



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

TALYTA SAMPAIO FIGUEIREDO

**SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES E AS PRAXELOGIAS UTILIZADAS NA
PASSAGEM DO CAMPO ALGÉBRICO PARA O GEOMÉTRICO: Um Olhar à luz da
Teoria Antropológica do Didático**

**CARUARU
2025**

**SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES E AS PRAXELOGIAS UTILIZADAS NA
PASSAGEM DO CAMPO ALGÉBRICO PARA O GEOMÉTRICO: Um Olhar à luz da
Teoria Antropológica do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECM da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestra.

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Emilio Leite de Almeida

Coorientador(a): Prof. Dr. Rochelande Felipe Rodrigues

**CARUARU
2025**

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Figueiredo, Talyta Sampaio.

Sistema de equações lineares e as praxeologias utilizadas na passagem do campo algébrico para o geométrico: Um Olhar à luz da Teoria Antropológica do Didático / Talyta Sampaio Figueiredo. - Caruaru, 2025.

143f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências e Matemática.

Orientação: Fernando Emilio Leite de Almeida.

Coorientação: Rochelande Felipe Rodrigues.

Inclui referências.

1. Teoria antropológica do didático; 2. Praxeologias; 3. GeoGebra. I. Almeida, Fernando Emilio Leite de. II. Rodrigues, Rochelande Felipe. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

TALYTA SAMPAIO FIGUEIREDO

**SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES E AS PRAXELOGIAS UTILIZADAS NA
PASSAGEM DO CAMPO ALGÉBRICO PARA O GEOMÉTRICO: Um Olhar à luz da
Teoria Antropológica do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECM da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestra.

.

Aprovado em: 29/05/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Fernando Emilio Leite de Almeida (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Rochelande Felipe Rodrigues (Coorientador-Externo)
Universidade Federal do Cariri - UFCA

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal do Pernambuco – UFPE

Profa. Dra. Catarina Oliveira Lucas (Examinadora Externa)
Instituto Superior Politécnico (ISPGAYA)

AGRADECIMENTOS

Os que confiam no Senhor renovam suas forças, lançam-se como águias, correm sem se cansarem, andam sempre sem se fatigarem! (Isaias 40:29)

Minha eterna gratidão a Deus, que me concedeu essa conquista, que sempre me deu forças para correr atrás dos meus sonhos e objetivos, para que consequentemente pudesse alcançá-los. Mesmo mediante a tantas adversidades ele nunca me deixou desistir, sempre me deu forças para seguir na busca incansável pelos meus sonhos.

Durante esse percurso do mestrado, vi meu pai sofrer um AVC, passei por uma cirurgia de apêndice, tive alguns contratemplos, mas nenhum deles me impediram de chegar até aqui, Deus em sua infinita bondade me concedeu sabedoria e força sussurrando ao meu ouvido: Seja forte e corajosa!

Ainda nesses dois anos de mestrado me casei, dedico aqui os meus sinceros agradecimentos a meu esposo Rennan Bezerra Florêncio, que com todo amor, cuidado e zelo me incentivou nos meus estudos, despertando em mim a vontade de crescer tanto profissionalmente, como academicamente. Te amo, obrigada por tudo!

À minha família que sempre acreditou em mim e no meu potencial, mesmo quando pensei em desistir eles estavam lá me apoiando e incentivando, em especial minha eterna avó Oly Bento de Figueiredo, que não está mais entre nós para presenciar minha vitória, porém foi uma das que vibrou comigo quando soube da minha aprovação no vestibular, te amarei para sempre!

Ao meu pai Valderi Sampaio Tavares a quem devo minha gratidão por tudo que fez e faz por mim, nosso milagre de Deus! À minha mãe e melhor amiga Maria Oly Figueiredo Pereira Tavares, uma mulher guerreira e sábia, meu maior exemplo de força e fé. Te agradeço por tudo, minha rainha! Ao meu único irmão André que sempre me deu os melhores conselhos, à minha cunhada, Andreia e meu querido, e amado sobrinho Arthur, vocês sempre serão o motivo pelo qual irei lutar, amo vocês de uma maneira inigualável.

Aos meus amigos/as que sempre estiveram ao meu lado nesse ciclo de graduação e pós-graduação, nas disciplinas mais árduas compartilharam comigo os momentos tristes, mas

também os felizes. Agradeço a Deus por ter conhecido pessoas como vocês que fizeram e fazem um grande diferencial na minha vida, em especial um forte abraço a Matheus amigo da Paraíba que universidade me presenteou, Debora amiga da Bahia que conheci nas aulas do prof. Saddo Almouloud, Reginaria companheira nas viagens do Ceará para Caruaru (para assistir as aulas, percorríamos 8 horas de viagem com altas aventuras), Rosângela e Vitoria amigas da graduação que levo para a vida.

Ao meu querido orientador professor Dr. Fernando Emilio Leite de Almeida e meu coorientador Dr. Rochelande Felipe Rodrigues, obrigada por todas as orientações e todos os ensinamentos repassados durante esses anos. Mesmo rodeado pelos seus compromissos pessoais e profissionais, sempre que precisava vocês estavam lá para me ajudando e incentivando nesse momento tão importante da minha vida, minha eterna gratidão a ambos!

À todos os professores da Universidade Federal do Pernambuco, campus do Agreste do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática, minha gratidão, juntos formam um núcleo de formação excepcional, que foram os responsáveis por todo conhecimento que adquiri ao longo da minha estadia na universidade.

A Deus seja dada toda honra e toda gloria!

RESUMO

A presente pesquisa teve como intuito adquirir respostas ao seguinte tipo de questionamento que tangem ao ensino e aprendizagem do conteúdo de sistemas de equações lineares: “quais as praxeologias utilizadas por estudantes do ensino médio durante a construção da passagem do campo algébrico para o geométrico de um sistema de equação linear utilizando o GeoGebra?” Para buscarmos respostas as indagações apresentadas, delimitamos como objetivo principal deste trabalho analisar a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) as praxeologias utilizadas pelos alunos do ensino médio na passagem do campo algébrico para o geométrico, no estudo de sistemas de equações lineares com a utilização do software GeoGebra. Nesta perspectiva, a pesquisa aqui descrita abordará em sua estrutura uma metodologia de cunho qualitativo, onde iremos interagir com o campo de estudo, desse modo, os aspectos estudados se complementam entre si, possibilitando um melhor aporte para compreender alguns fenômenos didáticos a serem analisados. Assim, a pesquisa apresentou etapas, sendo a primeira a análise previa dos conhecimentos obtidos acerca do conteúdo de sistemas de equações lineares, onde verificamos as dificuldades presentes na aprendizagem através do mapeamento de pesquisas, além de analisar como este objeto de conhecimento apresentava-se no livro didático utilizado pelos alunos do ensino médio, através da análise Organizações Matemáticas (OM). Já a segunda fase, foi a construção da sequência didática, na qual foi proposto o modelo da sequência, apresentando as justificativas das escolhas, prevendo os possíveis comportamentos dos estudantes durante a aplicação, diante do conteúdo escolhido. O terceiro momento aplicamos a sequência didática de atividades envolvendo o tema em estudo, com o auxílio do software GeoGebra e pôr fim a investigação com análise das atividades desenvolvidas nos encontros e validação da pesquisa. Diante disso, podemos observar que há desafios a serem enfrentados com a utilização do GeoGebra, porém podemos notar o quanto essa ferramenta tem eficácia na sua aplicação no que tange ao estudo sobre sistemas lineares, 2×2 como também 3×3 . Notamos que os estudantes apresentaram um bom desempenho na passagem do campo algébrico para o geométrico, desenvolvendo praxeologias importantes para um bom desenvolvimento.

Palavras Chaves: Teoria Antropológica do Didático; Praxeologias; GeoGebra; Sistemas de Equações Lineares.

ABSTRACT

The present research aims to acquire answers to the following questions regarding the teaching and learning of the content of linear equation systems: “What are the praxeologies used by high school students during the construction of the transition from the algebraic to the geometric field of a linear equation system using GeoGebra?” and “How can this transition in geometric interpretation using the software contribute to students having a better understanding of the reason for the content of linear systems, when classifying and composing them?”. In order to find answers to the questions presented, we have defined as the main objective of this work the analysis, in the light of the Anthropological Theory of Didactics (TAD), of the praxeologies used by high school students in the transition from the algebraic to the geometric field, in the study of systems of linear equations using the GeoGebra software. In this perspective, the research described here will address in its structure a qualitative methodology, where we will interact with the field of study, in this way, the aspects studied complement each other, enabling a better contribution to understanding some didactic phenomena to be analyzed. Thus, the research presented stages, the first being the prior analysis of the knowledge obtained about the content of linear equation systems, where we verified the difficulties present in learning through research mapping, in addition to analyzing how this object of knowledge was presented in the textbook used by high school students, through the analysis of Mathematical Organizations (MO), of the chapter where our mathematical object was found. The second phase was the construction of the didactic sequence, in which the sequence model was proposed, presenting the justifications for the choices, predicting the possible behaviors of the students during the application, in view of the chosen content. The third moment in which the didactic sequence of activities involving the topic under study was applied, with the help of the GeoGebra software, and the investigation was concluded with an analysis of the activities developed in the meetings and validation of the research. Given this, we can observe that there are challenges to be faced with the use of GeoGebra, but we can note how effective this tool is in its application regarding the study of linear systems, both 2×2 and 3×3 . We noted that the students performed well in the transition from the algebraic to the geometric field, developing important praxeologies for good development.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics; Praxeologies; GeoGebra; Systems of Linear Equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 –	Território 1 (Artigos em periódico das Capes)	20
Quadro 2 –	Território 1 (Dissertações)	24
Quadro 3 –	Território 1 (Teses)	25
Quadro 4-	Síntese de Critérios de Análises	58
Quadro 5 -	Tipos de tarefas T1 e subtipos	70
Quadro 6-	Tarefas 1 e 2	114
Quadro 7 -	Tarefa 3	118
Quadro 8 -	Tarefas 4 e 5	120
Quadro 9 -	Tarefa 6	127
Quadro 10 -	Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes nas Tarefas 1, 2 e 3	132
Quadro 11-	Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes nas Tarefas 4 e 5	133
Quadro 12 -	Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes nas Tarefas	134

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PACCE	Programa de Aprendizagem Cooperativa em Células Estudantis
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Trabalho de Conclusão Curso
OM	Organizações Matemáticas
OD	Organizações Didáticas
UFCA	Universidade Federal do Cariri

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	14
1.1. Objetivos da Pesquisa.....	17
2 – MAPEAMENTO DE PESQUISAS	19
3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
3.1 Teoria Antropológica do Didático.....	27
3.1.1 Noções praxeológicas.....	27
3.1.2 Organização Didática e Matemática	35
3.2 A BNCC e Sistemas de Equações Lineares.....	37
3.3 O objeto Matemático: Sistemas de Equações Lineares.....	40
3.3.1 Equação Linear.....	40
3.3.2 Solução do Sistema.....	41
3.3.3 O método da substituição e da Adição.....	41
3.3.4 Classificação do Sistema e Interpretação Geométrica.....	43
3.3.5 Sistemas escalonados.....	43
3.3.6 Matrizes associadas a um sistema linear.....	45
3.3.7 Dificuldades no ensino e aprendizagem do sistema de equações lineares....	46
3.4 As Tecnologias Digitais e o <i>Software</i> GeoGebra.....	48
3.4.1 Sistemas Lineares 2x2 no GeoGebra.....	51
3.4.2 Sistemas Lineares 3x3 no GeoGebra.....	54
4 METODOLOGIA.....	56
4.1 Local e população de estudo.....	56
4.2 Coleta e Critério de Análise de Dados.....	56
4.3 Etapas da Pesquisa.....	59
4.5 Metodologia de Análise.....	60
5 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO.....	62

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	76
7 ANÁLISES GERAL.....	110
7.1 I e II Encontro - Familiarização com a proposta de aplicação e Relembrando Sistemas de Equações Lineares 2×2 e 3×3	110
7.2 III e IV Encontro –Conhecendo o GeoGebra e Sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 no GeoGebra.....	112
7.3 Análise das Praxeologias Desenvolvidas.....	114
7.4 Síntese das Organizações Matemáticas.....	132
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	136
9 REFERÊNCIAS	140

1 INTRODUÇÃO

Ao refletir no meu percurso acadêmico e na minha trajetória como discente, revelo a admiração pela profissão docente desde o ensino fundamental, na qual notava em meus professores a maestria em disponibilizar seus conhecimentos, com dedicação e inovação. No ensino médio minha concepção com esse campo de saber tornou-se uma realidade ainda maior, a relação com a matemática era algo prazeroso, umas das disciplinas que mais apreciava, além disso, o docente que lecionava as aulas era simplesmente uns dos professores na qual se percebia o amor visível pelo que fazia isso de certo modo me despertou o interesse pela área de matemática.

No ano de 2017, no final do meu ensino médio realizei o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e obtive a aprovação no curso de Licenciatura Interdisciplinar em Ciências e Matemática no Instituto de Formação de Educadores da Universidade Federal do Cariri (UFCA), assim que conclui a Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática, ingressei na Licenciatura em Matemática, sendo uma área na qual tenho uma maior afinidade. Durante os anos na Universidade tive a oportunidade de participar de diversas atividades extracurriculares que contribuíram de modo significativo para o aperfeiçoamento da minha concepção docente em diversas práticas. No segundo ano de graduação participei como bolsista do Programa de Aprendizagem Cooperativa em Células Estudantis (PACCE)¹ que na prática desenvolvia ações na universidade, através do trabalho em grupo formado por células cooperativas.

No ano seguinte fui contemplada com uma bolsa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), na qual passei estudar a Teoria Antropológica do Didático (TAD), e me encantei pela teoria através do projeto de pesquisa intitulado Análise da conformidade do Modelo Epistemológico de Referência: O ensino da Função Quadrática para a Licenciatura em Matemática. Como continuação da pesquisa participo do projeto que trata sobre Saberes docentes e tecnologias digitais no ensino da Matemática: Construção de um Modelo Epistemológico de Referência. Através dessas vivências, passei a estudar as tecnologias digitais, com maior enfoque no GeoGebra, onde desenvolvemos aplicações com professores e alunos do ensino fundamental focando na utilização e análise, através da Teoria

¹ O PACCE visa promover, através da metodologia da aprendizagem cooperativa, a formação de estudantes proativos que ajam como protagonistas e com autonomia nas dimensões do ensino e da aprendizagem, atentando à horizontalidade da transmissão de conteúdos de conhecimento e de experiências de aprendizagem em geral. Link de acesso: <https://acoescfor.ufca.edu.br/programas/programa-de-aprendizagem-cooperativa-em-celulas-estudantis-pacce/>

Antropológica do Didático, sendo está uma teoria que se fez presente tanto no Trabalho de Conclusão Curso (TCC) da minha primeira graduação, como também na segunda.

Na primeira Graduação, o TCC teve como objetivo principal realizar uma análise da Aprendizagem Cooperativa, através da Teoria Antropológica do Didático (TAD), direcionado aos conteúdos de divisão e multiplicação, nos quais estavam sendo abordados pelo professor durante o estágio em suas aulas. Ademais, para o processo de aplicação, as duas turmas foram divididas em seis grupos, para que trabalhassem de forma cooperativa na resolução da atividade propiciando momentos de interação, através de um aplicativo de mensagens, sendo este uma tecnologia digital utilizada durante as aplicações das aulas remotas, visto que a aplicação ocorreu em um cenário pandêmico, na qual as aulas presenciais estavam suspensas.

Já no segundo TCC, sendo este um recorte do trabalho desenvolvido no PIBIC, que gerou como fruto um artigo publicado Figueiredo (et al, 2023), onde trabalhamos com o software GeoGebra para o esboço gráfico de questões envolvendo a função quadrática com um grupo de professores em formação inicial da licenciatura em matemática. Assim o estudo retratou uma análise da conformidade de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino da função quadrática, na qual utilizamos um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), fundamentado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), como teoria abordada para desenvolver e verificar as nossas análises. O PEP foi desenvolvido com discentes no componente curricular de Princípios de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática do IFE na UFCA. Abordamos o conceito de função quadrática através da proposição de uma questão geratriz apresentada no dispositivo didático, que apresentou como objetivo principal analisar a conformidade do MER para o estudo de funções elementares, com enfoque na função quadráticas

Para alcançarmos os objetivos que foram propostos realizamos uma análise preliminar para caracterizar as praxeologias dominantes no ensino do conceito de função quadrática. Elaboramos e aplicamos as fichas diagnósticas e de trabalho e, em seguida, a questão geratriz que tratava do clima da região e as suas consequências para a saúde. Desse modo, foi possível desenvolver o PEP e observar as eventuais evoluções das organizações matemáticas (OM) e didáticas (OD). Percebe-se que a aplicação do PEP promoveu uma maior participação dos discentes que, juntamente com o professor formador, discutiram as técnicas apresentadas e as suas tecnologias, possibilitando uma mudança ou aperfeiçoamento das praxeologias dos estudantes. Desse modo, o PEP promoveu discussões das tarefas, bem como das técnicas utilizadas por parte dos estudantes e professores.

O trabalho em grupo também foi uma importante proposta para o andamento do percurso, pois, de maneira conjunta, os estudantes conseguiram desenvolver a cooperação para atingir um bom desempenho da equipe. Foi primordial estabelecer metas e objetivos durante os encontros para que, assim, todos participassem e contribuíssem para a obtenção dos resultados propostos. Além disso, um ponto de destaque que vale ser salientado é a necessidade de utilização dos softwares de geometria dinâmica, a exemplo do GeoGebra, que nos mostrou que os estudantes sofrem uma certa dificuldade no seu manuseio, fazendo-se necessário buscar uma formação que aborde temas tecnológicos para o ensino da Matemática.

Nesse sentido, esses diversos contatos com as tecnologias digitais durante a minha graduação me proporcionaram experiências consideravelmente positivas, pois aperfeiçoou o meu processo de ensino e aprendizagem da matemática e abriu meus horizontes para pesquisas com esse foco. Dentre as experiências vivenciadas ao longo do caminho, nota-se a necessidade de continuar trabalhando com a TAD e o GeoGebra, expandindo-se assim para a pesquisa de mestrado. Nesta perspectiva, o nosso objeto matemático foi sistema de equações lineares, por ser um conteúdo que os alunos apresentam uma certa dificuldade, como podemos notar no mapeamento de pesquisas, especificamente nos argumentos de Andrade (2018, p.34) que revela “tais dificuldades estão relacionadas à construção manual dos gráficos, o que representa uma conversão de registro de um sistema linear da forma algébrica para a forma gráfica.”

Diante disso, realizamos um mapeamento com base na adaptação da proposta abordada por Cavalcanti (2015), utilizando-se do esboço seguido para o mapeamento horizontal e vertical, selecionando os territórios escolhidos, sendo eles artigos de periódicos da Capes, dissertações e teses, servindo assim para aprofundar nosso aporte teórico sobre as pesquisas que seguiam a vertente aqui descrita.

Assim, este mapeamento serviu como apoio para justificar a proposta do trabalho da dissertação, pois podemos notar na prática que os achados discutem as dificuldades que os alunos apresentam na realização da passagem do campo algébrico do conteúdo de sistemas de equações lineares, para o campo geométrico (gráfico). Percebemos ainda, a escassez de trabalhos que tratam da temática abordada, destacando assim a necessidades de pesquisas que apresentem as discussões aqui apontadas. Destacamos que a dissertação de Andrade (2018) foi a única que apresenta a passagem do campo algébrico utilizando o GeoGebra.

Consideramos ainda, algo que já prevíamos em relação ao GeoGebra, das pesquisas que utilizaram este software exibem que de fato ele pode ser considerado crucial em sala de aula, além de contribuir de maneira direta no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, amenizando as dificuldades apresentadas pelos alunos, o que reafirma a necessidade de

utilização do GeoGebra no estudo de sistemas de equações lineares no ensino, para facilitar a realização da passagem do campo algébrico para a geométrico.

1.1 Objetivos da Pesquisa

Para adquirir respostas aos seguintes questionamentos da nossa pesquisa: “Quais as praxeologias utilizadas por estudantes do ensino médio durante a construção da passagem do campo algébrico para o geométrico de um sistema de equação linear utilizando o GeoGebra?” e “Como essa passagem na interpretação geométrica utilizando o software pode contribuir para que os estudantes tenham uma melhor compreensão da razão de ser do conteúdo de sistema linear, quando sua classificação e composição?”, faz-se necessário definir o nosso objetivo geral em: Analisar a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) as praxeologias utilizadas pelos alunos do ensino médio na passagem do campo algébrico para o geométrico, no estudo de sistemas de equações lineares com a utilização do software GeoGebra.

Nesta perspectiva, podemos definir os objetivos específicos em: a) Realizar uma análise a priori de estudos, bem como do livro didático para identificar as praxeologias presentes no estudo de sistemas de equações lineares; b) Desenvolver uma sequência didática com estudantes do ensino médio com base nas análises a priori, utilizando o software GeoGebra e c) Analisar as praxeologias utilizadas e desenvolvidas pelos alunos na passagem do campo algébrico para o geométrico a luz da TAD.

Apresentada aqui algumas motivações, justificativas e objetivos da pesquisa desenvolvida, abordaremos no próximo tópico o mapeamento de pesquisas que mesclam sobre a TAD, sistemas de equações lineares e GeoGebra, que serviu como apoio na justificativa deste trabalho, devido a comprovação de poucas pesquisas na área. No tópico 3 foi exposto o embasamento teórico que ampara o nosso trabalho na qual versará sobre Teoria Antropológica do Didático, a Base Nacional Comum Curricular, o objeto de estudo matemático sendo ele sistema de equações lineares, os métodos de resolução. Além disso, exploramos sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem neste conteúdo, além de apresentar as tecnologias digitais e o software GeoGebra, com a perspectiva de vinculá-las à análise da passagem do campo algébrico para o geométrico.

No tópico 4, trataremos da metodologia onde apresentamos o processo que será seguido para o desenvolvimento, o local de estudo, a população da pesquisa, os critérios de inclusão e exclusão, e como ocorrerá produção a análise de dados. No tópico 5 abordamos uma análise do livro didático para verificar como o objeto matemático estava sendo apresentado, no tópico 6

retratamos da sequência didática, passo a passo e no 7 as análises do desenvolvimento desta aplicação. Por fim, no ultimo tópico foi exposta as conclusões deste trabalho.

2. MAPEAMENTO DE PESQUISAS

Realizamos um mapeamento horizontal e vertical, acerca de trabalhos que relacionam a Teoria Antropológica do Didático (TAD), com o GeoGebra e sistema de equações lineares, verificando pesquisas que apontavam sobre a passagem do campo algébrico para o geométrico, verificando assim as possíveis dificuldades apresentadas, para justificar a presente pesquisa. Dessa forma, dividimos esta análise em categorias que segundo Cavalcanti (2015) é denominada de territórios de produção científica, que mesclam periódicos, dissertações e teses. Ainda em concordância com o autor, o mapeamento horizontal, trata-se de elementos mais voltados para a superficialidade, respondendo a questões do tipo: quantos, quem e onde foram realizados tais estudos.

Podemos considerar que esta análise a priori se faz necessária para delimitarmos a construção do mapeamento vertical que nos direciona ao real sentido de projetar a nossa pesquisa baseando-se previamente em algumas que já foram desenvolvidas no eixo estudado, porém abordaremos a análise aprofundada do objeto o que exige do pesquisador um estudo mais detalhado e analítico. Devido a extensão do trabalho desenvolvido, abordaremos aqui apenas os achados que foram inventariados do mapeamento vertical, sendo esta uma etapa de análise minuciosa, através de leitura focando na introdução, referencial teórico, metodologia, análises de dados e conclusões.

Para a realização do mapeamento vertical levamos em consideração os critérios estabelecidos, semelhante ao mapeamento horizontal, como o recorte temporal das pesquisas encontradas, considerando os últimos dez anos. Inicialmente buscamos por conceitos chaves que definissem o saber em jogo no qual estava sendo pesquisado, sendo sistemas de equações lineares utilizando o GeoGebra, sob um olhar da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Essa escolha procura um aprofundamento das pesquisas que apresentavam em sua estrutura um aspecto teórico voltado para a educação matemática, então seriam trabalhos acadêmicos no *véis stricto sensu* e que contemplasse o ensino de sistemas de equações lineares, ou outro conteúdo a luz da TAD, utilizando-se do GeoGebra para analisar a exposição geométrica, no eixo do ensino médio. Dividimos a pesquisa em etapas, que consideramos fundamentais para a estruturação da escrita.

No primeiro momento, efetuou-se a decisão das plataformas que seriam inseridas na busca por trabalhos desenvolvidos na área sendo elas: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Periódicos da CAPES, com acesso a plataforma *café*. No segundo momento realizamos uma análise a priori, abordando

uma combinação de conceitos chaves que facilitariam nos achados como: Teoria Antropológica do Didático (TAD) e Sistemas de Equações Lineares; TAD e GeoGebra; Sistema Lineares e GeoGebra. Compilamos também até três conceitos sendo estes GeoGebra, TAD e Sistemas de equações lineares.

No terceiro e último momento, foi destinado para o mapeamento, iniciando pelo horizontal, em que focamos apenas na leitura dos títulos e resumos dos trabalhos, verificando o ano e os autores. Já no vertical, foi realizada uma análise minuciosa, através de leitura focando na introdução, referencial teórico, metodologia, análises de dados e conclusões. Nesta perspectiva, apresentaremos aqui uma breve descrição dos trabalhos selecionados.

- **Território 1: Artigos em periódicos da Capes**

Para a realização deste mapeamento, buscamos apenas palavras chaves que remetem aos conceitos principais das temáticas estudadas, como o resumo abordado no texto, os autores e o ano da publicação. Seguimos o direcionamento que foi estabelecido, delimitando o critério de busca entre os anos de 2013 e 2023 que remonta um sistema de pesquisas aplicadas e desenvolvidas nos últimos dez anos. Nesta perspectiva, realizando as normas aplicadas foram encontrados apenas quatro artigos publicados em periódicos, que se assemelhava com a proposta aqui descrita, destes achados apenas um artigo apresenta uma discussão à luz da TAD, porém todos os quatro abordam sobre sistemas de equações lineares, como mostra o quadro abaixo:

Quadro 1 –Território 1 (Artigos em periódico das Capes)

nº	Conteúdo	Autor/Ano	Teoria/Conteúdo	Palavras chaves
1	A componente tecnológica-teórica do sistema de duas equações lineares na Educação Básica	Francisco Javier Ugarte; Maria José Ferreira da Silva; Rosa Cecília Gaita Iparraguirre (2019)	Teoria Antropológica do Didático; Sistema de Equações Lineares	Teoria Antropológica do Didático e Sistemas de Equações Lineares
2	GeoGebra na análise das posições entre duas retas e resolução de sistemas lineares	Lucas Lima Souza; Maria José Herculano Macedo; Vilma Bragas de Oliveira (2021)	Tecnologias	Sistema Lineares e GeoGebra
3	Sobre o uso das tecnologias digitais e suas implicações no estudo da existência de soluções para sistemas 2x2: uma análise por meio da mudança no tratamento	Germano Mateus Machado Zugno; Michelsch João da Silva; Rodrigo Sychocki da Silva (2015)	GeoGebra, e apresentações Semióticas, Sistemas Lineares Tecnologia	Sistema Lineares e GeoGebra

	semiótico à luz da teoria de Raymond Duval			
4	Potencial de um sistema de matemática dinâmica no estudo de transformações lineares	Carmen Vieira Mathias; José Carlos Pinto Leivas (2020)	Tecnologias	Sistemas Lineares e GeoGebra

Fonte: Os autores (2024)

Dos quatros artigos inventariados do mapeamento horizontal, nenhum apresentava aplicações desenvolvidas com alunos do ensino médio. Os achados descreviam em sua essência aplicações com professores em formação continuada ou em disciplinas com discentes de curso superior, contemplando assim aspectos que não se enquadrava-se com o viés da nossa pesquisa, sendo assim não escolhemos nenhum dos artigos em questão para realizar a análise, pois não estavam dentro dos critérios estabelecidos para a segunda fase da nossa pesquisa.

• Território 2: Dissertações

Para organização do quadro, dividimos as colunas com as seguintes informações que julgamos relevantes: Título, Autor/ano, Teoria/Conteúdos (contidos na dissertação pesquisada) e palavras chaves. No quesito plataformas utilizadas para pesquisa, foram o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). O quadro abaixo contempla as dissertações que foram selecionadas na etapa do mapeamento horizontal:

Quadro 2 –Território 1 (Dissertações)

nº	Título	Autor/Ano	Teoria/Conteúdo	Palavras chaves
1	GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio	Denise Mansoldo Salazar (2015)	Engenharia Didática, TAD e Funções Trigonométricas	TAD e GeoGebra
2	A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental – anos finais: uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas.	Esmênia Furtado Parreira Ferreira (2016)	Engenharia Didática, TAD e Geometria	TAD e GeoGebra
3	Uma sequência didática voltada para a definição de polígono no sexto ano	Joaby de Oliveira Silva (2019)	Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático e Polígonos	TAD e GeoGebra
4	Uma organização praxeológica para a construção de medidas de perímetro e área do Fractal ilha de Koch.	Vinícius Murilo Fratucci (2022)	Engenharia Didática, TAD, Fractais	TAD e GeoGebra

5	Uma organização praxeológica da construção da fractal árvore pitagórica utilizando o software GeoGebra.	Luan Padilha dos Santos (2023)	Educação Matemática; Teoria Antropológica do Didático; Geometria dos Fractais; BNCC	TAD e GeoGebra
6	Sistemas Lineares 3x3: Uma Visão Geométrica Com o Geogebra 3d	Erivaldo Gomes de Santana (2015)		Sistema de equações lineares e GeoGebra
7	Registro de representação semiótica: conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software GeoGebra	Jefferson Jacques Andrade (2018)	Sistemas Lineares	Sistema de equações lineares e GeoGebra
8	Sistemas lineares: Uma sequência didática para o Ensino Médio e aplicações	Wesklemyr Lacerda Pereira (2017)	Sistemas Lineares	Sistema de equações lineares e GeoGebra
9	Sistemas lineares: aspectos lúdicos e uma abordagem utilizando recursos tecnológicos	Romão, Luís Gabriel Mietto (2020)	Sistemas Lineares e Intersecção de planos	Sistema de equações lineares e GeoGebra
10	Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior.	Gabrieli Nunes dos Santos (2019)	Sistemas lineares; Registros de representação semiótica; Álgebra linear	Sistema de equações lineares e GeoGebra
11	Sistemas Lineares com Ênfase nas Operações Elementares e no Teorema do Posto	Pedro Henrique Barcelos Cuzzuol (2022)	Sistemas lineares; Matriz; Teorema do Posto; Resolução de problemas	Sistema de equações lineares e GeoGebra

Fonte: Os autores, (2024)

Das onze dissertações inventariadas do mapeamento horizontal selecionamos apenas três para o mapeamento vertical, duas deriva-se do eixo pesquisado sobre TAD e GeoGebra não observamos a temática ligada a sistemas de equações lineares, porém apresentam em sua estrutura uma pesquisa pertinente para o ensino e aprendizagem no âmbito da exploração do campo algébrico para o geométrico, sendo este um dos critérios estabelecidos de escolha, pois ambas utilizam-se da TAD para analisar determinadas situações de ensino de um conteúdo através do GeoGebra.

A primeira dissertação que iremos descrever é a de Ferreira (2016), que apresenta em sua essência algumas dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Geometria, e como intervenção a autora utiliza algumas tecnologias para a aplicação de sua pesquisa que facilita o ensino e a aprendizagem deste conteúdo. O principal objetivo foi investigar a integração de Tecnologias Digitais ao ensino e aprendizagem da Geometria, com foco no estudo

de perímetro e área de figuras geométricas planas no Ensino Fundamental –Anos finais. Desse modo, em um caso mais específico averiguou-se de que forma a utilização do software GeoGebra pode contribuir para o estudo do tema apresentado e a visualização e exposição do conteúdo através da construção geométrica no GeoGebra.

Ferreira (2016) dividiu o percurso metodológico de sua pesquisa em quatro etapas que são considerados primordiais para o desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa. Sendo a primeira etapa o embasamento teórico, através de leituras e mapeamentos de trabalhos realizados; a segunda etapa foi uma “análise a priori” com diagnóstico e caracterização da TD especificamente em escolas municipais de Juiz de Fora (MG), onde a autora aplicou questionários com diretores das escolas, professores de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais e alunos do 9º ano; a terceira etapa foi a aplicação uma sequência didática com a utilização do GeoGebra envolvendo o conteúdo e a última etapa da investigação ocorreu a validação da proposta. Esse passo baseou-se nos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática e como embasamento teórico, a autora respaldou seus estudos na TAD, para realizar um olhar de análises do que estava sendo exposto.

Nesta perspectiva, o trabalho em questão obteve como resultados a perspectiva de que o software GeoGebra é uma ferramenta tecnológica que pode contribuir potencialmente para o ensino e aprendizagem do conteúdo perímetro e área de figuras geométricas planas utilizando-se de atividades investigativas que propõe uma melhor visualização.

Além do resultado que foi citado no parágrafo anterior, a autora apresenta outras afirmações que comprovam de fato que os resultados esperados foram alcançados. Nesta perspectiva, com este estudo podemos verificar que a utilização do GeoGebra de fato pode ser considerada crucial em sala de aula, além de poder contribuir de maneira direta no ensino e aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos.

A segunda dissertação inventariada foi o do autor Frattucci (2022), que apresenta como eixo norteador de sua pesquisa o seguinte questionamento: “Quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch?”. O público-alvo da pesquisa foram estudantes do ensino médio e o principal objetivo foi realizar uma análise praxeológica de algumas situações em que o software GeoGebra pode ser utilizado para conduzir estudantes do 2º ano do Ensino Médio a construir e explorar o fractal proposto, por meio da TAD.

Frattucci (2022), elaborou seu percurso metodológico em etapas, sendo: o levantamento bibliográfico, a realização da aplicação de dois pilotos com o intuito de minimizar os possíveis erros, a análise a priori e, por fim, a análise posteriori com a validação, baseando-se também na

Engenharia Didática. Como resultado, o autor destaca que o software GeoGebra pode ser um recurso para auxiliar as explorações matemáticas acerca do fractal, uma vez que por meio da análise dos dados, pudemos observar que houve uma relação entre o objeto matemático e o software, a qual permitiu realizar explorações e elencar hipóteses.

O terceiro trabalho é uma dissertação de Andrade (2018) que buscou elaborar uma proposta de aprendizagem a fim de construir uma sequência didática, que contribuísse para discutir a classificação de sistemas lineares a partir da exploração e da conversão entre os registros gráficos, algébricos – conforme representação tradicional com equações e chave – e matriciais. Surge assim o seguinte questionamento: Como essas conversões podem contribuir para que os alunos tenham melhor compreensão, não apenas para determinar o conjunto solução de um sistema linear, mas para entender esse conjunto, classificá-lo e discuti-lo, quando necessário? O autor apresentou como principal objetivo: responder o questionamento acima retratado e “aplicar uma sequência didática que aborde as conversões entre os diferentes registros de representações de um sistema linear no intuito de discutir a classificação desses sistemas.” Para a realização da aplicação dessa convenção utilizou-se do software GeoGebra. O público-alvo foram os alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Adventista de Florianópolis.

Andrade (2018) em seu percurso metodológico realiza a aplicação de diversas sequências didáticas, realizando a constatação através de análises a priori e posteriormente para validação, realizando também a análise de três livros didáticos para verificar como o objeto de estudo estava sendo apresentado. Sobre isso o autor discute:

Quando se trata das conversões dos registros da forma algébrica para a forma geométrica, é possível identificar que os três livros se preocupam apenas em realizá-las na situação específica de sistemas lineares 2×2 . Quando se trata de sistemas lineares de ordem diferentes das acima mencionada, os autores não realizam as conversões dos registros nem mesmo mencionam tal possibilidade. (Andrade, 2018, p. 30)

O autor retrata tanto as dificuldades sofridas pelos alunos nessas transformações, como também defende o uso de tecnologias que auxiliam nesse processo, quando ressalta que “um ensino voltado ao uso apenas dos livros didáticos e de resumos de aula, que em sua maioria apresentam uma matemática limitada e desconectada da realidade, que não aborda o conteúdo como um todo e não promove as transformações necessárias para garantir a aprendizagem dos alunos” (Andrade, 2018, p. 162).

Nesta perspectiva, em relação aos resultados da pesquisa apontaram para a relevância do uso do software GeoGebra para a conceptualização dos diversos tipos de soluções de

sistemas lineares. Vislumbra-se que, a pesquisa de Andrade (2018) possa servir de aporte teórico para o nosso trabalho, pois retrata sobre a passagem do campo algébrico para o gráfico, visto que nossa pesquisa também abordará a análise desta passagem através do software GeoGebra, que vem apresentando potencialidades significativas no seu uso voltado ao ensino da matemática.

- **Território 3: Teses**

Encontramos apenas duas teses presentes na BDTD, como também no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Em relação a trabalhos com Sistemas de equações Lineares e GeoGebra não encontramos nenhuma pesquisa no eixo da temática. Quando partimos para busca envolvendo TAD e Sistemas de equações lineares encontramos apenas uma. E em relação a TAD e GeoGebra encontramos uma, conforme mostra o quadro 3:

Quadro 3 –Território 1 (Teses)

nº	Título	Autor/Ano	Teoria/Conteúdo	Palavras chaves
	Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao GeoGebra	Eliane Santana de Souza Oliveira (2020)	TAD, PEP, MER e Função Seno e Cosseno	TAD e GeoGebra
	Teoria APOE e Teoria Antropológica do Didático: um olhar para o ensino de Álgebra Linear na formação inicial de professores de matemática.	Mariany Layne de Souza (2020)	Teoria APOE e Teoria Antropológica do Didático e Álgebra Linear	TAD e Sistemas de Equações Lineares

Fonte: Os autores (2023).

Selecionamos apenas uma tese na qual consideramos relevante para a realização do nosso estudo. A tese escolhida apresenta como autora Souza (2020). Em sua pesquisa ela apresenta a seguinte questão geratriz: “*Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações no Ensino Médio?*” ao decorrer do trabalho é apresentada propostas que facilitam a exposição desse conteúdo. O percurso metodológico dividiu-se em etapas, sendo a primeira delas realizar a identificação das referências básicas adotadas na disciplina, em segundo analisar as praxeologias presentes em algumas tarefas do livro didático de Álgebra Linear utilizado no curso, em terceiro desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores e, por fim, analisar as produções escritas, seguindo a decomposição genética. Desse modo, o público-alvo desta aplicação do PEP-FP foi uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública localizada no norte do estado do Paraná.

Através desse mapeamento, podemos verificar que são poucos os estudos que utilizam a temática sobre “TAD e GeoGebra”, “Sistemas de equações Lineares e GeoGebra” ou “Sistemas de Equações Lineares e TAD.” Além disso, não encontramos nenhuma pesquisa que apresentasse os três eixos norteadores no ensino médio. A dissertação de Andrade (2018) foi a que mais aproximou-se da nossa proposta, pois traz em sua essência a verificação da passagem do campo algébrico para o geométrico, sendo este o ponto primordial do nosso trabalho, relatando as dificuldades presentes no livro didático na exposição do conteúdo, bem como apresentando como os alunos realizam a passagem deste campo.

Consideramos ainda, que a proposta da nossa pesquisa será pertinente, pois utilizamos da TAD para realizar uma análise praxeológica das práticas desenvolvidas pelos estudantes do ensino médio na utilização do GeoGebra para realizarem a passagem do campo algébrico para o geométrico do conteúdo Sistemas de Equações lineares, trabalhando com base nas dificuldades apresentadas, para que ocorra uma validação do conhecimento. Podemos notar através das pesquisas aqui abordadas as dificuldades presentes na passagem do campo algébrico para gráfico e para amenizar tais dificuldades apresenta-se como possibilidade o uso do software GeoGebra. É sobre essa perspectiva, que nosso trabalho versará sobre essa temática, propondo assim caminhos para melhorar a prática dos alunos nesse quesito.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este tópico apresentará o embasamento teórico da presente pesquisa, iniciando pela Teoria Antropológica do Didático, sendo a teoria base do desenvolvimento do trabalho aqui descrito. Abordaremos ainda sobre a BNCC e o sistemas de equações lineares, apresentando como este objeto matemático está organizado nesse documento. Ainda assim, traremos as definições e métodos de resoluções para facilitar a compreensão do leitor. Ademais, abordamos alguns aspectos das tecnologias digitais com enfoque no GeoGebra, sendo este um *software* na qual nos apoiaremos para a aplicação da sequência didática.

3.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

As pesquisas no âmbito da didática da matemática têm apontado diversos avanços, bem como contribuições significantes para o ensino e aprendizagem da matemática, principalmente no que tange aos avanços na perspectiva teórica que servem como base para um melhor desenvolvimento deste campo. Rodrigues (2019, p. 44) comenta que “a didática da matemática observa e analisa o sistema didático com a finalidade de compreender os fenômenos didáticos a partir das atividades didáticas, as quais podem apresentar os avanços e as dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem.”

Sobre esta perspectiva Almouloud (2015) ressalta que a ênfase na compreensão desses fenômenos trouxe à tona a necessidade de desenvolver modelos teóricos que pudessem caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos, bem como fatores que interferem nos processos de ensino e de apropriação de conhecimentos/saberes pelo aluno. Nesta perspectiva, um dos modelos que foram desenvolvidos com base na didática da matemática é a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard.

O objetivo é ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista ao paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores necessita de dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, se deve recorrer de alguma forma a dispositivos com estrutura do tipo PEP (Estudo de questões, mídias, milieux) (Ruiz-Olarría, 2015, p. 136).

Chevallard (1997), traz em seus argumentos em relação ao saber que todo projeto social de ensino e de aprendizagem tem na sua essência a dialética entre conteúdo do saber e conteúdo do saber a ensinar. Assim essa dialética pode ser um meio manual de ensino, logo o saber passa por transformações até chegar no saber ao “saber a ensinar”. Logo essa noção de transformação

está amparada no berço da transposição didática, podendo se referir, portanto, a um conteúdo específico, um estudo em processo de investigação, entre outras perspectivas.

O processo de transposição didática, pode ser entendido segundo Bosch e Gascón (2006), através de um esquema onde o “saber sábio” na qual se encontra nas instituições de produtoras do saber, transformam-se em “saber a ensinar” chegando assim ao processo educativo (escolas e instituições de ensino), ainda assim sofrem uma nova transformação ao “saber ensinado” nas aulas e por fim “saber aprendido disponível” a comunidade de estudo.

De acordo com Chevallard (1991), o longo processo de transformação dos saberes científicos em saberes a ensinar é realizado numa instituição escondida, não visível intitulada de noosfera, que envolve comunidades - professores, pedagogos e técnicos do governo.

Bosch e Gascón (2007) apresenta um esquema na qual remonta o processo da Transposição Didática trazendo esse ‘processo de forma ampla e clara. Primeiramente o saber encontra-se na sua forma científica, que se deriva das instituições produtoras de saber, passando para o saber a ensinar que está situado no sistema educativo que pode ser denominado como “noosfera”, logo após ele passa pelo processo de saber ensinado, que é aquele que chega na sala de aula e por fim o saber aprendido que é disponível a comunidade de estudo.

Almeida (2016, p.80) destaca que “para entender as dificuldades dos alunos na aprendizagem de certa noção, não basta investigar apenas os aspectos cognitivos da aprendizagem. E preciso investigar o papel que desempenha essa noção em diferentes atividades, matemática ou não matemática, que os alunos devem aprender.”

Os fenômenos de transposição didática estão no coração de qualquer problema didático (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 396). A TAD, “como ampliação da Transposição Didática, permite analisar o papel dos atores que compõem os sistemas didáticos e as relações estabelecidas com o saber de forma mais sistemática e dinâmica” (Cavalcante, 2018, p.103). Além disso, todo saber aparece, a um dado momento, em uma dada (Chevallard, 1989) sociedade, como ancorado em uma ou mais instituições.

O foco dos problemas didáticos se desloca das características individuais dos sujeitos em dada instituição para as práticas institucionais em torno dos saberes, ou seja, os aspectos cognitivos da aprendizagem já não são considerados suficientes para explicar as dificuldades de aprendizagem dos alunos sobre uma determinada noção. Os saberes e suas transformações são, portanto, tomados como unidade de análise que influencia as diferentes atividades (matemáticas ou não) em uma instituição. (Cavalcante, 2018, p.102).

Segundo Chevallard (1998, p.2) a sua teorização proposta na TAD “deve ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação da noção cuja elaboração visa permitir pensar de

maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises.” O autor ainda ressalta que a TAD, apresenta como principal perspectiva estudar o homem frente a um saber ou situações do ramo da matemática. O saber segundo, Brito e Menezes (2006) quando apreciado na sua forma inicial interessa apenas a comunidade científica, que apresenta uma linguagem própria.

Ressaltando o que Chevallard (apud BARBOSA, 2011) afirma a TAD inicialmente apresenta-se como uma teoria que vem trazendo em seu desenvolvimento durante esses anos transformações que são voltadas para o ensino da matemática, remontando o seu contexto inicial, com foco no âmbito científico na qual ela se encontra até chegar na prática nas instituições de ensino de modo geral. Podemos então denominar essas transformações como saberes que passam por mudanças até chegar no âmbito escolar de modo geral. É nesse sentido, que as instituições vêm apresentar-se como um amplificador social que apresentam regras que instigam o pensamento e não necessita ser formalizada. Um determinado objeto de saber, como por exemplo a álgebra, pode apresentar várias instituições, com funções variadas.

Assim, uma razão para a utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, p.1, 1999). A antropologia cognitiva, faz inferência a parte de noções primitivas, denominadas por Chevallard (1992; 1996), como objeto (O), pessoas (X), Instituições (I) e as relações entre pessoas e objetos $R(X,O)$.

Consideramos ainda, a abrangência que a Antropologia Cognitiva está alcançando, destacamos como particular o caso da Didática da Matemática, referindo-se as relações didáticas que são perceptíveis em sala de aula, como ressalta Cavalcante (2018), podemos nos referir aos objetos relativos a conceitos ligados a matemática, bem como as relações que são formadas com esses objetos e com os sujeitos que participam dessa relação.

Deve notar que o termo cognitivo não é tomado aqui em sua acepção intelectualista corrente: eu tenho uma relação pessoal com a minha escova de dente, com a máquina de café da cafeteria, com o pedal do freio de meu carro, etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo cognitivo, da mesma forma que inclui, por exemplo, a noção de equação quadrática ou de derivada. (Chevallard, 2009, p. 2).

Além disso, segundo Almouloud (2015) a Didática da Matemática no campo da antropologia do conhecimento, tem uma perspectiva que tudo pode ser considerado um objeto, entre eles destacam-se alguns particulares sendo: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições. Podemos dizer que uma escola é uma instituição, tal como uma sala de aula, mas

existe igualmente a instituição “trabalhos orientados”, a instituição “curso”, a instituição “família” (Almeida, 2016, p.89).

Algumas relações entre sujeitos, objetos e instituição são permeadas por intencionalidades diversas, tanto por parte dos sujeitos como por parte das instituições perante os objetos em jogo nessa relação. Na sala de aula, podemos identificar vários fenômenos didáticos (contrato didático, transposição didática, gestão do tempo) que ocorrem devido a essas intencionalidades, mediante as relações entre alunos e professores diante do saber a ser ensinado (Santos e Menezes, 2015, p. 652).

Em sua teoria Chevallard (1999) afirma que para se estabelecer relações entre o que se é estudado e observado, faz-se necessário a utilização desses três conceitos que são fundamentais para sua teorização, estabelecendo uma ligação entre eles que concretizam a teoria, apresentam-se os objetos “O”, as pessoas “X”, e as instituições. Segundo Chevallard (1998, p. 93) um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela).

A noção de conhecimento na teoria relaciona-se com o conhecimento de um objeto O. Isso nos leva à seguinte questão: como um indivíduo X conhece um objeto O? Respondemos, então, que ele o conhece a partir do momento em que o objeto passa a existir para ele. Em outras palavras, conhecer um objeto O significa ter uma relação pessoal com ele. Além disso, podemos dizer que o objeto O somente existe para a pessoa que o conhece. (Almeida, 2016, p.89).

Ainda nesse sentido, Chevallard (2003, p. 82) se refere a instituição como sendo “um dispositivo social “total”, que certamente pode ter uma extensão reduzida no espaço social, mas permite - e impõe - a seus sujeitos, isto é, às pessoas X que ocupam as diferentes posições p ofertadas em I.” Assim uma pessoa X revela-se um sujeito adequado da instituição I, relativamente ao objeto institucional O, quando a sua relação pessoal $R(X,O)$ é considerada conforme a relação institucional $RI(O)$.

É neste aspecto que a TAD, irá nos permitir através dos seus pressupostos, analisar um determinado objeto a saber de uma instituição, além do nível de conformidade das relações existentes, sejam elas pessoais ou institucionais, assim essas relações têm um forte vínculo com as praxeologias. Segundo Chevallard (2007, p. 71) “didática se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias se propõem a viver, a migrar, a mudar, a operar, a definhar, a desaparecer, a renascer, etc. no seio das instituições humanas”.

Podemos considerar que um objeto para existir depende do reconhecimento e do relacionamento de uma instituição com pelo menos uma pessoa. Assim, quando nos referimos ao conhecimento - e o saber, destacaremos como certa forma de organização de conhecimentos – logo o autor entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento.

Assim, através dos avanços e consolidações que a TAD apresenta como discursões, Chevallard e seus colaboradores retratam-na de paradigma de questionamento de mundo, porque busca pelo aperfeiçoamento de dispositivos didáticos, apresentando uma criticidade ao modelo escolar dominante. É neste aspecto que o sujeito se torna observador das obras humanas. É nesse aspecto então, que se apresenta o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), assim conhecido no Brasil, como um meio na qual os pesquisadores avançam as suas pesquisas relacionadas a TAD, bem como o aprimoramento dos seus dispositivos didáticos.

Sobre um ponto de vista antropológico, para realizar uma análise das práticas que ocorrem entre as relações com os sujeitos e os objetos em um determinado sistema didático, foi necessário estabelecer ferramentas que fossem consideradas apropriadas.

A praxeologia na TAD pressupõe um método para analisar as práticas que ocorrem no interior das Instituições, tanto pela sua descrição, quanto pelas condições em que estas ocorrem. A organização praxeológica diz respeito, portanto, ao modo como as práticas instituídas são propostas (discurso) e efetivadas (prática). A natureza antropológica da análise assume a hipótese de que é necessário romper as inúmeras fronteiras institucionais pelas quais estamos acostumados a transitar, visto que uma análise praxeológica é sempre um recorte do mundo social. (Cavalcante, 2018, p.127)

Discutiremos no próximo tópico sobre a noção praxeológicas e como ela se organiza em determinados contextos de ensino, onde acontece o aprimoramento das relações institucionais aqui descritas.

3.1.1 A noção de praxeologias

A TAD “situa a atividade matemática, e em consequência a atividade de estudo em matemática, num conjunto de atividades humanas e de instituições sociais” (Chevallard, 1999, p.1). Almeida (2016), ressalta que toda atividade humana que esteja regularmente realizada, pode ser definida e analisada, a partir de um modelo único definido como praxeologia. A TAD e suas pesquisas trazem várias possibilidades de compreender as relações que se dão no ensino da matemática. Segundo, Rodrigues, Menezes e Santos (2017, p. 41) na condução das situações didáticas propostas, a praxeologia é um elemento presente na TAD que procura dar sentido e sinalização para os caminhos de ensino da Matemática, tais caminhos são alicerçados e direcionados por modelos de referência que orientam as condições didáticas e matemáticas.

Uma parte da teorização da TAD diz respeito ao desenvolvimento da noção de praxeologia. Na relação com a didática, podemos dizer que a “se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias se propõem a viver, a migrar, a mudar, a operar, a definir, a desaparecer, a renascer, etc. no seio das instituições humanas” (CHEVALLARD, 2007, p. 719).

As questões matemáticas envolvem nas suas resoluções uma abordagem ampla de conceitos e fórmulas, podemos analisá-las a partir das praxeologias, observando como ocorreram o desenvolvimento de suas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, para que assim possamos compreendê-las. Segundo Almouloud (2015, p.11) “para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições.”

A praxeologia se constitui com noções chaves de tipo tarefas (T) a serem cumpridas por meio de, pelo menos uma maneira de executá-las chamada técnica (τ) que por sua vez, é explicada e legitimada por elementos tecnológicos (θ), justificados e esclarecidos por uma teoria (Θ) (Almeida, 2016, p.93).

Almouloud (2015, pg.11) cita que “na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática.” Em concordância com o autor, toda prática denominada de institucional pode ser analisada, sob o olhar das praxeologias apropriando-se de diferentes maneiras em um sistema de tarefas que estejam delineadas de maneira coerente.

Ainda em concordância com o autor, destacam-se algumas atividades humanas que são consideradas tarefas que podem ser realizadas, por exemplo: calcular a fração correspondente de uma quantidade, subir uma ladeira, digitar um trabalho entre outras tarefas que geram algumas dificuldades para serem resolvidas, acarretando um certo esforço para quem irá executá-la. Esta prática está ligada a relação à ecologia das tarefas, Bosch e Chevallard (1999, p. 85-86) afirmam que “a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições [...]”. Vale considerar que um tipo de tarefa, diz respeito a um objeto relativamente preciso.

Chevallard (1999, p.223) retrata que, “na maioria dos casos, a associação de uma tarefa a um tipo de tarefa é expressa por um verbo, como “desenvolver” a expressão literal dada, “subir” uma escada etc.”

É possível afirmar que, em sala de aula, existe um conjunto de práticas de ensino e aprendizagem sistematizadas e compartilhadas na instituição (educacional). Essas práticas dependem fortemente da organização matemática executada pelo professor. Então, podemos questionar: até que ponto as tarefas e as técnicas", que são elementos da organização matemática, mantém relação com o fenômeno "contrato didático"? Mais ainda, podemos perguntar: como ocorrem as negociações, as rupturas, as renegociações no momento em que o professor coloca em execução o bloco prático-técnico $\Pi = [T, t]$, designado na linguagem corrente como saber-fazer (práxis), na organização didática? (Almeida, 2016, p. 95)

Para a realização de tarefas, decorre do desenvolvimento de uma técnica. Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática.

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática. De acordo com o autor, toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica. (Aumoulond, 2015, p.11)

Exemplificando poderíamos propor a seguinte tarefa: resolver o sistema 2×2

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

assim o sistema apresentado pode ser considerado uma tarefa, na qual será desenvolvida técnicas de resolução para esta, para resolvê-lo pode-se utilizar o método da substituição ou adição para encontrar o conjunto solução do sistema. Dependendo do desenvolvimento pode haver a necessidade de as tarefas passarem por uma reconstrução, que podem ser denominadas na condição de construções institucionais, que para Chevallard caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Outra consideração diz respeito a abrangências das técnicas, pois “para determinados tipos de tarefas, muitas vezes, uma determinada técnica só consegue dar conta de alguns casos específicos” (Cavalcante, 2018, p.130). No caso do exemplo aqui apresentado, se utilizássemos apenas uma técnica sendo ela o método da substituição ou da adição, chegaríamos ao resultado proposto a solução do sistema, logo caberia ao estudante definir quais caminhos de resolução poderia seguir. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco “prático-técnico”, formado por um tipo de tarefas e por uma técnica, que pode ser identificado em linguagem corrente como um “saber-fazer”. (Chevallard, 2002, p. 3)

Ademais, a praxeologia associadas a um determinado saber é composta por quatro elementos que são articulados a partir de dois blocos considerados prático-técnico e tecnológico-teórico, sendo respectivamente no saber fazer e amparado no saber, ambos são de suma importância para o modelo praxeológico.

As técnicas foram produzidas então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco “prático-técnico”, formado por um tipo de tarefas e por uma técnica, que pode ser identificado em linguagem corrente como um “saber-fazer”. (Chevallard, 2002, p. 3)

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de “sobrevivência” de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na “cadeia alimentar”? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.(Almoulond, 2015, p. 12).

O que distingue a atividade matemática das outras atividades humanas é que diante de uma tarefa, é preciso saber como resolvê-la. “Como resolver a tarefa é o motor gerador de uma praxeologia: é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve ser justificada por uma tecnologia, a qual, no que lhe concerne, precisa ser justificada por uma teoria” Rossini (2006, p. 26). Já a teoria se “refere a um conjunto mais abstrato de conceitos e argumentos dispostos em um discurso geral que justifica a tecnologia em si.” Martensen (2011, p. 218)

É notório, que esses elementos possuem uma relação de concordância na qual um depende do outro para que ocorra a concretização da teoria. Chevallard (1999, p. 223) “propõe um postulado básico para essa teoria, admitindo que toda atividade humana pode ser submetida a um modelo único, ou seja, uma praxeologia.”

Rossini (2006, p. 201) cita que o termo tecnologia é um discurso racional (logos) sobre a técnica. É a explicação e justificação, de maneira racional, da técnica, de tal forma que a técnica garanta executar, realizar a tarefa do tipo T de maneira eficiente e lógica.

A técnica refere-se à habilidade prática de realizar tarefas, enquanto a tecnologia envolve a aplicação sistemática de conhecimentos científicos para criar ferramentas e processos que facilitam essas tarefas. A descrição e justificação das técnicas utilizadas são essenciais para garantir que as tarefas sejam realizadas de maneira eficaz e eficiente. Além disso, a capacidade de "engendrar" ou "reconstruir" soluções permite a adaptação e inovação, características centrais no desenvolvimento tecnológico.

Segundo Almeida (2016) a primeira função da tecnologia é descrever e justificar a técnica utilizada como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa, ou mesmo permitir engendrar (ou a reconstruir, quando ela é "dada"). Já a segunda função da tecnologia apontada por Chevallard (1999) consiste em explicar para tornar inteligível, esclarecer uma técnica t, isto é, "em expor por que ela funciona bem".

Além disso, a tecnologia tem o potencial de desenvolver novas técnicas, mais eficientes e melhor adaptadas à execução de tarefas específicas. No que diz respeito à relação entre tarefa e técnica, independentemente do tipo de tarefa T, a técnica associada a T estará sempre acompanhada, no mínimo, de um embrião ou, com mais frequência, de um vestígio de

tecnologia (CHEVALLARD, 2007). Em muitos casos, certos elementos tecnológicos podem estar diretamente integrados à técnica. Dessa forma, podemos concluir que toda tecnologia exige uma justificativa, que denominamos teoria da técnica.

Na TAD um ecossistema corresponderia ao conjunto de condições e restrições institucionais que permite a “vida” de um determinado saber. Rodrigues (2018, p. 49) respalda que a dimensão ecológica de um problema didático possui questões relacionadas às restrições e condições praxeológicas diante dos níveis de codeterminação didática.

3.1.2 Organização Didática e Matemática

Segundo Almeida (2016), a Organização Matemática (OM) possui relação com as atividades matemática que é construída na sala de aula a partir de uma organização didática. Podemos considerar que a álgebra, destacando o saber em jogo sistemas de equações lineares, são organizações matemáticas que se desenvolvem através das organizações didáticas.

Evidenciando-se esses argumentos, as OM são as praxeologias matemáticas que já foram exemplificadas no tópico anterior, sendo assim elas são construídas em torno de tarefas realizadas, de técnicas (t) matemáticas explicadas, de tecnologias que são justificadas e de teorias que são, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos em momentos de estudo.

Segundo Rodrigues (2018), esses níveis de codeterminação didática (Chevallard, 2001, 2002) permitem que o indivíduo compreenda e estude sobre as influências e restrições que as Organizações Matemática (OM) e Organizações Didáticas (OD) apresentam, proporcionado a criação das condições para a reorganizar e reestruturar as condições tanto de ensino, como também de aprendizagem, partindo do nível mais genérico (civilização) ao mais específico (problema matemático). A algumas problemáticas no que tange a organização praxeológica nas instituições de ensino, que retratam outras noções no contexto da TAD.

No caso dessas instituições, podemos destacar duas organizações distintas, porém imbricadas, que são as organizações praxeológicas matemáticas (relativas à praxeologia dos objetos matemáticos que vivem em uma dada instituição) e as organizações praxeológicas didáticas (relativas às práticas desenvolvidas na instituição para que os objetos sejam ensinados). Assim, o professor de Matemática em uma escola, ao realizar uma atividade de planejamento, lida concomitantemente com organizações matemáticas e didáticas. (Cavalcante, 2016, p.133)

Sobre esses apontamentos, podemos definir que as organizações didáticas (OD) irão expor as escolhas que serão feitas pelo docente para a construção de determinadas organizações matemáticas (OM) pelos seus alunos e que estão previstas no currículo. É assim que a OD, será

vista como a maneira possível de cumprir determinadas tarefas, deixando explícita a organização do processo de estudo de uma determinada instituição.

Sendo assim a OD emerge quando uma Organização Matemática é efetivamente colocada em prática. Isso significa que a atividade está direcionada à forma como a execução da OM se dá, ou seja, à realidade matemática. Bosch e Gascon (2007) retrata que as formas de organizar o ensino escolar de matemática podem ser descritas por meio de praxeologias didáticas, as quais possuem uma estrutura composta por blocos inseparáveis: o bloco prático-técnico (a práxis, o "saber-fazer" didático) e o bloco tecnológico-teórico (o logos, o "saber" didático).

A praxeologia que é uma das principais noções teóricas da TAD, Chevallard ressalta que é como uma ferramenta que facilita a análise de todo processo didático e complexidade crescente das organizações matemáticas (OM), estabelecida a partir da realização de uma atividade de planejamento elaborada pelo professor. Segundo Cavalcante (2018, p. 134) de modo geral, as organizações didáticas (OD) revelam as escolhas feitas pelo professor para que seus alunos possam construir ou reconstruir determinadas OM previstas no currículo. Temos ainda que:

Uma praxeologia pode ser matemática (PM) ou didática (PD). Na PM, temos uma organização matemática (OM) que está relacionada com a construção Matemática ligada às situações didáticas; e, na PD, temos a organização didática (OD), nas quais são organizações que fazem a transposição das OM para fins didáticos. O conjunto de organizações (OM e OD) permite analisar a prática durante as situações de ensino e aprendizagem (Rodrigues, 2018, p. 45).

Nesse processo, o professor conduz uma ação didática com o objetivo de fazer os alunos aprenderem uma Organização Matemática (OM). As construções realizadas vão moldando as organizações matemáticas, que, por sua vez, condicionam as possíveis formas de organizar os estudos e, conseqüentemente, as organizações didáticas.

Chevallard (1999) comenta ainda que as praxeologias são utilizadas para facilitar a análise do processo didático, além da complexidade crescente das organizações matemáticas. É nesta perspectiva, que as praxeologias foram definidas através de organizações matemáticas, sendo elas denominadas de pontuais, locais, regionais e global. Gascón (2003, p.16) revela que as organizações matemáticas ou praxeologias mais elementares que se chamam pontuais estão constituídas ao redor do que em uma determinada instituição é considerado como um único tipo de tarefa.

Desse modo, a organização matemática pontual (OMP) apresenta apenas uma técnica, para assim ser utilizada em um único tipo de tarefa, o que se define de início como um bloco prático-técnico. Já em relação a organização matemática local (OML), “compõe-se da interação

de várias OMPs, validadas e justificadas por uma tecnologia, com a finalidade de fundamentar as organizações que fazem parte da OML” (Rodrigues, 2019, p. 46). Dessa forma, segundo Chevallard (1999, apud Velenzuela, 2007, p.24) “a organização local agrega várias organizações pontuais, via uma tecnologia comum, isto é sua integração no centro de uma organização regional regida por uma mesma teoria.”

Em relação a organização matemática regional (OMR) apresenta na sua estrutura um conjunto das OMLs, onde uma teoria (Θ) a fundamenta, coordena, além de integrar em um discurso teórico matemático comum. Por fim, apresenta-se a organização matemática global (OMG) que é composta segundo Fonseca (2004) de “uma OMR agregando várias teorias $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_n\}$. ”

O estudo da resolução de um problema de um determinado tipo - como efetuar a tarefa te TC - caminha par a par com a construção de ao menos um embrião de técnica, a partir do qual uma técnica mais desenvolvida poderá eventualmente emergir: o estudo de um problema particular, em breve percebido como um espécime do tipo estudado, aparece, assim, não como um fim em si, mas como um meio para que tal técnica se constitua. Trava-se assim uma dialética fundamental: estudar problemas é um meio que permite criar e por em prática uma técnica relativa aos problemas do mesmo tipo, técnica que será seguida e o meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo, quer dizer, efetuar as tarefas t e TI. (Chevallard, 2007, p. 731)

É nesse aspecto que nossa pesquisa buscará se respaldar nos elementos teóricos que embasam a TAD, para que assim possamos realizar uma análise praxeologia das organizações crescentes matemáticas que serão construídas pelos estudantes através das praxeologias desenvolvidas na resolução da sequência didática. Assim, ela será utilizada como a teoria base do nosso trabalho, pois usufruiremos dos pontos principais para o apoio desta análise.

O próximo tópico versará sobre a BNCC e nosso saber matemático, sendo ele sistema de equações lineares, para compreendermos como tal saber está alicerçado nesse documento formativo.

3.2 A BASE COMUM CURRICULAR E SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um importante documento que aborda em sua estrutura uma ementa que apresenta normas a serem cumpridas nas redes de ensino tanto infantil e fundamental, como também no médio. Ela tem como principal objetivo garantir que os discentes aprendam várias temáticas que são consideradas de suma importância para a obtenção do conhecimento e desenvolvimento de habilidades que são comuns. A criação da BNCC, também visou a redução da desigualdade educacional presente no Brasil, promovendo assim um ensino igualitário a todos e acesso à educação, quando as exigências são cobradas e aplicadas durante o percurso escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

Nesta perspectiva as instituições de ensino público e privado, devem nortear-se por este documento para desenvolver e promover situações que estão ligadas a base. Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento (Brasil, 2018, p.8).

Para compreendermos a estruturação da BNCC, faz-se necessário entender as definições do que são as competências e habilidades destacadas neste documento. Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 8).

Já a habilidade é os conhecimentos que são a base para o desenvolvimento das competências gerais ou específicas, ou seja, para que se coloque em prática a competência faz-se necessário um conjunto de habilidades que proporcionam um aprimoramento de determinados conceitos e saberes que são pertinentes ao ensino.

A BNCC do ensino médio, divide-se em importantes áreas do conhecimento, sendo elas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, cada área apresenta a suas competências específicas que são trabalhadas ao longo das etapas educacionais de ensino, que são amparadas por habilidades. Destacamos aqui a área da Matemática e suas Tecnologias, que apresenta como principal foco a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade.

Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (Brasil, 2018, p 518)

Podemos considerar que a BNCC do Ensino Médio, possui uma integração consistente em relação aos campos temáticos, sendo eles: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Neste referencial, destacamos o campo da Álgebra, que consolida nosso objeto de estudo que é sistema de equações lineares e como ele está organizado na BNCC.

A competência que abrange a temática de sistemas de equações lineares no campo da Álgebra é a terceira sendo ela: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Destacamos a primeira habilidade, definida com o seguinte código EM13MAT301, referindo-se a “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.”

A denominação do código alfanumérico da habilidade EM13MAT301, apresenta a seguinte composição: EM (Ensino Médio), 13 (1ª a 3ª ano do ensino médio), MAT (Matemática e suas Tecnologias), 3 (competência na qual se refere a habilidade) 01 (habilidade específica da competência). Assim o código EM13MAT301 está fazendo referência à primeira habilidade, que se apresenta como proposta relacionada à Matemática e suas tecnologias na competência específica de número 3, que pode ser desenvolvida uma abordagem deste conteúdo de equações lineares, tanto no primeiro ou terceiro ano do ensino médio.

[...] os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática. Para resolver esses problemas, eles devem, logo no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles devem aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente. (Brasil, 2018, p. 527)

Utilizamos a BNCC para observar como o conteúdo de sistemas equações lineares está apresentado para ser desenvolvido, com base nisso a nossa sequência didática buscará se respaldar nesses pressupostos para seguirmos caminhos semelhantes. Sendo assim, ao retratar sobre o conteúdo, percebemos que a BNCC reforça nesta competência a necessidade de abordar aspectos que possuem ligações entre si, como exemplo a formulações de ideias pelo próprio estudante que pode compartilhá-las em sala de aula com seus demais colegas de turma através de argumentações, tornando a escola um ambiente propício a uma aprendizagem conjunta e efetiva.

3.3 O OBJETO MATEMÁTICO: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste tópico iremos descrever algumas definições, bem como conceitualização do nosso objeto de estudo, sendo ele sistema de equações lineares. É necessário apresentar aqui essa temática, para compreendermos como tal temática é estudada e conceituada nas escolas e quais os possíveis métodos de resoluções que se apoiam em técnicas distintas.

Ainda percebemos que os estudantes sofrem dificuldades com tal conteúdo, é nesse sentido que se precisa buscar caminhos de amenizar esses desafios, seja por meio de atividades lúdicas, ou com a utilização de *software*.

3.3.1 Equação Linear

A equação linear é uma equação que apresenta a seguinte forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são números reais, que recebem o nome de coeficientes e incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, e b é um número real chamado de termo independente.

Observamos um exemplo da solução da seguinte equação linear: $3x + 2y = 18$

Dizemos que:

- O par ordenado $(4, 3)$ é uma solução da equação, pois $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$;
- O par ordenado $(6, 0)$ é uma solução da equação, pois $3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$;
- O par ordenado $(5, 1)$ não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 18$.

3.3.2 Sistema de Equações Lineares

Sistema de equações lineares simultâneas $m \times n$ (lemos: m por n), ou apenas sistema linear $m \times n$, é o conjunto de m equações lineares com n incógnitas. A solução de um sistema linear é a n -upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ que é simultaneamente, solução de todas as equações do sistema. Podemos ainda dizer que, quando o termo independente b de uma equação linear é igual a zero, ela é denominada equação linear homogênea. Nesse caso temos:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

A ênupla $(0, 0, \dots, 0)$ é uma das soluções de qualquer equação linear homogênea. A exemplo disso temos: a equação $2x - y + 3z = 0$ é homogênea e $(0,0,0)$ é uma das soluções, pois: $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$. Quando duas ou mais equações lineares têm o mesmo conjunto solução elas são denominadas de “equações equivalentes”.

3.3.2 Solução do sistema

Dizemos que a ênupla ordenada $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ é solução de um sistema linear quando ela é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, quando satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema. Vejamos alguns exemplos:

- a) O par ordenado $(5, 1)$ é solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois

$$\begin{cases} 2.5 + 3.1 = 13 \\ 3.5 - 5.1 = 10 \end{cases}$$

- b) O terno ordenado $(1, 3, -2)$ é a solução do sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$, pois

$$\begin{cases} 1 + 2.3 + 3.(-2) = 1 \\ 4.1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$$

3.3.3 O método de substituição e adição

Como sabemos existem diversos métodos algébricos que permitem a resolução de sistemas lineares. No ensino fundamental, utiliza-se o método da substituição e o método da adição para resolver sistemas lineares de duas equações e com duas incógnitas, já no ensino médio esses métodos são ampliados para resolver sistemas lineares com mais equações e incógnitas. Apresentaremos a seguir esses dois métodos mais conhecidos pelos estudantes:

- **Método da Substituição**

Considere o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = -4 & (I) \\ 5x + y = 7 & (II) \end{cases}$

Para descobrir o conjunto solução desse sistema utiliza-se o método da substituição, que consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e, então, substituir a expressão encontrada. Inicialmente, isolamos uma incógnita de uma das equações. Por exemplo, isolando y na segunda equação $5x + y = 7$ do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 7 \\ y &= 7 - 5x \end{aligned}$$

Substituímos y por $7 - 5x$ na primeira equação $2x - 3y = -4$ do sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3(7 - 5x) &= -4 \\ 2x - 21 + 15x &= -4 \\ 2x + 15x &= 21 - 4 \\ 17x &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 17/17 \\x &= 1\end{aligned}$$

Para determinar o valor de y, substituímos x por 1 em uma das equações do sistema. Escolhendo a primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned}2x - 3y &= -4 \\2.1 - 3y &= -4 \\2 - 3y &= -4 \\-3y &= -4 + 2 \\-3y &= -2 \\y &= -2/3 \\y &= 1\end{aligned}$$

A solução desse sistema linear é o par ordenado (1, 2) e essa solução é única.

- **Método da Adição**

Primeiramente iremos considerar o sistema linear 2 x 2: $\begin{cases} 2x - 4y = 16 & (I) \\ 3x - 2y = 0 & (II) \end{cases}$

Resolveremos esse sistema através do método da adição observaremos os coeficientes da incógnita x, optamos por multiplicar ambos os membros da primeira equação $2x - 4y = 16$ por 3 e os da segunda $3x - 2y = 0$ por -2.

Essa prática é necessária para que, em seguida, ao adicionarmos membro a membro as duas equações, obtenhamos uma nova equação linear sem a incógnita x:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 & \cdot (3) \\ 3x - 2y = 0 & \cdot (-2) \end{cases}, \text{ assim obtemos a equação: } \begin{cases} 6x - 12y = 48 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$$

Agora aplicaremos o método da adição para resolver:

$$\begin{aligned}+ \begin{cases} 6x - 12y &= 48 \\ -6x + 4y &= 0 \end{cases} \\ 8y &= 48 \\ y &= 6\end{aligned}$$

Para encontrar o valor de x substituiremos o valor de y = 6 na equação I:

$$\begin{aligned}2x - 4y &= 16 \\2.x - 4.6 &= 16 \\2x - 24 &= 16 \\2x &= 16 + 24 \\2x &= 40 \\x &= 40/2 \\x &= 20\end{aligned}$$

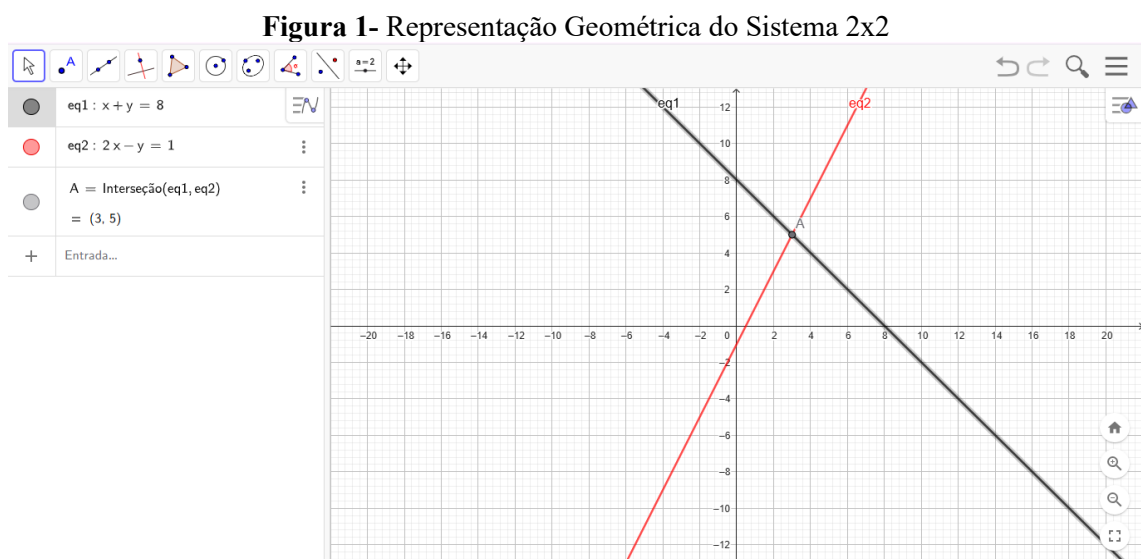
Logo, a solução desse sistema linear é o par ordenado (20, 6) e essa solução é única.

3.3.4 Classificações do sistema e Interpretação Geométrica

Cada equação presente no sistema linear 2x2 possui uma representação gráfica pelos pontos de uma reta do plano, já o sistema linear 3x3 é representado pelos pontos de um plano do espaço. Vejamos algumas classificações:

a) Sistema possível e determinado (SPD):

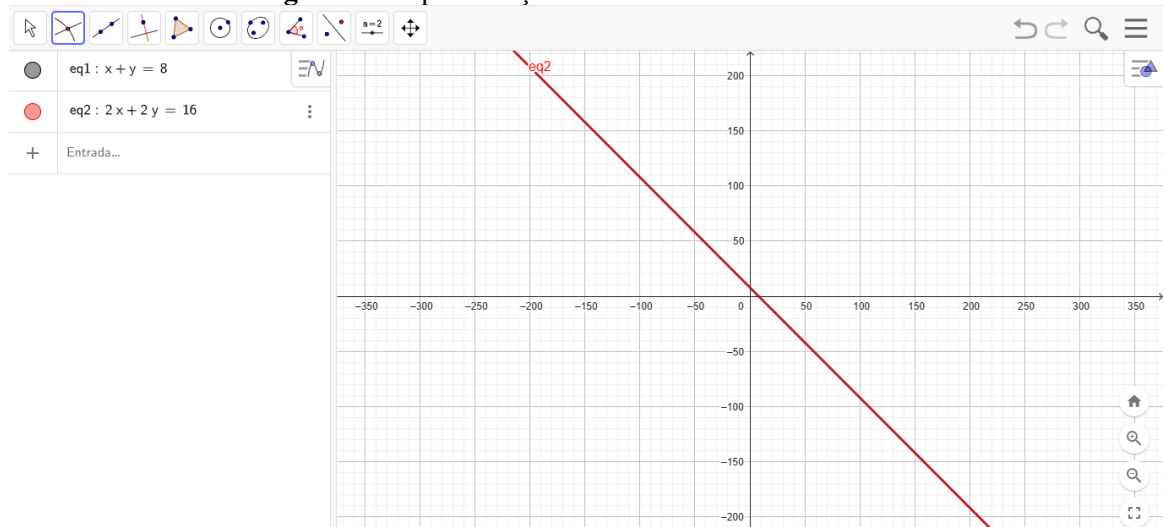
Resolvendo o sistema: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ encontramos uma única solução, sendo ela o par ordenado (3, 5). Assim, dizemos que o sistema é possível, ou seja, tem solução e é determinado, pois apresentará apenas uma única solução, logo classificamos como SPD. Já em relação a sua interpretação geométrica, podemos dizer que as retas serão concorrentes, ou seja elas vão se cruzar em um único par ordenado, indicando assim que há um par ordenado, sendo ele (3, 5), conforme mostra a representação abaixo no GeoGebra:



Fonte: A autora, 2024

b) Sistema possível e indeterminado (SPI):

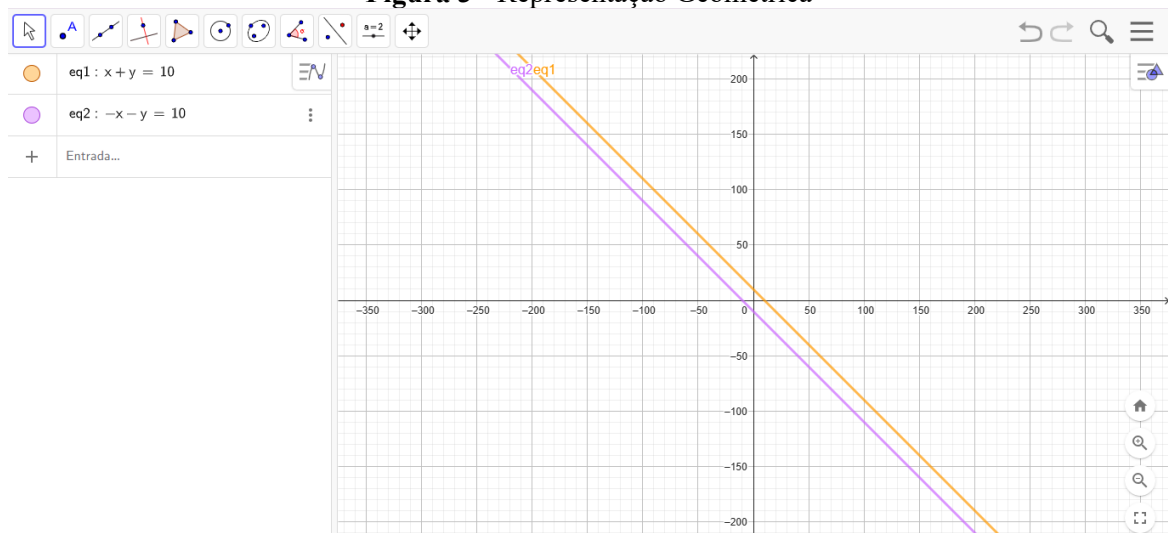
Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$ verificamos que os pares ordenados (0,8), (1,7), (2,6), (3,5) são algumas de suas infinitas soluções. Por isso dizemos que o sistema é possível, pois apresenta soluções e indeterminado, pois tem infinitas soluções. Já em relação a sua interpretação geométrica, podemos dizer que as retas serão coincidentes, ou seja possuem infinitos pontos de intersecção, indicando que há infinitos pares ordenados que são a solução do sistema.

Figura 2 - Representação Geométrica dos Sistemas 2x2

Fonte: A autora, 2024

c) Sistema impossível (SI):

Para $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 10 \end{cases}$, verificamos que nenhum par ordenado satisfaz simultaneamente as equações, portanto, o sistema é impossível, ou seja, não apresentará uma solução. No que tange a sua interpretação geométrica, salientamos que as retas serão paralelas, assim elas não irão se cruzar, indicando que não existe nenhum par ordenado que solucionará o sistema apresentado.

Figura 3 - Representação Geométrica

Fonte: A autora, 2024

3.3.5 Sistemas escalonados

Podemos utilizar regra de Cramer para discutir e resolver sistemas lineares em que o número de equações (m) é igual ao número de incógnitas (n). Quando m e n são maiores que três, torna-se muito trabalhoso utilizar essa regra. Por isso, usamos a técnica do escalonamento, que facilita a discussão e a resolução de quaisquer sistemas lineares.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não-nulo aumenta de equação para equação.

Observe o sistema linear e a seguinte matriz:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Borjono et al. (2020) ressalta que se houver linhas com todos os elementos igual a zero, elas devem estar abaixo de todas as outras. Ainda seguindo os autores quando temos um sistema linear escalonado de m equações com n incógnitas, a última linha desse sistema será a n ésima linha, que, se não estiver expressa no sistema, deve ser considerada totalmente nula. Na matriz completa do sistema isso fica mais evidente, como pode ser verificado nos exemplos b e c anteriores.

3.3.6 Matrizes associada a um sistema Linear

A um sistema linear podemos associar as seguintes matrizes:

- a) Matriz incompleta: a matriz A formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Em relação ao sistema ao sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + z = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ a matriz completa é: $A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Matriz completa: matriz B que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema. Assim, para o

mesmo sistema acima, a matriz completa é: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3.3.7 Dificuldades no ensino e aprendizagem do Sistema de Equações Lineares

Existem vários caminhos para o ensino de Matemática, alguns destes, favorecem uma aprendizagem mais significativa e duradoura, chamamos atenção, positivamente, para a utilização das tecnologias digitais. Sobre essa perspectiva, Fonseca (2020) ressalta que, no cenário educativo as implicações pedagógicas com o uso das tecnologias digitais vêm crescendo a passos largos, bem como se consolidando como um campo de pesquisa.

No que diz respeito aos conteúdos, tanto aqueles que fazem parte do ensino fundamental como os que fazem parte do ensino médio, possibilitam a utilização dessas ferramentas, com destaque, apontamos os sistemas de equações lineares. Para Andrade (2018) esse conteúdo é fundamental para alunos do ensino médio, assim como para alunos do ensino superior.

O conteúdo aborda na prática a passagem do campo algébrico para o geométrico, os alunos encontram dificuldades justamente no esboço desta passagem. Tais dificuldades estão relacionadas à construção manual dos gráficos, o que representa uma conversão de registro de um sistema linear da forma algébrica para a forma gráfica (Andrade, 2018, pg. 34). Além disso, essa prática compromete a aprendizagem, visto que no ambiente de sala de aula estuda-se somente o conceito e alguns métodos de resolução, ficando obscura a compreensão da sua classificação e do significado geométrico pela via gráfica (Andrade, 2018, p. 34).

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas (Brasil, 2008, p.77-78).

A álgebra é a área da matemática na qual estuda-se o conteúdo de sistemas de equações lineares, alguns pesquisadores externam a sua preocupação com esse âmbito do conhecimento: “percebo no ambiente escolar a frustração dos alunos, estes não conseguem obter um desempenho satisfatório nas aulas de matemática, em específico nas Álgebras, já que muitas vezes os alunos não veem sentido em aprender o cálculo literal” (Valenzuela, 2007, p.5).

Pesquisas dessa natureza prevalecem até os dias atuais, é sob essa perspectiva, que o ensino da álgebra já se era estudado por diversos pesquisadores, como por exemplo, Filloy (2001), Rojano (2001), Vergnaud (1990), entre outros. Para o desempenho e aprimoração desta competência, além da diminuição das dificuldades apresentadas o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundarem sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas.

São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas (Brasil, 2018, p. 528). Neste viés, percebemos o quanto faz-se pertinente o uso de tecnologias para facilitar a compreensão dos estudantes no que tange a visualização gráfica das equações lineares, no que tange a passagem do campo algébrico para o geométrico. É sob essa perspectiva que utilizaremos o software GeoGebra em nossa pesquisa, com foco em amenizar as dificuldades sofridas pelos estudantes.

3.4 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O SOFTWARE GEOGEBRA

A inserção das tecnologias digitais no ensino de matemática tem sido uma área de estudo e prática cada vez mais relevante, ou seja, o avanço rápido da tecnologia e a ampla disponibilidade de dispositivos eletrônicos têm proporcionado novas oportunidades para o ensino e a aprendizagem da matemática, transformando a forma como os alunos interagem com os conceitos matemáticos e ampliando suas possibilidades no processo de compreensão.

“A utilização tecnologia digital tem-se tornado cada vez mais indispensável no processo de ensino e aprendizagem, pois favorecem aos alunos novas formas de visualização que ajudam na compreensão dos assuntos, assim como corrobora com a metodologia do professor em sala de aula, utilizando as ferramentas proporcionadas por ela, como softwares e programas educacionais, que auxiliam o professor no ensino de determinado conteúdo.” (Lima, 2022, p. 01)

Os autores Vilaça e Araújo (2016) abordam que “quando falamos de novas tecnologias e educação escolar, falamos de seres humanos - professores, alunos e comunidade - que se relacionam com e através dessas ferramentas, sem negligenciar os saberes edificados ao longo de suas vivências.” Além disso, os docentes se veem na necessidade de estar buscando continuamente novos conhecimentos, para que assim possa apropriar-se das tecnologias digitais e integrá-las aos conteúdos curriculares, especificamente, na disciplina de Matemática.

O conhecimento científico e tecnológico tem tomado uma maior proporção, ou seja, estamos cercados de aparatos à nossa disposição para uso cotidiano e no ambiente escolar. Além disso, com os conhecimentos tecnológicos surgem também vários softwares voltados para o ensino de Matemática. Logo, as aulas estão cada vez mais atrativas, pois despertam no estudante a vontade e conhecer e aprender como manipular essas ferramentas facilitadoras de ensino.

Compreendemos que o conhecimento é ampliado pelo operar das ferramentas digitais, pois permitem outras possibilidades de compreensão dos conteúdos matemáticos, uma vez que tornam suas atividades práticas e dinâmicas, bem como contribuem para inovar as metodologias, desencadeando discernimento e domínio do que realizam na e para formação de professores. (FONSECA, 2020, p. 15)

A fim de melhorar e diversificar cada vez mais o ensino, ressaltamos aqui a importância da utilização de softwares como o GeoGebra. Este *software* foi criado pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, na Áustria, ele possui um acesso livre dinâmico, podendo ser utilizado de forma gratuita, com versão disponíveis para *celulares, tablets, e smartphones*, como também pode ser acessado online no *google*. É uma ferramenta prática com

interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

Nele é possível encontrar algumas características importantes como gráficos e tabelas que estão interligados e possuem características dinâmicas e vários recursos sofisticados. Além disso, pode ser considerada uma ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas da WEB e está disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo.

Um dos softwares que tem sido apontado por pesquisadores que pode colaborar com o desenvolvimento de atividades pedagógicas é o GeoGebra. No entanto, para a sua integração no âmbito da sala de aula, é necessária a promoção de cursos de formação docente que discutam as potencialidades de suas ferramentas e diferentes metodologias para sua inserção nas práticas pedagógicas. (BALDINI& CYRINO, 2012, p. CLII)

A representação é uma forte aliada para desenvolvimento cognitivo da matemática, que segundo Abar e Almeida (2017) o funcionamento da atividade cognitiva requerida pela matemática é uma condição essencial para a evolução do pensamento algébrico. Por ser um software livre, o GeoGebra se torna uma excelente estratégia de ensino e aprendizagem de conteúdo, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Na exploração e manuseio do GeoGebra é possível construir figuras na área de trabalho tanto em duas dimensões, como também em três, assim é necessário haver um nível de conhecimento primário acerca das ferramentas que são utilizadas. Esse contato permite ao operante a construção de formas geométricas tridimensionais e bidimensionais as figuras são representadas de forma clara e compreensível favorecendo o entendimento acerca do que se está sendo estudado.

Nestes aspectos, o *software* apresenta ferramentas crucias que proporcionam aos estudantes, de maneira intuitiva o processo que aborda o pensamento matemático, pois através dele é possível que os estudantes façam experimentos, apliquem estratégias e esbocem ideias na resolução de problemas complexos que exigem uma visualização prática.

O uso de computadores força, não somente apenas a reconhecer na área de experimentos uma fonte de ideias matemáticas e um campo para ilustração de resultados, mas também um lugar onde permanentemente ocorrerá confrontação entre teoria e prática. Isso coloca um problema, que ocorrerá no treinamento de professores tanto quanto de estudantes, de estimular a atitude experimental (observação, teste, controle de variáveis...) ao lado, e no mesmo nível, da atitude matemática (hipótese, prova, verificação...). (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 110).

É possível desenvolver também com o GeoGebra a capacidade de visualização, pois favorece aos estudantes uma melhor compreensão dos assuntos revisados, além de apresentar

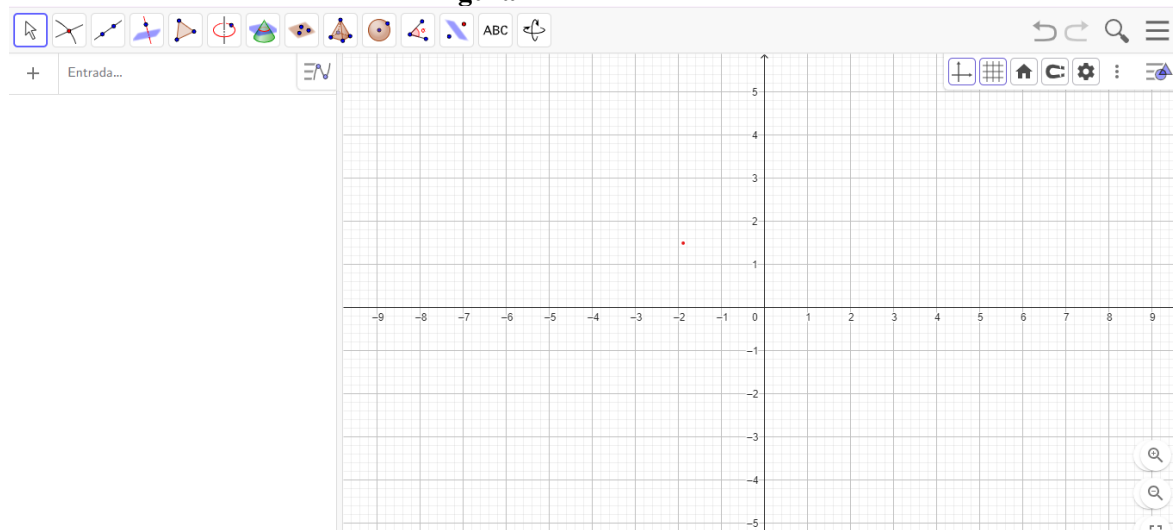
várias funções matemáticas, geométricas e algébricas, além da criação de figuras espaciais com visualização em 3D.

O software Geogebra é uma ferramenta que auxilia no instante de construir ou mobilizar os registros de representação do objeto matemático [...], bem como no momento de analisá-los de forma conjunta, visto que a conversão dos signos matemáticos ocorre de forma rápida, dinâmica, sem provocar dificuldades operatórias que podem gerar obstáculos na construção dos significados. (SILVA, 2014, p. 34)

Além dos aspectos complementado, o GeoGebra pode ser considerado uma excelente ferramenta para criar ilustrações a serem usadas no Open Office, no Microsoft Word, ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é uma multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou MacOS (Hohenwarter; Jones, 2007).

A Tela inicial do GeoGebra apresenta uma interface padrão que ajuda na visualização ampla da área de trabalho que o *software* traz, o que possibilita o trabalho e explanação de suas ferramentas como por exemplo na área algébrica, geométrica, e na planilha de cálculo simultaneamente ou apenas em uma área por vez, conforme escolha do indivíduo na qual está manipulando. Vejamos abaixo a tela inicial:

Figura 4 - Tela inicial do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

No canto superior visualizamos a barra de menus que apresenta as opções de salvar o arquivo, além de controlar configurações gerais do *software*. A barra de ferramentas que concentra a maioria das atividades possibilita a construção de pontos, retas, figuras geométricas, medidas de objetos construídos, entre outros que podem favorecer a representação. Dentro da barra de ferramenta, tem-se doze conjuntos de ícones, necessários para a construção e

desenvolvimento de diversificadas objetos matemáticos, que podem ser acessados clicando em cada um com o mouse em canto inferior direito, como mostra abaixo:

Figura 5: - Barra de Ferramentas do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

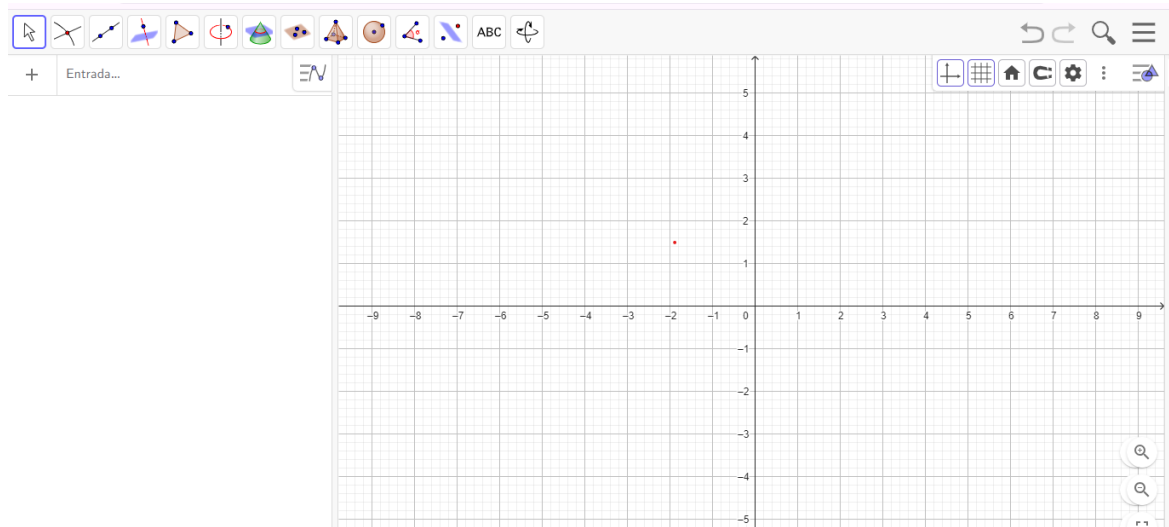
Outra parte importante é a janela de álgebra, nas quais são apresentadas as medidas, equações, coordenadas e outras características dos objetos construídos. No campo de entrada temos a digitação de comandos. Já na janela de visualização, podemos observar a representação geométrica que pode ser construído através da utilização dos outros ícones.

Além disso, a listagem de comandos predefinidos, que auxiliam nos comandos que estão em conjunto com os ícones da Barra de Ferramentas. No momento da construção, o usuário deve selecionar a barra de ícones e a janela de visualização, ou simplesmente digitar as equações ou os valores que serão utilizados para a construção gráfica.

3.4.1 Sistemas Lineares 2x2 no GeoGebra

Na abordagem do tema Sistemas Lineares, é fundamental iniciar a sequência didática seguindo uma ordem de desenvolvimento. Focaremos a respeito dos sistemas lineares 2x2, tema já abordado no ensino fundamental, para posteriormente se trabalhar com os sistemas lineares 3x3 e sua representação gráfica.

Para representar um sistema linear graficamente, podemos utilizar como apoio o GeoGebra, sendo este um recurso que facilita a visualização. Para utilizarmos o GeoGebra primeiramente, acessamos o site <https://www.geogebra.org/classic> (acesso em: 24 nov. 2023), para obtermos o manuseio do GeoGebra Classic através da plataforma.

Figura 6 - O GeoGebra

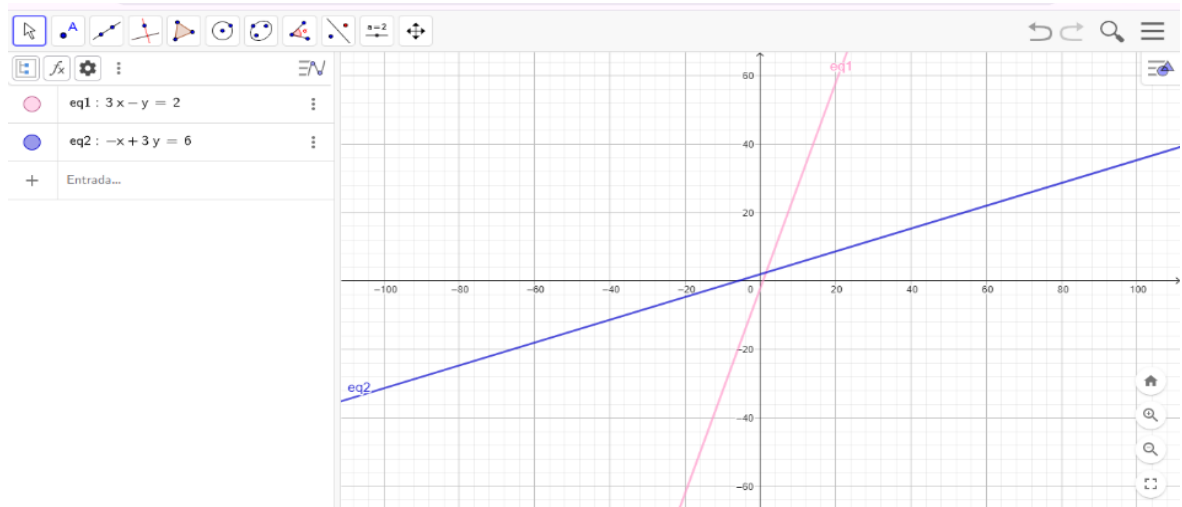
Fonte: A autora, 2024

Agora vejamos o passo a passo para esboçar geometricamente o gráfico do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

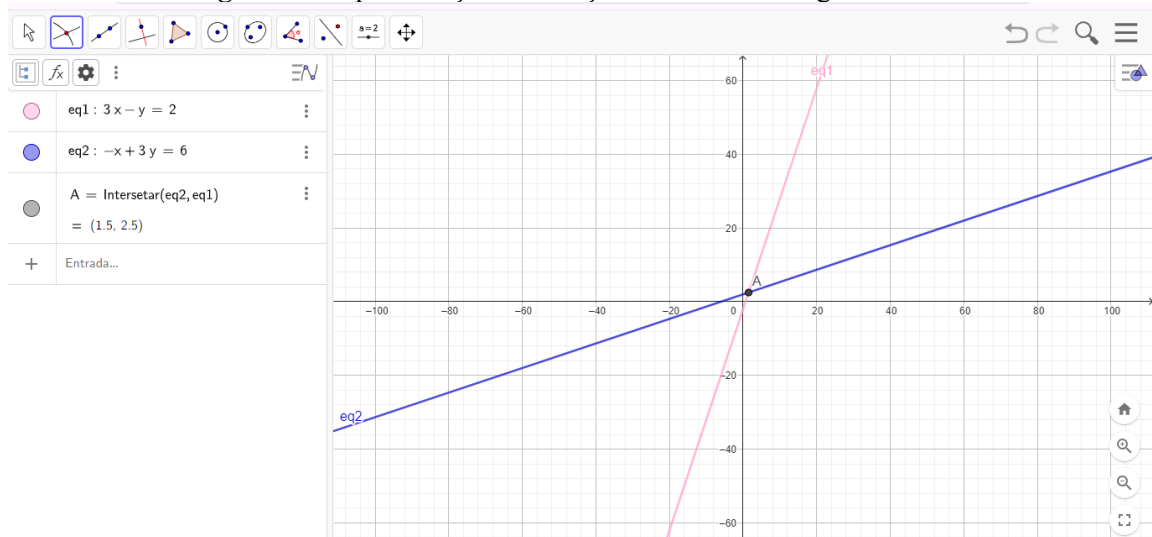
1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção de exibir eixos no plano cartesiano.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a primeira equação $3x - y = 2$ e clicamos em “Enter” e digitamos $-x + 3y = 6$. Observamos que assim que se é realizado esse processo as duas equações são nomeadas de eq1 e eq2 e são representadas por retas no plano cartesiano, como mostra a figura abaixo:

Figura 7- Representação das retas

Fonte: A autora, 2024

3º Passo: Determinar o ponto de intersecção dessas retas, se caso houver, assim no campo de entrada marcaremos a opção “Intersecção de Dois Objetos” e selecionaremos as duas retas. Mediante a esse processo, aparecerá o nome do ponto A, vejamos:

Figura 8 - Representação da solução do sistema 2x2 graficamente

Fonte: A autora, 2024

O sistema apresenta como solução os pontos A (1,5; 2,5). A interpretação geométrica das retas é que são concorrentes, ou seja, elas se cruzam em um único ponto, fazendo com que esse sistema seja classificado como SPD (Sistema Possível e Determinado), apresentando apenas uma única solução.

3.4.2 Sistemas Lineares 3x3 no GeoGebra

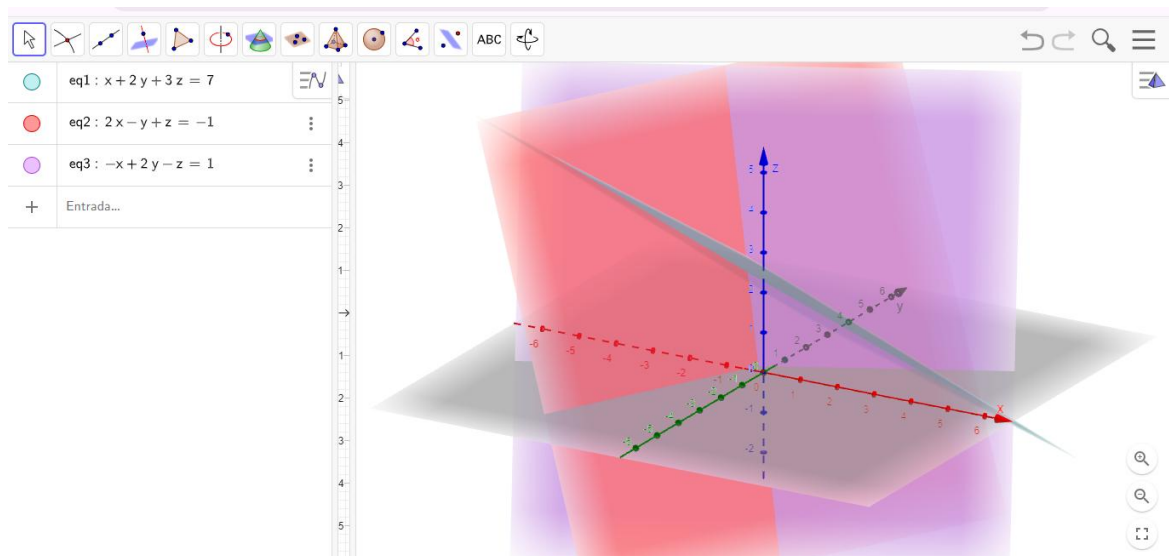
Em relação ao sistema linear 2x2 cada equação representa os pontos de uma reta no plano. No sistema linear 3x3, cada equação representa os pontos de um plano no espaço. Segue

o sistema na qual iremos representá-lo graficamente:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção “janela de visualização 3d” no canto direito da tela e o plano em 3d será apresentado.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos em ordem as equações $x + 2y + 3z = 7$, $2x - y + z = -1$, $-x + 2y - z = 1$. Observamos que assim que se é realizado esse processo as três equações são nomeadas de eq1, eq2 e eq3, como na figura abaixo:

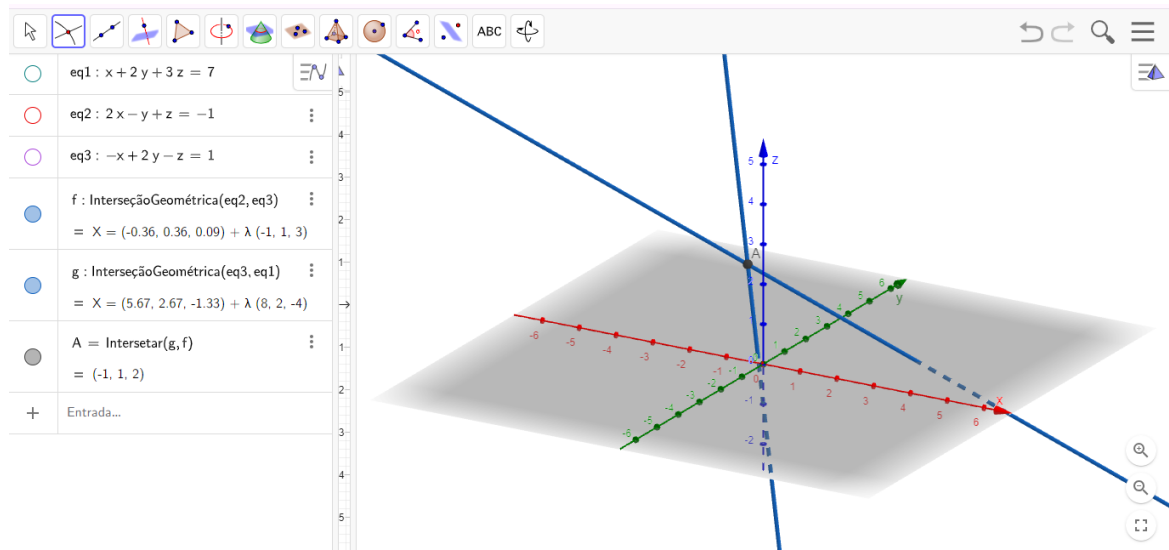
Figura 9 - Representação do sistema 3x3 graficamente



Fonte: A autora, 2024

3º Passo: O seguinte passo será clicar na aba que indica a “intersecção de duas superfícies”, sendo elas as retas e assim e marcaremos os pares das equações, por fim quando aparecer o esboço das retas clicaremos em “intersecção entre os pontos”, marcando as duas retas e chegando à solução do sistema linear, sendo ele $(-1, 1, 2)$, como mostra a figura abaixo:

Figura 10: Representação da solução do sistema 3x3 graficamente



Fonte: Os autores, 2024

Logo a terna ordenada desse sistema é $(-1, 1, 2)$.

A visualização gráfica, quando utilizamos o GeoGebra, se torna mais interativa, pois podemos acessar recursos que explicam claramente uma interpretação algébrica dinâmica e aprimorada, fazendo que o estudante verifique e análise a resolução, pois além da visualização do plano, podemos estudar as equações e as retas que se formam no plano, além de termos um acesso direto aos pontos que são formados.

4 METODOLOGIA

A pesquisa aqui descrita abordou em sua estrutura uma metodologia de cunho qualitativo, onde interagimos com o campo de estudo, desse modo, os aspectos estudados se complementaram entre si, possibilitando um melhor aporte para compreender os fenômenos didáticos a serem analisados. Segundo Almouloud e Henriques (2022) a pesquisa qualitativa considera a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, ela é descritiva, seu foco principal é o processo.

Em relação aos objetivos, caracterizamos como exploratória. Quanto aos procedimentos, ressaltamos que a pesquisa é um estudo de caso, já que este tipo de procedimento “visa conhecer em profundidade o como e o porquê de uma determinada situação que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico” (Fonseca, 2002, p.33). A metodologia adotada em nosso trabalho buscou responder a indagação presente na questão de pesquisa, na qual culminou no objetivo geral, sendo este: Analisar a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) as praxeologias utilizadas pelos alunos na realização da passagem do campo algébrico para o geométrico, utilizando do objeto de estudo matemático sistemas de equações lineares com a exploração do software GeoGebra.

4.1 Local e População de Estudo

O local de estudo foi uma escola pública estadual do município de Abaiara, no estado do Ceará, com estudantes do 3º ano do ensino médio. A pesquisa está direcionada em sua essência a analisar à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) as praxeologias utilizadas pelos alunos na realização da passagem do campo algébrico para o geométrico, utilizando do objeto de estudo matemático sistema de equações lineares com a utilização do software GeoGebra.

Destacamos aqui, que os estudantes escolhidos para estarem participando da pesquisa foram do terceiro ano do ensino médio da disciplina eletiva intitulada de “cultura digital” realizada no laboratório de informática da escola, no turno da manhã.

4.2 Coleta e critérios de Análise de dados

Aplicamos a sequência didática em 6 encontros distribuídos em aulas, com durações de 50 minutos cada encontro. Os elementos utilizados para a produção de dados foram fotos e gravação de áudios e vídeos, análise do livro didático e da sequência desenvolvida. Para isso,

analisamos as praxeologias desenvolvidas pelos alunos de maneira individual, bem como coletivamente. Observamos também a complexidade crescente das organizações matemáticas, verificando quais conhecimentos novos (ou não) foram desenvolvidos durante o percurso da construção do saber do aluno.

O nosso objetivo geral, deriva-se de três objetivos específicos que geram subsídios necessários para os critérios que seguiremos em nossas análises de dados. O primeiro foi realizar uma análise a priori de estudos, bem como do livro didático para identificar as praxeologias presentes no estudo de sistemas de equações lineares. O segundo desenvolver uma sequência didática com estudantes do ensino médio com base nas análises a priori, utilizando o software GeoGebra e o terceiro analisar as praxeologias desenvolvidas pelos estudantes na passagem do campo algébrico para o geométrico a luz da TAD. Desse modo, a concretização desses três objetivos, está vinculada a realização das etapas que foram desenvolvidas no trabalho e serão discutidas mais adiantes.

Embora abordemos de forma sucinta nesse tópico algumas das justificativas acerca da temática escolhida, ao decorrer da pesquisa traremos de forma mais detalhada na introdução e nos capítulos específicos o porquê da escolha da Teoria Antropológica do Didático (as praxeologias e organizações matemática) para ser a base do campo teórico e metodológico da pesquisa, além do objeto do saber em jogo, sendo estes sistemas de equações lineares e a utilização do GeoGebra.

Ressaltando os critérios estabelecidos para que os objetivos traçados na pesquisa fossem cumpridos, nos respaldamos nos elementos que foram destacados na fundamentação teórica, focando nas praxeologias, observando as práticas desenvolvidas pelos estudantes, que foram identificadas através de gravações de tela do computador, registros de voz e resoluções manuais.

Os critérios, foram construídos a partir de uma análise a priori do livro didático utilizado pela turma participante da pesquisa, com finalidade de observar como apresentava-se as tarefas e técnicas nas atividades e exemplos no ensino de sistemas de equações lineares. Realizamos um mapeamento de pesquisas que envolvessem os três elementos base na nossa pesquisa, sendo eles: TAD, Sistemas de equações lineares e GeoGebra.

Nessa busca, não foi encontrado nenhuma pesquisa que apresentasse os três eixos norteadores no ensino médio. A dissertação de Andrade (2018) foi a única que trouxe aspectos semelhantes com que estávamos propondo através da verificação da passagem do campo algébrico para o geométrico. Sendo assim, na construção dos momentos que foram

desenvolvidos com os estudantes procuramos trazer novos recursos que possibilitaram apontar propostas que trouxeram aos estudantes a compreensão através de novo recursos

Em relação a análise do livro didático, as tarefas seguem praticamente um padrão de utilização de técnicas ou o estudante irá desenvolver o método da substituição ou da adição propostas no livro, para chegar ao conjunto solução esperado na tarefa. Essa verificação nos deu subsídios para a construção da nossa sequência, focando em elementos que abordassem com mais precisão a utilização desse software já que nosso foco principal foi a análise da passagem do campo algébrico para o geométrico.

Seguindo o modelo de critérios de análises desenvolvido na tese de Almeida (2016), apresentaremos no quadro abaixo um resumo dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria que poderá ser desenvolvida pelo estudante ao longo da resolução da sequência.

Quadro 4: Síntese de Critérios de Análises

Tipos de Tarefas	Técnicas		Tecnologias
	Principal	Auxiliar	
T_1	t_{RGP}/t_{MS}	t_{CSDT}	θ_{RPG}
T_2	t_{RNFM}/t_{MS}	t_{EVTI}	θ_{SL3X}
T_3	t_{EM}	t_{MERN}	θ_{ESL}
T_4	t_{MA}	t_{RC}	θ_{DM}

Fonte: A autora, 2025

Observamos que as tarefas expostas apresentam o ensino dos sistemas de equações lineares, como mostraremos abaixo:

- T_1 : Interpretar geometricamente cada sistema utilizando o GeoGebra.
- T_2 : Representação do Sistema na sua forma matriarcal
- T_3 : Resolução dos Sistemas Escalonados
- T_4 : Calcular a diferença entre os números de quartos triplos e o número de quartos duplos

Apresentamos no quadro as técnicas principais desenvolvidas para cada tipo de tarefa:

T_1 , T_2 , T_3 e T_4 :

- $T_1 : t_{RGP}/t_{MS}$ = Representação do Gráfico no Plano e Método da Substituição
- $T_2 : t_{RNFM}/t_{MS}$ = Sistema na forma Matriarcal e Método da Substituição ou Adição
- $T_3 : t_{EM}$: Escalonar a matriz

- $T_4 : t_{MA}$: Método da Adição

Abaixo as técnicas auxiliares desenvolvidas para cada tipo de tarefa: T_1 , T_2 , T_3 e T_4 :

- $T_1 : t_{CSDT}$ = Classificação do Sistema em Determinado ou Indeterminado
- $T_2 : t_{EVTI}$ = Encontrar o Vetor dos Termos Independentes, através da resolução
- $T_3 : t_{MERN}$ = Multiplicação da Equação por um número real na nulo
- $T_4 : t_{RC}$: Regra de Cramer

Por fim, as tecnologias que buscam em sua essência justificar as tecnologias:

- $T_1 : t_{CS} : \theta_{RPG}$: Representação gráfica no plano
- $T_2 : t_{RNFM} / t_{MS} : \theta_{SL3X}$: Sistemas Lineares 3X3
- $T_3 : t_{EM} / t_{MERN} : \theta_{ESL}$: Escalonização de Sistemas Lineares
- $T_4 : t_{MERN} / t_{RC} : \theta_{DM}$: Determinantes de Matrizes

Ao remeter-se a passagem do campo algébrico para o geométrico são poucos os exercícios que apontam tal procedimento, destacando apenas os sistemas 2x2. Quando se trata de sistemas lineares de ordem diferentes das acima mencionada, os autores não realizam as conversões dos registros nem mesmo apresenta a preocupação em tal possibilidade. Nesse aspecto, tentaremos com a aplicação da sequência desenvolver um complemento necessário para além do livro didático que se apresenta de forma escassa.

No tópico da análise do livro didático destacamos as demais questões que são apresentadas acerca desse conteúdo. Nos baseamos assim nas organizações didáticas (os momentos de aplicações) e organizações matemáticas (tipos de tarefa, técnicas e tecnologias) que são apresentadas no tópico sobre a Teoria Antropológica do Didático que respaldam nossos momentos didáticos que foram desenvolvidos. Esperamos que ao final da aplicação da proposta aqui apresentada possamos atingir os objetivos esperados.

4.3 Etapas da pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida através de momentos, nas quais o primeiro deles foi a verificação dos conhecimentos acerca do conteúdo de sistemas de equações lineares e análise de como este objeto de conhecimento apresentava-se no livro didático utilizado pelos estudantes do ensino médio. Realizamos a análise praxeológica do capítulo que o nosso objeto matemático se encontrava. Levamos em consideração as tarefas expostas e as técnicas que os estudantes

iriam desenvolver no processo de resolução. Além disso, foi realizado um mapeamento de pesquisas que abordassem a perspectiva da temática estudada para que pudéssemos desenvolver a justificativa do nosso trabalho.

O segundo momento foi a construção da sequência didática, na qual propomos um modelo apresentando as justificativas das escolhas, bem como a previsão dos possíveis comportamentos dos estudantes durante a aplicação. Ela foi alicerçada baseando-se na Base Comum Curricular (BNCC), na qual analisamos no início da pesquisa para o desenvolvimento dos passos seguintes. Assim a BNCC serviu como apoio, pois não focamos apenas na resolução dos sistemas por métodos algébricos, mas também geométrico através da construção gráfica no GeoGebra. No que tange ao desenvolvimento algébrico, a sequência desta pesquisa utilizou meios diversificados de resolução, visto que analisamos as praxeologias desenvolvidas.

No terceiro momento foi desenvolvida a sequência elaborada anteriormente, este momento foi dividido em seis encontros com a turma, sendo eles: apresentação e familiarização, momento de conhecimento sobre o GeoGebra, lembrando o conceito de sistemas de equações lineares e pôr fim a aplicação da sequência.

No último momento desse trabalho realizamos as análises dos resultados obtidos durante a experimentação, sob um olhar da TAD o desenvolvimento da sequência didática, focando nas praxeologias e o crescimento da aprendizagem dos estudantes em relação ao seu desenvolvimento intelectual e autonomia.

4.4 Metodologia de Análise

Através das respostas obtidas com a aplicação da sequência didática proposta, iremos analisar a luz da Teoria Antropológica do Didático as praxeologias desenvolvidas pelos estudantes na passagem do campo algébrico para o geométrico. Além disso, analisaremos as respostas desenvolvidas pelos estudantes e os níveis de organização das complexidades crescentes da organização matemática verificando a evolução das técnicas e suas repetições. Outro ponto será a desenvoltura dos estudantes ao utilizarem um recurso tecnológico na sua prática escolar, bem como a sua apropriação de um saber matemático transposto ao uso do GeoGebra, passando de uma representação algébrica para geométrica.

Não identificaremos os estudantes durante as análises, utilizaremos assim codinome representados pelas letras maiúsculas do alfabeto (estudante A, B C ...) pois relataremos também as possíveis dificuldades apresentadas, bem como o passo a passo que foi

desenvolvido, e quais caminhos foram percorridos nas técnicas desenvolvidas para a resolução das tarefas propostas.

5. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Nesta seção abordaremos uma análise prévia do livro didático, verificando o capítulo que apresenta o conteúdo de sistemas de equações lineares, identificando assim as praxeologias presentes na proposta deste conteúdo em relação às tarefas, técnicas tecnológicas e teorias. Nesta perspectiva, discutiremos também a importância de o livro propor em suas atividades tarefas que apresentem a passagem do campo algébrico, para o geométrico. Além disso, é necessário observar os diferentes pontos de vistas que o conteúdo apresenta, como por exemplo a linguagem natural, algébrica e geométrica.

Ainda hoje, “o livro didático ocupa um papel central dentro da escola, mesmo coexistindo com inúmeros outros recursos tecnológicos, ele é um dos principais materiais do ensino e da aprendizagem no contexto escolar” (Andrade, 2018, p.50). O livro didático é um importante aliado tanto do professor, como também do aluno, o principal objetivo desta ferramenta é auxiliar na compreensão de conteúdos e resolução de atividades. É nesse sentido que Andrade (2018) aponta que o livro deve trazer articulações consideradas não lineares entre os conteúdos na qual aborda, para que não ocorra um tratamento isolado e desconectado dos demais conteúdos, assim ambos devem caminhar em sintonia.

Com a reforma no novo ensino médio, ocorreu mudanças na estruturação dos livros, sendo assim as unidades temáticas foram divididas em livros separados. O livro na qual realizamos a análise é do terceiro ano do ensino médio, sendo ele do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), com referência: BORJONO, José; JÚNIOR, José; SOUSA, Paulo. **Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**. 1ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

Ele está sendo utilizado na escola, na qual foi realizada o desenvolvimento da pesquisa. Assim percebemos que na composição o livro apresenta um total de 160 páginas, dividindo-se em quatro capítulos sendo eles: Matrizes e sistemas lineares; Porcentagem e Juros; Matemática financeira e por fim Grandezas. A sessão que contempla o objeto matemático da pesquisa é o primeiro capítulo retratando as matrizes e sistemas lineares.

Conforme mostra o sumário abaixo, da página 12 a 32 podemos notar a exposição do conteúdo matrizes, abordando as diversificadas temáticas do conteúdo em questão. Já das páginas 34 a 61 é destinada a explicação e exemplificações sobre o conteúdo de sistemas lineares.

Figura 11- Sumário

SUMÁRIO	
CAPÍTULO 1	Matrizes e sistemas lineares 10
» Introdução	 12
» Matrizes	 12
» Matriz quadrada	 14
» Igualdade de matrizes	 18
» Adição e subtração de matrizes	 18
Matriz oposta	 20
Propriedades da adição de matrizes	 20
» Multiplicação de um número real por uma matriz	 22
Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz	 23
» Multiplicação de matrizes	 23
Propriedades da multiplicação de matrizes	 25
» Matriz inversa	 26
» Equações matriciais	 26
Conexões - Mobilidade urbana e matrizes	 32
» Sistemas lineares	 34
Equação linear	 34
» Sistemas lineares 2×2	 37
Interpretação geométrica e classificação	 39
» Sistemas lineares $m \times n$	 44
Sistemas equivalentes	 44
» Matrizes associadas a um sistema linear	 45
» Sistemas lineares escalonados	 46
Classificação de sistemas lineares escalonados	 49
Escalonamento de sistemas lineares	 51
História da Matemática	 55
- A notação de Leibniz	 55
Explorando a tecnologia	 56
- Utilizando o Matrix calculator	 56
Atividades complementares	 60
Para refletir	 61
CAPÍTULO 2	Porcentagem e juros 62
» Introdução	 62
» Porcentagem	 62
Aumentos e descontos	 62
Lucro e prejuízo	 62
» Juros	 62
Juro simples	 62
Juro composto	 62
» Juros e funções	 62
Juro simples e função afim	 62
Juro composto e função exponencial	 62
Explorando a tecnologia	 62
- Planilha eletrônica e o cálculo de juros	 62
Conexões	 64
- Os juros do cartão de crédito	 64
Atividades complementares	 67
Para refletir	 68

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

A parte inicial retrata a introdução do conteúdo de matrizes, contextualizando com situações problemas ligados a alimentação, para assim propor a construção da matriz. Essa estratégia de ligação com o cotidiano, faz-se necessário para que o estudante compreenda melhor o conteúdo. Observamos logo após, a definição de matriz quadrada e sua representação, com exemplos e tarefas resolvidas que remetem a utilização das técnicas apresentadas na explicação, fechando esse tópico apresenta-se uma atividade. Logo após os autores continuam a explicação sobre matrizes, remetendo ao conceito de igualdade, operações e propriedades das matrizes baseadas nessas operações, apresentando ao final um novo bloco de atividades resolvidas e propostas, assim o livro segue um padrão de tarefas. Em concordância com Bittar (2017) o livro didático pode ser um importante aliado do professor, pois pode proporcionar uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, principalmente no que tange ao conteúdo exposto e às metodologias que são utilizadas. ”

O tópico sobre o conteúdo de Sistemas Lineares é apresentado pelos autores no início por uma situação problema do cotidiano, para facilitar a compreensão dos estudantes acerca do que está sendo exposto. A contextualização do problema aborda o transporte coletivo na qual é uma realidade que os estudantes estão inseridos, para relembrar o que são as equações e incógnitas (valores desconhecidos) através da formulação de situações problemas, relacionando as informações que serão apresentadas, como mostra a imagem a seguir:

Figura 12: Problematização e definição de uma equação linear

Sistemas lineares

Você, provavelmente, estudou sistemas de equações no Ensino Fundamental. Vamos agora dar sequência a esse estudo, explorando também sistemas com mais de duas equações e envolvendo mais de duas incógnitas. Quando possível, vamos estabelecer relações com problemas do dia a dia, explorando diferentes maneiras de resolução, inclusive utilizando o trabalho com matrizes.

Equação linear

Acompanhe a situação a seguir.

Andréa percebeu que o saldo de seu cartão escolar de transporte era de R\$ 120,00. Na cidade onde mora, os estudantes pagam R\$ 3,00 na viagem de ônibus, R\$ 2,50 na de metrô, e a viagem de trem custa R\$ 2,00. Com esse saldo do cartão, quantas viagens ela pode fazer utilizando esses meios de transporte?

Uma situação como essa pode ser traduzida para a linguagem matemática. Para isso, podemos utilizar **incógnitas** (valores desconhecidos), representadas por meio de letras, relacionando-as com as informações apresentadas na situação analisada.

Considerando x , y e z , respectivamente, o número de viagens de ônibus, de metrô e de trem, podemos escrever a seguinte sentença: $3,00 \cdot x + 2,50 \cdot y + 2,00 \cdot z = 120,00$ ou $3x + 2,5y + 2z = 120$

Toda equação que pode ser escrita na forma geral $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são incógnitas, é denominada **equação linear**.

Na equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$:

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais chamados **coeficientes** (ou **parâmetros**);
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as **incógnitas**;
- b é o termo (ou parâmetro) independente.

■ O sistema de transporte de alguns municípios brasileiros utiliza cartões nos quais é possível carregar o crédito das viagens. O valor de cada viagem realizada é debitado de acordo com o uso.



Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Para a exposição desta tarefa, notamos a presença de uma organização pontual na problematização, Gascón (2003, p.16) revela que “as organizações matemáticas ou praxeologias mais elementares que se chamam pontuais estão constituídas ao redor de uma determinada instituição e considerada como um único tipo de tarefa.”

Os autores abordam na sequência os sistemas lineares 2x2 novamente trazendo uma situação cotidiana, fazendo uma alusão a feira onde estava sendo vendidos tapiocas e sucos, definindo o preço da tapioca pela incógnita x e o preço do suco por y . Logo o livro contextualiza uma situação problema, trazendo uma tarefa que aborda a montagem de um sistema de equações, formado por duas equações lineares com duas incógnitas.

Figura 13 - Sistemas Lineares 2 X 2

Sistemas lineares 2 × 2

Em uma feira, as tapiocas têm preço único e os copos de suco também. Uma cliente pagou R\$ 31,50 por 5 tapiocas e 3 copos de suco, e outro cliente pagou R\$ 19,50 por 3 tapiocas e 2 copos de suco.

Quais são os preços da tapioca e do copo de suco?

Para representar essa situação, identificamos como x o preço de cada tapioca e como y o preço de cada copo de suco e montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31,50 \\ 3x + 2y = 19,50 \end{cases}$$

Esse tipo de sistema de equações, que é formado por duas equações lineares com duas incógnitas, você provavelmente já estudou nos anos finais do Ensino Fundamental. Vamos retomar esse tipo de sistema e as maneiras de resolvê-lo.



■ A tapioca é um alimento de origem indígena, feita de fécula extraída da mandioca, e está cada vez mais presente na alimentação dos brasileiros em todas as

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Para a resolução da tarefa os autores dispõem da utilização da técnica que se utiliza o método da adição, conforme mostra os passos de resolução desta técnica na figura 14:

Figura 14: Método da Adição

Para determinar o valor de x e o de y que satisfazem as duas equações desse sistema, vamos aplicar o método da adição, que consiste em adicionar membro a membro as equações com o objetivo de obter uma equação equivalente, em que o coeficiente de uma das incógnitas é zero.

Inicialmente multiplicamos ambas as equações por números específicos, que nos permitam em um segundo momento adicionar, membro a membro, as equações, de modo a anular o coeficiente de uma das incógnitas.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 3y = 31,50 & \xrightarrow{(-3)} & 15x + 9y = 94,50 \\ 3x + 2y = 19,50 & \xrightarrow{(-5)} & -15x - 10y = -97,50 \\ & & -y = -3,00 \\ & & y = 3,00 \end{array}$$

Substituindo y por 3,00 na primeira equação, determinamos o valor de x .

$$5x + 3 \cdot 3,00 = 31,50 \Rightarrow 5x + 9,00 = 31,50$$

Logo, $x = 4,50$.

Assim, a tapioca custa R\$ 4,50 e o suco custa R\$ 3,00.

Observe que os valores $x = 4,50$ e $y = 3,00$ satisfazem às duas equações do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 5 \cdot (4,50) + 3 \cdot (3,00) = 22,50 + 9,00 = 31,50 \\ 3x + 2y = 3 \cdot (4,50) + 2 \cdot (3,00) = 13,50 + 6,00 = 19,50 \end{cases}$$

Portanto, o par ordenado $(4,50; 3,00)$ é a solução do sistema, ou seja, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(4,50; 3,00)\}$.

regiões do país.

PENSE E RESPONDA

- Justifique por que a primeira equação foi multiplicada por 3 e a segunda equação por -5 .
- Se quisermos resolver o sistema anulando o coeficiente da incógnita y ao adicionar as duas equações, por quais números devemos multiplicar, respectivamente, a primeira e a segunda equações? Compare a sua resposta com a de um colega.

37

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

A tarefa apresentada é dada por “Definir o preço específico da tapioca e do suco” logo, para resolver essa determinada tarefa o autor ampara-se na seguinte técnica: “método da adição” como mostra a figura 39, em que consiste em adicionar membro a membro as equações com o objetivo de obter uma equação equivalente, em que o coeficiente em uma dessas incógnitas venha ser zero. O primeiro passo de resolução é a montagem do sistema através das informações

dadas, para aplicar a técnica da adição. A TAD, mais especificamente, a praxeologia ou a organização praxeológica - um dos elementos conceituais da TAD - defende a existência de justificação e explicação de qualquer que seja a ação, o fazer humano (Mendes, 2015, p. 200).

Outra técnica que apresenta-se para a resolução dos sistemas de equações e que o autor traz logo em seguida é a técnica da substituição, intitulada, de “método da substituição” que consiste em expressar uma incógnita em função da outra. Para a utilização desta técnica, apresenta-se a tarefa abaixo:

Figura 15 - Técnica da Substituição

Sistemas lineares 2×2

Em uma feira, as tapiocas têm preço único e os copos de suco também. Uma cliente pagou R\$ 31,50 por 5 tapiocas e 3 copos de suco, e outro cliente pagou R\$ 19,50 por 3 tapiocas e 2 copos de suco.

Quais são os preços da tapioca e do copo de suco?

Para representar essa situação, identificamos como x o preço de cada tapioca e como y o preço de cada copo de suco e montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31,50 \\ 3x + 2y = 19,50 \end{cases}$$

Esse tipo de sistema de equações, que é formado por duas equações lineares com duas incógnitas, você provavelmente já estudou nos anos finais do Ensino Fundamental. Vamos retomar esse tipo de sistema e as maneiras de resolvê-lo.

Para determinar o valor de x e o de y que satisfazem as duas equações desse sistema, vamos aplicar o método da adição, que consiste em adicionar membro a membro as equações com o objetivo de obter uma equação equivalente, em que o coeficiente de uma das incógnitas é zero.

Inicialmente multiplicamos ambas as equações por números específicos, que nos permitam em um segundo momento adicionar, membro a membro, as equações, de modo a anular o coeficiente de uma das incógnitas.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 5x + 3y = 31,50 \\ 3x + 2y = 19,50 \end{cases} & \xrightarrow{\begin{matrix} -(3) \\ -(-5) \end{matrix}} & \begin{cases} 15x + 9y = 94,50 \\ -15x - 10y = -97,50 \end{cases} \\ & & \begin{array}{r} -y = -3,00 \\ y = 3,00 \end{array} \end{array}$$

Substituindo y por 3,00 na primeira equação, determinamos o valor de x .

$$5x + 3 \cdot 3,00 = 31,50 \Rightarrow 5x + 9,00 = 31,50$$

Logo, $x = 4,50$.

Assim, a tapioca custa R\$ 4,50 e o suco custa R\$ 3,00.

Observe que os valores $x = 4,50$ e $y = 3,00$ satisfazem às duas equações do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 5 \cdot (4,50) + 3 \cdot (3,00) = 22,50 + 9,00 = 31,50 \\ 3x + 2y = 3 \cdot (4,50) + 2 \cdot (3,00) = 13,50 + 6,00 = 19,50 \end{cases}$$

Portanto, o par ordenado $(4,50; 3,00)$ é a solução do sistema, ou seja, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(4,50; 3,00)\}$.



■ A tapioca é um alimento de origem indígena, feita de fécula extraída da mandioca, e está cada vez mais presente na alimentação dos brasileiros em todas as regiões do país.

PENSE E RESPONDA

- Justifique por que a primeira equação foi multiplicada por 3 e a segunda equação por -5 .
- Se quisermos resolver o sistema anulando o coeficiente da incógnita y ao adicionar as duas equações, por quais números devemos multiplicar, respectivamente, a primeira e a segunda equações? Compare a sua resposta com a de um colega.

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Para o desenvolvimento desta técnica o autor define a tarefa, como mostra a figura 15, demonstrando alguns passos de resolução necessária, como primeiramente isolar a incógnita x para depois substituir a expressão na outra equação, desenvolvendo o processo para chegar ao conjunto solução do sistema. Esse passo a passo apresentado, pode facilitar a compreensão do estudante quanto este estiver realizando a leitura do livro. Por conseguinte, adentramos ao tópico denominado por “Interpretação geométrica e classificação”, amparando-se na interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares nas incógnitas x e y . Os autores expõe três exemplos resolvidos como tarefas, apresentando os sistemas, na qual o item “a” traz como resolução um sistema possível e determinado (SPD), pois apresenta uma única

solução, logo as retas apresentam um ponto de intersecção, representando assim a solução do sistema.

Figura 16 - Interpretação Geométrica e classificação

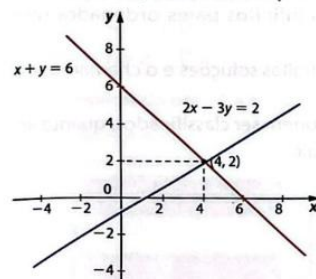
Interpretação geométrica e classificação

A interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares nas incógnitas x e y pode ser feita por meio da representação gráfica das retas correspondentes a essas equações. Caso haja ponto de intersecção entre essas retas, as coordenadas desses pontos representam a solução do sistema.

Observe os exemplos a seguir.

a) Considere o sistema linear
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

Cada equação linear desse sistema pode ser reescrita na forma $y = ax + b$, que pode ser associada à lei de formação de uma função afim. Esboçando em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema, obtemos a representação gráfica a seguir.



Podemos observar que essas retas são **concorrentes**, ou seja, elas se cruzam em um único ponto. Isso indica que há um único par ordenado, nesse caso $(4, 2)$, que é a solução do sistema.

PENSE E RESPONDA

Substitua os números do par ordenado $(4, 2)$ nas equações do sistema do exemplo a e verifique que é uma solução das duas equações.

Nesse exemplo, temos um **sistema possível e determinado (SPD)** porque esse sistema possui **uma** única solução.

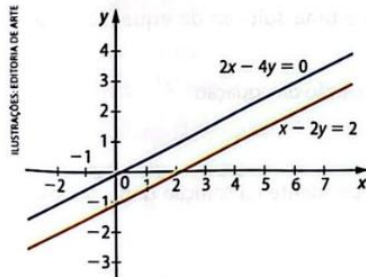
Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Já no exemplo “b” a solução é um sistema impossível (SI), fazendo com as retas sejam paralelas. Assim para compreender esta leitura é necessário que o aluno tenha em mente as definições de retas, para assim fazer a compreensão de maneira correta. O passo a passo para o esboço gráfico não é apresentado no livro, assim o professor deve se atentar na explicação do conteúdo para que o aluno compreenda como realizar essa passagem. Vejamos na figura 17 o esboço gráfico do sistema:

Figura 17- Sistema impossível (SI)

b) Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$.

Utilizando raciocínio análogo ao do exemplo anterior, representamos em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema.



Podemos observar que essas retas são **paralelas**, ou seja, elas não se cruzam. Isso indica que **não existe** um par ordenado que seja solução do sistema.

Nesse exemplo, temos um sistema que não possui solução e, por isso, dizemos que é um **sistema impossível (SI)**.

39

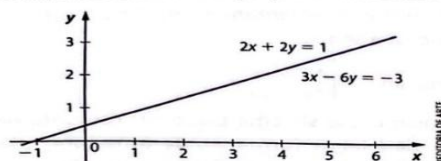
Fonte: (Borjono, Júnior e Sousa, 2020, p.39)

No item “c” a resolução do sistema ocasionou um sistema possível e indeterminado (SPI), já os esboços das retas foram coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção. Para finalizar o tópico os autores trazem um esquema resumindo as definições dos sistemas e por fim apresentam algumas atividades resolvidas e um bloco de atividades para serem resolvidas pelos alunos.

Figura 18: Sistema possível e Indeterminado (SPI)

c) Considere o sistema linear $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$.

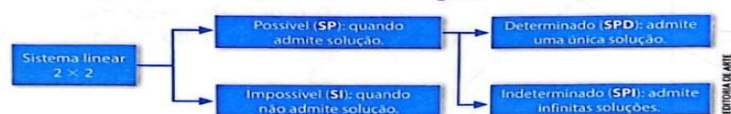
Utilizando raciocínio análogo, representamos em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema.



Podemos observar que essas retas são **coincidentes**, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção. Isso indica que há infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Nesse exemplo, temos um sistema que tem infinitas soluções e o chamamos de **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

De maneira geral, os sistemas lineares 2×2 podem ser classificados, quanto ao número de soluções, como esquematizado a seguir.



Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

As apresentações em relação a temática exposta foram retratadas de forma clara e sucinta, porém quando se é apresentada o tópico sobre o esboço gráfico percebe-se que os autores trazem uma limitação da técnica explorada o que consequentemente dificulta a resolução desses problemas. Os exemplos são apresentados de modo geral, ou seja, não trazem o processo que é utilizado até chegar ao gráfico, dificultando assim a resolução do exercício, pois apresentam uma visão limitada do conceito envolvido. Ao tentar exemplificar esses conceitos os autores retratam mínimas explanações, como por exemplo calcular o passo a passo de determinada questão que é apresentada, o que impossibilita o entendimento já que é retratada poucas demonstrações.

Percebemos que nas atividades resolvidas nenhuma apresentava questões que envolvessem a passagem do campo algébrico para o gráfico, as propostas ao encontro das seguintes questões:

Figura 19 - Tipos de Tarefas (T1) e Subtipos

ATIVIDADES NÃO RECREIA NO LIVRO

30. Considerando x , y e z as incógnitas, qual(is) das seguintes equações são lineares?

- $4x - y + \frac{z}{2} = 0$
- $5x + 2yz = 0$
- $2x + 3y - z^2 = 0$
- $xyz = 1$

31. Dos pares ordenados $(0, -3)$, $(1, 2)$, $(4, -\frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$, quais são soluções da equação $2x - 3y = 9$?

32. Considere a equação $4x - 2y + z = 8$.

- Verifique se a terna ordenada $(0, -3, 2)$ é uma solução dessa equação.
- Obtenha uma solução dessa equação cujo valor de z seja zero.

33. A equação linear $0x + 0y = 4$ possui solução? Justifique.

34. Determine m , de modo que $(-1, 2, -3)$ seja solução da equação linear: $2a - 4b + mc = 0$.

35. Determine os valores de m para que a equação $x - 4y + z = m^2 - 4$ seja homogênea.

36. Sendo a um número real qualquer, mostre que $(a, 6 - 2a)$ é solução da equação $2x + y = 6$.

37. Verifique se $(-1, 2)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} a - 4b = -9 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

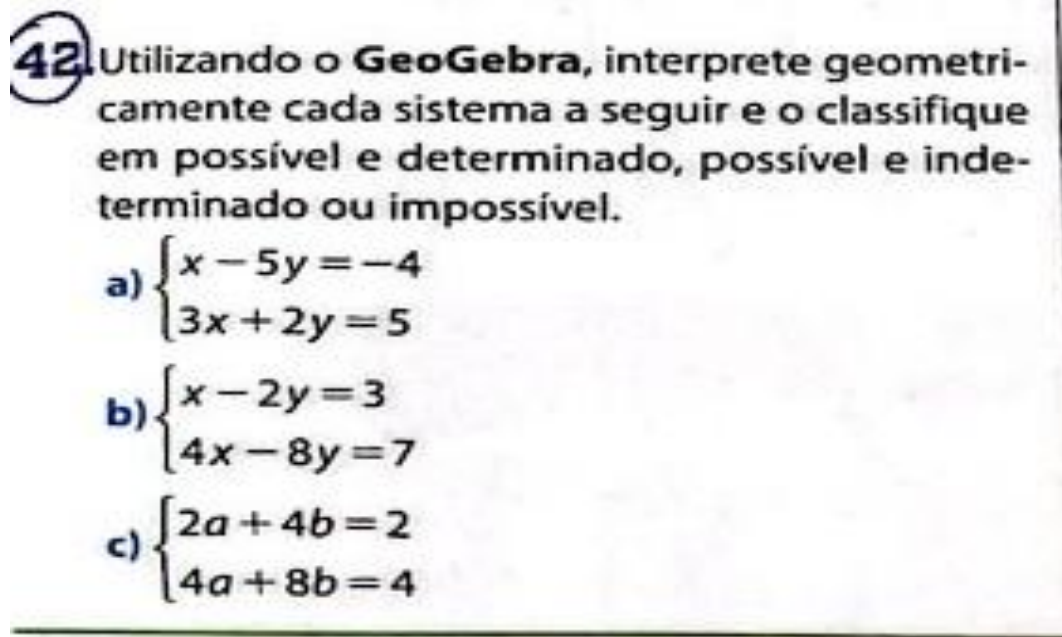
38. Determine o conjunto solução do sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases}$$

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

As tarefas seguem praticamente um padrão de utilização de técnicas ou o estudante irá desenvolver o método da substituição ou da adição proposto no livro, para chegar ao conjunto solução esperado na tarefa. Notamos uma quebra de padrão na questão 42, sendo esta a única que abordava o esboço gráfico, solicitando o uso do GeoGebra, como podem os notar na figura abaixo:

Figura 20 - Tipo de tarefa (T1) e Subtipos



Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Para a resolução é necessário que o estudante perceba a presença de duas tarefas no enunciado, pois é solicitado que além de interpretar geometricamente cada sistema, deve-se definir ainda a classificação de cada um, sendo ele determinado, possível, indeterminado ou impossível. Notamos então a presença de uma organização local, que segundo Chevallard (1999) é formada pela agregação de várias praxeologias pontuais, ou seja, várias tarefas e técnicas em torno de uma tecnologia.

No quadro abaixo, é apresentado os tipos de tarefas T1, relacionada ao esboço gráfico:

Quadro 5 - Tipos de tarefas T1 e subtipos

T_1	Interpretar geometricamente cada sistema utilizando o GeoGebra.
$T_{1,1}$	Classificar os sistemas em determinado, possível, indeterminado ou impossível.
$t_{1,1}$	Realizar a representação do gráfico no plano
$t_{1,2}$	Utilizar o método da substituição para encontrar o conjunto solução do sistema.
$t_{1,3}$	Utilizar o método da adição para encontrar o conjunto solução do sistema.
θ	Representação gráfica no plano.
Θ	Teoria Algébrica

Fonte: A autora, 2024

Os tipos de tarefas e seus subtipos abordado pelos autores, levam a construção gráfica dos sistemas, porém os exemplos abordados anteriormente são sucintos e não trazem passo a passo dessa resolução, o que pode levar o estudante a buscar outras fontes de apoio para a realização dos exercícios ou simplesmente não obter êxito na resolução. A existência de um tipo de tarefa em um determinado sistema de ensino, segundo Chevallard (1998) deve estar associada a pelo menos uma técnica de estudo, que é amparada por uma tecnologia que se refere a essa técnica, mesmo que a teoria que ampare essa tecnologia esteja omitida. Já em relação a tecnologia (θ) Barbosa (2017, p.47) ressalta que é “definida como um discurso racional sobre uma técnica (t), cuja primeira finalidade consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em garantir que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo (T).”

Nesta perspectiva, mesmo o livro abordando as discussões preliminares sobre a interpretação gráfica, apenas uma questão solicita essa construção e ampara-se em recursos tecnológicos para ser desenvolvida, percebemos que dentro de um conjunto de 18 questões, que abordavam sobre as soluções dos sistemas dados, classificações e qual conjunto entre outras.

No tópico seguinte os autores apresentam os sistemas lineares $m \times n$ na qual vemos m equações com n incógnitas, abordando assim a perspectiva de sistemas equivalente, ou seja quando os dois admitem a mesma solução. Como exemplo, retrata-se o sistema linear 3×3 com um mesmo conjunto solução, porém não revela as técnicas utilizadas para a realização desta tarefa.

Adiante a temática de “matrizes associadas a um sistema linear” adentrando as exemplificações sobre matriz completa, matriz do coeficiente e sua forma matricial do sistema linear. Posteriormente a explicação, aborda-se as atividades resolvidas, com duas questões uma apresentando a solução do sistema 3×3 através de uma situação problema de uma fábrica de automóveis e a outra para representar o sistema na sua forma matricial, apesar das explicações sobre essa temática serem sucintas. Notamos que nesse tópico, não apresenta discussões da passagem geométrica dos sistemas 3×3 , apenas suas resoluções, como mostra a figura 21:

Figura 21 - Atividades resolvidas

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

13. (UFPE) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1 , A_2 e A_3 , na construção de três tipos de carros C_1 , C_2 e C_3 . A quantidade dos três tipos de aço, em tonelada, usados na confecção dos três tipos de carro está na tabela a seguir.

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1 , 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3 , qual o total de carros construídos dos tipos C_1 , C_2 ou C_3 ?

Resolução
Considerando x , y e z os respectivos números de carros dos tipos C_1 , C_2 e C_3 que foram construídos e utilizando as informações fornecidas, representamos a situação por meio de um sistema linear 3×3 (3 equações e 3 incógnitas), como indicado a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 26 & \text{I} \\ x + y + 2z = 11 & \text{II} \\ 3x + 2y + z = 19 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando x na equação (II), temos:
 $x = 11 - y - 2z$ (IV)

Substituindo x por $11 - y - 2z$ na equação (I) temos:
 $2 \cdot (11 - y - 2z) + 3y + 4z = 26$
 $22 - 2y - 4z + 3y + 4z = 26$
Logo, $y = 4$.

Substituindo x por $11 - y - 2z$ na equação (III), temos:
 $3 \cdot (11 - y - 2z) + 2y + z = 19$
 $33 - 3y - 6z + 2y + z = 19$
 $y + 5z = 14$ (V)

Substituindo y por 4 na equação (V), obtemos z .
 $4 + 5z = 14$
Logo, $z = 2$.

Substituindo y por 4 e z por 2 na equação (II), determinamos x .
 $x = 11 - 4 - 2 \cdot 2$
Logo, $x = 3$.
Portanto, foram construídos 3 carros do tipo C_1 , 4 carros do tipo C_2 e 2 carros do tipo C_3 , um total de 9 carros.

14. Represente o sistema linear a seguir na forma matricial e verifique se a terna ordenada $(1, -2, 0)$ é solução desse sistema.

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

Resolução
Considerando A a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B , a matriz dos termos independentes, podemos escrever a forma matricial do sistema, ou seja, $A \cdot X = B$. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a terna $(1, -2, 0)$ é solução do sistema, podemos substituir os respectivos valores na matriz X , efetuar a multiplicação e posteriormente comparar a matriz obtida com a matriz B .

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot 0 \\ 7 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz resultante é diferente da matriz B , a terna ordenada $(1, -2, 0)$ não é solução do sistema considerado.

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Para resolver a questão 13 os autores respaldam-se na técnica da substituição, escolhendo a equação para isolar a incógnita e substituí-la em uma das equações do sistema. Já na questão 14 a tarefa remete a representação do sistema na sua forma matricial, além de verificar se as ternas ordenadas é a solução desse sistema. Os autores apresentam as técnicas de resolução, primeiramente reescrevendo o sistema na sua forma matricial, sendo este em matriz e logo após desenvolve a técnica de verificação, analisando se a terna ordenada $(1, -2, 0)$ é a resolução do sistema dado. Chega-se à conclusão que como a matriz resultante é diferente da inicial, a terna não é solução.

Por conseguinte, são expostos os exercícios, que também não apresentam em sua proposta o esboço gráfico dos sistemas 3×3 , apenas seguem tarefas semelhantes das que foram vistas durante as exemplificações anteriores. A tarefa 48, como mostra a figura 22 logo abaixo, vai ao encontro com o exemplo resolvido (16), pois solicita ao estudante que verifique se as ternas ordenadas são as soluções do sistema que foi apresentado.

Figura 22 - Tipo de tarefa (T2) e Subtipos

ATIVIDADES 

48. Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Verifique se as ternas ordenadas a seguir são soluções desse sistema.

a) (2, -1, 1)
b) (0, 0, 0)

49. (UECE) Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas: m quartos duplos, p quartos triplos e q suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que, dessas, 40 lotam completamente todas as suítes. A diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é:

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Na questão 49, a tarefa é calcular a diferença entre os números de quartos triplos e o número de quartos duplos, sendo assim para desenvolver essa tarefa, faz-se necessário primeiro montar o sistema, para que assim utilizando umas das técnicas de resolução o estudante chegue ao resultado. Cavalcante (2018 p. 129) ressalta que “a natureza das técnicas nem sempre é algorítmica, ou seja, é plausível pensarmos em técnicas que não seguem um tipo de sequência lógica convencional.” Assim ainda segundo o autor outro ponto também levantado é que em determinados tipos de tarefas, muitas vezes uma técnica só não consegue dá conta do que se é proposto.

O último tópico abordado no capítulo do livro didático é o de Sistemas lineares escalonados sendo este um método que também propõe resolver e classificar sistemas lineares. Assim os autores abordam a definição, trazendo alguns exemplos de sistema linear escalonado e a matriz correspondente. Dentro deste tópico apresenta-se a classificação dos sistemas lineares escalonados, quanto a possível determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) e impossível (SI), retratando exemplos resolvidos. Posteriormente vemos o subtópico intitulado “escalonamento de sistemas lineares” relacionando sempre com o conteúdo de matrizes, finalizando assim 1 questão resolvida e uma atividade final para ser resolvida pelos estudantes.

Figura 23 - Tipo de tarefa (T3) e Subtipos

O exercício 57 está em uma página de atividades de um livro didático. No topo, há uma barra verde com o texto 'ATIVIDADES' e um ícone de uma mão segurando uma caneta com o texto 'NÃO ESCREVA NOLIVRO'. O enunciado do exercício é: '57. Em cada caso, resolva os sistemas escalonados.' Seguem quatro subproblemas:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 70 \\ 4y = 80 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 4 \\ 7z = 21 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 \\ 5b - 3c + d = 3 \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \\ \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 3y - 5z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$$

Fonte: Borjono, Júnior e Sousa, 2020

Percebemos que a principal tarefa é a resolução dos sistemas escalonados, assim a técnica a ser desenvolvida pelos estudantes é escalonar a matriz dada a partir do sistema, efetuando logo após a multiplicação da equação por um número real na nulo, adicionando assim membro a membro, os resultados a outra equação. Essa nova equação não altera o conjunto solução do sistema. Ademais, vemos que algumas das técnicas aqui expostas não se fazem presentes nos exemplos que são abordados, o que necessita que os alunos revisitem algumas técnicas anteriores que foi aprendido em series passadas, ou que o professor se aproprie de outros materiais que complementar o conteúdo visto, assim percebemos a presença das organizações matemáticas.

Tal organização não é senão uma organização praxeológica de natureza matemática: "ela se constitui em torno de um ou de vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que demandam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas" (CHEVALLARD, 1997, p.35).

Para finalizar, os autores trazem um pouco da história da matemática, apresentando a notação de Leibniz, em relação ao início do estudo de um sistema linear. Além disso, aborda um tópico sobre "explorando a tecnologia" trazendo como sugestão o "Matrix Calculator", sendo este um suporte apresentado como uma forma pratica de conferir o escalonamento de uma matriz além disso, também traz as soluções de sistemas de equações lineares. Nesta perspectiva, o capítulo encerra-se com as atividades complementares. Assim o próximo capítulo do livro didático faz-se inferência ao conteúdo de porcentagem e juros.

Quando se trata da passagem da forma algébrica para a geométrica em via gráfica, é possível identificar situações sucintas e específicas dos sistemas lineares 2x2. Quando se trata

de sistemas lineares de ordem diferentes das acima mencionada, os autores não realizam as conversões dos registros nem mesmo apresenta a preocupação em tal possibilidade.

Chevalard (1997) ressalta a importância do professor em realizar através da praxeologia matemática, a análise do livro didático, analisando de maneira precisa os conteúdos, focando nos tipos de tarefas que ele contém, observando assim a técnica a tecnologia e teoria. O professor deve-se questionar-se se as tarefas estão bem identificadas, assim como as técnicas recomendadas para a resolução das tarefas foram efetivamente elaboradas, entre outras análises necessárias.

Com essa análise do capítulo do livro didático percebemos que as praxeologias matemáticas, refere-se à realidade matemática que pode ser apresentada em sala de aula, porém ainda é insuficiente em alguns aspectos complementares no conteúdo de sistemas de equações lineares que são essenciais a sua exposição para uma melhor compreensão dos estudantes. A exemplo disso, a representação gráfica dos sistemas que são pouco apresentados, tanto nas exemplificações como no quesito de tarefas. Esses subsídios nos proporcionam subsídios necessários para a construção da nossa sequência didática que será apresentada no próximo capítulo.

6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática aqui apresentada foi aplicada com os estudantes do 3ºano do ensino médio, focamos em questões que apresentasse a passagem do campo algébrico para o geométrico, com auxílio do GeoGebra, que ficou evidenciado de forma mais clara no último momento da aplicação da sequência, depois que os estudantes se apropriaram dessa ferramenta.

Para coletar os dados das nossas análises, partimos inicialmente para a consolidação da sequência. Assim, trabalhamos nesse momento de maneira direta com os estudantes participantes da pesquisa. Levamos em consideração que os estudantes tivessem um conhecimento prévio acerca do conteúdo. Pensando nisso, destinamos dois momentos para retomar algumas ideias nas quais os alunos apresentam em relação aos sistemas de equações lineares, tanto 2×2 como também 3×3 . Assim apresentaremos esses momentos e seus respectivo plano de aula.

- **1º e 2º Encontro: Conhecendo os Sistemas de Equações Lineares**

Esse momento inicial, foi o primeiro contato na qual tivemos com os estudantes, sendo assim apresentamos a proposta da pesquisa, bem como o que será trabalhado durante os encontros, as análises a priori acontecem então nesta fase, pois poderemos perceber a relação que os alunos possuem com o conteúdo que está em jogo, assim identificaremos seus conhecimentos prévios.

Inicialmente foi necessário adentrar ao conteúdo em si, para que possam relembrar sobre sistemas de equações lineares e seus meios de resolução, logo apresentaremos uma explicação acerca do que está sendo exposto, além de exemplificações nas quais o grupo de estudante poderá participar expondo o que sabem. Nesta perspectiva, apresentaremos o plano de aula seguido nesses dois encontros:

Disciplina: Cultura Digital	Turma: 3ºano do EM	Turno: Integral
Tema: Relembrando sobre os sistemas de equações lineares		
Objetivo Geral: Desenvolver habilidades e compreensão no cálculo de sistemas de equações lineares, interpretando conceitos básicos, bem como suas classificações.		

Objetivos Específicos:

- Reconhecer as diferentes formas de resoluções e classificações de um sistema linear.
- Compreender na prática como desenvolve-se a resolução dos sistemas 2x2 bem como 3x3.

Procedimentos:

Neste momento explanaremos com os alunos sobre os sistemas de equações lineares focando primeiramente na explicação do sistema 2x2 para que assim eles possam relembrar alguns conceitos básicos em relação ao conteúdo, bem como alguns métodos de resolução. Assim abordaremos também, suas classificações, sendo elas: Sistema possível e determinado (SPD); Sistema possível e indeterminado (SPI); Sistema impossível (SI). Além disso, tanto a explicação quanto os exemplos serão expostos em um slide interativo para facilitar a compreensão dos estudantes, assim aplicaremos uma atividade de fixação, na qual servirá para a análise do campo algébrico. Finalizando o primeiro momento, seguiremos para o segundo, onde explanaremos sobre sistemas lineares 3x3, focando em alguns conceitos básicos e métodos de resolução seguindo a mesma dinâmica de apresentação do primeiro momento, com exemplificações e atividade.

Recursos utilizados: Quadro, Slide, Materiais impresso.

Atividade: Relembrando Sistemas de Equações Lineares

1) Resolva os sistemas abaixo:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Resolução:

Um dos métodos a serem utilizados é o da adição, sendo assim:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x - y = 5 & (I) \\ x + y = 7 & (II) \end{cases} \\ &\quad 3x = 12 \\ &\quad x = 12/3 \end{aligned}$$

$$x = 4$$

Substituindo na equação II, temos:

$$\begin{aligned} 4 + y &= 7 \\ y &= 7 - 4 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

Resolução:

Primeiramente multiplicaremos a equação II por 5:

$$\begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \cdot (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 15x - 5y = 45 \cdot (5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 14x &= 56 \\ x &= 56/14 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Agora substituindo o valor de x na equação I, temos:

$$\begin{aligned} -x + 5y &= 11 \\ -4 + 5y &= 11 \\ 5y &= 11 + 4 \\ 5y &= 15 \\ y &= 15/5 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Assim, a solução desse sistema é (4, 3)

Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/pdf>

2) Os bichos de pelúcia Pluto e Mickey pesam juntos 52 kg. Sabendo que a diferença entre os pesos de Pluto e Mickey é de 4 kg, então Mickey pesa?

Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/>

Resolução:

O primeiro passo para a resolução é definir uma incógnita para cada bicho de pelúcia, assim:

$p \rightarrow$ peso de Pluto

$m \rightarrow$ peso de Mickey

Com as variáveis, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} p + m = 52 \\ p - m = 4 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$\begin{aligned} 2p + 0m &= 56 \\ 2p &= 56 \\ p &= 56 : 2 \\ p &= 28 \end{aligned}$$

Agora que sabemos o peso de Pluto, encontraremos o peso de Mickey:

$$\begin{aligned} p + m &= 52 \\ 28 + m &= 52 \\ m &= 52 - 28 \\ m &= 24 \text{ kg} \end{aligned}$$

3) Em um estacionamento, há motos e carros, em um total de 25 veículos. Sabendo que há 74 rodas nesse estacionamento, podemos afirmar que:

- a) há 1 carro a mais que a quantidade de motos.
- b) há 2 carros a mais que a quantidade de motos.
- c) há 1 moto a mais que a quantidade de carros.
- d) há 2 motos a mais que a quantidade de carros.

Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/>

Resolução:

Para montar o sistema, temos:

$x \rightarrow$ quantidade de carros

$y \rightarrow$ quantidade de motos

Então, calcula-se:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x + 2y = 74 \end{cases}$$

Isolando y na equação I:

$$y = 25 - x$$

Substituindo na equação II:

$$\begin{aligned} 4x + 2(25 - x) &= 74 \\ 4x + 50 - 2x &= 74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x &= 74 - 50 \\
 2x &= 24 \\
 x &= 24 : 2 \\
 x &= 12 \rightarrow \text{Há 12 carros.}
 \end{aligned}$$

Como há um total de 25 veículos, então $25 - 12 = 13$. Logo, há 13 motos.

Podemos afirmar, portanto, que há 1 moto a mais que a quantidade de carros (Letra c).

4) Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases}
 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\
 x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\
 -x_1 + x_2 + x_3 = -2
 \end{cases}$$

Verifique se as ternas ordenadas são soluções desses sistemas:

a) (2, -1, 1)

Resolução:

Substituindo a ternas ordenadas, temos:

$$\begin{cases}
 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 1 = 0 & (I) \\
 2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 5 & (II) \\
 -2 + (-1) + 1 = -2 & (III)
 \end{cases}$$

Assim, verificamos é a solução deste sistema.

b) (0, 0, 0)

Resolução:

$$\begin{cases}
 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0 & (I) \\
 2 - 0 \cdot 0 + 0 = 5 & (II) \\
 -2 + 0 + 0 = -2 & (III)
 \end{cases}$$

Logo, concluímos que a terna ordenada (0, 0, 0) não é a solução do sistema.

Fonte: Autora (2024)

5) Determine, a solução do sistema a seguir:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Resolução:

Primeiramente escolhemos duas das equações do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (I) \\ 2x - y + z = 3 & (II) \\ x + y + z = 6 & (III) \end{cases}$$

Assim escolheremos a I e II:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$3x + y = 5$$

Agora escolheremos a I e III:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$2x + 3y = 8$$

Agora juntaremos em forma de sistema as duas novas equações que foram encontradas:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 & (I) \\ 2x + 3y = 8 & (II) \end{cases}$$

Isolando o y da equação I:

$$y = 5 - 3x$$

Substituindo na equação II:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3(5 - 3x) &= 8 \\ 2x + 15 - 9x &= 8 \\ 2x - 9x &= 8 - 15 \\ -7x &= -7 \cdot (-1) \\ x &= 7/7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Voltando para equação na qual isolamos o y:

$$\begin{aligned} y &= 5 - 3x \\ y &= 5 - 3 \cdot 1 \\ y &= 5 - 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Agora voltaremos para a equação III inicial do sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 1 + 2 + z &= 6 \\ 3 + z &= 6 \\ z &= 6 - 3 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Assim, a solução desse sistema é : $S\{ (1, 2, 3)\}$

Fonte: Autora (2024)

3º Encontro: Conhecendo o GeoGebra

Nesse encontro realizamos com os estudantes uma familiarização o uso da tecnologia que se apresenta como aliada dos alunos no processo de aprendizagem, pois vemos na atualidade os docentes aderindo a esses recursos como suporte em suas aulas. Abaixo apresentamos o plano desse encontro:

Disciplina: Cultura Digital Turma: 3ºano do EM Turno: Integral
Tema: Conhecendo o GeoGebra
Objetivo Geral: Incentivar o uso de tecnologias como ferramenta para aprender conteúdos matemáticos.
Objetivos Específicos: • Reconhecer as ferramentas básicas apresentadas no GeoGebra; • Verificar a familiaridade dos alunos com a tecnologia, bem como a utilização; • Apresentar algumas das potencialidades do software e as possíveis conversões dos objetos matemáticos por meio da janela algébrica e da janela gráfica;
Procedimentos: Neste momento explanaremos com os estudantes o software GeoGebra, fazendo com que eles reconheçam as ferramentas básicas, através da própria manipulação. Sendo assim, apresentaremos um slide interativo com um pouco da história do GeoGebra e seu criador, além de expor os itens básicos como por exemplo: a barra de menu, a janela de visualização, a caixa de entrada, a barra de ferramentas, a janela da álgebra, entre outras opções que servirão de apoio para a prática. Logo após, partiremos para a manipulação, na qual os estudantes abrirão

o software nos computadores do laboratório e poderão ter acesso ao que foi apresentado, manipulando as ferramentas nele presentes. Além disso, no slide que será apresentado, contempla-se alguns exemplos e questões onde os estudantes poderão construir primeiro o ponto e reta, depois de gráficos de equações, para que assim no próximo encontro já possa estar familiarizado com a construção, para que assim possamos adentrar nas questões que envolvam o GeoGebra e os sistemas de equações lineares.

Recursos utilizados: Computador, GeoGebra, Slide, papel e caneta.

Fonte das questões: <https://www2.uesb.br/ppg/profmat/pdf>

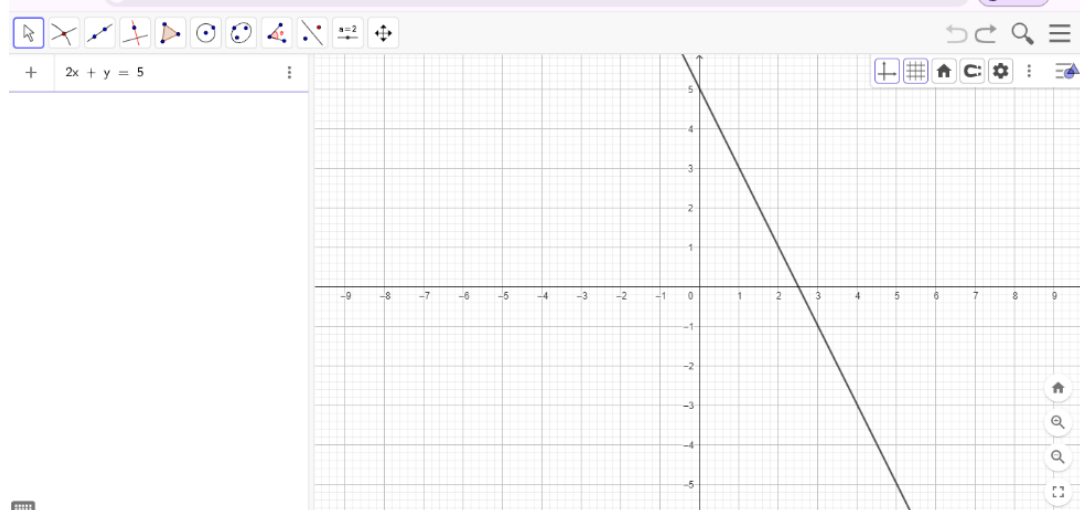
Atividade: Conhecendo o GeoGebra

1) Acesse o GeoGebra e realize os seguintes procedimentos:

a) No campo de entrada, digite a reta: $2x + y = 5$. Dê um Enter. Esse comando criará a reta da equação dada.

Resolução:

Figura 24 - Representação da reta $2x + y = 5$

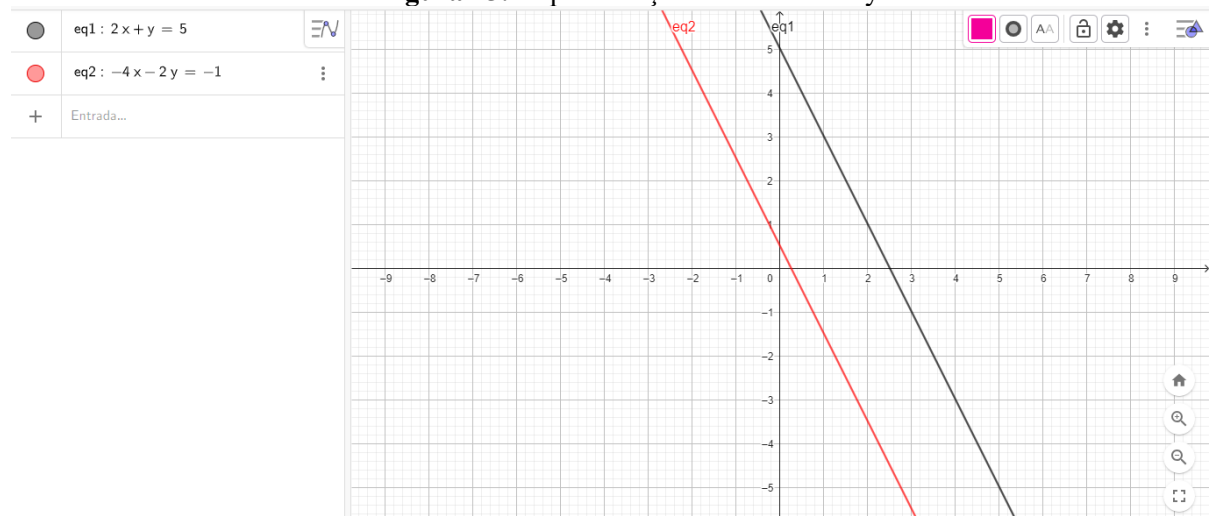


Fonte: A autora, 2024

b) No campo de entrada, digite a reta: $-4x - 2y = -1$. Dê um Enter. Esse comando criará a reta da equação dada

Resolução:

Figura 25: Representação da reta $-4x - 2y = -1$



Fonte: A autora, 2024

c) Qual a classificação dessas retas?

São paralelas.

2) Em relação a construção de ponto e reta no GeoGebra, faça o que se pede:

a) Considerando a equação da reta $r: x - y = 4$, verifique se o ponto $(1,5)$ pertence a reta r .

Resolução:

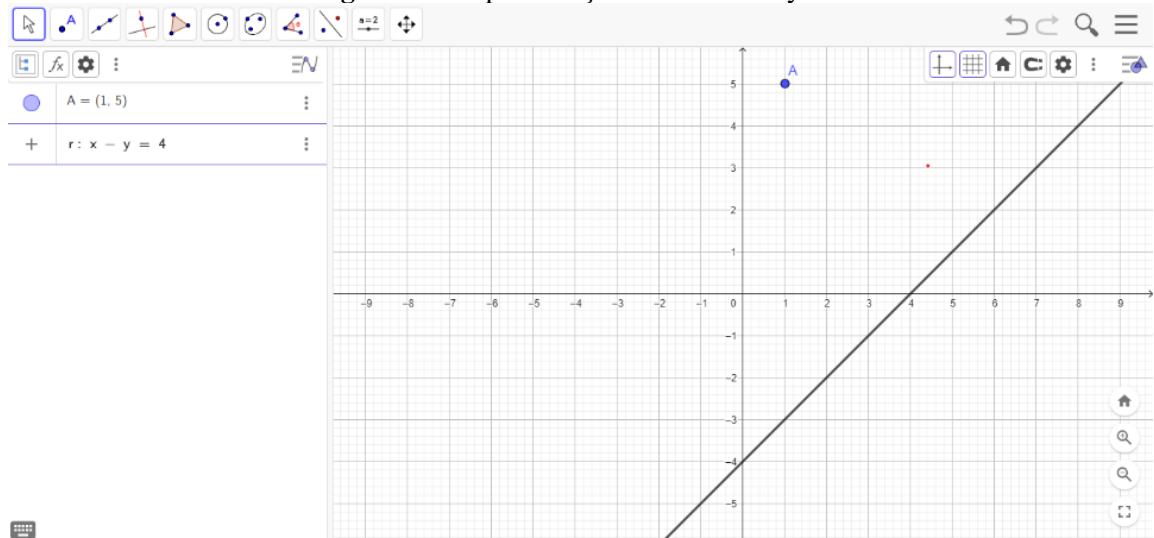
Como temos o ponto $(1,5)$, tem-se que substituímos na equação os valores $x=1$ e $y=5$:

$$r: x - y = 4, \text{ assim } r: 1 - 5 = -4$$

Logo, podemos notar que o resultado não foi 4 e sim -4, portanto o ponto não pertence a reta r .

Verificando no GeoGebra:

Figura 26: Representação da reta $r: x - y = 4$



Fonte: A autora, 2024

b) Considere a equação da reta $s: x + y = 10$, verifique se o ponto $(1, 5)$ pertence a reta s . Justifique sua resposta.

Resolução:

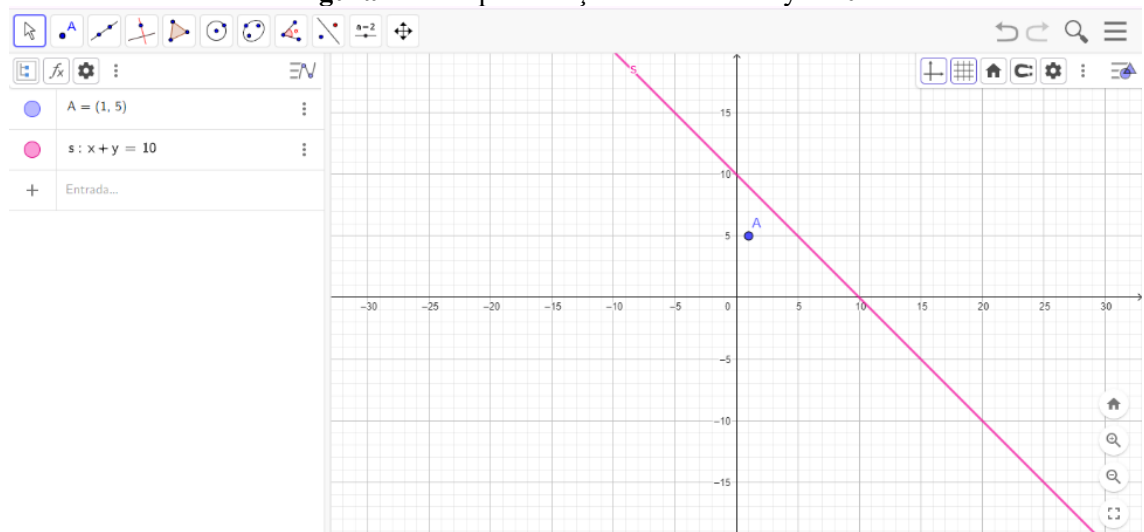
Como temos o ponto $(1, 5)$, tem-se que substituímos na equação os valores $x=1$ e $y=5$:

$$s: x + y = 10, \text{ assim } r: 1 + 5 = 6$$

Logo, podemos notar que o resultado não foi 10 e sim 6, portanto o ponto não pertence a reta r .

Verificando no GeoGebra:

Figura 27 - Representação da reta $s: x + y = 10$



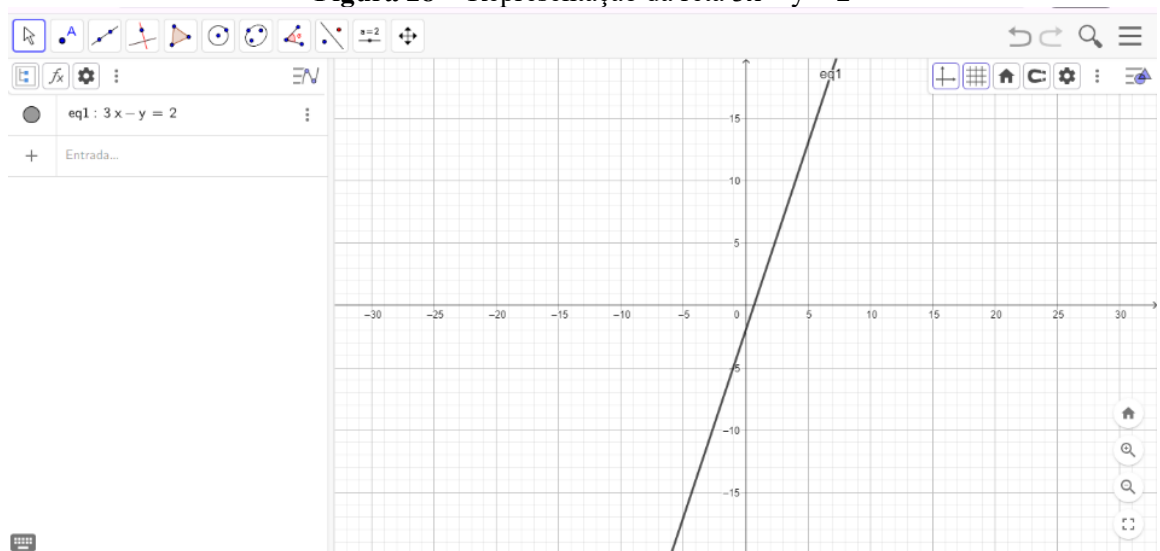
Fonte: Os autores, 2024

3) Esboce graficamente as seguintes equações no GeoGebra:

a) $3x - y = 2$

Resolução:

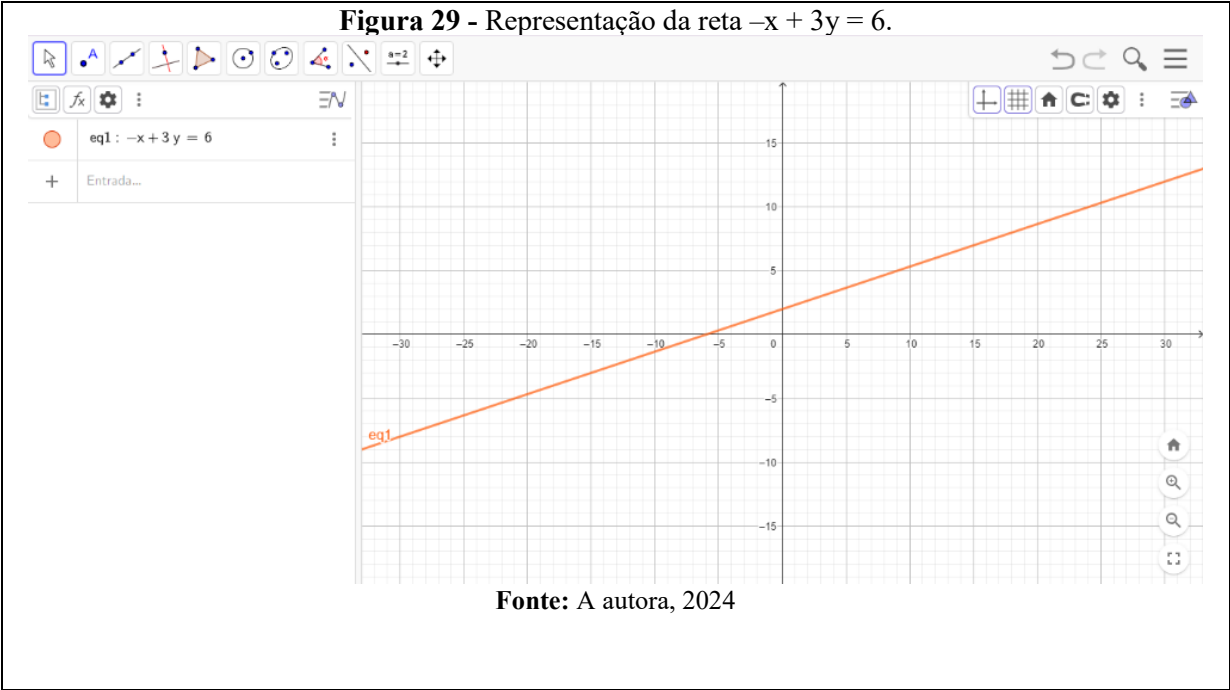
Figura 28 - Representação da reta $3x - y = 2$



Fonte: A autora, 2024

b) $-x + 3y = 6$.

Resolução:



4ºEncontro: Sistemas de Equações Lineares 2x2 e 3x3 no GeoGebra

Seguimos para a fase em que unimos o objeto matemático estudado, com o *software* GeoGebra para que os estudantes reconheçam na prática como desenvolver as resoluções utilizando-se dos procedimentos aprendidos nos momentos anteriores, neste momento e nos posteriores analisaremos a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a realização da passagem do campo algébrico para o geométrico, assim focaremos nas praxeologias desenvolvidas pelos estudantes, como vemos no plano da sequência:

Disciplina: Cultura Digital	Turma: 3ºano do EM	Turno: Integral
Tema: Conhecendo os sistemas de equações lineares		
Objetivo Geral: Utilizar o GeoGebra na compreensão da resolução de sistemas lineares.		
Objetivos Específicos: • Determinar solução de um Sistema Linear de duas equações e duas variáveis por meio geométrico; • Determinar solução de um Sistema Linear de três equações e três variáveis por meio geométrico;		

- Usar ferramentas (inserção de pontos, retas definidas por dois pontos) do GeoGebra para representar retas (conversão de registro da equação na forma algébrica) no plano.

Recursos utilizados: Computador, GeoGebra, Slide, papel e caneta.

Procedimentos:

Como os estudanets já possuem uma apropriação inicial em relação ao GeoGebra, explanaremos alguns pontos importantes retomando o que foi evidenciado no encontro passado, traremos agora exemplos utilizando o GeoGebra focando no sistema 2×2 , bem como no 3×3 . Desta forma, após a exposição de exemplos será aplicada uma atividade seguindo um passo a passo para ser resolvida.

Atividade: Sistemas e GeoGebra

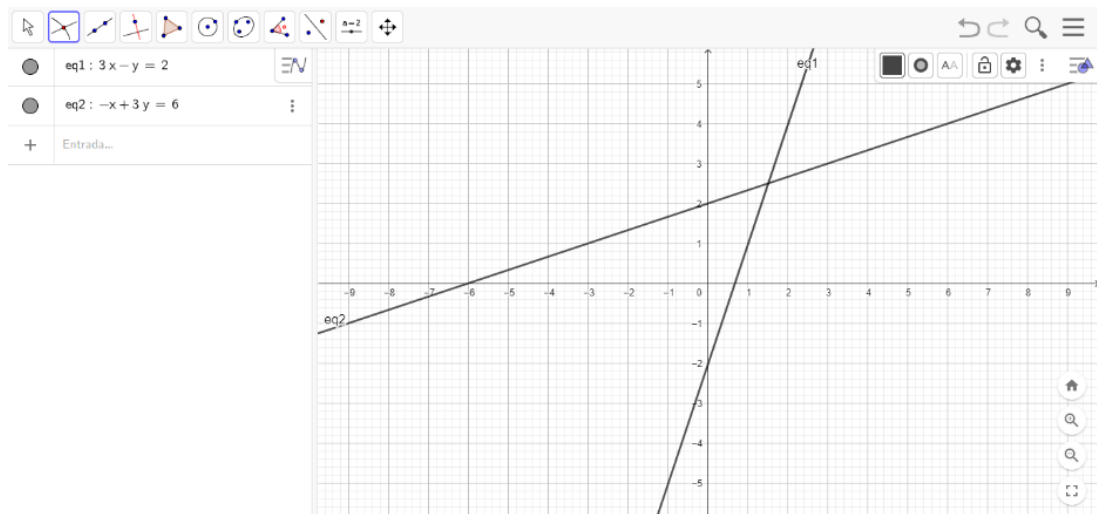
1) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema:

$$a) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

Resolução:

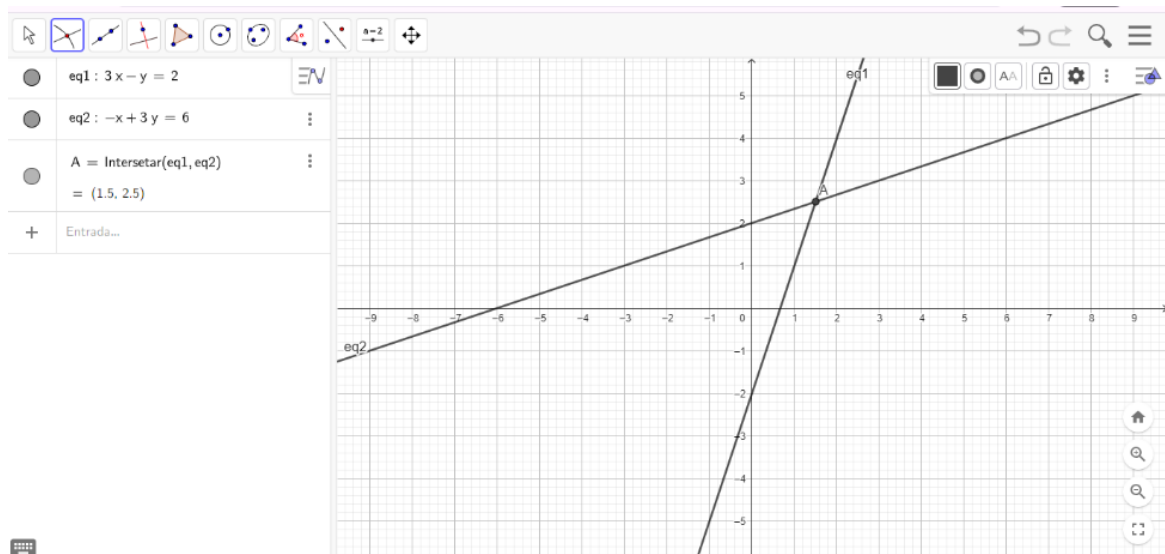
1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção de exibir eixos no plano cartesiano.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a primeira equação $3x - y = 2$ e clicamos em “Enter” e digitamos $-x + 3y = 6$. Observamos que assim que se é realizado esse processo as duas equações são nomeadas de eq1 e eq2 e são representadas por retas no plano cartesiano, como mostra a figura abaixo

Figura 30 - Representação das retas

Fonte: Os autores, 2024

3º Passo: Por conseguinte iremos determinar o ponto de intersecção dessas retas, se caso houver, assim no campo de entrada marcaremos a opção “Intersecção de Dois Objetos” e selecionaremos as duas retas. Mediante a esse processo, aparecerá o nome do ponto A. Vejamos:

Figura 31: Representação da solução do sistema 2x2 graficamente

Fonte: Os autores, 2024

Como podemos notar, o sistema apresenta como solução os pontos A (1,5; 2,5).

c) Faça o estudo das retas desse sistema e apresente sua classificação.

Resolução:

A interpretação geométrica das retas é que são concorrentes, ou seja, elas se cruzam em um único ponto, fazendo com que esse sistema seja classificado como SPD (Sistema Possível e Determinado), apresentando apenas uma única solução.

2) Matheus tem um total de R\$ 115,00 em notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00. Considerando que ele possui um total de 11 cédulas, a quantidade de notas de R\$ 5,00 que ele possui a mais que as de R\$ 20,00 é igual a quanto? Represente e resolva algebricamente e graficamente através do GeoGebra a resolução. Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/>

Resolução Algébrica:

Primeiramente, montamos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 20y = 115 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Isolando na equação II a incógnita x, temos:

$$x = 11 - y$$

Agora substituindo na equação II temos:

$$5 \cdot (11 - y) + 20y = 115$$

$$55 - 5y + 20y = 115$$

$$15y = 115 - 55$$

$$15y = 60$$

$$y = 60/15$$

$$y = 4$$

Voltando para a equação II, obtemos o seguinte resultado:

$$x = 11 - 4$$

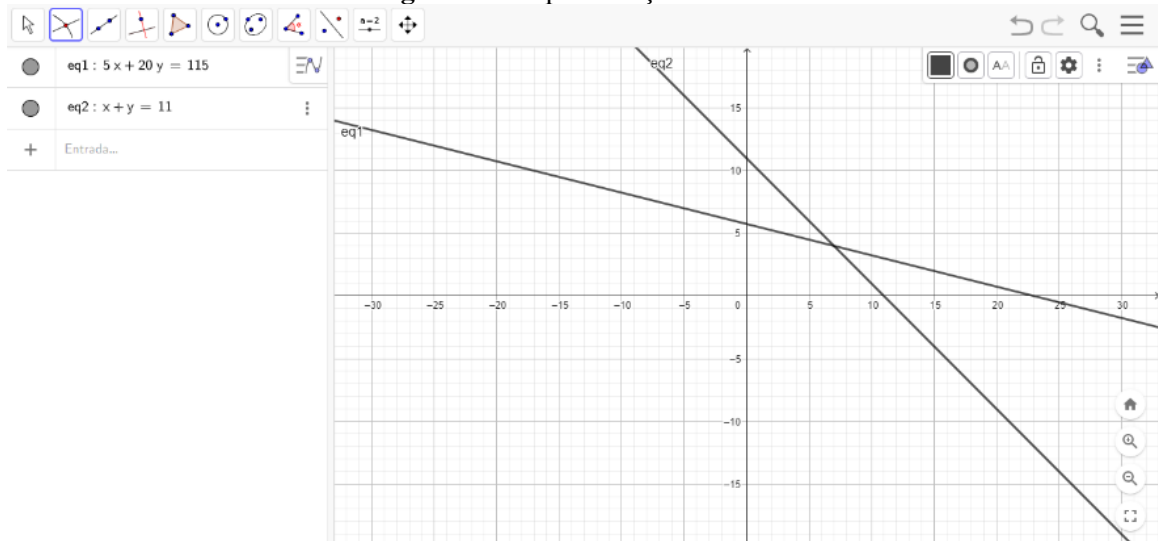
$$x = 7$$

A quantidade de notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00 que Matheus possui, respectivamente, é 7 e 4 notas.

Resolução gráfica

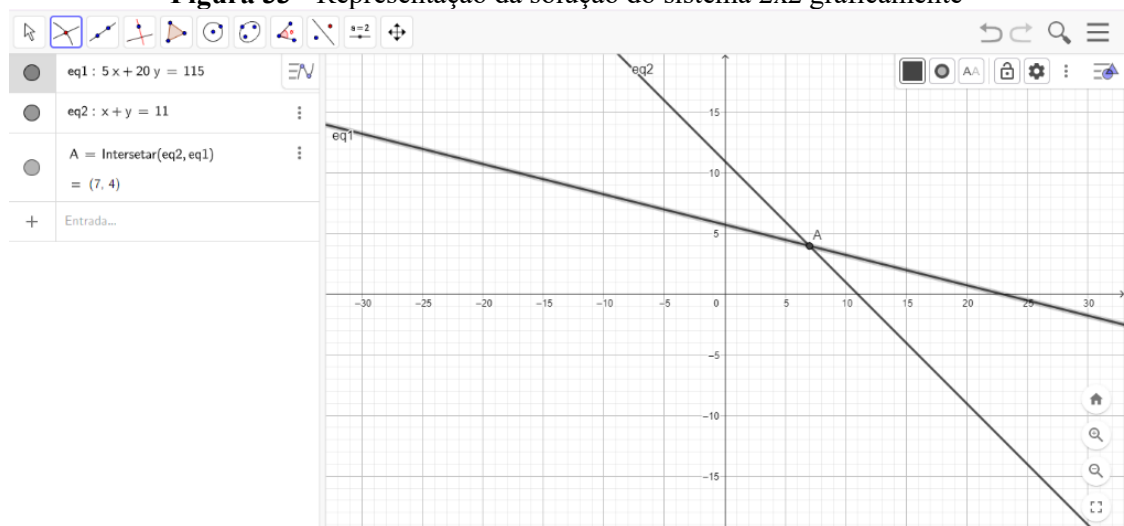
1ºPasso: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção de exibir eixos no plano cartesiano.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a primeira equação $5x + 20y = 115$ e clicamos em “Enter” e digitamos $x + y = 11$. Observamos que assim que se é realizado esse processo as duas equações são nomeadas de eq1 e eq2 e são representadas por retas no plano cartesiano, como mostra a figura abaixo:

Figura 32: Representação das retas

Fonte: A autora, 2024

3º Passo: Determinar o ponto de intersecção dessas retas, se caso houver, assim no campo de entrada marcaremos a opção “Intersecção de Dois Objetos” e selecionaremos as duas retas. Mediante a esse processo, aparecerá o nome do ponto A. Vejamos:

Figura 33 - Representação da solução do sistema 2x2 graficamente

Fonte: A autora, 2024

Como podemos notar, o sistema apresenta como solução os pontos A (7; 4).

3)Represente cada equação no GeoGebra:

Fonte: Autoria Própria

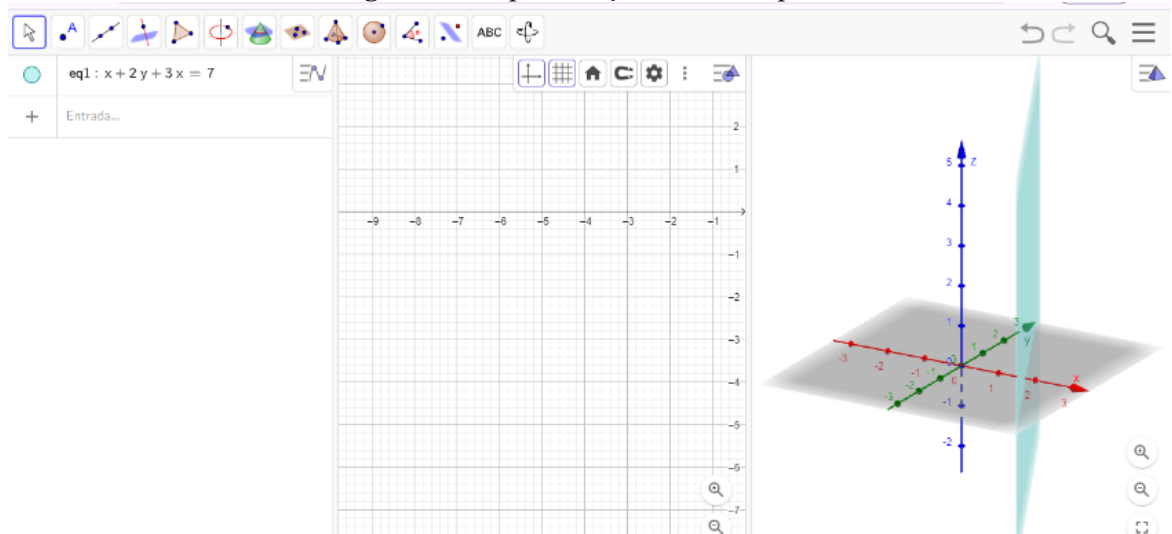
a) $x + 2y + 3x = 7$

Resolução:

1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção “janela de visualização 3d” no canto direito da tela. Assim o plano em 3d será apresentado.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a equação: $x + 2y + 3z = 7$

Figura 34: Representação da reta no plano



Fonte: A autora, 2024

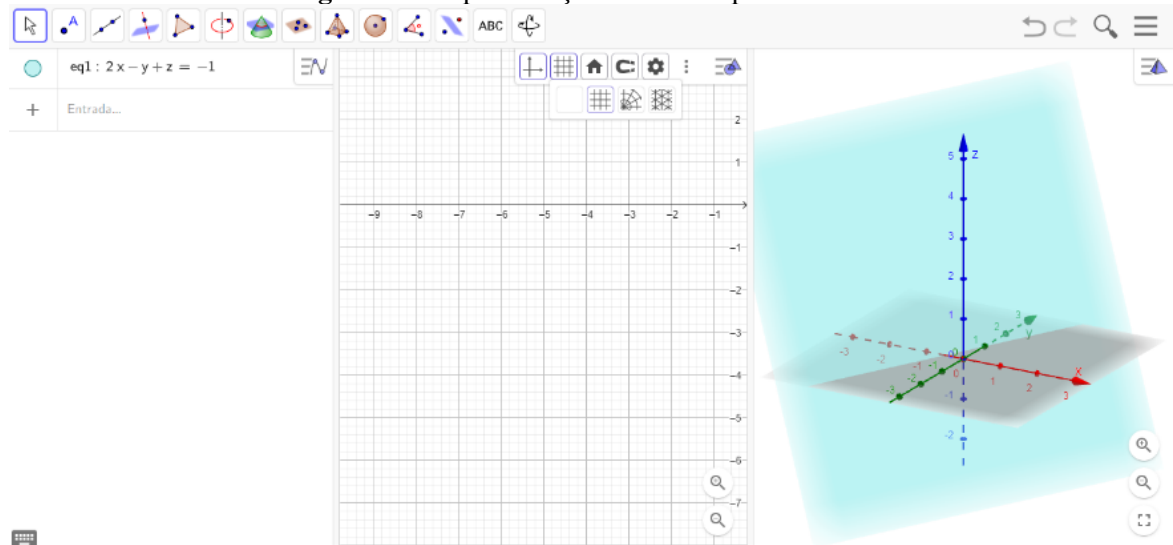
b) $2x - y + z = -1$

Resolução:

1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção “janela de visualização 3d” no canto direito da tela. Assim o plano em 3d será apresentado.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a equação: $2x - y + z = -1$

Figura 35: Representação da reta no plano em 3x3



Fonte: A autora, 2024

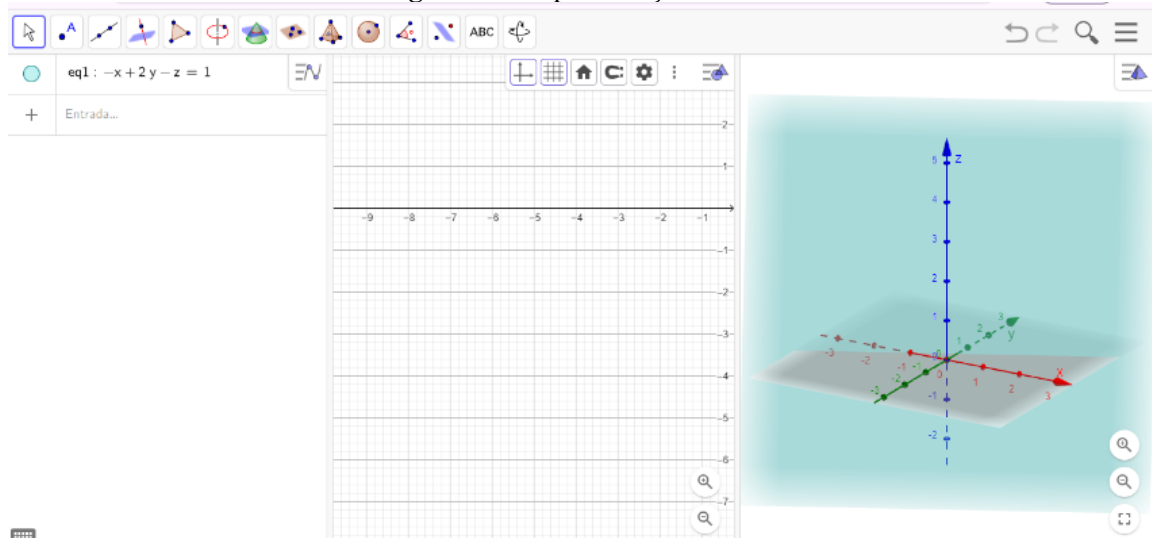
c) $-x + 2y - z = 1$

Resolução:

1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção “janela de visualização 3d” no canto direito da tela. Assim o plano em 3d será apresentado.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos a equação: $-x + 2y - z = 1$

Figura 36: Representação da reta



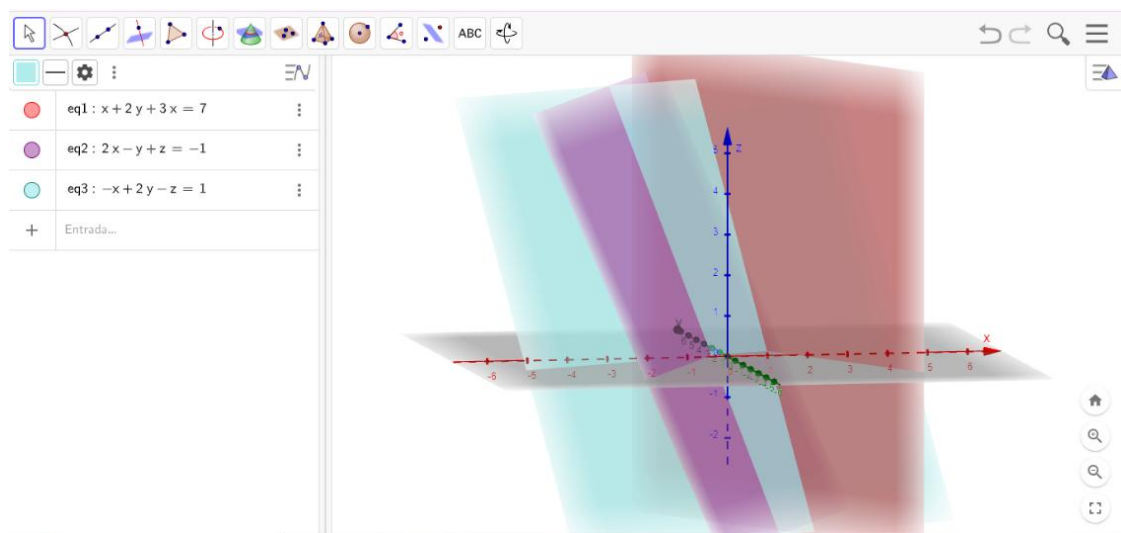
Fonte: A autora, 2024

d) Agora represente em um só plano as equações.

1º Passo: Com o GeoGebra Classic aberto, clique nas configurações e selecione a opção “janela de visualização 3d” no canto direito da tela. Assim o plano em 3d será apresentado.

2º Passo: Na parte esquerda da tela será apresentada o campo de entrada do comando, onde digitamos em ordem as equações $x + 2y + 3z = 7$, $2x - y + z = -1$, $-x + 2y - z = 1$. Observamos que assim que se é realizado esse processo as três equações são nomeadas de eq1, eq2 e eq3, como vemos na figura abaixo:

Figura 37: Representação do sistema graficamente

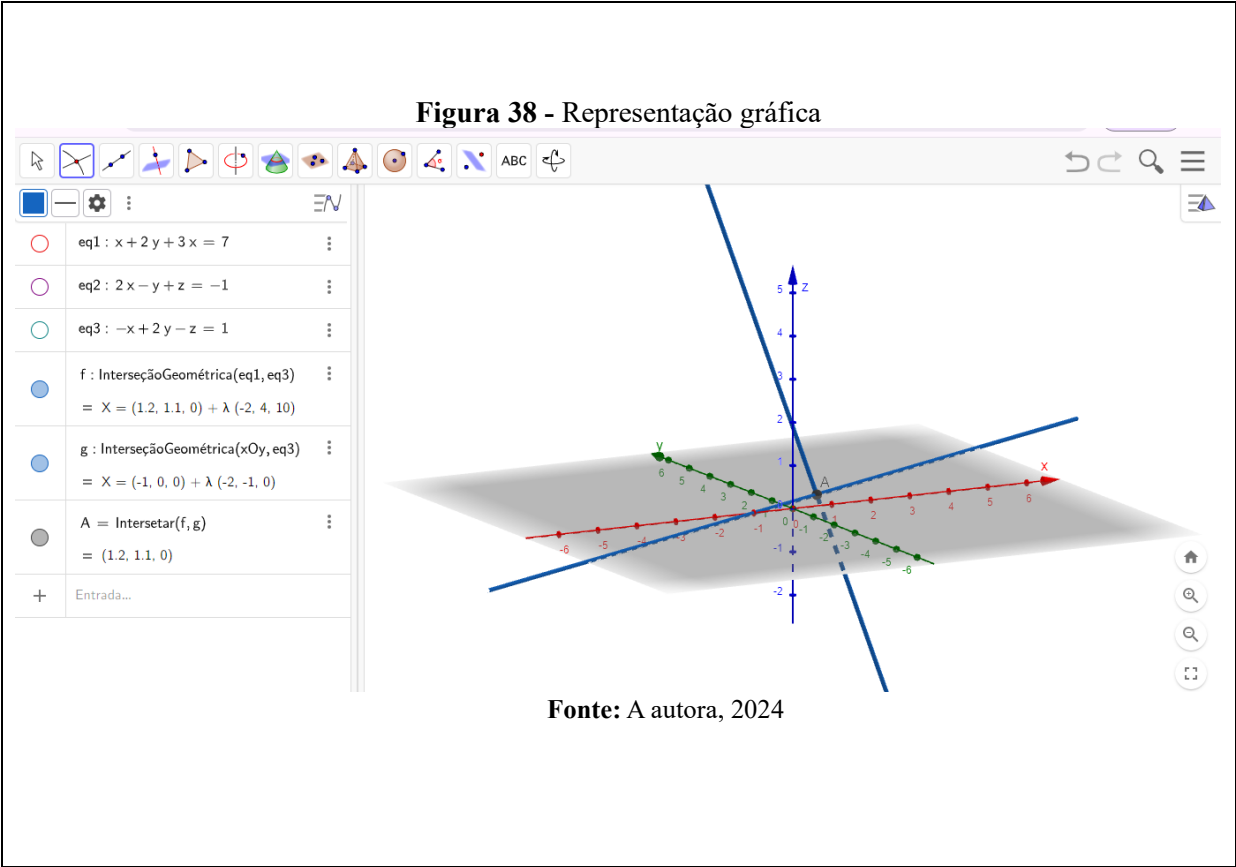


Fonte: A autora, 2024

e) Perceba que chegamos a um sistema linear 3×3 com as equações do plano. Agora ainda utilizando o GeoGebra, apresente a terna ordenada desse sistema linear 3×3 através da representação gráfica.

Resolução:

Para encontrar a solução dos três, clicaremos na aba que indica a “intersecção de duas superfícies”, sendo elas as retas e assim e marcaremos os pares das equações, por fim quando aparecer o esboço das retas clicaremos em “interseção entre os pontos”, marcando as duas retas e chegando a solução do sistema linear, sendo ele $(1,2; 1,1; 0)$, como mostra a figura abaixo:



5º e 6º Encontro: Revisando

Nesse encontro final foi a apresentação das questões que focam na verificação de fato da passagem do campo algébrico para o geométrico, pois trazem uma abordagem que resgata tanto a resolução algébrica, como também a gráfica, onde os estudantes utilizarão o GeoGebra para poder classificar os sistemas lineares por meio da interpretação de sua representação, através do gráfico exposto.

Disciplina: Cultura Digital	Turma: 3ºano do EM	Turno: Integral
Tema: Revisando Sistemas e GeoGebra		
Objetivo Geral: • Verificar o que foi aprendido na prática, através de uma atividade de fixação utilizando os recursos tecnológicos.		

Objetivos Específicos:

- Encontrar a solução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis por meio algébrico e geométrico com a utilização do software GeoGebra.
- Encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis por meio algébrico e geométrico com a utilização do software GeoGebra.

Procedimentos:

Primeiramente, será entregue aos estudantes questões envolvendo o que foi explorado durante os momentos anteriores, sendo assim cada um terá acesso ao computador com o GeoGebra, e receberão uma atividade impressa com questões que remetem ao que foi trabalhado, tanto envolvendo a resolução algébrica, onde farão o cálculo, como também a geométrica. Por fim, será recolhida a atividade para análises.

Recursos utilizados: Atividade impressa, Computador, GeoGebra.

Atividade: Aplicação de Sistemas 2x2 e 3x3 no GeoGebra

1- Resolva os seguintes sistemas: (Fonte: Questão adaptada do livro)

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Resolução:

Empregando o método da adição, vamos resolver o primeiro sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 & \text{(I)} \\ 2x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, as equações I e II, obtemos: $3x = 6$

Logo, $x = 2$

Agora substituindo x por 2 na equação I, temos:

$$x - y = 1$$

$$2 - y = 1$$

$$-y = 1 - 2$$

$$-y = -1 \quad .(-1)$$

$$y = 1$$

Assim o conjunto solução desse sistema é (2, 1).

$$b) \begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = -3 \end{cases}$$

Resolução:

Os estudantes deverão perceber que não existe um par ordenado que corresponde a esse sistema de equação, pois ele é um sistema impossível, e suas retas serão paralelas.

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Resolução:

Isolando a incógnita x da equação II, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (I) \\ x + 2y = 4 & (II) \end{cases}, \quad x + 2y = 4 \text{ assim, } x = 4 - 2y$$

Substituindo $x = 4 - 2y$ na equação I temos:

$$2x + 3y = 7$$

$$2(4 - 2y) + 3y = 7$$

$$8 - 4y + 3y = 7$$

$$8 - y = 7$$

$$-y = -1 \quad .(-1)$$

$$y = 1$$

Para determinar o valor de x, utilizaremos a relação: $x = 4 - 2y$

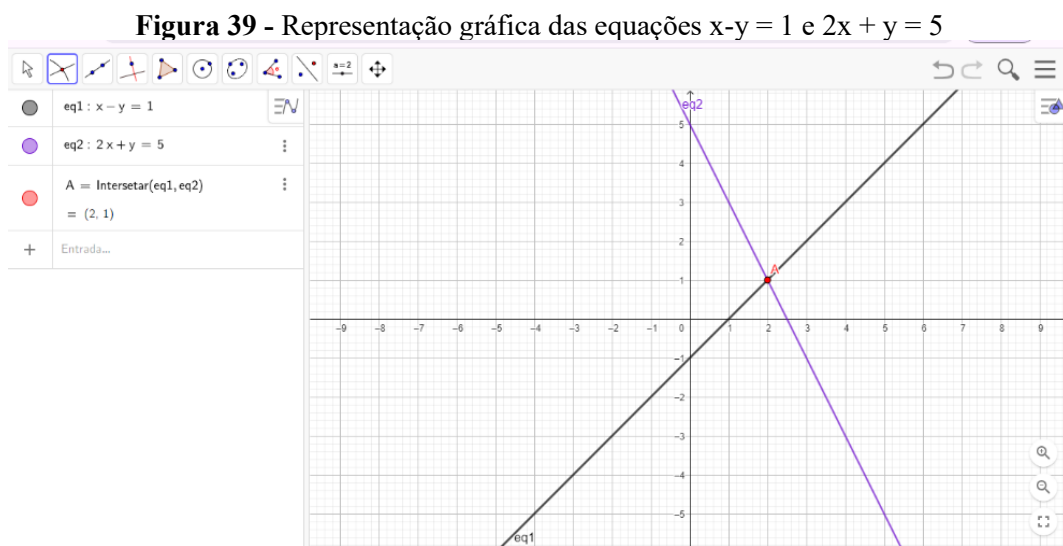
Logo, $x = 2$

Assim, o conjunto solução deste sistema é $S\{(2, 1)\}$

2- Levando em consideração a questão anterior, utilizando o GeoGebra interprete geometricamente o sistema de cada item da questão e realize sua definição.

a) *Resolução do sistema do item a:*
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Para realizar a interpretação geométrica do sistema, o aluno deverá acessar o GeoGebra e na janela gráfica deverá escrever cada uma das equações, e depois clicar na opção intercessão, para que assim o esboço gráfico seja realizado e apresente a solução do sistema proposto, como mostra a figura:

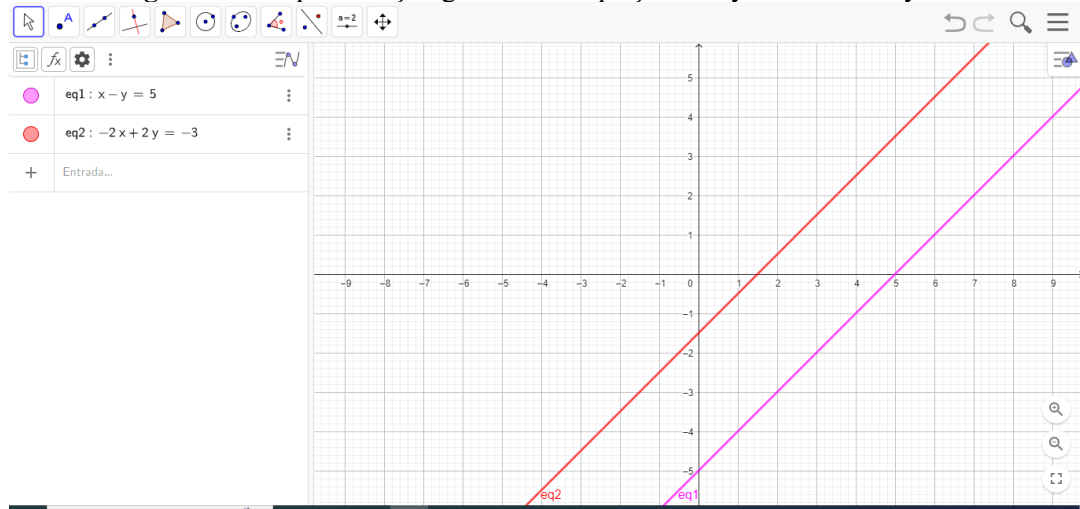


Fonte: A autora, 2024

Como apresentado na figura, as retas são concorrentes, pois se cruzam em um único ponto A (2, 1) logo podemos classificar o sistema como possível e determinado (SPD).

Resolução do sistema do item b: $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = -3 \end{cases}$

Figura 40 - Representação gráfica das equações $x - y = 5$ e $-2x + 2y = -3$

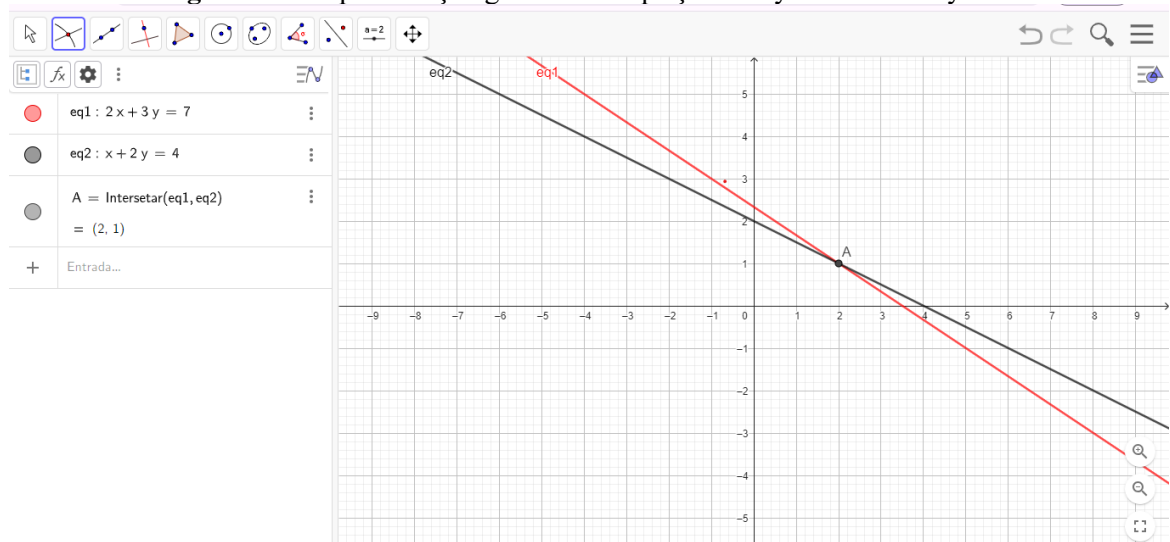


Fonte: A autora, 2024

Como apresentado na figura, as retas são paralelas, pois se tocam, assim não apresentam nenhum ponto em comum, logo podemos classificar o sistema impossível (SI) não apresentando solução.

Resolução do sistema do item c: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Figura 41 - Representação gráfica das equações $x - y = 5$ e $-2x + 2y = -3$



Fonte: A autora, 2024

Como apresentado na figura, as retas são concorrentes, pois se cruzam em um único ponto A (2, 1) logo podemos classificar o sistema como possível e determinado (SPD).

3- Dado o seguinte sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$ resolva os seguintes itens:

Fonte: <https://www2.uesb.br/ppg/profmat/pdf>

a) Utilizando uns dos métodos aprendidos, resolva o sistema.

Resolução: Empregando o método da adição, vamos resolver o primeiro sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 & \text{(I)} \\ x + y = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, as equações I e II, obtemos: $2x = 14$, logo $x = 7$

Substituindo x por 7 na equação I, temos:

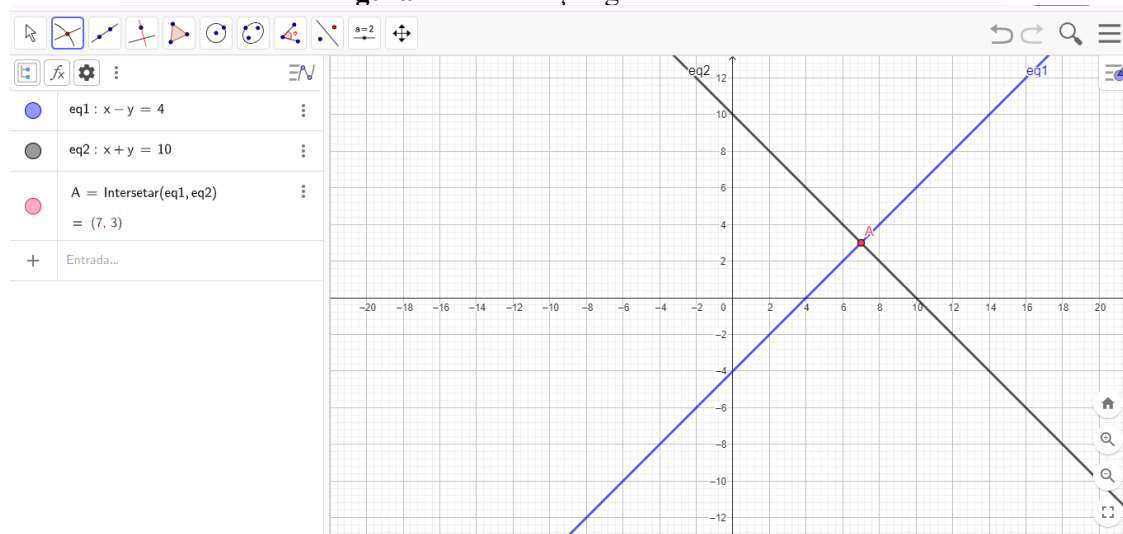
$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 7 - y &= 4 \\ -y &= 4 - 7 \\ -y &= -3 \quad \cdot (-1) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Assim o conjunto solução é $S = \{(7, 3)\}$

b) Agora utilizando o GeoGebra determine a solução desse sistema.

Resolução:

Figura 42 - Resolução gráfica do sistema



Fonte: A autora, 2024

Assim como na resolução algébrica a solução desse sistema é (7, 3).

4- Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R\$324,00 na venda de 33 sanduíches. Sabendo que o sanduíche de frango custa R\$8,00, e o vegetariano custa R\$12,00. Responda os itens a seguir:

Fonte: <https://www.repositorio.ufal.br/>

a) Escreva um sistema de equação que represente a situação apresentada.

Resolução:

Primeiramente o estudante deverá compreender como se realiza a montagem do sistema, para assim desenvolver a técnica necessária e chegar ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 33 \\ 8x + 12y = 324 \end{cases}$$

b) Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas naquele dia?

Resolução:

As técnicas utilizadas para a resolução, pode variar. Iremos exemplificar a resolução, através do método da substituição, que consiste em expressar uma incógnita em função da outra. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 33 \text{ (I)} \\ 8x + 12y = 324 \text{ (II)} \end{cases}$$

Isolando a incógnita x da equação I temos, $x = 33 - y$. Assim substituindo x por $33 - y$ na equação II teremos:

$$\begin{aligned} 8x + 12y &= 324 \\ 8.(33 - y) + 12y &= 324 \\ 264 - 8y + 12y &= 324 \\ 264 + 4y &= 324 \\ 4y &= 324 - 264 \\ 4y &= 60 \\ y &= 60/4 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Logo, $y = 15$

Agora para determinar o valor de x , substituímos na equação I o $y = 15$:

$$x + y = 33$$

$$x + 15 = 33$$

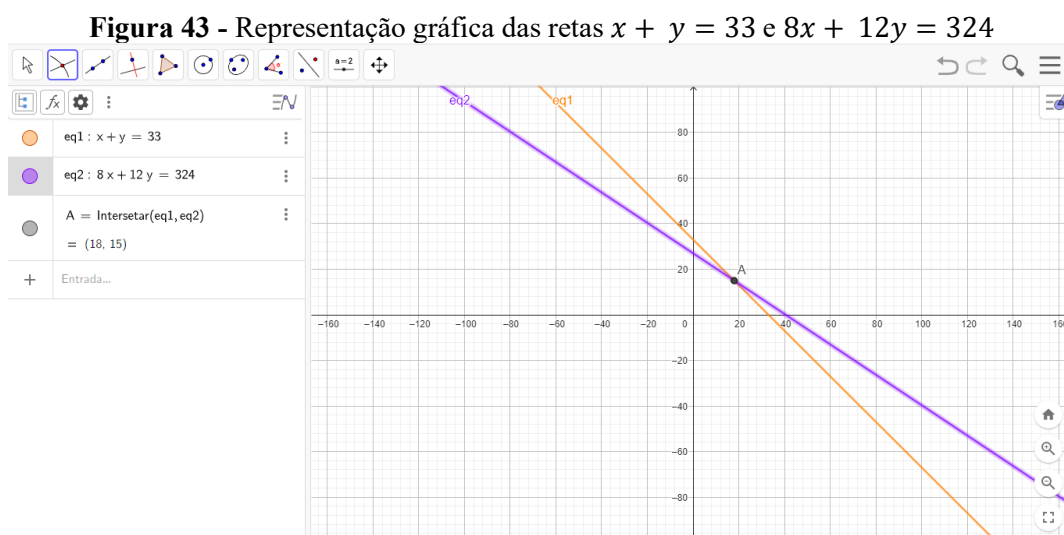
$$x = 33 - 15$$

$$x = 18$$

Assim foram vendidos 18 sanduiches de frango e 15 sanduiches vegetariano.

c) Utilizando o GeoGebra intérprete e classifique geometricamente o sistema.

Resolução:



Fonte: A autora, 2024

Podemos classificá-lo como sistema possível e determinado (SPD), apresentando assim apenas uma solução, sendo ela $S:(18, 15)$.

5- Durante uma visita à padaria, Kárita comprou 2 pedaços de bolo de cenoura e uma dose de café, pagando, ao todo, R\$ 3,50. Sua irmã, Karla, comprou 1 pedaço de bolo de cenoura e 2 doses de café, pagando um total de R\$ 2,50. Analisando essa situação, resolva os itens abaixo:

Fonte; <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/>

a) Se uma pessoa comprar 1 pedaço de bolo de cenoura e 1 café, qual o valor pago por ela?

Resolução:

Para montar o sistema de equações, temos:

$x \rightarrow$ valor do pedaço do bolo de cenoura

$y \rightarrow$ valor da dose de café

Então, calcula-se:

$$\begin{cases} 2x + y = 3,50 & (I) \\ x + 2y = 2,50 & (II) \end{cases}$$

Pelo método da substituição, isolando y na equação I, obtém-se o seguinte:

$$y = 3,5 - 2x$$

Substituindo na equação II:

$$\begin{aligned} x + 2(3,5 - 2x) &= 2,5 \\ x + 7 - 4x &= 2,5 \\ -3x &= 2,5 - 7 \\ -3x &= -4,5 \\ x &= -4,5 / (-3) \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

Sabendo que $x = 1,5$, substituímos o valor na equação I:

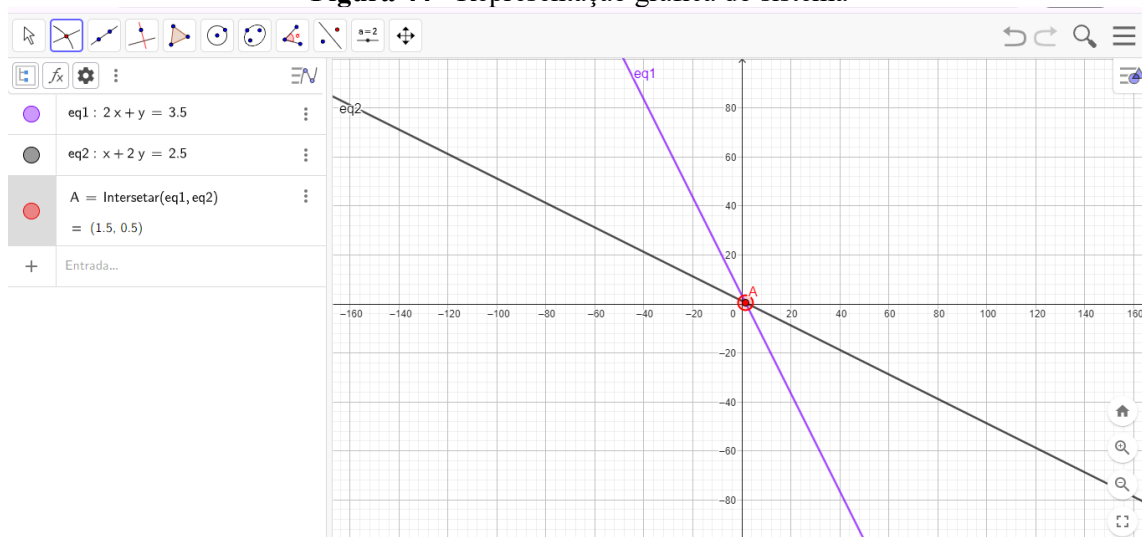
$$\begin{aligned} 2x + y &= 3,50 \\ 2 \cdot 1,5 + y &= 3,50 \\ 3 + y &= 3,50 \\ y &= 3,50 - 3 \\ y &= 0,5 \end{aligned}$$

Sendo assim, o preço de um pedaço de bolo mais uma dose de café é de $1,5 + 0,5 = 2$, ou seja, R\$ 2,00.

b) Utilizando o GeoGebra determine a solução do sistema formulado no item “a”.

Resolução:

Figura 44 - Representação gráfica do sistema



Fonte: A autora, 2024

6- Determine, graficamente através do GeoGebra e algebricamente, a solução do sistema a seguir:

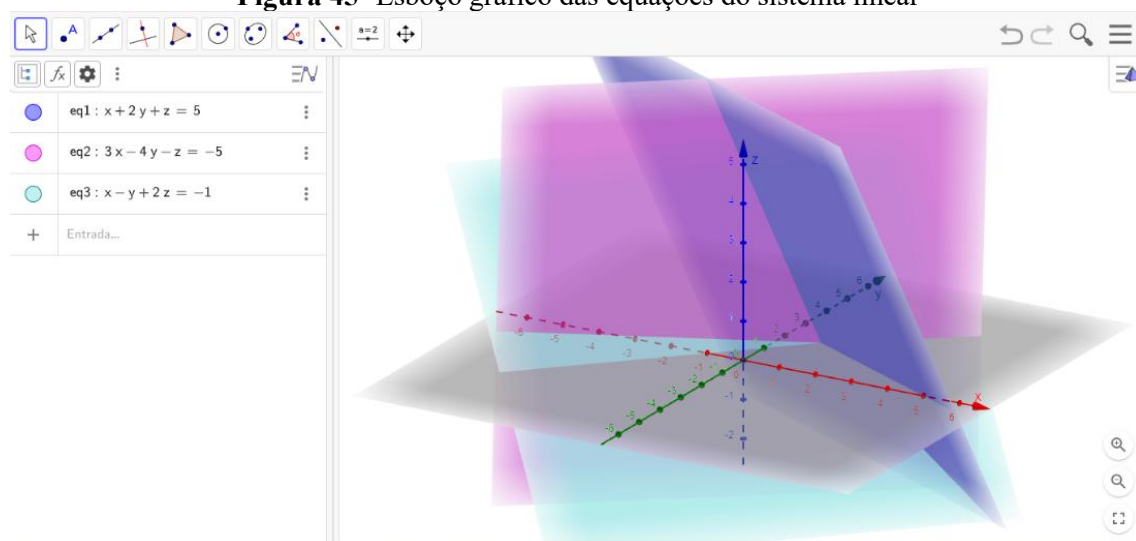
Fonte: A autora, 2024

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = -5 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Resolução:

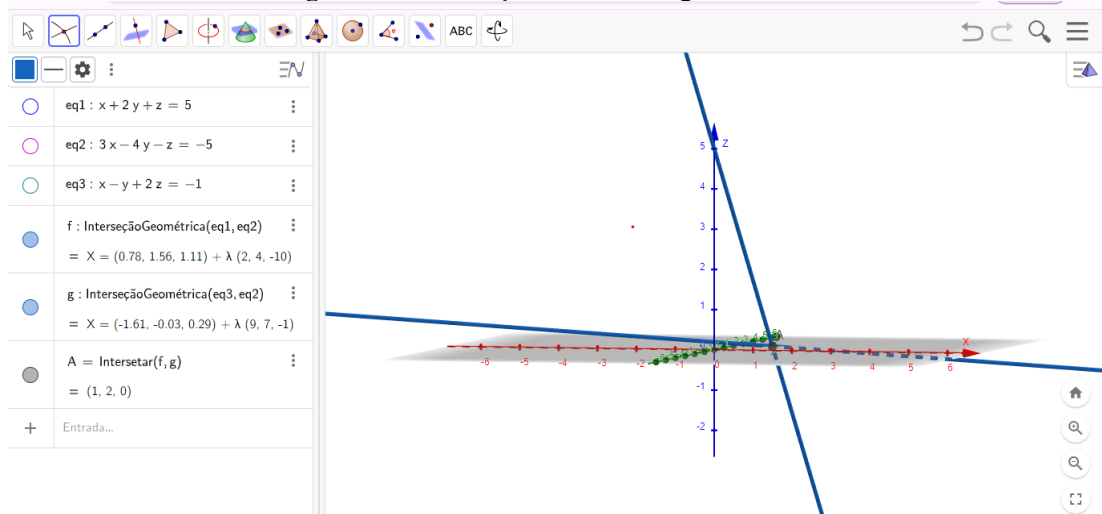
Primeiramente para encontrar a terna ordenada que soluciona esse sistema, será necessário inserir cada equação e encontrar a intercessão entre os três planos simultaneamente. Assim abrindo o GeoGebra o aluno deve-se direcionar a janela 3D e logo após inserir as equações passo a passo e assim surgirá a o plano esboçado de cada um, o aluno poderá atribuir uma cor para cada plano, assim a visualização será melhor como mostra a figura:

Figura 45- Esboço gráfico das equações do sistema linear



Fonte: A autora, 2024

Para encontrar a solução dos três, clicaremos na aba que indica a “intersecção de duas superfícies”, sendo elas as retas e marcaremos os pares das equações, por fim quando aparecer o esboço das retas clicaremos em “interseção entre os pontos”, marcando as duas retas e chegando à solução do sistema linear, sendo ele $(1, 2, 0)$, como mostra a figura abaixo:

Figura 46: Resolução do sistema graficamente

Fonte: A autora, 2024

Resolução Algébrica:

Vamos determinar a forma escalonada do sistema dado na questão. Assim, o estudante deverá escalonar a matriz completa do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicaremos por 3 os elementos que compõe a primeira linha da matriz e logo após subtraímos aos elementos correspondentes da segunda. Ainda assim, multiplicaremos por 1 os elementos da primeira linha e subtraímos aos elementos correspondentes da terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3L1 - L2 \\ e \\ L1 - L3 \end{matrix} \text{ resultando em: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, iremos multiplicar por $\frac{1}{2}$ os elementos da segunda linha da matriz para e $\frac{1}{22}$ os elementos da terceira linha, resultando em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 5y + 2z = 10 \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, substituindo $z = 0$, na equação II temos:

$$\begin{aligned} 5y + 2 \cdot 0 &= 10 \\ 5y + 0 &= 10 \\ 5y &= 10 \\ y &= 10/5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo $z = 0$ e $y = 2$, na equação I teremos:

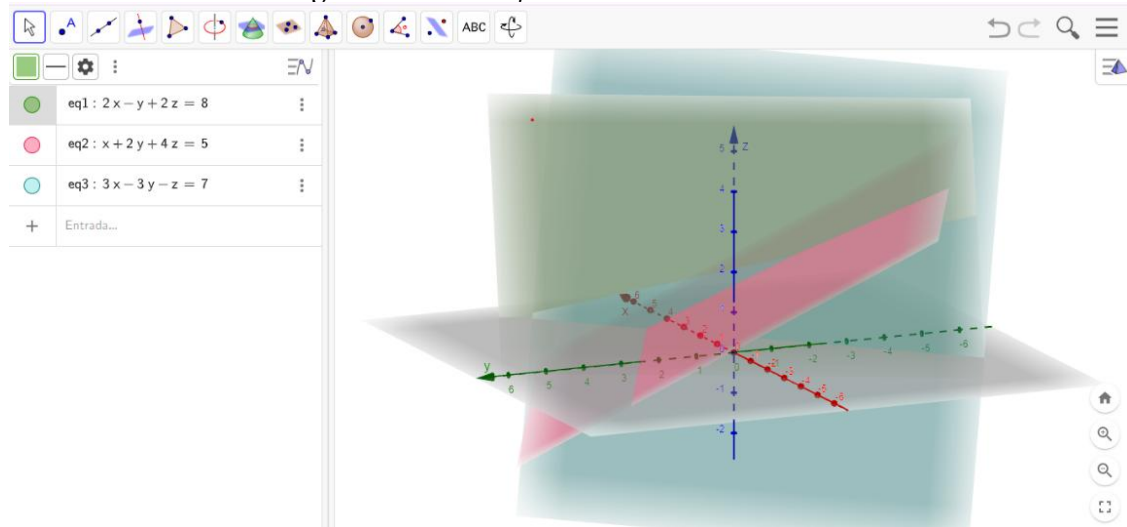
$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 2 + 0 &= 5 \\ x + 4 &= 5 \\ x &= 5 - 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Assim o conjunto solução do sistema é $S: (1, 2, 0)$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

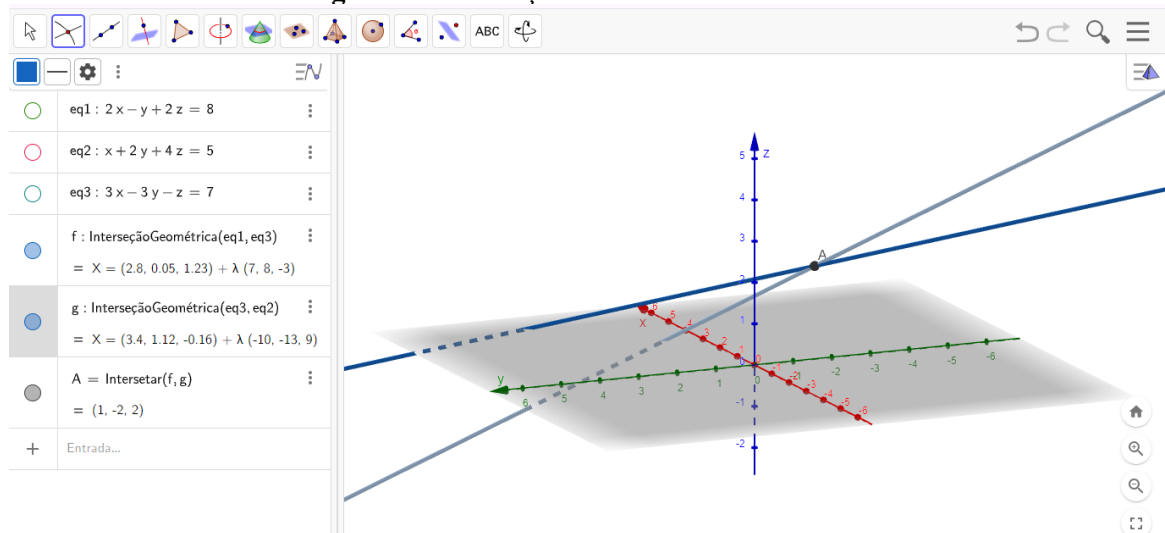
Resolução:

Para encontrar a terna ordenada que soluciona esse sistema, o aluno deverá utilizar-se do GeoGebra, sendo este um recurso que facilitará na intercessão entre os três planos simultaneamente. Acessando o GeoGebra o aluno deve-se direcionar-se a janela 3D e logo após inserir as equações passo a passo e assim surgirá a o plano esboçado de cada um.

Figura 47 - Resolução do Sistema Graficamente

Fonte: A autora, 2024

O seguinte passo será clicar na aba que indica a “intersecção de duas superfícies”, sendo elas as retas e assim marcaremos os pares das equações, por fim quando aparecer o esboço das retas clicaremos em “intersecção entre os pontos”, marcando as duas retas e chegando à solução do sistema linear, sendo ele (1, -2, 2), como mostra a figura abaixo:

Figura 48: Resolução do Sistema Graficamente

Fonte: A autora, 2024

Resolução Algébrica:

Vamos determinar a forma escalonada do sistema dado na questão. Assim, o aluno deverá escalonar a matriz completa do sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Antes de iniciar as operações entre as linhas da matriz, pode-se trocar a posição da primeira e segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Feito isso, multiplicaremos por -2 os elementos que compõe a primeira linha da matriz e logo após adicionamos aos elementos correspondentes da segunda. Ainda assim, multiplicaremos por -3 os elementos da primeira linha e adicionamos aos elementos correspondentes da terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1 + L_2 \quad \text{e} \quad -3L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, iremos multiplicar por $-\frac{9}{5}$ os elementos da segunda linha da matriz para adicionarmos aos elementos correspondentes da terceira e obtemos a matriz escalonada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{9}{5} L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ -5y - 6z = -2 \\ -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \end{cases}$$

Descobrimos o valor de z, temos:

$$-\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5}, \text{ logo } z = 2$$

Substituindo $z = 2$, na segunda equação temos:

$$-5y - 6 \cdot 2 = -2$$

$$-5y - 12 = -2$$

$$-5y = -2 + 12$$

$$-5y = 10$$

$$y = 10/5$$

$$y = -2$$

Agora, substituindo $z = 2$ e $y = -2$, na primeira equação temos:

$$x + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 5$$

$$x - 4 + 8 = 5$$

$$x + 4 = 5$$

$$x = 5 - 4$$

$$x = 1$$

Assim, $S = (1, -2, 2)$

7. ANÁLISE GERAL

Nesse tópico iremos expor as análises norteadas através dos critérios estabelecidos, bem como também o referencial teórico. Dividimos essa análise em pontos sendo eles: a análise geral, análise específica dos momentos e pôr fim a síntese das organizações didáticas. Salientamos ainda que, nomeamos os estudantes para não serem identificados pelos nomes, com letras maiúsculas do alfabeto (Estudante A, B, C...).

7.1 I e II Encontro - Familiarização com a proposta de aplicação e Relembrando Sistemas de Equações Lineares 2×2 e 3×3

O primeiro contato com a turma ocorreu de maneira interativa e dinâmica, o local sediado para as aplicações foi no laboratório de informática, sendo este um ambiente propício para o desenvolvimento das atividades, pois utilizamos dos computadores para o manuseio do GeoGebra. De início, foi realizada uma dinâmica para que pudéssemos conhecer melhor os estudantes, para que estes compreendessem do que se tratava o projeto na qual estavam participando. Esperava-se que os envolvidos tivessem um conhecimento prévio acerca dos sistemas de equações lineares e como resolver tais sistemas, sejam eles de 2×2 ou 3×3 , porém no que tange aos sistemas 3×3 eles desconheciam os métodos de resolução.

Tínhamos como principal objetivo desse encontro fazer com que os estudantes desenvolvessem suas habilidades e compreensão no cálculo de sistemas de equações lineares, interpretando conceitos básicos, bem como suas classificações. Sendo assim, averiguamos os conhecimentos prévios existentes. Durante este momento percebemos que eles possuíam dificuldades na resolução algébrica.

Ao serem questionados de início sobre o que compreendiam sobre sistemas de equações e qual ano estudaram esse conteúdo, obtivemos respostas do tipo:

Estudante A: “São sistemas que pode usar o método da substituição e método da adição e eu não lembro em qual ano estudei isso, acho que 8º ano.”

Estudante B: “É a equação para descobrir o valor de duas incógnitas(x,y) no caso do sistema 2×2 e 3 incógnitas (x, y, z) no caso do sistema 3×3 .”

Estudante C: Não lembro a série que estudei esse conteúdo, acredito que foi no nono ano, onde as aulas eram online o que dificultou meu aprendizado, e eu já não sou tão boa em matemática e ainda peguei essa pandemia.

Estudante D: Equação talvez seria uma forma de resolução onde não há tantas informações, ou seja, é um pouco mais complexo a maneira que iremos seguir para chegar a resolução, pois

eu acho que não tem só um percurso. devo ter visto no primeiro ano do ensino médio, sempre tive dificuldade na resolução para encontrar o valor de x e y .

Estudante E: Lembro que vi esse conteúdo no nono ano e também no segundo ano aqui no ensino médio, mas não me lembro de como resolver.

Podemos notar algumas contradições ao tentarem lembrar em qual período foi visto tal conteúdo e suas definições. Sabemos que os sistemas de equações lineares simultâneas $m \times n$ (lemos: m por n), ou apenas sistema linear $m \times n$, é o conjunto de m equações lineares com n incógnitas. A solução de um sistema linear é a n -upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ que é simultaneamente, solução de todas as equações do sistema. Essa linguagem quando passada para os estudantes deve ser de maneira clara e sucinta, para que compreendam com mais facilidade essa definição.

Na grade curricular das escolas e na BNCC, notamos que os sistemas são introduzidos no oitavo ano do ensino fundamental, visto com mais aprofundamento no nono ano e, posteriormente, no ensino médio. O estudante A relembrou os dois métodos mais utilizados para resolução, sendo este da substituição e adição, alguns outros também citaram tais métodos que são mais conhecidos entre os estudantes. Já o estudante B foi mais direto em sua definição, retratando que seria um meio de encontrar os valores de x e y , porém não especifica nenhum caminho de resolução para encontrar esses determinados valores.

O período pandêmico também influenciou de fato o aprendizado, como argumentou o estudante C em seu relato, que se sentiu diretamente prejudicada em não ter aprendido devido as aulas estarem sendo online. Essa foi uma realidade de diversos estudantes que se encontravam em isolamento social.

Como já prevíamos essa possibilidade, projetamos através de um slide interativo uma breve explicação do que é o sistema de equações lineares e como resolvê-los expondo os diferentes tipos de métodos a serem seguidos para resolução, como por exemplo: método da adição, método da substituição, igualdade, regra de Crammer e escalonamento entre outros.

Sendo assim no segundo encontro foi realizada a explanação final sobre sistemas 2×2 e iniciamos sobre o 3×3 , os estudantes também desconheciam a resolução desse sistema de maneira algébrica. Este conteúdo é explanado no terceiro ano do ensino médio, porém muitos professores não abordam de maneira aprofundada a temática, apenas superficialmente ou as vezes não adentram tal conteúdo. Ao serem indagados em relação ao método de resolução desse sistema os estudantes apresentaram os seguintes argumentos:

Estudante B: Não sabia que existia esse outro tipo de sistema, sempre pensei que só era possível o que apresentava duas incógnitas.

Estudante E: Já tinha estudado um pouco sobre, mas acho muito difícil a resolução manual, muito extensa se tivesse uma maneira mais rápida de descobrirmos as ternas seria bom.

Percebemos que o estudante “E” externa sua dificuldade na resolução dos sistemas 3×3 nos encontros seguintes veremos que essas ausências aumentam quando apresentamos a maneira de resolução algébrica, com a passagem do campo geométrico.

Ao final desses dois encontros, cada um com duração de duas aulas, aplicamos uma atividade inicial para verificar se os estudantes realmente compreenderam o conteúdo abordado. Nesse momento eles foram desafiados a resolver questões algebricamente, envolvendo sistemas 2×2 e 3×3 . Realizamos uma análise praxeológica de algumas resoluções, a fim de avaliar os métodos empregados e as técnicas utilizadas pelos estudantes ao longo do processo.

As questões apresentadas variam entre contextualizadas para montarem o sistema e resolvê-lo de acordo com o comando da questão, como também questões que apresentavam o sistema pronto para serem respondido.

7.2 III e IV Encontro –Conhecendo o GeoGebra e Sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 no GeoGebra

O terceiro encontro foi considerado primordial, pois através dele podemos verificar se os estudantes apresentavam alguma habilidade com o manuseio do GeoGebra, porém notamos que alguns desconheciam tal software, outros quando questionados salientaram que já haviam tido contato, porém de maneira breve em uma disciplina eletiva da escola. Então, foi apresentado passo a passo de como adentrar o GeoGebra, destacando suas ferramentas principais, deixamos um tempo livre para que os estudantes pudessem manusear os tópicos que possibilitam a construção de figuras em duas e três dimensões.

Percebemos uma empolgação dos grupos ao terem esse contato inicial com o GeoGebra, através dele se é possível ter acesso a várias ferramentas matemáticas que podem servir como aliadas no ensino de determinados saberes. Desenvolvemos algumas atividades simples como representação de ponto, retas e equações para uma maior familiarização.

No quarto encontro, como os estudantes já tinham acessado o GeoGebra partimos para a construção de alguns sistemas representados na forma 2×2 e 3×3 , assim aplicamos uma sequência de questões direcionada a essa temática. Durante esse processo surgiram alguns questionamentos do tipo:

Estudante 1: “Não consegui fazer manualmente todo processo, mas no GeoGebra acho muito dinâmico, olha é só abrir a janela de visualização 3d e começar fazer todo o passo a passo na janela de álgebra, todos os professores deveriam utilizar o GeoGebra na aplicação de conteúdos mais difíceis.”

Estudante 7: “A questão é fácil, o que é mais complicado é reconhecer quando o sistema é indeterminado e sem solução, como é caso da letra b, tá mais difícil, porque não encontro a solução, colocando no GeoGebra ajuda muito.”

Estudante 12: “No primeiro momento estava um pouco confusa no manuseio com o GeoGebra, não conseguindo visualizar a janela em 3d o que dificultava o acesso a construção gráfica, porém os colegas sempre se ajudavam com algumas dicas entre eles, facilitando a compreensão.” [sic]

Vale salientar que, essa tecnologia fornece uma desenvoltura na visualização, pois facilita a verificação do processo de maneira mais dinâmica e interativa, como relata: *“Achei um pouco complicado o passo dos sistemas 3x3 mas acho melhor evidenciar graficamente utilizando o computador do que fazer manualmente toda conta, muito complexo.”* Os estudantes expõem de fato o quanto apreciaram resolver os sistemas na forma geométrica utilizando o GeoGebra, pois de certo modo facilitou de maneira direta o aprendizado do saber em jogo.

Separamos os encontros 5 e 6 em um tópico particular, pois nele aplicamos a sequência didática final que apresentará a passagem do campo algébrico para o geométrico e analisaremos as praxeologias presente nessa passagem realizada pelos estudantes.

7.3 ANÁLISE DAS PRAXEOLOGIAS DESENVOLVIDAS

No quinto e sexto encontro direcionamos de fato para o desenvolvimento da sequência didática, aqui apresentaremos as praxeologias desenvolvidas pelos estudantes seja de modo individual, como também coletivo de cada uma das questões. Destacamos, portanto os pontos considerados mais importantes de debates, assim não apresentaremos por completo todas as análises extraídas pela turma, pois em alguns pontos houve repetições de praxeologias.

- **Análise Praxeológica das Tarefa 1 e 2**

As tarefas aqui descritas apresentam a mesma natureza, nesta perspectiva colocamos nesse bloco as três para analisarmos as praxeologias desenvolvidas, vejamos o quadro abaixo:

Quadro 6: Tarefas 1 e 2

1- Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

2- Levando em consideração a questão anterior, utilizando o GeoGebra interprete geometricamente o sistema de cada item da questão e realize sua definição.

3- Dado o seguinte sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$ resolva os seguintes itens:

a) Utilizando uns dos métodos aprendidos, resolva o sistema.

b) Agora utilizando o GeoGebra determine a solução desse sistema.

Fonte: A autora, 2024

As tarefas 1 e 2 são questões complementares, a primeira traz os sistemas já montados para que o estudante pudesse através do desenvolvimento de técnicas resolvê-los. A tarefa principal dessa questão foi desenvolver os sistemas, sendo assim as técnicas utilizadas variaram, entre a adição, substituição além da utilização do raciocínio lógico em alguns casos.

O estudante 4 foi um dos que abordou em sua resolução muitos questionamentos que incentivou a turma a pensar em relação a utilização do GeoGebra, discutindo com os colegas de sala várias possibilidades de respostas, não aderindo apenas a uma técnica isolada. Mediante a isso notamos que, o processo de devolução estava presente no sistema didático estabelecido (CHEVALLARD, 2009a) e, conseqüentemente, nas situações didáticas e na validação, pois o estudante tinha o cuidado de compartilhar suas ideias não só com a turma mais também com o professor, como mostra o diálogo abaixo:

Estudante 4: A questão 1 pode ser resolvida sem problemas de cabeça, quando cancelamos as incógnitas automaticamente já descobrimos o valor de x , vocês conseguem perceber isso? Talvez nem o GeoGebra precise utilizar, por saber que será um gráfico que tem solução então ele será um sistema determinado e possível.

Estudante 2: Eu já não conseguiria resolver de cabeça tem que fazer o passo a passo principalmente da letra b que parece que não tem resolução.

Estudante 1: Eu acho que as maneiras de resolução podem variar vai do jeito que cada um quer resolver, eu gosto sempre da substituição, se pudesse em todas varia por esse método. [sic]

Percebemos claramente um diálogo evidenciando as formas de resolução dos estudantes, estabelecendo uma articulação entre as técnicas conhecidas, nesse caso para chegarem à resolução algébrica do sistema que foi apresentado, utilizando o conceito dos diferentes métodos que são estabelecidos. Mediante a isso, consolidaram a mudança de uma OMP para uma OML, apreciando a formulação e a validação em suas respostas, principalmente quando desenvolve as técnicas de resolução sem necessitar da resolução algébrica.

A autonomia e proatividade do estudante, evidencia o quanto está desenvolvendo seus conhecimentos que permitem uma mudança na fase comportamental da compreensão do que está sendo exposto, pois além de desenvolver técnicas diferenciadas para resolução, ele ainda compartilha com os colegas o passo a passo seguido, proporcionando uma interação e troca de saberes que são essenciais em sala. Durante o diálogo, percebe-se o domínio no conteúdo quando repassa seus conhecimentos para outro colega, a técnica ensinada está correta, sabendo assim desenvolver sua resolução algébrica apresentando autonomia. Destaca-se o interesse do estudante em responder com perguntas e questionamentos.

Sobre essa técnica o estudante comenta: “Acho o método da substituição mais adequado para resolução, provavelmente o caminho da adição seria mais complexo para chegar a resolução.” Através desta fala, percebemos que a turma segue técnicas semelhantes na resolução das questões, pois a maioria no item “a” apresenta este raciocínio, como também no

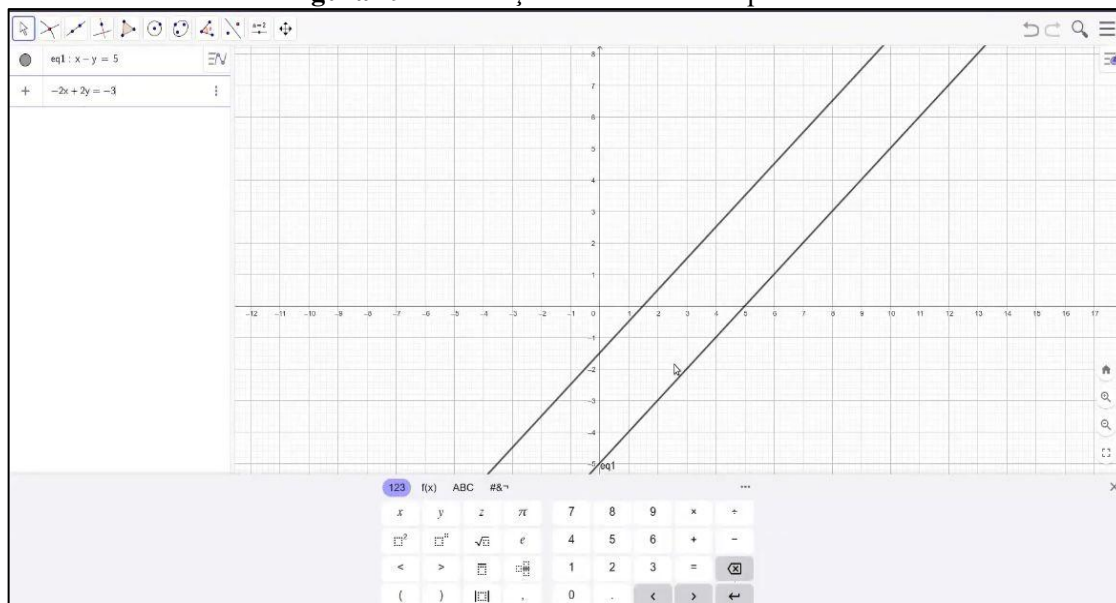
item “c”. Segundo Almouloud (2015, p.11) “para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições.”

No item “b” o estudante não necessitou do auxílio do GeoGebra para verificar que o sistema seria indeterminado, apenas utilizou a técnica da multiplicação: *“Aqui não tem solução porque mesmo multiplicando pelos números presentes na equação, não consigo chegar a nenhum valor que dê para cancelar a incógnita de maneira correta.”*

Já o estudante 1 apresenta no item b uma dificuldade em desenvolver os sistemas, pois ele não reconheceu a inexistência de um par ordenado que correspondia a esse sistema de equação, por ser um sistema impossível. Nesta perspectiva, apenas na questão 2 que exibiu a tarefa de utilização do GeoGebra para a interpretação geométrica do sistema de cada item da questão 1, foi que o aluno percebeu que se tratava de um sistema impossível (SI) que não apresentava solução.

Observamos abaixo a resolução dos sistemas através da exposição gráfica no GeoGebra, o estudante utiliza o passo a passo corretamente e percebe que as retas são paralelas definindo um sistema impossível:

Figura 49 - Resolução Geométrica da questão 2



Fonte: Estudante 1

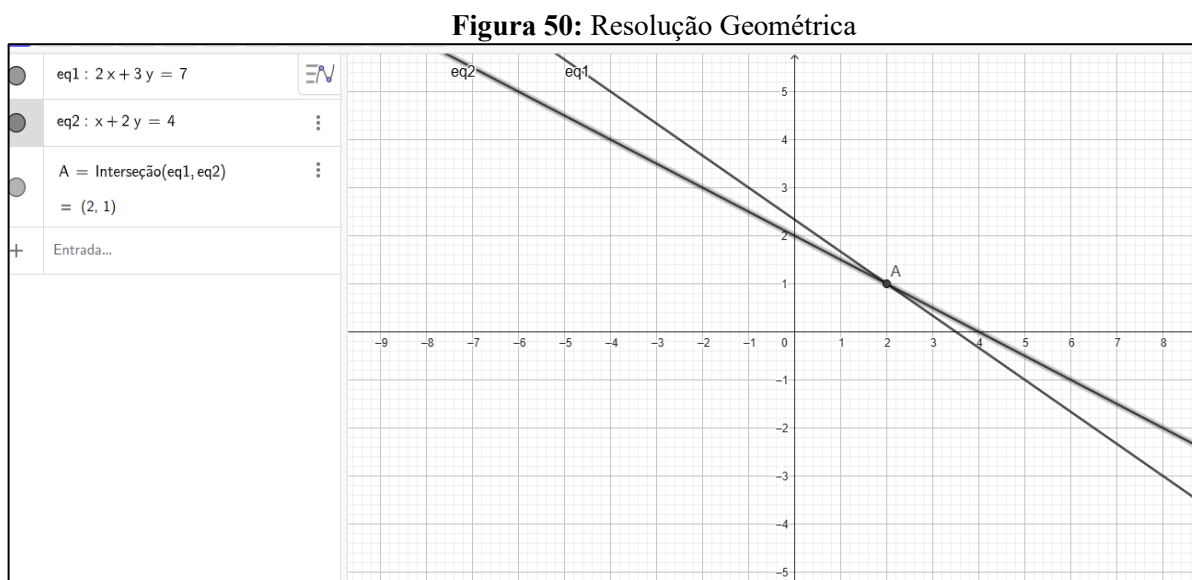
Vejamos ainda que a técnica utilizada no GeoGebra sempre é a mesma para todos os estudantes, pois precisará escrever a equação uma de cada vez, na aba de tarefas para que assim na janela de visualização seja possível exibir o gráfico no eixo quadriculado.

Compreendemos quando o autor Rossini (2006, p.26) destaca que o “Como resolver a tarefa é o motor gerador de uma praxeologia: é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve

ser justificada por uma tecnologia, a qual, no que lhe concerne, precisa ser justificada por uma teoria.” O estudante consegue interpretar na prática o que está desenvolvendo, sua percepção sobre a tarefa é mutável, como foi o caso do estudante 1 que através da manipulação do GeoGebra percebeu uma resolução que não foi desenvolvida na perspectiva algébrica.

Na realização dos cálculos desenvolvidos pelos estudantes, não houve participação efetiva da pesquisadora/docente em interpor que aceitassem, pois nesse momento era importante desenvolver a autonomia caracterizando uma aceitação do problema.

As dificuldades apresentadas podem estar relacionada à mudança de uma organização matemática pontual para uma organização matemática local (CHEVALLARD, 1999), o que implica a articulação das técnicas por parte do estudante. Percebemos que no GeoGebra o conjunto solução do sistema era (2, 1), como vemos no gráfico apresentando:



Fonte: Estudante 5, 2024

Estudante 5: Possivelmente segui um caminho errado nessa resolução da letra c aqui no GeoGebra tá outro resultado o que será que errei professora?

Estudante 7: Eu acho que você deve tá errando algum passo simples e nem tá percebendo, o resultado correto é o que tá no GeoGebra ele nunca erra (risos).

Estudante 8: Professora poderia me explicar, eu sei que o GeoGebra é legal mas se eu depender só da resposta sem saber o que errei quando não tiver ele vai errar de novo.[sic]

Percebemos a preocupação do estudante em descobrir onde foi o erro no desenvolvimento do item após a explicação e verificação no GeoGebra, refazendo todo o processo de resolução e reorganizando suas respostas. Se faz importante ações desse tipo em sala, pois aqui percebemos o protagonismo estudantil.

- **Análise Praxeológica da Tarefa 3**

Nas três primeiras questões iniciais que seguiam particularmente o mesmo tipo de tarefa, notamos que os estudantes utilizam técnicas usuais seguindo um padrão comum para resolução do que estava sendo proposto.

Quadro 7 -Tarefa 3

3- Dado o seguinte sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$ resolva os seguintes itens:

a) Utilizando uns dos métodos aprendidos, resolva o sistema.

b) Agora utilizando o GeoGebra determine a solução desse sistema.

Fonte: A autora (2024)

O estudante 4 apresentou dificuldades no que tange ao passo a passo, sendo assim o resultado da terna ordenada é (7, 3) e o estudante chegou a (-3, -7) conforme mostra a imagem abaixo:

Figura 51: Resolução da tarefa 3 algebricamente

$$\begin{aligned} & \text{3.} \quad \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = -10 \end{cases} \\ & \quad 2x = -6 \\ & \quad x = \frac{-6}{2} \\ & \quad x = -3 \\ & \quad -3 - y = 4 \\ & \quad -y = 4 + 3 \\ & \quad -y = 7 \quad \cdot (-1) \\ & \quad y = -7 \end{aligned}$$

Fonte: Estudante 4, 2024

Vejamos que a tarefa é clara, solicita a resolução do sistema já desenvolvido e a técnica de resolução fica a critério do estudante em utilizar um dos métodos aprendidos. Assim a técnica utilizada foi a da adição, na qual realiza o cancelamento da incógnita y de ambas as equações, porém acontece um erro quando o estudante coloca na segunda equação depois da igualdade o -10, sendo que é positivo, por conta disso a resposta final é incorreta. Logo percebemos aqui uma praxeologia matemática, que está relacionada com a construção Matemática ligada às situações didáticas. Segundo Rodrigues (2018) o conjunto de organizações (OM e OD) permite analisar a prática durante as situações de ensino e aprendizagem.

Já a estudante 8 na resolução algébrica empregou o método da adição, na qual foi multiplicado por 2 a primeira equação para que assim chegasse à solução do sistema, sendo (7, 2). A técnica utilizada é usual, aqui temos os tipos de tarefas e técnicas utilizadas em outros problemas semelhantes que podem apresentar equipamentos praxeológicos necessários para a resolução, como vemos na figura abaixo:

Figura 52: Resolução da tarefa 3 algebricamente

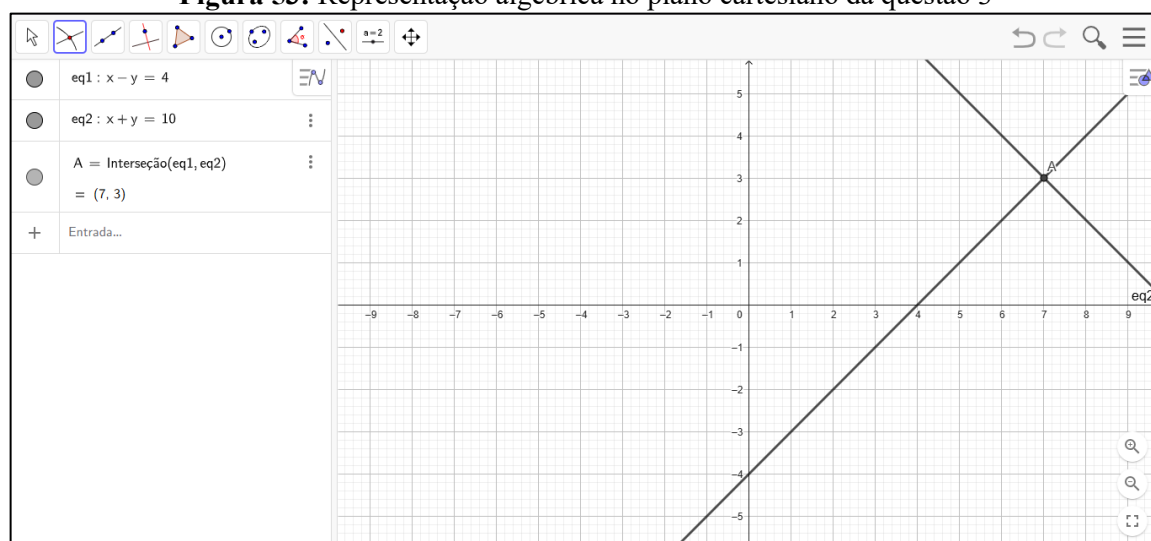
The image shows a handwritten solution for a system of linear equations. It starts with a circled '3' followed by 'a)' and a system of equations: $\begin{cases} x - y = 4 & \cdot (2) \\ x + y = -30 \end{cases}$. Below this, the equations are manipulated: $2x = 14$ leads to $x = \frac{14}{2}$ and then $x = 7$. Simultaneously, $7 + y = 10$ leads to $y = 10 - 7$ and then $y = 3$. The final solution is given as $S = (7, 3)$.

Fonte: Estudante 8, 2024

Na construção gráfica é seguido as técnicas para resolução a estudante abre a janela da álgebra e adiciona as equações de maneira fácil, como ela destaca;

Estudante 8: *A janela da aba de visualização das ferramentas traz todos os recursos para resolver a questão, logo o gráfico é apresentado quando a gente coloca a equação, só tive um pouco de dificuldade ao destacar o ponto que é a solução, mas segui algumas técnicas diferentes.*

Vejamos a construção geométrica:

Figura 53: Representação algébrica no plano cartesiano da questão 3

Fonte: Estudante 8, 2024

Segundo Rodrigues (2019) “neste caso, nós os relacionamos à complexidade crescente das organizações matemáticas, nas quais a sua evolução é ocasionada pelo acúmulo de técnicas de maneira articulada, de forma a promover um aumento na compreensão das tecnologias e de suas teorias.”

- **Análise Praxeológica das Tarefas 4 e 5**

As tarefas aqui percorridas apresentam a mesma organização no quesito resolução, como vemos abaixo:

Quadro 8 - Tarefas 4 e 5

4- Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R\$324,00 na venda de 33 sanduíches. Sabendo que o sanduíche de frango custa R\$8,00, e o vegetariano custa R\$12,00. Responda os itens a seguir:

- Escreva um sistema de equação que represente a situação apresentada.
- Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas naquele dia?
- Utilizando o GeoGebra intérprete e classifique geometricamente o sistema.

5- Durante uma visita à padaria, Kárita comprou 2 pedaços de bolo de cenoura e uma dose de café, pagando, ao todo, R\$ 3,50. Sua irmã, Karla, comprou 1 pedaço de bolo de cenoura e 2 doses de café, pagando um total de R\$ 2,50. Analisando essa situação, resolva os itens abaixo:

- a) Se uma pessoa comprar 1 pedaço de bolo de cenoura e 1 café, qual o valor pago por ela?
- b) Utilizando o GeoGebra determine a solução do sistema formulado no item “a”.

Fonte: A autora , 2024

A tarefa 3 traz em seu enunciado uma situação problema que foi definida como a tarefa 1, dividindo-se em subtarefas do tipo:

T, 1, 1: Escrever o sistema de equação que define a situação

T, 1, 2: Resolver o sistema para descobrir quantos sanduíches teriam sido vendidos

T, 1, 3: Resolver algebricamente o sistema

Identificou-se a representação geométrica, mas não a algébrica, dessa forma há uma concepção do objeto matemático como equações de duas variáveis, mas de forma fragmentada, pensando que há apenas uma maneira de representá-lo. Sobre essa perspectiva, Silva (2014, p. 25) defende que “um estudante de matemática que disponha de apenas uma forma de representar determinado objeto certamente confundirá o conteúdo da representação com o conteúdo do objeto, ou seja, vai achar que o objeto está dado de todo em sua representação.”

Na montagem do sistema na questão 4, analisamos de modo geral que os estudantes não conseguem interpretar corretamente os dados das duas equações presente no sistema. A natureza antropológica da análise assume a hipótese de que é necessário romper as inúmeras fronteiras institucionais pelas quais estamos acostumados a transitar, visto que uma análise praxeológica é sempre um recorte do mundo social. (Cavalcante, 2018, p.127)

O estudante 3 por exemplo, apresenta um passo a passo incorreto na técnica de resolução, embora o sistema esteja montado corretamente o processo seguido foi realizado de maneira incorreta, pois a terna ordenada que corresponde o sistema seria 18 sanduíches de frango e 15 sanduíches vegetarianos, vejamos a resposta do estudante:

Figura 54 - Resolução da questão 4

4. a) $x + y = 33$
 $8x + 32y = 324$

b) $x + y = 33 \quad \cdot (-8)$
 $\cancel{8x} + 32y = 324$

 $\cancel{-8x} - 8y = 264$
 $4y = 588$
 $y = \frac{588}{4} = 147$

$x + y = 33$
 $x + 147 = 33$
 $x = 33 - 147$
 $x = -114$

$147 \quad 12$
 $27 \quad 32,25$
 30
 60
 (0)

$134 \quad 18$
 $34 \quad 14$

$R = \text{Jonam vendedores } 12,25$
 $\text{Vegetarianos } e 14$
 frango.

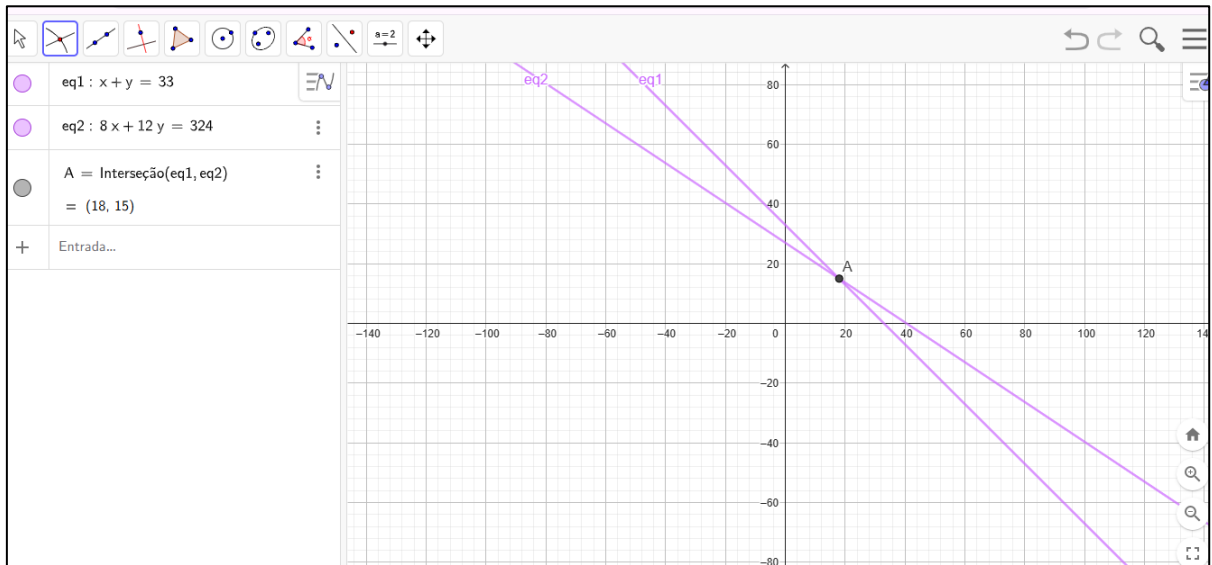
Fonte: Resolução do estudante 3, 2024

O estudante recorreu a técnica de adição para resolução do item b, porém bastava isolar a incógnita x para substituí-la na equação. Ainda notamos a utilização da divisão por 12, evidenciando o erro, pois não necessita desse passo final, ele reconheceu que seu processo estava expresso de maneira errada quando partiu para a resolução geométrica no GeoGebra:

“Estudante 3” : Acho que segui um passo a passo errado na letra b, porque aqui no GeoGebra está dando outro resultado diferente do que foi encontrado, o bom de utilizar esse recurso é isso, poder verificar a resposta, dá até pra perceber que o sistema é possível e determinado por causa do gráfico. [sic]

É possível perceber o reconhecimento da classificação do sistema, abaixo veremos a resolução apresentada geometricamente:

Figura 55 - Resolução da questão 4



Fonte: Estudante 3, 2024

Percebemos que no GeoGebra o estudante não apresenta dificuldade ao esboçar graficamente o sistema e chegar na resolução adequada ele segue todo passo a passo de técnicas que permitem uma melhor visualização algebricamente, pois quando se adiciona corretamente as equações o esboço gráfico é expresso. Já estudante 7 comenta: “*Acho mais fácil questão que envolvem algo que acontece no dia, é como se a gente participasse do contexto*” [sic].

Esse argumento do estudante é de fato verídico, em sala de aula quando fazemos um elo que contextualizam uma prática vivenciada em forma de questão, o estudante consegue visualizar com mais precisão o que está aprendendo, vejamos abaixo o caminho seguido pelo estudante:

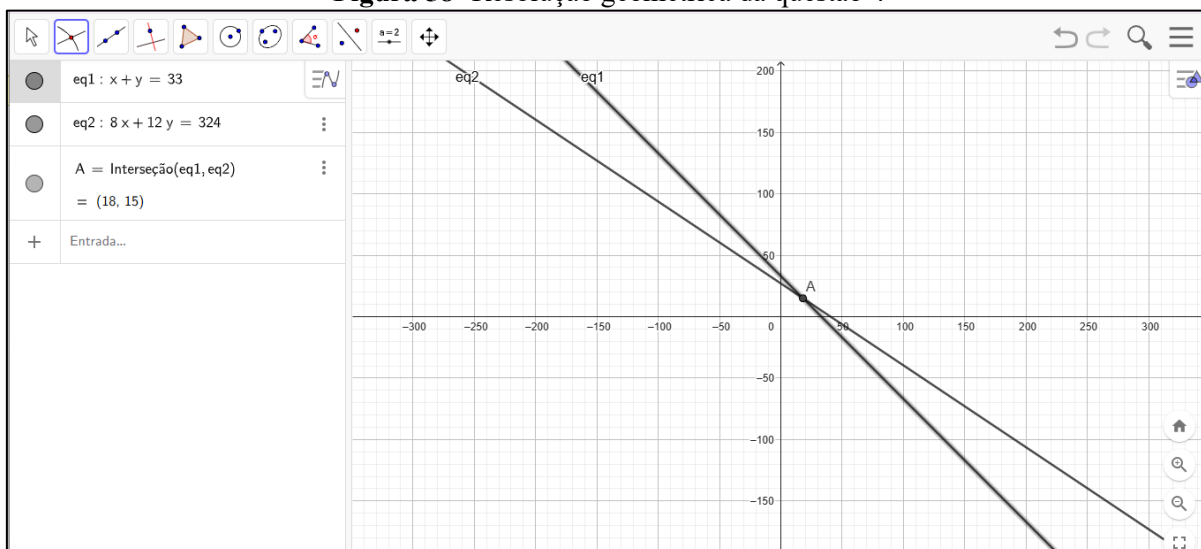
Figura 56: Resolução algébrica questão 4

4- a) $\begin{cases} x + y = 33 \\ 8x + 32y = 324 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + y = 33 \text{ (I)} \\ 8x + 32y = 324 \text{ (II)} \end{cases}$
 Isolando x na incógnita da equação I temos:
 $x = 33 - y$
 Substituindo em II:
 $8(33 - y) + 32y = 324$
 $264 - 8y + 32y = 324$
 $264 + 24y = 324$
 $24y = 324 - 264$
 $24y = 60$
 $y = \frac{60}{24}$
 $y = 15$
 Voltando para equação I:
 $x + y = 33$
 $x + 15 = 33$
 $x = 33 - 15$
 $x = 18$
 $S = \{18, 15\}$

Fonte: Estudante 7, 2024

Claramente o estudante teve o cuidado de numerar cada equação com I e II, para que no processo de resolução pudesse evidenciar as técnicas que estaria seguindo. Notamos que a técnica na qual se é utilizada é a da substituição, para que ao final quando se encontrasse a solução do sistema chegasse também à quantidade de unidades que foram vendidas através da soma do valor das incógnitas. No item “c” a tarefa T1,3 solicitava a construção com a utilização do GeoGebra, aqui a ferramenta tecnológica auxilia na visualização.

No que tange a representação gráfica no primeiro momento foi aberta a aba do GeoGebra para o estudante se situar, sendo que já tinha tido o contato anteriormente com o *software*. Notou-se um pouco de dificuldade por parte do estudante, porque todas as vezes que adicionava a equação não aparecia as retas, depois de algumas tentativas foi possível chegar a solução, vejamos:

Figura 58- Resolução geométrica da questão 4

Fonte: Estudante 7, 2024

Já na quinta tarefa, mais especificamente no item a o estudante 7 apresentou a seguinte resposta:

Estudante 7: “Seguindo a lógica, o bolo custa R\$1,50 e o café R\$0,50 e se a pessoa comprar um bolo mais um café vai dá como valor total R\$ 2,00.” [sic]

Como podemos perceber não foi realizada nenhuma montagem de sistema para resolução do problema, o estudante apenas deduziu pela lógica a resposta correta.

A técnica utilizada foi a da substituição e depois da adição, e em alguns momentos não registrou o passo a passo, percebemos que ele tomou por base alguns exemplos anteriores para facilitar o desenvolvimento da resolução, iniciando-se através de casos particulares até chegar na sua generalização, assim ele se fundamenta na tecnologia da indução matemática, tecnologia que, naquele momento, não foi mencionada por nenhum dos sujeitos. A praxeologia na TAD pressupõe um método para analisar as práticas que ocorrem no interior das Instituições, tanto pela sua descrição, quanto pelas condições em que estas ocorrem. A organização praxeológica diz respeito, portanto, ao modo como as práticas instituições são propostas (discurso) e efetivadas (prática).

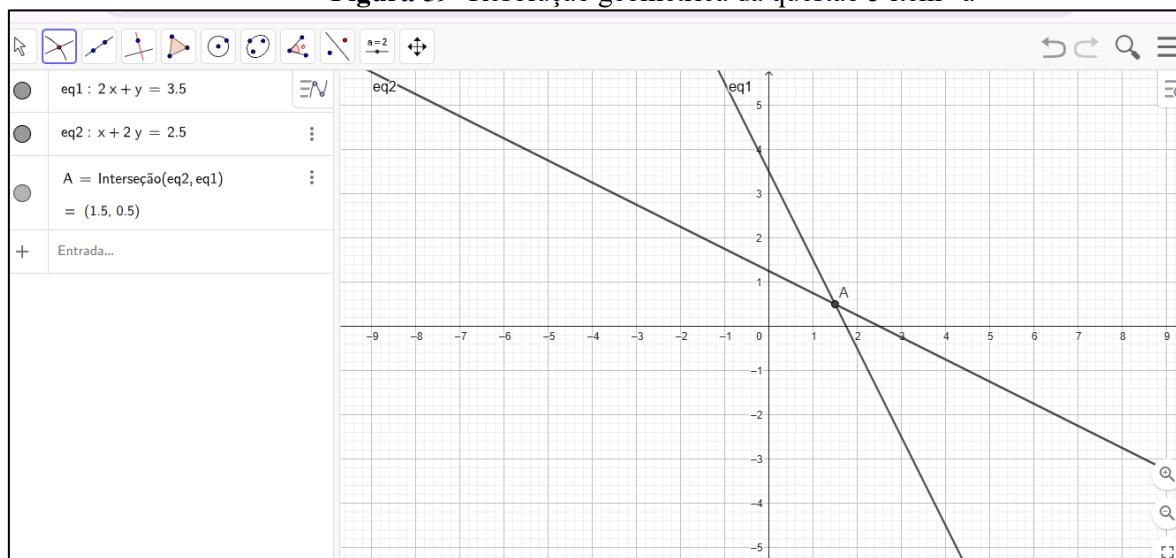
Quando questionados pelos colegas o estudante 5 destaca:

Estudante 1: Não compreendi como você chegou a uma resposta correta se o passo a passo está um pouco confuso...

Estudante 5: É que utilizei as duas técnicas de resolução que foram aprendidas durante as aulas e consegui chegar no resultado sem precisar me estender, fui logo para a questão do GeoGebra quando achei a solução só testei no sistema.

Essa falta de fundamentação tecnológica (RODRIGUEZ; BOCH; GASCÓN, 2007), expressa pelos sujeitos, reforça a ideia da utilização da técnica pela técnica, observada quando o estudante não soube explicar o porquê do percurso seguido para resolução, ficou evidenciado que foi contrário, pois primeiramente encontrou a solução no GeoGebra através da visualização geométrica, para depois resolver a algébrica, como mostra a figura:

Figura 59- Resolução geométrica da questão 5 item “a”



Fonte: Estudante 5, 2024

Sobre essa perspectiva é possível notar a prática de uma organização matemática local (OML) que “compõe-se da interação de várias OMPs, validadas e justificadas por uma tecnologia, com a finalidade de fundamentar as organizações que fazem parte da OML” (Rodrigues, 2019, p. 46). Dessa forma, segundo Chevallard (1999, apud Velenzuela, 2007, p.24) “a organização local agrega várias organizações pontuais, via uma tecnologia comum, isto é sua integração no centro de uma organização regional regida por uma mesma teoria.”

- **Análise Praxeológica da Tarefas 6**

A tarefa 6 foi a única tarefa que apresentava sistemas 3×3 na qual solicitava que o estudante realizasse a resolução algébrica e gráfica, como mostra abaixo:

Quadro 9- Tarefa 6

Determine, graficamente através do GeoGebra e algebricamente, a solução do sistema a seguir:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = -5 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

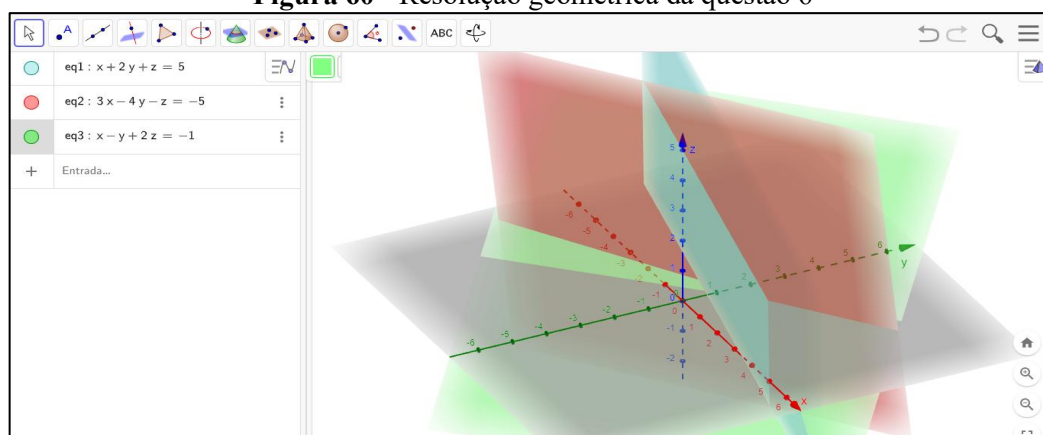
Fonte: A autora, 2024

Poucos estudantes de fato conseguiram desenvolver a resolução algébrica da tarefa, pois argumentavam que nunca tinham estudado nas series anteriores tal conteúdo:

Estudante 9 : “Não consegui fazer manualmente todo processo porque não tinha estudado nos anos passados, mas no GeoGebra acho muito dinâmico, olha é só abri a janela de visualização 3d e começar fazer todo o passo a passo na janela de álgebra, todos os professores deveriam utilizar o GeoGebra na aplicação de conteúdos mais difíceis.” [sic]

Notamos uma maior facilidade na construção geométrica do dos sistemas 3x3. O estudante 9 ao digitar a equação I o plano em três dimensões já estava visível e assim repetiu o processo nas demais equações, o aluno teve o cuidado nesse momento em destacar as cores dos planos para que se diferenciam um do outro, como mostra a figura abaixo:

Figura 60 - Resolução geométrica da questão 6



Fonte: Estudante 9, 2024

Ainda nesse passo, o estudante demonstrou o cuidado em realmente manipular o GeoGebra:

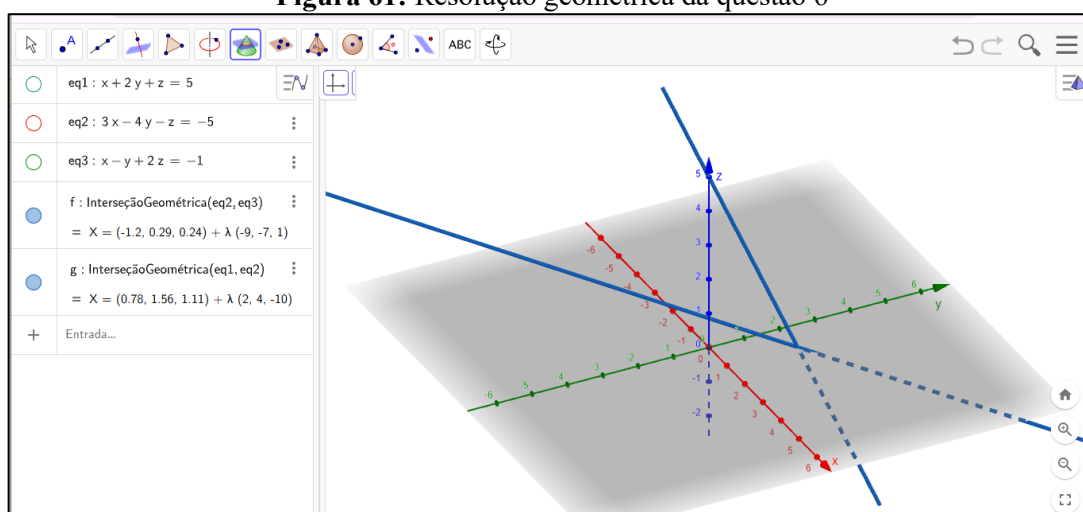
Estudante 4: Olha consigo rodar os planos e visualizar eles realmente em três dimensões, que top! Tá vendo ai estudante 6?

Estudante 7: Dessa função eu não sabia, por isso que acho interessante esse GeoGebra, mas ainda não estou conseguindo fazer a manipulação dos sistemas 3x3, acho difícil e na sala de aula não aprendemos tanto.

Estudante 9: Se fosse pra desenhar isso manualmente ia ser muito difícil, porque até a resolução no caderno fica mais complicado. [sic]

Notamos que o estudante 4 possuía o domínio de técnicas mais elaboradas, preocupando-se com a estética da sua representação. Assim, passou de uma OMP para uma OML, mas não podemos afirmar se compreendeu a sua utilização e a sua fundamentação. Ao prosseguir na resolução para descobrir a solução dos três o estudante indagou sobre o passo seguinte que seria a intercessão de duas superfícies, assim ele selecionou a equação II e III e instantaneamente a reta apareceu, repetindo o processo, porém com as equações I e II para visualizar melhor o estudante apagou os planos e deixou apenas as retas, como mostra a figura:

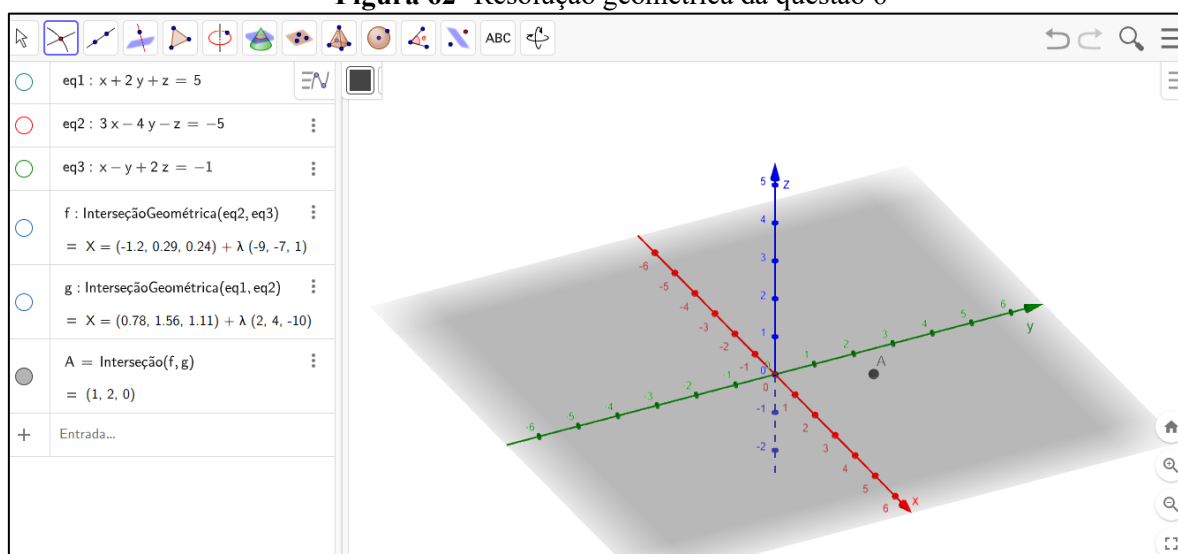
Figura 61: Resolução geométrica da questão 6



Fonte: Estudante 9, 2024

A técnica utilizada, traz uma organização no quesito visualização, pois ocorre uma verificação mais precisa de todo passo a passo que está sendo realizado. Por conseguinte, o estudante continuou na resolução, marcando agora a interseção entre dois pontos, destacando as duas retas e chegando na terna ordenada que é a resolução do sistema 3x3 apresentado, sendo este o ponto A optando por deixar visível apenas o ponto na qual representaria essa resolução, como mostra a figura:

Figura 62- Resolução geométrica da questão 6



Fonte: Estudante 9, 2024

No diálogo entre a turma, percebemos que o estudante 9 deixou claro que não conseguiu desenvolver a questão 6. Embora tenha sido explicado em sala previamente como acontecia a resolução, eles tiveram extrema dificuldade, alguns tentaram resolver, outros utilizaram apenas o recurso do GeoGebra. Compreendemos, portanto, que a dificuldade dos estudantes em responderem a essa questão pode estar relacionada à mudança de uma OMP para uma OML, mas também a necessidade de uma maior articulação entre as técnicas, e, conseqüentemente, de sua compreensão tecnológica.

Na maioria das vezes os estudantes buscam reproduzir o que aprenderam pelo professor para conseguir resolver sem estabelecer uma relação entre a técnica e a sua tecnologia, porém no caso do sistema 3x3 eles ainda não haviam estudado em sala de aula, porque este conteúdo é complexo e na maiorias das vezes os docentes optam por não aplicarem, devido não ser um conteúdo cobrado com frequência nas avaliações externas, como por exemplo o ENEM, já os sistemas 2x2 são apresentados desde o ensino fundamental e perpassam para o médio.

Vejamos agora a tarefa resolvida algebricamente pelo estudante 7, vale ressaltar que alguns seguiram essa mesma linha de resolução.

Figura 63 - Resolução algébrica da tarefa 6

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = -5 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$3 \cdot L_1 - L_2:$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicando $\frac{1}{2} - L_2$ $\frac{1}{22} - L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 5y + 2z = 10 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fonte: Estudante 7, 2024

Ao chegar no sistema escalonado o estudante inicia o procedimento de resolução da seguinte maneira:

Figura 64 - Resolução algébrica da tarefa 6

Substituindo na equação II:

$$\begin{aligned} 5y + 2 \cdot 0 &= 10 \\ 5y &= 10 \\ y &= \frac{10}{5} \\ \boxed{y = 2}
 \end{aligned}$$

$z = 0$ e $y = 2$ equação I:
 $x + 2 \cdot 2 + 0 = 5$
 $x + 4 = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$S = (1, 2, 0)$

Fonte: Estudante 7, 2024

É retrata bem as técnicas desenvolvidas através do escalonamento do sistema para a forma de matriz, essa técnica consiste em um método para resolver sistemas de equações lineares, quando existe solução, além de ser utilizado também para classificar estes sistemas que podem possuir quaisquer ordens. A natureza prática da técnica permite a coexistência de várias técnicas para uma mesma tarefa. Consideramos então que, em relação às técnicas, podemos destacar a sua natureza, na qual nem sempre é algorítmica, nos fazendo compreender que não seguem um tipo de sequência lógica convencional. Basta pensarmos que existem

tarefas em determinadas instituições cujo cumprimento pressupõe soluções criativas (Chevallard, 1999).

Primeiramente ocorreu a escalonização do sistema, onde foi modificado suas equações e termos obtendo um novo sistema escalonado, sendo equivalente ao primeiro, pois possuem as mesmas soluções. Após esse processo, foi possível isolar as incógnitas das equações seguindo um passo a passo necessário, para chegar até a terna ordenada $(1, 2, 0)$ sendo está a solução do sistema. No próximo tópico veremos a síntese dessas organizações.

7. 4 SINTESE DAS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS

Baseando-se na tese de Almeida (2016), que apresentou uma síntese ao final das análises dos momentos de aplicação de sua pesquisa, seguiremos aqui um padrão semelhante, porém focando nos dois últimos momentos de aplicação da sequência didática. Sendo assim, apresentaremos um quadro que remonta as principais tarefas, técnicas e tecnologias desenvolvidas pelos estudantes nesse processo.

As organizações matemáticas apresentadas abaixo, retrata as 6 tarefas que foram apresentadas na sequência didática, sendo elas: T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 e T_6 . Mediante aos tipos de tarefas apresentaremos as técnicas e tecnologias mais utilizadas pelos estudantes. Agrupamos as tarefas que apresentam a mesma natureza de técnicas para resolução, como vemos no quadro abaixo:

Tipos de tarefa:

- T_1 : a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$
- T_2 : Interpretar Geometricamente os sistemas anteriores no GeoGebra
- T_3 : Resolução algébrica e geométrica: $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Quadro 10 - Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes nas Tarefas 1, 2 e 3

Estudantes	Estudantes 1, 4, 5, 7 8, 12 e 15 (sete estudantes)	Estudantes 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13 e 14 (oito estudantes)
Técnicas	t_{MA} : Método da Adição t_{RL} : Raciocínio Logico t_I : Igualdade t_{CG} : Construção Geométrica	t_{MS} : Método da Substituição t_{CG} : Construção Geométrica
Elementos Tecnológicos	θ_{SL} : Sistemas Lineares 2x2 θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_H : Sistemas Homogêneos e não Homogêneos	θ_{SL} : Sistemas Lineares 2x2 θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_H : Sistemas Homogêneos e não Homogêneos

Fonte: A autora, 2025

No quadro acima dividimos as organizações através das praxeologias realizadas pelos estudantes, sendo assim os estudantes 1, 4, 5, 7 8, 12, 15 desenvolveram na resolução das tarefas T_1 , T_2 e T_3 aqui destacadas as seguintes técnicas: t_{MA} : Método da Adição; t_{RL} : Raciocínio

Logico; t_I : Igualdade e t_{CG} : Construção Geométrica. Ao decorrer dessas tarefas apresentava-se os subtipos de tarefa, sendo o caso da T_3 , onde o estudante deveria além a resolução algébrica realizar a geométrica. Já os estudantes 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13 e 14 aderiram apenas a três dessas técnicas, dois destes não conseguiram chegar à resolução correta.

Percebemos que de maneira geral a tarefa da resolução geométrica foi considerada a mais fácil pelos alunos, pois a maioria conseguiu desenvolver sem apresentar dificuldades. Já a construção algébrica ainda notamos um pouco de dificuldades.

Tipos de Tarefas:

- T_4 : Escrever o sistema que apresenta contextualizado, representá-lo e classificá-lo geometricamente.
- T_5 : Escrever o sistema que apresenta contextualizado, representá-lo e classificá-lo geometricamente.

Quadro 11 - Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes nas Tarefas 4 e 5

Estudantes	Estudantes 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14 e 15 (nove estudantes)	Estudantes 1, 2, 5, 8, 12 e 13 (Seis estudantes)
Técnicas	t_{IGS} : Montagem do Sistema t_{MS} : Método da Substituição t_{RL} : Igualdade t_{IGS} : Interpretação Geométrica do Sistemas	t_{MA} : Método da Adição t_{MS} : Montagem do Sistema t_{CG} : Construção Geométrica
Elementos Tecnológicos	θ_{RPG} : Representação gráfica no plano θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_H : Sistemas Homogêneos e não Homogêneos	θ_{RPG} : Representação gráfica no plano θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_H : Sistemas Homogêneos e não Homogêneos

Fonte: A autora, 2025

As tarefas T_4 e T_5 são semelhantes, pois abordam uma contextualização e suas subtarefas, onde o estudante precisará montar o sistema e resolvê-lo tanto de modo algébrico como também geométrico, alguns estudantes seguiram o padrão utilizado na tarefa 2. Os estudantes 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14 e 15 seguiram as seguintes técnicas: t_{IGS} : Montagem do Sistema; t_{MS} : Método da Substituição; t_{RL} : Igualdade e t_{IGS} : Interpretação Geométrica do

Sistemas. Já seis destes abordaram na resolução três técnicas, sendo elas: t_{MA} : Método da Adição, t_{MS} : Montagem do Sistema e t_{CG} : Construção Geométrica.

- T_6 : Determine, graficamente através do GeoGebra e algebricamente, a solução do sistema a seguir: a) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = -5 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ e b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$

Quadro 12 - Organização Matemática desenvolvida pelos estudantes na Tarefa 6

Estudantes	Estudantes 1, 5, 8, 10, 12 e 13 (Cinco estudantes)	Estudantes (2, 3, 7 e 15) Quatro estudantes
Técnicas	t_{MS} : Método da Substituição t_{RL} : Escalonar Matriz t_I : Igualdade t_{CG} : Construção Geométrica	t_{MA} : Método da Adição t_I : Isolamento t_{RL} : Escalonar Matriz t_{CG} : Construção Geométrica
Elementos Tecnológicos	θ_{SL} : Propriedades dos Sistema Lineares θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_{EIM} : Escalonamento e Inversão de Matrizes:	θ_{SL} : Propriedades dos Sistema Lineares θ_{EUS} : Existência e unicidade da solução θ_{CI} : Compatibilidade e Independência θ_{EIM} : Escalonamento e Inversão de Matrizes:

Fonte: A autora, 2025

Na tarefa seis, podemos notar que nem todos os estudantes conseguiram desenvolver a resolução algébrica da tarefa dos sistemas 3×3 , apenas a geométrica. Os estudantes 1, 5, 8, 10, 12 e 13 abordaram as seguintes técnicas: t_{MS} : Método da Substituição; t_{RL} : Escalonar Matriz; t_I : Igualdade e t_{CG} : Construção Geométrica. Já quatro optaram por: t_{MA} : Método da Adição; t_I : Isolamento; t_{RL} : Escalonar Matriz e t_{CG} : Construção Geométrica. Os demais não conseguiram resolver corretamente ou nem chegaram a tentar, visto que já tinham uma ideia formada que não conseguiram desenvolver uma resolução necessária.

Acima destacamos os tipos de tarefas, técnicas e as tecnologias que analisamos durante as resoluções apresentadas pelos estudantes na sequência didática. Além das tarefas que foram apresentadas, podemos evidenciar também as subtarefas. Segundo Chevallard (1999, p. 238) “uma OD surge com a intenção de colocar em prática, ou de conduzir, uma OM. Assim, a dinâmica da OD faz com que exista uma articulação com os tipos de tarefas ou subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.”

A OM tem como o principal objetivo a realidade matemática que está sendo envolvida em sala como no caso aqui exposto os sistemas de equações lineares. Segundo Almeida (2016,

p. 288) “as organizações praxeológicas são constituídas de forma dialética entre "organização matemática e organização didática" e são expressas através de pares (OM, OD).”

É nesse contexto que Higueiras e Garcia (2011), ressalta que a partir do momento em que surgem as OM derivando-se das tarefas, técnicas e tecnologias é que surgem as OD, bem como seus momentos didáticos em sala, assim as organizações mantem entre si uma certa dependência.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação, buscou em sua essência responder as seguintes indagações: “Quais as praxeologias utilizadas por estudantes do ensino médio durante a construção da passagem do campo algébrico para o geométrico de um sistema de equação linear utilizando o GeoGebra?” e “Como essa passagem na interpretação geométrica utilizando o software pode contribuir para que os estudantes tenham uma melhor compreensão da razão de ser do conteúdo de sistema linear, quando sua classificação e composição?”.

Para isso delimitamos o nosso objetivo: Analisar a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) as praxeologias utilizadas pelos alunos do ensino médio na passagem do campo algébrico para o geométrico, no estudo de sistemas de equações lineares com a utilização do software GeoGebra.

Buscando respostas para esses questionamentos realizamos primeiramente um mapeamento de pesquisas seguindo a proposta elaborada por Cavalcanti (2015). Sendo assim buscamos através de um mapeamento horizontal e vertical, trabalhos que relacionassem a Teoria Antropológica do Didático (TAD), com o GeoGebra e sistema de equações lineares, verificando pesquisas que apontavam sobre a passagem do campo algébrico para o geométrico, buscando averiguar as possíveis dificuldades apresentadas, para justificar a presente pesquisa.

Foi nesse quesito que verificamos através do mapeamento que são poucos os estudos que utilizam a temática sobre “TAD e GeoGebra”, “Sistemas de equações Lineares e GeoGebra” ou “Sistemas de Equações Lineares e TAD.” Nenhum dos trabalhos encontrados tem sua vertente voltada ao ensino médio.

A partir desse mapeamento percebemos as dificuldades presentes na passagem do campo algébrico para gráfico e para amenizar tais dificuldades apresenta-se como possibilidade o uso do software GeoGebra. É sobre essa perspectiva, que nosso trabalho versou sobre essa temática, propondo assim caminhos para melhorar a prática dos alunos nesse quesito.

Mediante a isso, nossa pesquisa se torna pertinente, pois buscou a luz da TAD realizar uma análise praxeológica das práticas desenvolvidas pelos estudantes do ensino médio na utilização do GeoGebra para realizarem a passagem do campo algébrico para o gráfico do conteúdo Sistemas de Equações lineares, trabalhando com base nas dificuldades apresentadas, para que ocorra uma validação do conhecimento, observando as organizações matemáticas.

A TAD é umas das teorias que auxiliam de maneira direta no ensino da matemática, devido a seus elementos apresentarem aportes suficientes para o desenvolvimento de análises no campo de um determinado saber. É nesse aspecto que Chevarllad (1999) ressalta que situa

toda atividade matemática, dentro de um conjunto de atividade humanas e de instituições sociais. É nesse aspecto que a TAD, estuda o homem frente o saber matemático e que relação ele terá com esse tipo de saber dentro da instituição.

Ainda buscando compreender acerca de como o saber em jogo estava sendo apresentado nas salas de aula, averiguamos a BNCC onde trata sobre o conteúdo de sistemas de equações lineares, percebemos que esse documento reforça a necessidade de abordar aspectos que possuem ligações entre si, como exemplo a formulações de ideias pelo próprio estudante que pode compartilhá-las em sala de aula com seus demais colegas de turma através de argumentações, tornando a escola um ambiente propício a uma aprendizagem conjunta e efetiva.

Existem diversos métodos algébricos que permitem a resolução de sistemas lineares. No Ensino Fundamental por exemplo, se utiliza o método da substituição e o método da adição para resolver sistemas lineares de duas equações e com duas incógnitas, já no ensino médio esses métodos são ampliados para resolver sistemas lineares com mais equações e incógnitas. Podemos ainda salientar que, cada equação presente no sistema linear, sendo este 2×2 possui uma representação gráfica pelos pontos de uma reta do plano, já o sistema linear 3×3 é representada pelos pontos de um plano do espaço.

A fim de melhorar e diversificar cada vez mais o ensino, ressaltamos aqui a importância da utilização de softwares como o GeoGebra. Segundo Abar e Almeida (2017), para o funcionamento da atividade cognitiva requerida pela matemática, a representação semiótica é uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Com a utilização do GeoGebra, é possível desenvolver a capacidade de visualização, pois favorece aos estudantes uma melhor compreensão dos assuntos revisados, além de apresentar várias funções matemáticas, geométricas e algébricas, além da criação de figuras espaciais com visualização em 3D.

Realizamos uma análise do livro didático para servir como norteamento na construção da sequência didática, verificando o capítulo que se apresenta o conteúdo de sistemas de equações lineares, identificando assim as praxeologias presentes na proposta deste conteúdo em relação às tarefas, técnicas tecnologias e teorias, focando na organização matemática. Verificamos também a importância de o livro propor em suas atividades tarefas que apresentem a passagem do campo algébrico, para o geométrico.

Percebemos que o livro abordava praxeologias matemáticas, referindo-se à realidade matemática que pode ser apresentada em sala de aula, porém ainda são insuficientes em alguns aspectos complementares no conteúdo de sistemas de equações lineares que são essenciais para

uma melhor compreensão dos estudantes. A exemplo disso, a representação gráfica dos sistemas que são pouco apresentados, tanto nas exemplificações como no quesito de tarefas.

Quando se trata da passagem da forma algébrica para a geométrica em via gráfica, é possível identificar situações sucintas que são específicas de sistemas lineares 2×2 , os autores não realizam as conversões dos registros nem mesmo apresenta a preocupação em tal possibilidade.

Desse modo, nos baseamos nesses quesitos para o desenvolvimento da nossa sequência didática. Nesta perspectiva, o local de estudo para a aplicação foi uma escola estadual no município de Abaiara, no estado do Ceará, com alunos do 3º ano do ensino médio. Dividimos em 6 momentos distribuídos em aulas, com durações de 50 minutos que aconteceram no laboratório de informática da escola. Os elementos utilizados para a produção de dados foram fotos e gravação de áudios e vídeos, análise do livro didático e da sequência desenvolvida.

Para isso, analisamos as praxeologias desenvolvidas pelos estudantes de maneira individual, bem como coletivamente. Além de observamos a complexidade crescente das organizações matemáticas, verificamos também quais conhecimentos novos (ou não) foram desenvolvidos durante o percurso da construção do saber do aluno.

Nos penúltimos momentos de aplicação podemos notar que na maioria das vezes os estudantes buscam reproduzir o que aprenderam pelo professor, para conseguir resolver sem estabelecer uma relação entre a técnica e a sua tecnologia, porém no caso do sistema 3×3 eles ainda não haviam estudado em sala de aula, porque este conteúdo é complexo e na maiorias das vezes os docentes optam por não aplicarem, devido não ser um conteúdo cobrado com frequência nas avaliações externas, como por exemplo o ENEM, já os sistemas 2×2 são apresentados desde o ensino fundamental e perpassam para o médio.

Os estudantes desenvolveram uma maior prática no que tange a passagem do campo algébrico para o geométrico, ressaltando que o uso do GeoGebra facilita de maneira direta a aprendizagem e a visualização. Rossini (2006, P.26) destaca que o “como resolver a tarefa é o motor gerador de uma praxeologia: é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve ser justificada por uma tecnologia, a qual, no que lhe concerne, precisa ser justificada por uma teoria.”

Eles conseguiram interpretar na prática o que foi desenvolvido expondo sua relação com a tarefa, através da manipulação do GeoGebra perceberam uma resolução que não foi desenvolvida na perspectiva da sua resolução algébrica. Notamos claramente a presença das OM que tiveram como o principal objetivo apresentar a realidade matemática que está sendo envolvida em sala, como no caso aqui exposto os sistemas de equações lineares. Segundo

Almeida (2016, p288) “as organizações praxeológicas são constituídas de forma dialética entre "organização matemática e organização didática" e são expressas através de pares (OM, OD).”

Os participantes do projeto tiveram a oportunidade de desenvolver novos conhecimentos acerca do conteúdo de sistemas de equações lineares, além de apropriar-se das tecnologias digitais, a exemplo o GeoGebra que é um importante aliado na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Além disso, os resultados obtidos através dessa pesquisa poderão servir de apoio para a comunidade acadêmica em trabalhos futuros.

Assim podemos afirmar que nosso objetivo geral do trabalho foi alcançado, pois podemos analisar de fato através das praxeologias como foi realizada essa passagem do campo algébrico para o geométrico pelos estudantes, e como as ferramentas digitais podem ser uma grande aliada nesse processo de modo direto.

Diante do que aqui foi exposto, pretendem-se continuar com a pesquisa abrangendo alguns conceitos mais amplos futuramente, pensando em um doutorado com a construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) voltado para os professores, baseando-se nos resultados dessa dissertação.

9 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. E. L.. **O Contrato Didático e as Organizações Matemáticas e Didáticas:** analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. Tese de Doutorado, 2016.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - UFRPE, Recife, 2016.

ALMOULOUD, Saddo Ag; DA SILVA, Maria José Ferreira. Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution and diversity. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoría antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **UNION-Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 11, n. 42, 2015.

ALMOULOUD Saddo Ag; HENRIQUES, A. **Metodologías cualitativas en la educación de las matemáticas:** aportaciones de la ingeniería didáctica cooperativa y de los duales enfoques didáctico y ergonómico. **PARADIGMA (MARACAY)**, p. 01-35, 2022.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1998.

ARTIGUE, M. (1990). **Epistémologie et Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 10 n° 2.3, p.241-286.

ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. in Margolinas et all.(org.): Enamont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 225-237, 2009.

ANDRADE, Jefferson Jacques. **Registro de representação semiótica: conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software GeoGebra.** 2018. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALMEIDA, Marcio Vieira de. **Geogebra como organizador de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática em uma formação de professores.** Ensino da Matemática em Debate, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 136-144, 2017

BARBOSA, Edelweis José Tavares et al. **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau.** 2017.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; CYRINO, Marcia Cristina de Costa Trindade. Função seno-uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, n. 1, p. CLCLXIV, 2012

BORJONO, José; JÚNIOR, José; SOUSA, Paulo. **Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**. 1ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – **Orientações curriculares para o ensino médio**; vol. 2. Brasília: M

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. 600 p. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf.

Acesso em: 26 jun. 2022.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – **Orientações curriculares para o ensino médio**; vol. 2. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, v. 2, 2008.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetiké, Campinas, v. 25, n. 3, p. 364-387, set./dez. 2017.

BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Vinte e cinco anos da transposição didática**. Boletim ICMI, v. 58, pág. 51-65, 2006. inistério da Educação e Cultura, v. 2, 2008

BROUSSEAU, G. Premières notes sur l'observation des pratiques de classes. **Journée VISA**, INRP, 2008. In: <<http://visa.inrp.fr/visa/reseau/seminaires/journees-inaugurales-14-et-15-mai-2009-1/premieres-notes-sur-lobservation-des-pratiques-de-classe>> (acesso, 06/07/2023).

CAVALCANTI, Jose Dilson Beserra. **A Noção de Relação ao Saber: História e Epistemologia, Panorama do contexto francófono e mapeamento de sua utilização na literatura científica brasileira**. 2015. 159 f. Doutorado em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife Biblioteca Depositária: undefined.

CAVALCANTE, J. L. **A dimensão cognitiva na teoria antropológica do didático**: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática. 2018. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Rechercher en Didactique des Mathématiques**, 12, n.1, 1992

CHEVALLARD, Y.. **Conceitos Fundamentais da Didática**: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.

CHEVALLARD, Y. **Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission**: un point de vue didactique. 1997.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19, nº 2, 1999.

CHEVALLARD, Y. Didactique et formation des enseignants. **Journées d'études INRP-GÉDIAPS Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP (1983-2003)**, 2003.

Chevallard, Y. Organiser l'étude.1. Structures & fonctions. Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. versão eletrônica, disponível em: www.yves.chevallard.free.fr. Acesso em: 15 Jul. 2015.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. 2007.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER : problèmes et avancées**. 2009a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf. Acesso em: 27 ago. 2023.

CHEVALLARD, Y. Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. In: APPRENTISSAGE, DIDACTIQUE, ÉVALUATION, FORMATION, 1., 2009, Lyon. **Anais [...]**. Lyon: UMR, 2009b. p. 1-31. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155. Acesso em: 27 jun. 2022.

DANTES, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1ed. São Paulo: Editora Ática, 2020

FERREIRA, EFP. **A integração das tecnologias digitais ao ensino e aprendizagem de geometria no ensino fundamental–anos finais: uma proposta com foco no estudo de perímetro e área de figuras geométricas planas**. 2016. 185 f. 2016. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

FONSECA, Daniele Amaral et al. **A utilização das tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática: compreensões, desafios e possibilidades**. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 15, n. 2, p. 1-19, 2020.

FONSECA, C. (2004), Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria. **Tesis Doctoral** . Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

FRATUCCI, Vinícius Murilo; MORAN, Mariana. Proposta de uma organização praxeológica para a construção das fórmulas da medida de perímetro e área do fractal ilha de koch. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 25, p. 217-237, 2022.

FIGUEIREDO, Talyta Sampaio et al. Análise da Conformidade de um Modelo Epistemológico de Referência: a Função Quadrática e um Percorso de Estudo e Pesquisa. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 16, n. 2, p. 250-261, 2023.

GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. **Educación e Pesquisa**, 5 (2), 11-37, 2003.

Lima, M. G. ., & Rocha, A. A. S. da . (2022). **As tecnologias digitais no ensino de matemática**. Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação, 8(5), 729–739.

MOROSINI, Marília. Costa.; FERNANDES, Cleoni. Maria. Barbosa. Estado do

Conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções. **Educação Por Escrito**, [S. l.], v. 5, n. 2, p. 154–164, 2014. DOI: 10.15448/2179-8435.2014.2.18875. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/18875>. Acesso em: 19 nov. 2023.

SANTOS, Marcelo Câmara; MENEZES, Marcus Bessa. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

SOUZA, Mariany Layne de. **Teoria APOE e Teoria Antropológica do Didático: um olhar para o ensino de Álgebra Linear na formação inicial de professores de matemática**. 2020 undefined f. Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

RODRIGUES, Rochelande Felipe et al. **Percurso de estudo e pesquisa no conceito de função**: analisando o processo de ensino e aprendizagem e as influências na formação do professor de matemática. 2019.

RODRÍGUEZ, E.; BOSCH, B.; GASCÓN, E. Los recorridos de estudio investigación em La reformulación didáctica del problema de la metacognición. In: RUIZ-HIGUERAS, L.

RODRIGUES, R. F.; DE MENEZES, M. B.; DOS SANTOS, M. C. Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o ensino e aprendizagem do conceito de função. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 13, n. 27, p. 36-50, 2017.

ROSSINI, R. **Saberes Docentes sobre o tema de Função**: Uma investigação das praxeologias. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Puc-SP, 2006.

RUIZ OLARRÍA, Alicia et al. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria**: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. 2015.

VALENZUELA, Silvia Teresinha Frizzarini. **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistema de equações lineares no Ensino Fundamental**. 2007.

VILAÇA, Márcio Luiz Corrêa; ARAÚJO, Elaine Vasquez Ferreira de. Tecnologia, sociedade e educação na era digital. **Duque de Caxias: UNIGRANRIO**, 2016.