



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EFEITOS DA FORÇA DE CORIOLIS NA CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE: ESTABILIDADE LINEAR E DINÂMICA NÃO-LINEAR

por

Hermes Augusto Buarque Gadêlha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. José Américo de Miranda Neto (Orientador-UFPE)
Prof. Sérgio Galvão Coutinho (Co-orientador – DF - UFPE)
Prof. Flávio Menezes de Souza (DF - UFPE)
Prof. Fernando Jorge S. Moraes (DF – UFPB)

Recife - PE, Brasil
Fevereiro - 2007

Gadêlha, Hermes Augusto Buarque
Efeitos da força de Coriolis na célula de Hele-Shaw
girante: estabilidade linear e dinâmica não-linear / Hermes
Augusto Buarque Gadêlha – Recife : O autor, 2007.
xiii, 104 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Departamento de Física, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Física da matéria condensada mole.
3. Instabilidades hidrodinâmicas. 4. Formação de padrões. 5.
Célula de Hele-Shaw girante. 6. Força de Coriolis. I. Título.



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++) 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++) 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Hermes Augusto Buarque Gadêlha

EFEITOS DA FORÇA DE CORIOLIS NA CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE: ESTABILIDADE LINEAR E DINÂMICA NÃO-LINEAR

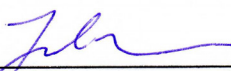
A Banca Examinadora composta pelos Professores José Américo de Miranda Neto (Presidente e Orientador), Sérgio Galvão Coutinho, Co-orientador, Flávio Menezes de Aguiar, todos da Universidade Federal de Pernambuco e Fernando Jorge S. Moraes, da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato:

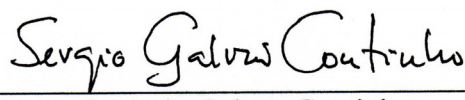
☒ Aprovado com Distinção

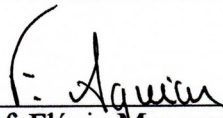
☐ Aprovado

☐ Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e seis de fevereiro de 2007.


Prof. José Américo de Miranda Neto
Presidente e Orientador


Prof. Sérgio Galvão Coutinho
Co-orientador


Prof. Flávio Menezes de Aguiar


Prof. Fernando Jorge S. Moraes

Dedico a Deus, meus pais, Heleninha e Gabi.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e depois a todos que contribuíram para estarmos aqui realizando parte de nossa existência.

Na minha humilde existência, escolhi, por sorte, trabalhar com um professor cuja sala se encontra a largos passos no final de um corredor, justamente onde o edifício se separa (é fácil perceber que se trata de um lugar um tanto especial). Digo sorte, pois o que me levou até ele foi um bendito de um colóquio apresentado por ele numa sexta-feira aparentemente sem graça. Desde então, me apaixonei por uma estória de fluidos, e decidi que queria ouvir mais. Foi então que Américo participou ativamente da minha formação acadêmica, não parando por aí, é claro. Américo me apresentou à ciência, assim como à dedicação e persistência necessárias para um trabalho como este. Agradeço profundamente pela oportunidade de trabalhar com uma pessoa que exalta empolgação científica e ama o que faz. Com absoluta certeza, minha vida “científico-pessoal” seria totalmente diferente sem sua participação ativa: Obrigado Américo!

Gostaria de agradecer a Sérgio Coutinho pelo seu incrível curso de Eletrodinâmica (totalmente não-trivial!!!), mostrando-me que podemos agüentar muito mais do que imaginamos. Agradeço ainda pelo seu apoio excepcional durante o curso de mestrado, sempre orientando e incentivando a minha carreira científica. Agora entendo perfeitamente, pois afinal de contas “faz parte” ...

Não poderia me esquecer do importante papel a ser desempenhado pelos membros da banca examinadora desta dissertação: Moraes e Flávio. Quero agradecer antecipadamente a vocês pela paciência e dedicação que foi oferecida. Aproveito a oportunidade para deixar registrado o quanto confio em seus julgamentos. Agradeço a Flávio pelos seus bem humorados cursos de quântica que me ensinaram a usar pelo menos uns dez livros de referência (gostei e aprendi muito). Em especial, agradeço a Moraes pela sua intensa ajuda e seu suporte incondicional mesmo estando longe. Lembrando ainda que depois da defesa podemos comemorar nas alturas, saltando de pára-quedas ...

Agradeço a Universidade Federal de Pernambuco, ao departamento de Física pelos cursos de excelente nível ao qual fui aluno durante a graduação e pós-graduação, e a todos os fun-

cionários (Paulo, Sara, Ivo, Claudesio, Paulinha, Aziel, etc.). Agradeço ainda ao CNPq pelo suporte financeiro e, em especial, a pós-graduação do DF. Agradeço a Rita pelo seus ensinamentos na pós-graduação. A todos muito obrigado.

Agradeço a todos meus amigos, e em especial gostaria de formalizar um caso de amor conjunto entre eu, Menezes, Massan e Frei Roberto. Não poderia me esquecer de vocês e obrigado por serem amigos tão dedicados. Um forte abraço para: Gersinho, Marion, Erms, Danievertton, Leo, Karlla, Priscila, Bernardo, Sérgio (cubano), Caio, Chefe, Cioba, Paty, André. Obrigado pelo carinho.

Aos meus pais minha profunda gratidão: amo vocês. Agradeço ao meu pai pelas palavras de conforto nas horas certas, e a minha mãe pela dedicação e amor em todos os momentos. Agradeço a Heleninha pelas infinitas vezes que abriu a porta, fez barulho e veio me “arretar”: Cabeça, te amo muito. Agradeço a minhas avós que estão rezando por mim: Haydee e Terezinha, bem como meus avôs que já estão em outro “plano”: vô Gadêlha e Milton.

E finalmente, gostaria de agradecer ao amor da minha vida, Gabizinha, pela sua dedicação, e principalmente pela paciência de me agüentar neste período. Saiba que você é extraordinária e esbanja qualidades. Suas atitudes e palavras de conforto me trouxeram a calma necessária para concluir este trabalho. É claro que de vez em quando “forçava a barra”, mas foi lindo... Obrigado por fazer parte da minha vida - te amo.

Aproveito para agradecer aos meus sogros, Niedja e Sérgio, pelo carinho incondicional, e principalmente pela assistência sempre presente - À vocês só tenho a agradecer. Um forte abraço especial para: Rafael, Paula, Ronaldinho, Roberta, Carlinha, Picuinha, Andressa, Felipe, e a toda a família de Gabi.

... Seja, pois, o motivo de tuas ações e dos teus pensamentos sempre o cumprimento do dever, e faz as tuas obras sem procurares recompensa, sem te preocupares com o teu sucesso ou insucesso, com teu ganho ou o teu prejuízo pessoal. Não caias, porém, em ociosidade e inação, como acontece facilmente aos que perderam a ilusão de esperar uma recompensa das suas ações. ...

—BAGHAVAD-GITA

RESUMO

Um número crescente de trabalhos teóricos e experimentais tem investigado variados aspectos da formação de padrões de interface em fluidos confinados na célula de Hele-Shaw girante. Entretanto, apenas uma pequena parte desses trabalhos considera a influência da força de Coriolis. Estudos que incluem o efeito da força de Coriolis estão em sua maioria restritos ao limite de alto contraste de viscosidade (fluido viscoso em contato com fluido de viscosidade desprezível), restringindo-se a aspectos puramente lineares (estudo analítico), ou a estágios extremamente avançados da dinâmica (por meio de complicadas simulações numéricas). Neste trabalho, abordamos o problema analiticamente, através de uma teoria de modos acoplados. Usamos uma lei de Darcy modificada, onde o efeito Coriolis é introduzido em sua forma exata na equação de Navier-Stokes. Sem impor nenhuma restrição ao contraste de viscosidade A (diferença de viscosidade adimensional), vamos além do estágio puramente linear, e examinamos a ação de efeitos não-lineares na formação dos padrões de interface. Os resultados indicam que quando o efeito Coriolis é levado em conta, surge uma interessante relação entre o número de Reynolds Re e o contraste de viscosidade A . Tal inter-relação proporciona importantes mudanças na estabilidade e nas características morfológicas dos padrões formados. Finalmente, comparamos nossa abordagem de modos acoplados com outros modelos teóricos já propostos na literatura.

Palavras-chave: Formação de padrões, força de Coriolis, célula de Hele-Shaw girante.

ABSTRACT

A growing number of experimental and theoretical works has been addressing various aspects of the viscous fingering formation in rotating Hele-Shaw cells. However, only a few of them consider the influence of Coriolis forces. The studies including Coriolis effects are mostly restricted to the high viscosity contrast limit, and rely either on purely linear stability analyses or intensive numerical simulations. We approach the problem analytically, and use a modified Darcy's law including the exact form of the Coriolis effects to execute a mode-coupling analysis of the system. By imposing no restrictions on the viscosity contrast A (dimensionless viscosity difference) we go beyond linear stages, and examine the onset of nonlinearities. Our results indicate that when Coriolis effects are taken into account, an interesting interplay between the Reynolds number Re and A arises. This leads to important changes in the stability and morphological features of the emerging interfacial patterns. We contrast our mode coupling approach with previous theoretical models proposed in the literature.

Keywords: Pattern formation, Coriolis force, rotating Hele-Shaw cell.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
1.1 O problema de Saffman-Taylor	1
1.2 Equações básicas	4
1.2.1 A lei de Darcy	5
1.2.2 Condições de contorno na interface	9
1.3 A geometria radial	10
1.4 Forças no referencial não-inercial	11
1.5 Roteiro da dissertação	14
Capítulo 2—A célula de Hele-shaw girante	16
2.1 Descrição física e breve revisão da literatura	16
2.2 Dinâmica da competição dos dedos na célula de Hele-shaw girante	20
2.2.1 A abordagem fracamente não-linear	20
2.2.2 A função competição	22
2.3 Simulações numéricas do fenômeno da competição	26
Capítulo 3—Efeito Coriolis na célula de Hele-shaw girante	30
3.1 Preliminares	30
3.2 Lei de Darcy generalizada	32
3.3 Equação diferencial de modos acoplados	35
3.4 Evolução linear	39
3.4.1 Taxa de crescimento linear	39
3.4.2 Modulação de fase	42
3.5 Evolução fracamente não-linear	44
3.6 Formalismo “vortex-sheet”	47
3.7 Comparação com o modelo de Schwartz	53

SUMÁRIO	x
Capítulo 4—Conclusões e perspectivas	57
Apêndice A—Lei de Darcy generalizada	61
Apêndice B—Equação de movimento para os modos sub-harmônicos	65
Apêndice C—Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells.	68
Apêndice D—Dynamics of viscous fingers in rotating Hele-Shaw cell with Coriolis effects.	69
Referências Bibliográficas	70

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw em (a) e da instabilidade de Saffman-Taylor em (b).	2
1.2	A elevada diferença de viscosidade entre os fluidos e a largura estreita do canal fazem com que apenas três dedos compitam entre si, até que um só exista. Partes (a), (b) e (c) representam tempos sucessivos do mesmo experimento. . .	3
1.3	Três momentos da evolução típica da interface entre ar (em branco) e óleo (em cinza) na célula de Hele-Shaw retangular. Simulação proporcionada por E. Pauné, M Siegel e J. Casademunt	4
1.4	Representação esquemática da interface fluido-fluido na célula de Hele-Shaw horizontal.	5
1.5	Figura esquemática da célula radial com taxa de injeção constante Q	10
1.6	Série temporal e estágio final do padrão típico de dedos formados na célula de Hele-Shaw radial. O fluido menos viscoso é injetado contra o fluido mais viscoso, de um pequeno orifício no centro da célula, na direção perpendicular ao plano da página.	11
1.7	Direções da força centrífuga e de Coriolis quando a velocidade aponta na direção radial.	13
1.8	Exemplo do efeito da força de Coriolis na formação de furacões na superfície terrestre.	13
2.1	Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante.	16
2.2	Fotos de experimentos da evolução temporal, em segundos, da formação de padrões no limite de baixo contraste de viscosidade [22] na célula de Hele-Shaw girante.	17
2.3	Sequência de fotos para experimento com baixo contraste de viscosidade [22] na célula de Hele-Shaw girante.	17

2.4	Sequências temporais digitalizadas da interface [20]: (a) $R_0=81\text{mm}$, $b=0.81\text{mm}$ e $\Omega=60\text{rpm}$; (b) $R_0=83\text{mm}$, $b=0.5\text{mm}$ e $\Omega=60\text{rpm}$	18
2.5	Padrão experimental típico formado no limite de elevada tensão superficial na célula de Hele-Shaw girante. Óleo é o fluido interno e o ar é o externo [20]. . .	18
2.6	Simulação numérica para evolução temporal da interface quando $A = -0.4$ (baixo contraste de viscosidade) de uma gota inicialmente circular na célula de Hele-Shaw girante [22]. Note a incrível semelhança deste resultado numérico com os padrões obtidos pelo experimento na Fig. 2.2.	19
2.7	Ilustração esquemática do fenômeno da competição entre os dedos: (a) $C(n) > 0$ e (b) $C(n) < 0$	23
2.8	$C(n)$ dado pela Eq. (2.8) em função do contraste de viscosidade A , para três valores diferentes de tensão superficial B e dois valores diferentes para o espaçamento entre as placas b . Note que em (c), curva cinza clara, existem na verdade duas curvas (a curva tracejada ficou sobreposta).	24
2.9	Experimento numéricos mostrando a formação típica de dedos na célula girante para três valores do contraste de viscosidade [25].	27
2.10	Coordenada radial (r/R) da extremidade de cada dedo n (n é um número inteiro rotula os dedos) na interface, quando $B = 5.0 \times 10^{-4}$ e (a) $A = -1$, (b) $A = 0$, e (c) $A = +1$	29
3.1	Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante ilustrando o efeito da força de Coriolis.	32
3.2	Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função de n , para $A = -1, 0, +1$, e três valores diferentes de Re : (a) 0, (b) 0.25 e (c) 1. As cores se referem a diferentes valores do contraste de viscosidade: $A = -1$ (preto), $A = 0$ (cinza escuro) e $A = +1$ (cinza claro). Note que escondido na curva cinza clara em (a) existem na verdade três curvas coincidentes (as outras duas estão sobrepostas).	40
3.3	Taxa de crescimento máxima $\lambda(n_{max})$ em função do número de Reynolds Re , para $A = -1$ (preto), $A = 0$ (cinza escuro) e $A = +1$ (cinza claro).	42
3.4	Modulação de fase $\omega(n_{max})$ em função de A , para cinco valores de $Re = 1, 2, 3, 4, 5$. Cores mais escuras se referem a maiores valores de Re . Para melhor visualização, os pontos pretos representam os máximos de cada curva	43
3.5	A^* para diversos números de Reynolds.	44

3.6	Função competição $C(n)$ em termos do contraste de viscosidade A , e cinco valores diferentes do número de Reynolds: $Re = 0, 0.4, 1, 2.5, 5$. Cores escuras se referem a valores de Re altos.	46
3.7	Representação esquemática da “vortex-sheet”.	48
3.8	Gráficos dos parâmetros α , β e δ em função do contraste de viscosidade A para três valores de Re : 0, 2.5, 5. As curvas mais escuras representam valores de Re cada vez maiores.	50
3.9	$\bar{A}_\alpha$ em função de Re (curva tracejada). Os pontos são as raízes $\bar{A}(Re)$ da função competição dados pela solução de $C(n) = 0$ [veja Eq. (3.30)]	52
3.10	Erro percentual Γ em função de Re , para diferentes valores de A . Cores mais escuras se referem a maiores valores de A	54
3.11	Funções competição $C(n)$ (curva preta contínua) e $C(n)_S$ (curva preta tracejada) em termos de A , para três valores diferentes de Re : (a) 0.25, (b) 0.92 e (c) 2.84.	55
3.12	Diferença $C(n)_S - C(n)$ em função de A , para três valores diferentes de Re : (a) 0.25, (b) 0.92 e (c) 2.84. Cores mais escuras se referem a maiores valores de Re	56
4.1	Esquema da célula de Hele-Shaw girante com taxa de injeção Q	60

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 O PROBLEMA DE SAFFMAN-TAYLOR

Não é difícil saber por que a natureza promove curiosidade e fascínio em cientistas e leigos. Com grande exuberância em suas formas e cores, o mundo natural gera ricos padrões geométricos de extrema complexidade e de grande importância em aplicações tecnológicas [1, 2, 3]. No nível prático, existem diversas aplicações que vão da extração de petróleo em poços, ao crescimento de superfícies e agregação de partículas coloidais. Neste contexto, focalizaremos o nosso estudo num problema muito peculiar da hidrodinâmica: o problema de Saffman-Taylor.

A análise do fluxo de um fluido viscoso em três dimensões é bastante difícil, e em muitos casos, impossível de se tratar analiticamente. O movimento de um fluido viscoso é extremamente complexo e uma visão precisa do que ocorre em seu interior é ainda um tanto obscura. Entretanto, pouco antes da virada do século XX o engenheiro naval inglês Henry S. Hele-Shaw criou uma maneira de simplificar o fluxo tridimensional, confinando o fluido em uma fina camada, a chamada célula de Hele-Shaw [4, 5]. A célula de Hele-Shaw consiste de duas placas de vidro planas e paralelas, separadas por um espaço estreito entre elas, permitindo que o fluido escoe no seu interior (veja Fig 1.1(a)). Hele-Shaw estava interessado em estudar o fluxo de água ao redor do casco de navios, e através de seu dispositivo foi possível abordar mais quantitativamente tal problema de mecânica de fluidos.

Até a metade do século passado, o dispositivo era meramente usado como uma forma conveniente de observar o fluxo de um fluido confinado espacialmente. Foi então que, por volta de 1956, Sir Geoffrey Taylor, renomado físico britânico por seus trabalhos em dinâmica de fluidos, e Philip G. Saffman, da Universidade de Cambridge, reconheceram que a célula de Hele-Shaw poderia ser usada para modelar um importante problema de fluxo na indústria de extração de petróleo. É comum em regiões petrolíferas o óleo ficar preso em materiais porosos, impedindo o bombeamento direto do óleo para fora, como é feito normalmente em um poço de petróleo. Uma solução é bombear água no meio poroso para forçar o óleo a formar um poço, para então, recuperar o petróleo bombeando-o diretamente. Em pouco tempo descobriram que esta solução podia ser um pouco frustrante quando a água se propagava de maneira não-

trivial, deixando grande quantidade de petróleo para trás. Este problema tornava a recuperação do petróleo bastante ineficiente. Saffman e Taylor visualizaram o problema de uma maneira mais geral, perguntando-se como dois fluidos se comportariam quando um deles (como a água) com baixa viscosidade “empurra” outro de viscosidade elevada (como óleo). Em sua análise, Saffman e Taylor encontraram que a interface entre os fluidos pode se tornar instável, formando os chamados dedos viscosos (veja Fig 1.1(b)).

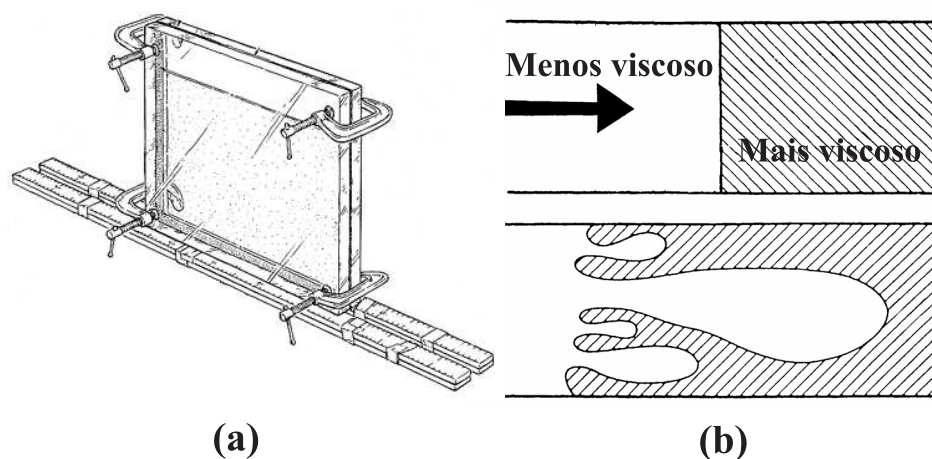


Figura 1.1 Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw em (a) e da instabilidade de Saffman-Taylor em (b).

Os primeiros experimentos realizados por Saffman e Taylor em 1958 foram realizados numa célula de Hele-Shaw muito estreita, assemelhando-se a um canal (ver Figs. 1.2), preenchida de um lado com o fluido de baixa viscosidade e do outro lado com o fluido de viscosidade muito mais elevada. Quando o fluido *menos* viscoso era lentamente forçado contra o fluido *mais* viscoso, a interface não perturbada (linha reta) entre eles se movia lentamente e permanecia inalterada. Entretanto, quando a velocidade da interface excedia um certo valor crítico, a interface tornava-se instável, quebrando-se em forma de “dedos” que se tornavam cada vez mais acentuados com o tempo. A interface logo se assemelha a uma luva: dedos do fluido menos viscoso invadindo o fluido mais viscoso. A instabilidade da interface e o crescimento dos dedos se originam da diferença entre as viscosidades dos dois fluidos, que neste experimento era máxima. Por outro lado, a tensão superficial se opõe à instabilidade, pois tenta reduzir a área da superfície entre os fluidos. Mesmo assim, os dedos serão formados se a interface propagar-se rápida o suficiente. Exemplos típicos de dedos são mostrados nas Figs. 1.2 .

Saffman e Taylor também verificaram a aparência dos dedos formados em canal estreito vertical sob a ação da gravidade. Usando o ar como o fluido menos viscoso e glicerina como

o mais viscoso, eles injetaram ar no topo da célula contra a glicerina que estava em baixo na célula. A velocidade da interface entre o ar e a glicerina era suficiente para a superfície entre os fluidos se tornasse instável, gerando “dedos viscosos” de ar que penetravam na glicerina. Surpreendentemente, apenas um dedo dominava a dinâmica, enquanto os outros eram deixados para trás, definindo um estado estacionário para o problema. Não menos surpreendente, também verificou-se que a largura do dedo dominante eventualmente era a metade da largura do estreito canal.

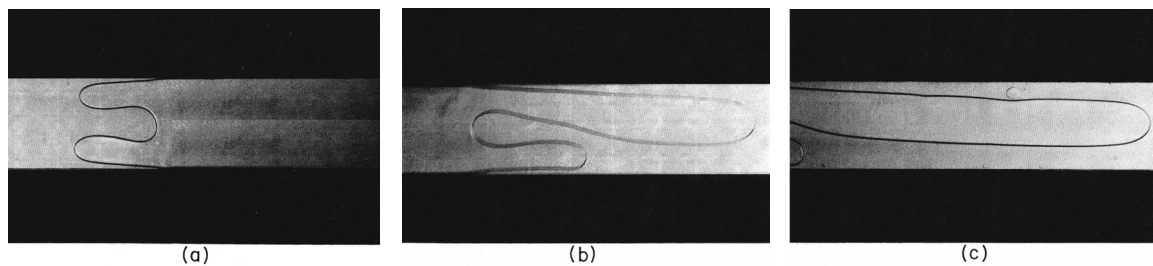


Figura 1.2 A elevada diferença de viscosidade entre os fluidos e a largura estreita do canal fazem com que apenas três dedos compitam entre si, até que um só exista. Partes (a), (b) e (c) representam tempos sucessivos do mesmo experimento.

Quando a natureza instável da interface foi finalmente verificada por Saffman e Taylor, o fluxo na célula de Hele-Shaw tornou-se popular e atraiu muita atenção de pesquisadores para este novo problema. Analisando grande variedade de fluidos, estudiosos descobriram que a interface instável dá origem a várias formas surpreendentes. Atualmente a célula de Hele-Shaw é vista como um dispositivo elegante para estudar formação de padrões na interface, como a gerada pela instabilidade de Saffman-Taylor. Experimentos e teoria focalizaram majoritariamente em dois tipos básicos de geometria da célula de Hele-Shaw: a retangular [6] e a radial [7]. Outras geometrias também foram analisadas recentemente como as células esférica, cilíndrica e cônica por Miranda e colaboradores [8, 9, 10, 11, 12].

Atualmente, a célula de Hele-Shaw retangular é usada com larguras maiores do que aquelas usadas por Saffman-Taylor, e fluido menos viscoso é injetado contra o mais viscoso. A evolução inicial da interface na célula retangular segue as previsões teóricas da estabilidade linear [6, 13, 14]. Por outro lado, quando surgem as primeiras deformações na superfície entre os fluidos, os modos instáveis crescem e se tornam acoplados no regime fracamente não-linear da evolução temporal. E finalmente, quando o sistema se encontra em estágios mais avançados e complicados da dinâmica, caracterizado pela estrutura de dedos, os efeitos não-lineares são dominantes. Na instabilidade de Saffman-Taylor, inicialmente ocorre a formação na interface

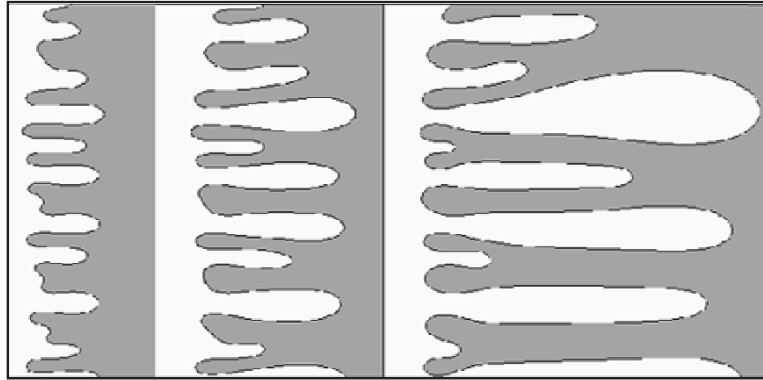


Figura 1.3 Três momentos da evolução típica da interface entre ar (em branco) e óleo (em cinza) na célula de Hele-Shaw retangular. Simulação proporcionada por E. Pauné, M Siegel e J. Casademunt

de uma pequena ondulação, provocando um aumento do gradiente de pressão e da velocidade local na interface. Como a velocidade de um ponto na interface é proporcional ao gradiente de pressão local (veremos isso mais adiante), os dedos dominantes (“fastest growing mode”) crescem mais rápido do que os outros, suprimindo o crescimento dos dedos menores na sua vizinhança, dando origem a uma *competição* entre eles. Por outro lado, o efeito da tensão superficial tende a reduzir a pressão nas regiões muito curvadas da interface, e então os dedos menores e mais finos são forçados para trás. O resultado é a formação de estrutura de dedos como mostrados nas Fig. 1.3. Entretanto, quando a diferença entre as viscosidades dos fluidos é máxima e a célula de Hele-Shaw muito estreita (canal fino), a competição entre os dedos viscosos gera a estrutura de apenas um dedo, chegando, então, ao estágio estacionário da dinâmica (Fig. 1.2).

1.2 EQUAÇÕES BÁSICAS

O objetivo principal desta seção é apresentar a lei de Darcy e discutir as condições de contorno usuais para a célula de Hele-Shaw. A lei de Darcy é a peça principal desta dissertação, e estaremos mais tarde introduzindo importantes modificações nesta lei, obtendo assim uma lei de Darcy generalizada. Portanto, para nossa análise fracamente não-linear, a lei de Darcy sempre é o principal ponto de partida.

Em 1856, Henry Darcy investigou o fluxo de água em filtros de areia verticais e homogêneos usados para filtrar a água nas fontes públicas da cidade de Dijon, França [15]. A lei de Darcy foi primeiro apresentada como uma relação empírica baseada nos experimentos de fluxos estáveis em coluna vertical de areia. Foi descoberto empiricamente que a velocidade do fluxo

era proporcional aos gradientes de pressão aos quais o fluido estava submetido. A versão efetivamente bidimensional do problema original de Darcy parece ser particularmente acessível e pode ser estudada experimentalmente usando a célula de Hele-Shaw. Curiosamente, a célula de Hele-Shaw tem um comportamento que pode ser descrito pelo mesmo conjunto de equações que descrevem o fluxo bidimensional no meio poroso [13, 14].

1.2.1 A lei de Darcy

Considere o movimento de dois fluidos imiscíveis no espaço estreito b na célula de Hele-Shaw retangular, como mostrado na Fig 1.4. Vamos assumir que b é o menor comprimento existente e, portanto, o sistema pode ser considerado efetivamente bidimensional. A pressão é aplicada nas extremidades, empurrando o fluido 1 (menos viscoso) no fluido 2 (mais viscoso). A célula tem uma largura L e o fluxo efetivamente bidimensional acontece no plano $x - y$.

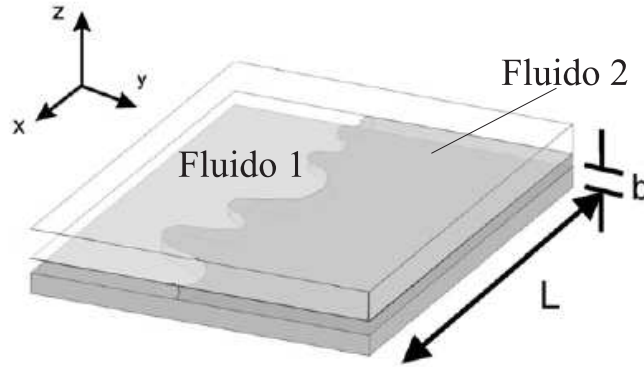


Figura 1.4 Representação esquemática da interface fluido-fluido na célula de Hele-Shaw horizontal.

A conservação de massa dos fluidos é expressa pela equação da continuidade [17]

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{u}_j$ denota a velocidade tridimensional e ρ_j a densidade para os fluidos $j = 1, 2$. Vamos considerar que fluidos são incompressíveis, ou seja, ρ_j não varia na posição nem no tempo. Neste caso, a equação da continuidade implica em

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0. \quad (1.2)$$

O movimento dos dois fluidos e também da interface entre eles é descrito pela equação de Navier-Stokes [16, 17], que nada mais é do que a segunda lei de Newton aplicada aos fluidos.

Se representarmos $d\mathbf{u}_j/dt$ como a aceleração de um elemento de fluido que se move no espaço, a lei de Newton torna-se

$$\rho_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{f}_{p_j} + \mathbf{f}_{v_j}, \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{f}_{p_j}$ e $\mathbf{f}_{v_j}$ representam respectivamente as forças provenientes da pressão hidrodinâmica e estresses viscosos normalizadas pela unidade de volume. A força que atua em um dado elemento de superfície ds , exercida pela pressão p_j , é dada por $p_j \hat{\mathbf{n}} ds$. Desta forma, a força total proveniente da pressão hidrodinâmica é [16]

$$-\int_S p_j \hat{\mathbf{n}} ds = -\int_V \nabla p_j dv, \quad (1.4)$$

onde usamos o teorema da divergência para uma função escalar (o sinal negativo surge por conta de $\hat{\mathbf{n}}$ apontar para fora de S). Temos, assim, que a contribuição da pressão, normalizada pela unidade de volume, que atua no fluido é $\mathbf{f}_{p_j} = -\nabla p_j$. Por outro lado, as forças viscosas são consequência de uma "fricção interna" devida a resistência à deformação do fluido em movimento. Tal força depende do tensor de estresses viscosos $\mathbf{T}_j$, sendo dada por $\mathbf{f}_{v_j} = \nabla \cdot \mathbf{T}_j$ [16, 17]. Os estresses viscosos estão relacionados com a velocidade do fluido através da *relação constitutiva*, que para fluidos incompressíveis é [17]

$$\mathbf{T}_j = \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T], \quad (1.5)$$

onde η_j representa a viscosidade do fluido $j = 1, 2$. Reescrevendo a aceleração na Eq. (1.3) e calculando o divergente da Eq. (1.5), obtemos

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j. \quad (1.6)$$

O primeiro termo do lado direito na Eq. (1.6) é a força provocada pelo gradiente de pressão, já o segundo termo provém das forças de atrito entre os elementos do fluido e é proporcional à viscosidade. A inclusão de outras forças eventualmente experimentadas pelos fluidos (gravitacionais, magnética, centrífuga, etc.) contribuem com termos adicionais no lado direito da Eq. (1.6).

Podemos obter a lei de Darcy a partir das Eqs. (1.2) e (1.6). Primeiro, vamos considerar que o espaçamento b entre as placas é pequeno suficiente para que o fluxo na célula de Hele-Shaw seja completamente determinado pelo balanço entre as forças viscosas e da pressão. Portanto,

para fluxos em que os valores para a velocidade do fluxo sejam pequenos, os termos inerciais $[\partial \mathbf{u}_j / \partial t + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j]$ podem ser desprezados. Para este fluxo, como o fluido é incompressível e o espaço entre as placas é muito pequeno, assumimos que na Eq. (1.6), $\mathbf{u}_j$ varia mais intensamente com z do que x e y , considerando ainda que a pressão é aproximadamente constante na direção $\hat{\mathbf{z}}$. Sob estas condições, obtemos a equação de Navier-Stokes para as componentes da velocidade u_{jx} e u_{jy} :

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial x}, \quad (1.7)$$

e

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial y}, \quad (1.8)$$

onde $u_{jz} = 0$, pois p_j é independente de z .

Para resolvermos as Eqs. (1.7) e (1.8), assumimos a condição de não deslizamento do fluido nas paredes das placas (“no-slip boundary condition”), ou seja, o líquido fica “preso” nas paredes sólidas e então a velocidade se anula nas placas: $\mathbf{u}_j = 0$ em $z = 0$ e $z = b$. Então, a solução para as Eqs. (1.7) e (1.8) pode ser escrita numa forma mais compacta

$$\eta_j \mathbf{u}_j(x, y, z) = \frac{1}{2} z(z - b) \nabla p_j(x, y). \quad (1.9)$$

Como agora a velocidade é quadrática em z , o perfil de velocidade é denominado “parabólico”.

Calculando a média transversal da Eq. (1.9) com relação à coordenada z , definida por

$$\mathbf{v}_j(x, y) \equiv \frac{1}{b} \int_0^b \mathbf{u}_j(x, y, z) dz, \quad (1.10)$$

obtemos a equação para velocidade média (efetivamente bidimensional) dos fluidos

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (1.11)$$

a chamada lei de Darcy. Note que $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(x, y)$ e $p_j = p_j(x, y)$ são respectivamente as médias da velocidade e da pressão com relação a z .

Nesta dissertação, vamos apenas considerar fluxos irrotacionais, ou seja, o movimento dos fluidos estão totalmente livres da vorticidade. Entretanto, em dinâmica de fluidos um fluxo pode ser considerado irrotacional, mas ainda apresentar pequena vorticidade não nula em regiões finitas e localizadas. O domínio rotacional é de baixa dimensionalidade e muitas vezes restrito apenas a uma “folha de vorticidade” (ou, “vortex-sheet”). Para o fluxo na célula de Hele-Shaw,

a região de vorticidade não nula surge da descontinuidade da velocidade tangencial entre os fluidos, existindo apenas na fina interface entre os fluidos. Veremos mais adiante (capítulo 3) que este é o ponto de partida para o método “vortex-sheet”. Portanto, como aqui nosso fluxo é irrotacional, temos que

$$\nabla \times \mathbf{v}_j = 0. \quad (1.12)$$

Podemos agora escrever a velocidade como o gradiente de um potencial escalar, dado por

$$\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j, \quad (1.13)$$

onde ϕ_j representa o potencial de velocidade para cada fluido.

Substituindo a equação (1.13) na (1.11) e integrando, obtemos a lei de Darcy para os potenciais de velocidade

$$\phi_j = \frac{b^2}{12\eta_j} p_j. \quad (1.14)$$

Usando ainda a condição de incompressibilidade para os dois fluidos dada pela Eq. (1.2), concluímos que o potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi_j = 0. \quad (1.15)$$

À primeira vista, solucionar a equação de Laplace (1.15) parece ser muito simples. Entretanto, este não é bem o caso para o problema em questão. A dificuldade de resolver a equação de Laplace está na existência de uma interface que se move com o tempo, e envolve uma forma funcional desconhecida. Este é o chamado “*free boundary problem*” que, em geral, não é possível resolver analiticamente para uma forma fechada. O problema é especificado por duas condições de contorno na interface, e será o tema da próxima seção.

Podemos agora usar a lei de Darcy (1.11) para melhor compreender a origem física da instabilidade de Saffman-Taylor. Para simplificar a discussão vamos nos concentrar na situação em que a diferença de viscosidade entre os dois fluidos é muito grande ($\eta_2 \gg \eta_1$). Ao injetarmos o fluido 1 (menos viscoso) no fluido 2 (mais viscoso) a interface torna-se *instável*. Porém, se invertermos o sentido do fluxo, ou seja, se injetarmos o fluido mais viscoso contra o fluido menos viscoso, obteremos uma situação *estável* para a instabilidade de Saffman-Taylor. À primeira vista, tal situação pode causar um certo espanto, visto que a única diferença entre estes dois casos descritos é o sentido do fluxo. Analisando de maneira cuidadosa a lei de Darcy (1.11) e

lembrando que os fluidos são incompressíveis, podemos concluir que o campo de pressão também obedece à equação de Laplace. Desta forma, o fluxo dá origem a um gradiente de pressão intenso no fluido mais viscoso (fluido 2), enquanto que o gradiente de pressão no fluido menos viscoso (fluido 1) é muito menos intenso. Na verdade, o campo de pressão no fluido menos viscoso pode ser considerado como aproximadamente constante (note que na Eq. (1.11) ∇p_j é proporcional a η_j). Conseqüentemente, quando o fluido mais viscoso desloca o menos viscoso, uma dada perturbação na interface tende a aumentar (já que no fluido mais viscoso o gradiente de pressão aumenta), levando à instabilidade da interface. Por outro lado, quando o fluido mais viscoso empurra o fluido menos viscoso, a perturbação encontra uma espécie de “barreira” que se opõe à instabilidade. Tal oposição à instabilidade é provocada pela ausência de um gradiente de pressão (pressão constante) no fluido menos viscoso, resultando assim numa situação estável para o problema de Saffman-Taylor.

1.2.2 Condições de contorno na interface

Para completar a descrição da lei de Darcy, é necessário obter as condições de contorno na interface entre dois fluidos imiscíveis [19, 20]:

- (i) A condição de contorno para diferença de pressão.

A descontinuidade da pressão hidrodinâmica entre dois fluidos imiscíveis é provocada pela tensão superficial entre os fluidos e pela forma não-trivial da interface. A tensão superficial reflete as forças microscópicas entre os átomos e moléculas na interface [18]. No equilíbrio, a pressão no sistema é uniforme, mas a existência de gradientes de pressão indica que o sistema não está em equilíbrio. Deste modo, para o avanço da interface deve existir uma diferença de pressão entre os fluidos. Esta diferença de pressão na interface é devido à tensão superficial σ e à curvatura da superfície entre os fluidos κ :

$$(p_1 - p_2) = \sigma \kappa. \quad (1.16)$$

A Eq. (1.16) expressa a condição de contorno para pressão na interface fluido-fluido.

- (ii) A condição de contorno cinemática

O movimento da interface é acoplado com o movimento dos fluidos como um todo. Este acoplamento é expresso pelo fato de que a derivada temporal da posição da interface é equivalente às velocidades dos fluidos na interface, definindo assim a condição de contorno ci-

nemática. Ou seja, a condição cinemática nada mais é do que a continuidade da componente normal da velocidade através da interface

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (1.17)$$

onde $\mathbf{v}_j$ é dado pela Lei de Darcy Eq. (1.11) e $\hat{\mathbf{n}}$ denota o vetor normal unitário à interface.

1.3 A GEOMETRIA RADIAL

A célula de Hele-Shaw radial é um dispositivo formado por duas placas planas e paralelas com um espaçamento b entre elas, mas diferentemente da célula retangular que se injeta o fluido na direção das placas, na célula radial o fluido é injetado por um pequeno orifício na placa de cima como mostrado na Fig. 1.5. Desta forma, o fluido 1 menos viscoso é introduzido no centro da célula, que foi previamente preenchida com o fluido 2 mais viscoso. Tal injeção é realizada a uma taxa constante Q (unidade de área por tempo) [7]. Inicialmente, a interface é circular, mas quando a “bolha” se desenvolve, a interface começa a ficar ondulada e os “dedos viscosos” crescem. Enquanto o tamanho da interface inicialmente circular aumenta, os dedos viscosos se espalham e suas extremidades ficam mais rombudas, assemelhando-se à forma de um “ventilador”. Posteriormente, os dedos começam a se dividir na ponta, de tal forma que os dedos maiores “inibem” os menores e o padrão se desenvolve assimetricamente, gerando uma competição entre os dedos de comprimentos diferentes (veja Fig. 1.6).

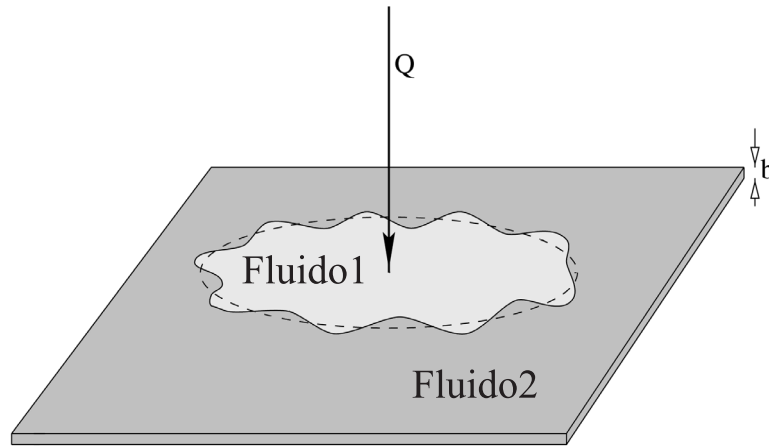


Figura 1.5 Figura esquemática da célula radial com taxa de injeção constante Q .

Os dois mecanismos básicos para o processo de crescimento dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw radial são: a bifurcação e a competição entre os dedos. A bifurcação acon-

tece quando um dedo se divide em dois e continua este processo em regimes não-lineares da dinâmica. Já na competição, como visto anteriormente, ocorre uma variabilidade do comprimento dos dedos com o tempo, iniciando-se uma “disputa” entre eles. Em contraste ao que acontece na célula retangular (em que apenas existe a competição), na geometria radial os dedos competem e bifurcam, sendo a instabilidade ainda provocada pela diferença de viscosidade. Vale a pena salientar que a diferença entre a célula retangular e a célula radial é primordialmente de natureza geométrica (propriedades de simetria do fluxo), o que é suficiente para o surgimento de novos efeitos na formação de padrões de dedos viscosos: (i) a interface é sempre assimétrica por conta da distinção entre a área de dentro (fluido 1 interno à interface) e de fora (fluido 2 externo à interface), (ii) o fluxo radial apresenta múltiplos estágios de instabilidade que nunca alcançam regimes estacionários. Fica fácil perceber que uma simples variação do problema retangular acarretou em novos e importantes efeitos não-lineares na célula radial. E ao contrário das expectativas, os padrões são notadamente distintos apesar de terem a mesma origem: a diferença de viscosidade.

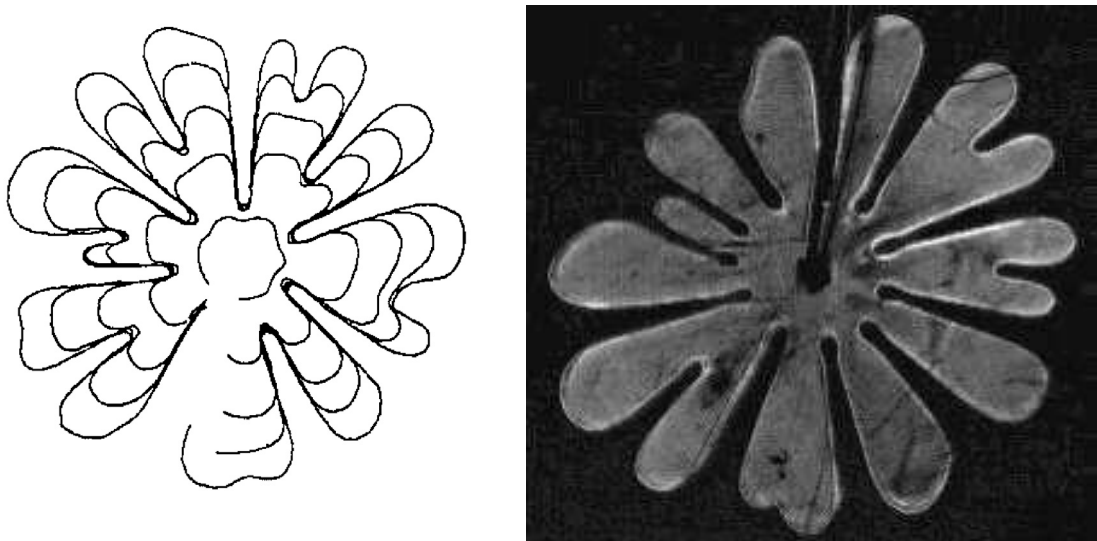


Figura 1.6 Série temporal e estágio final do padrão típico de dedos formados na célula de Hele-Shaw radial. O fluido menos viscoso é injetado contra o fluido mais viscoso, de um pequeno orifício no centro da célula, na direção perpendicular ao plano da página.

1.4 FORÇAS NO REFERENCIAL NÃO-INERCIAL

Uma modificação bastante peculiar da célula de Hele-Shaw radial é obtida se, ao invés de injetarmos o fluido menos viscoso no mais viscoso através de um orifício, girarmos a célula

com velocidade constante Ω em torno do seu eixo axial e perpendicular às placas: a chamada célula de Hele-Shaw girante [19, 20, 21, 22]. Neste novo dispositivo os fluidos experimentaram as forças inerciais que surgem no referencial girante, provocando, deste modo, deslocamentos nos fluidos. Por exemplo, os fluidos sofrerão a influência da força centrífuga que será mais intensa para os fluidos de densidades mais elevadas. Portanto, colocamos no centro da célula girante o fluido *mais* denso que estará cercado por um fluido *menos* denso. Ao girar a célula, o fluido de maior densidade “empurra” o de menor densidade deformando a interface entre eles. É importante salientar que o sistema agora é regido pela diferença de *densidade* entre os fluidos, uma mudança fundamental nos sistemas radiais anteriores vistos na seção 1.3, em que os padrões se formavam apenas pela diferença de *viscosidade*. Neste sentido, a célula de Hele-Shaw girante pode ser vista como o análogo radial para a célula retangular quando a instabilidade é provocada pela gravidade (o fluido mais denso é colocado no topo da célula retangular), com uma importante diferença: agora temos uma “gravidade variável” na direção radial, ajustada pela velocidade angular Ω .

Para sabermos o que acontece na célula de Hele-Shaw girante, temos que entender bem o papel das forças inerciais que aparecem neste referencial. A relação entre qualquer vetor, $\mathbf{L}$ que varia no tempo em um sistema de coordenadas fixo (f), e um sistema (g) que gira com velocidade angular constante Ω é [17, 23]

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_g + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (1.18)$$

Em particular, podemos aplicar a Eq. (1.18) ao vetor $\mathbf{u}_j$ (velocidade de cada fluido $j = 1, 2$), obtendo assim a aceleração $\mathbf{a}$ dos fluidos no sistema (f):

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_j}{dt}\right)_f = \mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{u}_j}{dt}\right)_g + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j. \quad (1.19)$$

Derivando com relação ao tempo a Eq. (1.18) para a posição, e substituindo recursivamente a Eq. (1.19), chegamos na expressão para a aceleração absoluta,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_g + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j, \quad (1.20)$$

onde, para um observador girante, é composta pela aceleração observada $\mathbf{a}_g$; a aceleração centrífuga $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ que depende da posição; e a aceleração de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j$ que depende da velocidade dos fluidos. Portanto, a equação de Navier-Stokes (1.6) será agora modifica pela

inclusão das forças inerciais que atuaram nos fluidos [17],

$$\mathbf{f}_{in} = -\rho_j \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\rho_j \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_j. \quad (1.21)$$

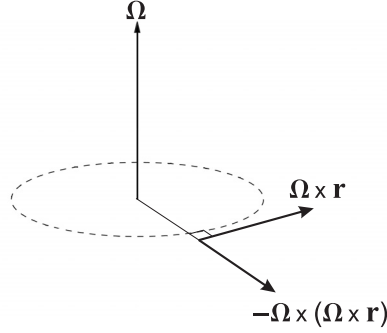


Figura 1.7 Direções da força centrífuga e de Coriolis quando a velocidade aponta na direção radial.

Apesar da força de Coriolis e da centrífuga terem a mesma origem, suas contribuições na dinâmica são completamente diferentes: enquanto a força centrífuga aumenta com r e é perpendicular ao eixo de rotação, sempre dirigida radialmente para fora como mostrado na Fig. 1.7, a força de Coriolis, além de ser perpendicular ao eixo de rotação, também é perpendicular à velocidade de cada fluido. É importante lembrar que em alguns sistemas, a força dominante não é a força de Coriolis, mas sim a força centrífuga. Isso acontece quando a razão entre a densidade e a viscosidade, a chamada viscosidade cinemática, é muito pequena. Por outro lado, quando a viscosidade cinemática é de ordem apreciável, a força de Coriolis age de forma decisiva na dinâmica, como por exemplo na formação de furacões na superfície terrestre (ver Fig. 1.8).

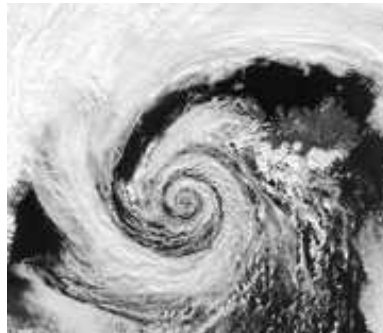


Figura 1.8 Exemplo do efeito da força de Coriolis na formação de furacões na superfície terrestre.

O nosso principal objetivo é descobrir como as forças inerciais atuam na formação dos padrões de interface na célula de Hele-Shaw girante, e responder como a evolução dinâmica da

interface é influenciada por estes efeitos. Será que as propriedades puramente viscosas de cada fluido são ainda determinantes como foram para a célula retangular e a radial? Quais serão os mecanismos para o processo de crescimento das perturbações na interface entre os fluidos? E finalmente, como os fluidos serão afetados pelas forças centrífuga e de Coriolis? Estas e outras questões serão gradativamente respondidas no decorrer desta dissertação.

Veremos que a adição dos novos termos inerciais (1.21) na equação de Navier-Stokes (1.6) trarão modificações muito mais complexas na lei de Darcy (1.11), principalmente quando o efeito Coriolis for levado em conta. E neste caso, não poderemos mais escrever a lei de Darcy em termos de um potencial de *velocidade*, como mostrado na Eq. (1.14), mas sim, em termos de um potencial de *pressão* reduzida. A lei de Darcy (1.11) modificada pela rotação, a diferença de pressão (1.16) e a condição cinemática (1.17) fornecerão as ferramentas necessárias para o desenvolvimento de nossa investigação fracamente não-linear para a instabilidade de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw girante.

1.5 ROTEIRO DA DISSERTAÇÃO

Neste capítulo introdutório, discutimos qualitativamente o processo de formação de padrões na célula de Hele-Shaw. Os aspectos gerais da instabilidade de Saffman-Taylor foram apresentados e a lei de Darcy que rege o fluxo na célula retangular foi obtida. Os principais mecanismos de crescimento dos dedos viscosos foram introduzidos: a competição e a bifurcação, e as diferenças de padrões formados na célula retangular e na radial foram expostas. Através desta discussão percebemos como as viscosidades de cada fluido, assim como a geometria de cada célula, influenciam os padrões gerados. Entretanto, quando a célula é colocada para girar, aspectos mecânicos fundamentais surgem, introduzindo o efeito das forças inerciais no sistema. Esta é a grande motivação do presente trabalho, e nos capítulos restantes, vamos focalizar no estudo da instabilidade de Saffman-Taylor para a célula de Hele-Shaw girante.

Nosso principal objetivo é fazer uma análise fracamente não-linear para os estágios intermediários da evolução na célula girante, a fim de ganhar um melhor entendimento sobre o complicado processo dinâmico da formação de dedos viscosos quando as forças inerciais estão presentes. No capítulo 2, vamos nos concentrar em sistemas girantes em que a força de Coriolis é desprezível, analisando as contribuições providas do efeito puramente centrífugo. Será apresentada uma breve revisão da literatura sobre a célula girante, assim como as nossas principais predições analíticas para o regime fracamente não-linear da dinâmica [24]. E por fim, apresentamos os resultados de Miranda e Alvarez-Lacalle [25] que testaram numericamente

nossas previsões teóricas apresentadas na Ref. [24].

Após entendermos como a força centrífuga atua na formação dos padrões na célula girante, estaremos prontos para atacar sistemas em que a força de Coriolis não é desprezível. Portanto, no capítulo 3, apresentaremos um estudo detalhado sobre a influência da força de Coriolis na dinâmica dos dedos viscosos, fazendo ainda comparações com os resultados obtidos previamente quando a força de Coriolis foi negligenciada. Discutiremos nossos resultados lineares, bem como os fracamente não-lineares através da equação diferencial de modos acoplados. Além disso, uma comparação entre nossas descobertas fracamente não-lineares, utilizando a abordagem de modos acoplados, com aquelas utilizando o formalismo “vortex-sheet”, será feita. Finalmente, um paralelo entre o nosso modelo e o obtido usando a abordagem de Schwartz [19] será executado. O cálculo detalhado da lei de Darcy generalizada, quando o efeito da força de Coriolis é significativo, é apresentado no apêndice A desta dissertação.

O capítulo 4 é destinado para sumariar nossos principais resultados, salientando o seu impacto na literatura atual. As perspectivas para futuras análises de novas questões que surgiram, bem como as que ainda estão em aberto, também serão discutidas. O estudo aqui realizado deu origem a duas publicações no Physical Review E [24, 26], e podem ser encontradas nos apêndices C e D desta dissertação.

CAPÍTULO 2

A CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE

2.1 DESCRIÇÃO FÍSICA E BREVE REVISÃO DA LITERATURA

Para células em *repouso*, sabemos que quando o fluido de baixa viscosidade é injetado contra outro de viscosidade mais elevada, a interface entre eles se torna instável (Fig.1.1) dando origem aos chamados "dedos viscosos" [13, 14]. A interface inicialmente não perturbada entre os fluidos pode ser desestabilizada pelos gradientes de pressão (diferença de viscosidade entre os fluidos) ou pela gravidade (diferença de densidade entre os fluidos).

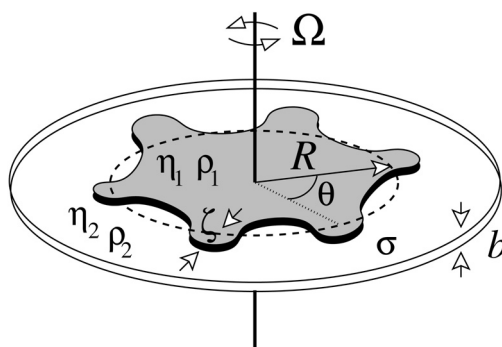


Figura 2.1 Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante.

Entretanto, estamos interessados em modificação bastante interessante deste problema que é obtida ao *girarmos* a célula de Hele-Shaw com velocidade angular constante Ω em torno do seu eixo z , que é perpendicular e coaxial às placas da célula, obtendo a chamada célula de Hele-Shaw girante [19, 20, 21, 22] (veja Fig. 2.1). No caso da célula girante, dois fluidos viscosos (de viscosidades η_j , com $j = 1, 2$) são colocados em um espaço estreito b entre dois discos de vidro, planos e paralelos. O fluido de maior densidade (ρ_1) é colocado no interior da célula, que ao girar desloca o fluido externo de menor densidade (ρ_2). A interface que separa os fluidos tem uma tensão superficial σ . O deslocamento dos fluidos é agora devido às forças centrífugas que deformam a interface inicialmente circular de raio R que separa os

fluidos, resultando na formação de uma grande variedade de padrões. Vejamos que nesse novo problema as perturbações na interface ζ não são mais provocadas pela diferença de *viscosidade* entre os fluidos, mas sim causadas pela diferença de *densidade*. Neste capítulo, vamos focalizar os sistemas em que são regidos pelos efeitos puramente centrífugos, no qual a viscosidade cinemática (ρ_j/η_j) $\ll 1$ para os dois fluidos ($j = 1, 2$), ou seja, os efeitos da força de Coriolis são desprezíveis.

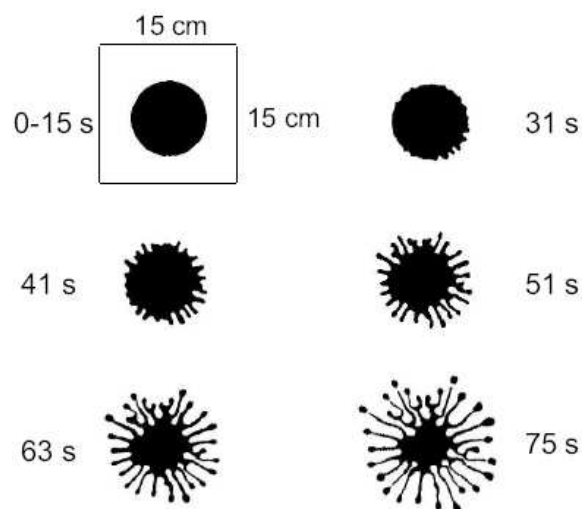


Figura 2.2 Fotos de experimentos da evolução temporal, em segundos, da formação de padrões no limite de baixo contraste de viscosidade [22] na célula de Hele-Shaw girante.

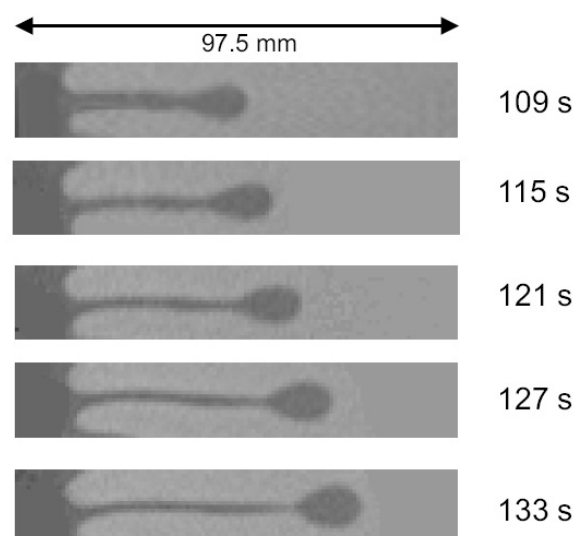


Figura 2.3 Sequência de fotos para experimento com baixo contraste de viscosidade [22] na célula de Hele-Shaw girante.

Durante os últimos anos, houve muito interesse na instabilidade morfológica da célula de Hele-Shaw girante, no qual se explorou uma grande variedade de questões teóricas [19, 20, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 32] e experimentais [20, 22, 33, 34]. No que se refere ao estudo analítico, pesquisadores executaram a análise da estabilidade linear [19, 20, 24] e fracamente não-linear [21, 24]. Outros grupos estudaram as famílias particulares de soluções exatas para as gotas girantes [27, 28] e anéis de fluido [29]. Além disso, complexas simulações numéricas foram empregadas para examinar o limite de baixo contraste de viscosidade [22], e o caso em que os fluidos envolvidos são miscíveis (tensão superficial desprezível) [30]. Afora isso, o comportamento do fluxo de gotas de ferrofluido (fluido magnético) em células girantes sujeitas a campos magnéticos externos, foi estudado pela análise da estabilidade linear [31] e simulações numéricas [32]. A respeito das investigações experimentais, os trabalhos pioneiros de Ortín, Casademunt, e colaboradores forneceram uma série de resultados muito interessantes na célula girante, envolvendo altos [20] e baixos [22] contrastes de viscosidade entre os fluidos, e ainda

o deslocamento radial de um anel de fluido girante, nos regimes estáveis [33] e instáveis [34].

Uma característica comum das Refs. [19, 20, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] é que os padrões da interface obtidos na célula girante são marcadamente distintos daqueles observados no problema usual de Saffman-Taylor na geometria radial. Mais especificamente, descobriu-se que padrões girantes *não são* instáveis com relação à bifurcação dos dedos (veja Fig. 2.2), mas revelam que os dedos esticam (Fig. 2.3) e podem competir (Figs. 2.2 - 2.5). Neste sentido, os padrões girantes são certamente mais relacionados com as estruturas obtidas na geometria retangular (célula em repouso). As experiências para o contraste de viscosidade A elevado, no limite de alta tensão superficial σ [20] e com as placas da célula girante inicialmente secas, mostraram o desenvolvimento de vários “dedos”, de forma que o fluido central joga para fora pequenas gotas de fluido, e a partir delas mesmas formam novos dedos ou gotas. Neste sistema fica evidente uma dinâmica de competição entre os dedos que *entram* no fluido central, exibindo uma grande variabilidade dos comprimentos dos dedos que estão entrando no fluido 1, como mostrado nas Figs. 2.4 e 2.5 .

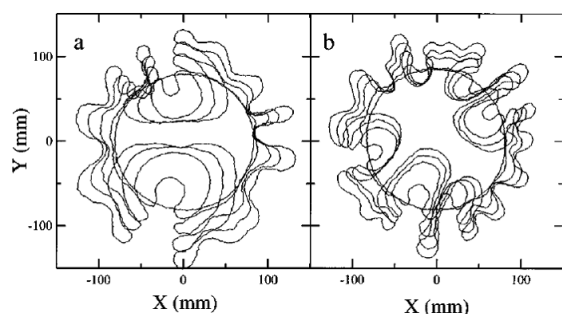


Figura 2.4 Sequências temporais digitalizadas da interface [20]: (a) $R_0=81\text{mm}$, $b=0.81\text{mm}$ e $\Omega=60\text{rpm}$; (b) $R_0=83\text{mm}$, $b=0.5\text{mm}$ e $\Omega=60\text{rpm}$.



Figura 2.5 Padrão experimental típico formado no limite de elevada tensão superficial na célula de Hele-Shaw girante. Óleo é o fluido interno e o ar é o externo [20].

Por outro lado, experiências recentes (Figs. 2.2 e 2.3) e simulações numéricas (Fig. 2.6) para o limite de baixo contraste de viscosidade A , valores muito pequenos de σ (tipicamente uma ordem menor da magnitude usada na Ref. [20]) e com as placas da célula girante pré-molhadas [22], mostram que quase nenhuma competição entre os dedos é encontrada (veja Fig. 2.6). Estes resultados da célula girante parecem indicar que, similarmente ao que acontece na geometria retangular em repouso, o contraste de viscosidade também tem um papel crucial na célula girante. Outra descoberta interessante da Ref. [22], é que, além do contraste de viscosidade e da tensão de superficial, o espaçamento b da célula também atua de forma

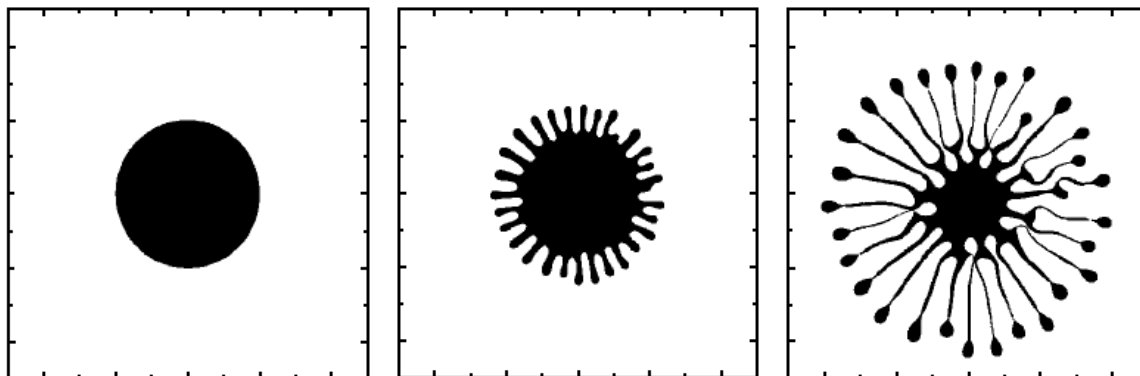


Figura 2.6 Simulação numérica para evolução temporal da interface quando $A = -0.4$ (baixo contraste de viscosidade) de uma gota inicialmente circular na célula de Hele-Shaw girante [22]. Note a incrível semelhança deste resultado numérico com os padrões obtidos pelo experimento na Fig. 2.2.

decisiva no regime linear. Isto introduz um terceiro parâmetro relevante ao problema, definido pela relação entre b e raio inicial da gota. Na Ref. [22] o parâmetro de espaçamento da célula é introduzido com uma modificação da condição de Young-Laplace para a descontinuidade da pressão hidrodinâmica. Note ainda a incrível semelhança das simulações numéricas (Fig. 2.6), executadas por Alvarez-Lacalle e colaboradores [22] (utilizando o formalismo “vortex-sheet”), com os padrões obtidos pelo experimento real mostrado na Fig. 2.2.

Apesar dos resultados da estabilidade linear, das experiências, e simulações numéricas das Refs. [20, 22] estarem relacionados a um conjunto de valores específicos para o contraste da viscosidade e tensão superficial (A e σ muito elevados na Ref. [20], e muito pequenos na Ref. [22]), há um forte indício de que os parâmetros A , B , e b também serão importantes na caracterização dos padrões da morfologia e da dinâmica de competição entre os dedos na célula de Hele-Shaw girante. Entretanto, o papel do contraste de viscosidade na formação de padrões da célula girante foi amplamente ignorado nos estudos das Ref. [19, 20, 21, 22], bem como um estudo analítico sistemático incluindo a influência combinada de todos estes parâmetros (cada um deles variando em todos os valores possíveis fisicamente) no início dos efeitos *não-lineares*. Tal análise foi recentemente realizada por Gadêlha e Miranda [24], e seus principais resultados serão discutidos na próxima seção.

2.2 DINÂMICA DA COMPETIÇÃO DOS DEDOS NA CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE

2.2.1 A abordagem fracamente não-linear

Grande parte dos estudos teóricos e experimentais [19, 20, 21, 22] restringiram-se a certos valores extremos para os parâmetros de controle (valores excessivamente altos / baixos), dificultando o entendimento global do sistema. Portanto, vamos apresentar nesta seção as principais descobertas da Ref. [24] sobre a competição entre os dedos viscosos, abordando todo o universo de parâmetros envolvidos no problema, através de uma abordagem de modos acoplados, examinando importantes características morfológicas na interface fluido-fluido para o regime fracamente não-linear. O impacto dos estresses viscosos na direção normal à interface foram levados em conta, acarretando numa modificação da condição de contorno de pressão usual [22]. E finalmente, a evolução da interface foi obtida em termos dos parâmetros (adimensionais) de controle: contraste de viscosidade A , tensão superficial B e espaçamento entre as placas b .

Para o estudo analítico do sistema, consideramos a célula de Hele-Shaw girante com espaçamento b entre as placas de vidro contendo dois fluidos viscosos, imiscíveis e incompressíveis (veja Fig. 2.1). Os efeitos centrífugos do movimento foram induzidos fazendo $\rho_1 > \rho_2$, mas ainda permitindo que o fluido de dentro seja ou mais ou menos viscoso que o fluido de fora. A interface perturbada é descrita como $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$, onde R é o raio não perturbado inicialmente circular, e $\zeta(\theta, t)$ representa a perturbação na interface. Considerando que os fluidos são irrotacionais, escrevemos a velocidade de cada fluido como o gradiente de um potencial, $\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$, onde ϕ_j representa o potencial de velocidade para os fluidos $j = 1, 2$. A lei de Darcy [6, 13] pode então ser reescrita em termos dos potenciais de velocidade como visto no capítulo 1, mas para obtermos a evolução temporal da interface fluido-fluido, calculamos a equação de movimento para os dois fluidos propriamente acrescentada da contribuição centrífuga [31, 32]

$$A \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left[\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 r^2 - (p_1 - p_2) \right], \quad (2.1)$$

onde o parâmetro adimensional $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ é o contraste de viscosidade, p_j representa a pressão hidrodinâmica, e r denota a distância radial do eixo de rotação.

Temos que expressar $(\phi_2 \pm \phi_1)$ e $(p_1 - p_2)$ em termos da amplitude de perturbação $\zeta(t)$ decompuesta em modos de Fourier $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$. Para isso, utilizamos condição

de contorno para pressão na interface, mas desta vez modificada pelo efeito dos estresses entre os fluidos na direção normal à interface (equação de Young-Laplace modificada) [22, 24]

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa - 2\delta \left[\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} \right], \quad (2.2)$$

onde o segundo termo do lado direito da Eq. 2.2 tem origem nos gradientes da velocidade na direção normal e não são nulos na geometria radial. O parâmetro δ [$\delta = 1$ ($\delta = 0$) se os estresses normais (não) são considerados] é usado para identificarmos as contribuições vindas deste novo termo na Eq. (2.2) para análise de modos acoplados.

Prosseguimos adaptando a aproximação fracamente não-linear originalmente desenvolvida por Miranda e Widom [39, 46] e usando a expansão de Fourier para o potencial de velocidade que obedece à equação de Laplace [Eq. (1.15)]. A partir daí, os potenciais ϕ_j são expressos em termos da amplitude de perturbação ζ_n considerando a condição de contorno cinemática [Eq. (1.17)], que se refere à continuidade da velocidade normal através da interface. Substituindo estas relações, e a condição de contorno para pressão Eq. (2.2) na Eq. (2.1), e calculando a transformada de Fourier obtemos a equação *adimensional* de modos acoplados (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \quad (2.3)$$

onde

$$\lambda(n) = \frac{|n|}{J(n)} [1 - B(n^2 - 1)] \quad (2.4)$$

denota a taxa de crescimento linear com

$$J(n) = \left[1 + \delta \frac{|n|(|n| + A)b^2}{6} \right], \quad (2.5)$$

e

$$F(n, n') = \frac{|n|}{J(n)} \left\{ \frac{1}{2} - B \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
G(n, n') = & \frac{|n|}{J(n)} \left\{ A [1 - \text{sgn}(nn')] - \frac{1}{|n|} \right. \\
& \left. + \delta \frac{b^2}{6} [A[1 - n^2 \text{sgn}(nn') + n'^2] - |n|[1 + \text{sgn}(nn')] + 3|n'|] \right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

representam os termos de acoplamento de segunda-ordem. A função $\text{sgn}(nn')$ pode admitir os valores $+1$ ou -1 de acordo com o sinal do argumento. Na Eq. (2.3) comprimentos são adimensionalizados por R , e o tempo por R/U , onde $U = [b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2]/[12(\eta_1 + \eta_2)]$ é a velocidade característica. O parâmetro de tensão superficial $B = \sigma/[R^3\Omega^2(\rho_1 - \rho_2)]$ é uma razão entre as efeitos de capilaridade e os centrífugos. Note que a Eq. (2.3) está convenientemente escrita em termos de A , B e b , com δ indexando os novos termos provenientes dos estresses normais na interface.

2.2.2 A função competição

A competição entre os dedos viscosos é um efeito intrinsecamente não-linear, como já discutido anteriormente, e conseqüentemente a análise da estabilidade linear não pode ser usada para descrever tal fenômeno. Portanto, vamos focalizar nossas atenções sobre os termos fracamente não-lineares da Eq. (2.3), visando um ganho analítico no que se refere à dinâmica da competição entre os dedos, para que possamos analisar como esta será afetada pela ação dos parâmetros de controle A , B , e b . O estudo completo da estabilidade linear, bem como estágios fracamente não-lineares, podem ser encontrados no apêndice C desta dissertação [24].

Através da aproximação de modos acoplados discutida na seção anterior, a competição entre os dedos é descrita pela influência do modo fundamental n no crescimento de seu modo sub-harmônico $n/2$ [39, 46]. Para simplificar nossa discussão, reescrevemos a perturbação $\zeta(t)$ em termos dos modos cosseno e seno, obtendo a equação diferencial para os modos sub-harmônicos, e a partir daí podemos definir a função competição

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right]. \tag{2.8}$$

Um maior detalhamento sobre a obtenção da Eq. (2.8) será apresentada no capítulo 3 e no apêndice B desta dissertação.

A função $C(n)$ nos permite acessar a “física” da competição entre os dedos [24, 46]. Basicamente, quando $C(n) > 0$ o crescimento modo sub-harmônico cosseno é favorecido acarretando

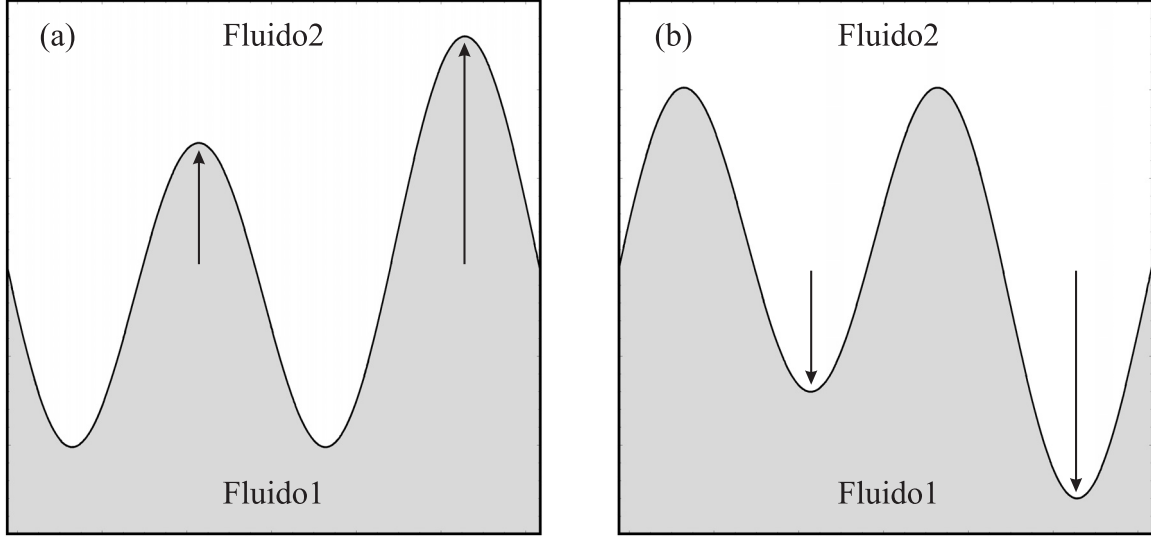


Figura 2.7 Ilustração esquemática do fenômeno da competição entre os dedos: (a) $C(n) > 0$ e (b) $C(n) < 0$.

na competição entre os dedos do fluido interno que estão indo para “fora” [veja Fig. 2.7(a)]. Do contrário, se $C(n) < 0$ a competição é maior entre os dedos do fluido externo que tendem a “entrar” no interior da célula (desfavorecendo o crescimento do modo cosseno) [veja Fig. 2.7(b)]. Evidentemente, quando $C(n) = 0$ os dedos não competem resultando em padrões simétricos para interface (comprimento relativo entre os dedos não varia muito).

Para analisar a competição dos dedos, traçamos na Fig. 2.8 a função competição Eq. (2.8) em termos do contraste de viscosidade A (variando em todo o universo de valores possíveis fisicamente, $-1 \leq A \leq 1$) para três valores diferentes de tensão superficial B : (a) 2.0×10^{-4} (curva preta), (b) 5.0×10^{-4} (curva cinza) e (c) 2.0×10^{-3} (curva cinza clara). As linhas contínuas (tracejadas) descrevem o comportamento de $C(n)$ para o espaçamento entre as placas $b = 3.5 \times 10^{-2}$ (1.5×10^{-2}). Para observar o crescimento do modo fundamental, assim como o do seu sub-harmônico, foi considerado $n = n_c$ (banda de modos instáveis na análise linear) [24]. Note que a Fig. 2.8 ilustra convenientemente em um simples diagrama a influência dos parâmetros A , B , e b na competição dos dedos na célula de Hele-Shaw girante.

A característica mais evidente da Fig. 2.8 é o fato de que se o contraste de viscosidade A tender a zero, a função competição $C(n)$ também tende a zero, independentemente dos valores de B ou b . Ou seja, o resultado fracamente não-linear indica a ausência da dinâmica de competição entre os dedos se os dois fluidos apresentarem viscosidades comparáveis. Notavelmente, este importante efeito, que *não* poderia ser acessado usando a análise puramente linear, já é detectado na mais baixa ordem não-linear.

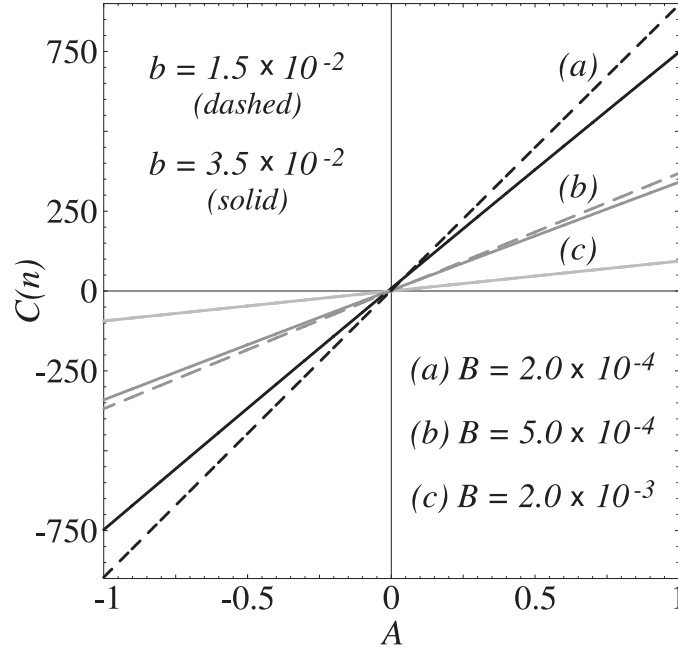


Figura 2.8 $C(n)$ dado pela Eq. (2.8) em função do contraste de viscosidade A , para três valores diferentes de tensão superficial B e dois valores diferentes para o espaçamento entre as placas b . Note que em (c), curva cinza clara, existem na verdade duas curvas (a curva tracejada ficou sobreposta).

O comportamento regulador de A com respeito à competição dos dedos pode ser visto na Fig. 2.8, onde é evidente que a diferença entre as curvas tracejadas e contínuas (dois valores de b diferentes), para a mesma tensão superficial B , tende a zero (curvas sobrepostas) quando o contraste da viscosidade também vai a zero, mesmo quando a diferença entre curvas para dois valores de b é grande (valores menores de B). Similarmente com o que foi descoberto pelas simulações numéricas [35, 36] e os experimentos [37, 38] na geometria retangular, a nossa teoria fracamente não-linear também mostrou que A desempenha um papel crucial na geometria radial para a célula girante, controlando o comportamento da competição dos dedos. Estes resultados estão em perfeito acordo com experimentos realizados para baixos valores do contraste de viscosidade ($A < 0$) e da tensão superficial [22].

Continuamos a discussão concentrando na situação mais freqüentemente explorada na literatura, o caso em que $A < 0$ (o fluido interno é mais viscoso). Na Fig. 2.8, vemos que se A for negativo, $C(n) < 0$, indicando uma maior competição entre os dedos que *entram*, para valores cada vez maiores de A (em módulo). Simultaneamente, a competição entre os dedos que *saem* será suprimida. Estas descobertas também estão de acordo com o que foi observado nos experimentos na célula girante para valores altos [20] (veja as Figs. 2.4 e 2.5) e baixos [22] (Figs. 2.2 e 2.3) do contraste de viscosidade, para $A < 0$.

A contribuição da tensão superficial também pode ser observada na Fig. 2.8 . Constatamos nitidamente que B influencia a inclinação da curva $C(n)$. Desta forma, a competição dos dedos diminui para valores altos de B , e aumenta para valores baixos de B . Em particular, para valores excessivamente altos de B a competição vai para zero, não importando o valor de A . É importante salientar que a dependência de $C(n)$ com o espaçamento b é devida à inclusão dos estresses normais na interface. Portanto, para valores menores da tensão superficial B , a dependência da competição dos dedos com b é forte, enquanto que se B é alto, a dependência de $C(n)$ com b será desprezível. Outro fato importante é que se b for um valor grande (curva contínua), maior efeito dos estresses normais, teremos globalmente menor competição relativo a situação em que b é pequeno (curva tracejada). Observamos ainda que se variarmos B , a sensibilidade de $C(n)$ com b é mais forte para valores pequenos de B , enquanto que para valores maiores de B esta influencia pode ser totalmente negligenciada. Esta é a evidência mais clara de que os estresses normais atuam como uma “segunda” tensão superficial, com efeito puramente estabilizante.

Na região de $A > 0$ (fluido de dentro é menos viscoso) na Fig. 2.8, notamos que $C(n) > 0$, causando o crescimento da competição entre os dedos que *saem*, e por sua vez suprimindo a competição entre os dedos que *entram*. Isto acontece porque o crescimento do modo sub-harmônico cosseno é favorecido ($C(n) > 0$). Curiosamente, a respeito da ação de B e b , as conclusões feitas acima para o caso $A < 0$ permanecem válidas para o contraste de viscosidade positivo, pois os gráficos são perfeitamente simétricos.

Uma das principais razões que nos motivaram para o desenvolvimento deste estudo fracamente não-linear foi a possibilidade de extrair informações analíticas sobre o problema da célula de Hele-Shaw girante, que até então só poderiam ser acessadas através de experimentos meticulosos [20, 22] ou via métodos numéricos sofisticados [22]. Como resultado de nossa aproximação de modos acoplados, diversas características dos padrões formados na célula girante podem agora ser explicadas e preditas analiticamente. Nossa análise indica explicitamente uma ligação entre a dinâmica da competição dos dedos e os parâmetros A , B , e b . Além disso, o mecanismo de competição dos dedos aqui proposto é consistente com os experimentos realizados [20, 22] e simulações numéricas recentemente obtidas [25].

Nossa aproximação de modos acoplados permite o estudo da competição para um rico espaço de parâmetros físicos, de tal forma que incorpora o papel combinado de todos os três parâmetros relevantes do problema: o contraste de viscosidade A , a tensão superficial B , e o espaçamento b . Concluímos que A é o principal fator determinante da competição dos dedos, de modo que a competição desaparece quando $A \rightarrow 0$. Por outro lado, mostramos que B e b

podem também ser de importância considerável para uma descrição mais precisa do sistema. Por exemplo, deduzimos que, para B suficientemente grande, a competição desaparece independentemente dos valores A e b . Do mesmo modo, verificamos explicitamente que b tem uma influência mais forte na competição para valores de tensão superficial B pequenos, e contraste de viscosidade A elevados.

Afora isso, pudemos estender nossas previsões além do universo de parâmetros explorados normalmente pelas experiências e simulações realizadas até então [19, 20, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. A respeito dos valores do contraste de viscosidade, enquanto a maioria dos trabalhos sobre a célula girante focalizou os limites de valores muito baixo ou muito elevados de $A < 0$, nossa estudo analisou todos os valores possíveis para o contraste de viscosidade $-1 \leq A \leq 1$. Isto também é verdadeiro com relação aos parâmetros B e b . A flexibilidade oferecida por nossa aproximação analítica é muito vantajosa, desde que a abordagem fracamente não-linear fornece informações precisas sobre a dinâmica, sendo não perturbativa para os parâmetros físicos relevantes. Mais além, permitiu explorar as situações físicas normalmente não investigadas pela literatura. Por exemplo, para $A > 0$, fizemos previsões bastante específicas: a competição dos dedos que *saem* será aumentada para valores cada vez maiores do contraste de viscosidade *positivo*. Vale a pena salientar que na época da conclusão deste trabalho [24] algumas das previsões específicas, principalmente aquelas conectadas à situação em que $A > 0$ precisavam ainda ser verificadas numérica ou experimentalmente. E este foi o principal objetivo da análise numérica de Miranda e Alvarez-Lacalle [25] que testaram e reforçaram nossos resultados fracamente não-lineares [24], incluindo a região de valores para A positivo.

2.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO FENÔMENO DA COMPETIÇÃO

Esta seção tem o objetivo de mostrar os principais resultados obtidos por Miranda e Alvarez-Lacalle [25] que estudaram numericamente diferentes morfologias da interface entre dois fluidos imiscíveis na célula de Hele-Shaw girante. Todos os valores permitidos para o contraste de viscosidade foram analisados, e uma grande variedade de padrões de dedos foi sistematicamente estudada, incluindo o caso em que o fluido interno é menos viscoso do que externo. Os resultados numéricos demonstram que o valor e o sinal do contraste da viscosidade afetam fortemente a forma dos dedos emergentes, e também seu comprimento. Finalmente, verificaram que os fenômenos da competição entre os dedos revelados por suas simulações foram corretamente previstos pela análise fracamente não-linear da evolução dos padrões desempen-

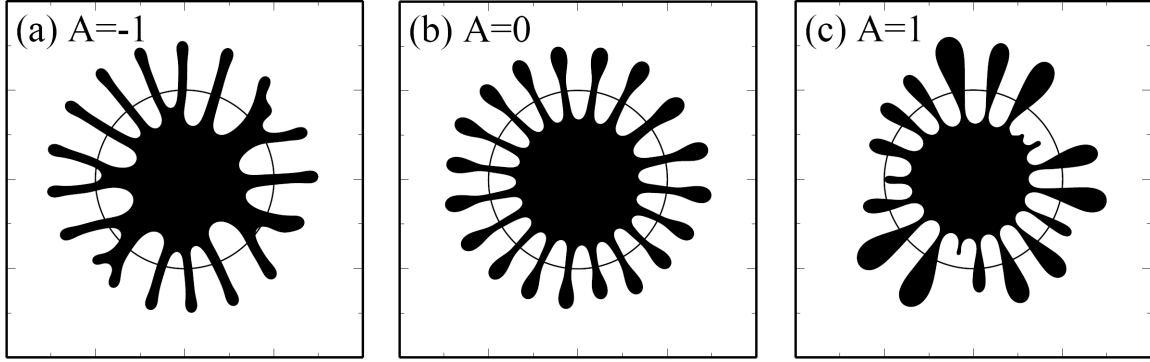


Figura 2.9 Experimento numéricos mostrando a formação típica de dedos na célula girante para três valores do contraste de viscosidade [25].

hada por Gadêlha e Miranda [24], mostrando que a dinâmica da competição entre os dedos já está presente em estágios relativamente iniciais da evolução da interface.

A análise numérica da Ref. [25] foi baseada no formalismo “vortex-sheet” inicialmente proposto por Tryggvason e Aref [35] para o fluxo na célula de Hele-shaw. O método consiste em acessar a vorticidade γ gerada pela descontinuidade da velocidade entre os fluidos na direção tangente à interface $\hat{s}$. E partir de γ , a evolução temporal da interface fluido-fluido é obtida solucionando numericamente a equação íntegro-diferencial auto-consistente para a velocidade da interface (integral de Birkhoff [35, 53]). Desta forma, a Ref. [25] revelou estágios altamente avançados na evolução temporal dos padrões de interface gerados na célula girante. Usando as condições de contorno usuais para o sistema (condições de contorno discutidas no capítulo 1), a lei de Darcy para a célula girante, e adimensionalizando as equações, a Ref. [25] obteve a expressão para vorticidade gerada na interface

$$\gamma = 2\{A\mathbf{w} \cdot \hat{s} + B\partial_s \kappa - r\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{s}\}, \quad (2.9)$$

onde A é o contraste de viscosidade, B é o parâmetro de tensão superficial (o mesmo definido na seção anterior) e $\mathbf{w}$ a velocidade média da interface com a sua curvatura dada por κ , e $\partial_s = \nabla \cdot \hat{s}$. Temos ainda que r e $\hat{\mathbf{r}}$ denotam respectivamente a função que descreve a interface em coordenadas polares e o vetor unitário que aponta na direção radial. O terceiro termo do lado direito da Eq. (2.9) é proveniente da força centrífuga que atua no referencial girante da célula. O cálculo da vorticidade γ será abordado de forma mais detalhada no capítulo 3.

As simulações numéricas de Miranda e Alvarez-Lacalle [25] mostradas na Fig. 2.9 são para $B = 5.0 \times 10^{-4}$ e três valores do contraste de viscosidade: (a) $A = -1$, (b) $A = 0$, e (c) $A = 1$. Focalizando a Fig. 2.9(a), podemos ver facilmente a grande variabilidade do tamanho dos dedos

viscosos que *entram*, penetrando fortemente no fluido interno. Isso pode ser notado observando a forma da região interior ao fluido 1 (fluido de dentro) que não é simétrica-circular. Por outro lado, os dedos do fluido interno que *saem* não competem tanto para $A = -1$, caracterizando, assim, uma competição entre os dedos que entram, e suprimindo a competição entre os dedos que saem. Por outro lado, na Fig. 2.9(b), vemos a situação em que as viscosidades dos dois fluidos são comparáveis, ou seja, $A = 0$. Ficou evidente que quase não se observa competição entre os dedos viscosos, pois o tamanho médio dos dedos que saem e dos dedos que entram não variam muito. O fato da competição ser suprimida no limite de baixa viscosidade já é bem estabelecido para a célula de Hele-Shaw retangular [35, 36, 37, 38, 56]. Mas para a célula girante, este fato foi primeiro sugerido por Gadêlha e Miranda [24] através de uma análise fracamente não-linear, sendo agora reforçado por este estudo numérico [25]. Tais evidências, estabelecem $A = 0$ como uma espécie de ponto de divisão entre dois diferentes tipos de competição: a competição entre os dedos que *saem* e a competição entre os dedos que *entram*. A Fig. 2.9(c) mostra uma forte variação dos tamanhos dos dedos que saem, quando $A = 1$ (fluido de dentro muito mais viscoso), deixando claro uma forte competição entre eles. Entretanto, os dedos que entram na Fig. 2.9(c) não competem muito, visto que a extremidade dos dedos (que entram) delineiam aproximadamente uma região circular ao redor do centro da figura.

Na Fig. 2.10, a Ref. [25] ilustrou de forma bastante clara os efeitos quantitativos da competição entre os dedos, traçando, com os mesmos parâmetros usados nas Figs. 2.9, a coordenada radial adimensional (r/R) da extremidade de cada dedo n (n é um número inteiro que rotula os dedos) para: (a) $A = -1$, (b) $A = 0$, e (c) $A = +1$. Os pontos fechados (abertos) localizam as posições radiais dos dedos que saem (entram). Desta forma, todas as conclusões obtidas anteriormente visualizando os padrões da Fig. 2.9, podem agora ser facilmente confirmadas pela Fig. 2.10. O caso $A = -1$, Fig. 2.10(a), acentua a competição entre os dedos que entram, enquanto o comprimento dos dedos que saem são aproximadamente os mesmos; já para $A = 0$, a competição é consideravelmente suprimida, Fig. 2.10(b); e finalmente quando $A = 1$ temos competição entre os dedos que saem. Na verdade, podemos dizer que sempre haverá competição quando o fluido menos viscoso penetrar o mais viscoso, independentemente se os dedos estão saindo ou entrando. Isto indica que a competição entre os dedos emergentes é fundamentalmente determinada pelo mecanismo da viscosidade e dos termos não-lineares da dinâmica, assim como a instabilidade de Saffman-Taylor [6] que é provocada puramente pelo mecanismo da viscosidade.

Certamente, os resultados numéricos de Miranda e Alvarez-Lacalle [25] substanciam as previsões analíticas de Gadêlha e Miranda [24], fornecendo uma convincente evidência da

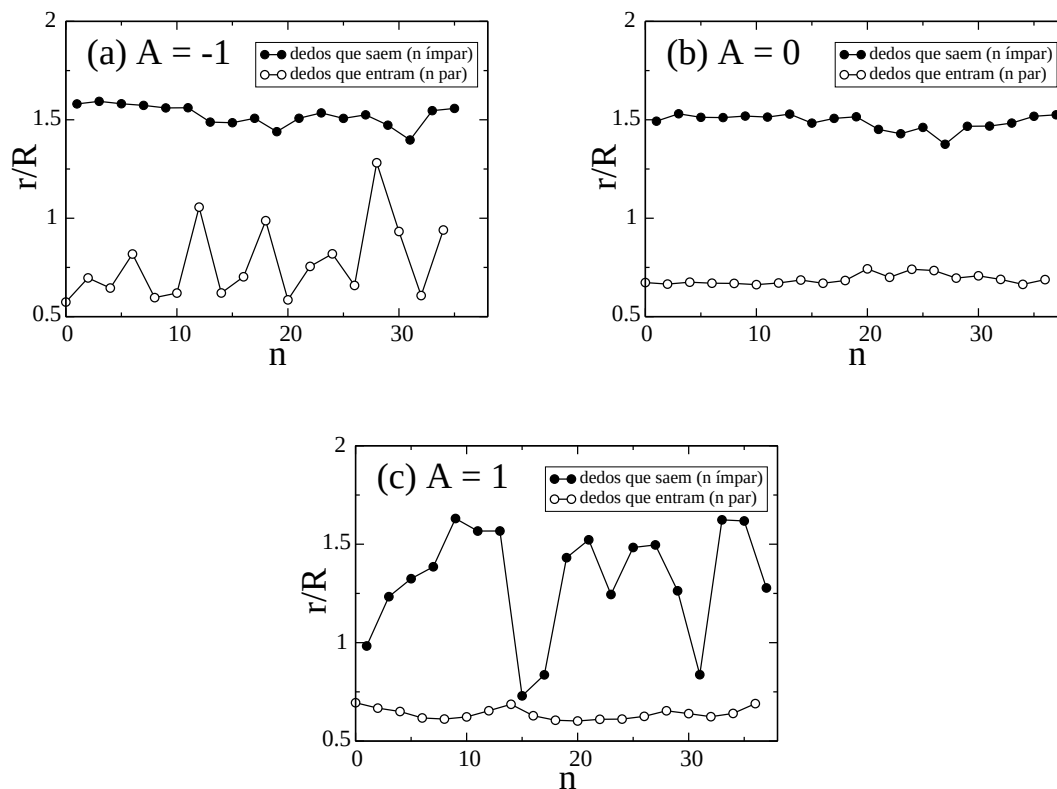


Figura 2.10 Coordenada radial (r/R) da extremidade de cada dedo n (n é um número inteiro rotula os dedos) na interface, quando $B = 5.0 \times 10^{-4}$ e (a) $A = -1$, (b) $A = 0$, e (c) $A = +1$.

utilidade de nossa abordagem fracamente não-linear. O acordo perfeito entre os resultados numéricos aqui apresentados e as previsões analíticas da Ref. [24], indicam que a dinâmica da competição entre os dedos já está presente em estágios relativamente iniciais da evolução da interface. Além disso, tais simulações reforçam o fato de que o contraste de viscosidade A tem um papel crucial na determinação morfológica dos padrões, de tal maneira que ao variar a sua magnitude e seu sinal, os padrões formados apresentarão comprimentos e larguras típicas muito diferentes.

CAPÍTULO 3

EFEITO CORIOLIS NA CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE

3.1 PRELIMINARES

O estudo da evolução das instabilidades hidrodinâmicas e da formação de padrões na interface que separa os dois fluidos na célula de Hele-Shaw girante têm atraído muito interesse desde o trabalho pioneiro de Schwartz [19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45]. O problema constitui em uma variação da instabilidade de Saffman-Taylor tradicional, puramente induzida pela diferença de viscosidade [6, 7], em que a célula é girada em torno do eixo vertical que passa através de seu centro. Como resultado da diferença de densidade entre os fluidos confinados, surgem deformações na interface centrífugo-induzida, resultando em vários efeitos dinâmicos e morfológicos interessantes.

Apesar do número considerável de estudos teóricos e experimentais sobre a célula de Hele-Shaw girante [19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45], apenas alguns deles [19, 40, 41, 42, 43] estudaram a influência da força de Coriolis na dinâmica da interface. Com relação a estudos analíticos, as investigações das estruturas dos dedos viscosos sob a influência da força de Coriolis são largamente restritas à estabilidade linear [19, 40, 41] e em sua maioria limitadas ao caso de contraste de viscosidade elevado (fluido exterior com viscosidade nula). O problema de apenas um fluido estudado por Walters e Cummings [40] foi estendido [41] em um estudo da estabilidade linear do sistema para dois fluidos limitados (fluidos contidos dentro de um disco limitado por uma borda), com contrastes de viscosidade e densidade arbitrários. Tais estudos fornecem informações úteis sobre o sistema durante o regime inicial da evolução (puramente linear). Um ponto importante estudado originalmente pela Ref. [40] se refere à maneira pela qual a força de Coriolis é adicionada nas equações de movimento para o fluxo viscoso na célula de Hele-shaw girante: enquanto Schwartz [19] inclui a força de Coriolis diretamente na lei de Darcy bidimensional (após o cálculo da média transversal), Walters e Cummings [40] a introduzem de uma forma mais rigorosa na equação de Navier-Stokes tridimensional. A comparação entre estes dois métodos a nível linear [40] sustenta a generalidade do cálculo *a lá* primeiros princípios a partir da equação de Navier-Stokes, restringindo a validade quantitativa do modelo mais informal de Schwartz [19] apenas

para números de Reynolds (medida relativa de forças inerciais e viscosas) consideravelmente pequenos. Os estágios mais avançados (inteiramente não-lineares) da evolução da interface, incluindo o efeito Coriolis, não são compreendidos completamente, e recorrem a intensas simulações numéricas para fluxos imiscíveis [19] e fluxos miscíveis [42, 43]. Até hoje, nenhuma atenção foi dada à investigação analítica da dinâmica que conecta estes dois estágios extremos (linear e não-linear) sob a presença das forças de Coriolis. A consideração de valores arbitrários para o contraste de viscosidade foi também amplamente ignorada.

Recentemente, a instabilidade na interface entre dois fluidos viscosos na célula de Hele-Shaw girante foi estudada (negligenciando o efeitos de Coriolis) usando o método analítico de modos acoplados [21, 24]. Em particular, mostrou-se que a análise fracamente não-linear até segunda ordem é capaz de descrever precisamente importantes aspectos não-lineares essenciais relacionados à dinâmica da competição dos dedos [24], como analisado no capítulo 2. Descobriu-se que competição entre os dedos viscosos depende dramaticamente da diferença de viscosidade (ou, contraste de viscosidade A) entre os fluidos. Ficou evidente que mudanças na magnitude e no sinal de A resultam em padrões para os dedos viscosos que apresentam comprimentos e larguras típicas bastante diferentes [20, 21, 22, 24]. Os estudos numéricos subsequentes do mesmo sistema [25, 44] verificaram que o surgimento e a localização de singularidades na interface (eventos de “pinch-off”) é significativamente modificada quando A varia. Estas simulações numéricas também concordaram com os resultados analíticos da Ref. [24], fornecendo uma evidência convincente da utilidade e da validade de nossa aproximação fracamente não-linear. Portanto, um estudo similar incluindo o efeito da força de Coriolis foi desenvolvido [26] para um melhor entendimento de como as forças inerciais (centrífuga e de Coriolis) influenciam o problema.

Neste capítulo, realizaremos uma análise fracamente não-linear analítica para os estágios intermediários na evolução da interface para a célula de Hele-Shaw girante, quando o efeito de Coriolis é significativo. Exploraremos o início dos efeitos não-lineares, ganhando uma visão analítica do processo dinâmico da formação dos dedos viscosos. Ao contrário dos trabalhos anteriores [19, 40, 42, 43] sobre o problema de fluido exterior não limitado, nosso estudo não impõe nenhuma restrição ao valor do contraste da viscosidade, de tal modo que A pode variar arbitrariamente ($-1 \leq A \leq +1$). Isto nos permite extrair informações analíticas valiosas sobre a relação entre o efeito Coriolis e o contraste da viscosidade, nos regimes lineares e fracamente não-lineares. Estaremos particularmente interessados em estudar o impacto destes efeitos na taxa de crescimento linear da perturbação na interface, e na dinâmica da competição dos dedos viscosos. A comparação de nossos principais resultados com estudos teóricos anteriores na

célula de Hele-Shaw girante com o efeito Coriolis [19, 40] também é estudada.

3.2 LEI DE DARCY GENERALIZADA

Considere a célula de Hele-Shaw girante de espessura b (espaçamento entre as placas paralelas de vidro), contendo dois fluidos viscosos imiscíveis e incompressíveis que giram com velocidade angular constante Ω em torno do eixo z , que é perpendicular (e coaxial com) às placas da célula (veja Fig. 3.1). Definimos nosso referencial girante de tal maneira que sua origem seja situada no centro da célula. Similarmente ao que fizemos no capítulo 2, a viscosidade do fluido interno e externo são denotadas respectivamente por η_1 e η_2 , e a tensão superficial entre os fluidos de σ . As densidades dos fluidos são definidas como ρ_1 e ρ_2 . Consideramos que o fluido exterior não está limitado por uma borda, focalizando ainda o movimento centrífugo-induzido com $\rho_1 > \rho_2$, mas permitindo que o fluido interno seja mais ou menos viscoso do que o fluido externo. Descrevemos a interface perturbada entre os fluidos como

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t) \quad (3.1)$$

onde R é o raio da interface não perturbado inicialmente circular, e $\zeta(\theta, t)$ representa a rede de perturbações na interface em coordenadas polares (r, θ) .

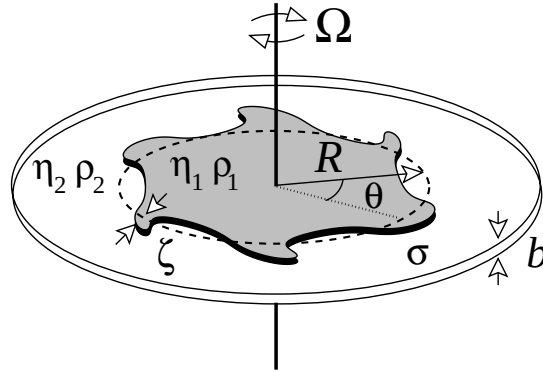


Figura 3.1 Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante ilustrando o efeito da força de Coriolis.

Nossa aproximação fracamente não-linear segue o modelo teórico proposto recentemente por Waters e Cummings [40], considerando que o fluxo de fluido no referencial girante é regido

pela equação de Navier-Stokes

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j - \rho_j \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\rho_j \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j, \quad (3.2)$$

e pela equação da continuidade para um fluido incompressível

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{u}_j$ denota a velocidade tridimensional para o fluido j (com $j = 1, 2$), p_j é a pressão hidrodinâmica, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ ($\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor unitário ao longo do eixo z), e $\mathbf{r}$ é o vetor da posição de um elemento de volume de fluido medido a partir do eixo de rotação. A fim expressar soluções em um referencial girante na célula de Hele-Shaw, é necessário alterar o balanço da pressão hidrodinâmica para o movimento em um referencial inercial com duas forças "fictícias". Estas são a força centrífuga e a força de Coriolis, representadas pelos terceiro e quarto termos do lado direito na Eq. (3.2), respectivamente. A aceleração devido à gravidade foi negligenciada.

Usando-se a equação de Navier-Stokes completa (3.2), com a Eq. (3.3), e impondo a condição de não deslizamento ("no-slip boundary condition") entre os fluidos e as placas da célula ($\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ em $z = 0$ e $z = b$), a lei de Darcy generalizada pode ser obtida calculando-se a média transversal da velocidade tridimensional $\mathbf{u}_j$ na direção da abertura entre as placas (eixo z) [40]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2 \mathcal{C}_j}{12\eta_j} \left[\nabla P_j - \frac{\mathcal{D}_j}{\mathcal{C}_j} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla P_j) \right], \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{v}_j(r, \theta) = \int_0^b \mathbf{u}_j(r, \theta, z) dz / b$ representa a média transversal bidimensional da velocidade para cada fluido, e

$$\mathcal{C}_j = \frac{\sinh \sqrt{12\text{Re}_j} - \sin \sqrt{12\text{Re}_j}}{2\text{Re}_j \sqrt{12\text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12\text{Re}_j} + \cos \sqrt{12\text{Re}_j}]}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{D}_j = \frac{1}{2\text{Re}_j} \left\{ 1 - \frac{\sinh \sqrt{12\text{Re}_j} + \sin \sqrt{12\text{Re}_j}}{\sqrt{12\text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12\text{Re}_j} + \cos \sqrt{12\text{Re}_j}]} \right\}, \quad (3.6)$$

com

$$\text{Re}_j = \frac{\rho_j \Omega b^2}{12\eta_j} \quad (3.7)$$

sendo o número de Reynolds [51], que nada mais é do que uma medida relativa entre o termo inercial (proveniente da rotação) e o termo viscoso da equação de movimento (3.2). Um maior detalhamento sobre a obtenção da lei de Darcy generalizada está apresentada no apêndice A desta dissertação. É importante enfatizar que ao deduzir a Eq. (3.4), embora os termos inerciais “padrão” $[\partial \mathbf{u}_j / \partial t + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j]$ apareçam na equação de Navier-Stokes completa (3.2), eles são desprezados *a posteriori*, em virtude da suposição de que o número de Reynolds reduzido é de ordem inferior (ver apêndice A) [40]. O caso mais geral, e consideravelmente mais complicado no qual tais termos inerciais “padrão” são considerados, foi examinado recentemente por Walters e colaboradores [41], quando os fluidos estão limitados por uma borda.

Na Eq. (3.4) a contribuição centrífuga é convenientemente incorporada na pressão reduzida Laplaciana

$$P_j = p_j - \frac{\rho_j \Omega^2 r^2}{2} \quad (3.8)$$

que acopla a pressão hidrodinâmica p_j (que *não é* Laplaciana) com efeitos puramente centrífugos. Usando as expressões (3.5) e (3.6) e expandindo até a mais baixa ordem (não nula) no número de Reynolds, obtemos

$$\mathcal{C}_j \approx \frac{1}{1 + \alpha \text{Re}_j^2}, \quad \frac{\mathcal{D}_j}{\mathcal{C}_j} \approx \beta \text{Re}_j$$

com $\alpha = 204/35 \approx 5.83$ e $\beta = 12/5 = 2.4$. Vale a pena salientar o caso limite quando o número de Reynolds tende a zero ($\text{Re}_j \rightarrow 0$) na Eq.(3.4) obtendo que $\mathcal{C}_j = 1$ e $\mathcal{D}_j/\mathcal{C}_j = 0$, de modo que reproduzimos a lei de Darcy usual para a célula de Hele-Shaw girante *sem* a força de Coriolis [20, 21, 22, 24].

É importante deixar bem claro que ao derivar a lei de Darcy (3.4), o termo responsável pela força de Coriolis havia sido introduzido ainda na equação de Navier-Stokes completa (3.2). E foi sob tais circunstâncias que o cálculo da média transversal na velocidade foi executado com o auxílio do software comercial Mathematica, conduzindo à Eq. (3.4). Este também foi o caso estudado no trabalho de Walters e Cummings [40], contrastando com o procedimento de Schwartz [19] que considera uma equação de Navier-Stokes simplificada (negligenciando os termos inerciais “padrão” e também a contribuição do efeito Coriolis), e imediatamente após executar o cálculo da média transversal na velocidade, o termo responsável pela força de Coriolis é colocado de volta ao problema em uma maneira *ad-hoc*. A análise da estabilidade linear apresentada na Ref. [40] demonstrou que esta suposição arbitrária da Ref. [19] pode conduzir a erros apreciáveis ainda em nível linear, tornando este método válido somente para

números de Reynolds muito pequenos. Nossa teoria de modos-acoplados adota uma abordagem mais rigorosa proposta originalmente pela Ref. [40], portanto esta limitação não é imposta ao valor de Re_j .

3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MODOS ACOPLADOS

Estendemos os estudos lineares anteriores [19, 40] para estágios fracamente não-lineares da dinâmica, e deduzimos a equação de movimento para a interface com acoplamentos até segunda-ordem na perturbação. Para tanto, expandimos em série de Fourier a perturbação na interface e o correspondente campo de pressão reduzido respectivamente como

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta), \quad (3.9)$$

com amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$, e números de onda azimutais discretos $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e

$$P_j = \sum_{n \neq 0} P_{jn}(t) \left(\frac{R^{|n|}}{r^{|n|}} \right)^{(-1)^j} \exp(in\theta), \quad (3.10)$$

onde a expressão (3.10) automaticamente satisfaz a equação de Laplace. Tal abordagem oferece uma maneira alternativa de atacar o problema, em contraste com o método usual que considera expansões de um potencial de velocidade.

Prosseguimos expressando P_j em termos das amplitudes de perturbação ζ_n . Para isso, vamos considerar as duas condições de contorno na interface discutidas no primeiro capítulo [19, 20]:

- (i) A condição de contorno cinemática

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2|_{\mathcal{R}}, \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{v}_j$ é dado pela Eq. (3.4) e $\hat{\mathbf{n}}$ denota o vetor normal unitário que aponta do fluido 1 para o fluido 2. Em coordenadas polares (r, θ) a condição de contorno cinemática (3.11) é reescrita como

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \mathbf{v}_{jr}|_{\mathcal{R}} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \mathbf{v}_{j\theta} \right) \right|_{\mathcal{R}} \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{v}_{jr}$ e $\mathbf{v}_{j\theta}$ denotam as componentes da velocidade de cada fluido (3.4) respectivamente na direção $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

(ii) A descontinuidade da pressão hidrodinâmica

$$(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} = \sigma \kappa|_{\mathcal{R}}, \quad (3.13)$$

onde κ denota a curvatura da interface.

Substituindo as Eqs. (3.9) e (3.10) na condição de contorno cinemática (3.12), expandindo até segunda ordem na perturbação, e calculando a transformada de Fourier obtemos, após algumas manipulações, a solução para $P_{jn}(t)$ até segunda ordem em ζ dadas pelas funções *complexas*

$$\begin{aligned} P_{1n}(t) = & -\frac{\eta_1}{\mathcal{E}_1 k} \frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n \\ & + \frac{\eta_1}{\mathcal{E}_1 k} \sum_{n' \neq 0} \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \left\{ \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1'} \left[\text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right] + i \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{E}_1'} \left[\text{sgn}(n) - \frac{\text{sgn}(n')}{|n|} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned} P_{2n}(t) = & \frac{\eta_2}{\mathcal{E}_2 k} \frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n \\ & + \frac{\eta_2}{\mathcal{E}_2 k} \sum_{n' \neq 0} \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \left\{ \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_2'} \left[\text{sgn}(nn') + \frac{1}{|n|} \right] - i \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{E}_2'} \left[\text{sgn}(n) + \frac{\text{sgn}(n')}{|n|} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 + i \text{sgn}(n)\mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2 - i \text{sgn}(n)\mathcal{D}_2$, $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 + i \text{sgn}(n')\mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 - i \text{sgn}(n')\mathcal{D}_2$ e $k = b^2/12$ é a permeabilidade. Os pontos sobre as amplitudes de perturbação representam derivadas totais com relação ao tempo. A função sinal $\text{sgn}(nn') = 1$ se $(nn') > 0$ e $\text{sgn}(nn') = -1$ se $(nn') < 0$.

Podemos agora usar as relações (3.14) e (3.15) para substituir os campos de pressão reduzida (3.10) na condição de contorno para a pressão (3.13) através da Eq. (3.8). Deixando apenas sobreviver os termos quadráticos na amplitude de perturbação, e equiparando os modos de Fourier, obtemos a equação *adimensional* de modos acoplados para as amplitudes de perturbação na interface (para $n \neq 0$):

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'} \right], \quad (3.16)$$

onde

$$\Lambda(n) = \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{[(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)]} |n| [1 - B(n^2 - 1)] \quad (3.17)$$

é a relação de dispersão linear, e

$$\mathcal{F}(n, n') = \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{[(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)]} |n| \left[\frac{1}{2} - B \left(1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right) \right], \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n, n') &= \left[\frac{(\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2) + A(\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2)}{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)} \right] \left[\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2} \right] \\ &\times \left\{ |n| [1 - \mathcal{H}_0 \text{sgn}(nn')] - \mathcal{H}_1 + i[\mathcal{I}_0 \text{sgn}(n') + |n|\mathcal{I}_1 \text{sgn}(n)] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

representam os termos de segunda ordem no acoplamento dos modos que surgem naturalmente como uma consequência de nosso método fracamente não-linear, que considera a presença de todo o espectro de modos. As expressões complicadas para as funções $\mathcal{H}_\alpha$ and $\mathcal{I}_\alpha$ que aparecem no coeficiente $\mathcal{G}(n, n')$ na Eq. (3.19) são dadas por

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{\left[A^{1-\alpha} \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}'_1} \mathcal{C}_1 + \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} \mathcal{C}_2 \right) - A^\alpha \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}'_1} \mathcal{C}_1 - \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} \mathcal{C}_2 \right) \right]}{f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A)} \quad (3.20)$$

e

$$\mathcal{I}_\alpha = \frac{\left[A^{1-\alpha} \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}'_1} \mathcal{D}_1 + \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} \mathcal{D}_2 \right) - A^\alpha \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}'_1} \mathcal{D}_1 - \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} \mathcal{D}_2 \right) \right]}{f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A)}, \quad (3.21)$$

onde $f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A) = [(\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2) + A(\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2)]$, e $\alpha = 0, 1$.

A expressão (3.16) é a equação de modos acoplados para o problema de Saffman-Taylor

com fluxo radial na célula de Hele-Shaw girante sob o efeito da força de Coriolis. Ela dá a evolução temporal das amplitudes de perturbação ζ_n até segunda ordem. Note que todas estas quantidades (Λ , $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$) são complexas de um modo geral. A taxa de crescimento ou decaimento das perturbações $\lambda(n)$ (taxa de crescimento linear) é a parte real da quantidade complexa definida na Eq. (3.17), $\lambda(n) = \text{Real}[\Lambda(n)]$. O mesmo é verdade para os termos de acoplamento $F(n, n') = \text{Real}[\mathcal{F}(n, n')]$ e $G(n, n') = \text{Real}[\mathcal{G}(n, n')]$. Similarmente ao que fizemos no capítulo 2, na Eq. (3.16) os comprimentos estão adimensionalizados por R e o tempo por R/U , onde

$$U = \frac{b^2 R (\rho_1 - \rho_2) \Omega^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \quad (3.22)$$

é uma velocidade característica. Definimos também o parâmetro adimensional para a tensão superficial

$$B = \frac{\sigma}{R^3 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2)} \quad (3.23)$$

e o contraste de viscosidade

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (3.24)$$

Como estamos trabalhando com as versões adimensionais das equações, temos que a Eq. (3.16) fica convenientemente escrita em termos dos parâmetros adimensionais do sistema A , B , $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_j$, onde os últimos dois estão em função do número de Reynolds dos fluidos 1 e 2. A presença da força de Coriolis na Eq. (3.4) introduz uma dependência explícita em Re_j e A na taxa de crescimento linear $\lambda(n)$, assim como nos termos de acoplamento dos modos $F(n, n')$ e $G(n, n')$. Os número de Reynolds funciona como um parâmetro de controle que regula a intensidade dos efeitos da força de Coriolis, que são ausentes quando $\text{Re}_j = 0$ (ou equivalentemente quando $\mathcal{C}_j = 1$ e $\mathcal{D}_j = 0$). De fato, quando $\text{Re}_j = 0$, Eqs. (3.17)-(3.19) reproduzem os resultados obtidos na Ref. [24] para o problema correspondente sem o efeito da força de Coriolis (comparar com as Eqs. (2.4)-(2.7) do capítulo 2). É importante também ressaltar que, após a reintrodução apropriada das dimensões, nossa relação de dispersão linear (3.17) concorda com a fórmula equivalente de Walters-Cummings no caso $A = -1$ [40]. Durante toda esta análise, focalizaremos na situação em que a instabilidade centrífugo-induzida é maximizada, na qual o fluido interno é muito mais denso do que o externo ($\rho_1 \gg \rho_2$), desta forma podemos fazer $\rho_2 = 0$. Sob tais circunstâncias os efeitos de Coriolis são associados a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\text{Re})$ e

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\text{Re})$, que são funções do número de Reynolds Re do fluido 1 (daqui por diante vamos omitir o subscrito 1).

Concluimos esta seção discutindo brevemente sobre uma conexão entre nossa relação de dispersão linear (3.17) com a recentemente obtida pela Ref. [41]. Walters e colaboradores [41] derivaram uma relação de dispersão linear para o caso mais complicado no qual os termos inerciais “padrão” são retidos [Eq.(3.26) na Ref. [41]]. Observe que não é exatamente simples relacionar diretamente este resultado com o obtido na Eq. (3.17), pois na Ref. [41] os dois fluidos estão contidos dentro de um disco limitado (no qual uma condição de não-fluxo é aplicada no cálculo da velocidade média do fluido), com raio adimensional do disco tomado como 1 e o raio do domínio do fluido interno R_0 . Inversamente, nossos resultados atuais negligenciam os termos inerciais “padrão”, e consideram que o fluido exterior não é limitado por uma borda. Na notação da Ref. [41] uma relação pode ser obtida considerando um limite em que $\mathcal{A} = O(1)$, enquanto $\mathcal{S} \rightarrow \infty$, com a combinação $\mathcal{A}\mathcal{S}(1 - 1/\tilde{\rho}) = O(1)$, onde $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ e $\tilde{\rho}$ são o número de Strouhal, uma razão da escala de tempo para o fluxo e a rotação, e a razão de densidade, respectivamente [41]. Tal comparação ainda requer um reescalonamento dos comprimentos (fazendo a borda do disco rígido ir para infinito na Ref. [41], enquanto mantém-se R_0 finito) [52]. Executamos tal limite e verificamos um acordo perfeito entre a nossa Eq. (3.17) e a Eq. (3.26) da Ref. [41]. Um estudo mais completo sobre a comparação não trivial entre nosso sistema e o estudado pela Ref. [41] vai além do escopo deste trabalho atual, e será investigado em uma outra oportunidade.

3.4 EVOLUÇÃO LINEAR

3.4.1 Taxa de crescimento linear

Nesta seção, investigaremos as consequências das modificações introduzidas pela lei de Darcy generalizada (3.4) nos estágios lineares para a evolução da interface. Começamos discutindo algumas características importantes do regime linear. Note que a taxa de crescimento linear $\lambda(n) = \text{Real}[\Lambda(n)]$ [veja Eq. (3.17)] está escrita como o produto de um prefator que depende de Re e A , por $|n|[1 - B(n^2 - 1)]$, que por sinal, é a taxa de crescimento linear para o caso *sem* o efeito Coriolis [24]. Uma consequência imediata da existência de tal prefator é o fato que o modo crítico

$$n_c = \sqrt{1 + \frac{1}{B}}, \quad (3.25)$$

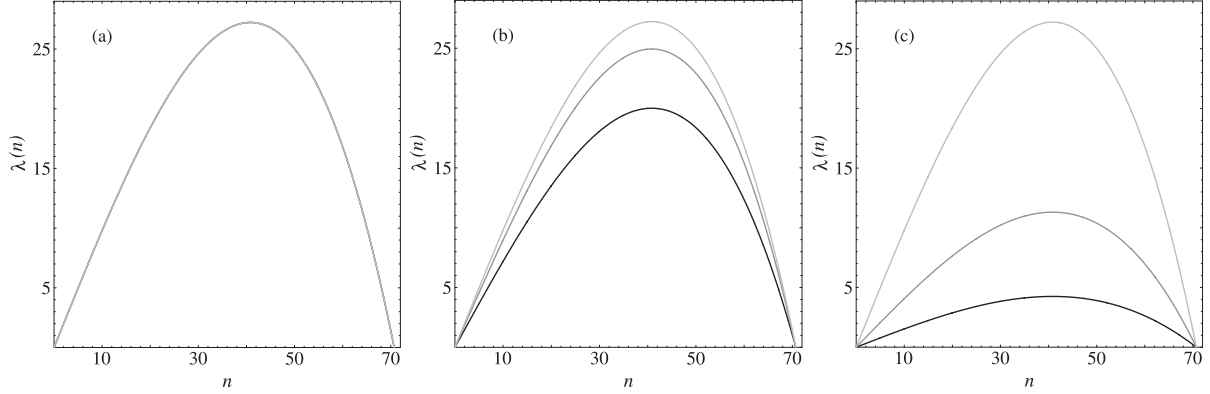


Figura 3.2 Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função de n , para $A = -1, 0, +1$, e três valores diferentes de Re : (a) 0, (b) 0.25 e (c) 1. As cores se referem a diferentes valores do contraste de viscosidade: $A = -1$ (preto), $A = 0$ (cinza escuro) e $A = +1$ (cinza claro). Note que escondido na curva cinza clara em (a) existem na verdade três curvas coincidentes (as outras duas estão sobrepostas).

(definido ajustando $\lambda(n) = 0$), e o modo de crescimento máximo

$$n_{max} = \frac{n_c}{\sqrt{3}}, \quad (3.26)$$

que maximiza $\lambda(n)$, não mostram nenhuma dependência em Re ou A . Como resultado, a banda de modo instáveis (caracterizada por n_c) e o número típico de dedos no estágio linear (especificado por n_{max}) não são afetados pelos efeitos de Coriolis. Apesar de ter uma influência evidente no número típico dos dedos mostrados pelas equações, o parâmetro B não terá muita influência nos resultados principais apresentados neste trabalho. Este apenas introduz alguns reescalamentos quando variado (B menor tende a aumentar a magnitude dos efeitos). Durante todo este estudo, e sem perda de generalidade, tomamos o valor característico $B = 2.0 \times 10^{-4}$. É importante mencionar que todos os valores dos parâmetros adimensionais usados em nosso estudo atual (B , A , e Re) são absolutamente consistentes com os valores típicos das quantidades físicas correspondentes usadas em experimentos existentes na célula de Hele-Shaw girante, principalmente aqueles realizados por Ortín, Casademunt e colaboradores [20, 22, 33, 34, 45].

A figura 3.2 descreve a taxa de crescimento linear em função de n , para $A = -1$ (curva preta), $A = 0$ (cinza escuro), $A = +1$ (cinza claro), e três valores diferentes de Re : (a) 0, (b) 0.25 e (c) 1. Se os efeitos da força de Coriolis não forem incluídos, pode-se verificar da Eq. (3.17) que $\lambda(n)$ é completamente insensível a mudanças em A . Assim, na Fig. 3.2 (a) os casos para $A = -1, 0, +1$ são todos descritos pela mesma curva. Entretanto, se $Re \neq 0$ a taxa de crescimento linear se torna dependente de A e esta única curva se divide em outras

(uma para cada valor de A) devido aos efeitos da força de Coriolis. Se $Re = 0.25$ [Fig. 3.2 (b)], obtemos três curvas, onde a curva para $A = +1$ ($A = -1$) tem o mais elevado (mais baixo) pico. Desta forma, se Re for não zero e estiver fixo enquanto variamos A , os padrões se tornam mais instáveis quando A varia de -1 até $+1$. Isto faz perfeito sentido físico já que quando $A = -1$ (fluido viscoso interno que empurra um fluido exterior com viscosidade nula) temos a situação mais estável com relação à instabilidade do Saffman-Taylor. É também evidente da Fig. 3.2 (c) que maiores números de Reynolds ($Re = 1$) tendem a gerar curvas que apresentam os picos tipicamente mais baixos para $A \neq +1$, indicando a natureza estabilizante dos efeitos da força de Coriolis. Conseqüentemente, se A for fixo, mas diferente de $+1$, valores maiores de Re tendem a conter o crescimento dos dedos na interface. Todos estes resultados da estabilidade linear são consistentes com simulações numéricas recentes do problema [42, 43].

Investigando a Eq. (3.17) podemos verificar que os efeitos da força de Coriolis desaparecem no limite do valor positivo mais elevado para o contraste de viscosidade $A = +1$, mesmo se Re for não nulo. Esta é a razão pela qual a curva cinza clara para $A = +1$ descrita nas Figs. 3.2(a) - 3.2(c) permanecem sem mudanças enquanto o número de Reynolds é variado. Conseqüentemente, a situação em que a força de Coriolis é nula pode ser acessada fazendo $Re = 0$ para qualquer A , ou assumindo $A = +1$ para qualquer $Re \neq 0$.

Está claramente ilustrado na Fig. 3.2 que apesar da ação estabilizante do efeito Coriolis, a posição do pico e a largura da banda de modos instáveis permanecem inalterados, independentemente dos valores de Re e de A . Uma explicação física para este papel estabilizante pode ser dada baseando-se no fato que a força de Coriolis tende a mover os dedos “para trás” na direção θ , desviando-os do crescimento puramente radial. Portanto, o efeito Coriolis inibe o crescimento radial devido às forças centrífugas, conduzindo a uma diminuição do crescimento das perturbações na interface. Mesmo que o número dos dedos não seja alterado pelas forças de Coriolis, a sua taxa de crescimento radial é certamente afetada.

Os aspetos destacados acima são também observados na Fig. 3.3 onde valor de máximo da taxa de crescimento $\lambda(n_{max})$ é traçado em função de $0 \leq Re \leq 1$, para os mesmos valores de A e B usados na Fig. 3.2. Se $A = +1$, a altura do pico não muda enquanto Re é variado, significando que o efeito Coriolis não desempenha nenhum papel. Para $A \neq +1$, a taxa de crescimento para o número típico de dedos diminui com aumento de Re . Esta queda na magnitude de $\lambda(n_{max})$ com Re é mais forte para valores menores de A . Uma conclusão geral importante é que, a fim de induzir contribuições cada vez maiores da força de Coriolis, não é suficiente considerar valores grandes de Re , mas também valores menores de A . Por outro lado, a presença de A na Eq. (3.17) vem apenas através da inclusão das forças de Coriolis, de modo que se $Re = 0$ a

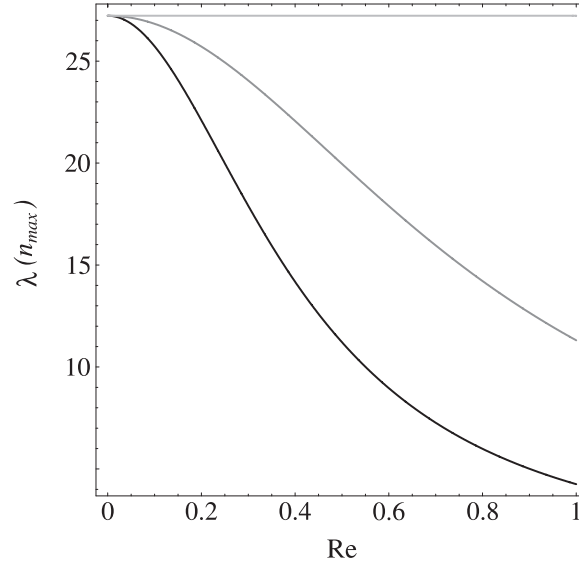


Figura 3.3 Taxa de crescimento máxima $\lambda(n_{max})$ em função do número de Reynolds Re , para $A = -1$ (preto), $A = 0$ (cinza escuro) e $A = +1$ (cinza claro).

taxa de crescimento linear é completamente independente de A . Estes resultados sugerem um acoplamento interessante entre Re e A quando os efeitos da força de Coriolis são levados em conta no problema da célula de Hele-Shaw girante.

3.4.2 Modulação de fase

Sabemos que o crescimento (ou decaimento) das perturbações na interface ocorrem a uma taxa $\lambda(n) = \text{Real}[\Lambda(n)]$ no estágio linear. Por outro lado, quando o efeito da força de Coriolis está presente a evolução da perturbação na interface é modificada pela modulação de fase $\omega(n) = \text{Im}[\Lambda(n)]$. A aparição desta fase $\omega(n)$ é exclusivamente devido ao efeito da força de Coriolis, e revela que os dedos instáveis começam a “entortar para trás”, em virtude da inércia (força de Coriolis). Sendo assim, temos que $\exp[in\theta + i\omega(n)]$ representa um onda viajante, com “velocidade” $-\omega(n)/n$ na direção θ . Como (r, θ) são as coordenadas polares fixas no referencial girante na célula de Hele-Shaw, os dedos emergentes se movem “para trás” no sentido oposto da rotação [19, 40, 41]. Este é o resultado analítico que mostra a tendência da força de Coriolis a “desviar” os dedos na direção θ na célula de Hele-Shaw girante. Nossa abordagem considera as perturbações na interface como funções de (r, θ) . Desta forma, os resultados para a modulação de fase nos mostram apenas a tendência dos dedos desviarem na direção θ , mantendo as perturbações da interface ainda como funções de (r, θ) .

Portanto, podemos analisar como os parâmetros de controle A e Re modificam a intensidade

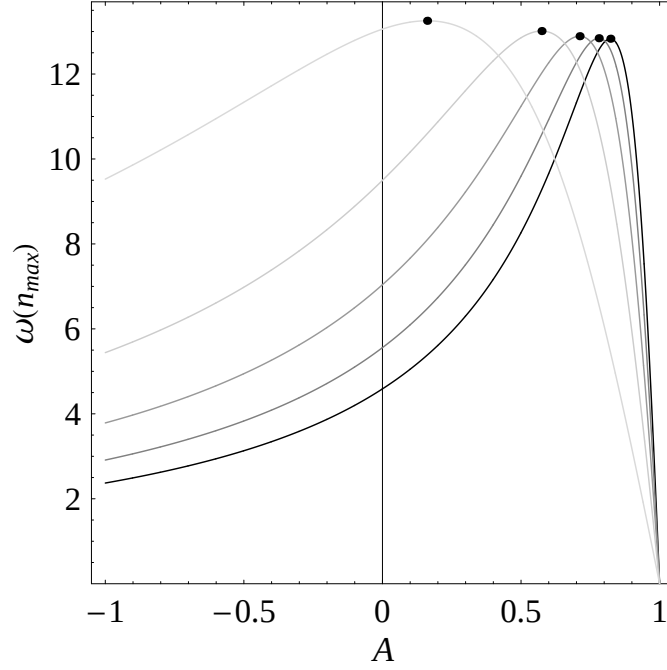


Figura 3.4 Modulação de fase $\omega(n_{max})$ em função de A , para cinco valores de $Re = 1, 2, 3, 4, 5$. Cores mais escuras se referem a maiores valores de Re . Para melhor visualização, os pontos pretos representam os máximos de cada curva

da modulação de fase. A Fig. 3.4 esboça $\omega(n)$ em função de A para diversos valores fixos de $Re = 1, 2, 3, 4, 5$ quando $n = n_{max}$ (número típicos de dedos que participam da dinâmica). A característica mais impressionante é que a modulação de fase só existe devido à força de Coriolis ($Re \neq 0$), mas é sempre regulada pelo contraste de viscosidade A . Fica evidente da Fig. 3.4 que ainda existe um acoplamento forte entre Re e A . Um ponto bastante interessante é o fato de que aumentando os valores do número de Reynolds não teremos necessariamente uma maior intensidade do “desvio” dos dedos na direção θ . Isto depende ainda da viscosidade de cada fluido, mostrando que o contraste de viscosidade desempenha também um importante papel na modulação de fase. Como exemplo, para $A = -1$ a modulação de fase é menor quando o número de Reynolds for maior ($Re = 5$), enquanto que, para $Re = 1$, temos que $\omega(n_{max})$ é mais acentuado para o mesmo valor de A . Para o nosso caso de interesse que maximiza os efeitos centrífugos, vemos que a modulação de fase é sempre positiva para qualquer valor de A , implicando que nesta situação os dedos viscosos só desviarão para o sentido oposto da rotação da célula de Hele-Shaw (na direção θ).

Está claro na Fig. 3.4 que, para um dado valor do número de Reynolds, a intensidade de $\omega(n_{max})$ cresce quando aumentamos o contraste de viscosidade de -1 até $A^* = A^*(Re)$, quando chega no seu valor máximo. Desta forma, o estágio linear da dinâmica prevê que os dedos

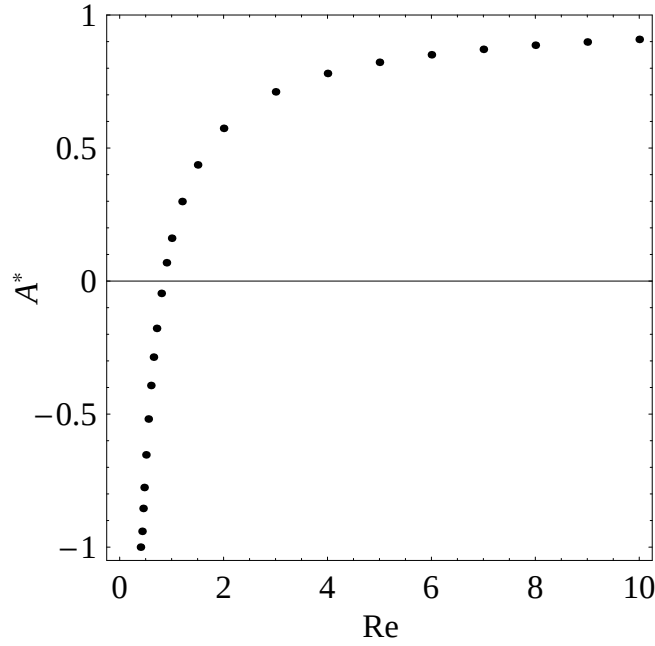


Figura 3.5 A^* para diversos números de Reynolds.

viscosos terão maiores desvios na direção θ quando $A = A^*$. Continuando a aumentar o valor de A a partir de A^* , vemos um decaimento na intensidade de $\omega(n_{max})$ chegando a zero quando $A = +1$. A modulação de fase é nula para qualquer número de Reynolds quando $A = +1$, indicando que a força de Coriolis não desempenha nenhum papel, concordando com resultados similares da Seção 3.4.1.

Na verdade, quando o efeito de Coriolis está presente, os valores de A que maximizam $\omega(n_{max})$ migram de $A^* = -1$ para valores cada vez maiores de A quando aumentamos o número de Reynolds, tal que $A^* \rightarrow +1$. Este aspecto é melhor ilustrado na Fig. 3.5 que mostra como A^* varia com o número de Reynolds Re . Nota-se também que na Fig. 3.5 existe variação muito rápida de A^* entre $0.5 \leq Re < 5$, enquanto que para $Re \geq 5$ teremos uma aproximação lenta de A^* para $+1$.

3.5 EVOLUÇÃO FRACAMENTE NÃO-LINEAR

Agora voltamos nossa atenção ao estágio fracamente não-linear do fluxo, focalizando os efeitos de competição entre os dedos viscosos, o fenômeno não-linear de maior relevância na célula de Hele-Shaw girante. Está bem estabelecido que o contraste de viscosidade A tem um papel crucial na determinação do comportamento na interface para o fluxo em célula de Hele-

Shaw girante quando os efeitos de Coriolis são desprezados [22, 24, 25, 44]. Considerando variabilidade do comprimento do dedo viscoso como uma medida da competição entre os dedos, foi verificado que a competição entre as estruturas da formação dos dedos é dramaticamente modificada quando A varia: valores cada vez maiores na magnitude de $A > 0$ ($A < 0$) conduzem à competição acentuada entre os dedos que estão saindo (entrando). Também foi mostrado que a competição é significativamente suprimida quando $A \rightarrow 0$. Quando os efeitos de Coriolis são significativos, além do parâmetro A , é de interesse examinar como a dinâmica da competição entre os dedos viscosos será afetada pelo parâmetro de controle do efeito da força de Coriolis Re .

Como nas Refs. [24, 46], para estudar a competição consideramos a influência do modo fundamental n no crescimento de seu sub-harmônico $n/2$. Para fazermos isso, temos que reescrever a perturbação (3.9) em termos dos modos senos e cossenos

$$\zeta(\theta, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (3.27)$$

onde as amplitudes $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ são reais. Então, para expressões consistentes até segunda ordem, substituímos os termos $\dot{a}_n$ e $\dot{b}_n$ no lado direito da Eq. (3.16) por $\lambda(n) a_n$ e $\lambda(n) b_n$, respectivamente. Sem perda de generalidade podemos fazer $a_n > 0$ e $b_n = 0$. Sob tais circunstâncias, as equações de movimento para os modos sub-harmônicos seno e o cossenos são obtidas

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n) a_n\} a_{n/2}, \quad (3.28)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n) a_n\} b_{n/2}, \quad (3.29)$$

onde a função

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (3.30)$$

determina a competição entre os dedos viscosos. Um maior detalhamento na obtenção da equação de movimento para o modo sub-harmônico Eqs. (3.28)-(3.30) pode ser encontrada no apêndice B desta dissertação. A maneira que $C(n)$ é conectada com competição entre os dedos pode ser deduzida simplesmente inspecionando as Eqs. (3.28) e (3.29). Verificamos que $C(n) > 0$ aumenta o crescimento do modo sub-harmônico cosseno $a_{n/2}$, enquanto inibe o crescimento de seu sub-harmônico seno $b_{n/2}$. O resultado é uma grande variabilidade entre os

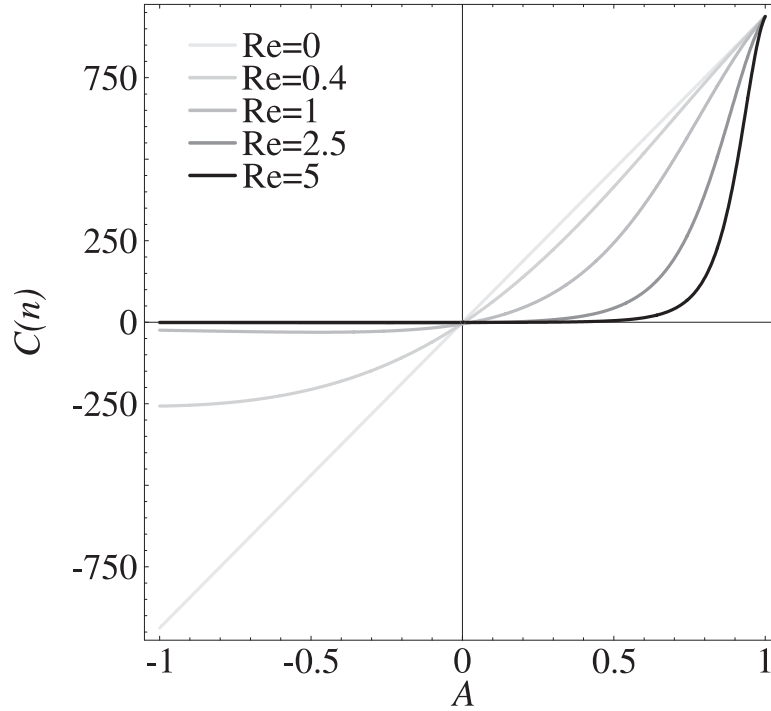


Figura 3.6 Função competição $C(n)$ em termos do contraste de viscosidade A , e cinco valores diferentes do número de Reynolds: $Re = 0, 0.4, 1, 2.5, 5$. Cores escuras se referem a valores de Re altos.

comprimentos dos dedos do fluido 1 que penetram no fluido 2, este efeito é o que caracteriza a competição entre os dedos que saem. Por outro lado, os modos seno $b_{n/2}$ podem variar os comprimentos dos dedos do fluido 2 que penetram no fluido 1, mas está claro da Eq. (3.29) que seu crescimento é suprimido quando $C(n) > 0$. Inverter o sinal de $C(n)$ significa inverter as conclusões discutidas acima, de forma que os modos $b_{n/2}$ seriam favorecidos com relação aos modos $a_{n/2}$. Independentemente de seu sinal, a função $C(n)$ mede a intensidade da competição entre os dedos, de tal forma que, para valores cada vez maiores de $C(n) > 0$ [$C(n) < 0$], teremos uma competição mais acentuada entre os dedos que saem [entram].

Começamos nosso estudo da dinâmica da competição entre os dedos examinando os resultados fracamente não-lineares descritos na Fig. 3.6. Esta traça $C(n)$ dado pela Eq. (3.30) em função do contraste da viscosidade A (com $-1 \leq A \leq 1$) para cinco valores diferentes do número de Reynolds Re . Para observar o crescimento do modo fundamental e também permitir o crescimento de seu sub-harmônico, realizamos a análise considerando $n = n_c$. A característica mais evidente da Fig. 3.6 é o fato de que o comportamento da competição dos dedos é fortemente dependente de Re e pode ser muito diferente do comportamento equivalente descrito quando os efeitos da força de Coriolis são negligenciados [24]. Na Figura 3.6, quando $Re = 0$ (reta cinza clara) reproduzimos exatamente o que foi observado nas Refs. [22, 24, 25, 44] para

o caso *sem* Coriolis.

A situação é significativamente modificada quando os efeitos da força de Coriolis são levados em conta. A primeira característica relevante quando $Re \neq 0$ é o fato de que, ao contrário do caso $Re = 0$, a competição entre os dedos não desaparece quando A tende a zero. Ao invés disso, $C(n) = 0$ apenas para valores positivos específicos do contraste de viscosidade $\bar{A} = \bar{A}(Re)$. Na verdade, quando os efeitos de Coriolis são considerados e Re é aumentado, a competição tende a desaparecer para valores cada vez maiores de $\bar{A}$, tal que $\bar{A} \rightarrow 1$ para valores muito grandes de Re . Conseqüentemente, se os efeitos da força de Coriolis não forem desprezados na célula de Hele-Shaw girante, podemos produzir belos padrões simétricos em que o comprimento médio de todos os dedos são aproximadamente os mesmos, sem necessariamente impor que $A = 0$. De fato, dependendo do valor de Re podemos obter uma situação em que a competição entre os dedos é praticamente ausente para A consideravelmente elevado. Esta última conclusão exemplifica como a inclusão dos efeitos da força de Coriolis pode introduzir mudanças significativas no cenário não-linear da formação de padrões na célula de Hele-Shaw girante.

O comportamento da competição entre os dedos é mais complexo e rico quando os efeitos da força de Coriolis são considerados. Examinando a Fig. 3.6 e contrastando o caso para $Re = 0$ (sem Coriolis) com $Re \neq 0$ (efeito Coriolis não nulo), identificamos alguns comportamentos distintos da competição entre os dedos. Em geral, se $A > 0$ observamos que curva para $Re \neq 0$ se posiciona abaixo da linha reta para $Re = 0$, de modo que uma diminuição na competição entre os dedos que vão para fora é esperada. Por outro lado, se $A < 0$ notamos que a curva para $Re \neq 0$ fica acima da linha reta para $Re = 0$. Conseqüentemente, neste último intervalo a competição entre os dedos que entram será diminuída (mais intensamente que para a região de $A > 0$). O efeito geral da força de Coriolis é conter a competição entre os dedos, independentemente se os dedos estão indo para dentro ou para fora. Verificamos também que para valores grandes de Re , todas as curvas para $C(n)$ se aproximam assintoticamente de zero, exceto para valores de A próximos de $+1$.

3.6 FORMALISMO “VORTEX-SHEET”

Uma abordagem alternativa para descrever a interface entre os fluidos na célula de Hele-Shaw girante pode ser obtida através da representação “vortex-sheet” [35]. Nesta abordagem teórica, a interface fluido-fluido é descrita por uma curva $\mathbf{r}(s, t)$ (ver Fig. 3.7) parametrizada pelo comprimento de arco s . Desta forma, a evolução da interface pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{r}(s,t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{w}(s,t) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.31)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ denota o vetor normal e $\mathbf{w}(s,t)$ é a velocidade média da interface.

A evolução temporal dos padrões formados pode ser escrita unicamente em termos da forma da interface. Para isso, usamos a equação auto-consistente para a velocidade média da interface $\mathbf{w}(s,t)$ devido à existência de vorticidade na interface fluido-fluido. A velocidade $\mathbf{w}(s,t)$ é expressa em função da “folha de vorticidade” γ na interface entre os fluidos pela fórmula integral de Birkhoff [35, 53]

$$\mathbf{w}(s,t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int ds' \frac{\hat{\mathbf{z}} \times [\mathbf{r}(s,t) - \mathbf{r}(s',t)]}{|\mathbf{r}(s,t) - \mathbf{r}(s',t)|^2} \gamma(s',t), \quad (3.32)$$

onde $\mathbf{P}$ denota o valor principal da integral e $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor unitário na direção perpendicular à célula de Hele-Shaw. A função $\gamma(s,t)$ descreve a vorticidade gerada pela descontinuidade da velocidade tangencial entre os fluidos na interface (veja Fig. 3.7)

$$\gamma(s,t) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são dados pela lei de Darcy generalizada Eq. (3.4), e $\hat{\mathbf{s}}$ denota o vetor unitário tangente a interface como mostrado na Fig. 3.7. A velocidade média introduzida na Eq. (3.32) é definida como $\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$.

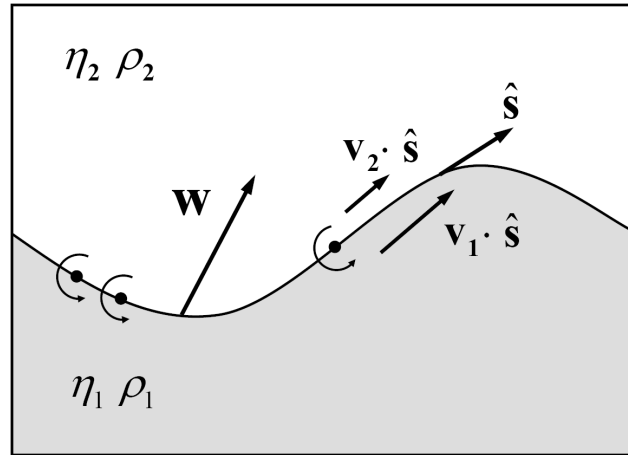


Figura 3.7 Representação esquemática da “vortex-sheet”.

Para termos acesso à vorticidade $\gamma(s,t)$, consideramos novamente as condições de contorno entre os fluidos: (i) a descontinuidade da pressão na interface; (ii) a condição de contorno

cinemática (continuidade da velocidade na direção normal). Prosseguindo com a mesma adimensionalização da seção 3.3, invertendo a Eq. (3.4) e utilizando as condições de contorno na interface, obtemos a equação adimensional para a vorticidade, convenientemente escrita em termos dos parâmetros A , B e Re ,

$$\gamma = 2\{\alpha \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \beta \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \delta[B\partial_s \kappa - \mathbf{r}\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}]\}, \quad (3.34)$$

onde $\partial_s = \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla$,

$$\alpha = \left[\frac{(1+A)E_2 - (1-A)E_1}{(1+A)E_2 + (1-A)E_1} \right], \quad (3.35)$$

$$\beta = \left[\frac{(1-A)F_1 - (1+A)F_2}{(1+A)E_2 + (1-A)E_1} \right], \quad \delta = \left[\frac{2}{(1+A)E_2 + (1-A)E_1} \right] \quad (3.36)$$

com

$$E_j = \frac{\mathcal{C}_j}{\mathcal{C}_j^2 + \mathcal{D}_j^2}, \quad F_j = \frac{\mathcal{D}_j}{\mathcal{C}_j^2 + \mathcal{D}_j^2}$$

e $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_j$ são representados pelas Eqs. (3.5) e (3.6), respectivamente. Mais uma vez o número de Reynolds funciona como um parâmetro de controle da força de Coriolis, que está ausente quando $Re = 0$ (situação em que $\alpha = A$, $\beta = 0$ e $\delta = 1$). Neste limite, a Eq. (3.34) reproduz o resultado obtido na Eq. (2.9) por Miranda e Alvarez-Lacalle [25] ao estudar a célula de Hele-Shaw girante *sem* o efeito da força de Coriolis.

Para obtermos a evolução da interface, a Eq. (3.34) deve ser resolvida com $\mathbf{w}$ dado pela Eq. (3.32), resultando em uma complicada equação íntegro-diferencial para vorticidade. Uma vez que γ é conhecido, a Eq. (3.32) é utilizada novamente para obter $\mathbf{w}$, e então através de sua componente normal atualiza-se a posição da interface. A única forma de resolver esta equação íntegro-diferencial é utilizando complexos métodos numéricos, como os desenvolvidos originalmente por Pauné, Sigel e Casademunt [54, 55] para o estudo do fluxo radial e retangular na célula de Hele-Shaw em repouso. Vale a pena salientar que este método numérico é capaz de acessar estágios altamente não-lineares da dinâmica, obtendo assim, após resolver a Eq. (3.32) numericamente, a evolução temporal para a interface fluido-fluido. Entretanto, aqui estamos interessados em comparar os resultados analíticos obtidos através deste formalismo com aque-

les obtidos através da teoria de modos acoplados da seção 3.3. Para efetuarmos a comparação com a teoria fracamente não-linear, vamos considerar o caso de interesse em que os efeitos centrífugos são maximizados ($\rho_1 \gg \rho_2$).

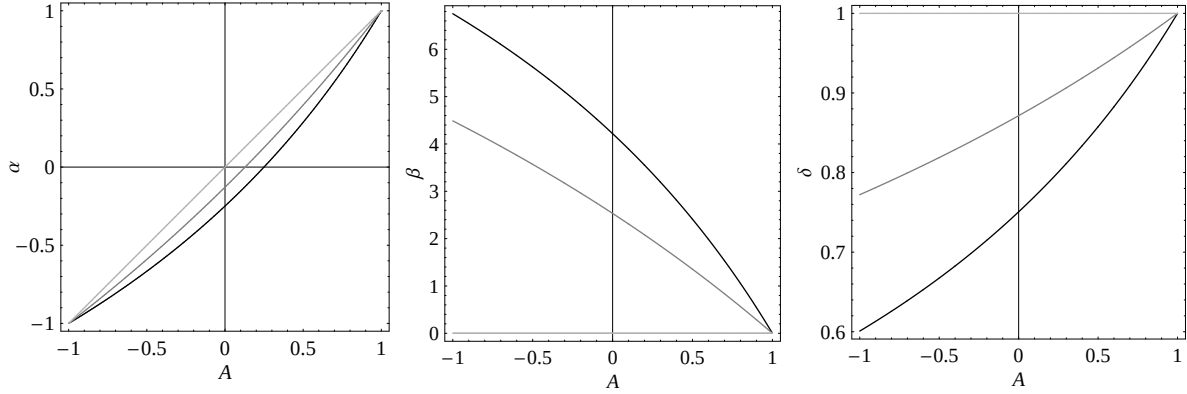


Figura 3.8 Gráficos dos parâmetros α , β e δ em função do contraste de viscosidade A para três valores de Re : 0, 2.5, 5. As curvas mais escuras representam valores de Re cada vez maiores.

A introdução do efeito da força de Coriolis através da lei de Darcy generalizada Eq. (3.4) alterou de forma não trivial a expressão de γ para célula de Hele-Shaw girante. O forte acoplamento entre o contraste de viscosidade A e o número de Reynolds Re também aparece nesta abordagem, como pode ser verificado nas Eqs. (3.35) e (3.36). Além disso, houve o surgimento do novo termo $\beta \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ na Eq. (3.34) devido à força de Coriolis (segundo termo do lado direito na expressão para γ). Este termo, que está multiplicado por β , envolve um produto escalar com o vetor $\hat{\mathbf{n}}$ ao invés de $\hat{\mathbf{s}}$, indicando uma contribuição explícita do efeito Coriolis para o desvio dos dedos viscosos na direção θ . O terceiro termo da Eq. (3.34) está agora reescalado por δ e envolve a tensão superficial B , o gradiente da curvatura $\partial_s \kappa$ e a força centrífuga ($\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$). Já a expressão $\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ (primeiro termo do lado direito da Eq. (3.34)) que, como visto no capítulo 2, é responsável pela competição entre os dedos viscosos [25], está agora diretamente influenciada pelos efeitos da força de Coriolis através da ação do parâmetro α .

Para acessarmos como os efeitos da força de Coriolis influenciam a vorticidade γ da interface, traçamos na Fig. 3.8 as novas funções α , β e δ em termos do contraste de viscosidade A para três valores diferentes do número de Reynolds. Concentrando-se apenas no terceiro painel da Fig. 3.8 que traça δ em função de A , vemos que quando $Re = 0$, $\delta = 1$ para qualquer valor do contraste de viscosidade, mas quando os efeitos da força de Coriolis são significativos ($Re \neq 0$) surge uma dependência de δ com o contraste de viscosidade A fazendo com que as contribuições dos efeitos centrífugos e da tensão superficial sejam agora diminuídos pelo fator δ , visto que $0 < \delta \leq 1$. Acessamos mais uma vez a característica estabilizante da força de Cori-

olis, que é maximizada quando $A = -1$, mas desprezível se $A = 1$. Além disso, quanto maior for o valor de Re , menor será o valor de δ , diminuindo ainda mais as contribuições do terceiro termo da Eq. (3.34). É importante notar que tais resultados estão em pleno acordo com aqueles obtidos usando o método perturbativo de modos acoplados da seção anterior, reforçando assim as nossas previsões anteriores.

No segundo painel da Fig. 3.8, vemos como β regula o novo termo que aparece na Eq. (3.34), que influencia os dedos a desviarem de seu crescimento puramente radial. Está claro da Fig. 3.8 que quando $Re = 0$, $\beta = 0$ para qualquer valor de A , indicando que quando o efeito da força de Coriolis é desprezível, não existe nenhuma possibilidade dos dedos desviarem na direção θ . No entanto, se $Re \neq 0$ temos que β assumirá apenas valores positivos que são maximizados quando $A = -1$. Por outro lado, a força de Coriolis não desempenha qualquer papel quando $A = 1$, mais uma vez concordado com resultados anteriores. Notadamente da Fig. 3.8, vemos que β assumirá valores cada vez maiores para números de Reynolds elevados, com exceção de $A = 1$. É importante notar que $\beta \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ apesar de ser a maior evidência de que a força de Coriolis tende a desviar os dedos na direção θ , tal termo não é o único responsável pelo desvio, visto que a força de Coriolis age de forma decisiva em toda a Eq. (3.34) e tal efeito dependerá do resultado combinado de todos os termos da vorticidade γ .

Finalmente, vamos analisar o primeiro painel da Fig. 3.8 que traça α em função de A . Uma das características mais importantes deste gráfico é que, na verdade, α atua como um “*contraste de viscosidade efetivo*” que é reescalado pela força de Coriolis. Note que, quando $Re = 0$, α é a função identidade, ou seja, $\alpha = A$, mas se os efeitos da força de Coriolis estão presentes, vai existir um contraste de viscosidade *efetivo* que será sempre menor do que o contraste de viscosidade real A entre os fluidos, exceto quando $A = \pm 1$, pois para estes valores $\alpha = \pm 1$. Vemos também da Fig. 3.8 que quanto mais elevado o valor de Re maior será o “desvio” de α com relação à reta $\alpha = A$. Concluimos, então, que a força de Coriolis diminui globalmente o contraste de viscosidade real A para um contraste de viscosidade efetivo α . Certamente, a dinâmica dos dedos será alterada pelo efeito Coriolis, visto que α multiplica o principal termo responsável pela competição dos dedos viscosos, como discutido no capítulo 2. Decorre ainda da Fig. 3.8 que se $A = 0$, α é diferente de zero, mas α é nulo apenas para valores bem definidos de $\bar{A}_\alpha = \bar{A}_\alpha(Re)$, dado por

$$\bar{A}_\alpha = \frac{E - 1}{E + 1}. \quad (3.37)$$

Vimos no capítulo 2 que quando o efeito da força de Coriolis é negligenciado e $A = 0$, não

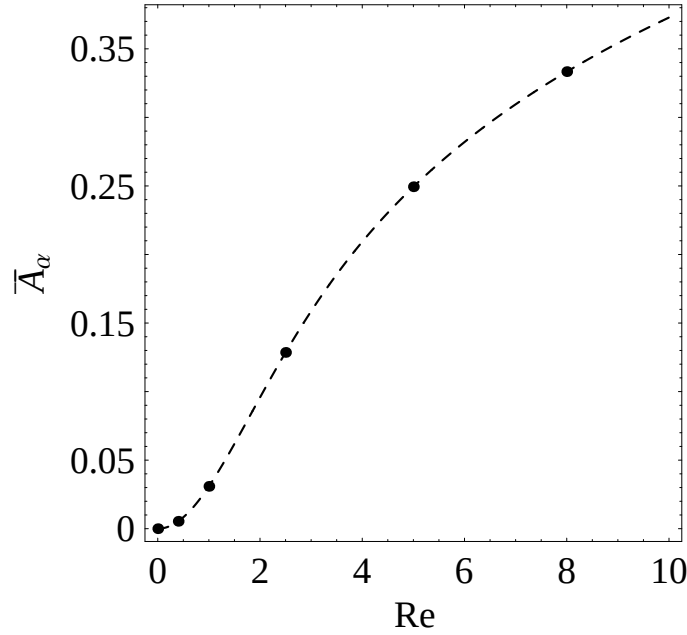


Figura 3.9 $\bar{A}_\alpha$ em função de Re (curva tracejada). Os pontos são as raízes $\bar{A}(Re)$ da função competição dados pela solução de $C(n) = 0$ [veja Eq. (3.30)]

teremos competição entre os dedos viscosos, resultado em padrões simétricos de grande beleza. Tal resultado foi confirmado numericamente na Ref. [25], usando o formalismo “vortex-sheet”, que gerou uma interface simétrica (ver Fig. 2.9(b)) quando $A = 0$, pois o primeiro termo da Eq. (2.9), que é intimamente ligado com a dinâmica da competição, desaparece para o contraste de viscosidade nulo. No entanto, quando o efeito Coriolis está presente, sabemos através da teoria de modos acoplados que a competição entre os dedos *não* se anula mais quando $A = 0$. A competição desaparece ($C(n) = 0$) somente para valores positivos do contraste de viscosidade dados por $\bar{A} = \bar{A}(Re)$. Analogamente, usando o formalismo “vortex-sheet”, se $\alpha = 0$ esperamos obter soluções simétricas para a interface, ou seja, competição nula entre os dedos. Portanto, da Eq. (3.37) vimos que α certamente não se nula quando $A = 0$ e $Re \neq 0$, concordando novamente com nossos resultados fracamente não-lineares.

Para uma comparação mais direta com nossa teoria perturbativa, e para termos acesso ao conjunto de parâmetros que anulam α , traçamos $\bar{A}_\alpha$ na Fig. 3.9 em função de Re (curva tracejada). Fica claro que os valores de A que anulam α crescem com o aumento de Re , sendo nulo apenas quando $Re = 0$. Uma conclusão análoga, usando a aproximação fracamente não-linear, prevê que $C(n) = 0$ para valores positivos do contraste de viscosidade dados por $\bar{A}(Re)$. Vamos além, e mostramos, nos pontos destacados da Fig. 3.9, as raízes da função competição (3.30),

$\bar{A}(\text{Re})$, para diversos valores de Re . Na Fig. 3.9 note que os pontos correspondentes a $C(n) = 0$ coincidem perfeitamente com a curva tracejada obtida pela Eq. (3.37). Está mais uma vez evidente a robustez da teoria de modos acoplados, que apesar de ser um método perturbativo fracamente não-linear até segunda-ordem, traz consigo informações físicas precisas e de grande relevância sobre o sistema e sua dinâmica, como demonstrado pela Fig. 3.9 que revela uma excelente concordância com formalismo “vortex-sheet”.

O formalismo “vortex-sheet” mais uma vez reforçou nossas previsões fracamente não-lineares. A incrível concordância entre estas duas abordagens completamente diferentes, deixam claro que o fenômeno de formação dos dedos viscosos já acontece em estágios relativamente iniciais da evolução da interface, mesmo quando consideramos o caso mais complicado em que todas as forças inerciais causadas pela rotação estão presentes.

3.7 COMPARAÇÃO COM O MODELO DE SCHWARTZ

Nesta seção faremos um paralelo entre nossos resultados lineares e não-lineares (que foram baseados no modelo originalmente proposto por Walters e Cummings [40]) com os obtidos usando o modelo de Schwartz [19]. Empregando a aproximação de Schwartz também é possível chegar a uma equação da lei de Darcy como mostrado na Eq. (3.4), entretanto, com coeficientes diferentes dados por [19]

$$\mathcal{C}_{jS} = \frac{1}{1 + 4\text{Re}_j^2} \quad \frac{\mathcal{D}_{jS}}{\mathcal{C}_{jS}} = 2\text{Re}_j.$$

Substituindo estes coeficientes na Eq. (3.4), e depois seguindo as mesmas etapas descritas na Sec. 3.3 obtemos uma equação diferencial de modos acoplados similar à Eq. (3.16), onde a taxa de crescimento linear $\lambda(n)_S$, e os termos de acoplamento dos modos $F(n, n')_S$ e $G(n, n')_S$ para a aproximação de Schwartz podem ser diretamente calculados da Eqs. (3.17)-(3.19) simplesmente substituindo $\mathcal{C}_j$ por $\mathcal{C}_{jS}$, e $\mathcal{D}_j$ por $\mathcal{D}_{jS}$.

Primeiramente, comparamos as taxas de crescimento $\lambda(n)$ e $\lambda(n)_S$ para o caso de interesse ($\rho_2 = 0$), quando os parâmetros Re e A são variados. Executamos um estudo comparativo na Fig. 3.10 que traça o erro percentual relativo

$$\Gamma = \frac{100[\lambda(n)_S - \lambda(n)]}{\lambda(n)} \quad (3.38)$$

em função de Re para alguns valores do contraste da viscosidade. Uma característica óbvia é

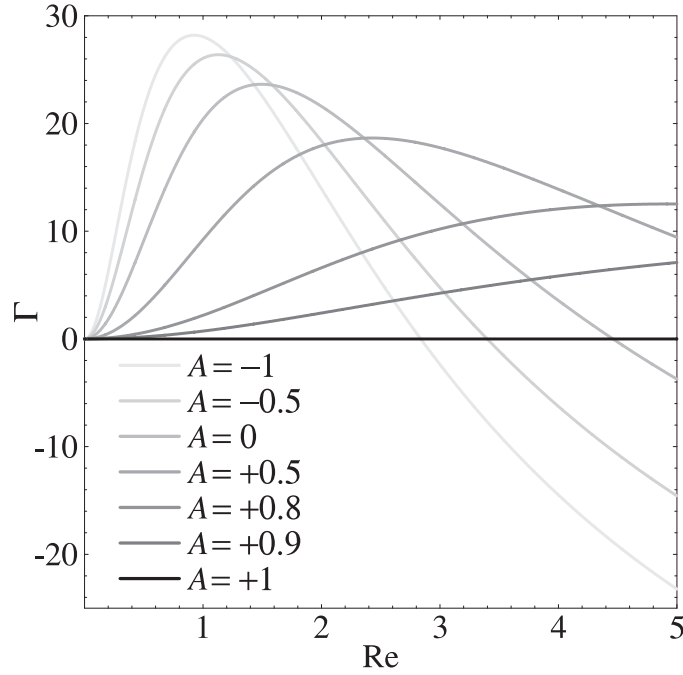


Figura 3.10 Erro percentual Γ em função de Re , para diferentes valores de A . Cores mais escuras se referem a maiores valores de A .

que, para um dado A , o erro Γ sofre a mudanças significativas enquanto o número de Reynolds é variado. É claro que se $A = +1$ as taxas de crescimento para os dois modelos são coincidentes e $\Gamma = 0$. Entretanto, se $-1 \leq A < +1$, os valores das taxas de crescimento coincidem apenas em dois valores específicos de Re : 0 e $\overline{Re} = \overline{Re}(A)$. Para um dado A , o erro percentual Γ é positivo no intervalo $0 < Re < \overline{Re}$, e negativo para $Re > \overline{Re}$. Isto indica que a aproximação de Schwartz superestima o valor da taxa de crescimento para o intervalo $0 < Re < \overline{Re}$, e subestima-o para $Re > \overline{Re}$. Estas descobertas estão em acordo com os resultados similares obtidos na Ref. [40] para o caso de elevado contraste da viscosidade $A = -1$, onde $\overline{Re} = 2.84$.

É também evidente na Fig. 3.10 que Γ apresenta uma dependência muito forte no contraste da viscosidade. Enquanto A é variado de -1 até $+1$, as curvas tendem a se aproximar da reta $\Gamma = 0$, indicando que o valor para $\lambda(n)_S$ tende a um melhor acordo com $\lambda(n)$ quando A é aumentado. Para os números de Reynolds considerados na Fig. 3.10 ($0 \leq Re \leq 5$), os maiores erros da aproximação de Schwartz ocorrem precisamente em $A = -1$ ($\Gamma \sim 28\%$ para $Re = 0.92$, e $\Gamma \sim 23\%$ para $Re = 5$). Entretanto, estes erros tendem a diminuir quando o contraste da viscosidade varia de -1 até $+1$. É interessante perceber que o erro para o subestimação ($\Gamma < 0$) pode ser muito mais significativo para valores maiores de Re (por exemplo, verificamos que o erro Γ pode ser de 45% para $A = -1$ e $Re = 10$). Também chamamos a atenção que quando

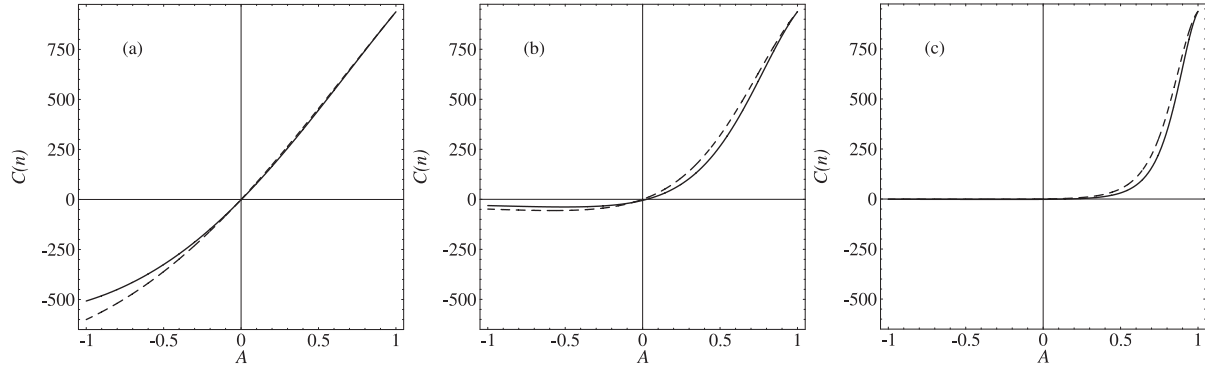


Figura 3.11 Funções competição $C(n)$ (curva preta contínua) e $C(n)_S$ (curva preta tracejada) em termos de A , para três valores diferentes de Re : (a) 0.25, (b) 0.92 e (c) 2.84.

$A = -1$ na Fig. 3.10, o erro é aproximadamente 5% para $Re = 0.17$ que sobe para aproximadamente 10% quando $Re = 0.25$. Este último valor do número de Reynolds foi considerado pela Ref. [40] (onde $A = -1$) como maior valor de Re para que a predição de Schwartz, para a taxa de crescimento linear, seja considerado como “bom”. Entretanto, acreditamos que 10% de divergência é um erro bastante considerável. Isto indica que Γ pode ser apreciável já para números de Reynolds muito pequenos.

Prosseguimos contrastando nossa abordagem com a de Schwartz no estágio fracamente não-linear nas Figs. 3.11 e 3.12. A figura 3.11 ilustra como a função da competição se comporta em termos de A , para três valores característicos do número de Reynolds Re : (a) 0.25, (b) 0.92 e (c) 2.84. A curva contínua preta se refere ao $C(n)$ calculado da Eq. (3.30), e a curva preta tracejada está relacionada a função equivalente $C(n)_S$ que derivamos baseados no modelo do Schwartz. Uma informação complementar pode ser obtida na Fig. 3.12, onde traçamos a diferença $C(n)_S - C(n)$ em função de A para os mesmos valores de Re usados na Fig. 3.11.

Podemos facilmente observar na Fig. 3.11(a) que para baixo Re , em general, a discordância entre as duas descrições é relativamente pequena para a maioria de valores do contraste de viscosidade A , mas aumenta significativamente quando $A \rightarrow -1$. Esta característica é também ilustrada claramente na Fig. 3.12(a), onde a diferença entre os modelos é particularmente grande no intervalo $-1 \leq A < 0$. Podemos também notar que mesmo se Re for tão baixo quanto 0.25, a diferença entre as duas abordagens no estágio fracamente não-linear podem ainda ser consideravelmente significativas, dependendo do valor de A .

Um cenário diferente é retratado na Fig. 3.11(b) e Fig. 3.12(b) quando $Re = 0.92$: agora as discrepâncias entre os dois modelos são significativamente maiores para $A > 0$ (relativo ao que acontece para o caso $Re = 0.25$), e estão certamente presentes ao longo de toda a escala de val-

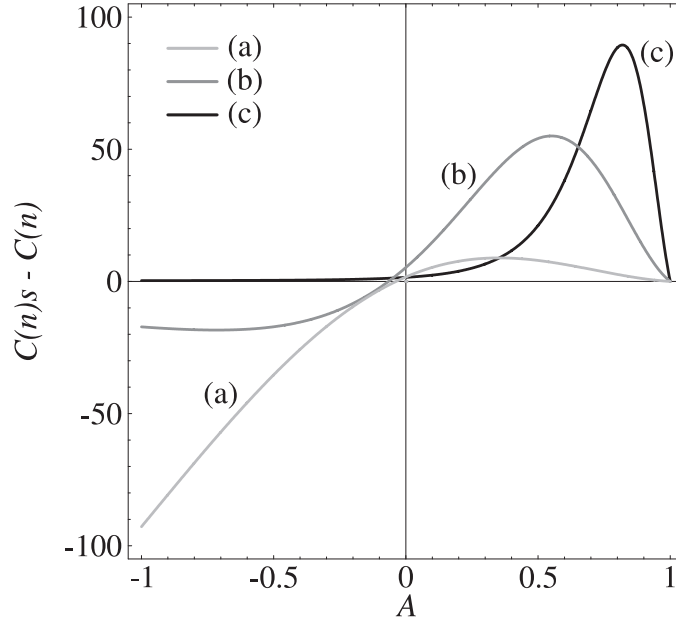


Figura 3.12 Diferença $C(n)_S - C(n)$ em função de A , para três valores diferentes de Re : (a) 0.25, (b) 0.92 e (c) 2.84. Cores mais escuras se referem a maiores valores de Re .

ores para o contraste da viscosidade ($-1 \leq A < +1$). Observamos também que na Fig. 3.11(b) quando variamos A , a curva tracejada pode se localizar acima ou abaixo da curva contínua, indicando que o modelo do Schwartz pode ser enganador a respeito da dinâmica da competição dos dedos. Este comportamento está ainda mais claro na Fig. 3.12(b). Quando aumentamos o número de Reynolds tanto quanto nas Figs. 3.11(a) e 3.12(a) em que $Re = 2.84$, observamos um comportamento inverso ao mostrado na Fig. 3.11(a) e Fig. 3.12(a): agora as divergências entre os modelos são muito pequenas para $-1 < A < 0$, mas notadamente elevadas no intervalo $0 < A < +1$.

Analisando as Figs. 3.11 e 3.12 é aparente o fato que, para um dado Re , a diferença entre as duas abordagens é completamente dependente do contraste da viscosidade. Além disso, as regiões de maior discrepância migram de valores em torno de $A = -1$ e números de Reynolds mais baixos para os arredores de $A = +1$ e valores de Re mais elevados. Por outro lado, independentemente do valor de Re , existem alguns valores de A em que não há nenhuma diferença entre os dois modelos [dados por $C(n)_S - C(n) = 0$]. Todos estes resultados indicam que a abordagem de Schwartz pode resultar em erros significativos nos estágios fracamente não-lineares.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A formação de padrões desafia aqueles que tentam entender e interpretar os variados mecanismos que levam a complexas estruturas de grande beleza. Os estudos dos mecanismos que conduzem à formação destes padrões de interface são cruciais para se compreender e dominar a física envolvida, e posteriormente usá-la apropriadamente para desenvolver novas aplicações científicas e tecnológicas. Nosso estudo busca explicações teóricas para um melhor entendimento da instabilidade de Saffman-Taylor, quando forças de rotação estão presentes. Mais de meio século já se passou desde a descoberta de tal instabilidade, porém muitas questões ainda precisam ser respondidas. Esta dissertação visa esclarecer mais algumas questões sobre este sistema tão intrigante. Portanto, neste capítulo resumimos nossos principais resultados e conclusões. Além disso, discutiremos perspectivas para futuras análises de problemas correlatos, que ainda estão em aberto.

Uma das principais razões que nos motivaram para o desenvolvimento deste estudo fracamente não-linear foi a possibilidade de extrair informações analíticas sobre o problema da célula de Hele-Shaw girante, que de outra forma, só poderiam ser acessadas através de experimentos ou via métodos numéricos sofisticados. Como resultado de nossa aproximação de modos acoplados, diversas características dos padrões formados na célula de Hele-Shaw girante podem agora ser explicadas e preditas analiticamente.

No capítulo 2, relatamos nossos resultados analíticos para o desenvolvimento da instabilidades de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw quando a força de Coriolis é desprezível. Executamos uma aproximação de modos acoplados e investigamos as características morfológicas da interface fluido-fluido no início dos efeitos não-lineares. O impacto do estresse normal foi levado em conta através de uma condição de contorno modificada para pressão. A equação diferencial que descreve o início da evolução não-linear foi derivada, sendo convenientemente escrita em termos dos três parâmetros adimensionais relevantes do sistema: contraste de viscosidade A , tensão superficial B , e o espaçamento entre as placas b . Focalizamos nosso estudo na influência destes parâmetros sobre a dinâmica de competição dos dedos. Deduzimos que existe uma ligação entre a competição dos dedos viscosos e os parâmetros A , B , e b , que pôde ser

revelada por meio de um mecanismo baseado no crescimento das perturbações sub-harmônicas. Nossos resultados mostram um excelente acordo com as investigações experimentais e numéricas. Em particular, encontramos que quando os dois fluidos têm viscosidades comparáveis $A \rightarrow 0$, a competição entre os dedos é suprimida, independentemente dos valores de B e b . Além disso, nosso estudo permitiu extrair informações analíticas do sistema, explorando todos os valores permitidos para A , B , e b . Mais especificamente, verificamos que a morfologia da interface entre os fluidos é modificada significativamente quando o contraste de viscosidade varia de $-1 \leq A \leq 1$: valores cada vez maiores de $A > 0$ ($A < 0$) conduzem a uma maior competição entre os dedos que saem (entram). Neste contexto, a influência de B e b na competição dos dedos também foi discutida.

No capítulo 3 investigamos o efeito da força de Coriolis para o fluxo de dois fluidos confinados na célula de Hele-Shaw girante. Desta forma, o sistema foi descrito por uma lei Darcy bidimensional generalizada, derivada a partir de uma média transversal da equação de Navier-Stokes tridimensional, propriamente incluída da força de Coriolis. Realizamos a aproximação de modos acoplados para o sistema e derivamos uma equação de movimento para as perturbações na interface até segunda ordem. Nossos resultados mostraram que quando o efeito Coriolis é levado em conta, surge uma interessante relação entre o número de Reynolds Re e o contraste de viscosidade A . Tal inter-relação proporcionou importantes mudanças na estabilidade e nas características morfológicas dos padrões formados.

Certamente, estendemos as contribuições precedentes para a célula girante [19, 40, 42, 43] em diversas direções. Primeiramente, o contraste de viscosidade pôde assumir quaisquer valores fisicamente possíveis. Isto nos permitiu revelar um acoplamento entre A e Re , assim como seus efeitos na morfologia da interface fluido-fluido. Algumas características importantes puderam ser identificadas já a nível linear, incluindo a natureza estabilizadora da força de Coriolis e o acoplamento entre Re e A já mencionado. Mostramos também que a magnitude dos efeitos de Coriolis não é exclusivamente dependente da intensidade do número de Reynolds. Conseqüentemente, os efeitos mais intensos da força de Coriolis são conseguidos, não somente ajustando Re para valores elevados, mas também tomando valores menores de A . Além disso, verificamos que para $\rho_2 = 0$, independentemente do valor de Re_1 , os efeitos de Coriolis desaparecem completamente se $A = +1$.

Uma descoberta interessante é o fato de que, em contraste com o caso girante sem o efeito da força de Coriolis, se $Re \neq 0$, a competição dos dedos viscosos *não* desaparece quando $A = 0$. Na verdade, encontramos que quando a força de Coriolis é significativa, a competição dos dedos é ausente somente para valores relativamente grandes do contraste da viscosidade. E

comparando estes resultados com aqueles obtidos através do formalismo “vortex-sheet”, mais uma vez, vimos que nossas predições analíticas usando métodos perturbativos são confirmadas. Pudemos também contrastar nossos resultados principais, com resultados similares obtidos por meio de uma aproximação simplificada para a inclusão do efeito Coriolis, proposta há algum tempo atrás por Schwartz [19]. Demonstramos claramente que ao desprezar os efeitos da força de Coriolis a nível tridimensional, na equação de Navier-Stokes, a derivação da lei de Darcy bidimensional pode conduzir a erros significativos a nível linear e fracamente não-linear.

Em um sentido mais geral, nosso trabalho está relacionado com alguns outros esforços recentes de tentar introduzir correções inerciais no problema de Saffman-Taylor [47, 48, 49, 50]. Estes estudos e os nossos são necessários para fornecer uma melhor compreensão das instabilidades de dedos emergentes para o limite de elevados valores de número de Reynolds. Para o nosso caso, as correções inerciais associadas à força de Coriolis puderam ser incluídas na lei de Darcy de uma forma relativamente simples, um fato que facilitou um pouco o estudo dos efeitos da força de Coriolis em níveis lineares e não-lineares. Esperamos que nosso estudo seja também útil na investigação de outros sistemas que exibem padrões do tipo espiral em fluidos magnéticos [58, 59, 60, 61, 62] e até mesmo em domínios de monocamadas lipídicas [63].

Como visto no capítulo 1, a injeção de um fluido menos viscoso em outro mais viscoso, na célula de Hele-Shaw radial, torna a interface instável, levando ao desenvolvimento de complexos padrões geométricos. Além disso, estudos recentes mostraram que se a tensão superficial é considerada nula ($\sigma = 0$), a interface não apenas se deforma, mas também desenvolve a formação de “cúspides”, indicando a presença de singularidades estruturais na interface [13, 14]. Neste contexto, uma extensão natural do nosso estudo poderia ser obtida ao acrescentar a ação de mais um importante componente ao sistema: a injeção (ver Fig. 4.1). Quando o sistema gira, vimos que a ação da força centrífuga e da força de Coriolis passa a ser de grande importância na evolução temporal da interface, e na própria morfologia dos padrões gerados. Assim, métodos analíticos (exatos e aproximativos) e numéricos podem ser usados para descobrir como tais forças “fictícias” (principalmente a força de Coriolis) influenciam a dinâmica da interface na célula de Hele-Shaw girante *com injeção*, tanto na ausência quanto na presença de tensão superficial. Tal sistema ainda não explorado na literatura, combina os efeitos de rotação (forças centrífugas e de Coriolis) com a contribuição desestabilizante da injeção Q , que certamente criará um acoplamento não-trivial entre as forças de rotação e os efeitos predominantemente viscosos, resultando em novos padrões de interfaces e inexplorados aspectos de sua dinâmica.

Afora isso, soluções exatas são potencialmente importantes no entendimento completo e

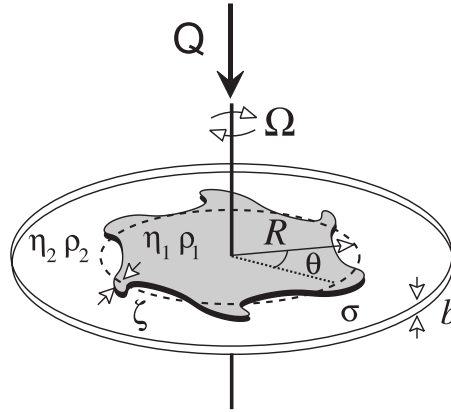


Figura 4.1 Esquema da célula de Hele-Shaw girante com taxa de injeção Q .

estudo da validade das estruturas (padrões) obtidas via métodos perturbativos e numéricos. Felizmente, sabe-se que tais soluções exatas da dinâmica completamente não-linear (e não local) em células de Hele-Shaw podem ser representadas por equações relativamente simples, mesmo para casos não estacionários. A possibilidade de se calcular soluções exatas é proporcionada principalmente por uma ferramenta teórica básica, o mapeamento conforme [13, 14]. Utilizar tal método para tentar revelar simetrias “escondidas” nos padrões, que não são acessíveis por meio de análises perturbativas ou puramente numéricas, é de grande relevância científica. Portanto, a obtenção de tais soluções exatas que descrevam a forma dos padrões de interface gerados em estágios completamente não-lineares da dinâmica do sistema girante com o efeito Coriolis e injeção, configura-se em mais uma promissora perspectiva para futuras análises. Tal estudo é de grande interesse acadêmico e prático, já que proporciona uma maneira comparativamente mais simples e elegante de sondar importantes aspectos não triviais do problema.

O método do mapeamento conforme utiliza a teoria das variáveis complexas para mapear interfaces reais de forma complexa no disco unitário definido no plano complexo, no limite em que a tensão superficial é nula ($\sigma = 0$). Como comentado acima, quando a tensão superficial é nula e não há rotação (apenas injeção), a interface inicialmente circular torna-se cada vez mais aguda nas pontas das estruturas formadas, resultando na formação de cúspides. Seria de extrema importância investigar a influência dos efeitos da força de Coriolis na formação de tais cúspides. Igualmente, o limite de tensão superficial não nula pode ser analisado através de simulações numéricas baseadas no método da “boundary integral” [35, 57].

APÊNDICE A

LEI DE DARCY GENERALIZADA

Neste apêndice vamos deduzir a lei de Darcy exata bidimensional que é mostrada na equação (3.4) do capítulo 3, quando o efeito da força de Coriolis é significativo. Por meio do método assintótico sistemático originalmente executado por Walters e Cummings [40], obteremos a lei de Darcy a partir da equação de Navier-Stokes tridimensional (1.6) propriamente inserida dos termos inerciais provenientes do referencial girante da célula de Hele-Shaw. Esta abordagem oferece a lei de Darcy sem nenhuma aproximação, o que nos garante sua validade para um número de Reynolds arbitrário, ao contrário da proposta simplificada de Schwartz [19].

Considere a célula de Hele-Shaw girante como mostrado na Fig. 3.1 do capítulo 3, preenchida com dois fluidos viscosos em um espaço estreito b entre dois discos de vidro, planos e paralelos. A célula gira em torno do seu eixo de rotação, que é perpendicular e axial às placas de vidro, com velocidade angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$, onde $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor unitário que aponta na direção z . Coordenadas polares (r, θ) são usadas no plano da célula.

Usando o referencial $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$ que gira junto com a célula, a equação de Navier-Stokes *dimensional* para o fluxo de fluido é

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j - \rho_j \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\rho_j \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_j, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{u}_j$ é a velocidade no referencial girante, p_j a pressão absoluta, ρ_j a densidade e η_j a viscosidade de cada fluido $j = 1, 2$. Para prosseguir com o método assintótico sistemático, vamos adimensionalizar a equação de Navier-Stokes tridimensional (A.1). Comprimentos serão adimensionalizados pelo raio inicial da gota R e tempo por uma escala temporal τ ainda indeterminada. Introduzimos ainda os reescalamentos

$$(r, z) \rightarrow R (r, \varepsilon z), \quad t \rightarrow \tau t, \quad \mathbf{u}_j \rightarrow \frac{R}{\tau} (u, v, \varepsilon w), \quad p_j \rightarrow \frac{\eta_j}{\varepsilon^2 \tau} p_j, \quad (\text{A.2})$$

onde $\varepsilon = b/R$. Note que para facilitar a notação, todas as variáveis do problema estão representadas da mesma forma depois do reescalamento, mas a partir de agora serão quantidades *adimensionais* reescaladas por (A.2). Como a célula de Hele-Shaw é um dispositivo quasi-

bidimensional, $\varepsilon \ll 1$. Agora, usaremos as equações para o fluxo de momento [17] dos fluidos de cada direção em coordenadas polares, e já reescalada por (A.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Re_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) u_j - 2Sv_j - S^2 r \right) &= -\frac{\partial p_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_j}{\partial \theta} - \frac{u_j}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Re_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) v_j + 2Su_j \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_j}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} - \frac{v_j}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Re_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) w_j \right) &= -\frac{\partial p_j}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \\ &+ \varepsilon^4 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde as quantidades adimensionais $\Re_j = (\rho_j R^2)/(\eta_j \tau)$ é o número reduzido de Reynolds e $S = \Omega \tau$ é o número de Strouhal. As Equações (A.3), (A.4) e (A.5) representam respectivamente os fluxos de momento de cada fluido na direção r , θ e z . Como no capítulo 3, é conveniente incorporar o efeito centrífugo na pressão reduzida Laplaciana

$$P_j = p_j - \frac{\varepsilon^2 S^2 \Re_j}{2} r^2 \quad (\text{A.6})$$

que acopla a pressão hidrodinâmica p_j (que *não é* Laplaciana) com efeitos puramente centrífugos, todos já *adimensionalizados*.

Consideramos o limite em que o número de Reynolds reduzido $\varepsilon \Re_j$ é pequeno, mas o número de Strouhal é grande o suficiente para que a combinação $\alpha_j = \varepsilon^2 \Re_j S = O(1)$. Assim, obtemos que o fluxo de momento de cada fluido será

$$-2\alpha_j v_j = -\frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$2\alpha_j u_j = -\frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.9})$$

onde P_j é independente de z (como discutido no capítulo 1). Por outro lado, estas equações mais simplificadas para o momento (A.7), (A.8) e (A.9), estão sujeitas à condição de incompressibilidade

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_j) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial \theta} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.10})$$

para cada fluido, e à condição de não deslizamento nas interfaces fluidos-placas (“non-slip boundary condition”)

$$\mathbf{u}_j = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, 1. \quad (\text{A.11})$$

Afim de obter um sistema que é independente de z , escrevemos

$$u_j = \bar{u}_j + u'_j, \quad v_j = \bar{v}_j + v'_j, \quad (\text{A.12})$$

onde, para qualquer f , $\bar{f} = \int_0^1 f dz$ e, por definição, $\bar{u}'_j$ e $\bar{v}'_j$ são identicamente nulos. Obtemos então um sistema de equações diferenciais dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial z^2} - \frac{\partial P_j}{\partial r} = -2\alpha_j(\bar{v}_j + v'_j) \\ \frac{\partial^2 v'_j}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} = 2\alpha_j(\bar{u}_j + u'_j) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{u}_j) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right. .$$

Porém, se escrevermos $\Psi_j = (u'_j + i v'_j)$, o sistema pode ser simplificado para apenas uma equação

$$\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} - 2i \alpha_j \Psi_j = 2i \alpha_j (\bar{u}_j + i \bar{v}_j) + \frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \theta}. \quad (\text{A.13})$$

O lado direito da Eq. (A.13) é independente de z , e a resolvemos impondo a condição de não-deslizamento,

$$\Psi_j = -(\bar{u}_j + i \bar{v}_j) \quad \text{em} \quad z = 0, 1, \quad (\text{A.14})$$

resultando em

$$\begin{aligned} \Psi_j(z) &= -(\bar{u}_j + i \bar{v}_j) \\ &+ \frac{i}{2\alpha_j} \left(\frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} \right) \left\{ 1 - \frac{\cosh \left[\frac{1}{2}(1+i)(2z-1)\sqrt{\alpha_j} \right]}{\cosh \left[\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\alpha_j} \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, usamos o fato de que $\int_0^1 \Psi_j(z) dz = 0$ para obter uma forma explícita de $\bar{u}_j$ e $\bar{v}_j$, que depois de algumas manipulações pode ser escrita como

$$\bar{u}_j + i \bar{v}_j = -(\mathcal{C}_j - i \mathcal{D}_j) \left(\frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.16})$$

onde

$$(\mathcal{C}_j - i \mathcal{D}_j) = 12 \frac{1}{2i\alpha_j} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2i\alpha_j}} \tanh \left(\frac{\sqrt{2i\alpha_j}}{2} \right) \right], \quad (\text{A.17})$$

para $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_j$ reais.

Vemos claramente que $\alpha_j = 12 \text{Re}_j$, pois $\text{Re}_j = (\rho_j \Omega b^2)/(12\eta_j)$ é o número de Reynolds como definido no capítulo 3. Solucionando a Eq. (A.16) e escrevendo convenientemente em termos dos gradientes de pressão, podemos obter a lei de Darcy generalizada na forma *dimensional*

$$\mathbf{v}_j = (\bar{u}_j, \bar{v}_j) = -\frac{b^2 \mathcal{C}_j}{12\eta_j} \left[\nabla P_j - \frac{\mathcal{D}_j}{\mathcal{C}_j} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla P_j) \right], \quad (\text{A.18})$$

onde $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_j$ são escritos em termos Re_j substituindo $\alpha_j = 12 \text{Re}_j$ na Eq. (A.17)

$$\mathcal{C}_j = \frac{\sinh \sqrt{12\text{Re}_j} - \sin \sqrt{12\text{Re}_j}}{2\text{Re}_j \sqrt{12\text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12\text{Re}_j} + \cos \sqrt{12\text{Re}_j}]}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{D}_j = \frac{1}{2\text{Re}_j} \left\{ 1 - \frac{\sinh \sqrt{12\text{Re}_j} + \sin \sqrt{12\text{Re}_j}}{\sqrt{12\text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12\text{Re}_j} + \cos \sqrt{12\text{Re}_j}]} \right\}. \quad (\text{A.20})$$

APÊNDICE B

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA OS MODOS SUB-HARMÔNICOS

Neste apêndice, calcularemos de forma explícita as equações de movimento para os modos sub-harmônicos cosseno $a_n(t)$ e o seno $b_n(t)$ das amplitudes de perturbação que aparecem no texto do capítulo 3 [Eqs. (3.28)-(3.30)] e foram originalmente obtidas por Miranda e Widom [39, 46]. Começamos relacionando a amplitude complexa de perturbação $\zeta_n(t)$ com as amplitudes reais $a_n(t)$ e $b_n(t)$. Para isso, agrupamos explicitamente os termos que correspondem aos valores positivos e negativos de n em notação de séries complexas,

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_n(t) \exp(in\theta) + \zeta_{-n}(t) \exp(-in\theta)]. \quad (\text{B.1})$$

Expressando as exponenciais complexas da Eq. (B.1) em termos dos senos e cossenos, obtemos a representação trigonométrica para a série de Fourier

$$\zeta(\theta, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (\text{B.2})$$

onde utilizamos as relações

$$\zeta_0 = a_0 \quad (\text{B.3})$$

$$\zeta_n(t) = \frac{a_n(t) - ib_n(t)}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$\zeta_{-n}(t) = \frac{a_n(t) + ib_n(t)}{2} \quad (\text{B.5})$$

com $n > 0$. O coeficiente a_0 é assumido como zero para a evolução linear, mas para a evolução não-linear deve assumir o valor

$$a_0 = -\frac{1}{4R} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(t) + b_n^2(t)], \quad (\text{B.6})$$

a fim de manter a área $\mathcal{A} = \pi R^2$ perturbada independente da perturbação $\zeta(\theta, t)$ [39, 46]. Deste modo, tomando as derivadas temporais das Eqs. (B.4) e (B.5) temos que

$$\dot{a}_n(t) = \dot{\zeta}_n(t) + \dot{\zeta}_{-n}(t) \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{b}_n(t) = i \left[\dot{\zeta}_n(t) - \dot{\zeta}_{-n}(t) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Usando a equação de movimento para as amplitudes complexas (equação de modos acoplados para as amplitudes de perturbação Eq. (3.16) no capítulo 3), junto com as relações (B.3)-(B.5) dadas acima, obteremos as seguintes equações de movimento para os modos cosseno e seno a partir das Eqs. (B.7) e (B.8)

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \lambda(n)a_n \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, -n')a_{n'} + G(n, -n')\dot{a}_{n'}]a_{n+n'} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, n')a_{n'} + G(n, n')\dot{a}_{n'}]a_{n-n'} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, -n')b_{n'} + G(n, -n')\dot{b}_{n'}]b_{n+n'} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, n')b_{n'} + G(n, n')\dot{b}_{n'}]b_{n-n'} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} \dot{b}_n &= \lambda(n)b_n \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, -n')a_{n'} + G(n, -n')\dot{a}_{n'}]b_{n+n'} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, n')a_{n'} + G(n, n')\dot{a}_{n'}]b_{n-n'} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, -n')b_{n'} + G(n, -n')\dot{b}_{n'}]a_{n+n'} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n'>0} [F(n, n')b_{n'} + G(n, n')\dot{b}_{n'}]a_{n-n'}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde as expressões para $\lambda(n)$, $F(n, n')$ e $G(n, n')$ são dadas pelas partes reais das equações (3.17), (3.18) e (3.19), respectivamente.

A competição entre os dedos pode ser acessada analisado apenas influência do modo fundamental n no crescimento de seu sub-harmônico $n/2$. Além disso, podemos fazer $a_n > 0$ e $b_n = 0$ sem perda de generalidade. Levando em conta tais considerações obtemos, após algumas manipulações, as equações diferenciais para os modos sub-harmônicos cosseno e seno

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n) a_n\} a_{n/2}, \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n) a_n\} b_{n/2}, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (\text{B.13})$$

é a função competição discutida nos capítulos 2 e 3 desta dissertação.

APÊNDICE C

**FINGER COMPETITION DYNAMICS IN ROTATING
HELE-SHAW CELLS.**

Phys. Rev. E **70**, 066308 (2004)

Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells

Hermes Gadêlha and José A. Miranda*

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

(Received 7 April 2004; revised manuscript received 29 June 2004; published 17 December 2004)

We report analytical results for the development of interfacial instabilities in rotating Hele-Shaw cells. We execute a mode-coupling approach to the problem and examine the morphological features of the fluid-fluid interface at the onset of nonlinear effects. The impact of normal stresses is accounted for through a modified pressure jump boundary condition. A differential equation describing the early nonlinear evolution of the interface is derived, being conveniently written in terms of three relevant dimensionless parameters: viscosity contrast A , surface tension B , and gap spacing b . We focus our study on the influence of these parameters on finger competition dynamics. It is deduced that the link between finger competition and A , B , and b can be revealed by a mechanism based on the enhanced growth of subharmonic perturbations. Our results show good agreement with existing experimental and numerical investigations of the problem both in low and high A limits. In particular, it is found that the condition of vanishing A suppresses the dynamic competition between fingers, regardless of the value of B and b . Moreover, our study enables one to extract analytical information about the problem by exploring the whole range of allowed values for A , B , and b . Specifically, it is verified that pattern morphology is significantly modified when the viscosity contrast $-1 \leq A \leq 1$ varies: increasingly larger values of $A > 0$ ($A < 0$) lead to enhanced competition of outward (inward) fingers. Within this context the role of B and b in determining different finger competition behaviors is also discussed.

DOI: 10.1103/PhysRevE.70.066308

PACS number(s): 47.20.Ma, 47.20.Ky, 47.54.+r, 68.05.-n

I. INTRODUCTION

The Saffman-Taylor viscous fingering instability [1] arises when two viscous fluids move in the narrow gap between two flat parallel plates (Hele-Shaw cell). The initially unperturbed fluid-fluid interface can be destabilized by either pressure gradients (viscosity driven) or by gravity (density driven). Traditionally, experiments and theory focus on two basic Hele-Shaw flow geometries: rectangular [2–5] and radial [6,7]. In rectangular geometry the less viscous fluid is pumped against the more viscous one along the direction of the flow. In the radial case injection is performed through an inlet located on the upper plate. In both situations, the instability can lead to the formation of fingering structures, typically characterized by finger tip-splitting and/or finger competition phenomena.

In contrast to radial geometry flow, which exhibits both splitting and competition behaviors, flow in rectangular geometry normally displays only finger competition [2–5]. Numerical simulations [8–10] and experiments [11–14] for rectangular geometry flow indicate that fingers may undergo a type of tip-splitting instability, but only in the late stages of interface evolution and if surface tension is extremely small or if the speed of flow is too high. Interestingly, the most important and usual morphological features in the rectangular case can be properly described in terms of two dimensionless parameters: the viscosity contrast A (dimensionless viscosity difference) and the effective surface tension coefficient B which is a measure of capillary forces relative to other relevant forces in the problem. While B plays an im-

portant role in mechanisms of steady-state selection, A acts decisively in the finger competition dynamics if $A=0$ ($A \neq 0$) competition is suppressed (favored), where finger competition is associated with length variability among the fingered structures.

The question arises as to whether the parameters A and B also play a relevant role in radial geometry. Possible answers to this question can be conveniently offered by an interesting variation of the *motionless* Hele-Shaw cell setup: the *rotating* Hele-Shaw problem [15,16]. In the latter the cell is rotated around an axis perpendicular to the plane of the flow, so that the interfacial instability is driven by centrifugal forces acting on the interface separating fluids of different densities. To some extent the rotating cell problem can be seen as the radial counterpart of the gravity-driven situation in rectangular cells [2–5].

During the last few years there has been much interest in the morphological instability in rotating Hele-Shaw cell, exploring a great variety of issues both theoretically [15–24] and experimentally [16,21,25,26]. On the analytical side, researchers have performed linear [15,16] and weakly nonlinear [17] stability analyses of the problem for large values of A . Other groups have studied particular families of exact solutions for rotating drops [18,19] and fluid annulus [20]. In addition, intensive numerical simulations have been recently employed to examine the low-viscosity contrast limit [21] and the case in which the fluids involved are miscible (negligible surface tension) [22]. Furthermore, the flow behavior of ferrofluid droplets in rotating cells subjected to external magnetic fields has been studied by linear stability analysis [23] and numerical simulations [24]. Regarding experimental investigations, the pioneering work of Ortín and co-workers has been providing a series of very interesting results in ro-

*Email address: jme@df.ufpe.br

tating cells, involving both high- [16] and low- [21] viscosity contrast flows of drops, and the radial displacement of a rotating fluid annulus, in stable [25] and unstable [26] regimes.

One common feature of Refs. [15–26] is that the interfacial patterns obtained in rotating cells are markedly different from those observed in the usual Saffman-Taylor problem in radial geometry. Specifically, it has been found that rotating patterns are not unstable against tip splitting, but reveal fingers that stretch and may compete. In this sense, the rotating patterns are indeed more closely related to the structures obtained in rectangular geometry. Experiments in the high- A and high- σ limit [16], where σ is the surface tension, have shown the development of fingering structures in which a central initial drop throws out attached droplets, which themselves form new droplets and fingers. An evident dynamic competition process among inward fingers of different sizes is detected.

On the other hand, recent experiments and numerical simulations in the low- A limit and for very low values of σ [21] (typically one order of magnitude smaller than the one used in Ref. [16]) show that nearly no competition is found. These rotating cell results seem to indicate that, similarly to what happens in rectangular geometry, A also plays a crucial role in radial geometry. Another interesting finding of Ref. [21] is that, in addition to viscosity contrast and surface tension, the gap spacing b also plays a measurable role in the linear regime. This introduces a third relevant dimensionless parameter into the problem, defined by the ratio of b and the initial droplet radius. In Ref. [21] the gap spacing parameter is introduced through a modification of the Young-Laplace pressure jump boundary condition.

Despite the fact that linear stability results, experiments and numerical findings of Refs. [16,21] are related to a specific range of values for viscosity contrast and surface tension (higher A and σ in Ref. [16] and lower A and σ in Ref. [21]), there is a good indication that the parameters A , B , and b are important to characterize pattern morphology and finger competition processes in rotating Hele-Shaw cells. However, a systematic analytical study including the combined influence of all these parameters (each of them varying in the entire range of their allowed values) at the onset of *nonlinear* effects still needs to be addressed in the literature. This is exactly the purpose of this work.

The rest of the paper is organized as follows: In Sec. II we formulate our theoretical approach and present an analytical study of the rotating Hele-Shaw problem, focusing on early nonlinear stages of the dynamics. The effects of normal stresses at the interface are explicitly taken into account. We perform a Fourier decomposition of the interface shape and apply a perturbative weakly nonlinear analysis to derive coupled, nonlinear, ordinary differential equations governing the time evolution of Fourier amplitudes. Section III discusses our linear stability analysis. Linear results are useful and instructive, but do not allow one to make any specific predictions about the finger competition dynamics. Actually, we have found that the allegedly important role played by the viscosity contrast cannot be extracted or detected at linear stages. In Sec. IV we show that some important features of the finger competition phenomenon can indeed be pre-

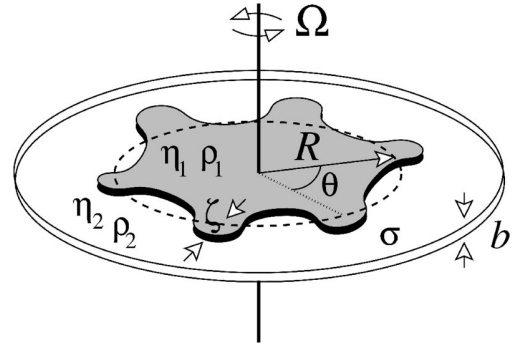


FIG. 1. Schematic representation of a rotating Hele-Shaw cell.

dicted and better appreciated by our analytical mode-coupling approach. At second order we describe a finger competition mechanism and use it to identify the specific role played by A , B , and b in rotating Hele-Shaw flows. Comparison of our main results with other recent theoretical and experimental studies on rotating cells is also performed. Our conclusions are summarized in Sec. V.

II. WEAKLY NONLINEAR APPROACH

Consider a Hele-Shaw cell of gap spacing b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids (see Fig. 1). Denote the densities and viscosities of the inner and outer fluids, respectively, as ρ_1 , η_1 and ρ_2 , η_2 . We focus on the centrifugally induced motion where $\rho_1 > \rho_2$, but allow the inner fluid to be either more or less viscous than the outer fluid. The cell rotates with constant angular velocity Ω , and there exists a surface tension σ between the fluids. We describe the perturbed interface as $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$, where R is the radius of the initially circular interface, and

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta) \quad (1)$$

represents the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$ and discrete azimuthal wave numbers $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

For the effectively two-dimensional geometry of the Hele-Shaw cell, the flow velocity $\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$, where ϕ_j represents the velocity potential in fluids $j=1,2$. The equation of motion of the interface is given by Darcy's law [1,7], properly augmented by a centrifugally driven term [23,24]

$$A \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left[\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 r^2 - (p_1 - p_2) \right], \quad (2)$$

where the dimensionless parameter

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (3)$$

is the viscosity contrast, p_j represents the hydrodynamic pressure, and r denotes the radial distance from the axis of rotation.

At this point we stress the fact that, differently from previous theoretical and experimental investigations of the role of A to finger competition, which focus on the high- [16] and low- [21] *negative*-viscosity contrast limits (displacing fluid is more viscous), our results are applicable for all allowed values of viscosity contrast $-1 \leq A \leq 1$. This is very convenient in the sense that we can compare our analytical results with existing experimental and simulational studies for the low and high $A < 0$ case, and also make important predictions related to other relevant values of the parameter, including the $A > 0$ case (where displacing fluid is the less viscous one). Observe that when $A > 0$ the morphological instability can be driven by both viscosity and density differences, which could possibly result in the rising of new and interesting patterns at fully advanced nonlinear stages. Even though flow with $A > 0$ is a rather common situation (for instance, when water displaces oil [1]), it has not yet been studied in the rotating Hele-Shaw flows.

In contrast to the great majority of works in Hele-Shaw flows, we follow Alvarez-Lacalle, Ortín, and Casademunt and consider the equilibrium condition on the normal component of the local viscous stress tensor τ_j across the fluid-fluid interface [21,27,28]:

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \kappa. \quad (4)$$

The term at the right-hand side of Eq. (4) represents the usual contribution related to surface tension and interfacial curvature κ [1,7,21], with $\mathbf{n}$ denoting the unit normal vector at the interface. As in Ref. [21] we consider the interface as a one-dimensional line and take κ as parallel to the Hele-Shaw cell plates.

The stress tensor appearing at the left-hand side of Eq. (4) is a second-rank tensor and for any of the fluids can be written as [29]

$$\tau_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right], \quad (5)$$

where δ_{ik} denotes the Kronecker delta function and v_i represents the i th component of the fluid velocity vector. In Eq. (5) the elements with $i \neq k$ involve velocity gradients and are related to internal friction in the fluid (viscous effects). On the other hand, the diagonal elements of the tensor are proportional to the pressure and velocity independent.

To conclude our derivation of a modified Young-Laplace pressure jump interfacial boundary condition, first we rewrite Eq. (5) for each fluid ($j=1,2$) using polar coordinates (r, θ) . Then we substitute the resulting expressions into the equilibrium condition, Eq. (4), and evaluate it at the interface. Finally, in the latter we express the fluid velocities in terms of the velocity potentials to obtain

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa - 2\delta \left[\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} \right]. \quad (6)$$

Note that the second term on the right-hand side of Eq. (6) takes into account stresses originated from normal velocity gradients which are nonzero and of relevance not only to rotating cells, but to any radially symmetric Hele-Shaw flow. Equation (6) expresses that, if viscous stresses are accounted, the curvature term is balanced not only by pressure difference, but also by the normal components of the viscous stress. The parameter δ [$\delta=1$ ($\delta=0$) if normal stresses are (not) considered] is used to keep track of the contributions coming from the new term in Eq. (6) in our mode-coupling description. As we will verify below, the addition of extra stresses in Eq. (6) introduces a pertinent dependence on the gap spacing at both linear and weakly nonlinear stages [Eqs. (7)–(11)].

We would like to emphasize that the pressure boundary condition (6) is a simplified limit of much more complicated circumstances present in the full three-dimensional problem [27,28,30,31]. Rigorously speaking, the fluid-fluid interface is actually two dimensional, so that the contribution to the pressure difference proportional to surface tension is governed by the mean curvature (the average of the two principal curvatures) of the interface or $\kappa = \kappa_{\parallel} + \kappa_{\perp}$. One principal curvature ($\kappa_{\perp}$) is associated with the interface profile in the direction perpendicular to the cell plates, and it is of order $1/b$ with a specific value set by interface contact angles. The remaining principal curvature ($\kappa_{\parallel}$) is parallel to the Hele-Shaw cell plates.

From the remarks made in the previous paragraph, we point out that, in principle, even if normal stresses are *not* considered in the generalized Young-Laplace pressure jump condition Eq. (6) (or, equivalently, if $\delta=0$), there would still be an influence of the plate separation b originated from the perpendicular curvature $\kappa_{\perp}$. Actually, this contribution would be a dominant term since $\kappa_{\perp}$ is much larger than $\kappa_{\parallel}$. However, typically one finds that $\kappa_{\perp}$ is nearly constant (constant contact angle) [27,28]. Therefore, despite its magnitude the perpendicular curvature does not significantly affect the motion in Hele-Shaw cell, because its gradient is nearly zero. This last point was also discussed by Tryggvason and Aref [2] in the context of their vortex sheet formulation of the Hele-Shaw problem: it is found that vorticity generated at the fluid-fluid interface depends only on derivatives of the pressure. So the addition of a constant-pressure term ($\sim \kappa_{\perp}$) at the interface has no net effect on the dynamics.

Of course, if the perpendicular curvature is not constant, it may well reintroduce complicated three-dimensional effects such as wetting- and velocity-dependent (dynamic) contact angles into the problem [27,28,30,31]. As discussed in more detail in Ref. [21] the inclusion of these complex three-dimensional effects can be avoided in rotating Hele-Shaw cells if a prewetting film is generated in the glass plates before the experiments are performed. Under such circumstances the boundary condition shown in Eq. (6) is perfectly valid, and an excellent agreement between experiments and numerical simulations is obtained [21]. So in this paper we can say that the influence of gap spacing b on the evolution

of the system comes from the inclusion of the additional terms in Eq. (6) related to normal viscous stresses at the moving interface.

We proceed by adapting a weakly nonlinear approach originally developed to study flow in *motionless* Hele-Shaw cell [32,33] to the current rotating cell problem. First, we define Fourier expansions for the velocity potentials, which obey Laplace's equation $\nabla^2 \phi_j = 0$. Then, we express ϕ_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering the kinematic boundary condition $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2$, which refers to the continuity of the normal velocity across the interface. Substituting these relations and the modified pressure jump condition, Eq. (6), into Eq. (2) and Fourier transforming yields the *dimensionless* mode-coupling equation (for $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'}], \quad (7)$$

where

$$\lambda(n) = \frac{|n|}{J(n)} [1 - B(n^2 - 1)] \quad (8)$$

denotes the linear growth rate with

$$J(n) = \left[1 + \delta \frac{|n|(|n| + A)b^2}{6} \right] \quad (9)$$

and

$$F(n, n') = \frac{|n|}{J(n)} \left\{ \frac{1}{2} - B \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$G(n, n') = \frac{|n|}{J(n)} \left\{ A[1 - \text{sgn}(nn')] - \frac{1}{|n|} + \delta \frac{b^2}{6} [A[1 - n^2 \text{sgn}(nn') + n'^2] - |n|[1 + \text{sgn}(nn')] + 3|n'|] \right\} \quad (11)$$

representing second-order mode-coupling terms. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. In Eq. (7) lengths are rescaled by R and time by R/U , where $U = [b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2] / [12(\eta_1 + \eta_2)]$ is a characteristic velocity. Here we define the surface tension parameter

$$B = \frac{\sigma}{R^3 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2)} \quad (12)$$

as the ratio of capillary to centrifugal forces. From now on, we work with the dimensionless version of the equations. After appropriate reintroduction of dimensions, it can be shown that our linear growth rate expression (8) agrees with the equivalent formula of Alvarez-Lacalle *et al.* [21]. Notice that Eq. (7) is conveniently written in terms of the three relevant dimensionless parameters of the problem: A , B , and b . As mentioned earlier, note that the extra stress parameter $\delta = 1$, originated from Eq. (6), introduces an explicit dependence of the linear growth rate $\lambda(n)$ and also of the mode-

coupling terms $F(n, n')$ and $G(n, n')$ on b and A . Such a dependence, which within our approach does not exist if $\delta = 0$, is of importance to an accurate description of the finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells.

III. LINEAR STABILITY ANALYSIS

Although at the level of linear analysis we do not expect to detect or rigorously predict important nonlinear effects such as finger competition, linear stability analysis may still provide useful information. Some aspects related to the linear stage in the low $A < 0$ limit and for very small surface tension σ have been already discussed in Ref. [21]: it has been found that the use of a modified Young-Laplace pressure boundary condition [similar to our Eq. (6)] introduces a dependence of the linear growth rate on gap spacing. Moreover, it has been deduced that if $n \sim 1/b \gg A$ the gap spacing corrections would be independent of the viscosity contrast. The validity of these suggestive linear findings to weakly and fully nonlinear stages of the flow and its applicability to all allowed values of A and B have not been further investigated analytically in Ref. [21], but instead have been supported by their experiments and intensive numerical simulations in the low $A < 0$ and σ limit.

Here we use our growth rate Eq. (8) to gain further insight into the influence of the parameters A , B , and b at the linear stage of pattern evolution. The reasons for performing such a linear stability analysis are twofold: first, it allows one to access and examine some important features of the patterns already at the linear level. Second, it indicates the necessity of performing a weakly nonlinear analysis of the system, due to the lack of information relating the relevant physical parameters to finger competition events.

Figure 2 plots $\lambda(n)$ as a function of mode number n for three different values of the surface tension parameter B : (a) 10^{-4} , (b) 4.0×10^{-4} , and (c) 1.6×10^{-3} . The color shading refers to the following values of b : 1.5×10^{-2} (black), 3.5×10^{-2} (dark gray), and 4.5×10^{-2} (light gray). By inspecting Fig. 2, we can examine how the gap spacing b influences the linear growth rate: for a given value of B , increasing b leads to a decreased growth rate of the fastest growing mode $n_{\max}$ [obtained by setting $d\lambda(n)/dn = 0$] and shifts $n_{\max}$ toward lower values of azimuthal wave numbers. Since $n_{\max}$ determines the typical number of fingers formed at the onset of the instability, this means that small gaps result in patterns with a larger number of fingers. This is an important consequence of the inclusion of normal stresses in Eq. (6). We point out that, due to a small mistake in their linear stability calculation, the authors of Ref. [21] erroneously concluded exactly the opposite: larger gap spacings leading to larger wave numbers. However, our current results do agree with their own experimental and numerical findings [21].

It is also noticed from Fig. 2 that the selectivity of wave numbers induced by changes in b is more relevant for smaller values of the surface tension parameter B , being hardly observed for sufficiently large B [see Fig. 2(c)]. A clearer illustration of the latter is depicted in Fig. 3, which plots $n_{\max}$ as a function of b for increasingly larger values of B , using the same physical parameters as those used in Fig.

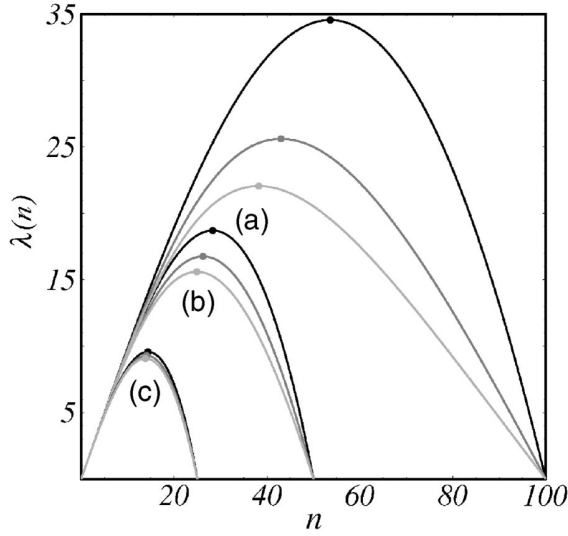


FIG. 2. Linear growth rate $\lambda(n)$ as a function of n , for $A=-1$, $\delta=1$, and three different values of B : (a) 10^{-4} , (b) 4.0×10^{-4} , and (c) 1.6×10^{-3} . The color labeling refers to three values of gap spacings b : 1.5×10^{-2} (black), 3.5×10^{-2} (dark gray), and 4.5×10^{-2} (light gray). To better guide the eye the maxima of the curves are explicitly indicated by small dots.

2. By increasing b in Fig. 3 the typical number of fingers drops by approximately 16 units in (a) for $B=10^{-4}$, 3 units in (b) for 4.0×10^{-4} , and roughly by 1 unit in (c) for $B=1.6 \times 10^{-3}$. It is worth mentioning that if $\delta=0$ the values of n_{max} and $\lambda(n_{max})$ would be overestimated and their dependence on b completely disappears.

Interestingly, despite the evident dependence of the fastest growing mode n_{max} on both b and B as indicated in Figs. 2 and 3, it can be verified that the band of unstable modes, characterized by the critical mode number

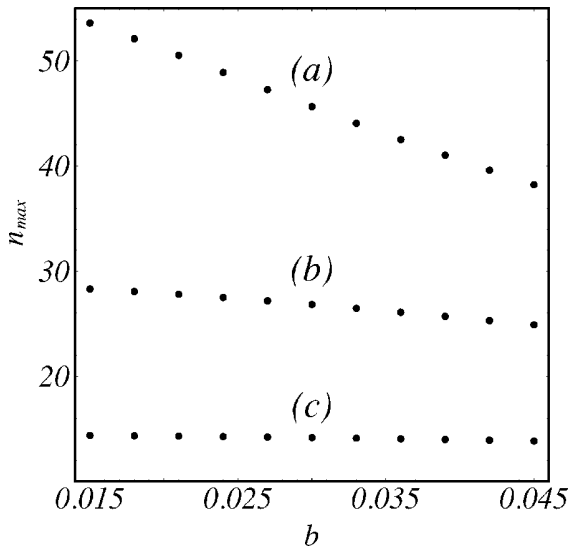


FIG. 3. Fastest growing mode n_{max} as a function of b , for $A=-1$, $\delta=1$, and three different values of B : (a) 10^{-4} , (b) 4.0×10^{-4} , and (c) 1.6×10^{-3} .

$$n_c = \sqrt{1 + \frac{1}{B}}, \quad (13)$$

namely, the maximum wave number for which $\lambda(n)$ is still positive, depends only on B and for a given B is evidently not influenced by changes in gap spacing.

An additional noteworthy point we have verified about the linear stability features illustrated by Figs. 2 and 3, which assume specific values of viscosity contrast and extra stress parameter (respectively, $A=-1$ and $\delta=1$), is the fact that the linear scenario is not qualitatively modified if any other values of $-1 \leq A \leq 1$ are used. For instance, considering the data shown in Figs. 2 and 3, if we take $A=1$ instead of $A=-1$, the new values of n_{max} would be very modestly smaller than the original ones (the largest difference being $\approx 0.3\% - 0.4\%$, if $b=4.5 \times 10^{-2}$). This indicates that, at the linear level, the influence of A on the dynamics is *minor*, as opposed to the important changes induced by the parameters b and B . Incidentally, recall that A does not play any role at the linear level if $\delta=0$ [see Eq. (9)]. So, despite the inclusion of normal stresses ($\delta=1$) in the modified pressure boundary condition Eq. (6), the viscosity contrast does not necessarily emerge as a key parameter at purely linear stages of interfacial evolution. However, there is good experimental and numerical evidence that A plays a *major* role in determining pattern behavior (particularly, with respect to finger competition) at highly nonlinear stages of the flow in both rectangular [2–5] and rotating Hele-Shaw cells [21].

Based on our previous discussion, it is clear that one must go beyond linear analysis in order to investigate thoroughly how B , b , and particularly A influence important morphological features of the evolving interface. Section IV demonstrates the usefulness of our weakly nonlinear approach in analytically elucidating key aspects related to the finger competition dynamics.

IV. FINGER COMPETITION DYNAMICS

In this section we use the mode-coupling, Eq. (7), to gain analytical insight into finger competition dynamics in rotating flows and to examine how it is affected by the action of A , B , and b . We emphasize that finger competition is an intrinsically nonlinear effect and could not be properly addressed by purely linear stability analysis. Consequently, we concentrate our attention primarily on the weakly nonlinear terms in Eq. (7).

Within our mode-coupling approach finger competition is described by the influence of a fundamental mode n on the growth of its subharmonic mode $n/2$ [32,33]. To simplify our discussion we rewrite the net perturbation ζ in terms of cosine [$a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$] and sine [$b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$] modes. Without loss of generality we may choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$. From Eq. (7) we obtain the equations of motion for the subharmonic mode,

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n)a_n\} a_{n/2}, \quad (14)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n)a_n\} b_{n/2}, \quad (15)$$

where the function

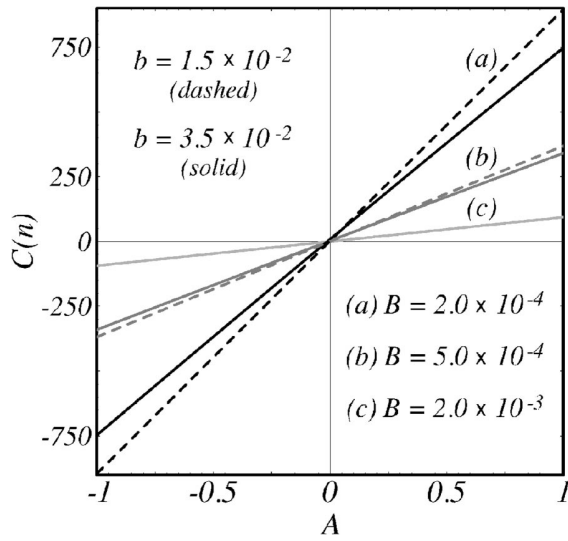


FIG. 4. $C(n)$ as given by Eq. (16) as a function of the viscosity contrast A , for three different values of the surface tension coefficient B , and two distinct gap spacings b . Note that hidden in the solid (light gray) line labeled (c) there are in fact two lines (an indistinguishable dashed line lies hidden).

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2)G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (16)$$

determines finger competition. The way $C(n)$ is connected to finger competition can be inferred simply by inspecting Eqs. (14) and (15). We verify that $C(n) > 0$ increases the growth of the cosine subharmonic $a_{n/2}$, while inhibiting growth of its sine subharmonic $b_{n/2}$. The result is an increased variability among the lengths of fingers of fluid 1 penetrating into fluid 2. This effect describes finger competition. Sine modes $b_{n/2}$ would vary the lengths of fingers of fluid 2 penetrating into fluid 1, but it is clear from Eq. (15) that their growth is suppressed when $C(n) > 0$. Reversing the sign of $C(n)$ would exactly reverse these conclusions, such that modes $b_{n/2}$ would be favored over modes $a_{n/2}$. Regardless of its sign, the function $C(n)$ measures the strength of the competition such that increasingly larger values of $C(n) > 0$ [$C(n) < 0$] lead to enhanced competition of outward [inward] fingers.

Our study of the finger competition dynamics examines the weakly nonlinear results depicted in Figs. 4 and 5, taking $\delta=1$. Figure 4 plots $C(n)$ given by Eq. (16) as a function of viscosity contrast A (with $-1 \leq A \leq 1$) for three different values of the surface tension parameter B : (a) 2.0×10^{-4} (black lines), (b) 5.0×10^{-4} (dark gray lines), and (c) 2.0×10^{-3} (light gray line). The solid (dashed) lines describe the behavior of $C(n)$ for gap spacing $b=3.5 \times 10^{-2}$ (1.5×10^{-2}). To observe growth of the fundamental mode and also to allow growth of its subharmonic, we carry out our analysis considering that $n=n_c$ [see Eq. (13)]. Note that Fig. 4 conveniently illustrates in a single diagram the way the parameters A , B , and b affect finger competition in rotating cells.

Complementary information can be obtained by examining Fig. 5 which uses the same physical parameters as the

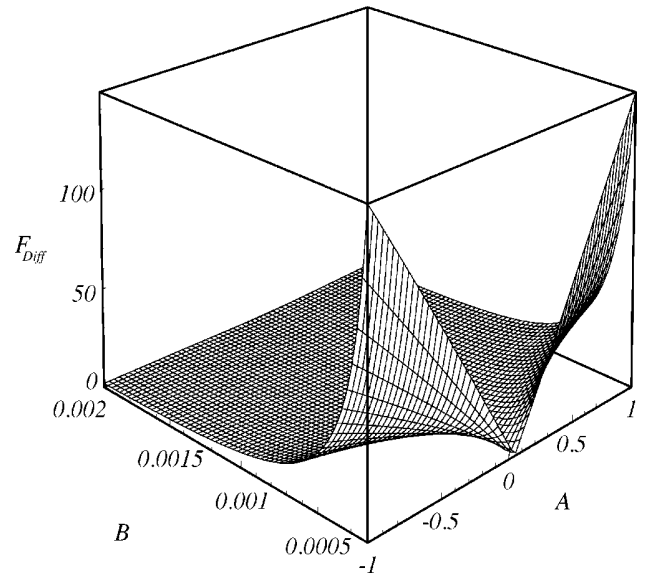


FIG. 5. Variation of the difference function F_{Diff} as given by Eq. (17) in terms of the viscosity contrast A and the surface tension coefficient B .

ones utilized in Fig. 4, but plots the difference function, defined as

$$F_{Diff} = |C(n)_{b=b_1} - C(n)_{b=b_2}|, \quad (17)$$

where $b_1 = 1.5 \times 10^{-2}$ (dashed lines in Fig. 4) and $b_2 = 3.5 \times 10^{-2}$ (solid lines in Fig. 4). So the function F_{Diff} expresses the absolute value of the difference between the finger competition (dashed and solid) lines $C(n)$ plotted in Fig. 4 for two distinct values of gap spacing.

The most evident feature of Fig. 4 is the fact that if the viscosity contrast A tends to zero, the competition function $C(n)$ also tends to zero, regardless of the value of either B or b . In other words, our results indicate the absence of dynamic competition between fingers if the two fluids present comparable viscosities. Remarkably, this important effect, which could *not* be accessed by purely linear analysis, is detected already at the lowest nonlinear order.

The regulatory behavior of A with respect to finger competition is reinforced by Fig. 5 where it can be seen that F_{Diff} tends quite rapidly to zero when the viscosity contrast vanishes, even in that region of the graph in which the difference between the behaviors is strongest (smaller values of B). Therefore, similarly to what have been found by numerical simulations [2,3] and experiments [4,5] in rectangular geometry, our analytical findings show that A also plays a crucial role in the radial geometry by controlling finger competition behavior. This is in perfect agreement with the recent rotating cell experiments performed in the low $A < 0$ and low surface tension limit [21].

We continue our discussion by concentrating on the most frequent situation explored in the literature so far or the case in which $A < 0$ (inner fluid is more viscous). By observing Fig. 4 we see that if A is negative, $C(n) < 0$, indicating increased competition among inward fingers for increasingly

larger values of A . Simultaneously, the competition among outward fingers would be suppressed. These findings are in accordance with what is observed in rotating cell experiments in both high [16] and low [21] $A < 0$ limits.

At this point, we turn our attention to the role played by B when $A < 0$. Notice that for a given value of b , the inclination of the $C(n)$ lines in Fig. 4 is controlled by the dimensionless surface tension B , so that competition decreases (increases) for larger (smaller) values of B . Even though, for fixed B , A determines finger competition, variations in B may lead to significant changes in the intensity of the competition. In particular, note that if B is sufficiently large, $C(n) \rightarrow 0$ no matter the value of A . Conversely, if B is too small (nearly zero-surface-tension-limit), competition among inward fingers is supposed to be very intense and the formation of topological singularities (droplet fission and breakup) could be expected. Singularity formation has been experimentally verified in Ref. [21], where finger pinch-off and droplet emission are observed.

Now, we analyze the role of the gap spacing b . From Fig. 4 we notice that $C(n)$ is indeed b dependent, so that for fixed B this dependence is stronger (weaker) for smaller (larger) values of b , confirming the experimental findings of Refs. [16,21]. Notice also that this dependence is more evident for larger values of $A < 0$. Finally, note that if B is allowed to vary, the sensitivity of $C(n)$ with respect to b is stronger for smaller B , being completely irrelevant for sufficiently large values of the dimensionless surface tension. This fact can be verified in Fig. 4 by noticing that for $B = 2.0 \times 10^{-3}$ [labeled by (c)] the solid and dashed lines simply overlap. This last feature can be even more clearly observed in Fig. 5 where the difference function goes quickly to zero as B is increased, so that, after some sufficiently large value of the surface tension parameter B , changing b results in no practical differences regarding finger competition behavior. Therefore, we deduce that the effect of normal stresses is not relevant in the large- B limit.

We proceed by commenting on the case $A > 0$ (inner fluid is less viscous). In Fig. 4 we see that by reversing the sign of A from negative to positive there is in fact just one significant change: if $A > 0$, the competition function $C(n)$ becomes positive, indicating that the growth of the cosine subharmonic $a_{n/2}$ is now favored [see Eq. (14)]. This causes increased competition among *outward* fingers. Interestingly, concerning the action of B and b , the rest of the conclusions reached above for the case $A < 0$ apparently remain valid for positive viscosity contrast. This is also evident from Fig. 5 which depicts a F_{Diff} function that is symmetric under sign reversal of A . It is also easy to see that competition dynamics is more (and equally) sensitive to changes in b , for larger values of A , no matter if it is positive or negative.

We close this section by making a few remarks about our mode-coupling description of the finger competition behavior if extra stresses originated from normal velocity gradients in Eq. (6) are *not* taken into account. As expected, if $\delta = 0$, we have verified that the competition dynamics would be completely insensitive to changes in the gap spacing b . Of course, this would not be in agreement with recent experimental studies of the system [16,21]. We also have found

that the discrepancies between the theoretical analysis for finger competition with $\delta = 0$ and the real experiments are increasingly larger for smaller values of the surface tension parameter B . Finally, we point out that if $\delta = 0$ the effect of the viscosity contrast on the competition of the fingered structures would be exaggerated, mainly in the high- $|A|$ limit. These last remarks reinforce the necessity of introducing normal stresses into the general theoretical framework of the problem in order to obtain a better and more reliable understanding of the finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells.

V. CONCLUSIONS

One of the main reasons that motivated us to develop the current weakly nonlinear study was the possibility to extract analytical information about the rotating Hele-Shaw problem, which otherwise could only be acquired via meticulous experiments [16,21] or sophisticated numerical methods [21]. As a result of our mode-coupling approach several features of the patterns formed in rotating cells, especially those related to finger competition dynamics, can now be explained and predicted analytically. Our analysis explicitly indicates that the link between the finger competition dynamics and the parameters A , B , and b occurs through enhanced growth of subharmonic perturbations. We stress that the finger competition mechanism we propose is consistent with others already studied in the literature [16,21].

Our mode-coupling approach allows one to study finger competition considering a rich space of physical parameters, in the sense that it incorporates the combined role of all three relevant parameters for the problem: namely, the viscosity contrast A , the surface tension coefficient B , and the dimensionless gap spacing b . In agreement with previous experimental and numerical investigations of the problem [16,21], we have concluded that A has indeed a key role in determining finger competition, so that competition virtually disappears when $A \rightarrow 0$. On the other hand, we have shown that B and b can also be of considerable importance for an accurate description of the problem. For instance, we have deduced that for sufficiently large B , competition vanishes regardless of the particular values of A and b . Likewise, we have verified explicitly that b has a stronger influence on finger competition whenever B is small and A is large.

Moreover, we have been able to extend our predictions beyond the universe of parameters normally explored by existing experiments and simulations [15–26]. Concerning the values of the viscosity contrast, while the majority of works in rotating Hele-Shaw cells focus on very low and very high $A < 0$ limits, we can address its whole range of validity $-1 \leq A \leq 1$. This is also true with respect to the parameters B and b . The welcome flexibility offered by our analytical approach is very advantageous, since the weakly nonlinear method provides an accurate approximation of the dynamics, being nonperturbative with respect to the relevant physical parameters of the problem. In addition, it permits one to explore physical situations not yet addressed by in the literature. For example, if $A > 0$, we have made a rather specific prediction: increased competition of *outward* fingers would

occur for increasingly larger values of *positive* viscosity contrast. Furthermore, we have predicted that for $A > 0$ all other morphological features related to competition should be similar to those obtained in the $A < 0$ case. It is worth noting that some of our specific predictions—mainly those connected to the situation in which $A > 0$ —still need to be checked experimentally in *rotating* cells. We hope experimentalists will be willing to test our weakly nonlinear results for positive A .

We conclude by pointing out that the main theoretical considerations employed in this work (weakly nonlinear mode-coupling theory including normal viscous stresses) are very likely useful and applicable to other important fluid

dynamics systems, in particular those involving pattern formation in confined fluid flow under variable gap spacing conditions occurring in lifting Hele-Shaw cells [34–36], and adhesion-related problems with Newtonian, non-Newtonian, and magnetic fluids [37–40].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank CNPq (Brazilian Research Council) for financial support of this research. We gratefully acknowledge useful communications and stimulating discussions with E. Alvarez-Lacalle and J. Casademunt.

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London, Ser. A **245**, 312 (1958).
 - [2] G. Tryggvason and H. Aref, J. Fluid Mech. **136**, 1 (1983).
 - [3] G. Tryggvason and H. Aref, J. Fluid Mech. **154**, 287 (1985).
 - [4] J. V. Maher, Phys. Rev. Lett. **54**, 1498 (1985).
 - [5] M. W. DiFrancesco and J. V. Maher, Phys. Rev. A **39**, 4709 (1989); **40**, 295 (1989).
 - [6] L. Paterson, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
 - [7] K. V. McCloud and J. V. Maher, Phys. Rep. **260**, 139 (1995).
 - [8] A. J. DeGregoria and L. W. Schwartz, J. Fluid Mech. **164**, 383 (1986).
 - [9] S. D. Howison, J. Fluid Mech. **167**, 439 (1986).
 - [10] E. Meiburg and G. M. Homsy, Phys. Fluids **31**, 429 (1988).
 - [11] C.-W. Park and G. M. Homsy, Phys. Fluids **28**, 1583 (1985).
 - [12] P. Tabeling, G. Zocchi, and A. Libchaber, J. Fluid Mech. **177**, 67 (1987).
 - [13] T. Maxworthy, J. Fluid Mech. **177**, 207 (1987).
 - [14] A. Arnéodo, Y. Couder, G. Grasseau, V. Hakim, and M. Rabaud, Phys. Rev. Lett. **63**, 984 (1989).
 - [15] L. W. Schwartz, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989).
 - [16] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996).
 - [17] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, Phys. Rev. E **68**, 026308 (2003).
 - [18] V. M. Entov, P. I. Etingof, and D. Ya. Kleinbock, Eur. J. Appl. Math. **6**, 399 (1996).
 - [19] F. X. Magdaleno, A. Rocco, and J. Casademunt, Phys. Rev. E **62**, R5887 (2000).
 - [20] D. Crowdy, Q. Appl. Math. **60**, 11 (2002); SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math. **62**, 945 (2001).
 - [21] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
 - [22] C.-Y. Chen and S.-W. Wang, Fluid Dyn. Res. **30**, 315 (2002).
 - [23] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
 - [24] D. P. Jackson and J. A. Miranda, Phys. Rev. E **67**, 017301 (2003).
 - [25] Ll. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, Phys. Fluids **11**, 778 (1999).
 - [26] Ll. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, Phys. Fluids **12**, 1685 (2000).
 - [27] C.-W. Park and G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **139**, 291 (1984).
 - [28] D. A. Reinelt, J. Fluid Mech. **183**, 219 (1987).
 - [29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Mechanics: Fluid Mechanics* (Pergamon, 1959), Vol. 6.
 - [30] L. W. Schwartz, Phys. Fluids **29**, 3068 (1986).
 - [31] T. Maxworthy, Phys. Rev. A **39**, 5863 (1989).
 - [32] J. A. Miranda and M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).
 - [33] J. A. Miranda and M. Widom, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 931 (1998).
 - [34] M. J. Shelley, F.-R. Tian, and K. Wlodarski, Nonlinearity **10**, 1471 (1997).
 - [35] S.-Z. Zhang, E. Louis, O. Pla, and F. Guinea, Eur. Phys. J. B **1**, 123 (1998).
 - [36] J. A. Miranda and R. M. Oliveira, Phys. Rev. E **69**, 066312 (2004).
 - [37] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, J. Appl. Phys. **93**, 1557 (2003).
 - [38] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, and P. Fabre, Europhys. Lett. **62**, 244 (2003).
 - [39] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **69**, 016311 (2004).
 - [40] J. A. Miranda, R. M. Oliveira, and D. P. Jackson, Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004).

APÊNDICE D

**DYNAMICS OF VISCOUS FINGERS IN ROTATING
HELE-SHAW CELL WITH CORIOLIS EFFECTS.**

Phys. Rev. E **75**, 016305 (2007)

Dynamics of viscous fingers in rotating Hele-Shaw cells with Coriolis effects

Hermes Gadêlha and Nielison Brito

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901 Brazil

José A. Miranda*

Department of Physics, University of Florida, P.O. Box 118440, Gainesville, Florida 32611-8440, USA

(Received 19 June 2006; published 17 January 2007)

A growing number of experimental and theoretical works have been addressing various aspects of the viscous fingering formation in rotating Hele-Shaw cells. However, only a few of them consider the influence of Coriolis forces. The studies including Coriolis effects are mostly restricted to the high-viscosity-contrast limit and rely on either purely linear stability analyses or intensive numerical simulations. We approach the problem analytically and use a modified Darcy's law including the exact form of the Coriolis effects to execute a mode-coupling analysis of the system. By imposing no restrictions on the viscosity contrast A (dimensionless viscosity difference) we go beyond linear stages and examine the onset of nonlinearities. Our results indicate that when Coriolis effects are taken into account, an interesting interplay between the Reynolds number Re and A arises. This leads to important changes in the stability and morphological features of the emerging interfacial patterns. We contrast our mode-coupling approach with previous theoretical models proposed in the literature.

DOI: [10.1103/PhysRevE.75.016305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.016305)

PACS number(s): 47.15.gp, 47.54.-r, 47.20.Ma, 47.55.D-

I. INTRODUCTION

The study of the evolution of hydrodynamic instabilities and pattern formation at the interface separating two fluids in a rotating Hele-Shaw cell has attracted much interest since the initial work by Schwartz [1–20]. The problem constitutes a variation of the traditional, purely viscosity-driven Saffman-Taylor instability [21,22] in which the cell is rotated around a vertical axis passing through its center. As a result of the density difference between the two confined fluids, centrifugally induced interfacial deformations arise, leading to various interesting dynamical and morphological effects.

Despite the considerable number of theoretical and experimental studies of rotating Hele-Shaw cells [1–20], just a few of them [1,15–18] address the role of Coriolis forces in affecting the dynamics of the interface. On the analytical side, the structure of the fingering under Coriolis forces is largely restricted to linear stability investigations [1,15,16] and mostly limited to the high-viscosity-contrast case (inviscid outer fluid). The unbounded outer fluid problem studied in Ref. [15] has been extended [16] to cover the linear stability of the two-fluid problem (fluids contained within a bounded disk), with arbitrary viscosity contrast and density ratio. These studies provide useful information about the system during the initial (purely linear) time regime. A noteworthy point originally examined in Ref. [15] refers to the way the Coriolis force is added into the governing equations for fluid flow in rotating Hele-Shaw cells: while Schwartz [1] includes it directly in a gap-averaged two-dimensional (2D) Darcy's law, Waters and Cummings [15] introduce it in a more rigorous fashion onto a 3D Navier-Stokes equation. Comparison between these two approaches at the linear level

[15] supports the generality of the Navier-Stokes first-principles calculation, restricting the quantitative validity of the more casual model of Ref. [1] to considerably small Reynolds numbers (relative measure of inertial and viscous forces). More advanced (fully nonlinear) stages of the interfacial evolution including Coriolis forces are also not completely understood and rely heavily on numerical simulations for immiscible [1] and miscible [17,18] flows. To this day, no attention has been paid to an analytical investigation of the dynamics that bridges these two extreme stages under the presence of Coriolis forces. Consideration of arbitrary values of the viscosity contrast has also been largely overlooked.

Recently, the interfacial instability of two viscous fluids in a rotating Hele-Shaw cell has been studied (neglecting Coriolis effects) by analytical mode-coupling approaches [10,13]. In particular, it has been shown that a second-order weakly nonlinear analysis is capable of accurately describing essential nonlinear aspects related to the finger competition dynamics [13]. It has been found that competition among the fingering structures is dramatically dependent on the viscosity difference (or viscosity contrast A) between the fluids. It turns out that changes in the magnitude and sign of A result in fingering patterns presenting very different typical lengths and widths [2,10,12,13]. Subsequent numerical studies of the problem [14,19] have verified that the emergence and location of interfacial singularities (pinch-off events) are significantly modified as A varies. These simulations also have substantiated the analytical results of Ref. [13], providing convincing evidence of the usefulness and validity of their weakly nonlinear approach. Similar type of studies including the effect of Coriolis forces still need to be addressed.

In this work, we carry out an analytical weakly nonlinear analysis for the intermediate stages of the interface evolution in rotating Hele-Shaw cells, where the Coriolis effect is significant. We explore the onset of nonlinear effects and try to gain analytical insight into the dynamic process of fingering formation. In contrast to prior work [1,15,17,18] on the un-

*On leave from Departamento de Física, LFTC, UFPE, Brazil.
Electronic address: jme@df.ufpe.br

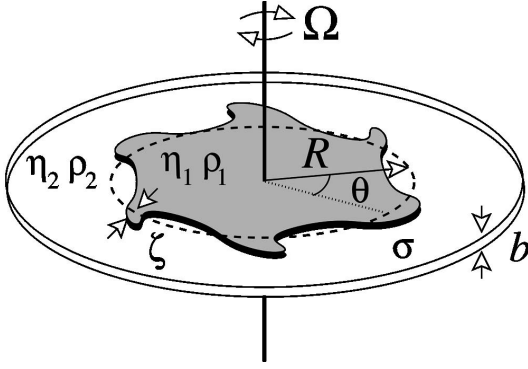


FIG. 1. Schematic diagram representing a rotating Hele-Shaw cell.

bounded outer fluid problem, our study imposes no restrictions on the viscosity contrast, so that A can be arbitrarily taken within its entire range of validity ($-1 \leq A \leq +1$). This enables us to extract valuable analytical information concerning the interplay between Coriolis and viscosity contrast effects in both the linear and early nonlinear regimes. We will be particularly interested in studying the impact of these effects on the linear growth rate of interfacial perturbations and on the finger competition dynamics. Comparison of our main results with previous theoretical studies on rotating cells with Coriolis effects [1,15] is also performed.

II. PHYSICAL PROBLEM AND GOVERNING EQUATIONS

Consider a rotating Hele-Shaw cell of gap width b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids spinning with constant angular velocity Ω around the z axis, which is perpendicular to (and coaxial with) the cell plates (see Fig. 1). We define our rotating coordinate system in such a way that its origin is located at the center of the cell. The viscosities of the inner and outer fluids are, respectively, denoted as η_1 and η_2 , and the surface tension between them is σ . The densities of the fluids are defined as ρ_1 and ρ_2 . We consider that the outer fluid is unbounded and focus on the centrifugally induced motion where $\rho_1 > \rho_2$, but allow the inner fluid to be either more or less viscous than the outer fluid. The perturbed interface is described as $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$ where R is the radius of the initially circular interface and $\zeta(\theta, t)$ represents the net interfacial perturbation in polar coordinates (r, θ) .

Our weakly nonlinear approach follows the theoretical model recently proposed by Waters and Cummings [15] and considers that the fluid flow in the rotating frame of reference is governed the Navier-Stokes equation

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j - \rho_j \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2\rho_j \Omega \times \mathbf{u}_j \quad (1)$$

and the continuity equation for an incompressible fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad (2)$$

where $\mathbf{u}_j$ denotes the three-dimensional fluid velocity for fluid j (where $j=1,2$), p_j is the hydrodynamic pressure, $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ ($\hat{\mathbf{z}}$ is the unit vector along the z axis), and $\mathbf{r}$ is the position vector of a fluid element measured from the rotation axis. Note that in order to express solutions in the rotating frame of reference at the Hele-Shaw cell, it is necessary to augment the hydrodynamic pressure force balance for motion in an inertial frame with two “fictitious” forces. These are the centrifugal and Coriolis forces, represented by the third and fourth terms on the right-hand side of Eq. (1), respectively. The acceleration due to gravity is neglected.

By using the full Navier-Stokes expression (1), plus Eq. (2), and imposing the no-slip boundary condition at the cell plates ($\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ at $z=0$ and $z=b$), a generalized Darcy-like law can be obtained by averaging the three-dimensional velocity $\mathbf{u}_j$ over the gap direction (z axis)

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2 C_j}{12 \eta_j} \left[\nabla P_j - \frac{\mathcal{D}_j}{C_j} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla P_j) \right], \quad (3)$$

where $\mathbf{v}_j(r, \theta) = \int_0^b \mathbf{u}_j(r, \theta, z) dz / b$ represents the 2D gap-averaged velocity in each fluid,

$$C_j = \frac{\sinh \sqrt{12 \text{Re}_j} - \sin \sqrt{12 \text{Re}_j}}{2 \text{Re}_j \sqrt{12 \text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12 \text{Re}_j} + \cos \sqrt{12 \text{Re}_j}]}, \quad (4)$$

$$\mathcal{D}_j = \frac{1}{2 \text{Re}_j} \left\{ 1 - \frac{\sinh \sqrt{12 \text{Re}_j} + \sin \sqrt{12 \text{Re}_j}}{\sqrt{12 \text{Re}_j} [\cosh \sqrt{12 \text{Re}_j} + \cos \sqrt{12 \text{Re}_j}]} \right\}, \quad (5)$$

with $\text{Re}_j = (\rho_j \Omega b^2) / (12 \eta_j)$ being a Reynolds number [23]. We stress that in deriving Eq. (3), although the “standard” inertial terms $[\partial \mathbf{u}_j / \partial t + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j]$ appear in the original Navier-Stokes equation (1), they are later dropped by virtue of the assumed smallness of some reduced Reynolds numbers [15]. The more general, but considerably more complicated case where such inertial terms are retained has been recently examined by Waters *et al.* in Ref. [16], when the fluids are bounded.

In Eq. (3) the centrifugal contribution is conveniently incorporated into a *Laplacian* reduced pressure

$$P_j = p_j - \frac{\rho_j \Omega^2 r^2}{2}, \quad (6)$$

which couples the hydrodynamic pressure p_j (which is *not* Laplacian) to purely centrifugal effects. By using expressions (4) and (5) and expanding to the lowest nonzero order in the Reynolds number we obtain

$$C_j \approx \frac{1}{1 + \alpha \text{Re}_j^2}, \quad \frac{\mathcal{D}_j}{C_j} \approx \beta \text{Re}_j,$$

with $\alpha = 204/35 \approx 5.83$ and $\beta = 12/5 = 2.4$. It is worth noting that by taking the zero-Reynolds-number limit ($\text{Re}_j \rightarrow 0$) of our Eq. (3) we obtain that $C_j = 1$ and $\mathcal{D}_j / C_j = 0$, so that we reproduce the usual Darcy’s law equation for a rotating Hele-Shaw cell *without* Coriolis forces [2,10,12,13].

We also call the reader's attention to the fact that in deriving the Darcy-type law, Eq. (3), we have introduced the Coriolis force term already at the level of the Navier-Stokes equation (1). It was under such circumstances that the gap-averaged calculation leading to Eq. (3) has been performed. This was also the case in the work by Waters and Cummings [15]. This procedure is in contrast to Schwartz's work [1] where a simplified Navier-Stokes equation is considered (by neglecting both the "standard" inertial terms and also the Coriolis contribution) and, just after performing its gap averaging, the Coriolis term is put back into the problem in an *ad hoc* manner. The linear stability analysis performed in Ref. [15] has demonstrated that this arbitrary assumption of Ref. [1] can lead to appreciable errors at the linear level, making it valid only for very small Reynolds numbers. Our mode-coupling theory adopts the more rigorous approach originally proposed in Ref. [15], so this restriction is not imposed on the magnitude of Re_j .

We extend the previous linear studies [1,15] to the weakly nonlinear stages of the dynamics and derive the equation of motion for the interfacial perturbations up to second-order couplings. We begin by Fourier expanding the interface perturbation and the corresponding reduced pressure field as

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta), \quad (7)$$

with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$ and discrete azimuthal wave numbers $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, and

$$P_j = \sum_{n \neq 0} P_{jn}(t) \left(\frac{\mathcal{R}^{|n|}}{r^{|n|}} \right)^{(-1)^j} \exp(in\theta), \quad (8)$$

where expression (8) automatically satisfies Laplace's equation.

We proceed by expressing P_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering two basic boundary conditions at the fluid-fluid interface: (i) the kinematic boundary condition $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2|_{\mathcal{R}}$, where $\mathbf{v}_j$ is given by Eq. (3) and $\mathbf{n}$ is the unit normal vector pointing from fluid 1 to fluid 2, and (ii) the pressure jump at the interface $(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} = \sigma \kappa|_{\mathcal{R}}$, where κ denotes the interface curvature. By substituting Eqs. (7) and (8) into these boundary conditions, expanding to second order, and Fourier transforming one obtains, after some manipulation, the *dimensionless* mode-coupling equation for the interfacial amplitudes (for $n \neq 0$):

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [\mathcal{F}(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'}], \quad (9)$$

where

$$\Lambda(n) = \frac{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{[(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)]} |n| [1 - B(n^2 - 1)] \quad (10)$$

is a linear dispersion relation and

$$\mathcal{F}(n, n') = \frac{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{[(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)]} |n| \left[\frac{1}{2} - B \left(1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right) \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n, n') = & \left[\frac{(\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2) + A(\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2)}{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + A(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)} \right] \left[\frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}'_2} \right] \\ & \times \{ |n| [1 - \mathcal{H}_0 \text{sgn}(nn')] - \mathcal{H}_1 + i[\mathcal{I}_0 \text{sgn}(n') \\ & + |n| \mathcal{I}_1 \text{sgn}(n)] \} \end{aligned} \quad (12)$$

represent second-order mode-coupling terms, with $\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}_1 + i \text{sgn}(n) \mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{C}_2 - i \text{sgn}(n) \mathcal{D}_2$, $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{C}_1 + i \text{sgn}(n') \mathcal{D}_1$, and $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{C}_2 - i \text{sgn}(n') \mathcal{D}_2$. The detailed functional form of the terms $\mathcal{H}_\alpha$ and $\mathcal{I}_\alpha$ (where the index $\alpha=0, 1$) appearing in Eq. (12) is presented in the Appendix.

Note that all these quantities (Λ , $\mathcal{F}$, and $\mathcal{G}$) are complex in general. Perturbations grow (or decay) at a rate $\lambda(n)$ (the linear growth rate), where $\lambda(n)$ is the real part of the complex quantity defined in Eq. (10), $\lambda(n) = \text{Real}[\Lambda(n)]$. The same is true for the mode-coupling terms $\mathcal{F}(n, n') = \text{Real}[\mathcal{F}(n, n')]$ and $\mathcal{G}(n, n') = \text{Real}[\mathcal{G}(n, n')]$. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. In Eq. (9) lengths are rescaled by R and time by R/U , where $U = [b^2 R (\rho_1 - \rho_2) \Omega^2] / [12(\eta_1 + \eta_2)]$ is a characteristic velocity. Here we define the surface tension parameter $B = \sigma / [R^3 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2)]$ and the viscosity contrast

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (13)$$

From now on, we work with the dimensionless version of the equations. Notice that Eq. (9) is conveniently written in terms of the dimensionless parameters A , B , $\mathcal{C}_j$, and $\mathcal{D}_j$ where these last two are functions of the Reynolds numbers in fluids 1 and 2. The presence of the Coriolis force term in Eq. (3) introduces an explicit dependence of the linear growth rate $\lambda(n)$ and also of the mode-coupling terms $\mathcal{F}(n, n')$ and $\mathcal{G}(n, n')$ on Re_j and A . The Reynolds numbers work as controlling parameters that regulate the strength of the Coriolis effects, which are absent when $\text{Re}_j=0$ (or equivalently when $\mathcal{C}_j=1$ and $\mathcal{D}_j=0$). In fact, when $\text{Re}_j=0$, Eqs. (10)–(12) reproduce the results obtained in Ref. [13] for the corresponding problem without Coriolis effects. We also point out that, after appropriate reintroduction of dimensions, our linear dispersion relation (10) agrees with the Waters-Cummings equivalent formula in the case $A=-1$ [15]. Throughout this work, unless otherwise stated, we focus on the situation in which the centrifugally induced instability is maximized, where the inner fluid is much denser than the outer one ($\rho_1 \gg \rho_2$), so that we take $\rho_2=0$. Under such circumstances the Coriolis effects are associated with $\mathcal{C}=\mathcal{C}(\text{Re})$ and $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\text{Re})$, which are functions of the Reynolds number Re of fluid 1 (hereafter we will drop the subscript 1).

We conclude this section by briefly discussing a connection between our linear dispersion relation (10) and the one very recently obtained in Ref. [16]. Waters and co-workers

[16] derived a linear dispersion relation for the more complicated case where the “standard” inertial terms are retained [Eq. (3.26) in Ref. [16]]. Notice that it is not exactly straightforward to relate this directly to the results of the present work, because in Ref. [16] the two fluids are contained within a bounded disk (where a no-flux condition is applied on the averaged fluid velocity), with dimensionless radius 1 and inner fluid domain radius R_0 . Conversely, our current results neglect the “standard” inertial terms and consider an unbounded outer fluid. In the notation of Ref. [16] a relation can be obtained by considering the limit in which $\mathcal{A}=O(1)$, while $\mathcal{S}\rightarrow\infty$, with the combination $\mathcal{A}\mathcal{S}(1-1/\bar{\rho})=O(1)$, where $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, and $\bar{\rho}$ are a Strouhal number, the ratio of time scales for flow and rotation, and the density ratio, respectively. Such a comparison still requires some rescaling of lengths (by sending the rigid cell boundary off to infinity in Ref. [16], while keeping R_0 finite) [24]. We have implemented such a limit and have indeed verified a perfect agreement between our Eq. (10) and Eq. (3.26) in Ref. [16]. A more complete study of the nontrivial comparison between our system and the one studied in Ref. [16] goes beyond the scope of the present work and could be investigated elsewhere.

III. LINEAR AND WEAKLY NONLINEAR DYNAMICS

A. Linear stage

In this section we investigate the consequences of the changes introduced by the generalized Darcy’s law (3) in both linear and weakly nonlinear stages of the interface evolution. We get started by discussing some noteworthy features of the linear regime. Note that the linear growth rate $\lambda(n)=\text{Real}[\Lambda(n)]$ [see Eq. (10)] is written as the product of a prefactor which depends on Re and A , by $|n|[1-B(n^2-1)]$, which incidentally is the linear growth rate for the case *without* Coriolis effects [13]. An immediate consequence of the existence of such a prefactor is the fact that both the critical mode number $n_c=\sqrt{1+1/B}$ (defined by setting $\lambda(n)=0$) and the fastest-growing mode $n_{\max}=n_c/\sqrt{3}$, which maximizes $\lambda(n)$, show no dependence on either Re or A . As a result, the band of unstable modes (characterized by n_c) and the typical number of fingers at the linear stage (specified by $n_{\max}$) are not affected by the Coriolis effects. Despite having an evident influence on the typical number of fingers shown by the patterned structures, the parameter B will not have much influence on the major results presented in this work. It just introduces some rescaling when varied (smaller B tends to increase the overall magnitude of the effects). Throughout this work and without loss of generality, we take the characteristic value $B=2.0\times 10^{-4}$. It is worth mentioning that the values of the relevant dimensionless parameters used in our current study (B , A , and Re) are absolutely consistent with the typical values of the corresponding physical quantities used in existing experiments in rotating Hele-Shaw cells performed by Carillo *et al.* [2,4,5] and Alvarez-Lacalle, and co-workers [12,20].

Figure 2 depicts the linear growth rate as a function of mode n for $A=-1$ (black curve), $A=0$ (dark gray), and $A=$

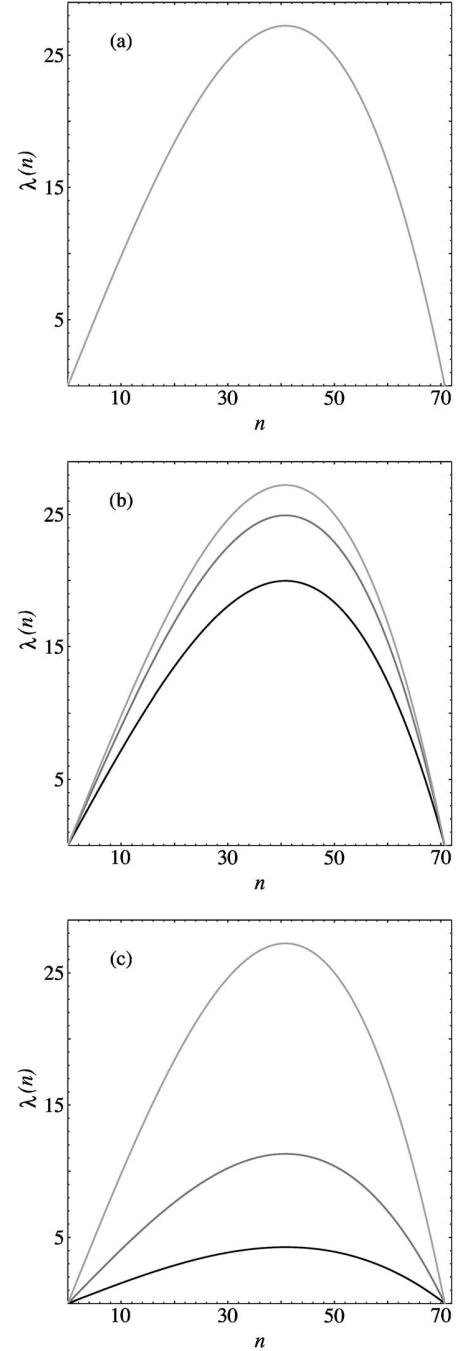


FIG. 2. Linear growth rate $\lambda(n)$ as a function of n , for $A=-1, 0, +1$ and three different values of Re : (a) 0, (b) 0.25, and (c) 1. The color labeling refers to the values of the viscosity contrast: $A=-1$ (black), $A=0$ (dark gray), and $A=+1$ (light gray). Note that hidden in the solid light gray curve in (a) there are in fact three coincident curves (the other two curves lie hidden).

$+1$ (light gray) and three different values of Re : (a) 0; (b) 0.25, and (c) 1. If Coriolis effects are *not* included, it can be verified from Eq. (10) that $\lambda(n)$ is completely insensitive to changes in A . So in Fig. 2(a) the cases for $A=-1, 0, +1$ are all depicted by the same curve. However, if $\text{Re} \neq 0$, the linear growth rate becomes dependent on A and this single curve

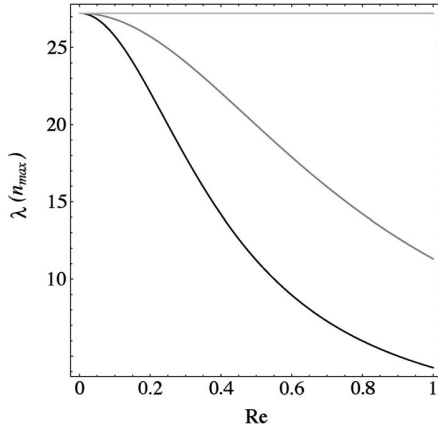


FIG. 3. Maximum growth rate $\lambda(n_{\max})$ as a function of Reynolds number Re and $A = -1$ (black), $A = 0$ (dark gray), and $A = +1$ (light gray).

splits into others (one for each value of A) due to Coriolis effects. If $Re = 0.25$ [Fig. 2(b)], we indeed obtain three curves, where the curve for $A = +1$ ($A = -1$) has the highest (lowest) peak. So, if Re is nonzero and is kept fixed while A is modified, the patterns become more unstable as A varies from -1 to $+1$. This makes perfect physical sense since when $A = -1$ (inner viscous fluid pushing an outer inviscid fluid) we have the most stable situation regarding the Saffman-Taylor instability. It is also evident from Fig. 2(c) that larger Reynolds numbers ($Re = 1$) tend to result in curves presenting typically lower peaks for $A \neq +1$, indicating the stabilizing nature of the Coriolis effects. Therefore, if A is kept unchanged and is not equal to $+1$, larger Re tend to restrain the growth of interfacial fingering. All these linear stability findings are consistent with recent numerical simulations of the problem [17,18].

By inspecting Eq. (10) it can be verified that Coriolis effects do vanish in the limit of highest positive viscosity contrast $A = +1$, even for nonzero Re . This is the reason why the light gray curve for $A = +1$ depicted in Figs. 2(a)–2(c) remains unchanged as the Reynolds number is modified. Therefore, the zero-Coriolis-force situation can be achieved either by taking $Re = 0$ for any A or by assuming that $A = +1$ for any $Re \neq 0$.

It is clearly illustrated in Fig. 2 that despite the stabilizing action of the Coriolis effects, the peak location and width of the band of unstable modes remain unchanged, independently of the values of Re and A . A simple physical explanation for this stabilizing role can be given based on the fact that the Coriolis force tends to move the fingers “backwards” in the θ direction, deviating them from the purely radial growth. Therefore, it inhibits the radial stretching due to centrifugal forces, leading to a decrease in the growth of the interfacial perturbations. Even though the number of fingers is not altered by the Coriolis forces, their radial growth rate is certainly affected.

The aspects highlighted above are also observed in Fig. 3 where the magnitude of the maximum growth rate $\lambda(n_{\max})$ is plotted as a function of $0 \leq Re \leq 1$ for the same values of A and B used in Fig. 2. If $A = +1$, the height of the peak does

not change as Re is varied, meaning that the Coriolis effects play no role. Otherwise, the growth rate of the fastest-growing mode decreases with increasing Re . This drop of $\lambda(n_{\max})$ with Re is stronger for smaller values of A . One important general conclusion is that, in order to induce increasingly larger contributions from the Coriolis force, one needs not merely to consider large values of Re , but also smaller values of A . On the other hand, the very presence of A in Eq. (10) comes through the inclusion of Coriolis forces, so that if $Re = 0$, the linear growth rate is completely independent of A . These results suggest an interesting coupling between Re and A when Coriolis effects are taken into account in the rotating Hele-Shaw cell problem.

B. Weakly nonlinear stage

Now we turn our attention to the weakly nonlinear flow stage, focusing on finger competition events, the prominent nonlinear phenomena occurring in rotating Hele-Shaw cells. It is well known that the viscosity contrast A has a crucial role in determining interfacial behavior for flow in rotating cells when Coriolis effects are neglected [12–14,19]. Considering the length variability as a measure of the finger competition, it has been verified that competition among the fingering structures is dramatically modified as A varies: increasingly larger values of the magnitude of $A > 0$ ($A < 0$) lead to enhanced competition among outward (inward) fingers. It has been also shown that competition is significantly suppressed when $A \rightarrow 0$. When Coriolis effects are significant, in addition to the parameter A , it is of interest to examine how finger competition dynamics is affected by the Coriolis control parameter Re .

As in Refs. [13,25], to study finger competition we consider the influence of a fundamental mode n on the growth of its subharmonic $n/2$. To do that we rewrite the net perturbation (7) in terms of cosine and sine modes, where the cosine $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ and sine $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ amplitudes are real valued. Then, for consistent second-order expressions, we replace the time derivative terms $\dot{a}_n$ and $\dot{b}_n$ on the right-hand side of Eq. (9) by $\lambda(n)a_n$ and $\lambda(n)b_n$, respectively. Without loss of generality we may take $a_n > 0$ and $b_n = 0$. Under these circumstances, the following equations of motion for the sine and cosine subharmonics are obtained:

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (14)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (15)$$

where

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right]. \quad (16)$$

The function $C(n)$ measures the strength of the competition such that increasingly larger values of $C(n) > 0$ ($C(n) < 0$) lead to enhanced competition of outward (inward) fingers.

We begin our study of the finger competition dynamics by examining the weakly nonlinear results depicted in Fig. 4. It plots $C(n)$ given by Eq. (16) as a function of viscosity contrast A (with $-1 \leq A \leq 1$) for five different values of Rey-

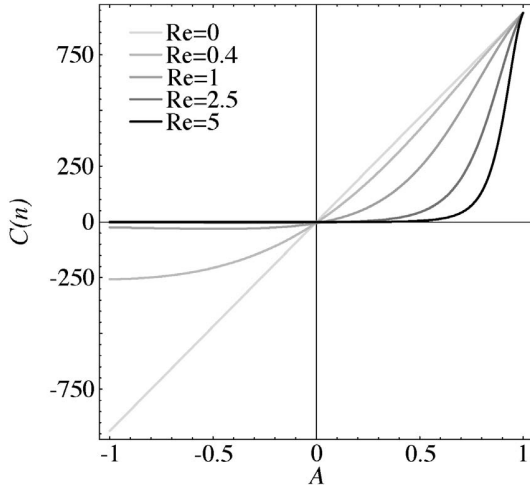


FIG. 4. Competition function $C(n)$ plotted in terms of the viscosity contrast A and five different values of the Reynolds number: $Re=0, 0.4, 1, 2.5, 5$. Darker colors refer to higher Re .

nolds number Re . To observe growth of the fundamental mode and also to allow growth of its subharmonic, we carry out our analysis considering that $n=n_c$. The most evident feature of Fig. 4 is the fact that the finger competition behavior is strongly dependent on Re and can be very different from the equivalent behavior described when Coriolis effects are absent [13]. In Fig. 4, when $Re=0$ (light gray straight line) we reproduce exactly what has been observed in Refs. [12–14,19] for the case without Coriolis effects.

The situation is significantly changed when the Coriolis effects are taken into account. The first relevant feature when $Re \neq 0$ is the fact that, in contrast to the case $Re=0$, the finger competition does not vanish when A tends to zero. Rather, $C(n)=0$ at a specific positive viscosity contrast $\bar{A}=\bar{A}(Re)$. In fact, when Coriolis effects are considered and Re is increased, the competition tends to vanish at increasingly larger values of $\bar{A}$, such that $\bar{A} \rightarrow 1$ for very large values of Re . Consequently, if Coriolis effects are not neglected in rotating Hele-Shaw cells, one could produce a pretty symmetric pattern in which the average length of all fingers is roughly the same, without necessarily imposing that $A=0$. As a matter of fact, depending on the value of Re one could access a situation in which finger competition is practically absent at considerably high A . This last conclusion exemplifies how the inclusion of Coriolis effects can introduce significant changes into the nonlinear pattern formation scenario in rotating Hele-Shaw cells.

The competition behavior of the fingers is more complex and richer when Coriolis effects are considered. By examining Fig. 4 and contrasting the case for $Re=0$ (no Coriolis) to those with $Re \neq 0$ (nonzero Coriolis effect), we identify some distinct finger competition behaviors. In general, if $A > 0$ we notice that the curves for $Re \neq 0$ lie below the straight line for $Re=0$, so that a decrease in the finger competition of the outward fingers is expected. On the other hand, if $A < 0$ we notice that the curves for $Re \neq 0$ lie above the straight line for $Re=0$. Consequently, within this last interval the competition between inward fingers is decreased (even more

strongly than when $A > 0$). The overall effect of the Coriolis forces is to restrain finger competition, regardless of whether they are going inward or outward. We have also verified that for large values of Re , all curves $C(n)$ asymptotically approach zero, except for values of A close to $+1$.

IV. PARALLEL WITH SCHWARTZ'S APPROACH

In this section we make a parallel between our main linear and nonlinear findings (which have been calculated based on the model proposed by Waters and Cummings [15]) with those obtained by using Schwartz's model [1]. By employing Schwartz's approach it is also possible to arrive to a Darcy law equation like the one shown in Eq. (3), however, with different coefficients given by [1]

$$C_{js} = \frac{1}{1 + 4Re_j^2}, \quad \frac{D_{js}}{C_{js}} = 2Re_j.$$

By substituting these coefficients into Eq. (3) and following the same steps described in Sec. II, we obtain a mode-coupling differential equation similar to Eq. (9), where the linear growth rate $\lambda(n)_S$ and the mode-coupling terms $F(n, n')_S$ and $G(n, n')_S$ for the Schwartz's approach can be directly calculated from Eqs. (10)–(12) simply by replacing C_j by C_{js} and D_j by D_{js} .

First, we compare both growth rates $\lambda(n)$ and $\lambda(n)_S$ for the case of interest here ($\rho_2=0$), as the parameters Re and A are changed. We perform such a comparative study in Fig. 5 which plots the relative percentual error $\Gamma=100[\lambda(n)_S - \lambda(n)]/\lambda(n)$ as a function of Re for some values of the viscosity contrast. One obvious feature is that, for a given A , the error Γ undergoes significant changes as the Reynolds number is varied. Of course, if $A=+1$, the growth rates for the two models are coincident and $\Gamma=0$. However, if $-1 \leq A < +1$, the values of the growth rates coincide only at two specific magnitudes of Re : 0 and $\bar{Re}=\bar{Re}(A)$. For a given A , the error Γ is positive in the interval $0 < Re < \bar{Re}$ and negative for $Re > \bar{Re}$. This indicates that Schwartz's approach overestimates the value of the growth rate for the interval $0 < Re < \bar{Re}$ and underpredicts it for $Re > \bar{Re}$. These findings are in agreement with similar results obtained in Ref. [15] for the high-viscosity-contrast case $A=-1$, where $\bar{Re}=2.84$.

It is also evident in Fig. 5 that Γ presents a very strong dependence on the viscosity contrast. As A is varied from -1 to $+1$, the curves tend to approach the $\Gamma=0$ line, indicating that the value for $\lambda(n)_S$ tends to a better agreement with $\lambda(n)$ as A is increased. For the range of Reynolds numbers considered in Fig. 5 ($0 \leq Re \leq 5$), the largest errors of Schwartz's approach occur precisely at $A=-1$ ($\Gamma \sim 28\%$ for $Re=0.92$ and $\Gamma \sim 23\%$ for $Re=5$). However, these errors tend to decrease as the viscosity contrast varies from -1 to $+1$. It is worth noting that the error for underestimation ($\Gamma < 0$) can be much more significant for larger values of Re (for instance, we have verified that Γ can be as large as 45% for $A=-1$ and $Re=10$). We also point out that, for $A=-1$ in Fig. 5, the error is approximately 5% for $Re=0.17$, rising to roughly 10% around for $Re=0.25$. This last value of the

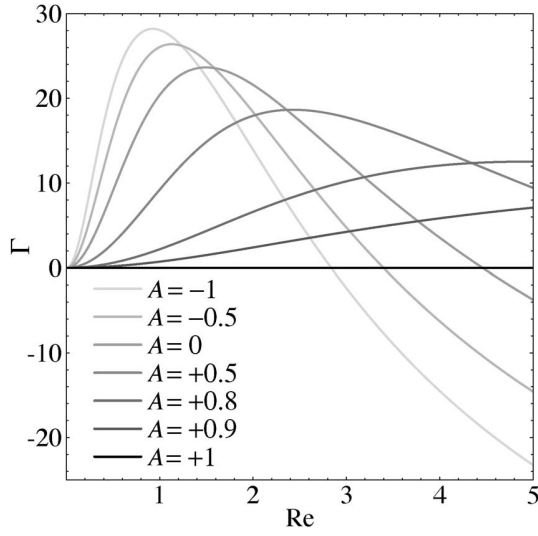


FIG. 5. Percentual error Γ as a function of Re , for several values of A . Darker colors refer to higher A .

Reynolds number has been considered in Ref. [15] (where $A=-1$) as the largest value of Re for which the Schwartz's prediction for the linear growth rate would be considered as "good." However, we believe that a 10% disagreement is a bit too sizable. This indicates that Γ can be appreciable already at very small Reynolds numbers.

We proceed by contrasting our approach with Schwartz's at the weakly nonlinear stage. We do this in Figs. 6 and 7. Figure 6 illustrates how the finger competition function behaves as a function of A for three characteristic values of the Reynolds number Re : (a) 0.25, (b) 0.92, and (c) 2.84. The back solid curve refers to $C(n)$ calculated from Eq. (16), and the back dashed one is related the equivalent function $C(n)_S$ we derived based on Schwartz's model. Complementary information can be obtained in Fig. 7, where we plot the difference $C(n)_S - C(n)$ as a function of A for the same values of Re used in Fig. 6.

As one can easily observe in Fig. 6(a) for low Re , in general the mismatch between the two descriptions is relatively small for most values of the viscosity contrast A , but increases significantly as $A \rightarrow -1$. This feature is also clearly illustrated in Fig. 7(a), where the difference between the models is particularly large within the interval $-1 \leq A < 0$. As far as finger competition is concerned, it can be noted that even if Re is as low as 0.25 the difference between the two approaches at the weakly nonlinear level can still be pretty significant, depending on the value of A .

A different scenario is depicted in Figs. 6(b) and 7(b) when $Re=0.92$: now the discrepancies between the two approaches are significantly larger for $A > 0$ (relative to what happens for the case $Re=0.25$) and are indeed present along the whole range of values for the viscosity contrast ($-1 \leq A < +1$). It is also noticed in Fig. 6(b) that as A is varied the dashed curve can be located above or below the solid one, indicating that Schwartz's model can be misleading regarding the finger competition dynamics. This behavior is even more clear in Fig. 7(b). As the Reynolds number is further increased as in Figs. 6(c) and 7(c) in which $Re=2.84$ we

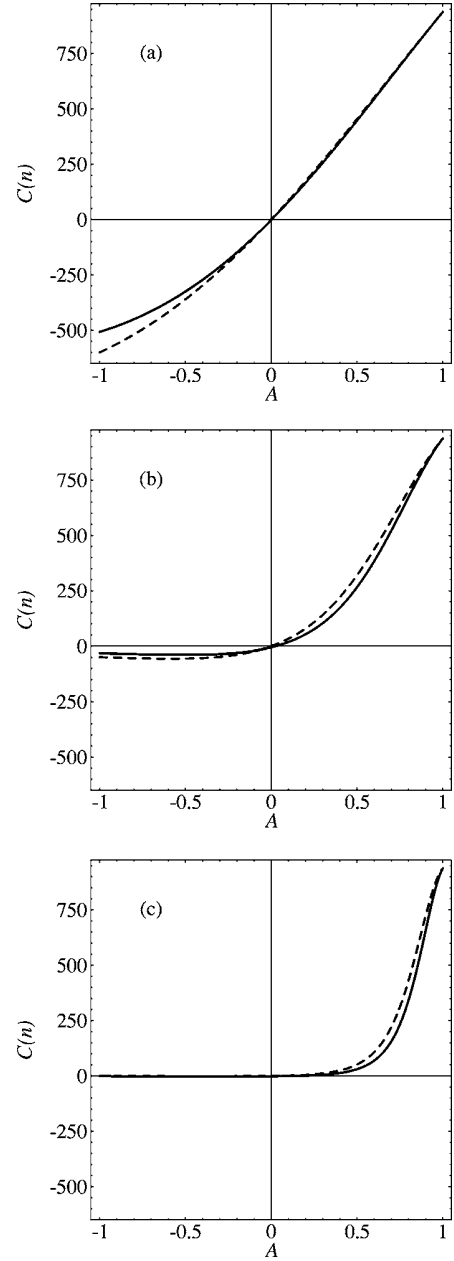


FIG. 6. Competition functions $C(n)$ (black solid curve) and $C(n)_S$ (black dashed curve) as a function of A for three different values of Re : (a) 0.25, (b) 0.92, and (c) 2.84.

notice a behavior that is kind of the inverse of the one shown in Figs. 6(a) and 7(a): now the disagreements between the models are very small for $-1 < A < 0$, but notably increased within the interval $0 < A < +1$.

By inspecting Figs. 6 and 7 it is apparent that, for a given Re , the difference between the two approaches is quite dependent on the value of the viscosity contrast. It is also interesting to note that the regions of the largest discrepancy migrate from values around $A=-1$ for lower Reynolds number to the vicinity of $A=+1$ for larger Re . On the other hand, regardless the value of Re there exist some values of A in which there is no difference between the two approaches

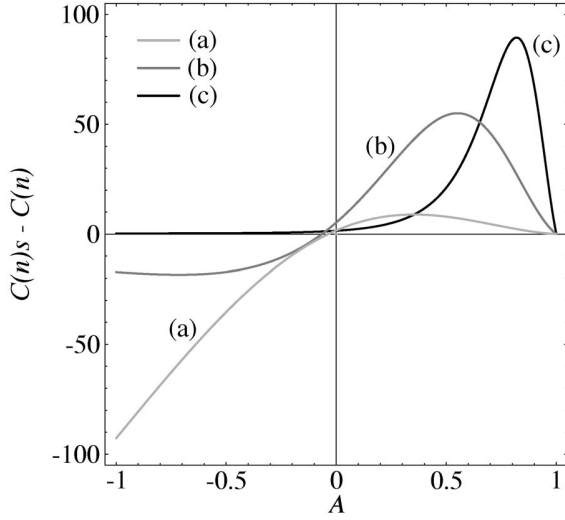


FIG. 7. Difference $C(n)_S - C(n)$ as a function of A for three different values of Re : (a) 0.25, (b) 0.92, and (c) 2.84. Darker colors refer to higher Re .

[given by the zero of $C(n)_S - C(n)$]. All these results indicate that Schwartz's approach may result in significant errors at weakly nonlinear stages.

V. CONCLUSIONS

We have investigated the effect of Coriolis force on the flow and interfacial pattern formation in rotating Hele-Shaw cells. The system is described by a generalized 2D Darcy's law, derived by a gap-averaging process of the 3D Navier-Stokes equation properly including Coriolis effects. We carried out a mode-coupling approach for the system and derived an equation of motion for the interfacial perturbations up to second order. This equation is conveniently written in terms of the viscosity contrast A and the Reynolds numbers of the fluids.

Our analytical study extends the previous contributions of the problem [1,15,17,18] in several directions. First, the viscosity contrast may assume arbitrary values. This allowed us to reveal the interplay between A and Re in determining the action of Coriolis effects on the behavior of the evolving fluid-fluid interface. Some noteworthy behaviors can be already identified at the linear level, including the stabilizing nature of the Coriolis force and the mentioned connection between Re and A when such forces are present. We have shown that the magnitude of the Coriolis effects is not exclusively dependent on the intensity of the Reynolds number. Consequently, stronger Coriolis effects are achieved not only by setting high values of Re , but also by taking smaller values of A . We have also verified that when $\rho_2=0$, regardless the value of Re_1 , the Coriolis effects completely vanish if $A=+1$.

In addition, our study goes beyond the purely linear stages of the dynamics and addresses relevant nonlinear aspects related to the finger competition phenomena. One interesting

finding was the fact that, in contrast to the rotating flow case without Coriolis effects, if $Re \neq 0$, the finger competition does not vanish when $A=0$. In fact, we have found that if Coriolis effects are significant, competition is absent only for relatively large values of the viscosity contrast. We have also been able to contrast our main results with similar ones we obtained from the simplified Coriolis approach proposed sometime ago by Schwartz [1]. We have demonstrated that the neglect of Coriolis effects (at the level of the 3D Navier-Stokes equation) in deriving a 2D Darcy's law for the problem can lead to significant errors at both linear and weakly nonlinear levels.

In a more general sense, our work is related to some other recent efforts that try to introduce inertial corrections into the Saffman-Taylor problem [26–29]. These studies and our own are necessary to provide a better understanding of the emerging fingering instabilities for the high-Reynolds-number limit. In our case the inertial corrections associated with the Coriolis force can be included into a Darcy's-law-type equation in a relatively simple fashion, a fact that greatly facilitated the study of Coriolis effects at both linear and nonlinear levels. We hope our study will be useful in the investigation of other pattern-forming systems involving similar swirling effects, where spiral patterns arise in magnetic fluids [30–34] and lipid monolayer domains [35].

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank the Brazilian Research Council-CNPq (J.A.M. and H.G.) and FACEPE (N.B.) for financial support of this research. J.A.M. also thanks CNPq for support through the PDE Proceeding No. 200045/2005-9 and program "Instituto do Milênio de Fluidos Complexos" Contract No. 420082/2005-0. We gratefully acknowledge useful communications and stimulating discussions with Linda Cummings and Sarah Waters.

APPENDIX: FUNCTIONS $\mathcal{H}_\alpha$ AND $\mathcal{I}_\alpha$

This short appendix presents the complicated expressions for the functions $\mathcal{H}_\alpha$ and $\mathcal{I}_\alpha$ appearing in the second-order mode-coupling coefficient $G(n, n')$ in Eq. (12):

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{\left[A^{1-\alpha} \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}_1} C_1 + \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}_2} C_2 \right) - A^\alpha \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}_1} C_1 - \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}_2} C_2 \right) \right]}{f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A)}, \quad (\text{A1})$$

$$\mathcal{I}_\alpha = \frac{\left[A^{1-\alpha} \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}_1} D_1 + \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}_2} D_2 \right) - A^\alpha \left(\frac{\mathcal{E}'_2}{\mathcal{E}_1} D_1 - \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}_2} D_2 \right) \right]}{f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A)}, \quad (\text{A2})$$

where $f(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, A) = [(\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2) + A(\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2)]$ and $\alpha=0, 1$.

- [1] L. W. Schwartz, *Phys. Fluids A* **1**, 167 (1989).
- [2] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **54**, 6260 (1996).
- [3] V. M. Entov, P. I. Etingof, and D. Ya. Kleinbock, *Eur. J. Appl. Math.* **6**, 399 (1996).
- [4] Ll. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, *Phys. Fluids* **11**, 778 (1999).
- [5] Ll. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, *Phys. Fluids* **12**, 1685 (2000).
- [6] F. X. Magdaleno, A. Rocco, and J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **62**, R5887 (2000).
- [7] J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **62**, 2985 (2000).
- [8] C.-Y. Chen and S.-W. Wang, *Fluid Dyn. Res.* **30**, 315 (2002).
- [9] D. Crowdy, *Q. Appl. Math.* **60**, 11 (2002); *SIAM J. Appl. Math.* **62**, 945 (2002).
- [10] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **68**, 026308 (2003).
- [11] D. P. Jackson and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **67**, 017301 (2003).
- [12] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Fluids* **16**, 908 (2004).
- [13] H. Gadêlha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **70**, 066308 (2004).
- [14] J. A. Miranda, and E. Alvarez-Lacalle, *Phys. Rev. E* **72**, 026306 (2005).
- [15] S. L. Waters and L. J. Cummings, *Phys. Fluids* **17**, 048101 (2005).
- [16] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff, and F. R. A. J. Rose, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* **23**, 311 (2006).
- [17] C.-Y. Chen and Y.-C. Liu, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **48**, 853 (2005).
- [18] C.-H. Chen and C.-Y. Chen, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **51**, 881 (2006).
- [19] C.-Y. Chen, C.-H. Chen, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **73**, 046306 (2006).
- [20] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **74**, 025302(R) (2006).
- [21] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **245**, 312 (1958).
- [22] L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
- [23] Even though we keep the same notation used in Ref. [15] for the terms C_j and $\mathcal{D}_j$, we point out that the magnitudes of our terms in Eqs. (4) and (5) are 12 times larger than the ones defined in Ref. [15].
- [24] This suggestive limit has been pointed out to us by L. J. Cummings and S. L. Waters, (private communication) as a possible starting point to connect our linear stability results.
- [25] J. A. Miranda and M. Widom, *Physica D* **120**, 315 (1998).
- [26] P. Gondret and M. Rabaud, *Phys. Fluids* **9**, 3267 (1997).
- [27] C. Ruyer-Quil, *C. R. Acad. Sci., Ser. IIB: Mec., Phys., Chim., Astron.* **329**, 337 (2001).
- [28] F. Plouraboue and E. J. Hinch, *Phys. Fluids* **14**, 922 (2002).
- [29] C. Chevalier, M. Ben Amar, D. Bonn, and A. Lindner, *J. Fluid Mech.* **552**, 83 (2006).
- [30] J.-C. Bacri, A. Cebers, and R. Perzynski, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2705 (1994).
- [31] S. Lacis, *J. Magn. Magn. Mater.* **201**, 335 (1999).
- [32] C. Lorenz and M. Zahn, *Phys. Fluids* **15**, S4 (2003).
- [33] S. Rhodes, J. Perez, S. Elborai, S.-H. Lee, and M. Zahn, *J. Magn. Magn. Mater.* **289**, 353 (2005).
- [34] S. Elborai, D.-K. Kim, X. He, S.-H. Lee, S. Rhodes, and M. Zahn, *J. Appl. Phys.* **97**, 10Q302 (2005).
- [35] P. Krüger and M. Lösche, *Phys. Rev. E* **62**, 7031 (2000).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D'Arcy W. Thompson, *On Growth and Form* (Cambridge University Press, Cambridge, 1944).
- [2] P. S. Stevens, *Patterns in Nature* (Little Boston, 1974).
- [3] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford University, London, 1961).
- [4] H.S. Hele-Shaw, *On the motion of a viscous fluid between two parallel plates*, Trans. Inst. Naval Arch. **40**, 21 (1898).
- [5] H.S. Hele-Shaw, *The flow of water*, Nature **58**, 34 (1898).
- [6] P. G. Saffman e G. I. Taylor, *The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid*, Proc. R. Soc. London Ser. A **245**, 312 (1958).
- [7] L. Paterson, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell*, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
- [8] F. Parisio, F. Moraes, J. A. Miranda e M. Widow, *Saffman-Taylor problem on a sphere*, Phys. Rev. E **63**, 036307 (2001).
- [9] J. A. Miranda, F. Parisio, F. Moraes e M. Widow, *Gravity-driven instability in a spherical Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **63**, 016311 (2001).
- [10] J. A. Miranda, *Nonlinear effects due to gravity in a conical Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **65**, 036310 (2002).
- [11] J. A. Miranda, *Analytical approach to viscous fingering in a cylindrical Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **65**, 026303 (2002).
- [12] J. A. Miranda e F. Moraes, *Geometric approach to viscous fingering on a cone*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 863 (2003).

- [13] K. V. McCloud e J. V. Maher, *Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow*, Phys. Rep. **260**, 139 (1995).
- [14] D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman e C. Tang, *Viscous flow in two dimensions*, Rev. Mod. Phys. **58**, 977 (1986).
- [15] H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Distribution d'eau et Filtrage des Eaux* (Victor Dalmont, Paris, 1856).
- [16] D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics* (Oxford university press, 1nd ed. ,1990).
- [17] Z. U. A. Warsi, *Fluid Dynamics: theoretical and computational approaches* (CRC press, 2nd ed. ,1998).
- [18] J. S. Langer, *Instabilities and pattern formation in crystal growth*, Rev. Mod. Phys. **52**, 1 (1980).
- [19] L. W. Schwartz, *Instability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium*, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989).
- [20] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt e J. Ortín, *Experiments in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996).
- [21] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt e J. Ortín, *Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering*, Phys. Rev. E **68**, 026308 (2003).
- [22] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
- [23] H. Goldstein, C.P. Poole e J. L. Safko, *Classical mechanics* (Addison-Wesley, 3rd ed. ,2002).
- [24] H. Gadêlha e J. A. Miranda, *Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells*, Phys. Rev. E **70**, 066308 (2004).
- [25] J. A. Miranda e E. Alvarez-Lacalle, *Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005).
- [26] H. Gadêlha e J. A. Miranda, *Dynamics of viscous fingers in rotating Hele-Shaw cells with Coriolis effects*, Phys. Rev. E **75**, 016305 (2007).

- [27] V. M. Entov, P. I. Etingof e D. Ya. Kleinbock, *On nonlinear interface dynamics in Hele-Shaw flows*, Eur. J. Appl. Math. **6**, 399 (1996).
- [28] F. X. Magdaleno, A. Rocco e J. Casademunt, *Interface dynamics in Hele-Shaw flows with centrifugal forces: Preventing cusp singularities with rotation*, Phys. Rev. E **62**, R5887 (2000).
- [29] D. Crowdy, *Theory of exact solutions for the evolution of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell*, Q. Appl. Math. **60**, 11 (2002).
- [30] C.-Y. Chen e S.-W. Wang, *Interfacial instabilities of miscible fluids in a rotating Hele-Shaw cell*, Fluid Dyn. Res. **30**, 315 (2002).
- [31] J. A. Miranda, *Rotating Hele-Shaw cells with ferrofluids*, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
- [32] D. P. Jackson e J. A. Miranda, *Controlling fingering instabilities in rotating ferrofluids*, Phys. Rev. E **67**, 017301 (2003).
- [33] Ll. Carrillo, J. Soriano e J. Ortín, *Radial displacement of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **11**, 778 (1999).
- [34] Ll. Carrillo, J. Soriano e J. Ortín, *Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **12**, 1685 (2000).
- [35] G. Tryggvason e H. Aref, *Numerical experiment on Hele-Shaw flow with a sharp interface*, J. Fluid Mech. **136**, 1 (1983).
- [36] G. Tryggvason e H. Aref, *Finger-interaction mechanisms in stratified Hele-Shaw flow*, J. Fluid Mech. **154**, 287 (1985).
- [37] J. V. Maher, *Development of Viscous Fingering Patterns*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1498 (1985).
- [38] M. W. DiFrancesco e J. V. Maher, *Noisy and regular features in Saffman-Taylor patterns*, Phys. Rev. A **39**, 4709 (1989).
- [39] J. A. Miranda e M. Widom, *Weakly nonlinear investigation of the Saffman-Taylor problem in a rectangular Hele-Shaw cell*, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 931 (1998).
- [40] S. L. Waters e L. J. Cummings, *Coriolis effects in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **17**, 048101 (2005).

- [41] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff e F. R. A. J. Rose, *Tissue growth in a rotating bioreactor. Part I: Mechanical stability*, Math. Med. Biol. **23**, 311 (2006).
- [42] C.-Y. Chen e Y.-C. Liu, *Numerical simulations of miscible fluids on a rotating Hele-Shaw cell with effects of Coriolis forces*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **48**, 853 (2005).
- [43] C.-H. Chen e C.-Y. Chen, *Numerical simulations of interfacial instabilities on a rotating miscible droplet in a time-dependent gap Hele-Shaw cell with significant Coriolis effects*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **51**, 881 (2006).
- [44] Hua C.-Y. Chen, C.-H. Chen e J. A. Miranda, *Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **73**, 046306 (2006).
- [45] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Relevance of dynamic wetting in viscous fingering patterns*, Phys. Rev. E **74**, 025302(R) (2006).
- [46] J. A. Miranda e M. Widom, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis*, Physica D **120**, 315 (1998).
- [47] P. Gondret e M. Rabaud, *Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **9**, 3267 (1997).
- [48] C. Ruyer-Quil, *Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell*, C. R. Acad. Sci. Ser. IIB: Mec., Chim. Astron. **329**, 337 (2001).
- [49] F. Plouraboue e E. J. Hinch, *Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **14**, 922 (2002).
- [50] C. Chevalier, M. Ben Amar, D. Bonn e A. Lindner, *Inertial effects on Saffman-Taylor viscous fingering*, J. Fluid Mech. **552**, 83 (2006).
- [51] Mesmo que mantendo a mesma notação usada na Ref. [40] para os termos $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{D}_j$, os valores de nossos termos nas Eqs. (3.5) e (3.6) são doze vezes maiores do que os definidos na Ref. [40].
- [52] Este limite foi inicialmente sugerido por L. J. Cummings e S. L. Waters como um possível primeiro passo para conectar nosso resultado da estabilidade linear com o resultado da Ref. [41].

- [53] G. Birkhoff, *Taylor instability and laminar mixing*, Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report No. LA-1862 (1954).
- [54] E. Pauné, M. Siegel e J. Casademunt, *Effects of small surface tension in Hele-Shaw multifinger dynamics: An analytical and numerical study*, Phys. Rev. E **66**, 046205 (2002).
- [55] E. Pauné, *Interface dynamics in two-dimensional viscous flows*, Tese de PhD, Universitat de Barcelona (2002).
- [56] J. Casademunt e D. Jasnow, *Defect dynamics in viscous fingering*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3677 (1991).
- [57] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Nonlinear Saffman Taylor Instability*, Phys. Rev. Lett. **92**, 054501 (2004).
- [58] J.-C. Bacri, A. Cebers e R. Perzynski, *Behavior of a magnetic fluid microdrop in a rotating magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2705 (1994).
- [59] S. Lacis, *Bending of ferrofluid droplet in rotating magnetic field*, J. Magn. Magn. Mater. **201**, 335 (1999).
- [60] C. Lorenz e M. Zahn, *Hele-Shaw ferrohydrodynamics for rotating and DC axial magnetic fields*, Phys. Fluids **15**, S4 (2003).
- [61] S. Rhodes, J. Perez, S. Elborai, S. -H. Lee e M. Zahn, *Ferrofluid spiral formations and continuous-to-discrete phase transitions under simultaneously applied DC axial and AC in-plane rotating magnetic fields*, J. Magn. Magn. Mater. **289**, 353 (2005).
- [62] S. Elborai, D.-K. Kim, X. He, S. -H. Lee, S. Rhodes e M. Zahn, *Effective magnetoviscosity of planar-Couette magnetic fluid flow*, J. Appl. Phys. **97**, 10Q302 (2005).
- [63] P. Krüger and M. Lösche, *Molecular chirality and domain shapes in lipid monolayers on aqueous surfaces*, Phys. Rev. E **62**, 7031 (2000).