distribuições de Levy e de Tsallis. Finalmente concluímos ser esta última, o melhor ajuste, visto que obteve menor valor para a função resíduo.

Há diversos modelos para precificação de derivativos que levam em consideração o comportamento do tipo lei de potência das distribuições dos retornos. Como, por exemplo modelos para opções baseados nas distribuições de Levy [29] ou distribuições q-gaussianas [30, 31, 21]. Entretanto, não tentaremos em nosso estudo analisar a performance desses modelos, por compreender que o comportamento do tipo lei de potência no índice Bovespa torna-se mais evidente apenas para retornos de alta-freqüência, sendo que essas escalas não são relevantes para o estudo de contratos de derivativos. Portanto, no próximo capítulo, vamos nos ater à análise do modelo exponencial e compará-lo com o modelo já estabelecido em finanças, o modelo de Black-Scholes, que assume que a distribuição do retornos tem comportamento gaussiano.

CAPÍTULO 3

Opções

3.1 Introdução

Um derivativo é um instrumento financeiro cujo preço depende de um outro ativo financeiro, chamado de ativo de referência. A finalidade do derivativo pode ser tanto a obtenção de ganho especulativo, como a proteção contra eventuais perdas no ativo de referência. Essa estratégia como forma de proteção é também conhecida como hedge e voltará a ser tratada mais adiante.

O mercado de derivativos é um mercado de liquidação futura, isto é, a liquidação do negócio se dá em uma data futura, diferentemente do mercado à vista, onde o negócio é liquidado no ato da negociação. O mercado de derivativos, por sua vez, pode ser dividido em outros mercados caracterizados pelo tipo de contrato negociado. Entre esses mercados destacam-se o mercado a termo e o **mercado de opção**, sendo este último, alvo de nosso estudo.

No mercado de derivativos, da mesma forma como no mercado à vista, o investidor pode se posicionar quanto aos negócios da seguinte forma:

posição comprada ("long position") - O investidor mantém quantidades positivas do ativo no mercado. Por exemplo: um investidor comprou ações de uma empresa no mercado à vista. Então, no momento, ele possui uma quantidade positiva de ações o que caracteriza uma posição comprada. A expectativa do investidor quando a sua posição é comprada, é a de que o ativo se valorize.

posição vendida ("short position") - O investidor mantém quantidades negativas de ativo no mercado. Quando o investidor se posiciona dessa maneira, ele pode negociar ativos no mercado sem realmente possuí-los. Um exemplo do que acontecesse, desprezando os aspectos técnicos, é representado em essência da seguinte maneira: o investidor pode "tomar emprestado" uma quantidade de ações através de sua corretora e vendê-las no mercado. A expectativa desse investidor é de que essa ação se desvalorize. Dessa maneira, o investidor pode comprar a mesma quantidade de ações por um preço menor. Então, o investidor devolve as ações "emprestadas" e guarda para si a diferença entre o preço a que as ações foram vendidas anteriormente e o preço a que as ações foram compradas. Portanto, a expectativa do investidor quando a sua

posição é comprada, é a de que o preço do ativo caia.

Além da forma de como se posicionar no mercado, os investidores participantes do mercado de derivativos podem assumir diversas posturas [10], a saber:

Hedger - Utilizam os derivativos como forma de proteção contra uma eventual desvalorização do ativo de referência, assumindo no mercado de derivativos posição contrária a que assumem no mercado à vista. Exemplo, se um produtor de soja acredita que de hoje a quatro meses, quando for comercializar sua safra, os preços terão caído e as vendas não cobrirão seus custos, então ele pode resolver comprar em bolsa um contrato com vencimento no quarto mês a partir de hoje, de maneira a assegurar a venda de sua produção por um preço fixado.

Especulador - Se o hedger quer segurança, o especulador por sua vez assume os riscos das negociações com derivativos, aproveitando-se das oscilações nos preços para realizar lucros, geralmente a curto prazo.

Arbitrador - Surge quando existem diferenças na formação dos preços de um mesmo ativo em mercados diferentes. O investidor que assume essa postura tenta alcançar um ganho fixo sem correr risco, aproveitando-se desse desequilíbrio. Esse tipo de procedimento é conhecido como arbitragem. E apesar do arbitrador aproveitar um desequilíbrio do mercado, sua participação é importante pois, quando atua, ajusta o preço do ativo nos diferentes mercados, eliminando a possibilidade de futuras arbitragens. Exemplo, suponhamos uma ação de uma empresa que seja negociada em bolsas de países diferentes e com moedas distintas. Vamos imaginar, por exemplo, que essa ação esteja sendo negociada em bolsa no Brasil por um valor de R\$ 50,00 e esteja também sendo negociada em bolsa nos EUA por um valor de U\$ 20,00. Se nesse instante o dólar for cotado a U\$ 1,00 = R\$ 2,00, um possível investidor pode comprar uma quantidade de n ações dessa empresa nos EUA e vendê-la imediatamente no Brasil embolsando a quantia de

$$\left(R\$50,00 - U\$20,00 \frac{R\$2,00}{U\$1,00} \right) n = R\$10,00n.$$

Nesse caso o investidor realizou uma arbitragem. Nesse exemplo hipotético, ignoramos eventuais custos transacionais, que podem reduzir, ou mesmo impossibilitar, a margem de arbitragem.

Os contratos negociados no mercado de derivativos são eficazes em eliminar o risco de um investidor que detenha uma determinada posição em um ativo financeiro. Ao usar um contrato de derivativo, o investidor fixa um valor futuro (de taxa de câmbio, de taxa de juros, de uma ação ou de um commodities). Isso significa que ele fica protegido das conseqüências de um eventual cenário desfavorável. Como já mencionamos, um dos mercados de derivativos mais comuns é o mercado a termo. Neste mercado negocia-se os contratos a termo, que são instrumentos que

obrigam uma das partes do contrato a comprar e a outra parte a vender algum ativo a um preço especificado em um vencimento determinado. Como um exemplo de como um investidor pode se posicionar nesse mercado, suponhamos que um investidor compra um certo ativo no mercado a termo por R\$ 55.00, para liquidação dentro de 1 mês. Se nesse período o preço do ativo subir para R\$ 70.00 no mercado à vista, o investidor ficará protegido pelo contrato do mercado a termo e pode comprar o ativo por um preço mais barato do que no mercado à vista. Em contrapartida, se o preço do ativo cair, o cenário seria favorável à compra no mercado à vista, porém ele já não poderia mais se beneficiar dessa situação porque tem a obrigação de liquidar a operação do contrato ao preço previamente definido. Consideremos outro exemplo. Suponha que um investidor venda um certo ativo no mercado a termo por um preço preestabelecido de R\$ 50.00 com vencimento de hoje a quatro meses. Se no dia do vencimento o ativo estiver cotado a R\$ 60.00 no mercado à vista, o investidor tem a obrigação de vender o ativo pelo valor de R\$ 50.00, logo ele perde R\$ 10.00. Portanto, o contrato a termo só é interessante ao seu titular se a evolução do preço do ativo for desfavorável à posição mantida pelo investidor no mercado à vista. Caso contrário, o contrato a termo não será mais interessante para seu titular, pois mesmo que a evolução dos preços seja favorável à negociação no mercado à vista, o titular do contrato a termo é obrigado a liquidar o negócio pelo preço prefixado. O ideal seria a existência de um instrumento que permitisse ao investidor a possibilidade de hedge apenas no cenário desfavorável à posição mantida no mercado à vista, e não ser obrigado a usá-lo num cenário que lhe seja favorável.

O segmento do mercado de derivativos que possibilita essa forma de hedge é o Mercado de Opções. Nesse mercado, se o investidor tiver uma posição comprada, ele poderá comprar um ativo por um preço predefinido se o cenário for de preços em alta, e poderá abrir mão do seu direito de comprá-lo no mercado de opções para comprá-lo no mercado à vista, se o cenário for de preços em baixa.

3.2 Mercado de Opções

A principal diferença entre as opções e os demais instrumentos derivativos é que nesses, o comprador e o vendedor do contrato têm direitos e obrigações. Nas opções, ao contrário, quem compra o contrato de opção tem apenas direitos e não obrigações, enquanto que quem vende o contrato de opção tem apenas obrigações. Podemos dizer que existe uma assimetria nas responsabilidades, que de certa forma separa o risco da renda. Por essa razão, o comprador da

opção precisa pagar um prêmio antecipadamente por essa vantagem, que na prática representa o custo da eliminação do cenário desfavorável.

As opções se diferenciam quanto ao instante de tempo em que o negócio é liquidado, sendo classificadas como, opção do **tipo européia** e opção do **tipo americana**. A opção do tipo européia é aquela em que o direito assegurado pela opção pode ser exercido apenas na data do vencimento. A opção do tipo americana é aquela em que o direito assegurado pode ser exercido a qualquer instante até a data do vencimento. Ambas opções são negociadas em diversas bolsas de valores ao redor do mundo, o nome do tipo de opção não restringe sua negociação as regiões homônimas. As opções se diferenciam também quanto ao tipo de negócio, elas podem ser de compra ou de venda de um certo ativo de referência. A seguir, vamos nos restringir a descrição detalhada da opção européia, já que esta será alvo de estudo posteriormente.

3.2.1 Opção Européia de Compra

O investidor que opta por uma opção de compra paga um prêmio C e passa a ser o titular da opção, ou seja, ele passa a ter o **direito** de comprar o ativo de referência S na data de vencimento T por um preço previamente definido K , também chamado de preço de exercício ou "strike". O investidor que vende a opção de compra é chamado de lançador da opção, sendo ele quem recebe o prêmio C pago pelo titular da opção. O lançador, por sua vez, tem a **obrigação** de vender o ativo de referência pelo preço previamente estabelecido na data do vencimento do contrato. O preço do ativo de referência no vencimento é denotado por $S(T)$. Nessa data duas situações podem acontecer:

1. $S(T) > K$, ou seja, o valor do ativo de referência no mercado à vista é maior que o preço de exercício. Nessa situação, o titular exerce a opção e, portanto, compra o ativo pelo preço K , e vende imediatamente no mercado à vista por $S(T)$. Obtendo um lucro bruto de $S(T) - K$. Conseqüentemente o valor da opção de compra na data do vencimento será o payoff $S(T) - K$.
2. $S(T) < K$, ou seja, o valor do ativo de referência no mercado à vista é menor que o preço de exercício. Nessa situação, o titular não exerce a opção, já que seria mais vantajoso comprar o ativo de referência no mercado à vista. Sendo assim, a opção de compra no dia do vencimento não tem nenhum valor, no jargão financeiro diz-se que a opção vira "pó".

Portanto, **no dia do vencimento**, o valor, ou payoff, da opção de compra é descrito pela seguinte expressão

$$\text{payoff}_{\text{compra}} = \max(S - K, 0). \quad (3.1)$$

e pode ser visualizado no diagrama da Fig. 3.1a.

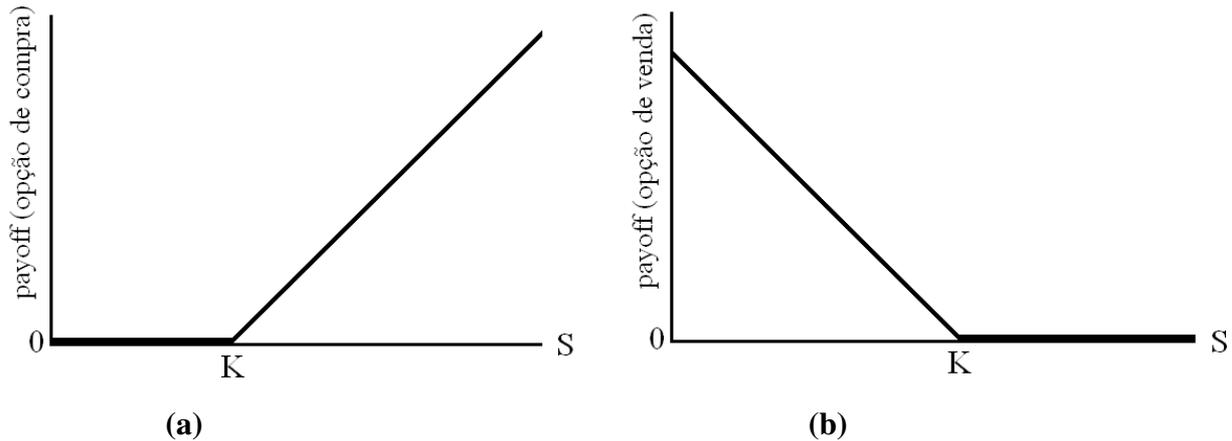


Figura 3.1 (a) Diagrama para valor da opção de compra no dia do vencimento; (b) Diagrama para valor da opção de venda no dia do vencimento.

3.2.2 Opção Européia de Venda

O investidor que opta por uma opção de venda paga o prêmio P e passa a ser o titular da opção, ou seja, ele passa a ter o **direito** de vender o ativo de referência S na data de vencimento T por um preço K previamente estabelecido. O investidor que vende a opção de venda é chamado de lançador da opção. O lançador, por sua vez, recebe o prêmio P e tem a **obrigação** de comprar o ativo de referência pelo preço previamente estabelecido na data do vencimento do contrato. No dia do vencimento duas situações podem acontecer:

1. $S(T) > K$, o valor do ativo de referência no mercado à vista é maior que o preço de exercício. Nessa situação, o titular não exerce a opção, já que seria mais vantajoso vender o ativo de referência por um preço superior no mercado à vista, sendo assim a opção de venda no dia do vencimento não tem nenhum valor.
2. $S(T) < K$, o valor do ativo de referência no mercado à vista é menor que o preço de exercício. Nessa situação, o titular exerce a opção, vendendo o ativo pelo preço K superior

ao preço do mercado à vista $S(T)$. Conseqüentemente o valor bruto da opção de venda na data do vencimento é $K - S(T)$.

Portanto, **no dia do vencimento** o valor, ou payoff, da opção de venda é descrito pela seguinte expressão

$$payoff_{venda} = \max(K - S(T), 0). \quad (3.2)$$

e pode ser visualizado no diagrama da Fig. 3.1b.

O valor hipotético de uma opção, caso ela estivesse expirando imediatamente no tempo t , é chamado de valor intrínseco, ou valor tangível. Esse valor é dado pela expressão de payoff da opção assumindo que $S(t)$ seja o valor imediato. Mas na prática o valor de mercado de uma opção é diferente do seu valor intrínseco. A diferença entre o valor de mercado da opção e seu valor intrínseco é chamado de valor temporal da opção. Quando o valor intrínseco da opção for zero, diz-se que essa opção está fora do preço ("out of the money"). Por exemplo, a opção de compra está "fora do preço" quando o preço do ativo de referência $S(t)$ no instante t for menor que o respectivo strike K da opção, sendo que nesse instante o exercício dessa opção representaria um fluxo de caixa negativo para seu titular. Por outro lado, quando o valor intrínseco da opção for maior que zero, diz-se que essa opção está dentro do preço ("in the money"). Usando novamente a opção de compra como exemplo, diz-se que esta opção está dentro do preço quando o preço do ativo de referência $S(t)$ no instante t for maior que o respectivo strike K da opção, portanto o preço de exercício dessa opção representa um fluxo de caixa positivo para seu titular. E quando o valor do ativo for igual ao preço de exercício da opção, diz-se que a opção está no preço ("at the money"), sendo que o preço de exercício dessa opção representa um fluxo de caixa neutro para seu titular.

No caso de opções européias de compra, o lançador terá que entregar o ativo de referência caso o titular exerça seu direito de compra. Portanto, segundo os conceitos aprendidos na seção 3.1, o lançador de uma opção de compra assume uma posição "vendida", enquanto que o titular da opção de compra assume uma posição "comprada". O lucro líquido obtido pelo titular da opção só acontece quando $S(T) > K + C$, onde C , lembramos, é o prêmio pago pelo titular para adquirir a opção. Portanto o diagrama de payoff não é a melhor forma de visualizar o lucro líquido obtido no dia do vencimento, pois o diagrama de payoff não menciona o valor desembolsado pelo titular para comprar a opção. Portanto seria interessante utilizar um diagrama de lucro no dia do vencimento para nos assegurarmos a partir de que preço $S(T)$ a opção de compra nos proporcionará um lucro. O diagrama de lucro proporcionado por uma opção pode ser obtido subtraindo o valor do prêmio C , do diagrama de payoff da opção. Isso está indicado

com uma linha sólida na Fig. 3.2, em comparação com o diagrama de lucro proporcionado por um contrato a termo, representado pela linha tracejada.

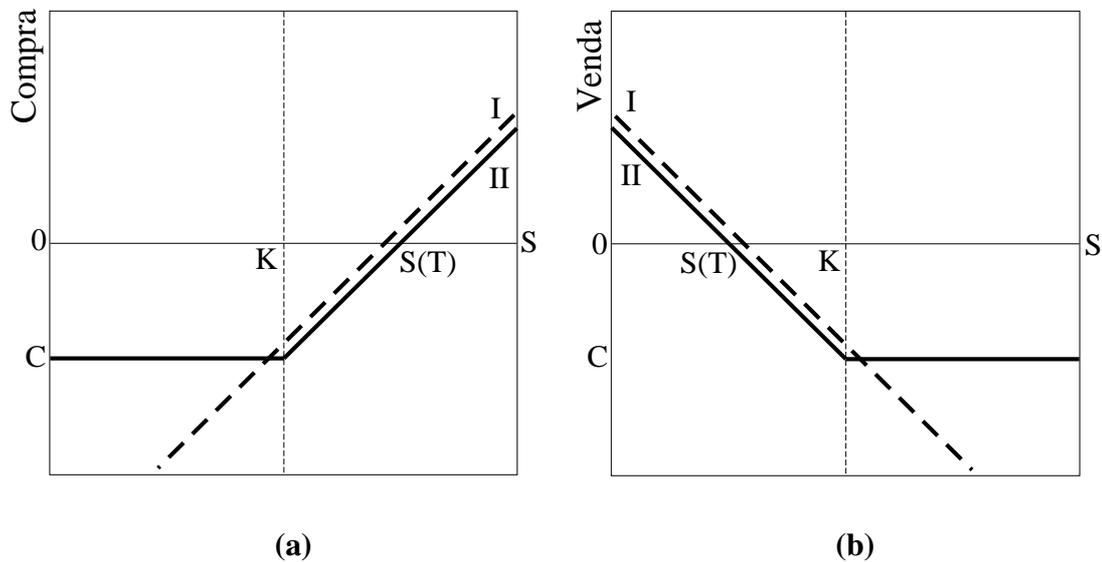


Figura 3.2 (a) Diagrama de lucro proporcionado por: I - contrato de compra no mercado a termo, II - contrato de compra no mercado de opções (opção de compra); (b) Diagrama de lucro proporcionado por: I - contrato de venda no mercado a termo, II - contrato de venda no mercado de opções (opção de venda).

Até agora vimos como determinar o preço de opção no dia de expiração desse contrato. Porém é interessante poder determinar o preço da opção em dias anteriores ao seu vencimento. Como já foi mencionado, existem atualmente diversos modelos de precificação de opções. Nesta dissertação trataremos de dois: o já conhecido modelo de Black-Scholes e o mais recente modelo empírico para o preço de opções, também conhecido como modelo exponencial.

3.3 Modelo de Black-Scholes

3.3.1 Hipóteses Básicas

Vimos acima como é determinado o preço de uma opção na data de vencimento, através do corresponde diagrama payoff da opção. Mas como se determina o preço a se pagar pelo prêmio da opção para tempos anteriores ao vencimento? Essa é a questão central na teoria

de precificação de opções. De maneira intuitiva, podemos afirmar que o preço deve ser justo para ambas as partes, pois se o preço do prêmio for alto não interessará aos compradores do contrato, e se o preço for baixo afastará os lançadores que assumem o risco. Na década de 60, Fisher Black, Robert C. Merton e Myron Scholes formularam um modelo que determina analiticamente o preço justo a se pagar por um contrato de opção europeia. O modelo inclui as seguintes hipóteses:

- o comportamento aleatório dos preços do ativo financeiro de referência; mais especificamente, o preço segue um movimento browniano geométrico; vide seção 2.1.
- a inexistência de arbitragem,
- as negociações no mercado são contínuas,
- o custo das transações financeira e os impostos envolvidos são desprezados.

Sabemos que o valor C de uma opção de compra depende de várias variáveis, ou seja,

$$C = C(S, t; K, T; r, \sigma, \mu) \quad (3.3)$$

onde S é o preço do ativo de referência no instante t , K é o preço de exercício da opção, também chamado de strike, T é a data de vencimento, r é a taxa de juros, σ e μ são parâmetros associados à densidade de probabilidade dos preços do ativo de referência, como visto no capítulo 2.

Assumindo que os parâmetros σ e μ são constantes que podem ser determinadas pelo investidor observando o mercado, e como os parâmetros K , T e r são conhecidos, vamos escrever $C = C(S, t)$, omitindo os parâmetros conhecidos e evidenciando apenas grandezas variáveis para uma dada opção de compra. Como o preço do ativo de referência $S(t)$ é, por hipótese, um processo estocástico, segue que o preço da opção C também é um processo estocástico. Com intuito de obter a EDE que descreve $C(S, t)$, usaremos o lema de Itô, como visto na seção 2.1.

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} dt^2 + \dots, \quad (3.4)$$

Substituindo (2.4) em (3.4), obtemos imediatamente a EDE para dC

$$dC = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW. \quad (3.5)$$

Chegamos então a EDE que representa a dinâmica do preço da opção. A partir dessa dinâmica, juntamente com a dinâmica do preço do respectivo ativo de referência podemos formular uma expressão analítica para o preço justo a ser pago por uma opção. Portanto, nas seções adiante iremos estudar o modelo de preços de opção mais aceito no mercado, o modelo de Black-Scholes, bem como o modelo empírico, conhecido como modelo exponencial [14].

3.3.2 Fórmula de Black-Scholes

A idéia principal do modelo de Black, Merton e Scholes é formar uma carteira especial de investimento, ou portfolio, contendo opções e o ativo de referência, de forma a eliminar o risco da carteira [32]. Consideremos, então, uma carteira de investimentos Π contendo uma opção de compra C e uma posição vendida em Δ ações, ou seja,

$$\Pi = C - \Delta S, \quad (3.6)$$

onde o sinal negativo no segundo termo representa à posição vendida do investidor, isto é, o investidor está devendo ao mercado uma quantidade Δ de ações. Não há um capital inicial, e todo o lucro é reinvestido na carteira (por exemplo, ajustando a quantidade Δ de ações), sendo esse tipo de carteira chamada de carteira auto-financiada.

O modelo despreza as taxas de transação, impostos, bem como assume a ausência do pagamento de dividendos pela ação. Então, para um pequeno incremento no tempo $t + dt$ a carteira muda de $\Pi + d\Pi$, onde,

$$d\Pi = dC - \Delta dS. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.5) e (2.4) em (3.7) obtemos a equação diferencial estocástica para o valor da carteira:

$$d\Pi = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S \Delta \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta \right) dW. \quad (3.8)$$

Para eliminar a aleatoriedade da variável Π , basta fazer com que o coeficiente do termo dW seja zero [15, 17], ou seja $\partial C / \partial S - \Delta = 0$, logo obtemos

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.8) chegamos a

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.10)$$

Esse tipo de procedimento é conhecido como **delta de hedge**, e nos garante que o investimento na carteira Π seja livre de risco. Isso implica que o rendimento dessa carteira deve ser equiparado ao rendimento de uma conta bancária com rentabilidade r , de modo que,

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (3.11)$$

Se um ativo livre de risco não rendesse o equivalente à taxa de juros r , haveria a oportunidade de arbitragem. Por exemplo, se a taxa de retorno μ desse ativo (livre de risco) fossa tal

que $\mu < r$ um investidor poderia fazer arbitragem da seguinte maneira. Primeiro ele tomaria uma posição vendida nesse ativo, e em seguida poderia investir o dinheiro que obteve com a posição vendida em uma poupança cujo rendimento é r . Dessa forma quando o investidor tiver que fechar sua posição vendida e "devolver" o ativo negociado, ele lucraria com a desigualdade entre a rentabilidade do ativo livre de risco e a poupança. Então, com o objetivo de assegurar a ausência de arbitragem, isto é, para assegurar que o rendimento da carteira Π seja equivalente à taxa de juros da poupança r , devemos igualar (3.10) e (3.11), o que resulta em

$$r\Pi = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}. \quad (3.12)$$

Agora substituindo (3.6) e (3.9) em (3.12), chegamos a uma equação diferencial parcial (EDP) para C conhecida como a equação de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \quad (3.13)$$

Note que a equação acima não contém o parâmetro μ que reflete a expectativa de rendimento dos investidores. O único parâmetro da equação diferencial estocástica (2.4) que afeta o preço da opção é o parâmetro volatilidade σ . Isso significa que o preço da opção não depende da taxa de crescimento do preço do ativo de referência, dessa forma diferentes investidores podem ter expectativas diferentes quanto a valorização do ativo e mesmo assim concordar com o preço da opção.

A equação diferencial parcial acima possui derivada de segunda ordem em S e de primeira ordem em t . Isso caracteriza-a como uma EDP parabólica. Para que uma única solução satisfaça essa equação precisamos ter duas condições de "contorno" para S e uma temporal em t . Estabeleceremos como condição temporal a condição final, isto é, o preço da opção de compra no dia do vencimento deve ser igual ao seu "payoff":

$$C(S, T) = \max(S - K, 0). \quad (3.14)$$

Alternativamente podemos escrever a equação (3.14) como

$$C(S, T) = (S - K)\theta(S - K), \quad (3.15)$$

onde $\theta(x)$ é a função Heavyside apresentada em (2.27). As condições de "contorno" em função do preço do ativo são

$$\begin{aligned} C(0, t) &= 0, \\ C(S, t) &\sim S \quad \text{quando } S \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos transformar a equação (3.13) numa EDP com coeficientes constantes fazendo as seguintes mudanças de variável,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \\ x &= \ln\left(\frac{S}{K}\right), \\ C(S,t) &= Ke^{-(\alpha x + \beta \tau)}u(x, \tau).\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde o valor dos coeficientes α e β são calculados no Apêndice A, sendo

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \\ \beta &= \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Dessa forma, quando substituirmos (3.17) e (3.18) em (3.13) a equação de Black-Scholes fica na forma da equação da difusão, ou equação do calor:

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}.\tag{3.19}$$

Os cálculos envolvidos na obtenção da equação acima são diretos, embora longos, e estão discutidos com mais detalhes no Apêndice A. Com as mudanças de variáveis descritas acima, as antigas condições (3.14) e (3.16) se transformam em

$$u(x, 0) = \max(e^{\sqrt{\beta}x} - e^{\alpha x}, 0),\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}u(x, \tau) &\sim 0 \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty, \\ u(x, \tau) &\sim \infty \quad \text{quando } x \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Como é bem conhecido, a solução exata na forma integral da equação do calor (3.19) sujeita a condição inicial (3.20) é dada por

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds.\tag{3.22}$$

Finalmente, substituindo a condição inicial (3.20) na integral (3.22) e resolvendo-a, pode-se mostrar que a expressão resultante para o preço da opção de compra europeia é

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),\tag{3.23}$$

onde a função $N(x)$ é a distribuição acumulada de uma variável aleatória normal

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,\tag{3.24}$$

e

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.25)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (3.26)$$

Todos os passos para se chegar na expressão (3.23), a partir da equação do calor, estão no apêndice A.

Para determinarmos o preço de uma opção de venda P o procedimento é similar à determinação do preço de uma opção de compra. A estratégia do investidor é comprado em Δ ações e vendido no mercado de opções, ou seja o investidor é titular de uma opção de venda sobre a ação. Omitiremos os detalhes do cálculo. Nesse caso, a solução da equação de Black-Scholes (3.13) para o preço da opção de venda $P(S,t)$ sujeita as condições apropriadas é

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (3.27)$$

Existe também outra maneira de se determinar o preço de uma opção através de um método bastante engenhoso que será apresentado na seção a seguir.

3.3.3 Abordagem "Risk-Neutral"

As expressões (3.23) e (3.27) para o preço das opções podem ser obtida de forma diferente, a partir de uma característica específica da equação diferencial de Black-Scholes (3.13). Essa propriedade é de que a equação não envolve nenhuma variável que seja afetada pela preferência de risco do investidor [33], afinal as variáveis que aparecem na equação (isto é, as condições de contorno) são o preço S do ativo de referência no tempo t , o preço de exercício K , a data de vencimento T , a volatilidade do ativo de referência σ e a taxa de juros de um investimento livre de risco r .

A equação de Black-Scholes não seria independente da preferência de risco do investidor se ela envolvesse o valor da taxa de retorno médio esperado do ativo, μ . Isso porque o valor de μ depende da preferência do risco adotada pelo investidor, ou seja, quanto maior o risco adotado pelo investidor, maior será o valor de μ para qualquer ativo.

O fato de a equação de Black-Scholes ser independente da preferência do risco adotado pelo investidor, nos permite o uso de um argumento bastante engenhoso. Se a preferência do risco adotado pelo investidor não entra na equação (3.13), ele não pode afetar sua solução. Dessa forma, qualquer valor de preferência de risco pode ser usado de maneira a obter a solução para

$C(S, t)$. Em particular, uma afirmativa bem simples pode ser feita: a de que todos os investidores são indiferentes ao risco ("risk-neutral").

Num mundo onde todos os investidores são indiferentes ao risco, o valor da taxa de retorno médio esperado de qualquer ativo pode ser equiparada à taxa de retorno de um investimento livre de risco r . Isto acontece, porque os investidores nesse mundo hipotético, não esperam obter um prêmio que os induzam a aceitar os riscos. Também é verdade que o valor presente de qualquer investimento, nesse mundo, pode ser obtido descontando o valor esperado usando a taxa de retorno de um investimento livre de risco r .

A afirmativa de que o mundo é indiferente ao risco simplifica consideravelmente a obtenção de uma expressão para $C(S, t)$. Seguindo essa premissa, podemos dizer que o preço da opção $C(S, t)$ evolui tal qual a expressão $e^{r(T-t)}$. Então, o preço da opção de compra nos dias que antecedem o vencimento pode ser obtido realizando a média na condição final (payoff) dessa opção, efetuada sobre todos os possíveis preços do ativo de referência, corrigidos para o valor presente pelo fator $e^{-r(T-t)}$, o que resulta em

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} \langle \max(S' - K, 0) \rangle_{rn} \quad (3.28)$$

onde $\langle \rangle_{rn}$ representa a média usando a distribuição de probabilidade em um mundo indiferente ao risco:

$$\langle g(S') \rangle_{rn} = \int_0^{\infty} g(S') p_{rn}(S', T; S, t) dS',$$

sendo $g(S')$ uma função qualquer do preço do ativo de referencia $S' = S(T)$ na dada de vencimento T e $p_{rn}(S', T; S, t)$ a função densidade de probabilidade risk-neutral, sabendo que o preço do ativo no dia $t < T$ é S . A forma funcional de p_{rn} é similar a expressão (2.17), porém, usando a abordagem "risk-neutral", iremos substituir a taxa de retorno esperado do ativo μ , pela taxa de retorno de um investimento livre de risco r , resultando em

$$p_{rn}(S', T; S, t) = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{[\ln \frac{S'}{S} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right). \quad (3.29)$$

Temos então que (3.28) pode ser reescrito como

$$C(S, t) = e^{-r\Delta t} \int_0^{\infty} (S' - K) \theta(S' - K) p_{rn}(S', T; S, t) dS', \quad (3.30)$$

onde θ é a função de Heavyside.

Finalmente, substituindo (3.29) em (3.30) obtemos

$$C(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_K^{\infty} (S' - K) \exp\left(-\frac{[\ln \frac{S'}{S} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \frac{dS'}{S'}. \quad (3.31)$$

Efetuada a mudança de variável

$$x = \ln \frac{S(T)}{S(t)} = \ln \frac{S'}{S} \quad (3.32)$$

e completando quadrados no integrando de (3.31), chegamos a mesma expressão para o preço de uma opção de compra (3.23).

3.4 Modelo Exponencial Para Precificação de Opções

3.4.1 Abordagem "Risk-Neutral"

Assim como no modelo de Black-Scholes, podemos chegar a uma expressão do preço de uma opção de compra a partir do modelo exponencial para precificação de opções [14], usando a abordagem "risk-neutral". O procedimento é similar ao visto na seção 3.3.1. Porém, dessa vez, teremos que partir do pressuposto de que a distribuição dos retornos do ativo de referência segue uma função densidade de probabilidade risk-neutral f_{rn} similar a função exponencial dada por (2.18). Dessa forma, teremos agora que a média usando a distribuição f_{rn} é da seguinte forma

$$\langle g(x) \rangle_{rn} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{rn}(x, \Delta t) dx, \quad (3.33)$$

onde $x = \ln \frac{S}{S_0}$ representa o retorno, $S = S(t)$ o preço do ativo de referência na data t e $S_0 = S(t_0)$ o preço do ativo de referência no dia t_0 de maneira que $t > t_0$. Segundo a abordagem "risk-neutral", num mercado indiferente ao risco, devemos substituir a taxa de retorno esperado do ativo μ' , pela taxa de retorno de um investimento livre de risco r . Porém, a expressão $f_{rn}(x, \Delta t)$ não possui explicitamente nenhuma variável que descreva a expectativa de retorno médio do ativo. No entanto a hipótese de que o mercado é "risk-neutral" implica numa relação para os parâmetros γ e v . Podemos obter essa relação usando a afirmativa do mercado indiferente ao risco no valor do ativo de referência $S(t)$, ou seja, o valor esperado $\langle S(t) \rangle_{rn}$ evolui tal qual um investimento livre de risco, de forma que

$$\langle S \rangle_{rn} = S_0 e^{\int_{t_0}^t \mu'(s) ds} = S_0 e^{r\Delta t},$$

ou seja,

$$r\Delta t = \ln \frac{\langle S \rangle_{rn}}{S_0}.$$

Realizando a média como em (3.33), onde $S = S_0 e^x$ obtemos

$$\langle S \rangle_{rn} = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_{rn}(x, \Delta t) dx,$$

que substituída na expressão anterior resulta na condição de um mundo indiferente ao risco, em função dos parâmetros da distribuição exponencial,

$$r = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^t \mu(s) ds = \frac{1}{\Delta t} \left(\delta + \ln \left(\frac{\gamma v + (v - \gamma)}{(\gamma + 1)(v - 1)} \right) \right). \quad (3.34)$$

Dessa maneira, de acordo com a abordagem "risk-neutral", os parâmetro γ e v estão relacionados pela expressão acima. Observe que r é um parâmetro conhecido pelo investidor, então determinando γ e μ chegamos ao valor de δ .

Usando a abordagem "risk-neutral", discutida na seção anterior, temos que o preço de uma opção de compra no modelo exponencial é determinado pela expressão

$$C(S, \Delta t) = e^{-r(T-t)} \langle \max(S(T) - K, 0) \rangle_{rn}.$$

onde $\Delta t = T - t$. Usando a definição da média chegamos na expressão

$$C(S, \Delta t) = e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (S' - K) \theta(S' - K) f_{rn}(x, \Delta t) dx, \quad (3.35)$$

onde θ é a função Heavyside (2.27) e $f_{rn}(x, \Delta t)$ é a distribuição exponencial "risk-neutral" da forma (2.18) sujeita a restrição (3.34). Com o intuito de que a integral (3.35) fique em função da variável x , será melhor efetuar a mudança de variável (3.32), de forma que $S' = Se^x$, resultando em

$$\begin{aligned} C(S, \Delta t) &= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (Se^x - K) \theta(Se^x - K) f_{rn}(x, \Delta t) dx, \\ C(x, \Delta t) &= e^{-r\Delta t} \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\infty} (Se^x - K) f_{rn}(x, \Delta t) dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Observe que se $\ln \frac{K}{S} < \delta$, a integral (3.36) deve ser efetuada nas regiões $x < \delta$ e $x > \delta$:

$$C(x, \Delta t) e^{r\Delta t} = \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\delta} (Se^x - K) A e^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\infty} (Se^x - K) B e^{-v(x-\delta)} dx, \quad (3.37)$$

realizando a integração, substituindo os valores de A dado por (2.22) e B dado por (2.23), e voltando com a notação em S , temos

$$C(S, \Delta t) e^{r\Delta t} = Se^{\delta} \frac{\gamma^2(v-1) + v^2(\gamma+1)}{(\gamma+v)(\gamma+1)(v-1)} + \frac{K\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{\gamma} - K. \quad (3.38)$$

Agora para $\ln \frac{K}{S} > \delta$ basta integrarmos (3.36) no intervalo $x > \delta$, isto é,

$$C(x, \Delta t)e^{r\Delta t} = \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\infty} (Se^x - K)Be^{-v(x-\delta)} dx, \quad (3.39)$$

efetuando a integração e substituindo os valores de A dado por (2.22) e B dado por (2.23), e voltando com a notação em S , temos

$$C(S, \Delta t)e^{r\Delta t} = \frac{Kv}{(v-1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{-v}. \quad (3.40)$$

Finalmente obtemos a expressão para o preço da opção de compra usando a hipótese de que os retornos são distribuídos segundo uma função exponencial

$$C(S, \Delta t)e^{r\Delta t} = \begin{cases} Se^{\delta} \frac{\gamma^2(v-1)+v^2(\gamma+1)}{(\gamma+v)(\gamma+1)(v-1)} + \frac{K\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{\gamma} - K & \text{se } S > Ke^{-\delta} \\ \frac{Kv}{(v-1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{-v} & \text{se } S < Ke^{-\delta}, \end{cases} \quad (3.41)$$

Para obter o preço da opção de venda num dia anterior ao vencimento, o procedimento é similar. Porém, dessa vez a média deve ser tomada sob todos os retornos a partir da expressão do payoff para a opção de venda e descontando a taxa de juros, teremos

$$P(S, \Delta t) = e^{-r(T-t)} < \max(K - S', 0) >, \quad (3.42)$$

$$P(S, \Delta t)e^{r(T-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} (K - S')\theta(K - S')f(x, \Delta t)dx,$$

efetuando a mudança de variável (3.32) $S' = Se^x$

$$P(S, \Delta t)e^{r(T-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} (K - Se^x)\theta(K - Se^x)f(x, \Delta t)dx,$$

$$P(x, \Delta t)e^{r\Delta t} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\ln \frac{K}{S}} (K - Se^x)Ae^{\gamma(x-\delta)} dx & \text{se } \ln \frac{K}{S} < \delta \\ \int_{-\infty}^{\delta} (K - Se^x)Ae^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\ln \frac{K}{S}} (K - Se^x)Be^{-v(x-\delta)} dx & \text{se } \ln \frac{K}{S} > \delta \end{cases} \quad (3.42)$$

Resolvendo as integrais acima chegamos na expressão para o preço da opção de venda, no tempo t antes do vencimento do contrato:

$$P(S, \Delta t)e^{r\Delta t} = \begin{cases} \frac{K\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{\gamma} & \text{se } S > Ke^{-\delta} \\ K - Se^{\delta} \frac{\gamma^2(v-1)+v^2(\gamma+1)}{(\gamma+v)(\gamma+1)(v-1)} + \frac{Kv}{(v-1)(\gamma+v)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{-v} & \text{se } S < Ke^{-\delta} \end{cases} \quad (3.43)$$

A partir da hipótese inicial de que os retornos do ativo de referência são distribuídos tal qual uma distribuição exponencial, podemos obter um modelo para o preço de uma opção através de

uma solução analítica via a estratégia Delta de Hedge, assim como foi feito para obtenção do modelo de Black-Scholes, em procedimento é similar ao da seção 3.4. Inicialmente, assume-se uma carteira de investimento Π livre de risco segundo a abordagem risk-neutral e obtém-se uma equação diferencial parcial. Porém, diferente do modelo de Black-Scholes, devemos assumir que a volatilidade não é uma constante, para mais detalhes vide apêndice B. A solução da equação diferencial parcial, nos leva a uma expressão para o preço de uma opção. Os cálculos são extensos e desnecessários para este trabalho, haja vista que a solução de interesse é da mesma forma que (3.41).

No próximo capítulo serão efetuados testes dos modelos para o preço de uma opção de compra do tipo européia, abordados neste capítulo. Este teste consiste em ajustar os preços gerados a partir dos modelos gaussiano e exponencial afim de verificar qual dos dois modelos melhor descreve os preços praticados no mercado de opções sobre o índice Bovespa.

Análise Estatística das Opções Sobre o Índice Bovespa

4.1 Opções sobre o Ibovespa

Para um melhor entendimento do estudo dos preços das opções sobre o índice Bovespa a ser realizado neste capítulo, é preciso ganhar certa familiaridade com os termos usados na caracterização dessas opções. Vamos começar definindo como funciona uma opção sobre índice [13]. As opções sobre o índice Bovespa dão ao seu titular o direito de comprar ou vender um contrato referenciado pelo índice Bovespa em determinada data. Na verdade, na ocasião do exercício da opção, o investidor titular da opção de compra não adquire o índice em si, mas sim tem o direito de receber a **diferença** entre o valor do Ibovespa na data de vencimento e o preço de exercício do contrato. Em contra partida, o investidor lançador da opção de compra tem a obrigação de pagar a diferença. Analogamente, na ocasião do exercício da opção de venda o investidor titular da opção não vende o índice em si, mas sim tem o direito de receber a diferença. Enquanto que o investidor lançador da opção de venda é obrigado a comprar a diferença. O prêmio e preço de exercício são expressos em pontos do Ibovespa, o valor do ponto é determinado pela Bovespa. Em suma, a unidade de negociação é o índice Bovespa multiplicado pelo valor em reais de cada ponto, estabelecido pela Bovespa. Essas opções têm vencimento na terceira quarta-feira do mês, nos meses pares do ano. No entanto, a Bovespa pode, a seu critério, autorizar a negociação para vencimentos em meses ímpares. Se na quarta-feira em que vence a opção for feriado ou não houver pregão na Bovespa, a data de vencimento será o dia útil subsequente.

As opções sobre o índice Bovespa são inicialmente oferecidas em séries com diferentes preços de exercício e todas com vencimento preestabelecido; posteriormente elas são negociadas em bolsa como ativos. Para facilitar a negociação é usado uma nomenclatura para se referir às opções pertencentes a uma série. Com essa finalidade, todas as opções recebem um nome com 7 caracteres, onde os quatro primeiros indicam o ativo de referência. No nosso caso, o ativo de

referência é o índice Bovespa, portanto os primeiros caracteres são IBOV. O caractere seguinte traz duas informações de uma vez, o mês do vencimento e o tipo da opção, se de compra ou de venda. Se esse caractere vai de A até L, trata-se de uma opção de compra. Além disso, como podemos observar, de A até L existem 12 letras (incluindo K), dessa forma cada uma das letra representa um mês do ano em ordem crescente. Assim, por exemplo, uma opção de compra com vencimento em agosto escreve-se IBOVH. Agora se a opção vai de M até X trata-se de uma opção de venda. Novamente, de M até X existem 12 letras (incluindo W) e também aqui, cada uma das letra representa um mês do ano em ordem crescente. Como exemplo, uma opção de venda com vencimento em dezembro escreve-se IBOVX. Os dois últimos caracteres, na maioria dos casos, informam os dois primeiros algarismos significativos do preço de exercício, porém seu valor pode ser outro por determinação da Bovespa devido a diferentes fatores. Portanto, diante das informações expostas acima, saberemos que a nomenclatura IBOVB37, representa a opção de compra com vencimento na terceira quarta-feira do mês de fevereiro com preço de exercício R\$ 37000,00.

Os dados utilizados em nosso estudo foram extraídos de uma tabela contendo as séries das opções de compra sobre o índice Bovespa negociadas nos anos de 2005 e 2006, os dados contidos nessa tabela são: A data em que o pregão foi realizado, o código da opção, a data de vencimento do contrato, o preço de exercício dos contratos, o preço (prêmio) de abertura da opção, o preço mínimo que a opção foi negociada, o preço máximo que a opção foi negociada, o preço de fechamento da opção, o número de negócios, a quantidade de opções negociadas, o volume total negociado em Reais. A análise estatística foi realizada nas séries IBOVB, IBOVD, IBOVF, IBOVH, IBOVJ, IBOVL no período acima citado. Essas séries de opções de compra sobre o índice Bovespa têm, respectivamente, vencimentos em 16 Fevereiro 2005, 13 Abril 2005, 15 Junho 2005, 17 Agosto 2005, 13 Outubro 2005, 14 Dezembro 2005, 15 Fevereiro 2006, 12 Abril 2006, 14 Junho 2006, 16 Agosto 2006, 18 Outubro 2006, 13 Dezembro 2006. A quantidade de dados é muito grande, por isso, exibimos na Tabela 4.1 apenas uma pequena parte desses dados.

Para cada um dessas séries selecionamos os dias que consideramos relevantes para a análise, ou seja, selecionamos os dias em que houve maior variedade de strikes negociados, com o intuito de que tenhamos mais pontos para a análise. Como critério, escolhemos aqueles dias em que foram negociados mais de seis strikes diferentes. Para a série IBOVF, por exemplo, o dia 15 de abril de 2005 foi um dos dias selecionados para análise, pois, como pode ser visto em destaque na Tabela 4.1, nesse dia foram negociados oito preços de exercícios diferentes,

NEGOCIAÇÃO NA BOVESPA											
MERCADO DE OPÇÕES - OPÇÕES DE COMPRA DE ÍNDICE											
PREGÃO	CÓDIGO	VENC.	PREÇO DE EXERCÍCIO	ABERTURA	MÍNIMO	MÉDIO	MÁXIMO	FECHAMENTO	Nº NEGS.	QTDE	VOLUME R\$
13/4/05	IBOVF25	15/6/05	25.000,00	2.330,00	2.235,00	2.266,67	2.330,00	2.235,00	3	300	680.000,00
13/4/05	IBOVF27	15/6/05	27.000,00	1.192,50	1.110,00	1.119,73	1.192,50	1.115,00	4	5.500	6.158.500,00
13/4/05	IBOVF28	15/6/05	28.000,00	740,00	560,00	695,17	740,00	560,00	7	1.500	1.042.750,00
13/4/05	IBOVF29	15/6/05	29.000,00	390,00	390,00	395,71	405,00	395,00	5	700	277.000,00
13/4/05	IBOVF30	15/6/05	30.000,00	210,00	210,00	210,00	210,00	210,00	1	200	42.000,00
13/4/05	IBOVH28	17/8/05	28.000,00	1.400,00	1.400,00	1.400,00	1.400,00	1.400,00	1	1	1.400,00
14/4/05	IBOVF22	15/6/05	22.000,00	4.474,00	3.560,00	4.108,40	4.474,00	3.560,00	3	500	2.054.200,00
14/4/05	IBOVF24	15/6/05	24.000,00	2.855,00	2.095,00	2.499,17	2.855,00	2.240,00	4	600	1.499.500,00
14/4/05	IBOVF25	15/6/05	25.000,00	1.625,00	1.610,00	1.623,18	1.630,00	1.630,00	4	1.100	1.785.500,00
14/4/05	IBOVF26	15/6/05	26.000,00	1.270,00	1.190,00	1.236,00	1.350,00	1.190,00	6	1.000	1.236.000,00
14/4/05	IBOVF27	15/6/05	27.000,00	870,00	770,00	841,25	870,00	770,00	3	400	336.500,00
14/4/05	IBOVF28	15/6/05	28.000,00	445,00	445,00	447,50	450,00	450,00	2	200	89.500,00
14/4/05	IBOVF29	15/6/05	29.000,00	245,00	245,00	245,00	245,00	245,00	1	100	24.500,00
14/4/05	IBOVH29	17/8/05	29.000,00	834,50	834,50	834,50	834,50	834,50	1	400	333.800,00
15/4/05	IBOVF22	15/6/05	22.000,00	3.458,00	3.292,00	3.406,00	3.458,00	3.458,00	4	400	1.362.400,00
15/4/05	IBOVF24	15/6/05	24.000,00	2.092,50	1.840,00	1.966,25	2.092,50	1.840,00	2	200	393.250,00
15/4/05	IBOVF25	15/6/05	25.000,00	1.460,00	1.310,00	1.385,00	1.460,00	1.310,00	2	200	277.000,00
15/4/05	IBOVF26	15/6/05	26.000,00	965,00	835,00	900,00	965,00	835,00	2	200	180.000,00
15/4/05	IBOVF27	15/6/05	27.000,00	680,00	525,00	637,11	680,00	550,00	13	3.800	2.421.000,00
15/4/05	IBOVF28	15/6/05	28.000,00	345,00	260,00	326,25	360,00	260,00	7	1.200	391.500,00
15/4/05	IBOVF29	15/6/05	29.000,00	162,50	157,50	158,50	162,50	157,50	2	500	79.250,00
15/4/05	IBOVF30	15/6/05	30.000,00	81,25	67,50	78,99	90,40	67,50	6	700	55.290,00
18/4/05	IBOVF22	15/6/05	22.000,00	3.380,00	3.380,00	3.380,00	3.380,00	3.380,00	1	100	338.000,00
18/4/05	IBOVF24	15/6/05	24.000,00	1.830,00	1.830,00	1.848,38	1.947,00	1.947,00	7	800	1.478.700,00
18/4/05	IBOVF25	15/6/05	25.000,00	1.240,00	1.225,00	1.268,73	1.325,00	1.325,00	8	1.300	1.649.350,00
18/4/05	IBOVF26	15/6/05	26.000,00	745,00	732,00	781,80	860,00	860,00	11	2.000	1.563.600,00
18/4/05	IBOVF27	15/6/05	27.000,00	470,00	455,00	502,39	575,00	515,00	16	2.110	1.060.050,00

Tabela 4.1 Tabela contendo os dados das opções de compra sobre o índice Bovespa. Na região hachurada vemos alguns dos dados usados na análise.

uma quantidade relativamente grande. Para cada dia negociado, como esse, estaremos interessados em estudar o preço de fechamento da opção em função do respectivo preço de exercício. Dessa forma, para cada dia considerado relevante de uma dada série de opções, geramos um arquivo com dados semelhante à Tabela 4.2, contendo os preços de fechamento da opção e os respectivos preço de exercício. A partir dos dados desses arquivos fizemos o teste de ajuste para os dois modelos de precificação de opção, gaussiano e exponencial, abordados no capítulo 3, como discutiremos a seguir.

4.2 Análise empírica dos dados

A idéia de nossa análise é ajustar os pontos empíricos para os preços da opção sobre o Ibovespa com ambos os modelos de preços de opção. Tendo como parâmetros conhecidos, o

preço de fechamento	preço de exercício
3458.00	22000.00
1840.00	24000.00
1310.00	25000.00
835.00	26000.00
550.00	27000.00
260.00	28000.00
157.50	29000.00
67.50	30000.00

Tabela 4.2 Tabela contendo os preços de fechamento da série IBOVF no dia 15/04/05 e os respectivos preços de exercício. Essa tabela constitui um exemplo dos dados empíricos a serem ajustados pelos modelos teóricos de precificação de opção.

tempo até o vencimento $\Delta t = T - t$ onde T é o dia do vencimento e t é o dia de hoje, considerando apenas os dias em que houve pregão; o preço de exercício ou strike K ; o preço do índice $S(t)$ no dia t e a taxa de juros diária r . O juro escolhido para análise é referenciado pela taxa DI (Depósito Interfinanceiro) obtida a partir de

$$r = D^{1/n} - 1,$$

onde D é a taxa DI de juros para um dado ano, extraída de [13] e n é o número de dias em que houve negócio durante o respectivo ano.

A eficácia do ajuste consiste em obter o valor mínimo do desvio padrão [34, 24],

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (C_i - C(x_i, t))^2}{N}}, \quad (4.1)$$

onde C_i é o dado empírico, ou seja, é o preço de fechamento da opção no dia em questão, e $C(x_i, t)$ é o preço da opção determinado pelo modelo teórico a ser usado, seja o modelo gaussiano ou exponencial. Finalmente N é o número de pontos do ajuste, isto é, a quantidade de

preços cotados, para aquela série no dia analisado. Para obter o melhor ajuste usando os modelos teóricos do preço gaussiano e exponencial, precisamos achar os parâmetros dos respectivos modelos que minimizam a função desvio padrão R .

Para o modelo gaussiano a expressão $C(x_i, t)$ a ser ajustada é dada por (3.23). Seguindo o procedimento de ajuste, fixam-se os parâmetros que podem ser determinado pelo investidor e que já foram mencionados anteriormente, e determina-se o parâmetro volatilidade σ . O método usado para determinar σ que minimiza R é o método golden section [27], bastante similar ao método da bisseção. Realizando o ajuste com o modelo gaussiano para série de opções IBOVL, negociadas no dia 19/10/06, a 36 dias antes do vencimento dia 13/12/06, obtemos para esse dia o parâmetro $\sigma = 0.015$, que proporciona um melhor ajuste com valor mínimo de $R = 49.72$. O resultado pode ser visto na Fig. 4.1a.

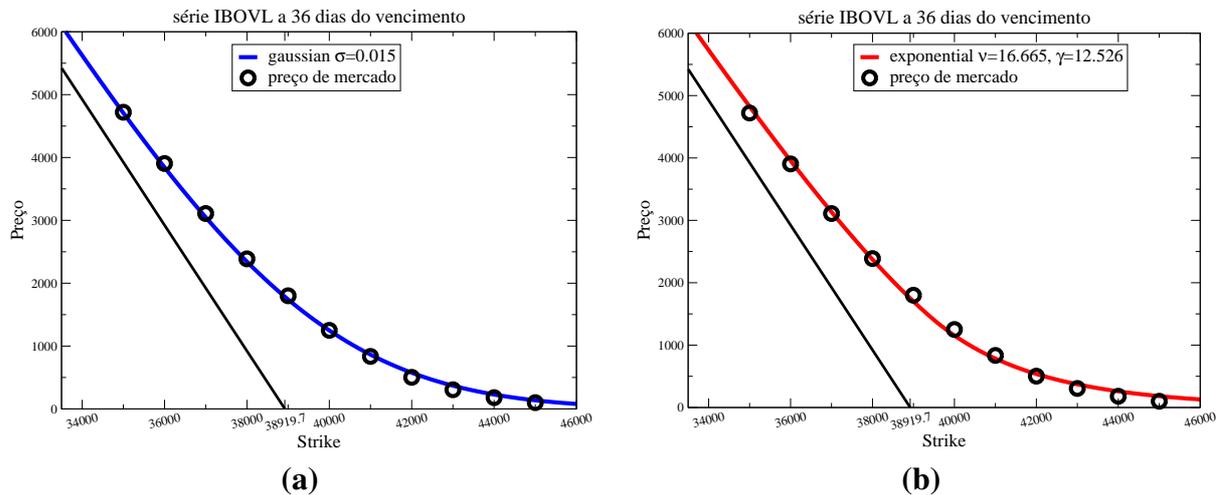


Figura 4.1 Série de opções no dia 19/10/06 a 36 dias antes do vencimento dia 13/12/06, onde a cotação do índice no dia foi $S = 38919.75$ e com taxa de juros $r = 0.000534$ ao dia, obtemos os ajustes: a) gaussiano com volatilidade $\sigma = 0.015$, e valor mínimo de $R = 49.72$; b) exponencial com parâmetros $\nu = 16.665$, $\gamma = 12.526$, e valor mínimo de $R = 70.89$.

Para o modelo exponencial a expressão $C(x_i, t)$ a ser ajustada é dada por (3.41). Novamente fixam-se os parâmetros que podem ser determinado pelo investidor e que já foram mencionados. Porém, diferente do modelo gaussiano, a função que determina o preço da opção usando a expressão do modelo exponencial possui dois parâmetros a serem ajustados, γ e ν . Dessa forma, para minimizar a função desvio padrão (4.1), usamos o método Downhill Simplex [27] para duas dimensões. Em particular o resultado do ajuste usando modelo exponencial para a série IBOVL, no dia 19/10/06, resultou nos parâmetros $\gamma = 12.526$ e $\nu = 16.665$, e com esses

valores obtemos valor mínimo de $R = 70.89$; o respectivo ajuste pode ser visto na Fig. 4.1b. Nesse dia em particular, o modelo gaussiano ajustou a série de opções melhor que o modelo exponencial, uma vez que o valor de R para o primeiro caso foi menor. A melhor performance do modelo gaussiano nesse caso pode ser reconhecida visualmente na Fig. 4.2, onde os dois ajustes da Fig. 4.1 estão sobrepostos.

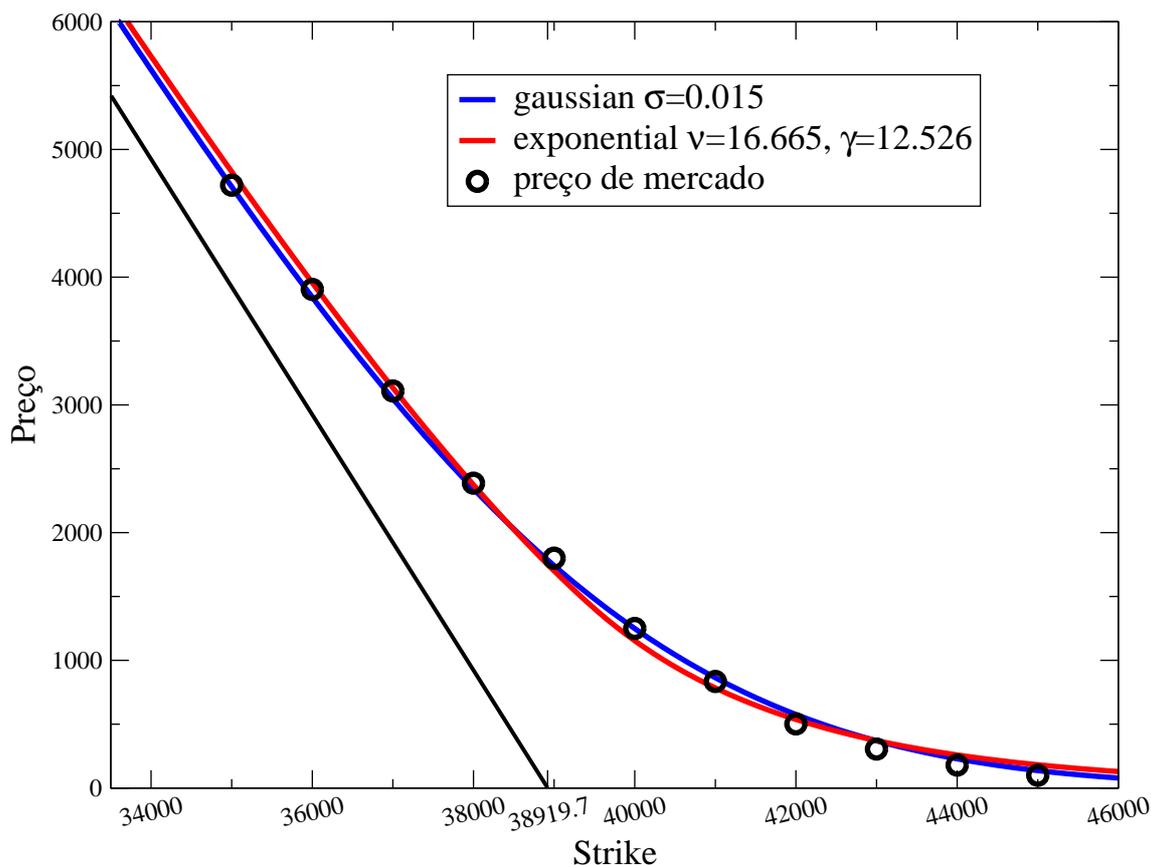


Figura 4.2 Comparação entre os modelos de preço de uma opção de compra com os preços praticados no mercado no dia 19/10/06, a 36 dias para o vencimento da série IBOVL. Em azul vemos o ajuste segundo o modelo gaussiano, e em vermelho o ajuste segundo o modelo exponencial. A reta indica o valor implícito da opção, ou seja, o valor da opção se o dia de vencimento do contrato fosse nesse dia, com o índice valendo $S = 38919.75$.

Entretanto, esse comportamento não é geral e para outro dia pode-se ter que o modelo exponencial produz melhor ajuste. Por exemplo, para a mesma série de opções IBOVL discutida acima, consideremos os ajustes dos modelos teóricos, para o dia 23/11/06, faltando 14 dias para o vencimento dia 13/12/06. Podemos observar na Fig. 4.3 que, usando o modelo gaussiano como ajuste, encontramos o parâmetro $\sigma = 0.01419$, que proporciona o valor mínimo de

$R = 74.58$. E usando o modelo exponencial, obtemos os parâmetros $\gamma = 19.180$ e $\nu = 30.659$, que resultam no valor mínimo do desvio padrão $R = 26.89$. Dessa vez, faltando 14 dias para o vencimento da série, o modelo exponencial ajustou a série de opções melhor que o modelo gaussiano, fato esse que pode ser facilmente visto comparando os dois ajustes na Fig. 4.3.

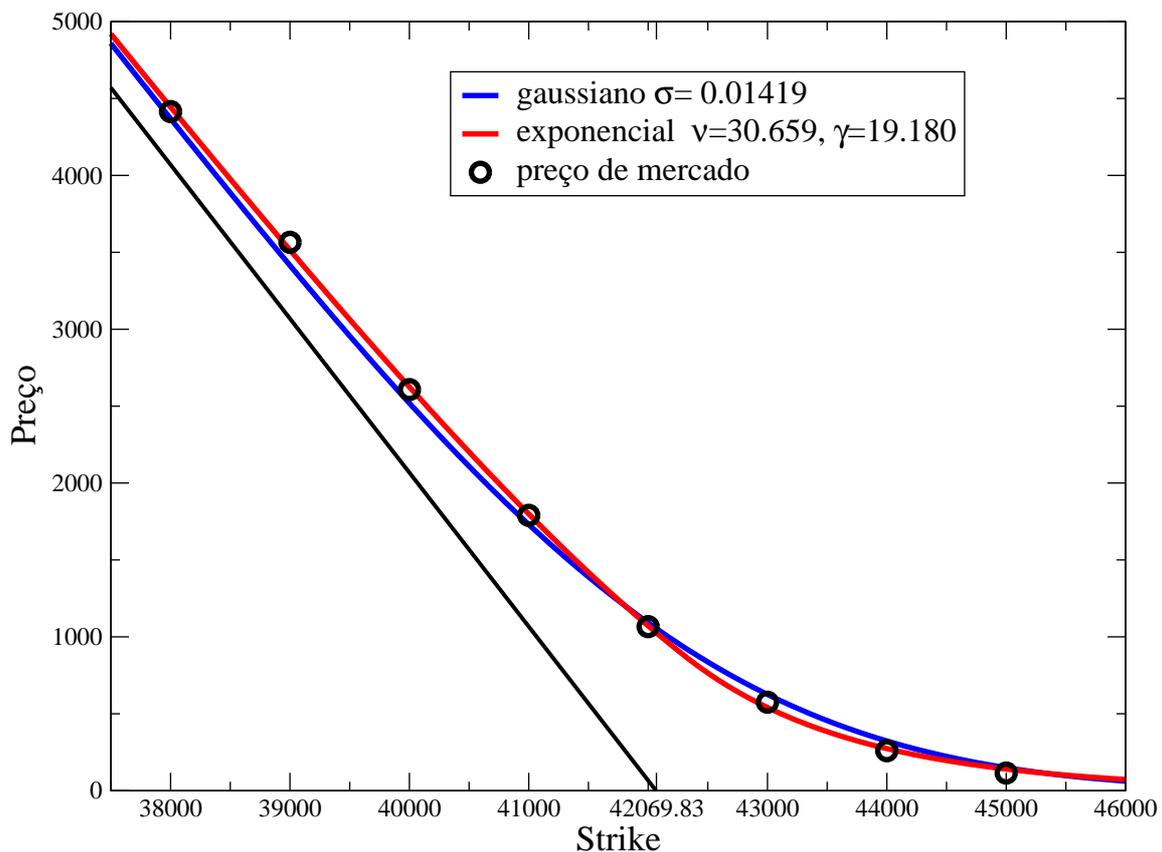


Figura 4.3 Comparação entre os modelos de preço de uma opção de compra com os preços praticados no mercado no dia 23/11/06, a 14 dias para o vencimento da série IBOVL, onde a cotação do índice no dia foi $S = 42069.83$. Em azul vemos o ajuste segundo o modelo gaussiano, proporcionando um valor mínimo de $R = 74.58$; e em vermelho o ajuste segundo o modelo exponencial, proporcionando um valor mínimo de $R = 26.89$.

Os dias descritos acima são apenas dois casos particulares da série IBOVL de 2006. No entanto, existem outros dias de negociação que consideramos relevantes para a análise, envolvendo essa mesma série. Além dos dois dias descritos acima, o procedimento de ajuste dos dois modelos teóricos para a série IBOVL foi feito também para os dias: 04/10/06, 10/10/06, 19/10/06, 24/10/06, 03/11/06, 08/11/06, 17/11/06, 23/11/06, correspondendo respectivamente a 46, 42, 36, 33, 26, 23, 17, 14 dias antes do vencimento. Para cada um desses dias comparamos

qual dos modelos teóricos, exponencial ou gaussiano, melhor ajusta a série em cada dia. Com esse intuito, observamos o valor mínimo da função desvio padrão proporcionado por ambos os modelos, em cada dia de negociação relevante da série IBOVL citados acima. O resultado pode ser visto na Fig. 4.4.

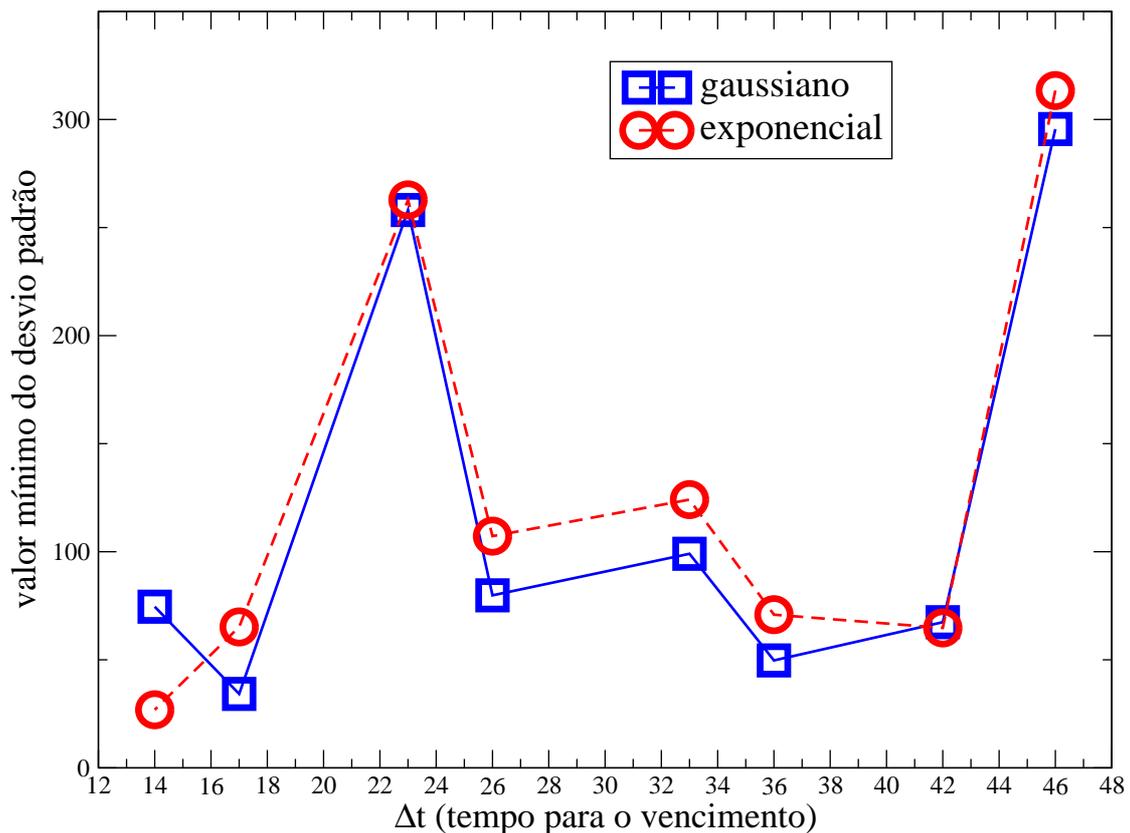


Figura 4.4 Valor mínimo da função desvio padrão versus dias até o vencimento para a série de opções IBOVL, cujo o vencimento foi dia 13 de dezembro de 2006.

Nessa figura vemos que longe do vencimento, faltando 46 dias para o vencimento, o modelo gaussiano ajusta ligeiramente melhor os pontos, já faltando 42 dias antes do vencimento ambos modelos são igualmente bons em ajustar os dados empíricos. Entre 36 e 17 dias para o vencimento, vemos que o modelo gaussiano ajusta melhor os dados empíricos. Finalmente próximo do vencimento, faltando 14 dias para o vencimento, o modelo exponencial ajusta melhor os dados empíricos. Esse tipo de comportamento é o que nós esperamos encontrar para o caso geral, já que assumimos como premissa que numa escala curta de tempo a distribuição dos retornos é melhor descrita por uma distribuição exponencial. Portanto, em uma situação em

que os investidores estejam procurando realizar lucros (retornos) através de opções negociadas num curto espaço de tempo, próximo da expiração do contrato, é bastante plausível imaginar que os preços dessas opções sejam melhor descritas pelo modelo exponencial.

O tipo de comportamento descrito acima é observado para a série IBOVL de 2006, nos dias mais representativos negociados desde próximo do lançamento, até próximo do vencimento desta série específica. No entanto, é preciso fazer o mesmo procedimento de ajuste para todas as outras séries já citadas, para determinar o comportamento geral da opção sobre o Ibovespa. A fim de ilustrar, qual dos modelos, gaussiano ou exponencial, apresenta melhor desempenho em ajustar as séries nesse período, construímos um gráfico com o valor mínimo da função desvio padrão para cada um dos dias de negociação relevantes de todas as séries estudadas.

Na Fig. 4.5, podemos ver o resultado usando o modelo gaussiano em azul e usando o modelo exponencial em vermelho. Portanto para cada um dos 80 dias de negociação relevante teremos um par de pontos.

Nesse gráfico temos no eixo horizontal o tempo Δt até o vencimento das séries, portanto $\Delta t = 0$ representa o dia de vencimento da opção. O que vemos em azul é o valor mínimo da função R usando o modelo gaussiano, que chamarei R_{gaus} , com média $\bar{R}_{gaus} = 144.10$. E o que vemos em vermelho é o valor mínimo da função R usando o modelo exponencial, que chamarei R_{exp} , com média $\bar{R}_{exp} = 133.30$. A informação que podemos tirar dessa figura é que, nesse sentido de média, o valor mínimo da função desvio padrão usando o modelo exponencial é **menor** que o valor mínimo usando o modelo gaussiano, ou seja, $\bar{R}_{exp} < \bar{R}_{gaus}$. Entretanto, o fato de termos $\bar{R}_{exp} < \bar{R}_{gaus}$ não significa que o modelo exponencial é o melhor, em geral, que o modelo gaussiano. Sendo necessária uma análise mais refinada em função do tempo para o vencimento.

Com o intuito de determinar qual dos dois modelos melhor ajusta os dados empíricos em função do tempo até o vencimento, realizamos a operação $R_{exp} - R_{gaus}$ sobre os pontos do gráfico da Fig. 4.5. Realizando essa operação, chegamos a Fig. 4.6, onde um ponto negativo significa que o ajuste exponencial foi melhor que o gaussiano, e, inversamente, para para os dias em que os pontos são positivos, o ajuste exponencial foi pior que o gaussiano. Observando a Fig. 4.6, notamos primeiramente que o modelo gaussiano sai-se melhor em um maior número (60%) de dias, embora $\bar{R}_{exp} < \bar{R}_{gaus}$, como vimos acima. A explicação de $\bar{R}_{exp} < \bar{R}_{gaus}$ deve-se ao fato de que em alguns casos o modelo exponencial ajusta bem melhor que o modelo gaussiano, sendo que, nos casos em que o ajuste gaussiano é melhor, ele é apenas ligeiramente melhor do que o modelo exponencial.

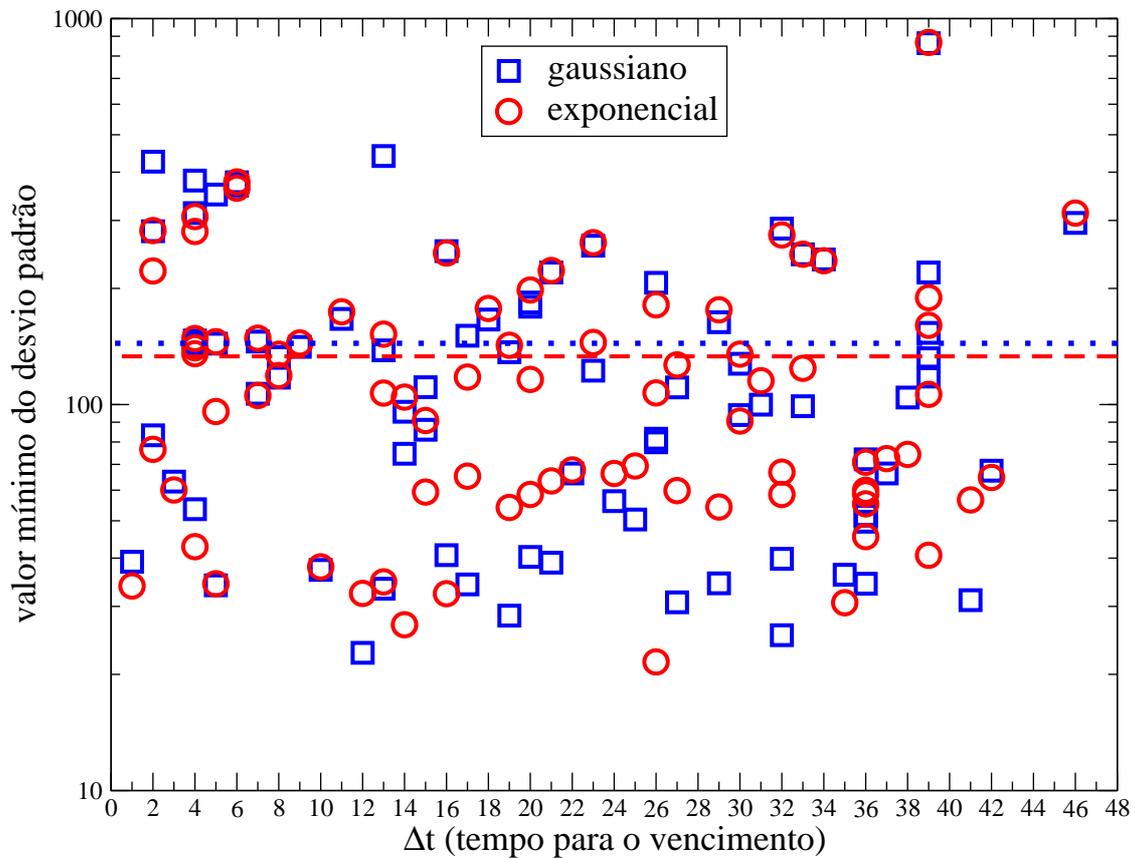


Figura 4.5 Valor mínimo da função desvio padrão versus dias até o vencimento para todas as série de opções, num período de janeiro de 2005 a dezembro de 2006. Em azul é o valor mínimo da função R_{gaus} usando o modelo gaussiano, com média $\bar{R}_{gaus} = 144.10$. Em vermelho é o valor mínimo da função R_{exp} usando o modelo exponencial, com média $\bar{R}_{exp} = 133.30$.

Como já mencionado, o modelo gaussiano apresentou um índice de sucesso maior que o modelo exponencial. Porém, se verificarmos a performance dos respectivos ajustes em intervalos de tempo de 10 dias entre o lançamento até o vencimento das séries, o que veremos é que nos 10 últimos dias antes do vencimento houve 22 casos de negócios envolvendo as séries, sendo que nesse intervalo o modelo exponencial ajustou bem os dados empíricos em 54,5% dos casos. Faltando de 11 a 20 dias para o vencimento das opções, houve 19 casos de negócios envolvendo as séries, nesse intervalo o modelo exponencial ajustou bem 36,80% dos casos. No período de 21 a 30 dias para o vencimento das opções, houve 16 casos de negócios envolvendo as séries, nesse intervalo o modelo exponencial ajustou bem em apenas 18,75% dos casos; faltando de 31 a 40 dias para o vencimento das opções houve 20 casos de negócios envolvendo as

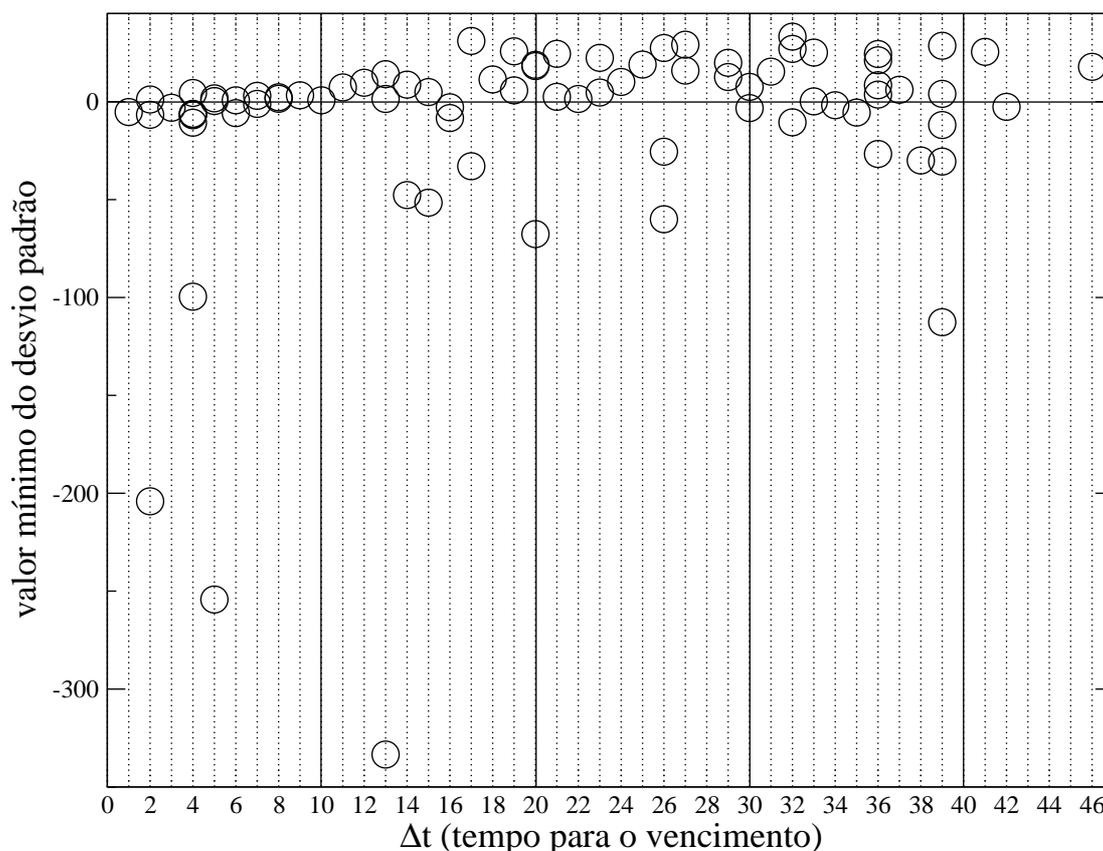


Figura 4.6 Valor mínimo da função R_{exp} usando o modelo exponencial **menos** o valor mínimo da função R_{gaus} usando o modelo gaussiano versus os dias que faltam para o vencimento.

séries, nesse intervalo o modelo exponencial ajustou bem em 40% dos casos; e finalmente faltando de 41 dias a 47 dias para o vencimento das opções houve 3 casos de negócios envolvendo as séries, nesse intervalo o modelo exponencial ajustou bem em 33,33% dos casos.

Esse resultado pode ser visto de forma mais clara na Tabela 4.3, onde apresentamos a porcentagem dos dias que foram bem descritos pelos respectivos modelos, para intervalos de tempo de 10 dias desde o lançamento das séries até seus respectivos vencimentos. Observamos que próximo do dia do vencimento a maior parte dos dias em que houve negócios (54,5%), foram bem ajustados pelo modelo exponencial. Esse resultado está perfeitamente de acordo com o que nós esperávamos, pois em escalas curtas de tempo a distribuição dos retornos do índice Bovespa é mais bem descrita por uma distribuição exponencial. Por outro lado, para escalas de tempo maiores, o modelo gaussiano ajusta melhor os dados em uma maioria considerável dos casos (60%). Além disso, deve-se observar que o fato de a maioria dos investidores usa-

dias para o vencimento	modelo gaussiano	modelo exponencial
1 a 10 dias	45,50%	54,50%
11 a 20 dias	63,20%	36,80%
21 a 30 dias	81,25%	18,75%
31 a 40 dias	60%	40%
41 a 47 dias	66,67%	33,33%

Tabela 4.3 Tabela contendo os resultados da análise do gráfico da Fig. 4.6, representando a percentagem de sucesso dos modelos gaussiano e exponencial nos respectivos intervalos de tempo de 10 dias desde o lançamento das séries até o vencimento.

rem, na prática, o modelo de Black-Scholes (gaussiano) como referência para o preço justo das opções, faz com que os preços praticados no mercado tendam a seguir o modelo gaussiano. Enfatizamos, porém, que próximo do vencimento o modelo exponencial torna-se bem melhor (no sentido de que o valor mínimo da função desvio padrão proporcionado pelo modelo exponencial é bem menor do que o modelo gaussiano). Isso parece sugerir que o mercado implicitamente leva em conta o fato de os retornos diários do Ibovespa seguirem uma distribuição exponencial.

4.3 Volatilidade Implícita

Segundo o modelo de Black-Scholes, um único valor para a volatilidade seria suficiente para descrever todos os preços das opções de uma série num dia específico, mas no mundo real isso não acontece. Frequentemente o preço com que as opções são negociadas no mercado diferem ligeiramente do preço previsto pelo modelo de Black-Scholes. A correta avaliação do preço de uma opção, segundo o modelo de Black-Scholes, reside no sucesso em determinar o parâmetro volatilidade do ativo. Como a volatilidade não pode ser observada diretamente, o investidor dispõe de dois tipos de métodos para a determinação desse parâmetro, a volatilidade histórica e a volatilidade implícita, este último método será o mais relevante para nosso estudo.

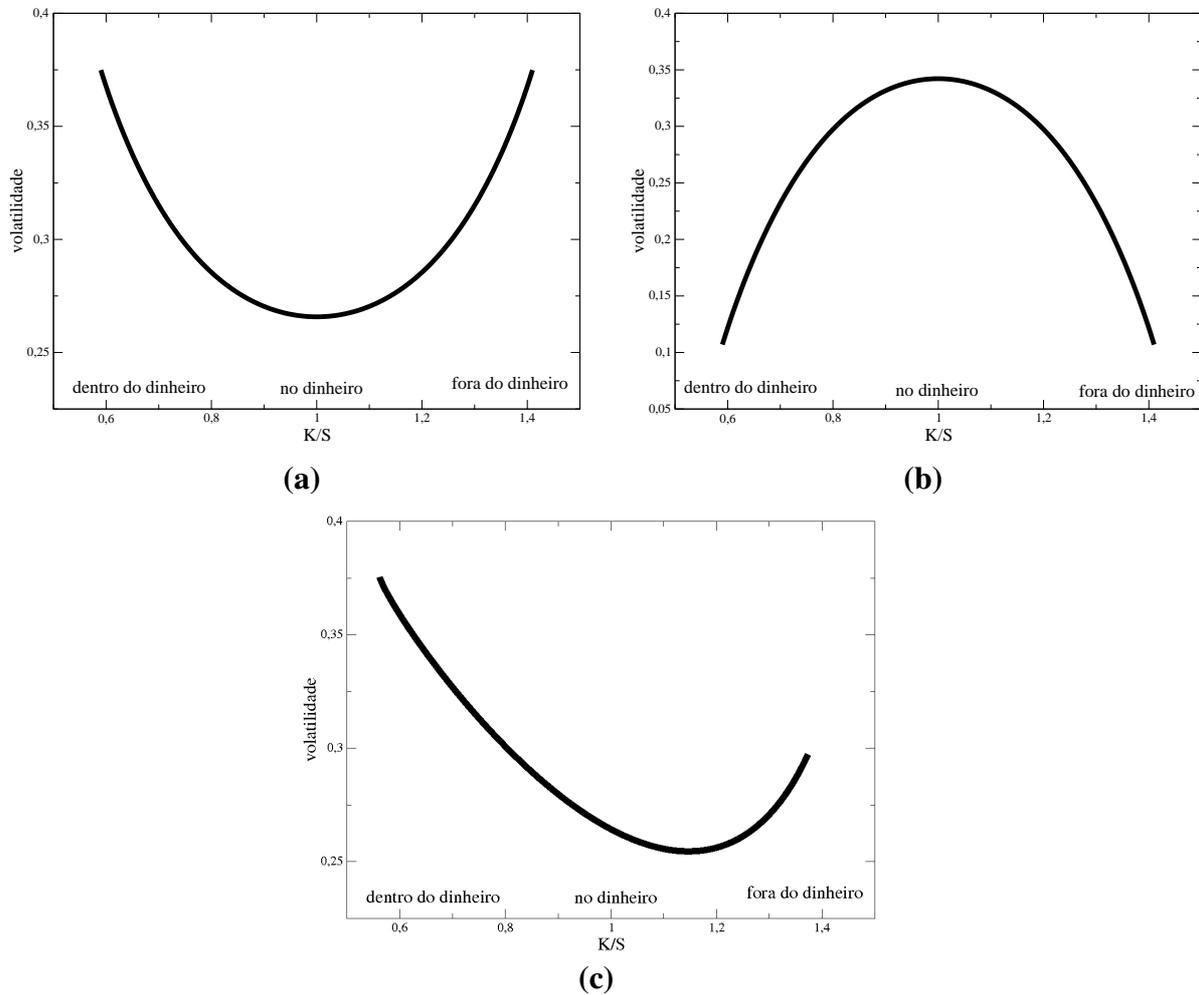


Figura 4.7 Comportamento genérico do gráfico da volatilidade implícita em função da razão do preço de exercício pela cotação do índice no dia da negociação.

A volatilidade histórica é uma estimativa baseada em dados estatísticos dos movimentos anteriores do preço de um ativo. Nesse cálculo, diferentes períodos de tempo tais como diário, semanal ou anual podem ser escolhidos para a análise. A escolha do período cabe a cada investidor, dependendo da estratégia e de quanto tempo ainda resta para o vencimento da opção.

A volatilidade implícita, por outro lado, é obtida por meio de modelos de avaliação de preço de opção, sendo o mais popular, o já mencionado modelo de Black-Scholes. Para esse modelo, a determinação da volatilidade implícita consiste em fixar todos os parâmetros do mercado que podem ser determinados diretamente pelo investidor, tais como tempo até o vencimento

$\Delta t = T - t$, o preço de exercício ou strike K ; o preço do índice $S(t)$ no dia t , a taxa de juros diária r referenciada pela taxa DI (Depósito Interfinanceiro), e o preço de mercado da opção $C_{mercado}$ no dia t .

Em seguida, usa-se esses parâmetros na fórmula de Black-Scholes que determina o preço da opção de compra (3.23), de modo a poder determinar qual a volatilidade σ_{imp} , definida como o valor do parâmetro σ na fórmula de Black-Scholes (3.23) tal que.

$$C_{BS}(S, t; K, T; r, \sigma_{imp}) = C_{mercado}.$$

Analisando o gráfico da volatilidade implícita em função do preço de exercício nota-se comportamentos genéricos, esses tipos de comportamentos pode ser classificado de três formas diferentes: "smile" Fig. 4.7a), "frown" Fig. 4.7b) e o "smirk" Fig. 4.7c). Frequentemente o termos "sorriso da volatilidade" abrange todos esses formatos.

No caso do modelo exponencial, existem dois parâmetros a serem determinados γ e v . Então, diferentemente do modelo gaussiano, no modelo exponencial teremos que encontrar dois parâmetros implícitos γ_{imp} e v_{imp} . Podemos obter esses dois parâmetros através do mesmo procedimento descrito acima, só que dessa vez assumindo que o preço teórico é obtido pelo modelo exponencial para o preço de opção (3.41). Mais uma vez, fixamos todos os parâmetros do mercado observados diretamente pelo investidor. Em seguida, usando esses parâmetros na fórmula (3.41), obteremos os parâmetros implícitos γ_{imp} e v_{imp} para cada strike em particular.

$$C_{exp}(S, t; K, T; r, \gamma_{imp}, v_{imp}) = C_{mercado}.$$

Outra diferença entre o modelo gaussiano e o modelo exponencial é que não conseguiremos achar a volatilidade diretamente através da expressão (3.41), pois os parâmetros γ e v são dependentes no tempo. Mostra-se no apêndice B que

$$\gamma = \frac{1}{b' \sqrt{t - t_0}},$$

$$v = \frac{1}{b \sqrt{t - t_0}},$$

vide (B.22). No entanto, temos acesso a variância implícita da distribuição dos retornos que é descrita segundo a expressão (2.24), $\sigma_{imp}^2 = \frac{2}{\gamma_{imp} v_{imp}}$. Sabendo, então, que a volatilidade é expressa pela fórmula $\sigma_{imp} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta t}}$, obtemos a volatilidade para o modelo exponencial:

$$\sigma_{imp} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_{imp} v_{imp} \Delta t}}. \quad (4.2)$$

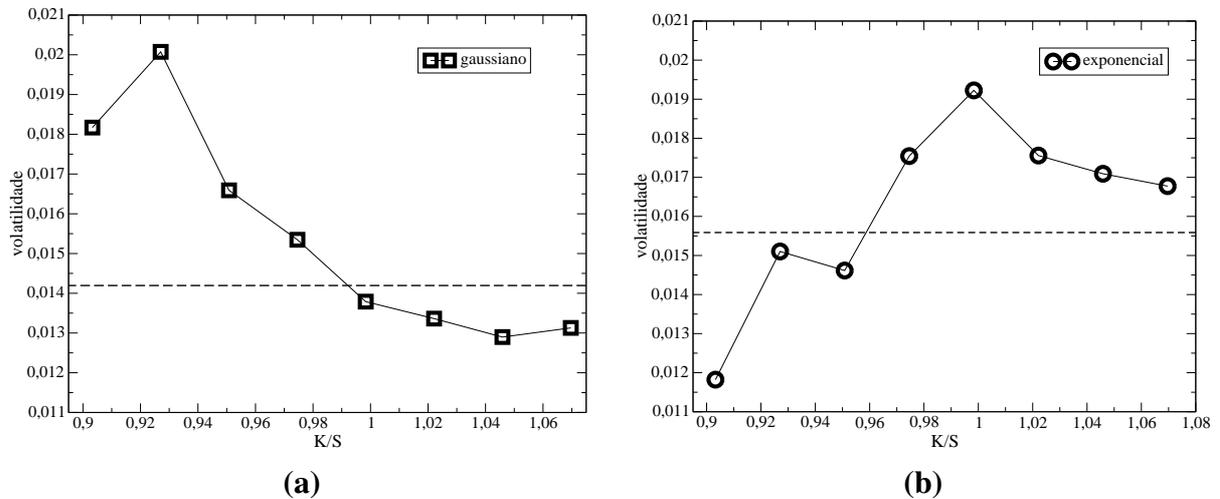


Figura 4.8 Volatilidade implícita calculada para série IBOVL (vencimento no dia 13/12/06) no dia 23/11/06, 14 antes do vencimento através de: a) modelo gaussiano b) modelo exponencial. As linhas tracejadas mostram os respectivos valores da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** nesse dia, conforme visto na seção 4.1.

Para ilustrar o comportamento da volatilidade implícita em função do preço de exercício da opção, vamos calcular a volatilidade implícita através dos dois modelos, para a série IBOVL com vencimento no dia 13/12/06, no dia 23/11/06, faltando 14 dias para o vencimento. O resultado desse estudo pode ser visto no gráfico da Fig. 4.8. Na Fig.4.8a vemos a volatilidade implícita calculada usando o modelo gaussiano, e na Fig. 4.8b mostramos a volatilidade implícita calculada usando o modelo exponencial. Em ambos os gráficos o que vemos no eixo horizontal é a razão $\frac{K}{S}$, lembrando que K é o preço de exercício (strike) e S é o preço do índice no dia em que a série foi negociada. As linhas tracejadas mostram o valor da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** no dia em que a série foi negociada conforme visto na seção 4.1, através do modelo gaussiano e do modelo exponencial respectivamente. O comportamento do gráfico da volatilidade implícita obtida a partir do modelo gaussiano se aproxima de um gráfico do tipo "smile", enquanto que o comportamento do gráfico da volatilidade implícita obtida a partir do modelo exponencial se aproxima de um gráfico do tipo "frown", esse tipo de comportamento é encontrado em outras situações, como veremos a seguir.

Ainda usando a série IBOVJ, calculamos a volatilidade implícita através de ambos modelos, agora para o dia 23/08/06, faltando 36 dias para o vencimento, o resultado pode ser visto na Fig. 4.9, onde na Fig. 4.9a temos a volatilidade implícita calculada usando o modelo gaussiano, e na Fig. 4.9b vemos a volatilidade implícita calculada usando o modelo exponencial. Assim

como antes, as linhas tracejadas mostram o valor da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** no dia em que a série foi negociada conforme visto na seção 4.1, através do modelo gaussiano, e do modelo exponencial respectivamente. Comparando Fig. 4.9a com a Fig. 4.8a notamos alguma semelhança no formato da volatilidade implícita. Observamos semelhança, também, comparando Fig. 4.8b e Fig. 4.9b.

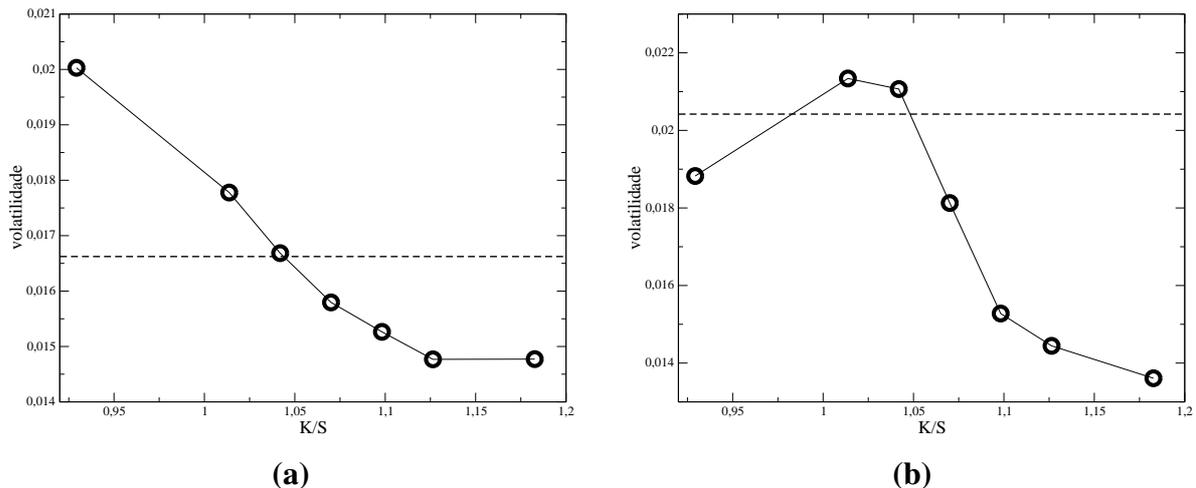


Figura 4.9 Volatilidade implícita calculada para série IBOVJ (vencimento no dia 18/10/06) no dia 23/08/06, 38 antes do vencimento através dos modelos: a) modelo gaussiano e b) modelo exponencial. As linhas tracejadas mostram os respectivos valores da volatilidade que melhor ajusta **toda a série** nesse dia, conforme visto na seção 4.1.

Além da série IBOVL e IBOVJ, realizamos o cálculo da volatilidade implícita para outras séries. Algumas com vencimento em 2006: IBOVB negociada em 27/01/06; IBOVD negociada em 17/02/06; IBOVF negociada em 17/05/06, 18/05/06; IBOVJ negociada em 22/08/06, 23/08/06, 28/09/06, 29/09/06; IBOVL negociada em 10/10/06, 19/10/06. E as séries com vencimento em 2005: IBOVB negociada em 06/01/05, 20/01/05; IBOVF negociada em 15/04/05, 26/04/05, 13/05/05; IBOVJ negociada em 19/08/05, 31/08/05, 05/10/05. Analisando a volatilidade implícita, calculada através de ambos os modelos de precificação para todos os dias acima citados, concluímos que, na média, o modelo exponencial proporciona uma volatilidade maior que o modelo gaussiano. Além disso, concluímos também que o comportamento mais comum do gráfico da volatilidade implícita obtida a partir do modelo gaussiano, em função do strike, apresenta uma concavidade ligeiramente voltada para cima. Como já foi dito anteriormente, gráficos da volatilidade implícita com esse tipo de formato são denominados como "smile" da volatilidade. Analogamente, observamos que na maioria dos casos o gráfico a volatilidade im-

plícita obtida a partir do modelo exponencial em função do strike, apresenta claramente uma concavidade voltada para baixo, essa forma é conhecida como "frown".

4.4 Análise da Variância

Os modelos de precificação de opções, tais como o gaussiano e exponencial, determinam o preço de uma opção a partir dos parâmetros citados na seção 3.2. Porém, em ambos modelos, existem parâmetros que trazem informação a respeito da distribuição dos retornos. Esses parâmetros não são observados diretamente no mercado e precisam ser estimados de forma a melhor ajustar os preços das opções de uma série. Isto significa que, ao estimarmos esse parâmetros, poderemos chegar a informações importantes sobre o comportamento do ativo de referência dessa opção. Com essa motivação, vamos investigar a relação da variância obtida a partir dos parâmetros de ajuste dos modelos de preços das opções em função do tempo até o vencimento dessas opções.

Podemos determinar a variância implícita, para cada dia de negociação relevante das séries entre os anos de 2005 e 2006, a partir dos parâmetros usados para ajustar essas séries como discutido na seção 4.1. O cálculo dessa variância é feito de maneira diferente para os dois modelos considerados nesta dissertação, o modelo exponencial e gaussiano. Usando o modelo de Black-Scholes (gaussiano), o parâmetro ajustado é a volatilidade σ da distribuição dos retornos. Então, podemos chegar à variância da distribuição dos retornos através da expressão

$$var = (\sigma \Delta t)^2, \quad (4.3)$$

onde $\Delta t = T - t$ é o período entre a data t de negociação da opção e a data do vencimento T .

Usando o modelo exponencial que ajusta as séries de opções, os parâmetros ajustados são γ e ν . A variância da distribuição dos retornos para esse modelo é descrita por (2.24), ou seja

$$var = \frac{2}{\gamma \nu}.$$

Na Fig. 4.10, pode-se constatar que a evolução da variância obtida a partir do modelo gaussiano, em função do tempo até o vencimento, é representado pelo ajuste da expressão

$$var = c \Delta t^{2H}, \quad (4.4)$$

com $2H = 0.9866$. Analogamente, na Fig. 4.11 vemos a evolução da variância obtida a partir dos parâmetros de ajuste usando o modelo exponencial, em função do tempo até o vencimento.

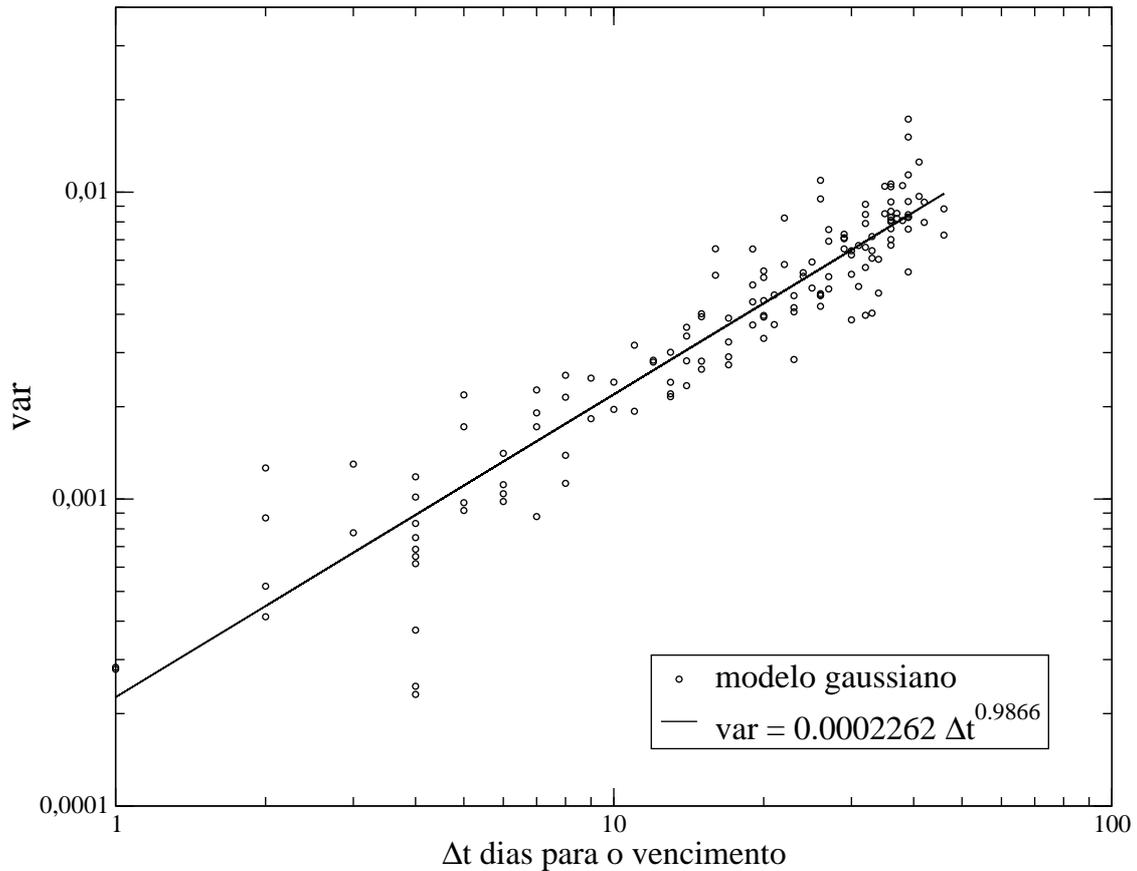


Figura 4.10 Variância calculada usando o modelo gaussiano de precificação de opções, em função do tempo até o vencimento. Onde a reta é um ajuste do tipo $var = c\Delta t^{2H}$, com $2H = 0.9866$.

Nessa figura, a reta de ajuste (4.4) possui coeficiente $2H = 0.9773$. Em resumo, os expoentes de Hurst que caracterizam a dependência temporal da variância implícita são, respectivamente,

$$\begin{aligned} 2H &= 0.9866, \text{ para o modelo gaussiano, e} \\ 2H &= 0.9773, \text{ para o modelo exponencial.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Podemos caracterizar um processo estocástico quanto às correlações de acordo com o valor do expoente H [35]. Caso $H = \frac{1}{2}$, isso implica que a série dos retornos é completamente decorrelacionada e o processo é conhecido como difusivo. Caso $H > \frac{1}{2}$, a série dos retornos é positivamente correlacionada e o processo é conhecido como superdifusivo. Caso $H < \frac{1}{2}$, a série dos retornos é negativamente correlacionada e o processo é conhecido como subdifusivo.

Observando o comportamento da variância implícita para ambos os modelos, em função do tempo que resta para o vencimento, podemos concluir que o comportamento dos retornos do Ibovespa é bem próximo de um comportamento difusivo. Em particular, concluímos que o

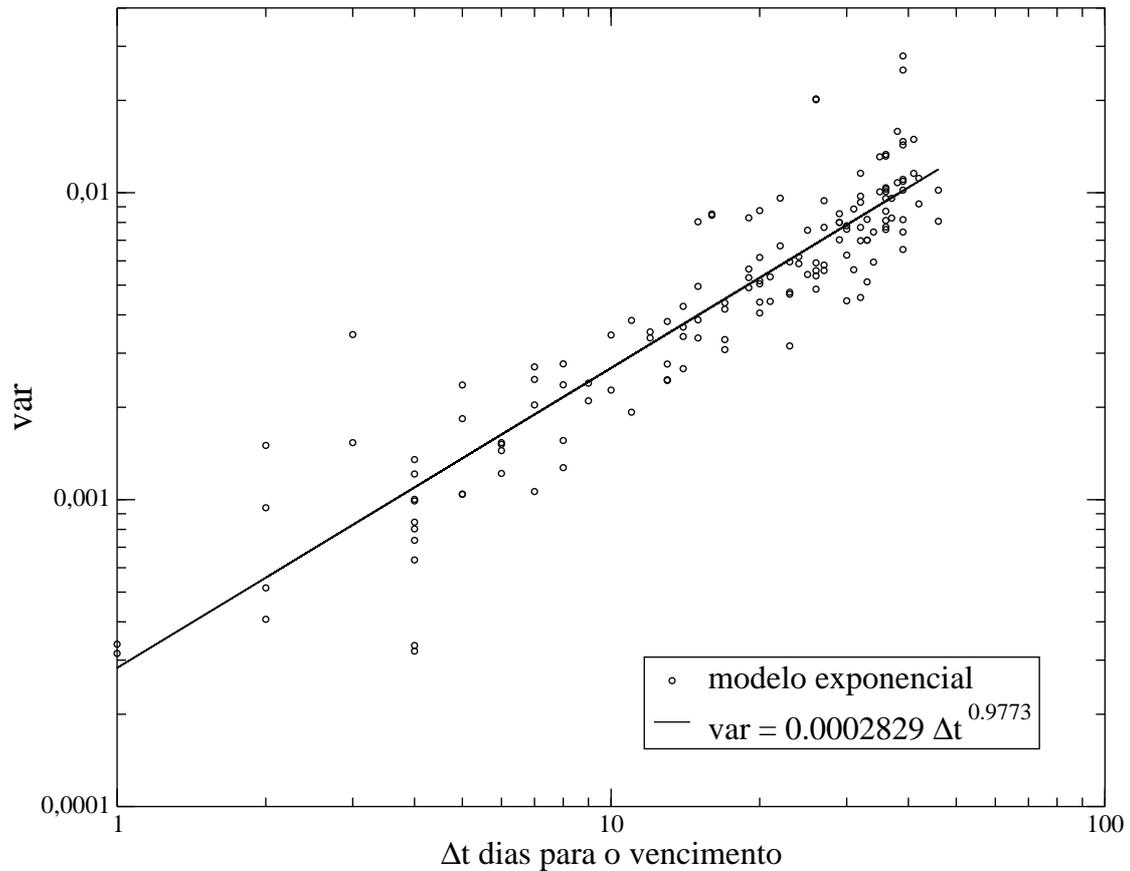


Figura 4.11 Variância calculada usando o modelo exponencial de precificação de opções, em função do tempo até o vencimento. Onde a reta é um ajuste do tipo $var = c\Delta t^{2H}$, com $2H = 0.9773$.

modelo exponencial para o preço das opções mostrou-se auto-consistente, pois como premissa para esse modelo, assumimos que o retorno se comporta como um processo estocástico difusivo $H = \frac{1}{2}$, o que de fato foi verificado a partir do cálculo da variância implícita.

É interessante notar que esse comportamento difusivo também foi observado a partir do cálculo da variância (histórica) diretamente dos retornos do índice Bovespa, em um trabalho anterior [1]. Neste trabalho, foi feito o ajuste da distribuição empírica dos retornos para o Ibovespa com diferentes escalas de tempo usando a função exponencial (2.18). O que se observa nesse trabalho é que tanto a variância da série dos retornos quanto a variância (2.24) usando os parâmetros do ajuste, apresentam um comportamento linear, ou seja, o coeficiente Hurst se aproxima de 1.

Conclusões e Perspectivas

5.1 Conclusões

Na primeira etapa dessa dissertação, foram feitas análises sobre as distribuições dos retornos do índice Bovespa para diferentes escalas de tempo, gerados a partir da série temporal do fechamento diário desse índice num período de 1968 a 2004 com 9000 pontos, e da série temporal da cotação intra-diária, ou seja, a cada 15 minutos num período de 1998 a 2001 com 20000 pontos desse mesmo índice.

Observamos que os retornos gerados em escalas de tempo variando de um a vinte dias seguem não uma distribuição gaussiana mas sim uma função exponencial. Além disso, analisando os retornos de alta frequência, que são os retornos gerados a partir da cotação a cada 15 minutos, notamos que o comportamento das distribuições de probabilidade dos retornos continua a ser bem descrita por uma função exponencial para as distribuições de retornos com escala de tempo entre 3 e 7 horas. Ainda tratando das distribuições de alta frequência, analisamos a distribuição dos retornos na escala de tempo mais fundamental, como os retornos de 15 minutos. Nessa escala mais rápida observamos o aparecimento de um comportamento do tipo lei de potência. Com o objetivo de caracterizar a melhor forma funcional que ajusta os dados empíricos nessa escala de tempo, testamos as distribuições que decaem como uma lei de potência, tais como a distribuição de Levy e a chamada distribuição de Tsallis. A partir dessas distribuições, realizamos um estudo detalhado da análise empírica dos retornos de alta frequência e indicamos que a forma funcional que melhor ajusta as distribuições de retornos de alta-frequência é a distribuição de Tsallis, visto que usando esta distribuição como ajuste, obtivemos menor valor para a soma dos mínimos quadrados. Além do mais, essa distribuição possui uma escala característica já que sua variância não diverge para o melhor parâmetro encontrado.

Em seguida, nos concentramos na análise estatística das cotações diárias das opções de compra sobre o índice Bovespa retirada de uma tabela contendo as séries negociadas entre os anos de 2005 e 2006. Para cada dada série de opção, extraímos dessa tabela o preço de mercado da opção e seu respectivo preço de exercício (strike) nos dias que concordamos ser

relevantes para análise. Então, para uma série com mesmo vencimento, criamos arquivos, um para cada dia de negociação, ao longo de um período desde o lançamento da série até próximo do vencimento, contendo o preço de mercado da opção e seu respectivo preço de exercício. Para cada um desses arquivos testamos como ajuste, dois modelos teóricos que determinam o preço de um contrato de opção do índice Bovespa, o modelo exponencial e o modelo padrão em finanças, o modelo de Black-Scholes. O primeiro assume que a distribuição dos retornos segue uma função exponencial, e sua respectiva expressão do preço de uma opção é ajustada aos dados empíricos segundo dois parâmetros, γ e v . O segundo assume que a distribuição dos retornos segue uma função gaussiana, e sua respectiva expressão do preço de uma opção tem como parâmetro de ajuste a volatilidade σ .

Concluimos que dos 22 negócios realizados no intervalo de tempo de 10 dias próximo do dia do vencimento, a maior parte (54,50%) dos dias negociados, foram mais bem ajustados pelo modelo exponencial. Por outro lado, 60% de todos os dias estudados (arquivos criados) foram melhor ajustados usando o modelo gaussiano. Isso deve-se particularmente ao fato de que a maioria dos investidores usam o modelo de Black-Scholes (gaussiano) para determinar o preço justo das opções.

Partindo dos parâmetros usados para ajustar as séries nos dias em que as opções foram negociadas, estudamos a dinâmica da variância implícita. O cálculo dessa variância é feito de maneira diferente para os dois modelos, exponencial e gaussiano. Usando o modelo gaussiano que ajusta as séries das opções, obtemos como parâmetro ajustado a volatilidade σ da distribuição dos retornos. Podemos chegar à variância var da distribuição dos retornos através da expressão $var = (\sigma \Delta t)^2$, onde Δt é o período entre a data de negociação da opção t e a data do vencimento T . Usando o modelo exponencial que ajusta as séries de opções, obtemos os parâmetros γ e v . A variância da distribuição dos retornos para esse modelo é descrita por $var = \frac{2}{\gamma v}$. Observando o comportamento dessa variância em função do tempo que resta para o vencimento, tanto para o modelo gaussiano como para o modelo exponencial, tal que $var \propto \Delta t^{2H}$. Concluimos que o comportamento dos retornos do índice Bovespa é bem próximo de um comportamento difusivo, pois tanto o modelo gaussiano como o modelo exponencial apresentam $H \approx \frac{1}{2}$. Concluimos também, que os métodos usados para determinar o preço das opções são auto-consistentes, pois como premissa para os dois modelos, gaussiano e exponencial, assumimos que o retorno se comporta como uma variável aleatória do tipo movimento browniano, que possui $H = \frac{1}{2}$.

Fizemos ainda o teste da volatilidade implícita para ambos os modelos do preço da opção

de compra, exponencial e gaussiano. Vimos que usando o modelo gaussiano, a volatilidade pode ser obtida diretamente a partir da expressão (3.23). Porém, usando o modelo exponencial a volatilidade é obtida indiretamente a partir da expressão

$$\sigma_{imp} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_{imp} \nu_{imp} \Delta t}},$$

onde γ_{imp} e ν_{imp} são os parâmetro obtidos diretamente através da expressão (3.41). Verificamos que na média o modelo exponencial proporciona uma volatilidade maior que o modelo gaussiano. Além disso, concluímos também que o comportamento mais comum do gráfico da volatilidade implícita obtida a partir do modelo gaussiano em função do strike, apresenta uma concavidade ligeiramente voltada para cima, comportamento conhecido entre os analistas financeiros como "smile". Analogamente, observamos que na maioria dos casos o gráfico a volatilidade implícita obtida a partir do modelo exponencial em função do strike, apresenta claramente uma concavidade voltada para baixo, comportamento conhecido entre os analistas financeiros como "frown".

5.2 Perspectivas

O índice Bovespa reflete o comportamento médio dos preços praticados no mercado acionário brasileiro. Portanto, as conclusões alcançadas nessa dissertação, de certa forma, refletem um comportamento geral do mercado. De forma que estamos aptos a verificar se o mercado de opções já incorpora o comportamento exponencial de maneira particular. Para isso é importante realizar um estudo comparativo entre os preços determinados pelos modelos exponencial e gaussiano, como o preço praticado no mercado não de um índice, mas sim de uma ação em particular. Com intuito de se ter certeza de que o mercado implicitamente leva em conta o fato de os retornos diários dos ativos seguirem uma distribuição exponencial para escalas curtas de tempo.

Dedução da Fórmula de Black-Scholes

A equação de Black-Scholes (3.13)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

pode ser transformada numa equação diferencial parcial (EDP) com coeficientes constantes fazendo as mudanças de variável (3.17),

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \\ x &= \ln\left(\frac{S}{K}\right), \\ C(S, t) &= Ke^{-(\alpha x + \beta \tau)}u(x, \tau).\end{aligned}$$

primeiro vamos escrever os termos envolvidos na equação (3.13) em função das novas variáveis

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma^2 Ke^{-(\alpha x + \beta \tau)}\left(\beta u - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{K}{S} e^{-(\alpha x + \beta \tau)}\left(-\alpha x + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{K}{S^2} e^{-(\alpha x + \beta \tau)}\left(\alpha(\alpha + 1)u - (1 + 2\alpha)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\tag{A.1}$$

Substituindo as expressões de (A.1), juntamente com as mudanças de variáveis (3.17), chegamos na seguinte expressão,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2(\beta + \alpha(\alpha + 1)) - r(\alpha + 1)\right)u + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(1 - 2\alpha)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\tag{A.2}$$

fazendo os coeficientes de u e de $\frac{\partial u}{\partial x}$ igual a zero, obtemos as expressões para α e β , tal como em (3.18),

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \\ \beta &= \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Aplicando as mudanças de variáveis na condição final (3.14), decrita como

$$C(S, T) = \max(S - K, 0),$$

obtemos

$$Ke^{-\alpha x}u(x,0) = \max(Ke^x - K, 0),$$

$$u(x,0) = \max(e^{(1+\alpha)x} - e^{\alpha x}, 0),$$

e sabendo que $\sqrt{\beta} = 1 + \alpha$, chegamos a condição inicial (3.20)

$$u(x,0) = \max(e^{\sqrt{\beta}x} - e^{\alpha x}, 0).$$

A partir do procedimento descrito acima chegamos na EDP (3.19)

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2},$$

que tem a mesma forma da popular equação da difusão. A solução da equação de difusão (3.19) sujeita a condição inicial (3.20) nos proporciona a expressão para o preço de uma opção compra $C(S, t)$. Neste apêndice vamos nos limitar a achar o preço da opção de compra, visto que mudando-se a condição final, chegasse ao preço da opção de venda de maneira análoga.

A equação (3.19) é uma equação diferencial parcial parabólica unidimensional. Inicialmente nós precisaremos achar a função de Green associada ao operador $\mathbf{L}_{x,\tau}$, definido como $\mathbf{L}_{x,\tau} \equiv (\partial/\partial\tau - \nabla^2)$. De forma que a solução da equação do calor (3.19) é

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, \tau)u(s, 0)ds, \quad (\text{A.3})$$

onde $G(x, s, \tau)$ é a função de Green [36] associada a equação de difusão, dada pela expressão

$$G(x - s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-(x-s)^2/4\tau}\theta(\tau), \quad (\text{A.4})$$

vamos substituir a função de Green $G(x - s, \tau)$ na integral (A.3) para obtermos a solução da EDP (3.19)

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\theta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} u(s, 0)e^{-(x-s)^2/4\tau} ds, \quad (\text{A.5})$$

substituindo a condição inicial $u(x, 0) = \max(e^{\sqrt{\beta}x} - e^{\alpha x}, 0)$ na integral acima obtemos

$$u(x, \tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^{\sqrt{\beta}s} - e^{\alpha s}, 0)e^{-(x-s)^2/4\tau} ds,$$

$$u(x, \tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} (e^{\sqrt{\beta}s} - e^{\alpha s})e^{-(x-s)^2/4\tau} ds, \quad (\text{A.6})$$

manipulando o integrando, de forma a completar quadrados chegamos a expressão

$$u(x, \tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+2\tau\sqrt{\beta}-s)^2}{4\tau}} e^{\sqrt{\beta}x+\beta\tau} ds - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+2\tau\alpha-s)^2}{4\tau}} e^{\alpha x+\alpha\tau} ds \right), \quad (\text{A.7})$$

realizando a seguinte a mudança de variável na primeira integral

$$s'^2 = \frac{(x + 2\tau\sqrt{\beta} - s)^2}{2\tau},$$

analogamente, realizando a seguinte a mudança de variável na segunda integral

$$s'^2 = \frac{(x + 2\tau\alpha - s)^2}{2\tau},$$

chegamos a

$$u(x, \tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\sqrt{\beta}x + \beta\tau} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-s'^2/2} ds' - e^{\alpha x + \alpha\tau} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-s'^2/2} ds' \right), \quad (\text{A.8})$$

onde $d_1 = \frac{x + 2\tau\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\tau}}$ e $d_2 = \frac{x + 2\tau\alpha}{\sqrt{2\tau}}$. Se definirmos

$$N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds,$$

podemos escrever $u(x, \tau)$ como

$$u(x, \tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{2\pi}} (e^{\sqrt{\beta}x + \beta\tau} N(d_1) - e^{\alpha x + \alpha\tau} N(d_2)), \quad (\text{A.9})$$

como tínhamos definido na mudança de variável (3.17), o valor da opção de compra determinado pelo modelo de Black-Scholes é

$$C(S, t) = Ke^{-(\alpha x + \beta\tau)} u(x, \tau),$$

substituindo (A.9) em (3.17) teremos

$$C(S, t) = K \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\alpha x + \beta\tau)} (e^{\sqrt{\beta}x + \beta\tau} N(d_1) - e^{\alpha x + \alpha\tau} N(d_2)),$$

Finalmente, realizando a segunda e a terceira das mudanças de (3.17) e sabendo que os valores de α e β são dados por (3.18), chegamos a mesma expressão (3.23)

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Abordagem Via Dinâmica Estocástica

É possível determinar uma dinâmica estocástica do retorno que gera o comportamento exponencial das distribuições. Inicialmente precisamos definir a equação diferencial estocástica para o retorno x dado por (2.15), de maneira que

$$dx = R(x,t)dt + \sqrt{D(x,t)}dW(t). \quad (\text{B.1})$$

Em seguida, teremos que descobrir o coeficiente de difusão $D(x,t)$, que é necessário para produzir a distribuição exponencial $f(x,t)$ a partir da equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(R(x,t)f(x,t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x,t)f(x,t)), \quad (\text{B.2})$$

onde

$$R(x,t) = \mu(t) - \frac{D(x,t)}{2},$$

de maneira que o coeficiente de difusão $D(x,t)$ proporcione uma variância global $var \sim \Delta t$ para tempos longos.

A solução de (B.1) para x é obtida realizando a integral estocástica, desde que R e \sqrt{D} satisfaçam a condição de Lipschitz [36],

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} R(x,s)ds + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{D(x,s)}dW(s). \quad (\text{B.3})$$

Vamos usar no último termo da expressão (B.3) a expressão do produto de Itô [37] definido pela integral estocástica

$$b.\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} b(x(s),s)dW(s),$$

a equação (B.3) fica então

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} R(x,s)ds + \sqrt{D(x,t)}.\Delta W(t). \quad (\text{B.4})$$

Tomando a média sobre Δx , sabendo que $\langle \Delta W \rangle = 0$, obtemos que

$$\langle \Delta x \rangle = \left\langle \int_t^{t+\Delta t} R(x,s)ds \right\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Além de $\langle \Delta x \rangle$ podemos obter a média sobre Δx^2 . Usando o fato de $dW^2 \rightarrow dt$, chegamos a

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \left\langle \left(\int_t^{t+\Delta t} R(x, s) ds \right)^2 \right\rangle + \int_t^{t+\Delta t} \langle D(x(s), s) \rangle ds,$$

resultando na relação

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \left\langle \left(\int_t^{t+\Delta t} R(x, s) ds \right)^2 \right\rangle + \int_t^{t+\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} D(z, s) f(z, s|x, t) dz ds, \quad (\text{B.6})$$

onde f é a probabilidade condicional que satisfaz a equação de Fokker-Planck (B.2) correspondente a EDE (B.1). Para intervalos de tempo muito pequenos $\Delta = s - t$ a probabilidade condicional f é aproximada pela sua condição inicial, a função delta de Dirac $\delta(z - x)$, então para a menor ordem de Δt nós obtemos o resultado

$$\langle \Delta x^2 \rangle \approx \int_t^{t+\Delta t} D(x(s), s) ds \approx D(x(t), t) \Delta t, \quad (\text{B.7})$$

que é uma relação necessária para a validade da equação de Fokker-Planck no limite quando Δt some.

Concluimos que, de maneira geral, a variância média global é dada pela expressão

$$\begin{aligned} var &= \langle \Delta x^2 \rangle - \langle \Delta x \rangle^2, \\ var &= \left\langle \left(\int_t^{t+\Delta t} R(x, s) ds \right)^2 \right\rangle + \int_t^{t+\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} D(z, s) f(z, s|x, t) dz ds - \left\langle \int_t^{t+\Delta t} R(x, s) ds \right\rangle^2, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e que para intervalos de tempo pequenos obtemos a expressão para a variância média local

$$var \approx D(x(t), t) \Delta t, \quad (\text{B.9})$$

então, para esta última, chamaremos $D(x, t)$ de coeficiente de difusão local. Portanto, entenda-se como "global", expressões tal como (B.8), que valem para tempos muito longos e para qualquer condição inicial $x(t)$ da EDE no tempo t . E entenda-se "local", expressões tal como (B.9), que valem apenas para um intervalo limitado de tempo nas proximidades de um ponto x .

A dependência da variância média var com intervalos de tempo longos Δt depende do modelo. Mas do ponto de vista empírico, a variância dos dados var_{emp} comporta-se como

$$var_{emp} \propto \Delta t \quad (\text{B.10})$$

para retornos com escala de tempo maiores que 10 minutos [1, 18]. Portanto, assumindo a expressão (B.10) como verdadeira, deveremos achar uma expressão para $D(x, t)$ de modo que a variância global se comporte como $var \propto \Delta t$.

B.1 Dinâmica da Distribuição Exponencial

Uma das afirmativas da formulação do modelo de Black-Scholes é a de que os sucessivos retornos seguem o processo de Wiener generalizado, como visto na EDE (2.11) $dx = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW$, possuindo uma volatilidade σ constante. Porém, na prática isso não acontese. Saber como a volatilidade se comporta é bastante importante para os modelos de precificação de opções. Por isso, é importante achar uma expressão para o coeficiente de difusão $D(x,t)$, sendo $D(x,t) \sim \sigma^2$, de forma que a distribuição $f(x,t)$ dos retornos seja uma função exponencial. Com esse intuito começaremos escrevendo a EDE para o retorno segundo (B.1), ou seja,

$$dx = R(x,t)dt + \sqrt{D(x,t)}dW,$$

Para essa EDE existe uma equação de Fokker-Planck (B.2) correspondente,

$$\dot{f} = -(R(x,t)f(x,t))' + \frac{1}{2}(D(x,t)f(x,t))'',$$

lembrando que

$$R(x,t) = \mu(t) - \frac{1}{2}D(x,t). \quad (\text{B.11})$$

A solução estacionária da equação de Fokker-Planck no caso geral pode ser obtida através da equação de continuidade [38]

$$\frac{df(x,t)}{dt} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}, \quad (\text{B.12})$$

onde $j(x,t)$ é a função densidade de probabilidade, e a partir de (B.12) e (B.2) obtemos

$$j(x,t) = R(x,t)f(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(D(x,t)f(x,t)) \quad (\text{B.13})$$

Para que a conservação de probabilidade seja satisfeita na descontinuidade $x = \delta$, não é suficiente garantir a continuidade da densidade de probabilidade j . Deveremos usar uma condição mais geral. Então, partindo da condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx = 1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\delta} f_-(x,t)dx + \int_{\delta}^{\infty} f_+(x,t)dx \right) = 0, \quad (\text{B.14})$$

e usando a relação (B.12) em (B.14) chegamos a condição

$$\left((R - \dot{\delta})f - \frac{1}{2}(Df)' \right) \Big|_{\delta} = 0. \quad (\text{B.15})$$

Quando diferenciamos o produto $D(x,t)f(x,t)$, usando

$$f(x,t) = f_+\theta(x-\delta) + f_-\theta(x-\delta),$$

$$D(x,t) = D_+\theta(x-\delta) + D_-\theta(x-\delta),$$

obtemos uma função delta no ponto $x = \delta$. O coeficiente da função delta some se fizermos

$$D_-f_- = D_+f_+ \quad (\text{B.16})$$

no ponto $x = \delta$. Além dessa condição, existe uma outra no valor $x = \delta$ dada por

$$(R - \delta)f \Big|_{\delta} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Note que nós não assumimos a condição de normalização (2.22) e (2.23). Uma vez sabendo os dois valores assumidos por $D(x,t)$ no ponto $x = \delta$, podemos determinar os valores de A e B , de posse das expressões (B.16) e (2.20).

Agora que já temos as condições necessárias, vamos obter o coeficiente de difusão $D(x,t)$ que gera a distribuição f dinamicamente, a partir da equação de Fokker-Planck (B.2) de maneira que a distribuição f seja a função (2.18) sujeita a (2.20) e (B.16).

Com o intuito de simplificar o problema proposto acima, vamos assumir que $D(x,t)$ é linear em $v(x-\delta)$ para $x > \delta$, e linear em $\gamma(x-\delta)$ para $x < \delta$. A grande questão é saber se os dois valores assumidos em $D(\delta,t)$ são constantes ou dependem de t . Na procura de explicitar o comportamento de $D(\delta,t)$, nos deparamos com o problema da não unicidade local ($x = \delta$) tanto de $D(x,t)$, como das funções $v(t)$ e $\gamma(t)$. O problema da não unicidade só pode ser resolvido se os dados forem precisos o suficiente para medirmos a dependência em t da volatilidade local, isto é em $x = \delta$, e global para todo x , para escalas de tempos longos. Sendo, nessas escalas de tempo, os valores de γ e v não necessariamente grandes comparados com a unidade. No entanto, para escalas de tempos de interesse, tanto para descrever os retornos como para os preços da opções, as escalas de tempo são pequenas o suficiente de forma a assegurar que $\gamma, v \gg 1$ seja verdade, com boa confiança. Nesse limite pode-se encontrar mais de uma solução para a equação de F-P, no entanto, vamos apresentar apenas uma delas.

Para começar, faremos os cálculos para uma situação simples de $D(x,t)$,

$$D(x,t) = \begin{cases} d_-(1 - \gamma(x-\delta)) & \text{se } x < \delta, \\ d_+(1 + v(x-\delta)) & \text{se } x > \delta, \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

onde os coeficientes d_- e d_+ podem depender do tempo ou não. Usando a distribuição exponencial (2.18) e o coeficiente de difusão (B.18) na equação de Fokker-Planck (B.2) chegaremos

a uma equação que apresentam termos em $(x - \delta)$. Igualando os termos de mesma potências em $(x - \delta)$, encontramos as seguintes equações para os coeficientes γ e ν

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\frac{d_-}{2}\gamma^2(\gamma + 1) \quad \text{se } x < \delta, \\ \dot{\nu} &= -\frac{d_+}{2}\nu^2(\nu - 1) \quad \text{se } x > \delta,\end{aligned}\tag{B.19}$$

os termos que são independentes de $(x - \delta)$ satisfazem a condição (B.17) em $d\delta/dt$. Assumindo $b'^2 = d_- = \text{constante}$ e $b^2 = d_+ = \text{constante}$, nos leva a

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\gamma} - \ln \gamma + \ln(\gamma + 1) &= -\frac{b'^2}{2}(t - t_0) \quad \text{se } x < \delta, \\ \frac{1}{\nu} - \ln \nu + \ln(\nu - 1) &= -\frac{b^2}{2}(t - t_0) \quad \text{se } x > \delta,\end{aligned}\tag{B.20}$$

e a expressão do coeficiente de difusão fica

$$D(x, t) = \begin{cases} b'^2(1 - \gamma(x - \delta)) & \text{se } x < \delta, \\ b^2(1 + \nu(x - \delta)) & \text{se } x > \delta.\end{cases}\tag{B.21}$$

Se considerarmos $\gamma, \nu \gg 1$, o que realmente acontecesse observando as distribuições dos retornos quando as escala de tempo diminuem, vamos obter, a partir de (B.20) a seguinte solução para γ e ν

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{b'\sqrt{t-t_0}}, \\ \nu &= \frac{1}{b\sqrt{t-t_0}},\end{aligned}\tag{B.22}$$

assim a variância global (2.24) $var = \frac{2}{\gamma\nu}$ nos dá

$$var = 2bb'(t - t_0).\tag{B.23}$$

Portanto, a dinâmica do retorno associada ao coeficiente de difusão (B.21) nos permite obter, através da equação de Fokker-Planck (B.2) uma distribuição de probabilidade que descreve o comportamento exponencial dos retornos. Além disso, esse coeficiente de difusão caracteriza o processo como difusivo já que se escrevermos a expressão (B.23) como

$$var \approx \Delta t^{2H},\tag{B.24}$$

devemos ter $H = \frac{1}{2}$. Isso implica que a série dos retornos é completamente decorrelacionada, em concordância com as suposições iniciais. Concluimos, então que a partir da hipótese inicial de que os retornos do ativo de referência são distribuídos tal qual uma distribuição exponencial, podemos obter um modelo para o preço de uma opção europeia de compra através de uma solução analítica via a estratégia Delta de Hedge, assim como foi feito para obtenção do modelo

de Black-Scholes. O procedimento é similar ao da seção 3.4, assume-se uma carteira de investimento Π livre de risco segundo a abordagem risk-neutral e obtém-se uma equação diferencial parcial. A solução desta equação, nos leva a uma expressão para o preço de uma opção. Os cálculos são extensos e desnecessários para este trabalho, haja vista que a solução de interesse é da mesma forma que (3.41).

Referências Bibliográficas

- [1] José Augusto Carvalho Filho. *Modelo Exponencial para a Distribuição dos Retornos do Ibovespa*. Tese de Mestrado, Departamento de Física, UFPE, Brasil, 2004.
- [2] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. Université de Lausanne, 1897.
- [3] Louis Bachelier. Théorie de la Spéculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 17:21–86, 1900.
- [4] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen (On the motion required by the molecular kinetic theory of heat of small particles suspended in stationary liquid). *Annalen der Physik*, 17:549, 1905.
- [5] Eugene Fama. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25:(383–417), 1970.
- [6] M.F.M. Osborne. Brownian motion in the stock market.
- [7] P.A. Samuelson. Proof that properly anticipated price fluctuate randomly. 62:, 1965.
- [8] Benoit Mandelbrot. The Variation of Some Other Speculative Prices. *The Journal of Business*, 40:393–413, 1967.
- [9] Fischer Black and Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [10] Zvi Bodie and Robert C. Merton. *Finanças*. Bookman, São Paulo, BR, 2000.
- [11] Eduardo Fortuna. *Mercado Financeiro*. Qualitymark, Rio de Janeiro, BR, 2005.
- [12] Bank for International Settlements. Triennial and semiannual surveys on positions in global over-the-counter (OTC) derivatives markets at end-June 2004. <http://www.bis.org>.

- [13] <http://www.bovespa.com.br> .
- [14] Joseph L. McCauley and Gemunu H. Gunaratne. An Empirical Model for Volatility of Returns and Option Pricing . *Physica A*, 329:213–221, 2003.
- [15] Paul Wilmott, Sam Howison and Jeff Dewynne. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction* . Cambridge University Press, New York, USA, 1995.
- [16] Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus*. World Scientific, London, 1998.
- [17] Johannes Voit. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Springer, Bonn, Germany, 2003.
- [18] R. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [19] G. L. Vasconcelos. A Guided Walk Down Wall Street: An Introduction to Econophysics. *Brazilian Journal of Physics*, 34:1039–1066, 2004.
- [20] C. Tsallis. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *J. Stat. Phys.*, 52:479–487.
- [21] Fábio Yoshikazu Kanashiro. *Uma Generalização do Modelo de Black-Scholes no Contexto da Mecânica Estatística Não-Extensiva*. Tese de Mestrado, Instituto de Física Teórica, Brasil, 2006.
- [22] C. Tsallis and D.J. Bukman. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and entropy. *Physical Review E*, 54:2197–2200.
- [23] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza, and R. Maynard. Statistical mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical Review Letters*, 75:3589–3593.
- [24] <http://www.mathworld.com> .
- [25] L. Couto Miranda and R. Riera. Truncated Lévy walks and an emerging market economic index. *Physica A*, 297:509–520, 2001.
- [26] T. Aste T. Di Matteo and M. M. Dacorogna. Scaling behaviors in differently developed markets. *Physica A*, 324:183–188, 2003.

- [27] W. H. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [28] A.A.G. Cortine and R. Riera. Non-extensive behavior of a stock market index at microscopic time scales. *Physica A*, 377:181–192, 2006.
- [29] A. Matacz. Financial Modeling And Option Theory With The Truncated Lévy Process. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3:143–160, 2000.
- [30] L. Borland. Option Pricing Formulas Based on a Non-Gaussian Stock Price Model . *Physical Review Letters*, 89(10):098701, 2002.
- [31] L. Borland. A non-Gaussian option pricing model with skew. *Quantitative Finance*, 5:499–514, 2004.
- [32] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, New York, USA, 1998.
- [33] John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1997.
- [34] Philip R. Bevington and D. Keith Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for The Physical Sciences* . Mc Graw-Hill, New York, USA, 1992.
- [35] Rogério L. Costa and G. L. Vasconcelos. Long-range correlations and nonstationarity in the Brazilian stock market. *Physica A*, 329:231–248, 2003.
- [36] Sadri Hassani. *Mathematical Physics*. Springer, Illinois, USA, 1999.
- [37] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations*. Krieger, Malabar, 1992.
- [38] Tania Tomé and Mário José Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, São Paulo, BR, 2001.

