



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

TESE DE DOUTORADO

**SISTEMAS COMPLEXOS DESORDENADOS: ASPECTOS
DINÂMICOS E TERMODINÂMICOS**

por

Gustavo Camelo Neto

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Sérgio Galvão Coutinho (Orientador-UFPE)
Profa. Rita Maria Zorzenon dos Santos (UFPE)
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (UFPE)
Prof. José Soares de Andrade Júnior (UFC)
Prof. Roberto Fernandes Silva Andrade (UFBA)

Recife - PE, Brasil
Maio - 2003



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física - CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física

Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+55 81) 3271-8449 / 8450 - Fax (+55 81) 3271-0359
http://www.df.ufpe.br/pg e-mail: posgrad@df.ufpe.br

DF

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Gustavo Camelo Neto

**SISTEMAS COMPLEXOS DESORDENADOS: ASPECTOS DINÂMICOS
E TERMODINÂMICOS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Sérgio Galvão Coutinho (Presidente e Orientador), Rita Maria Zorzenon dos Santos, Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, todos da Universidade Federal de Pernambuco, José Soares de Andrade Júnior da Universidade Federal do Ceará e Roberto Fernandes Silva Andrade da Universidade Federal da Bahia consideram o candidato:

() Aprovado com Distinção (X) Aprovado () Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos dezesseis dias do mês de maio de 2003.



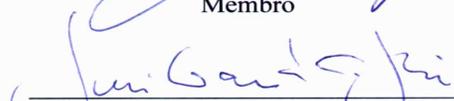
Prof. Sérgio Galvão Coutinho
Presidente e Orientador



Prof. Rita Maria Zorzenon dos Santos
Membro



Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Membro



Prof. José Soares de Andrade Júnior
Membro



Prof. Roberto Fernandes Silva Andrade
Membro

Sistemas Complexos Desordenados:
Aspectos Dinâmicos e Termodinâmicos

Gustavo Camelo Neto

16 de maio de 2003

Resumo

Duas classes de sistemas que apresentam desordem e complexidade foram abordadas nesta tese. Na primeira, no contexto da Mecânica Estatística de Equilíbrio, estudamos os sistemas magnéticos desordenados frustrados conhecidos como *vidros-de-spins* abordando dois problemas. No primeiro, investigamos a estrutura do estado fundamental do modelo de vidros-de-spins de Ising, definidos na rede hierárquica de Migdal-Kadanoff através da análise da distribuição do *link overlap* de um conjunto de pares de réplicas do sistema. Nestas redes o *link overlap* pode ser calculado através de um método recursivo exato em função da temperatura. Os resultados mostram uma forte concordância com o cenário descrito pela teoria de escala, mais conhecido como *droplet model* quando uma distribuição de probabilidades contínua (Gaussiana) para os acoplamentos é considerada, porém com pequenas discrepâncias quando a distribuição inicial de acoplamentos é discreta (Delta bimodal). No segundo problema, estudamos a existência de transições de fase no modelo de vidros-de-spins com variáveis de Potts de q estados definido na rede de Migdal Kadanoff usando o método do grupo de renormalização por decimação. Os resultados para $q = 2$ recuperam, como esperado, aqueles reportados na literatura para o modelo com variáveis de Ising onde a transição de fase vidro-de-spins é observada para redes com dimensão maiores que $d_l(2) \sim 2,5$. Para os casos $q > 2$, o modelo apresenta uma transição de fase para dimensão igual ou acima de certo valor $d_l(q)$. Nestes casos, abaixo de certa temperatura crítica, o fluxo das distribuições de probabilidades renormalizadas evolui para um *atrator estranho* localizado em uma região com temperatura finita em um espaço de parâmetros apropriado. As respectivas temperaturas críticas para vários

valores de q e para várias dimensões d foram obtidas utilizando-se três distribuições de probabilidades iniciais para os acoplamentos: a distribuição gaussiana, a distribuição uniforme e a distribuição delta-bimodal, todas com média nula e variância unitária. O valor da temperatura crítica correspondente à distribuição de “ponto-fixo” também foi estimado.

Na segunda classe de sistemas complexos, num contexto dinâmico e fora do equilíbrio, consideramos um modelo tipo *autômato celular* para descrever a dinâmica da propagação de incêndios florestais em ambientes heterogêneos, isto é, com populações de árvores com distintos graus de resistência à queima. Esse modelo generaliza o modelo de propagação de incêndios em florestas homogêneas, considerado na literatura como um dos paradigmas para se investigar sistemas que apresentam *criticalidade auto-organizada*. Uma análise de escala das distribuições do tamanho e do tempo de duração das queimadas mostra que a presença de árvores com grau de resistência acima de certo valor crítico provoca uma quebra no comportamento crítico auto-organizado do sistema. Isto é, ao invés de evoluir para um estado estacionário com queimadas sem escalas de tempo ou tamanho característicos, o sistema evolui para um estado estacionário com queimadas relativamente pequenas e com tempos de duração bem característicos. Observações realizadas mostram que o modelo heterogêneo é mais apropriado para descrever incêndios reais.

Abstract

Two classes of systems exhibiting disorder and complexity are studied in this Thesis. In the first one, concerning to equilibrium statistical mechanics, two models for disorder frustrated magnetic systems such as spin glasses are considered: the spin-glass Ising model (SGIM) and the Potts glass model (PGM) both defined on Migdal-Kadanoff hierarchical lattices. The nature of the condensed phase of the SGIM is investigated by means of the distribution of the *link overlap* between the configurations of pairs of replicas, which by it turns are calculated as a function of the temperature via an exact recursion procedure, which encompass the real space renormalization decimation scheme. The results lead to strong evidences that the condensed phase is well described within the scenario emerging from the scaling theory (*droplet model*) for continuous (Gaussian) probability distribution of coupling constants, whereas particular discrepancies are observed in the very low temperature behavior as far as the discrete delta-bimodal probability distribution is concerned. Regarding to the q -state Potts glass model the existence of phase transitions between the disordered and a condensed phase is investigated studying the flow of the renormalized probability distribution of coupling constants in an appropriated parameter space. A continuous transitions is found to be present in models with $q \geq 2$ and dimensions above certain $d_l(q)$. For $q = 2$ (Ising model) results previous reported in the literature are recovered indicating a phase transition for systems with dimension greater than $d_l(2) \sim 2.5$ with the flow evolving toward either to the infinite or to the zero temperature fixed point distribution. However, for $q \geq 3$ an indication of

phase transition is obtained as far as, below certain critical temperature, the renormalized flow evolves toward a *strange attractor* located at a finite temperature region of the appropriated parameter space. The corresponding critical temperatures for several values of q and dimensions d are estimated considering three distinct initial probability distributions for the couplings, namely the Gaussian, the uniform and the delta-bimodal ones, all with zero mean and unitary width. The critical temperature corresponding to the unstable fixed point distribution, which actually governs the transition are also estimated.

In the second class of complex systems the dynamical behavior of the far from equilibrium forest fire model is studied using a *cellular automata* which contains states corresponding to sites (trees) with two distinct degrees of resistance to burn. This model generalizes the forest fire model with homogeneous population of trees, reported in the literature as one of the paradigms to study systems presenting *self-organized criticality*. A scaling analysis of the distributions of the size and the duration of the fires is presented indicating the breakdown of the power law behavior observed in the homogeneous model, as far as trees with resistance degree above certain critical value are present in the forest. In the latter case instead to evolve to an stationary state without characteristic size and time scale the fire becomes restricted to small regions with characteristic size and concomitant time duration. When compared with real data, however, the studied model seems to be more appropriated to describe real events.

Agradecimentos

Gostaria de demonstrar minha profunda gratidão a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Em particular:

Ao professor Sérgio Coutinho, pela orientação sempre democrática e pela amizade e respeito durante 10 anos de convivência;

Aos colegas de grupo, tantos que já passaram e ainda estão passando por aqui que fica até difícil enumerar, portanto, não os enumerarei, para não correr o risco de, traído pela memória, esquecer de algum. A todos eles um muito obrigado, pelas várias discussões sobre muitos dos temas constantes deste trabalho e pela amizade e convivência tranqüila;

A todos os professores e funcionários do Departamento de Física, desta Universidade Federal de Pernambuco, que, ávidos por trabalho e exigentes por qualidade, mantêm um centro de excelência em *Ciência & Tecnologia* numa das regiões mais desacreditadas deste país;

À minha família, que sempre unida, serviu de apoio e referência nos momentos mais difíceis;

A todos os colegas e amigos, que, como eu, também lutam para alcançar o sonho de fazer ciência básica e de qualidade num país subdesenvolvido; e

Ao CNPq, pelo suporte financeiro;

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Vidros-de-Spins	2
1.2	Modelo de Potts	9
1.3	Redes Hierárquicas	12
1.3.1	Topologia das Redes Hierárquicas	14
1.3.2	Modelos de Spin em Redes Hierárquicas	18
1.3.3	As Redes do Tipo Diamante	24
1.4	Criticalidade Auto-Organizada	25
1.5	Objetivos e Organização desta Tese	28
2	Estrutura dos Vidros-de-Spins de Ising na Rede Diamante	30
2.1	Previsões de Campo Médio	32
2.2	Previsões do Modelo de Gotas	33
2.3	Equação de Renormalização para o Modelo de Ising com Réplicas	34
2.4	Relações de Recorrência para a Magnetização Local do Modelo de Ising	38
2.5	Estudo da Distribuição do “Link Overlap”	45
3	Vidros-de-Spins de Potts na Rede Diamante	59

3.1	Equação de Renormalização para o Modelo de Potts	60
3.2	Diagramas de Fases para o Fluxo de Renormalização	63
3.3	Temperaturas Críticas	68
4	Modelo para Incêndios Florestais com Árvores Resistentes	73
4.1	Definição do Modelo	74
4.2	Modelo Simplificado	77
4.3	Expoentes Críticos	79
4.4	Quebra da Criticalidade Auto-Organizada	85
5	Conclusões e Perspectivas	98

Lista de Figuras

1.1	Caso típico de frustração num modelo antiferromagnético.	3
1.2	Configurações de spin no modelo planar com $q = 2, 3$ e 4	10
1.3	Diagrama de validade da solução de campo médio para o modelo de Potts.	12
1.4	Exemplo da formação da rede diamante.	14
1.5	Rede <i>Sierpiński gasket</i> multifoliada.	15
1.6	Exemplo de ligações não iteráveis em redes hierárquicas.	16
1.7	Exemplos das diversas classes de vértices de uma rede hierárquica. . .	17
1.8	Exemplo de Rede Não Uniforme.	18
1.9	Rede Sierpiński “gasket” padrão	19
1.10	Rede diamante com p conexões.	25
2.1	Esquema de renormalização para duas réplicas da rede diamante com p conexões.	35
2.2	Sistema com réplica renormalizada.	35
2.3	Representação de um gerador da rede diamante incrustada numa rede de hierarquia arbitrária. h_μ , $h_{\mu'}$ e μ representam as interações com o restante da rede.	38

2.4	Condições de contorno para a primeira réplica do sistema, juntamente com uma amostra das condições de contorno para a segunda réplica. As ligações azuis representam correlações positivas, +1, as vermelhas representam correlações negativas, -1.	48
2.5	Distribuição média do “Link overlap” na temperatura crítica para as distribuições gaussiana e bimodal dos acoplamentos sobre 100 amostras distintas da desordem.	49
2.6	Distribuição média do “Link overlap” no estado fundamental para as distribuições gaussiana e bimodal dos acoplamentos sobre 100 amostras distintas da desordem.	50
2.7	Comportamento do valor médio do “link overlap” em função do tamanho da rede no estado fundamental para as distribuições gaussiana e bimodal com 100 amostras da desordem.	50
2.8	Comportamento da largura da distribuição do “link overlap” com o tamanho linear da rede para a distribuição gaussiana dos acoplamentos e para várias temperaturas na fase condensada. O decaimento em forma de lei de potência é evidente.	52
2.9	Dependência com a temperatura do expoente ω para o modelo com distribuição gaussiana dos acoplamentos.	53
2.10	Comportamento da largura da distribuição do “link overlap” com o tamanho linear da rede para a distribuição bimodal dos acoplamentos e várias temperaturas. O decaimento em forma de lei de potência não nos parece evidente.	54

2.11	Dependência com a temperatura do expoente ω para o modelo com distribuição bimodal dos acoplamentos, assumindo-se um comportamento do tipo lei de potência para a largura da distribuição do “link overlap”	55
2.12	Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 4$ (2 hierarquias) e no estado fundamental. Cada amostra é representada por uma cor diferente. . .	57
2.13	Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 128$ (7 hierarquias), para a distribuição bimodal dos acoplamentos e no estado fundamental. Cada amostra é representada por uma cor diferente.	58
2.14	Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 16$ (4 hierarquias), para a distribuição gaussiana dos acoplamentos no ponto crítico ($T_c = 0,88$). Cada amostra é representada por uma cor diferente.	58
3.1	Esquema de renormalização da célula fundamental da rede diamante com p conexões.	60
3.2	Diagrama de fluxo para o modelo de Ising ($q = 2$) no espaço $\Delta \times T$. Na ampliação vemos a região onde se localiza o <i>ponto crítico</i> , marcado por um asterisco (*).	66
3.3	Atratores com 100.000 iterações, $q = 3$ e $d = 5$ para as distribuições iniciais gaussiana, bimodal e uniforme. A seta indica o sentido inicial do fluxo.	70

3.4	Ponto crítico para o modelo com $q = 4$ estados de Potts em 6 dimensões. As linhas contínuas representam as distribuições iniciais e as tracejadas a evolução do fluxo. Note a existência do ponto-de-cela, indicado pela seta.	71
3.5	Estimativas da temperatura crítica do modelo com $q = 3$, $d = 5$ para as distribuições iniciais bimodal, gaussiana e uniforme.	72
4.1	Ilustração da vizinhança de Moore na rede quadrada.	75
4.2	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 1$, numa rede quadrada com $L = 10.000$ sítios e levantadas numa amostragem de 10^6 incêndios no estado estacionário.	80
4.3	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 2$, numa rede quadrada com $L = 10.000$ sítios e levantadas numa amostragem de 10^6 incêndios no estado estacionário.	81
4.4	Colapso das distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para o caso $R = 1$. Rede com $L = 10.000$	88
4.5	Colapso das distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 2$. Rede com $L = 10.000$ e $q = 0.5$	89
4.6	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 3$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	90
4.7	Distribuições acumuladas de áreas queimadas em seis regiões florestais. Este gráfico foi retirado de [1], página 240.	91
4.8	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 4$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	92

4.9	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 5$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	92
4.10	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 6$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	93
4.11	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 7$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	93
4.12	Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 8$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.	94
4.13	Flagrante de uma região do sistema com $R = 3$ no estado estacionário em uma rede com $L = 1.000$ sítios de lado e $\theta = 1.000$. Os círculos vermelhos representam as árvores permissíveis, os círculos azuis as árvores resistentes e os brancos os espaços vazios.	95
4.14	Densidade total de árvores ao longo de cada iteração do modelo simplificado para $R = 1$ e $R = 3$, $L = 1.000$ e $\theta = 1.000$	96
4.15	Frente de incêndio atingindo um aglomerado particular em diagonal. Os círculos verdes representam árvores permissíveis, o azul uma árvore resistente e o vermelho uma árvore incendiada. A numeração indica em qual passo a frente incendeia alguma árvore do conjunto.	97

Capítulo 1

Introdução

A Física de sistemas complexos e desordenados vem recebendo grande atenção nas últimas décadas, em vista disso, duas classes de sistemas complexos e desordenados, que despertam particular interesse, foram abordados nesta tese. A primeira, no contexto *termodinâmico*, compreende os *vidros-de-spins* [2–4], a segunda, no contexto *dinâmico* e muito longe do equilíbrio, a *criticalidade auto-organizada*. Vidros-de-spins são sistemas magnéticos desordenados onde as interações entre os *spins* estão em conflito, esse conflito é causado por algum tipo de desordem na estrutura do material, muitas vezes a existência de impurezas ou defeitos [5]. Os vidros-de-spins apresentam um cenário bastante controverso e, ainda hoje, extremamente complexo e pouco compreendido [6]. A criticalidade auto-organizada, por seu lado, é um fenômeno que, acredita-se, pode ocorrer em sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade. Sistemas desse tipo aparentemente evoluem, de forma espontânea, para um estado considerado *crítico*, esse estado é identificado, em analogia com a Mecânica Estatística de Equilíbrio, pela ausência de escalas características, seja de tamanho ou de tempo.

1.1 Vidros-de-Spins

Uma teoria para os *vidros-de-spins* [2, 3, 7] surgiu da necessidade de se explicar uma série de resultados experimentais até então existentes. Esses resultados foram inicialmente obtidos a partir do estudo de certas ligas metálicas, formadas por um metal magnético diluído em um metal paramagnético. Os exemplos típicos dessas ligas são: *CuMn* [8], *AuCo* [9] e *AuFe* [10], que apresentam um novo tipo de comportamento cooperativo em baixas temperaturas. Sabia-se que a interação entre duas impurezas magnéticas em uma rede cristalina paramagnética, fora estudada por Ruderman e Kittel [11], que mostraram, em 1954, que há um acoplamento indireto entre os spins do metal magnético mediado pela interação hiperfina com os elétrons da banda de condução. Em 1956, foi mostrado por Kasuya [12] que essa interação hiperfina dos elétrons da banda de condução com os núcleos é de natureza magnética (“exchange”). Em vista disso, a interação dos núcleos magnéticos com a polarização dos elétrons de condução em ligas de *CuMn* pôde ser explicada por Yosida [8] em 1957. Esse tipo de interação, que ficou conhecida como interação *RKKY*, apresenta um comportamento que decai segundo uma lei de potência, oscilando entre valores negativos e positivos com a distância, R , entre os núcleos atômicos magnéticos,

$$J(R) = J_0 \frac{\cos(2k_F R + \phi_0)}{(k_F R)^3}, \quad (1.1)$$

onde J_0 e ϕ_0 são constantes e k_F é o módulo do vetor de onda de Fermi do metal nobre puro.

A natureza oscilatória da interação *RKKY*, sua dependência com a distância entre os momentos magnéticos e a aleatoriedade na posição desses momentos em uma amostra diluída oferecem os dois ingredientes considerados fundamentais para o sur-

gimento da fase vidro-de-spins, quais sejam, a *desordem*, devido ao caráter aleatório das interações, e a *frustração*, devido a possibilidade de ocorrerem interações competitivas entre um dado momento magnético com dois outros. Um exemplo de frustração, que ocorre em um modelo antiferromagnético, é ilustrado na figura 1.1.

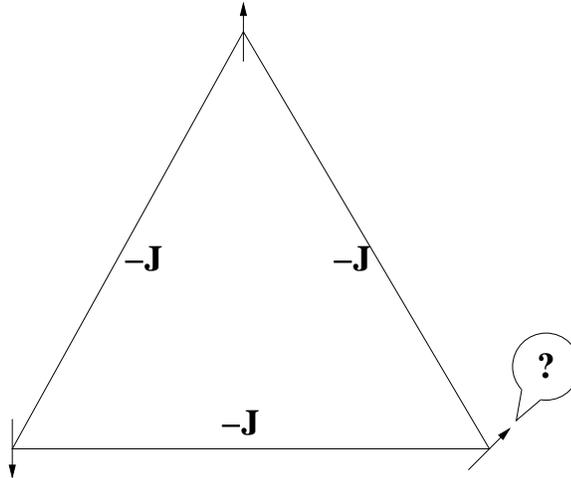


Figura 1.1: Caso típico de frustração num modelo antiferromagnético.

Inicialmente denominados materiais *mictomagnéticos*, essas ligas, como várias outras, apresentam indícios de uma transição de fases sem nenhuma ordem magnética de longo alcance aparente, no regime em que o metal magnético é muito diluído. Bancroft [9], estudando ligas de $AuCo$, e Cannella e Mydosh [10], estudando ligas de $AuFe$, com baixíssimas concentrações ($\lesssim 1\%$) de Fe, observaram um pico em forma de cúspide na susceptibilidade magnética, efeitos de histerese e remanecência dependente do tempo. A temperatura onde a susceptibilidade magnética apresenta seu valor máximo ficou conhecida como temperatura de congelamento. O efeito da remanecência motivou o nome *vidros-de-spins*, devido a Brian Colles, pela semelhança com as fases vítreas, onde o sistema não está em equilíbrio estável mas numa fase meta-estável, que eventualmente relaxa para a condição de mais baixa energia, após

um tempo suficientemente grande. Até hoje, não se tem certeza se é isso o que ocorre com um vidro-de-spins, ou se o sistema representa, de fato, um estado de equilíbrio estável, contudo, o nome vidro-de-spins já se consagrou e é utilizado para sistemas onde haja interações aleatórias e frustradas.

Com a observação de comportamentos semelhantes aos das ligas magnéticas em materiais isolantes, como o $Eu_xSr_{1-x}S$, percebeu-se que os vidros-de-spins são muito mais universais e a busca por uma teoria geral era necessária. Em 1975, Edwards e Anderson [7] propuseram uma teoria geral dos vidros-de-spins, onde um par de spins interage através de uma constante de troca aleatória e independente para cada par. Seu protótipo foi um modelo com spins semi-clássicos e do tipo Heisenberg (vetoriais), mas com acoplamentos, J_{ij} , aleatórios e simetricamente distribuídos em torno de uma média nula. Essa distribuição simétrica é fundamental, pois possibilita a ocorrência de frustração. Dessa forma, o hamiltoniano para o modelo de Edwards-Anderson é dado por,

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \quad (1.2)$$

que foi resolvido por eles pela aproximação do campo molecular. As interações aleatórias consideradas obedeciam uma distribuição *gaussiana* de largura J ,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2}{J^2}\right).$$

Edwards e Anderson adotaram como parâmetro de ordem a grandeza:

$$q^{EA} = \langle \vec{S}_i^{(1)} \cdot \vec{S}_i^{(2)} \rangle_t, \quad (1.3)$$

onde o spin da posição i é observado em dois instantes de tempo, (1) e (2), dis-

tintos e muito distantes um do outro, e $\langle \dots \rangle_t$ representa uma média temporal. Esse parâmetro de ordem estabelece que, se o spin da posição i possui uma dada orientação, \vec{S}_i , no instante (1), então, na fase ordenada haverá uma grande probabilidade dele estar nessa mesma posição no instante (2), logo teremos $q^{EA} \neq 0$, contudo, na fase de alta temperatura, o sistema é paramagnético e a orientação de todos os spins é totalmente dominada pela agitação térmica, desse modo, $q^{EA} = 0$. O parâmetro de ordem de Edwards-Anderson leva em consideração o fato de que a fase ordenada de um vidro-de-spins corresponde a um estado onde os spins estão “congelados” em posições aleatórias, mas com magnetização global nula. Há, contudo, uma magnetização local não-nula, abaixo da temperatura de congelamento, donde origina-se o comportamento da susceptibilidade e o efeito de histerese. O parâmetro de ordem de Edwards-Anderson mede a *quebra da simetria de reversão temporal* do sistema.

Sherrington e Southern [13], no mesmo ano, também resolveram o modelo de Edwards-Anderson pela aproximação do campo molecular. Nesse trabalho, Sherrington e Southern estenderam o resultado de Edwards-Anderson para o caso em que o valor médio das interação não é nula, onde é possível obter um diagrama de fases mais rico, com as fases ferro e antiferromagnéticas podendo prevalecer. Essa assimetria da distribuição acrescenta ao modelo o efeito da concentração do material magnético na amostra. De fato, quando a concentração do material magnético é muito grande, suas propriedades magnéticas dominam e o composto apresenta ordem magnética de longo alcance. Ambos os trabalhos foram capazes de reproduzir o comportamento da susceptibilidade, contudo, uma descrição precisa dos vidros-de-spins ainda não era possível. Foram Sherrington e Kirkpatrick (SK) [14] que propuseram um novo modelo, baseado no modelo de Edwards-Anderson, com interações de alcance infinito e spins de Ising ($|\vec{S}_i| = S_z \equiv \sigma = \pm 1$). No modelo Sherrington-Kirkpatrick, as

constantes de troca seguem uma distribuição gaussiana,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp \left[\frac{-(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right], \quad (1.4)$$

com média,

$$J_0 = \frac{\tilde{J}_0}{N},$$

e desvio padrão,

$$J = \frac{\tilde{J}}{N},$$

devidamente escalados. Sherrington e Kirkpatrick notaram que é necessário calcular o valor médio da energia livre, ao invés do valor médio da função de partição. Isso porque, fazendo-se a média sobre a distribuição de acoplamentos diretamente na função de partição somos levados a um problema onde as constantes de acoplamento, J_{ij} , são tratadas matematicamente da mesma forma que os spins σ , podendo entrar em equilíbrio termico com estes à medida que a amostra é resfriada. Esses sistemas são conhecidos como sistemas recozidos (“annealed”) e não conduzem às propriedades esperadas para um vidro-de-spins. São os sistemas temperados (“quenched”) que possuem interesse, onde a amostra é resfriada muito rapidamente quando preparada e os acoplamentos adquirem valores aleatórios, porém fixos. Esse é um dos grandes paradigmas dos sistemas com desordem. Se cada amostra experimental possui seu próprio conjunto de acoplamentos, seria de se esperar que cada medida apresentasse um resultado diferente, mesmo mantendo-se todas as condições termodinâmicas idênticas. Esse é o caso para grandezas intensivas, contudo, podemos esperar que grandezas extensivas sejam *automediadas*. Uma grandeza é automediada quando uma medição dessa grandeza em uma amostra particular for igual à sua média em várias amostras. Isso pode ser entendido da seguinte forma: imagine que uma amostra muito grande

possa ser dividida em várias subamostras, uma medida de uma grandeza extensiva, feita sobre a amostra grande será, na verdade, uma média sobre todas as subamostras.

Do ponto de vista teórico, uma média sobre várias amostras é obtido através da média sobre todas as configurações da desordem. Portanto, visto que a função de partição não é uma quantidade extensiva, mas a energia livre sim, a média correta a se calcular é:

$$F = -k_B T \int_{-\infty}^{\infty} \ln [Z(\{J_{ij}\})] \prod_{ij} P(J_{ij}) dJ_{ij}. \quad (1.5)$$

Como essa integral não pode ser calculada exatamente de forma geral, utilizou-se um procedimento que ficou conhecido como método das réplicas. Este método se baseia na seguinte identidade,

$$\ln(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n}, \quad (1.6)$$

a qual, quando substituída na integral (1.5), permite seu cálculo para qualquer valor inteiro n . Isto é equivalente a resolver um problema onde há n réplicas do sistema com interação entre quatro ou mais spins. Sherrington e Kirkpatrick consideraram todas as réplicas simétricas e que o resultado da integral com n inteiro poderia ser estendido para valores reais, afim de se tomar o limite $n \rightarrow 0$ no final. Os resultados obtidos dessa forma concordam com as medidas experimentais para a susceptibilidade, porém, a entropia tende a um valor negativo quando $T \rightarrow 0$, violando a 3ª lei de termodinâmica. Sherrington e Kirkpatrick sugeriram, contudo, que este resultado incoerente seria decorrente da troca da ordem dos limites $N \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow 0$ no cálculo da energia livre.

O problema da entropia negativa foi abordado cuidadosamente por de Almeida e Thouless [15]. Eles mostraram que a solução de Sherrington-Kirkpatrick é instável em baixas temperaturas e sugeriram que a natureza dessa instabilidade seria con-

seqüência da *simetria entre as réplicas* adotada. A solução estável, com *quebra de simetria entre as réplicas*, foi encontrada por Parisi [16–19] pouco tempo depois e um novo parâmetro de ordem local introduzido, a matriz $n \times n$,

$$Q_i^{\alpha\beta} = \langle \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \rangle, \quad (1.7)$$

onde σ_i^α é o valor do spin do sítio i na réplica α , tomada no limite quando $n \rightarrow 0$ e $\langle \dots \rangle$ representa uma média termodinâmica. Os elementos dessa matriz são nulos na diagonal principal e os elementos fora dessa diagonal são não-nulos apenas na fase ordenada. No formalismo de Sherrington-Kirkpatrick foi considerado erroneamente que a grandeza,

$$Q_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^{\alpha\beta}, \quad (1.8)$$

fosse o parâmetro de ordem de Edwards-Anderson, q^{EA} , quando $\alpha \neq \beta$, independentemente dos índices α e β . Na verdade, os valores de $Q_{\alpha\beta}$ não são simétricos em relação à permutação dos índices. No formalismo de Parisi são necessários infinitos parâmetros para parametrizar a matriz $Q_{\alpha\beta}$ o que é equivalente a definir uma função $q(x)$, onde x denota a posição na matriz, tal que:

$$Q_{\alpha\beta} = q(x). \quad (1.9)$$

A função $q(x)$, ou simplesmente q , é conhecida como parâmetro de ordem de Parisi e é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, ela mede o grau de superposição (“overlap”) entre os dois possíveis estados α e β , representados pelas duas réplicas consideradas.

A questão de como estender os resultados de Sherrington-Kirkpatrick a modelos com interações de curto alcance e dimensão finita, contudo, gerou grande con-

trovésia na área. Uma das abordagens propostas, que ficou conhecida como *modelo de gotas*, foi idealizada por Fisher e Huse [20]. Motivado pelos resultados de Bray, Moore [21] e McMillan [22], o modelo de gotas admite que as excitações de mais baixa ordem do estado fundamental são pequenos aglomerados, definidos como “gotas”, de spins invertidos de modo coerente. A principal suposição do modelo é que a densidade de estados das excitações é uma função de escala do comprimento linear da gota,

$$\rho(L) \propto L^{-\theta}, \quad (1.10)$$

onde $0 < \theta \leq \frac{d-1}{2}$, sendo d a dimensão da rede e L o diâmetro da gota. A consequência direta dessa suposição é a existência de apenas dois estados de mínima energia em $T = 0$, simétricos por uma inversão global dos spins. Esse resultado é totalmente contrário aos resultados obtidos a partir do modelo de Sherrington-Kirkpatrick.

Investigar, detalhadamente, modelos vidros-de-spins com interações de alcance finito torna-se, portanto, de suma relevância, no sentido de elucidar todas essas questões.

1.2 Modelo de Potts

O *modelo de Potts* com q estados [23–25] é uma simplificação do modelo planar. Contudo, ele possui como casos particulares o *modelo de percolação* quando $q = 1$ [26], o *modelo de Ising* quando $q = 2$ [27] e o *modelo de Ashkin-Teller* quando $q = 4$ [28]. No modelo planar, o spin é confinado ao plano e pode assumir q orientações igualmente espaçadas, possuindo ângulos $\theta_n = \frac{2\pi n}{q}$, com $n = 1, 2, \dots, q-1$ (figura 1.2), a interação de troca entre o par $\langle ij \rangle$ é uma função do ângulo relativo entre os spins, θ_{ij} , de

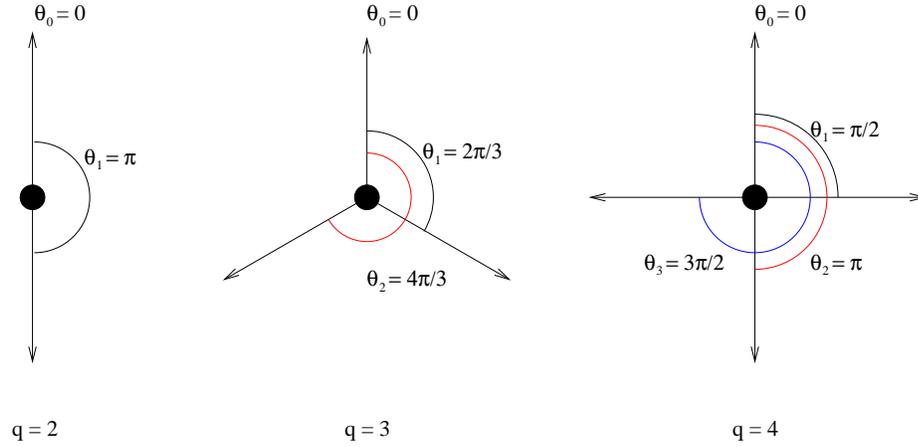


Figura 1.2: Configurações de spin no modelo planar com $q = 2, 3$ e 4 .

modo que o hamiltoniano tem a forma:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} \mathcal{J}(\theta_{ij}), \quad (1.11)$$

onde a soma é tomada sobre todos os pares de spins interagentes do sistema e a função \mathcal{J} é periódica de período 2π . Esse modelo possui simetria $Z(q)$ e é de grande importância em teorias de “gauge” na rede.

Seguindo a orientação de Domb, Potts começa a estudar um caso particular do modelo planar, cuja função \mathcal{J} da equação (1.11) toma a forma:

$$\mathcal{J}(\theta_{ij}) = -J \cos(\theta_{ij}),$$

onde J é uma constante. Esse modelo ficou conhecido com modelo planar de Potts e foi resolvido para os casos $q = 2, 3$ e 4 , apenas na criticalidade. Não satisfeito, Potts

propõe um novo modelo, com uma função:

$$\mathcal{J}(\theta_{ij}) = J\delta_{\sigma_j}^{\sigma_i}, \quad (1.12)$$

onde $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$ é a variável de spin de Potts e

$$\delta_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \sigma_i = \sigma_j \\ 0 & , \text{ se } \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

é o δ de Kronecker. Potts foi capaz de obter o ponto crítico desse modelo para todos os valores de q . Quando $J > 0$ dizemos que o modelo é ferromagnético e quando $J < 0$ dizemos que o modelo é antiferromagnético. Embora simples, o modelo de Potts só foi resolvido fora da criticalidade em alguns casos particulares. No caso $q = 2$ obtemos o modelo de Ising, cuja solução em uma dimensão é bem conhecida e, em duas dimensões sem campo, foi resolvido por Onsager em 1943 [29, 30]. No caso $q = 3$, na rede quadrada, quando $J < 0$ e no limite $T \rightarrow 0$, obtemos o problema de três cores. No caso $q = 4$, na rede triangular, também para $J < 0$ e $T \rightarrow 0$, obtemos o problema de quatro cores. Ou seja, obtemos o problema de se colorir os vértices da rede com três ou quatro cores, respectivamente, sem que dois vértices conectados possuam a mesma cor. De modo geral, a função de partição do modelo de Potts, em um grafo generalizado, pode ser expressa como um *polinomial dicromático* [25, 31].

Na ausência da solução exata, o modelo de Potts foi estudado na aproximação de *campo médio*. Foi mostrado que em duas dimensões o resultado de campo médio é exato para o termo dominante da expansão para q muito grande, é de se esperar, portanto, que haja um valor crítico, $q_c(d)$, tal que, em d dimensões, a solução de campo médio seja exata para $q > q_c(d)$. Porém, a existência de $q_c(d)$ implica na

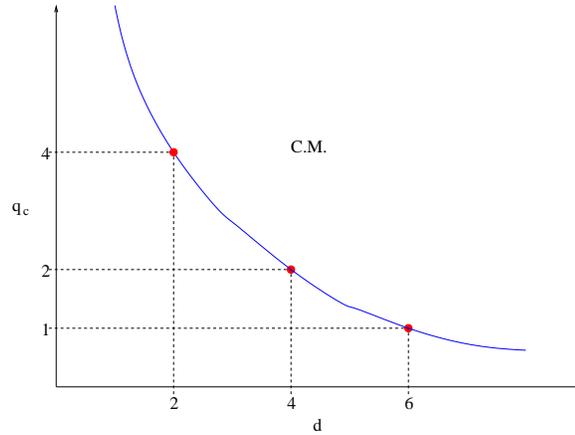


Figura 1.3: Diagrama de validade da solução de campo médio para o modelo de Potts.

existência de uma dimensão crítica superior, $d_c(q)$, onde também prevalece a solução de campo médio para $d > d_c(q)$. Esquemáticamente teremos o diagrama representado no figura 1.3, onde os pontos $q_c(4) = 2$, $q_c(2) = 4$ e $q_c(6) = 1$ são, respectivamente, os valores conhecidos para o modelo de Ising, para o modelo de Potts em duas dimensões e para percolação. A solução de campo médio também prevê que há uma transição de primeira ordem quando $q > 2$, sendo associado um *calor latente*:

$$\begin{aligned} L &= T\Delta S \\ &= \gamma J \frac{(q-2)^2}{2q(q-1)}, \end{aligned}$$

onde γ é uma constante definida no hamiltoniano de campo-médio.

1.3 Redes Hierárquicas

O interesse em redes hierárquicas surgiu da descoberta feita por Berker & Ostlund e Bleher & Žalis [32, 33] de que o esquema do grupo de renormalização de

Migdal-Kadanoff [34, 35] aplicado exatamente à certas redes hierárquicas leva a resultados equivalentes à aproximação feita em redes de Bravais. Isso conduz à uma nova classe de modelos exatamente solúveis. Haja vista o fato de que modelos exatamente solúveis sejam raros em *física estatística* [36] e de que esses modelos trazem uma grande compreensão fenomenológica, o estudo das redes hierárquicas se justifica.

De acordo com Griffiths e Kaufman [37], uma rede hierárquica é o resultado de um processo iterativo que consiste em agrupar certos elementos geométricos, denominados *unidades primitivas*, um certo número de vezes, seguindo uma regra topológica e geométrica bem definida. As unidades primitivas, que podem ser de qualquer natureza, devem ser agrupadas convenientemente para formar a unidade de ordem 1, denominada *célula fundamental* ou *gerador* da rede; daí, essas unidades de ordem 1 são agrupadas, colapsando-se alguns de seus vértices, seguindo a mesma regra, para formar a unidade de ordem 2 e assim sucessivamente, até que tenhamos construído uma unidade de ordem n , que será a n -ésima hierarquia da rede. Vejamos o exemplo dado na figura 1.4, onde mostramos os dois primeiros passos da formação da rede *diamante*, também conhecida como *rede de Migdal-Kadanoff*.

Nesse exemplo, tomamos como unidades primitivas segmentos como aqueles mostrados na figura 1.4(a). No primeiro passo agrupamos quatro unidades primitivas para gerar a célula fundamental da figura 1.4(b). Depois, quatro células fundamentais são agrupadas para gerar a unidade de ordem dois, como mostrado na figura 1.4(c). Note que apenas os dois vértices mais externos (círculos vazados) são utilizados no processo de aglutinação. Repetindo-se esse processo n vezes obtemos uma unidade de ordem n arbitrária. Outros elementos podem ser adotados como unidades primitivas para formar outras classes de redes hierárquicas, como pode ser visto na figura 1.5. Nesse caso, os elementos primitivos são triângulos equiláteros (figura 1.5(a)). Seis

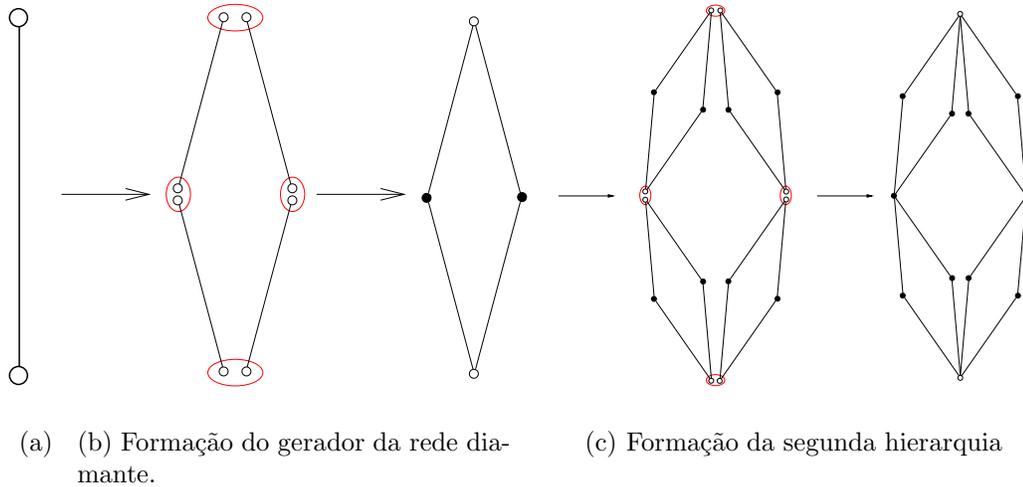


Figura 1.4: Exemplo da formação da rede diamante.

deles são utilizados no processo para gerar a célula fundamental (figura 1.5(b)), que possui duas folhas num arranjo tridimensional.

Podemos acrescentar ligações extras às unidades geradas a cada hierarquia. Essas ligações não fazem parte do processo de iteração e podem representar interações diferentes daquelas das unidades iteráveis. Alguns exemplos são mostrados na figura 1.6. As unidades iteráveis são representadas por linhas cheias, enquanto as ligações não-iteráveis são representadas pelas linhas tracejadas.

1.3.1 Topologia das Redes Hierárquicas

Uma rede hierárquica com n hierarquias forma um grafo. Seus vértices podem ser classificados da seguinte maneira:

Vértices ligados são aqueles que também são vértices de alguma sub-unidade de ordem menor que n ;

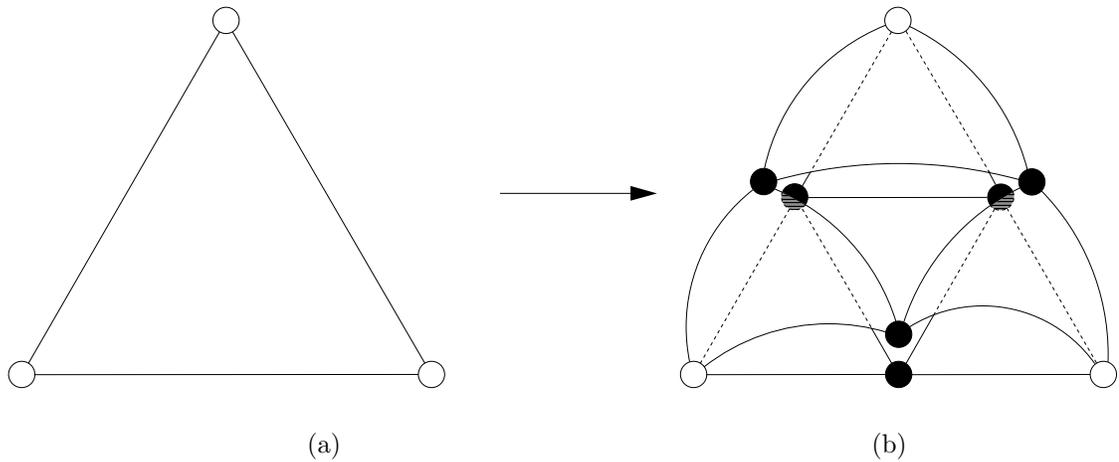


Figura 1.5: Rede *Sierpiński gasket* multifolhada.

Vértices livres são aqueles que não são ligados, ou seja, eles não são vértices de nenhuma sub-unidade de ordem inferior a n , mas foram adicionados à rede no processo de iteração através de ligações não-iteráveis;

Vértices externos são aqueles, livres ou ligados, que serão colapsados no processo de formação da hierarquia $n + 1$, são representados pelas circunferências vazadas em todos os exemplos; e

Vértices internos são aqueles que não são externos, ou seja, fazem parte da estrutura fina da rede e não tomam parte do processo de agregação para gerar a próxima hierarquia da rede, são representados pelos círculos cheios dos exemplos.

A figura 1.7 apresenta exemplos de cada uma das classes de vértices citados. As sub-unidades iteráveis da rede também podem ser classificadas como sendo externas ou internas. São externas quando qualquer um de seus vértices for um vértice externo da rede toda, e são internas em caso contrário.

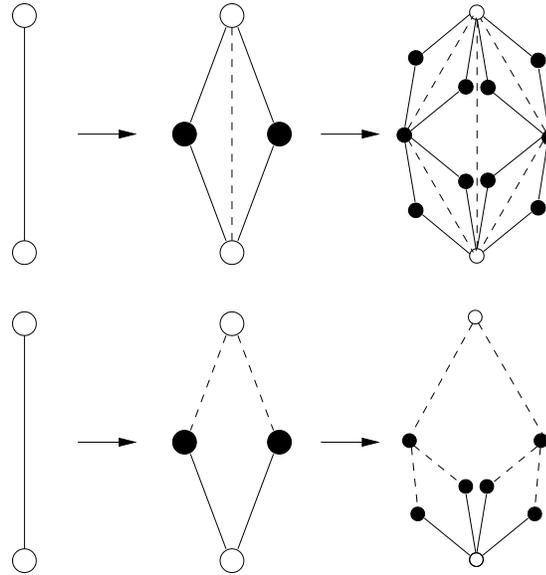


Figura 1.6: Exemplo de ligações não iteráveis em redes hierárquicas.

Uma rede hierárquica pode ser gerada por processos de iteração completamente arbitrários. Contudo, estamos particularmente interessados em redes que sejam auto-similares e uniformes. Uma rede hierárquica é auto-similar quando, no processo de iteração, são sempre agrupados o mesmo número B de sub-unidades para formar a unidade de ordem imediatamente superior. Esse número é chamado *número de agregação* e também é definido para redes não auto-similares, sendo contudo, nesse caso, dependente da hierarquia da rede em cada passo. Ligações não-iteráveis não são contabilizadas no cálculo de B . No caso da rede diamante apresentada na figura 1.4, vemos que $B = 4$, no caso da rede Sierpiński “gasket” multifolhada (figura 1.5) $B = 6$ e nos casos das redes da figura 1.6 temos $B = 4$ e $B = 2$, respectivamente. Uma rede é dita uniforme quando as unidades agrupadas a cada passo do processo iterativo são idênticas. Todos os exemplos mostrados até agora são de redes uniformes e auto-

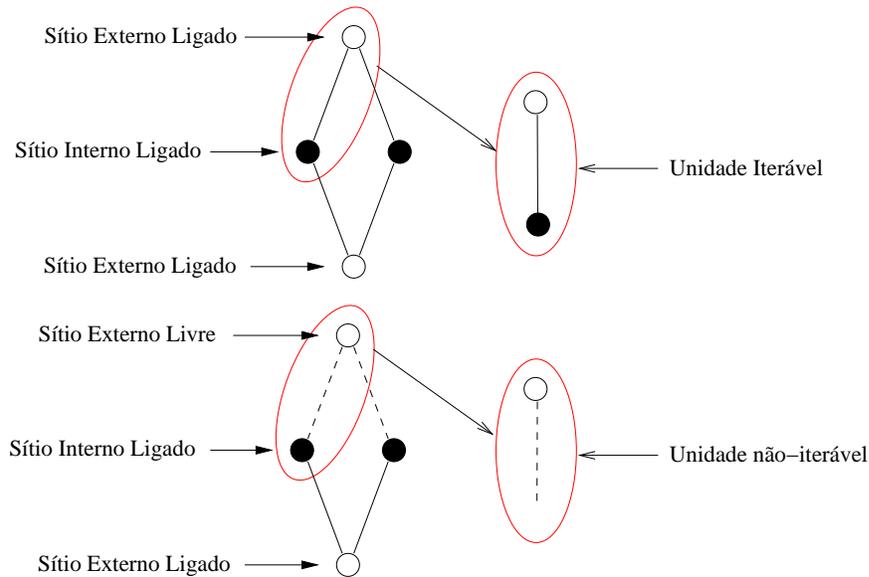


Figura 1.7: Exemplos das diversas classes de vértices de uma rede hierárquica.

similares. Um exemplo de rede não-uniforme é mostrado na figura 1.8, onde há dois elementos distintos sendo iterados.

Podemos, agora, definir distância, dimensão e conectividade em redes hierárquicas [38]. Definimos a distância entre dois vértices quaisquer da rede como o número de ligações existentes sobre o menor caminho entre eles. O fator de escala b que é usado no processo de renormalização da rede é, portanto, a distância entre os vértices externos do gerador da rede. Se definirmos q como o número mínimo de ligações que precisamos cortar para isolar um vértice externo do gerador (*corte mínimo*), a definição da dimensão D e da conectividade Q serão dadas, respectivamente, por:

$$D = \frac{\log(B)}{\log(b)} \quad (1.13a)$$

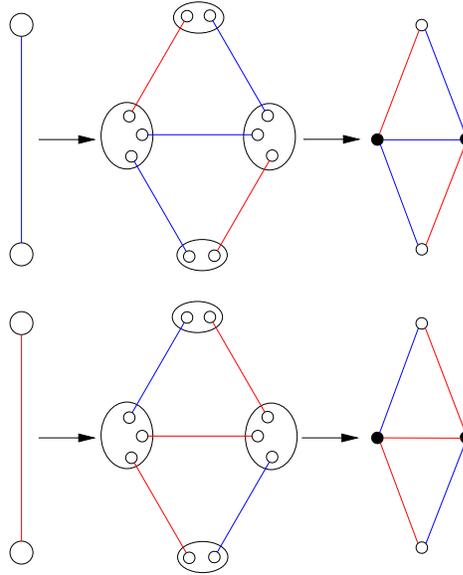


Figura 1.8: Exemplo de Rede Não Uniforme.

e

$$Q = \frac{\log(q)}{\log(b)}. \quad (1.13b)$$

1.3.2 Modelos de Spin em Redes Hierárquicas

Um dos primeiros estudos sistemáticos sobre modelos de spins em redes fractais foi realizado por Gefen *et alii* [39], utilizando vários fractais conhecidos. Eles mostraram que só seria possível obter temperaturas críticas não nulas, numa dessas redes, se um certo parâmetro, definido por eles como *ramificação*, fosse infinito.

Entretanto suas redes não são hierárquicas no sentido definido aqui. Note que, por exemplo, ao formarmos a rede Sierpiński “gasket” padrão (figura 1.9), nem todos os vértices dos triângulos são colapsados para formar a próxima hierarquia, portanto não há como definir quais vértices são internos ou externos.

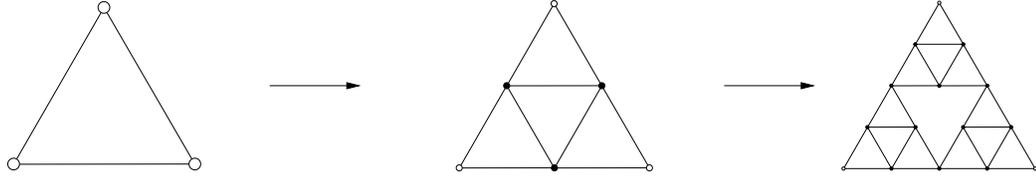


Figura 1.9: Rede Sierpiński “gasket” padrão

Motivados pela descoberta de que as equações de renormalização de Migdal-Kadanoff eram exatas na família de redes hierárquicas conhecidas como redes diamante, vários pesquisadores começaram a estudar modelos de spins em redes hierárquicas, não mais como aproximações, mas sim como modelos exatos e de interesse próprio [40–43].

Um modelo de spins sobre uma rede hierárquica pode ser definido associando-se a cada sítio i da rede uma variável de spin σ_i e a cada unidade primitiva um hamiltoniano reduzido, $H^{(0)}(\{\sigma\}, \{\mu\})$, ($H \equiv -\beta\mathcal{H}$) onde $\{\sigma\}$ denota o conjunto de todas as variáveis de spin associadas a sítios internos, $\{\mu\}$ denota o conjunto de todas as variáveis de spin associadas a sítios externos, $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, T é a temperatura absoluta e k_B é a constante de Boltzmann. A função $H^{(0)}$ estabelece o modelo. Por exemplo, para o modelo de Ising:

$$H^{(0)} = K_{ij}^{(0)} \sigma_i \sigma_j, \quad (1.14)$$

onde K_{ij} é a energia de interação reduzida (βJ_{ij}) entre as variáveis de spin σ_i e σ_j associadas, respectivamente, aos sítios i e j conectados por uma ligação.

Para uma rede com n hierarquias o hamiltoniano será a soma de todas as contribuições das unidades primitivas que formam a rede mais um termo representando ligações não-iteráveis, ou seja:

$$H^{(n)}(\{\sigma\}, \{\mu\}) = \sum_{\alpha} H^{(0)}(\{\tau\}_{\alpha}) + \hat{H}^{(n)}, \quad (1.15)$$

onde $\{\tau\}_{\alpha}$ denota o conjunto de todas as variáveis de spin associadas à unidade primitiva denominada α e $\hat{H}^{(n)}$ é a energia associada a ligações não-iteráveis.

Dado o hamiltoniano em (1.15), definimos a *função de partição Restrita* do sistema, $Z_n(\{\mu\})$, como o traço de $\exp(H^{(n)})$ sobre todas as variáveis de spin associadas a sítios internos da rede. Desse modo a função de partição será dada por:

$$Z_n = \sum_{\{\mu\}} Z_n(\{\mu\}) \equiv \exp(B^n f_n), \quad (1.16)$$

onde definimos a energia livre adimensional por unidade primitiva f_n .

O processo de renormalização consiste em encontrar o *hamiltoniano efetivo*, $H_n(\{\mu\})$, entre o conjunto de variáveis de spin associadas aos sítios externos $\{\mu\}$, tal que:

$$Z_n(\{\mu\}) \equiv \exp[H_n(\{\mu\}) + C_n], \quad (1.17)$$

onde a constante C_n fixa o referencial de energia e pode ser escolhida de modo que $\sum_{\{\mu\}} H_n(\{\mu\}) = 0$.

A função de partição restrita de uma rede hierárquica de ordem n pode ser escrita em termos das funções de partição restritas das B sub-unidades de ordem $n-1$ que são agregadas durante o processo de formação, ou seja:

$$Z_n(\{\mu\}) = \sum_{\{\sigma\}} Y_n(\{\sigma\}, \{\{\mu\}_{\alpha}\}) \prod_{\alpha=1}^B Z_{n-1}(\{\mu\}_{\alpha}), \quad (1.18)$$

onde $\{\mu\}_{\alpha}$ denota o conjunto das variáveis de spin associadas aos sítios externos

da sub-unidade α de ordem $n - 1$ e $\{\{\mu\}_\alpha\}$ a união de todos os conjuntos $\{\mu\}_\alpha$. A função $Y_n(\{\sigma\}, \{\{\mu\}_\alpha\})$ contém informações sobre o acréscimo de interações não-iteráveis e sobre a geometria da rede, levando em conta o fato de que, no processo de agregação das sub-unidades de ordem $n - 1$, seus sítios externos são colapsados. Por exemplo, na rede diamante, como não há ligações não-iteráveis, a função Y_n será um produto de deltas de Kronecker. A função de partição restrita correspondente à primeira hierarquia será o produto das quatro funções de partição restritas das unidades primitivas, devidamente ajustadas a geometria da rede. Ou seja:

$$\begin{aligned} Z_1(\mu_1, \mu_2) &= \sum_{\{\sigma\}} Y_1(\{\sigma\}, \{\{\mu\}_\alpha\}) \prod_{\alpha=1}^B Z_0(\{\mu\}_\alpha) \\ &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} Y_1 Z_0(\mu_1, \sigma_1) Z_0(\mu'_1, \sigma_2) Z_0(\mu_2, \sigma'_1) Z_0(\mu'_2, \sigma'_2) \\ &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} Z_0(\mu_1, \sigma_1) Z_0(\mu_1, \sigma_2) Z_0(\mu_2, \sigma_1) Z_0(\mu_2, \sigma_2). \end{aligned}$$

Vê-se então que:

$$Y_1(\{\sigma\}, \{\{\mu\}_\alpha\}) = \delta_{\mu_1}^{\mu'_1} \delta_{\sigma_1}^{\sigma'_1} \delta_{\sigma_2}^{\sigma'_2} \delta_{\mu_2}^{\mu'_2}.$$

Podemos reescrever a equação (1.18) usando a definição do hamiltoniano efetivo (1.17), obtendo:

$$\exp [H_n(\{\mu\}) + \psi_n] = \sum_{\{\sigma\}} Y_n(\{\sigma\}, \{\{\mu\}_\alpha\}) \exp \left[\sum_{\alpha=1}^B H_{n-1}(\{\mu\}_\alpha) \right], \quad (1.19)$$

onde a constante ψ_n é definida como:

$$\psi_n \equiv \begin{cases} C_n - BC_{n-1}, & \text{se } n > 0; \\ C_0, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Combinando (1.16) e (1.17), tira-se que, no limite termodinâmico, a energia livre será dada por:

$$f \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (1.20a)$$

onde,

$$f_n \equiv \sum_{m=0}^n B^{-m} \psi_m, \quad (1.20b)$$

desde que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^{-n} \ln \left[\sum_{\{\mu\}} \exp[H_n(\{\mu\})] \right] = 0,$$

o limite (1.20a) exista e a série (1.20b) convirja.

As condições para que modelos de spin em redes hierárquicas possuam energia livre (1.20) bem determinada foram estabelecidas por Griffiths e Kaufman [37] através de dois teoremas cujo enunciado está a seguir, mas cuja demonstração não apresentaremos. De modo geral, estas condições estabelecem limites para o hamiltoniano $H^{(0)}$ das unidades primitivas e para a função Y_n . São eles:

Teorema I. O limite em (1.20a) existe e é finito se:

- $H^{(0)}$ for uma função real e finita;
- $0 \leq Y_n < \infty$;
- Para todo n houver, pelo menos, um valor de Y_n maior que zero;

- A série $\sum_{n=1}^{\infty} B^{-n} \max[\ln(Y_n)]$ convergir;
- Dentre todos os valores de $Y_n \neq 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} B^{-n} \min[\ln(Y_n)]$ convergir.

Teorema II. A série em (1.20b) converge e é igual ao limite em (1.20a) se dadas condições do *teorema I* também existir um valor finito l tal que, para todo $n \geq l$ haja, pelo menos, uma sub-unidade de ordem $n - l$ onde $Y_n^{(l)}$ (a função Y_n da l -ésima iteração de (1.18)) seja maior que zero.

Nessas condições pode-se garantir que as propriedades termodinâmicas serão fisicamente aceitáveis, ou seja, possuem propriedades de convexidade apropriadas, capacidade térmica positiva, etc.

Embora bem determinado termodinamicamente, alguns modelos apresentam peculiaridades inesperadas: modelos com interações competitivas podem levar a cenários caóticos [40] ou ao surgimento de uma fase vidro-de-spins sem ligações aleatórias [41]; evidências de divergência na susceptibilidade em altas temperaturas para o esquema de Migdal-Kadanoff foram encontradas em [42] e seu comportamento assintótico foi obtido em [44], embora, para o esquema de aglomerados finitos de Niemeijer-van Leeuwen [45] o comportamento da susceptibilidade volte a ser finito acima de T_c , retomando seu comportamento físico [46]; evidências de multifractalidade [47] no parâmetro de ordem local [48–51]; etc. Outros sistemas, por outro lado, apresentam características raras, tais como linhas de pontos críticos no espaço de parâmetros com expoentes críticos variando continuamente [52]. Uma característica interessante é uma aparente quebra de universalidade, no sentido de que para modelos com a mesma simetria do parâmetro de ordem, mesma dimensão fractal e interações de mesmo alcance o comportamento crítico varia nas diversas redes [38, 53].

1.3.3 As Redes do Tipo Diamante

A família de redes hierárquicas que estamos interessados aqui contém como caso particular a rede conhecida como *rede diamante*. Essa é uma rede uniforme e auto-similar, tal como definido anteriormente, e seu gerador é mostrada na figura 1.4(b). Acompanhando o processo de iteração mostrado na figura 1.4, como já foi descrito anteriormente, podemos identificar o número de agregação da rede como sendo $B = 4$, o fator de escala $b = 2$ e o corte mínimo $q = 2$. Fica claro, portanto, que a rede diamante possui dimensão:

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

e conectividade:

$$Q = \frac{\log 2}{\log 2} = 1.$$

É possível generalizar a rede diamante numa família de redes, assumindo que o gerador da figura 1.4(b) possua p conexões ligando os vértices externos, cada qual com l ligações. No caso da figura 1.4(b) tínhamos $p = l = 2$.

Em nosso estudo utilizamos uma família de redes do tipo diamante com p conexões e 2 ligações por conexão, conforme ilustra a figura 1.10. Nessa família de redes a dimensão e a conectividade são dadas em função do parâmetro p :

$$D_p = \frac{\log(2p)}{\log 2}, \quad (1.21a)$$

$$Q_p = \frac{\log p}{\log 2}. \quad (1.21b)$$

Vale notar, também, que o número total de sítios, $N_p(n)$, e de ligações, $N_l^{(p)}(n)$, dessa

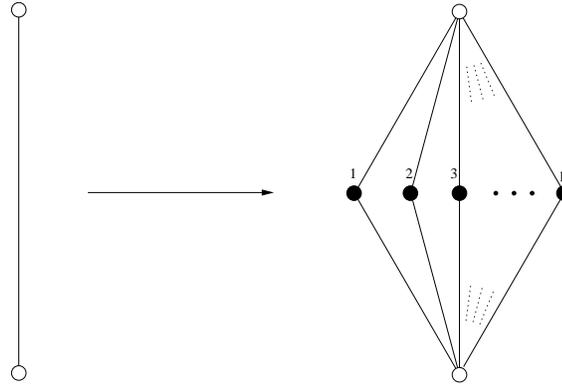


Figura 1.10: Rede diamante com p conexões.

família de redes, com p conexões, em uma dada hierarquia, n , é dado por:

$$N_p(n) = 2 + 2p \left[\frac{(2p)^n - 1}{2p - 1} \right] \quad (1.22a)$$

e

$$N_l^{(p)}(n) = (2p)^n. \quad (1.22b)$$

1.4 Criticalidade Auto-Organizada

A criticalidade auto-organizada foi inicialmente proposta e estudada por Bak e colaboradores [54, 55]. Eles pretendiam, com esse novo conceito, explicar alguns fenômenos já bem conhecidos, tais como a grande ocorrência de estruturas fractais na natureza [56] e o ruído “ $1/f$ ” em sólidos [57].

O fato de que a natureza não pode ser descrita por esferas, linhas, planos ou quaisquer outros objetos da geometria euclidiana exige uma atenção especial dos Físicos, haja vista seu principal objetivo é compreender o universo. Mandelbrot, em

seu livro histórico [56], estabeleceu uma nova forma de ver o mundo, a natureza é, na verdade, *fractal* [56, 58]. Sabemos muito bem da teoria das *transições de fases* e *fenômenos críticos* no contexto da *mecânica estatística* de equilíbrio [59, 60] que um sistema no ponto crítico não possui qualquer escala característica de comprimento, contudo, isso só acontece se um conjunto muito particular de parâmetros, tais como temperatura, pressão ou campo magnético, forem corretamente ajustado. Embora a mecânica estatística padrão seja poderosa para a solução de problemas envolvendo sistemas no equilíbrio, a natureza não está em equilíbrio e não podemos controlar seus parâmetros para conduzi-la à qualquer ponto crítico. Então, de onde vêm a grande abundância de estruturas fractais observadas na natureza?

Em 1987, Bak, Tang e Wiesenfeld [54, 55] propuseram que um fenômeno auto-organizado poderia conduzir sistemas dinâmicos com um grande número de graus de liberdade a um *ponto crítico* sem nenhum ajuste fino de qualquer parâmetro. Esse fenômeno foi chamado *criticalidade auto-organizada* e deste então uma grande quantidade de trabalho foi realizado nesse tema. A principal motivação para Bak, Tang e Wiesenfeld foi a de que a criticalidade auto-organizada pudesse explicar problemas clássicos do mundo físico, tais como o comportamento do tipo *lei de potência* ($f^{-\beta}$) do espectro de potência, conhecido como *ruído* “ $1/f$ ”, em uma grande quantidade de sistemas [57, 61], o fenômeno da *turbulência* e a estrutura fractal auto-similar da natureza anteriormente observada por Mandelbrot [56].

Para fixar idéias foi proposto um modelo para a construção de uma pilha de areia [54, 55], em analogia com um conjunto de pêndulos de torção acoplados. Esse modelo, chamado modelo pilha-de-areia, busca reproduzir as avalanches produzidas pela adição periódica de grãos de areia à pilha. Os resultados obtidos por Bak e colaboradores a partir de simulações numéricas em duas e três dimensões e

em redes pequenas mostraram *comportamento de escala* tanto na distribuição de tamanhos como na distribuição de durações das avalanches. Eles argumentaram que um comportamento na forma de lei de potência para a distribuição de durações das avalanches conduziria diretamente a um espectro de potência compatível o ruído $1/f$. Procurando aperfeiçoar os conceitos e incluir uma explicação para turbulência, Bak, Chen e Tang propuseram um novo modelo, agora para *incêndios florestais* [62]. Nesse modelo, árvores crescem a uma taxa p e incêndios se espalham pela floresta seguindo regras determinísticas. Contudo, o modelo não apresenta criticalidade auto-organizada [63], possuindo um comportamento determinístico e não-trivial. De fato, ele apresentando padrões globais de incêndios em forma espiral, cujas frentes de onda estão em uma escala de comprimento bem definida ($1/p$) no limite $p \rightarrow 0$. Drossel e Schwabl [64] introduziram uma nova regra ao modelo de Bak, Chen e Tang, a taxa de “queda de raios” (f). Esse novo modelo foi estudado através de simulações de Monte-Carlo e um comportamento do tipo lei de potência para as distribuições de tamanho e duração de incêndios teria, aparentemente, sido encontrado no limite em que $f/p \rightarrow 0$ [64, 65] e os expoentes relacionados a essas leis de potências estimados [66]. Contudo, apesar de não discordar da existência de um comportamento crítico, Grassberger propõe que o comportamento em forma de leis de potência precisaria ser corrigido pois as simulações realizadas estariam longe da criticalidade [67]. Tentativas de estimar correções aos expoentes foram realizadas utilizando um método de análise de momentos [68]. Mais recentemente, foi especulado que o comportamento atípico observado nas leis de potência do modelo poderia ser explicado assumindo-se a existência de duas escalas distintas [69, 70]. Contudo, simulações realizadas em redes muito grandes e valores de f/p muito pequenos sugerem que as leis de potência até então observadas seriam espúrias e que uma prova concreta de um comportamento

crítico auto-organizado no modelo Drossel-Schwabl continua em aberto [71, 72].

1.5 Objetivos e Organização desta Tese

O objetivo principal desta tese é estudar alguns sistemas complexos encontrados na Física Estatística, entre eles os vidros-de-spins, no contexto da Física Estatística de Equilíbrio e o modelo para incêndios florestais, um automato celular desenvolvido para esclarecer a ocorrência dos fenômenos discutidos na seção 1.4. Ela está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 analisaremos a estrutura do estado fundamental dos vidros-de-spins de Ising na rede diamante com p conexões através do estudo da distribuição do “link-overlap” entre duas réplicas independentes, utilizando uma metodologia recursiva e exata para calcular o valor local das correlações de pares de spins em cada réplica. Nosso objetivo é mostrar que, de fato, a distribuição do “link-overlap” é compatível com a descrição do modelo de “gotas”, como é esperado que ocorra na rede diamante, e verificar se seu comportamento pode ser relacionado com aquele observado em simulações monte-carlo em redes regulares.

No capítulo 3, estudaremos o modelo de Potts com q estados e interações aleatórias e competitivas na rede diamante d -dimensional. Nosso objetivo é mostrar a existência ou não de uma transição de fases para vários valores de q e d , estimar a temperatura crítica dessa transição e construir os diagramas de fluxo para o grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff para cada caso.

No capítulo 4, estudaremos um modelo autômato celular para incêndios florestais com árvores resistentes. Tratando-se de um modelo complexo e fora do equilíbrio, nosso objetivo é mostrar como se comporta a criticalidade auto-organizada encon-

trada no modelo Drossel-Schwabl com a introdução de árvores com resistência determinística e verificar se há casos onde o comportamento de escala persiste, estimando os expoentes que governam esse comportamento.

Finalmente, no capítulo 5, fecharemos nosso trabalho apresentando algumas conclusões e apontando algumas perspectivas de continuidade, enfocando os problemas que permanecem em aberto.

Capítulo 2

Estrutura dos Vidros-de-Spins de Ising na Rede Diamante

Apesar dos quase trinta anos da formulação do modelo de Edwards-Anderson [7] e da solução de Sherrington-Kirkpatrick [14], os vidros-de-spins continuam sendo um grande mistério [6]. A própria existência de uma *fase* termodinâmica em baixas temperaturas continua uma questão em aberto. Admitindo sua existência, a configuração da fase vidro-de-spins é caracterizada pela *desordem* magnética com *frustração* nos acoplamentos que não podem ser minimizados simultaneamente. A presença de frustração e desordem pode induzir uma grande quantidade de estados termodinâmicos em baixas temperaturas, que não se relacionam por nenhuma transformação de simetria trivial. O parâmetro de ordem de Parisi, definido pelas equações (1.7), (1.8) e (1.9) e normalmente conhecido com “*overlap*” de Parisi, é um dos parâmetros apropriados para descrever a estrutura desses estados e a forma como eles se relacionam. Ele foi bastante utilizado para determinar o número de estados nos vidros-de-spins em sistemas com dimensão finita [73, 74]. A distribuição $P_J(q)$,

para o parâmetro de ordem de Parisi mede a probabilidade do valor do “overlap” estar entre q e $q + dq$ e é conhecida como *distribuição de “overlap” de Parisi*. Contudo, outro parâmetro, conhecido como *“link overlap”* [75–77] parece ser mais apropriado para se verificar as diferenças básicas entre os dois principais cenários existentes: o *cenário de Parisi* e o *cenário de gotas*. A distribuição $P_J^{(L)}(q_L)$, para o “link overlap”, referido em [78] como “energy overlap”, surge como um parâmetro mais confiável que a distribuição $P_J(q)$, pois ela não é sensível à presença de paredes de domínio, o que pode induzir um comportamento não-trivial em $P_J(q)$ e, conseqüentemente, a interpretação de uma quebra de simetria entre réplicas.

A vantagem do “link overlap” sobre o “overlap” está em suas propriedades de simetria com respeito a inversão de spins. Para o “overlap” de Parisi, uma inversão global dos spins de apenas uma das réplicas inverte seu sinal, enquanto o “link overlap” permanece invariante. Essa propriedade é interessante, pois torna o “link overlap” insensível às fases relacionadas simplesmente por uma inversão de spins. Outra diferença está no fato de que a inversão de um aglomerado finito de spins altera o valor do “overlap” em uma quantidade proporcional ao volume desse aglomerado, enquanto o “link overlap” sofre uma variação proporcional à área da superfície de contorno do aglomerado, ou seja, uma grandeza proporcional ao número de ligações invertidas ou à diferença de energia entre as duas configurações.

Neste capítulo, estudaremos a distribuição dos valores do “link overlap” na rede hierárquica diamante (figura 1.10) em três dimensões ($p = 4$), utilizando uma técnica onde as correlações de pares de spins em cada réplica são calculadas exatamente através de um método recursivo proposto por Morgado, Coutinho e Curado [48, 49].

2.1 Previsões de Campo Médio

A solução exata do modelo de Sherrington-Kirkpatrick é reconhecida como a aproximação de *Campo Médio* para o modelo de Edwards-Anderson com spins de Ising. Essa solução mostra uma fase vidro-de-spins onde há quebra de simetria entre réplicas e uma infinidade de estados termodinâmicos não-relacionados por qualquer transformação de simetria. Isso representa uma quebra não-trivial da *ergodicidade*, onde, no estado fundamental, várias regiões do espaço de fases estão separadas por barreiras infinitas e intransponíveis de energia. A existência de um número infinitamente grande de estados termodinâmicos distintos pode conduzir a um número igualmente grande de valores para o parâmetro de ordem de Parisi (“overlap”), q , ou para o “link overlap”, q_L , portanto, é interessante obtermos a distribuição desses valores para uma dada configuração da desordem (um conjunto fixo de acoplamentos, $\{J_{ij}\}$) e uma dada temperatura, T .

De acordo com o *cenário de Parisi*, que defende a continuidade dos resultados qualitativos da solução de campo médio para sistemas com dimensão finita e com interações de curto-alcance, tanto o “overlap” como o “link overlap” deverão possuir uma estrutura não-trivial, refletindo a presença dos múltiplos estados. Além disso, as distribuições dessas grandezas não seriam automediadas, variando sensivelmente de amostra para amostra. No caso da distribuição $P_J(q)$, tomada sua média sobre todas as configurações da desordem,

$$P(q) = [P_J(q)]_J, \quad (2.1)$$

onde $[\dots]_J$ representa o valor médio da grandeza através da distribuição de acoplamentos $P(J_{ij})$, deveremos encontrar dois picos do tipo δ de Dirac nos valores $\pm q_{EA}$,

o parâmetro de ordem de Edwards-Anderson (equação (1.3)), e um espectro contínuo entre esses valores, possuindo um patamar finito em $q \sim 0$ [6]. No caso da distribuição do “link overlap” também é esperado um comportamento não-trivial para a média configuracional da distribuição $P_J^{(L)}(q_L)$,

$$P^{(L)}(q_L) = \left[P_J^{(L)}(q_L) \right]_J, \quad (2.2)$$

que possui uma forma assimétrica, com uma largura não-nula. Além disso, há uma forte variação de amostra para amostra na distribuição $P_J^{(L)}(q_L)$ [75]. Foi conjecturado por Drossel, Bokil, Moore e Bray [75] que o comportamento não-trivial da distribuição do “link overlap” encontrado em simulações de *Monte Carlo* [78, 79] era devido a efeitos de tamanho finito e de proximidade do ponto crítico.

2.2 Previsões do Modelo de Gotas

O modelo de gotas baseia-se numa hipótese fenomenológica fundamentada nos trabalhos de McMillan [22] e Bray e Moore [21] sobre *Grupo de Renormalização com Parede de Domínio*. Como fora discutido na seção 1.1, pequenos aglomerados de spins revertidos, denominados *gotas*, são as excitações elementares acima do estado fundamental. A energia de cada uma dessas gotas obedece uma lei de potência com o comprimento linear L da gota. Essa hipótese leva a previsões extremamente contraditórias àquelas do modelo de campo médio.

De acordo com a hipótese de escala apenas dois estados puros são esperados na região abaixo da temperatura crítica [20, 80], relacionados por uma simetria de inversão de spins, tal como ocorre em um sistema homogêneo como o modelo de Ising ferromagnético puro. Dessa forma, a energia livre possui apenas dois mínimos globais,

não se descartando a possibilidade de uma infinidade de mínimos locais, resultando em fases meta-estáveis. Não há quebra de simetria entre réplicas, nem há linha de Almeida-Thouless, conseqüentemente, a presença de qualquer campo magnético elimina a transição de fase.

Num cenário sem quebra de simetria entre réplicas todas as grandezas são automediadas e, portanto, espera-se que as distribuições do “overlap”, $P(q)$ (equação (2.1)) e do “link overlap” (equação (2.2)) apresentem comportamento trivial. Ou seja, um par de deltas em $\pm q_{EA}$ para $P(q)$ e uma delta em $q_L(T)$ para $P^{(L)}(q_L)$. Contudo, o comportamento trivial de $P(q)$ em um sistema com dois estados relacionados por inversão de spins foi questionado [81], pois a presença de paredes de domínio pode introduzir um comportamento não-trivial.

2.3 Equação de Renormalização para o Modelo de Ising com Réplicas

Vamos considerar duas réplicas da rede diamante com p conexões, cada qual com o mesmo conjunto de valores para os acoplamentos reduzidos ($\{K_i, L_i\}$), mas com variáveis de spin independentes ($\{\sigma_i, \tau_i, \mu, \mu', \nu, \nu'\}$), conforme ilustrado na figura 2.1. Consideramos, também, que as duas réplicas não interagem, conforme o seguinte hamiltoniano:

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{i=1}^p [(K_i\mu + L_i\mu')\sigma_i + (K_i\nu + L_i\nu')\tau_i], \quad (2.3)$$

onde o primeiro e o segundo termos representam as energias dentro de uma célula fundamental de cada réplica.

Nesse esquema, os geradores das redes são dizimados em seus elementos pri-

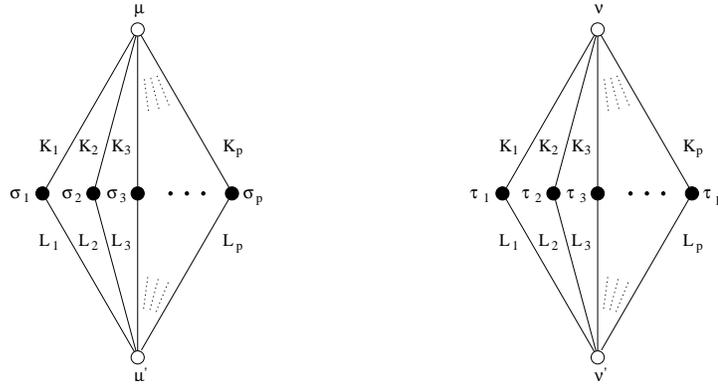


Figura 2.1: Esquema de renormalização para duas réplicas da rede diamante com p conexões.

mitivos, como mostrado na figura 2.2, que também não interagem entre si e cujo hamiltoniano efetivo, conforme definido na eq. (1.17), deve tomar a forma:

$$-\beta\mathcal{H}' = K'(\mu\mu' + \nu\nu'). \quad (2.4)$$

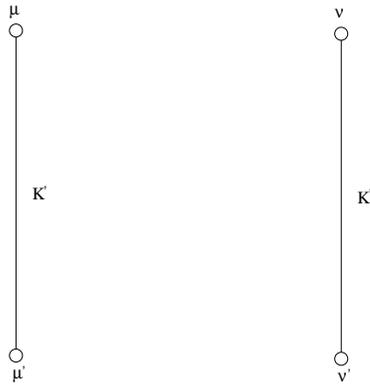


Figura 2.2: Sistema com réplica renormalizada.

Os valores das novas constantes de acoplamento efetivas, K' , são obtidos seguindo-se os passos descritos na seção 1.3.2. Devemos, portanto, calcular a função

de partição restrita, usando o hamiltoniano em (2.3),

$$z(\{\mu\}, \{\nu\}) = \sum_{\{\sigma\}, \{\tau\}} \exp[-\beta \mathcal{H}(\{\mu\}, \{\nu\}, \{\sigma\}, \{\tau\})]. \quad (2.5)$$

Realizando as somas nos conjuntos de variáveis de spin, associadas aos sítios internos dos geradores, $\{\sigma\}$ e $\{\tau\}$, obtemos a expressão para a função de partição restrita dos geradores,

$$z(\{\mu\}, \{\nu\}) = 2^p \prod_{i=1}^p \{\cosh[K_i(\mu + \nu) + L_i(\mu' + \nu')] + \cosh[K_i(\mu - \nu) + L_i(\mu' - \nu')]\}. \quad (2.6)$$

Da mesma forma, a função de partição restrita para o sistema renormalizado (figura 2.2) é obtida a partir do hamiltoniano efetivo da equação (2.4),

$$z(\{\mu\}, \{\nu\}) = A \exp[K'(\mu\mu' + \nu\nu')], \quad (2.7)$$

onde A é uma constante, tal qual a definida na equação (1.17).

Igualando as equações (2.6) e (2.7) e considerando todas as configurações possíveis para os spins associados aos sítios externos ($\{\mu = \pm 1, \mu' = \pm 1, \nu = \pm 1, \nu' = \pm 1\}$), $2^4 = 16$ no total, recaímos num sistema de equações algébricas não-lineares para as constantes de acoplamento K' ,

$$\{+, +, +, +\} \Rightarrow Ae^{(2K')} = 2^p \prod_{i=1}^p \{\cosh[2(K_i + L_i)] + 1\} \quad (2.8a)$$

$$\{+, -, +, -\} \Rightarrow Ae^{(-2K')} = 2^p \prod_{i=1}^p \{\cosh[2(K_i - L_i)] + 1\} \quad (2.8b)$$

$$\{+, +, +, -\} \Rightarrow A = 2^p \prod_{i=1}^p \{\cosh(2K_i) + \cosh(2L_i)\}, \quad (2.8c)$$

todas as outras treze possibilidades recaem nas mesmas equações. O sistema (2.8) pode ser resolvido para K' , resultando na equação de renormalização para as redes,

$$K' = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(K_i + L_i)}{\cosh(K_i - L_i)} \right] \quad (2.9)$$

Caso haja transição de fases no sistema, a temperatura crítica pode ser estimada através da iteração numérica das equação (2.9) por um processo conhecido como método do reservatório, proposto por Southern e Young [82] e extensivamente utilizado [51,83,84]. Nessa técnica, reservatórios são criados a cada passo do processo de renormalização, neles os valores das constantes de acoplamento, K_i , L_i , são armazenadas em dois reservatórios, um para K_i e L_i , que serão utilizados no próximo passo. Partindo-se de uma distribuição inicial conhecida para K_i e L_i , populamos o primeiro reservatório com N valores, obtidos a partir do uso das equações (2.9) N vezes. No segundo passo, as equações (2.9) são abastecida com valores retirados aleatoriamente dos primeiros reservatórios até que os segundos reservatórios sejam populados com N valores. Esse processo pode ser repetido indefinidamente e cada reservatório representará uma amostra da população de variáveis aleatórias cuja distribuição está sendo renormalizada.

O estado fundamental pode ser obtido exatamente tomando-se o limite $T \rightarrow 0$ na equação de renormalização, neste caso tomaremos o limite da equação (2.9). Tomando-se o limite teremos,

$$J'_0 \equiv \lim_{T \rightarrow 0} k_B T K' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (|J_i^{(1)} + J_i^{(2)}| - |J_i^{(1)} - J_i^{(2)}|), \quad (2.10)$$

onde $J_i^{(1)} \equiv k_B T K_i$, $J_i^{(2)} \equiv k_B T L_i$ e $|\dots|$ representa o valor absoluto da grandeza.

2.4 Relações de Recorrência para a Magnetização Local do Modelo de Ising

Suponhamos, agora, que a célula fundamental de uma das réplicas seja componente de uma grande rede (de alta hierarquia), então, os sítios externos desse gerador estarão sob a ação de campos locais resultantes da interação com sítios que estejam fora do gerador. Além disso, eles também interagem entre si através do restante da rede. Em princípio, esses campos e interações poderiam ser calculados caso o traço sobre todas as variáveis de spin externas fosse feito, isto é, o restante da rede fosse tratado como um elemento de *decoração* entre os sítios μ e μ' [85]. Desse modo, esquematicamente, o sistema pode ser representado pelo sistema equivalente mostrado na figura 2.3.

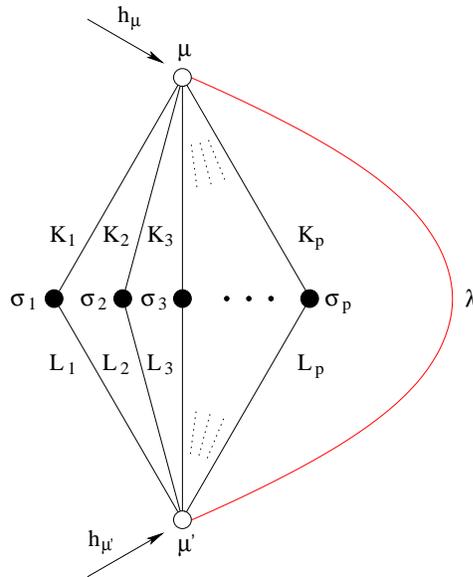


Figura 2.3: Representação de um gerador da rede diamante incrustada numa rede de hierarquia arbitrária. h_μ , $h_{\mu'}$ e λ representam as interações com o restante da rede.

O hamiltoniano reduzido desse sistema equivalente será escrito na seguinte forma,

$$H = h_\mu \mu + h_{\mu'} \mu' + \lambda \mu \mu' + \sum_{i=1}^p (K_i \mu + L_i \mu') \sigma_i, \quad (2.11)$$

onde a constante λ representa o acoplamento efetivo entre μ e μ' através do restante da rede e os campos h_μ e $h_{\mu'}$ representam as interações efetivas com os sítios vizinhos a eles, mas externos ao gerador. A função de partição total para esse hamiltoniano é dada, formalmente por,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\mu\}} \sum_{\{\sigma\}} \exp(H) \\ &= \sum_{\{\mu\}} \exp(h_\mu \mu + h_{\mu'} \mu' + \lambda \mu \mu') \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i=1}^p \exp[(K_i \mu + L_i \mu') \sigma_i]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A função de partição em (2.12) pode ser calculada exatamente. Usando que,

$$e^x = \cosh(x)[1 + \tanh(x)], \quad (2.13)$$

e visto que a função cosseno hiperpólico é par,

$$\cosh(-x) = \cosh(x),$$

teremos,

$$\begin{aligned}
Z &= \cosh(h_\mu) \cosh(h_{\mu'}) \cosh(\lambda) \left[\prod_{i=1}^p \cosh(K_i) \cosh(L_i) \right] \times \\
&\times \sum_{\{\mu\}} [1 + \tanh(h_\mu \mu)] [1 + \tanh(h_{\mu'} \mu')] [1 + \tanh(\lambda \mu \mu')] \times \\
&\times \prod_{i=1}^p \sum_{\sigma_i = \pm 1} [1 + \tanh(K_i \mu \sigma_i)] [1 + \tanh(L_i \mu' \sigma_i)]. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Vamos, primeiramente definir algumas grandezas para tornar o cálculo de (2.14) mais claro. Seja,

$$\alpha \equiv \cosh(h_\mu) \cosh(h_{\mu'}) \cosh(\lambda) \left[\prod_{i=1}^p \cosh(K_i) \cosh(L_i) \right], \tag{2.15a}$$

$$\gamma(\mu, \mu') \equiv [1 + \tanh(h_\mu \mu)] [1 + \tanh(h_{\mu'} \mu')] [1 + \tanh(\lambda \mu \mu')] \tag{2.15b}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu, \mu') &\equiv \prod_{i=1}^p \sum_{\sigma_i = \pm 1} [1 + \tanh(K_i \mu \sigma_i)] [1 + \tanh(L_i \mu' \sigma_i)] \\
&= \prod_{i=1}^p \{ [1 + \tanh(K_i \mu)] [1 + \tanh(L_i \mu')] + [1 - \tanh(K_i \mu)] [1 - \tanh(L_i \mu')] \}. \tag{2.15c}
\end{aligned}$$

Podemos notar que a função $\varphi(\mu, \mu')$, definida em (2.15c), possui as seguintes propri-

idades,

$$\varphi(-1, -1) = \varphi(1, 1) \quad (2.16a)$$

$$\varphi(1, -1) = \varphi(-1, 1), \quad (2.16b)$$

as quais serão fundamentais para o cálculo da função de partição.

Substituindo as definições (2.15) em (2.14) e utilizando as propriedades (2.16), teremos que,

$$\begin{aligned} Z &= \alpha \sum_{\mu, \mu' = \pm 1} \gamma(\mu, \mu') \varphi(\mu, \mu') \\ &= \alpha \{ [\gamma(1, 1) + \gamma(-1, -1)] \varphi(1, 1) + [\gamma(1, -1) + \gamma(-1, 1)] \varphi(1, -1) \} \end{aligned} \quad (2.17)$$

De posse da função de partição total do sistema podemos obter as diversas funções termodinâmicas, em particular, estamos interessados no cálculo das magnetizações locais e das correlações de pares. Para as magnetizações locais teremos,

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_\mu} \quad (2.18a)$$

$$\langle \mu' \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_{\mu'}} \quad (2.18b)$$

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{\alpha}{Z} \sum_{\{\mu\}} \gamma(\mu, \mu') \Psi_j(\mu, \mu'), \quad (2.18c)$$

onde uma nova função, $\Psi_j(\mu, \mu')$, é definida,

$$\begin{aligned} \Psi_j(\mu, \mu') &\equiv \sum_{\{\sigma\}} \sigma_j \prod_{i=1}^p [1 + \tanh(K_i \mu \sigma_i)] [1 + \tanh(L_i \mu' \sigma_i)] \\ &= \{[1 + \tanh(K_j \mu)] [1 + \tanh(L_j \mu')] - [1 - \tanh(K_j \mu)] [1 - \tanh(L_j \mu')]\} \times \\ &\times \prod_{i \neq j}^p \{[1 + \tanh(K_i \mu)] [1 + \tanh(L_i \mu')] - [1 - \tanh(K_i \mu)] [1 - \tanh(L_i \mu')]\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A função $\Psi_j(\mu, \mu')$ em (2.19) possui as seguintes propriedades,

$$\Psi_j(-1, -1) = -\Psi_j(1, 1) \quad (2.20a)$$

$$\Psi_j(1, -1) = -\Psi_j(-1, 1), \quad (2.20b)$$

dessa forma, substituindo (2.17) em (2.18) e utilizando as propriedades (2.16) da função $\varphi(\mu, \mu')$ e (2.20) da função $\Psi_j(\mu, \mu')$ teremos um sistema para as magnetizações locais,

$$\langle \mu \rangle = A\varphi(1, 1) + B\varphi(1, -1), \quad (2.21a)$$

$$\langle \mu' \rangle = A\varphi(1, 1) - B\varphi(1, -1), \quad (2.21b)$$

$$\langle \sigma_j \rangle = A\Psi_j(1, 1) + B\Psi_j(1, -1), \quad (2.21c)$$

onde,

$$A \equiv \frac{\alpha[\gamma(1, 1) - \gamma(-1, -1)]}{Z}$$

e

$$B \equiv \frac{\alpha[\gamma(1, -1) - \gamma(-1, 1)]}{Z},$$

a função $\gamma(\mu, \mu')$ está definida em (2.15b).

Das equações (2.21a) e (2.21b) extraímos os valores de A e B em função de $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu' \rangle$,

$$A = \frac{1}{2\varphi(1, 1)}(\langle \mu \rangle + \langle \mu' \rangle) \text{ e} \quad (2.22a)$$

$$B = \frac{1}{2\varphi(1, -1)}(\langle \mu \rangle - \langle \mu' \rangle), \quad (2.22b)$$

que substituídos em (2.21c) nos conduz à uma relação de recorrência para as magnetizações locais dos sítios internos do gerador em função das magnetizações locais dos sítios externos,

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\Psi_j(1, 1)}{\varphi(1, 1)} + \frac{\Psi_j(1, -1)}{\varphi(1, -1)} \right] \langle \mu \rangle + \left[\frac{\Psi_j(1, 1)}{\varphi(1, 1)} - \frac{\Psi_j(1, -1)}{\varphi(1, -1)} \right] \langle \mu' \rangle \right\}. \quad (2.23)$$

Por conseguinte, dados $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu' \rangle$ como condições de contorno, podemos calcular todos os $\langle \sigma_j \rangle$, visto que as funções φ e Ψ_j não contêm os valores desconhecidos de λ , h_μ e $h_{\mu'}$.

Analogamente, podemos calcular as correlações de pares, ou seja,

$$\langle \mu\mu' \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda}, \quad (2.24a)$$

$$\langle \mu\sigma_j \rangle = \frac{\alpha}{Z} \sum_{\{\mu\}} \mu \gamma(\mu, \mu') \Psi_j(\mu, \mu') \text{ e} \quad (2.24b)$$

$$\langle \mu'\sigma_j \rangle = \frac{\alpha}{Z} \sum_{\{\mu\}} \mu' \gamma(\mu, \mu') \Psi_j(\mu, \mu'), \quad (2.24c)$$

donde, através de passos análogos àqueles usados para se obter a equação (2.23)

obtemos,

$$\langle \mu \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\Psi_j(1,1)}{\varphi(1,1)} + \frac{\Psi_j(1,-1)}{\varphi(1,-1)} \right] + \left[\frac{\Psi_j(1,1)}{\varphi(1,1)} - \frac{\Psi_j(1,-1)}{\varphi(1,-1)} \right] \langle \mu \mu' \rangle \right\} \text{ e} \quad (2.25a)$$

$$\langle \mu' \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\Psi_j(1,1)}{\varphi(1,1)} - \frac{\Psi_j(1,-1)}{\varphi(1,-1)} \right] + \left[\frac{\Psi_j(1,1)}{\varphi(1,1)} + \frac{\Psi_j(1,-1)}{\varphi(1,-1)} \right] \langle \mu \mu' \rangle \right\}. \quad (2.25b)$$

Substituindo as definições de $\varphi(\mu, \mu')$ (2.15c) e $\Psi_j(\mu, \mu')$ (2.19) nas equações (2.25) obtemos,

$$\langle \mu \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [a + b \langle \mu \mu' \rangle] \quad (2.26a)$$

$$\langle \mu' \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [b + a \langle \mu \mu' \rangle], \quad (2.26b)$$

onde,

$$a = \tanh(K_i + L_i) + \tanh(K_i - L_i), \quad (2.27a)$$

e

$$b = \tanh(K_i + L_i) - \tanh(K_i - L_i). \quad (2.27b)$$

O estado fundamental pode ser obtido tomando-se o limite $T \rightarrow 0$ nas equações (2.27), donde,

$$a_0 \equiv \lim_{T \rightarrow 0} a = \text{sign}(K_i + L_i) + \text{sign}(K_i - L_i), \quad (2.28a)$$

e

$$b_0 \equiv \lim_{T \rightarrow 0} b = \text{sign}(K_i + L_i) - \text{sign}(K_i - L_i), \quad (2.28b)$$

onde $\text{sign}(x)$ representa a função sinal,

$$\text{sign}(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e} \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Novamente, podemos impor condições de contorno para a correlação entre os sítios externos, $\langle \mu\mu' \rangle$, e calcular, recursivamente, as correlações para todos os sítios internos.

As equações (2.23) e (2.26) podem ser iteradas numericamente, com as condições de contorno apropriadas e com os valores dos acoplamentos, K_i e L_i , retirados dos reservatórios gerados a partir da iteração da equação de renormalização como explicado no final da seção 2.3.

2.5 Estudo da Distribuição do “Link Overlap”

O “link overlap” entre configurações de duas réplicas é definido como,

$$q_L \equiv \left[\frac{1}{N_L} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j \rangle \right]_J, \quad (2.29)$$

onde a soma é feita sobre todos os pares de sítios ligados da rede, N_L é o número de ligações e, como já fora dito, $[\dots]_J$ representa a média sobre todas as configurações para as constantes de acoplamento. O conjunto de spins, $\{\sigma\}$, se refere a uma das redes, enquanto o outro conjunto, $\{\tau\}$, se refere à sua réplica.

Vamos considerar um sistema de réplicas não-interagentes. Nesse caso, a média termodinâmica envolvendo grandezas entre as réplicas se desacopla, de modo que o

“link overlap” pode ser escrito como,

$$q_L \equiv \left[\frac{1}{N_L} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \tau_i \tau_j \rangle \right]_J, \quad (2.30)$$

assim, podemos utilizar as equações (2.25) em conjunto com (2.9) para calcular o valor de cada correlação de pares em cada rede, obtendo o “link overlap” (2.30).

O processo numérico envolve duas etapas. Na primeira devemos “construir” a rede, com sua réplica, a partir da escolha de um valor aleatório para o acoplamento em cada ligação, em uma certa hierarquia h . Esses valores são retirados de uma distribuição de probabilidades definida e, então, obtém-se os acoplamentos renormalizados para todas as hierarquias inferiores, $n < h$, utilizando-se a equação de renormalização (equação (2.9) ou (2.10)) para cada gerador da rede. Os valores renormalizados são armazenados para serem utilizados na segunda etapa, onde as equações de recorrência (2.26) são utilizadas para calcular o valor das correlações de cada par da h -ésima hierarquia da rede. A primeira etapa é conhecida como *processo de dizimação*, enquanto a segunda como *processo de decoração*. Para que possamos obter informações relevantes é necessário que as réplicas estejam em posições distintas do espaço de configurações, isso pode ser feito utilizando-se condições de contorno diferentes para cada réplica nas equações de recorrência (2.26). Note que o processo do reservatório, descrito no final da seção 2.3, não pode ser utilizado porque precisamos garantir a correlação entre as réplicas.

Vamos tomar uma rede com $p = 4$ conexões, ou seja, uma rede com dimensão de grafo $d = 3$, com h hierarquias a uma dada temperatura T . O tamanho linear dessa rede é dado por $L = 2^h$, de modo que o limite termodinâmico é alcançado quando tomamos $L \rightarrow \infty$, o que é equivalente a tomar $h \rightarrow \infty$. Como distribuições de

probabilidades iniciais para as constantes de acoplamento adotaremos a distribuição *gaussiana*,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-J_{ij}^2}{2}\right),$$

e a distribuição *delta bimodal*,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{2}\delta(J_{ij} + 1) + \frac{1}{2}\delta(J_{ij} - 1),$$

ambas com média nula e largura unitária. Quando a distribuição é contínua a probabilidade de ocorrência de frustração exata é nula, e quando a distribuição é discreta há grande frustração, por isso escolhemos essas duas distribuições em particular. No caso da distribuição bimodal o “link overlap” é idêntico à superposição energética entre as réplicas.

Com a finalidade de simular várias possibilidades de condições de contorno, vamos iniciar o processo de decoração pela primeira hierarquia, ao invés da hierarquia de ordem zero. Após o processo de dizimação, fixamos os valores das correlações para cada ligação da primeira hierarquia da rede em uma das réplicas de acordo com o respectivo valor da constante de acoplamento, ou seja, se a constante de acoplamento renormalizada para aquela ligação for positiva, adotaremos um valor de correlação $\langle \mu\mu' \rangle = +1$ para o par de spins por ela ligados, se a constante for negativa, adotaremos o valor $\langle \mu\mu' \rangle = -1$. Este será nosso estado padrão e é ilustrado na figura 2.4(a). Na segunda réplica adotaremos todas as possibilidades ± 1 para as correlações de cada par de spins em uma ligação, independentemente do valor da sua constante de acoplamento, uma das possibilidades é ilustrada na figura 2.4(b). Na rede com $p = 4$ conexões teremos $2^8 = 256$ possibilidades para as configurações da segunda réplica. Com essas condições de contorno, faremos a decoração de cada rede,

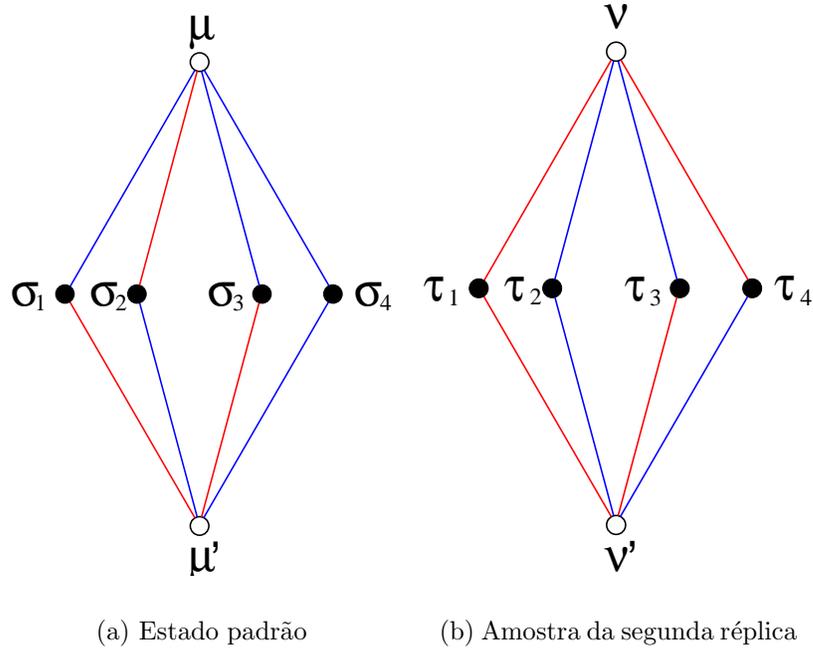


Figura 2.4: Condições de contorno para a primeira réplica do sistema, juntamente com uma amostra das condições de contorno para a segunda réplica. As ligações azuis representam correlações positivas, $+1$, as vermelhas representam correlações negativas, -1 .

até atingirmos a h -ésima hierarquia. De posse das duas réplicas decoradas, podemos calcular o valor do “link overlap” para cada configuração diferente das condições de contorno e levantar a distribuição do “link overlap”.

Nas figuras 2.5(a) e 2.5(b) podemos comparar as distribuições do “link overlap” na temperatura crítica para vários tamanhos lineares de rede, $L = 4$ até $L = 128$, o que corresponde a redes de $h = 2$ à $h = 7$ hierarquias, tomadas 100 amostras da desordem. Como fora notado por Drossel *e colaboradores* [75], vemos que há uma grande dispersão para redes pequenas, principalmente com a distribuição bimodal, mas que diminui rapidamente quando o tamanho da rede é aumentado.

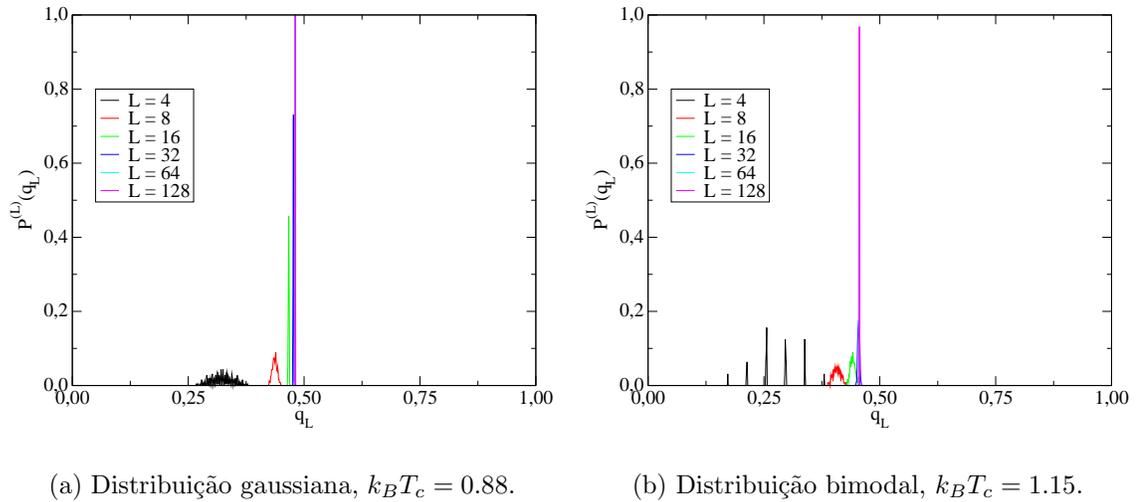


Figura 2.5: Distribuição média do “Link overlap” na temperatura crítica para as distribuições gaussiana e bimodal dos acoplamentos sobre 100 amostras distintas da desordem.

O caso mais interessante é o do estado fundamental, como pode ser visto nas figuras 2.6(a) e 2.6(b). Para a distribuição gaussiana, a distribuição do “link overlap” aproxima-se de uma distribuição delta no valor $q_L = 1$. Porém, para a distribuição bimodal, o valor médio da distribuição apresenta uma saturação num valor próximo a $q_L = 0.6$. A convergência do valor médio das distribuições, quando o tamanho da rede cresce, pode ser observado nas figuras 2.7(a) e 2.7(b) para o caso $T = 0$. Fica evidente que o tamanho $L = 128$ é uma boa aproximação para o limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$. Esse comportamento revela a existência de grande número de ligações frustradas no estado fundamental do modelo com distribuição inicial bimodal, que corresponde a um estado fundamental degenerado. Para temperaturas muito acima de T_c (fase paramagnética), o pico da distribuição desloca-se para valores de $q_L \sim 0$ quando $L \rightarrow \infty$ em ambas as distribuições.

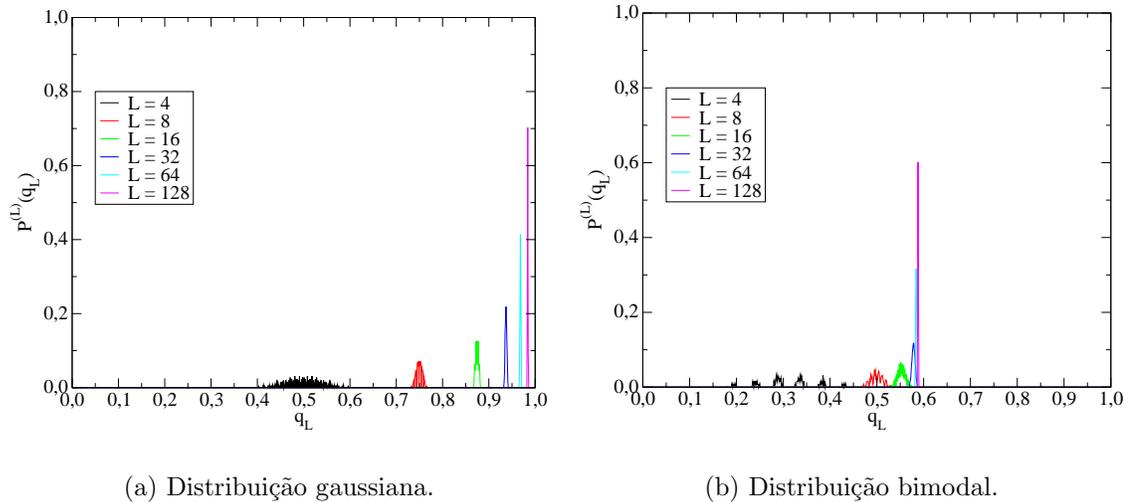


Figura 2.6: Distribuição média do “Link overlap” no estado fundamental para as distribuições gaussiana e bimodal dos acoplamentos sobre 100 amostras distintas da desordem.

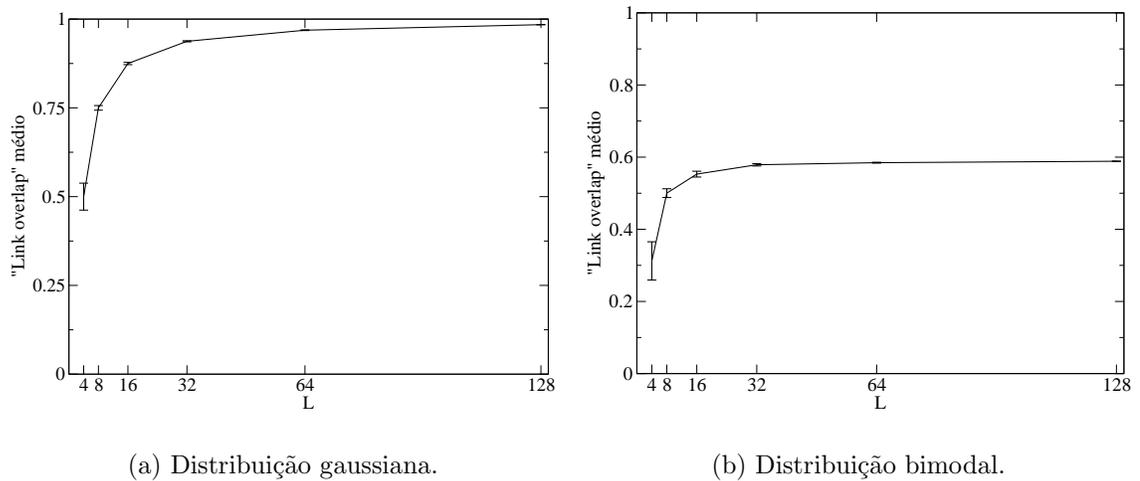


Figura 2.7: Comportamento do valor médio do “link overlap” em função do tamanho da rede no estado fundamental para as distribuições gaussiana e bimodal com 100 amostras da desordem.

O estudo da largura das distribuições do “link overlap”,

$$\Delta q_L \equiv \sqrt{\int (q_L - \bar{q}_L)^2 P^{(L)}(q_L) dq_L}, \quad (2.31)$$

onde \bar{x} representa o valor médio da variável aleatória x sobre sua distribuição de probabilidades, revela outra diferença. No caso da distribuição gaussiana, verificamos um decaimento de Δq_L como função do comprimento linear da rede, L , de acordo com o previsto no modelo de “gotas” [75], ou seja, com uma lei de potência do tipo,

$$\Delta q_L \sim L^{-\omega}, \quad (2.32)$$

que pode ser observado na figura 2.8. Contudo, o expoente ω possui uma forte dependência com a temperatura, conforme atesta a figura 2.9, indicando uma convergência para o valor $\omega = 1$ em $T = 0$! De acordo com a referência [75], no cenário de Parisi o deve-se ter $\omega = 0$, indicando que o cenário de gotas prevalece em nosso caso.

No caso da distribuição bimodal, esse tipo de comportamento não é tão evidente, como pode ser visto na figura 2.10. Contudo, supondo o mesmo comportamento em lei de potência, podemos ajustar as curvas da figura 2.10 através da equação (2.32). O expoente ω , nesse caso, apresenta um comportamento com a temperatura tal como mostrado na figura 2.11, muito diferente daquele para a distribuição inicial gaussiana em baixas temperaturas, estabilizando-se em um patamar em torno de 1,25 a partir de $T \sim 0,5$. Nessa faixa de temperatura o valor médio da distribuição também alcançou seu limite $q_L \sim 0,6$. Contudo, próximo a temperatura crítica o comportamento desse expoente parece ser o mesmo para as duas distribuições iniciais utilizadas.

O expoente ω foi estimado por Drossel *e colaboradores* [75] no contexto do

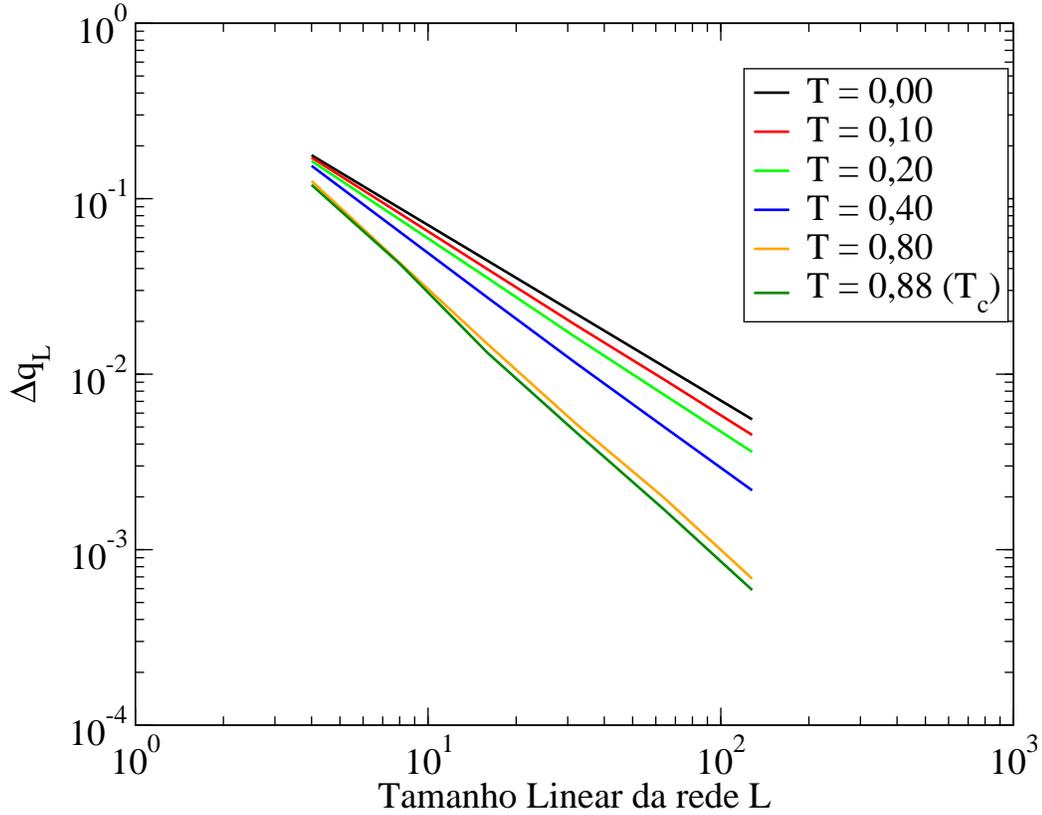


Figura 2.8: Comportamento da largura da distribuição do “link overlap” com o tamanho linear da rede para a distribuição gaussiana dos acoplamentos e para várias temperaturas na fase condensada. O decaimento em forma de lei de potência é evidente.

modelo de “gotas” na rede diamante tridimensional. Foi encontrado o valor $\omega \approx 1,12$ para o estado fundamental. Neste trabalho encontramos $\omega = 1,000000 \pm 0,000004$ para a distribuição de acoplamentos gaussiana e $\omega = 1,32 \pm 0,04$ para a distribuição de acoplamentos bimodal. Contudo, o valor de ω obtido por Drossel *e colaboradores*, utilizando uma distribuição de acoplamentos gaussiana, na menor temperatura por eles utilizada foi $\omega \approx 1,23$ em $T = 0,45T_c$, que concorda com nossos valores $\omega = 1,230 \pm 0,005$ em $T = 0,4 \approx 0,45T_c$ para a distribuição de acoplamentos gaus-

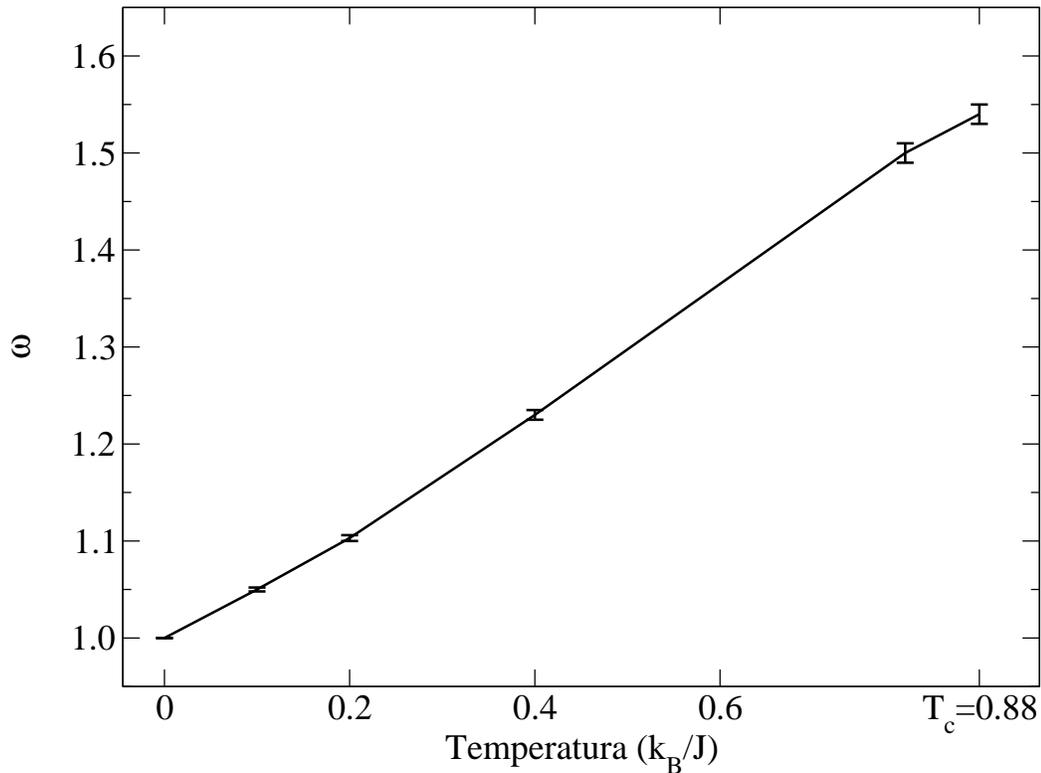


Figura 2.9: Dependência com a temperatura do expoente ω para o modelo com distribuição gaussiana dos acoplamentos.

siana e $\omega = 1,25 \pm 0,04$ em $T = 0,5 \approx 0,45T_c$ para a distribuição de acoplamentos bimodal. Os valores de ω em $T = T_c$ obtidos por Drossel *e colaboradores* e por nós também discordam, eles obtiveram $\omega \approx 1,43$ e nós $\omega = 1,54 \pm 0,01$ para a distribuição gaussiana e $\omega = 1,43 \pm 0,06$ para a distribuição bimodal. Contudo, deve-se salientar que os nossos valores foram obtidos com redes até 7 hierarquias, enquanto eles utilizaram redes com até 5 hierarquias.

Todavia, discrepâncias a parte, o cenário de Parisi prevê que o valor de ω deve ser nulo, prevalecendo, então, o cenário de “gotas” em ambas as distribuições

O comportamento do “link overlap” para uma amostra isolada da desordem

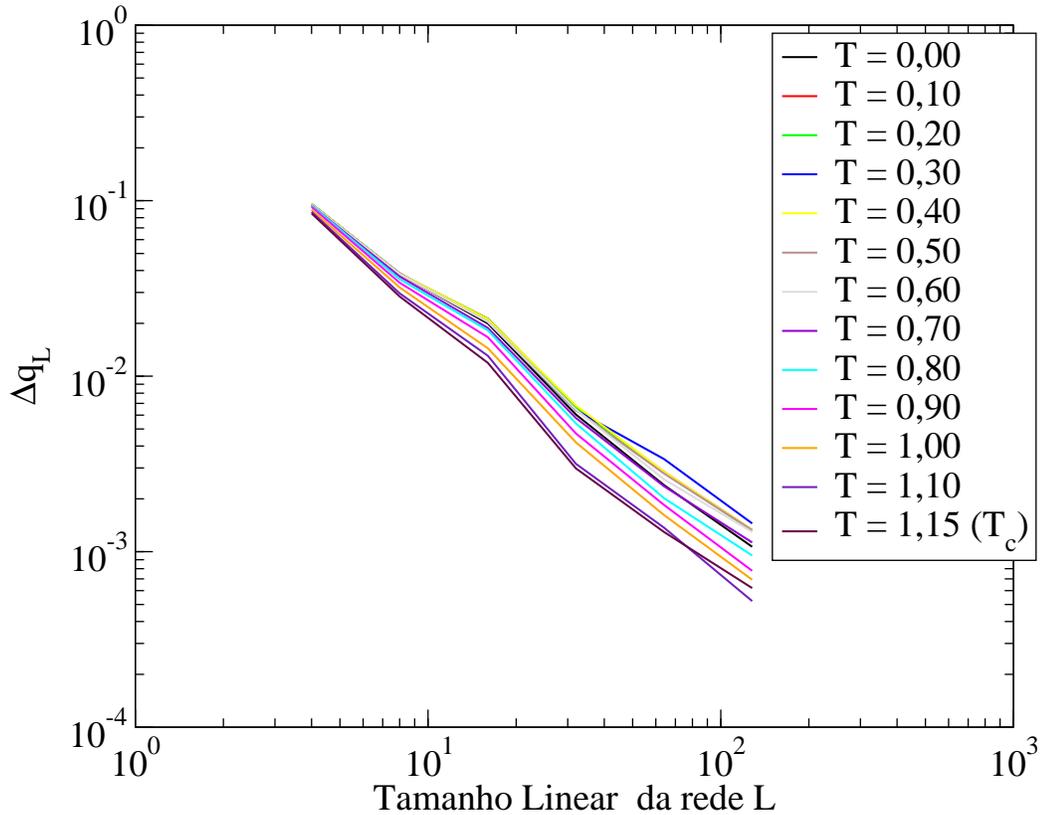


Figura 2.10: Comportamento da largura da distribuição do “link overlap” com o tamanho linear da rede para a distribuição bimodal dos acoplamentos e várias temperaturas. O decaimento em forma de lei de potência não nos parece evidente.

também foi analisado. Vemos nas figuras 2.12(a) e 2.12(b) as distribuições do “link overlap” no estado fundamental com 10 amostras distintas da desordem, cada qual representada por uma cor diferente, partindo das distribuições bimodal 2.12(a) e gaussiana 2.12(b) para os acoplamentos em redes com apenas duas hierarquias ($L = 4$). Note que no caso da distribuição gaussiana do acoplamentos, a distribuição do “link overlap” é autome-diada em $T = 0$, ou seja, todas as amostras resultam numa mesma distribuição, mesmo para redes muito pequenas. Contudo, o comportamento quando a distribuição de acoplamentos é inicialmente bimodal, mesmo para redes

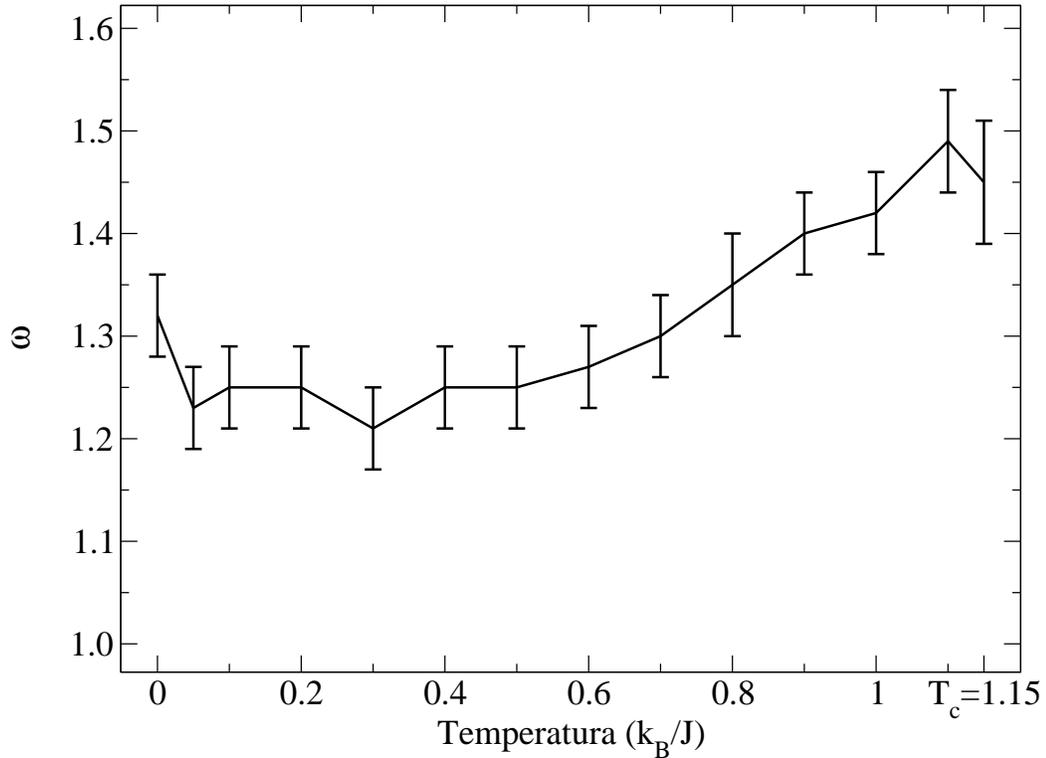
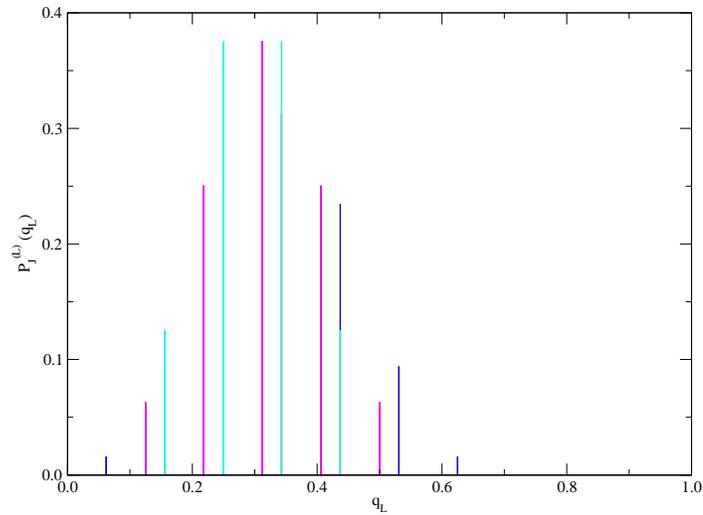


Figura 2.11: Dependência com a temperatura do expoente ω para o modelo com distribuição bimodal dos acoplamentos, assumindo-se um comportamento do tipo lei de potência para a largura da distribuição do “link overlap”.

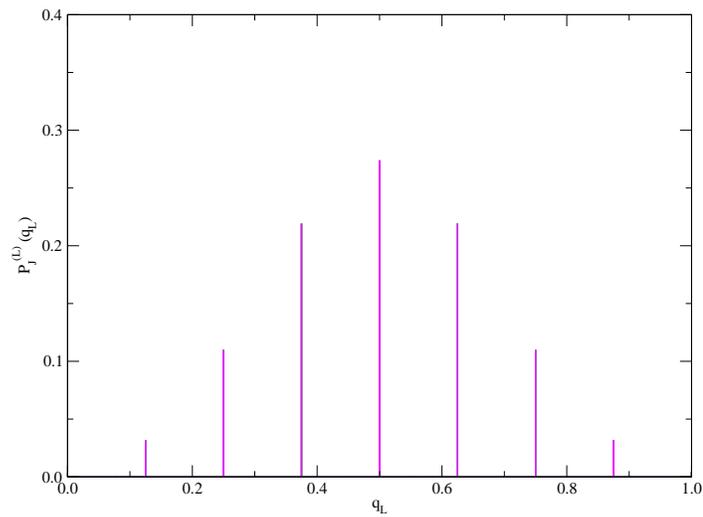
maiores, como mostrado na figura 2.13, a distribuição do “link overlap” demonstra um comportamento variável de amostra para amostra. Isso pode ser visto pelas várias cores que aparecem nas figuras 2.12(a) e 2.13 e uma única cor na figura 2.12(b).

Esse comportamento autome-diável da distribuição do “link overlap” para o caso gaussiano, no entanto, não se mantém em temperaturas mais altas, como pode ser visto na figura 2.14, onde apresentamos os resultados para 10 amostras da desordem em redes com quatro hierarquias ($L = 16$), na temperatura crítica ($k_B T_c = 0.88$), onde cada amostra é representada por uma cor diferente. Esse último resultado está em acordo com aquele obtido por Drossel *e colaboradores* [75], que encontraram essa

variação de amostra para amostra em temperaturas próximas da temperatura crítica ($T \sim 0.7 \cdot T_c$) e em redes pequenas ($L = 16$).



(a) Distribuição bimodal.



(b) Distribuição gaussiana.

Figura 2.12: Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 4$ (2 hierarquias) e no estado fundamental. Cada amostra é representada por uma cor diferente.

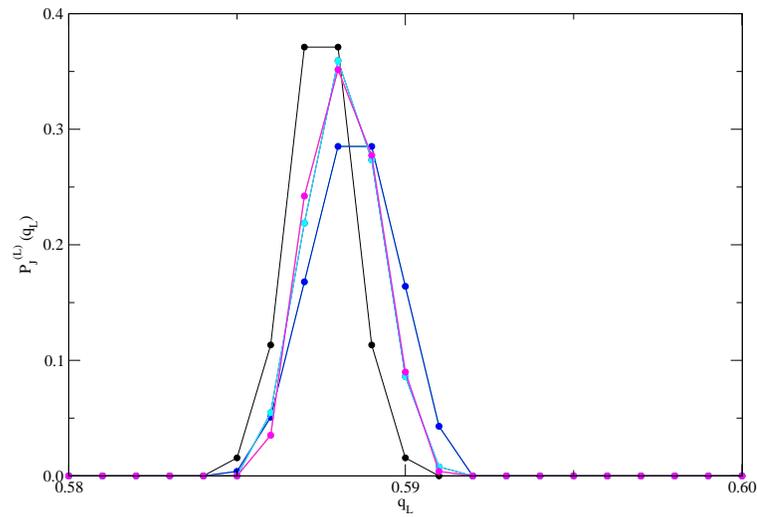


Figura 2.13: Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 128$ (7 hierarquias), para a distribuição bimodal dos acoplamentos e no estado fundamental. Cada amostra é representada por uma cor diferente.

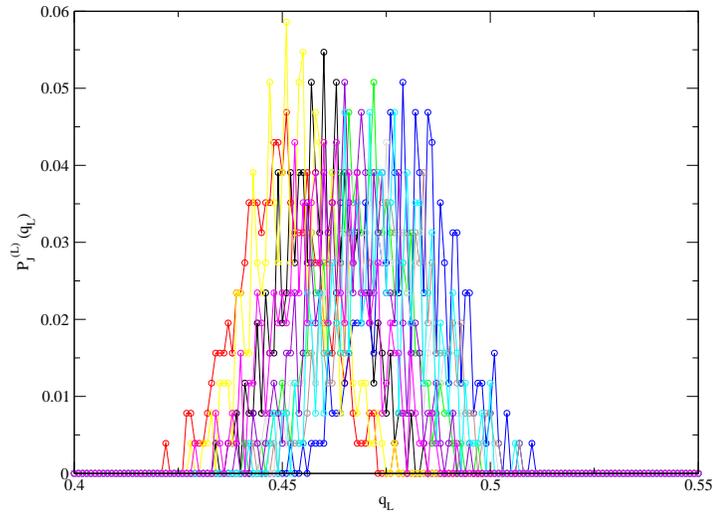


Figura 2.14: Distribuição do “link overlap” por amostra para 10 amostras isoladas da desordem, em redes de tamanho $L = 16$ (4 hierarquias), para a distribuição gaussiana dos acoplamentos no ponto crítico ($T_c = 0,88$). Cada amostra é representada por uma cor diferente.

Capítulo 3

Vidros-de-Spins de Potts na Rede Diamante

Neste capítulo estudaremos o modelo de Potts com q estados, apresentado na seção 1.2, com interações J e K na rede hierárquica diamante com q conexões. Estudos anteriores são encontrados na literatura para o caso puro (ferro e antiferromagnético) [86–91] e para o caso com interações J e K positivas [92]. Na seção 3.1 deduziremos a equação de renormalização para o modelo de forma generalizada, na seção 3.2 analisaremos o comportamento da transição da desordem através de um diagrama de fase em um espaço de parâmetros apropriados. Veremos que na fase de baixas temperaturas quando $q \geq 2$ e acima de uma certa dimensão $d_c(q)$ os parâmetros da equação renormalizada evoluem para um *atrator estranho*. Finalmente, na seção 3.3, nos casos onde há *fase condensada* serão estimadas as temperaturas críticas de cada transição para alguns valores de q e redes com várias dimensões, para três condições de probabilidades iniciais conhecidas para os acoplamentos. Também será estimada a temperatura crítica da transição de

procedimento [93].

3.1 Esquema de Renormalização para o Modelo de Potts

Seguindo passos idênticos àqueles da seção 2.3 vamos obter a equação de renormalização para o modelo de Potts na rede diamante com p conexões e interações de curto alcance. A célula fundamental da rede é mostrada na figura 3.1, seu hamiltoniano reduzido, um hamiltoniano de Potts, é escrito como,

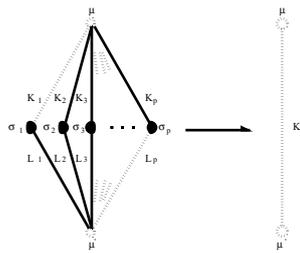


Figura 3.1: Esquema de renormalização da célula fundamental da rede diamante com p conexões.

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} \delta_{s_i s_j} \\
 &= \sum_{i=1}^p K_i \delta_{s_i s_{i+1}} + \sum_{i=1}^p L_i \delta_{s_i s_{i+1}},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde obtemos a função de partição restrita,

$$\begin{aligned} Z(\underline{a}, \underline{a}') &= \sum_{\underline{\sigma}} \exp(\underline{K}) \\ &= \sum_{\underline{\sigma}} \exp \left[\sum_{i=1}^p \left(\underline{K}_i \sigma_i + \underline{K}'_i \sigma'_i \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^p Z^{(i)}(\underline{a}, \underline{a}'), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo a função $Z^{(i)}(\underline{a}, \underline{a}')$ dada por,

$$Z^{(i)}(\underline{a}, \underline{a}') = \sum_{\sigma_i=1}^q \exp(\underline{K}_i \sigma_i + \underline{K}'_i \sigma'_i). \quad (3.3)$$

Essa função possui apenas dois valores independentes. Um deles quando $\underline{a} = \underline{a}'$,

$$\begin{aligned} Z^{(i)} &= Z^{(i)}(\underline{a} = \underline{a}') \\ &= \sum_{\sigma_i=1}^q \exp(\underline{K}_i \sigma_i + \underline{K}'_i \sigma_i) \\ &= (q-1) + \exp(\underline{K}_i + \underline{K}'_i), \end{aligned} \quad (3.4)$$

o outro quando $\underline{a} \neq \underline{a}'$,

$$\begin{aligned} Z^{(i)} &= Z^{(i)}(\underline{a} \neq \underline{a}') \\ &= \sum_{\sigma_i=1}^q \exp(\underline{K}_i \sigma_i + \underline{K}'_i \sigma'_i) \\ &= (q-2) + \exp(\underline{K}_i) + \exp(\underline{K}'_i), \end{aligned} \quad (3.5)$$

portanto, a equação de restrição é

$$\exp(\beta J) = \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{2} \right] \exp(\beta J) + \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{2} \right] (1 - \exp(\beta J)). \quad (3.6)$$

Com isso podemos encontrar o acoplamento efetivo, $\beta J'$, tal que,

$$\exp(\beta J) = \exp(\beta J'), \quad (3.7)$$

onde $\beta J'$ é uma constante a determinar. Assim, quando $\beta J = 0$, teremos

$$\exp(\beta J') = \prod_{i=1}^p \frac{1}{2},$$

e quando $\beta J \neq 0$,

$$\beta J' = \prod_{i=1}^p \frac{1}{2},$$

de modo que,

$$\exp(\beta J') = \prod_{i=1}^p \left[\frac{1}{2} \right],$$

donde obtemos a equação de restrição com o uso das equações (3.4) e (3.5),

$$\beta J' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \ln \left[\frac{(2-1) + \exp(\beta J' + \beta J)}{(2-2) + \exp(\beta J') + \exp(\beta J)} \right]. \quad (3.8)$$

3.2 Diagramas de Fases para o Fluxo de Renormalização

As variáveis apropriadas para se analisar o *diagrama de fluxo* das sucessivas transformações de renormalização serão a *temperatura renormalizada*, obtida como o inverso do *desvio padrão* da distribuição de *acoplamentos reduzidos* ($\{K_{ij} = \beta J_{ij}\}$), em cada passo de renormalização,

$$K_j = \frac{1}{\sqrt{[(K_{ij} - \langle K \rangle)^2]_J}}, \quad (3.9)$$

e a *variância* da distribuição de uma grandeza denominada por Tsallis e Levy [94] como *transmissividade térmica*, que no caso do modelo de Potts [92] é dada por,

$$T_j = \frac{1 - \exp(-K_j)}{1 + (q-1) \exp(-K_j)}. \quad (3.10)$$

A distribuição da transmissividade térmica é obtida a partir da distribuição de acoplamentos reduzidos através da transformação da equação (3.10) sobre a distribuição dos acoplamentos reduzidos e sua variância é dada por,

$$V_j = [(K_{ij} - \langle K \rangle)^2]_J. \quad (3.11)$$

Esse conjunto de parâmetros foi proposto por Curado e Meunier [83] para estudar os vidros-de-spins de Ising e posteriormente usado para se investigar os expoentes críticos de tal modelo [95].

Partindo de uma distribuição inicial arbitrária para os acoplamentos da última hierarquia da rede, podemos utilizar o método de reservatório, descrito no capítulo da

Figura 2.3, para encontrar amostras das sucessivas β -funções renormalizadas. O tamanho dessas amostras é limitado pelo tamanho dos bancos de valores adotados e deve ser grande para garantir uma boa β -função estatística dos dados. A questão de como bancos sucessivos podem estar correlacionados, haja vista a equação de renormalização (3.8) requerer 2 ℓ valores para cada valor gerado, é resolvida verificando-se que um banco com 2^{ℓ} valores pode gerar 2^{ℓ} combinações distintas, enquanto 2 ℓ combinações são necessárias. Assim, por exemplo, para aplicarmos o método do reservatório em uma rede com $\ell = 4$ conexões ($d = 3$ dimensões), um banco com apenas 100 valores seria capaz de gerar 10^{16} combinações! Número muito maior que os 2 $\ell = 800$ valores necessários para gerar o banco seguinte. Contudo, como estamos interessados em estimar os parâmetros das β -funções a partir de estimadores de suas amostras, não poderemos utilizar bancos muito pequenos. Usaremos bancos com $2^{\ell} = 2^{10} = 1,048,576$ valores, para garantir bons estimadores estatísticos.

No primeiro passo geramos um conjunto de 2 ℓ valores seguindo uma distribuição conhecida inicial, utilizamos como β -funções iniciais a d -bimodal,

$$f_{\beta}(\beta_j) = \frac{1}{2} f(\beta_j - \beta_0) + \frac{1}{2} f(\beta_j + \beta_0), \quad (3.12)$$

a gaussiana,

$$f_{\beta}(\beta_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\beta_j^2}{2}\right] \quad (3.13)$$

e a uniforme

$$f_{\beta}(\beta_j) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6}, & -\sqrt{3} \leq \beta_j \leq \sqrt{3}; \\ 0, & \beta_j < -\sqrt{3} \text{ e } \beta_j > \sqrt{3}; \end{cases} \quad (3.14)$$

todas com média nula e variância unitária. No segundo passo aplicamos a equação de renormalização (3.8) para gerar uma constante renormalizada. O processo é então

repetido n vezes para formar um banco com n valores, que se constitui em uma amostra da primeira renormalização de acoplamentos renormalizada. No passo seguinte esse primeiro banco é usado para alimentar o processo de renormalização e construir o banco de valores da segunda renormalização. Em seguida o processo é repetido sucessivamente para gerar os próximos bancos, gerando amostras das distribuições renormalizadas. A cada passo são calculados os valores de β e K para cada amostra da renormalização renormalizada. O processo global é, então, repetido N vezes para se obter valores médios desses parâmetros. No n -ésimo desses parâmetros os sucessivos valores médios de β e K indicam o fluxo da renormalização renormalizada. No n -ésimo β e K cada renormalização de probabilidades está associada a uma certa curva contínua representativa. Para uma dada temperatura a renormalização de acoplamentos inicial deve partir para uma renormalização de “ponto-fluxo” estável, cuja curva representativa é invariante sob renormalização. Se o sistema apresenta uma renormalização de fase, haverá uma renormalização de “ponto-fluxo” estável para certa temperatura crítica T_c , representada por um ponto crítico sobre a curva representativa da renormalização invariante, caracterizando uma transição entre uma *fase paramagnética* de altas temperaturas e uma *fase condensada* de baixas temperaturas. Nesse ponto, não apenas a forma da renormalização é invariante pela renormalização do grupo de renormalização, mas também, a temperatura renormalizada.

Na [figura 3.2](#) vemos um diagrama de fluxo para o caso $d = 2$, que reproduz o modelo de Ising, em três dimensões. Esse diagrama é bem conhecido [50, 83]. Vemos as três linhas sólidas representando as três renormalizações iniciais, as linhas tracejadas representam o fluxo de renormalização, partindo de cada uma das renormalizações e com várias temperaturas iniciais. Esses fluxos convergem para uma *curva universal*, caracterizando a renormalização de ponto-fluxo [93]. Vemos que há um *ponto-de-cela*, o

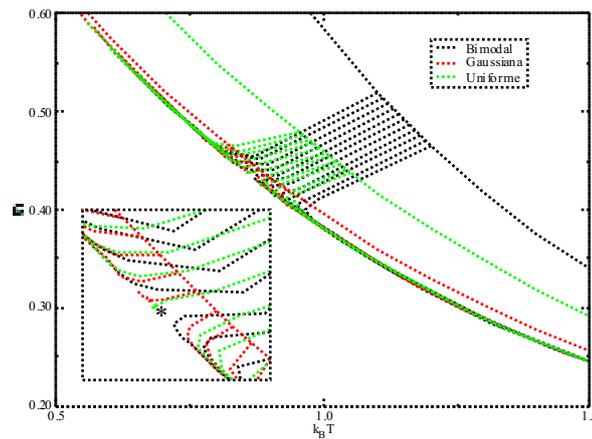


Figura 3.2: Diagrama de q para o modelo de Ising ($q = 2$) no q -fluxo de condensação. Na q -condensação vemos a região onde se localiza o *ponto crítico*, marcado por um asterisco (*).

qual é ampliado na q -fluxo esse ponto representa o *ponto crítico*, que separa as fases paramagnética, em altas temperaturas, e vidro-de-spins, em baixas temperaturas. Na fase paramagnética, as sucessivas q -condensações do grupo de q -fluxo conduzem o q -fluxo a um ponto crítico com $q = 0$ e $q \rightarrow \infty$. Na fase vidro-de-spins q um ponto crítico em $q = 1$ e $q = 0$. Além disso, a fase vidro-de-spins é caracterizada por ter média nula na q -condensação de acoplamentos, fator importante para que haja q -condensação. Essa média **permanece invariante** no modelo de Ising quando aplicamos a q -condensação (3.8) aos sucessivos bancos.

No caso do modelo de Potts com $q = 3$ não encontramos o ponto de q -condensação para uma fase condensada de baixas temperaturas em dimensão inferior a 5, mesmo

em $\beta = 0$, sempre há um β_{cr} na direção do β onde $\beta \rightarrow \infty$, ou seja, para a fase paramagnética. Contudo, em $\beta = 5$ encontramos um ponto crítico, mas a fase de baixas temperaturas, diferentemente do que acontece no caso $\beta = 2$, não oscila para o ponto $\beta = 1$, $\beta = 0$, mas, sim, para um outro tipo de atrator, onde β e β oscilam *caoticamente* entre vários valores. Além disso, sobre esse atrator a média das β não se mantém invariante, seguindo o mesmo comportamento β de β e β esse comportamento foi detectado por Banavar e Bray e especulado que ele seria resultado do β entre energia e entropia [96]. Um desses atratores é apresentado na β 3.3(a), onde utilizamos como β inicial a β gaussiana (3.13), numa rede com 16 conexões (5 dimensões), $\beta = 3$ estados e 100 000 β da β . Os atratores para as outras β são idênticos e são apresentados nas β 3.3(b) e 3.3(c).

Para $\beta = 4$ não foi possível obter com clareza o atrator, devido ao fato de ser necessário trabalhar em uma dimensionalidade maior e um número exponencialmente grande de conexões. Por exemplo, em $\beta = 5$, onde identificamos uma fase de baixas temperaturas para o modelo com $\beta = 4$, são necessárias $\beta = 32$ conexões, causando sérios problemas numéricos, com divergências em algumas dezenas de β . Contudo a β é evidente, como pode ser visto na β 3.4, onde vemos o diagrama de β para o modelo com 4 estados, em 6 dimensões e para as três β iniciais que estamos usando. Note que há, de fato, um ponto crítico, onde as linhas tracejadas, representando o β , curvam-se tanto no sentido da fase condensada como no sentido da fase paramagnética.

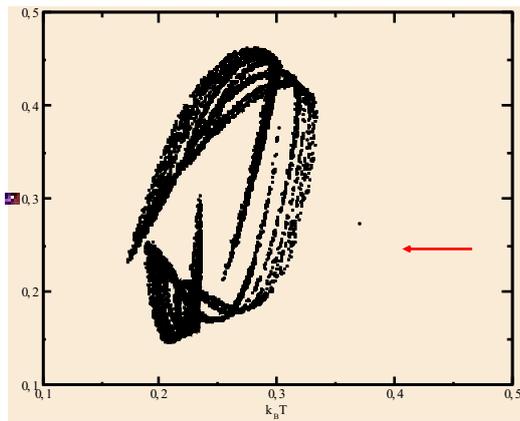
3.3 Temperaturas Críticas

As temperaturas dos casos onde a transição de fases podem ser estimadas analisando-se os diagramas de fluxo correspondentes. O método consiste em verificar, para cada condição inicial, em que temperatura o fluxo muda de sentido. Isso pode ser visto na Figura 3.5, onde vemos o diagrama de fluxo para o caso $d = 3$ em 5 dimensões em várias temperaturas próximas da transição nas três condições iniciais, bimodal, gaussiana e uniforme. Haja vista a proximidade do ponto crítico aumentar a possibilidade de que simulações numéricas afetem o sentido do fluxo vamos adotar a segunda linha antes da mudança de sentido em cada lado do ponto crítico para definir o intervalo onde se encontra a temperatura crítica de cada condição. Assim, podemos estimar com mais precisão os intervalos onde se encontram as temperaturas críticas dos vários casos estudados aqui. Deve-se notar que as temperaturas críticas mudam para as várias condições, isso porque não estamos sobre o ponto crítico [50]. Esse encontra-se sobre a *transição de primeira ordem*, onde não há a temperatura crítica, mas também os expoentes são universais, tal como obtido para o caso Ising ($d = 2$) [93].

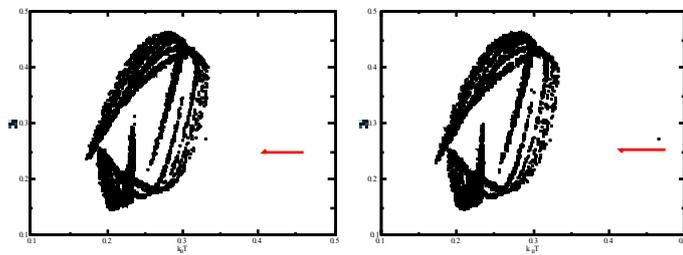
Na tabela 3.1 resumimos todas as temperaturas críticas estimadas neste trabalho. Os valores para o caso $d = 2$ (Ising), e para as três condições iniciais adotadas podem ser comparados com os da tabela 1 de [95] e os valores para a transição de ponto crítico podem ser comparados com os da tabela 3.2 de [93], onde a transição de ponto crítico é calculada exatamente. Todos os valores para $d = 2$ concordam perfeitamente dentro das barras de erro consideradas. Não há transição nos casos onde se vê um travessão.

Distribuição	dimensão	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
Bimodal	3	1,13 - 1,15	-	-
	4	2,29 - 2,32	-	-
	5	3,63 - 3,66	3,34 - 3,37	-
	6	5,40 - 5,43	5,24 - 5,27	5,40 - 5,44
Gaussiana	3	0,87 - 0,90	-	-
	4	2,07 - 2,10	-	-
	5	3,47 - 3,50	3,10 - 3,13	-
	6	5,28 - 5,31	5,08 - 5,13	5,27 - 5,31
Uniforme	3	0,98 - 1,02	-	-
	4	2,19 - 2,22	-	-
	5	3,57 - 3,60	3,23 - 3,26	-
	6	5,36 - 5,39	5,17 - 5,22	5,36 - 5,39
Distribuição de Ponto-Fixo	3	0,8 - 0,9	-	-
	4	2,0 - 2,1	-	-
	5	3,4 - 3,5	2,8 - 2,9	-
	6	5,25 - 5,35	4,9 - 5,0	4,6 - 4,7

Tabela 3.1: Temperaturas críticas para vários valores de β , em várias dimensões, para as diversas condições iniciais e para a estimativa de β_{cr} estimada pela convergência do β_{cr} .



(a) Gaussiana



(b) Bimodal

(c) Uniforme

Figura 3.3: Atratores com 100,000 iterações, $\mu = 3$ e $\sigma = 5$ para as condições iniciais gaussianas, bimodal e uniforme. A seta indica o sentido inicial do fluxo.

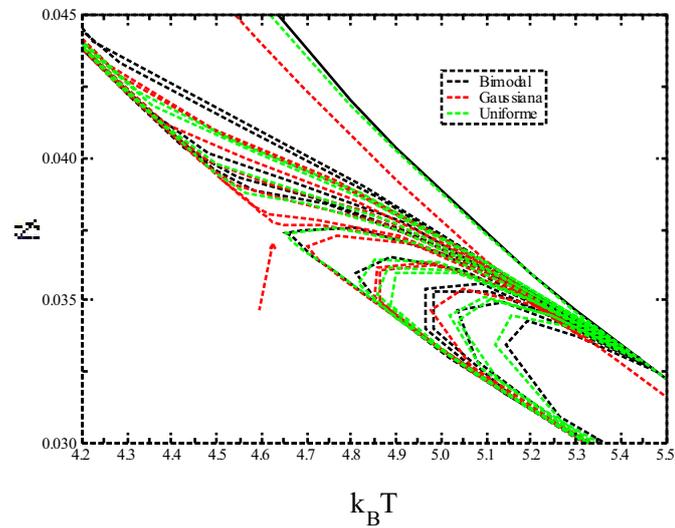
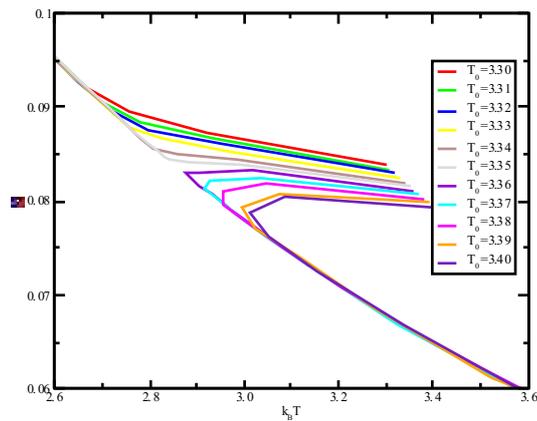
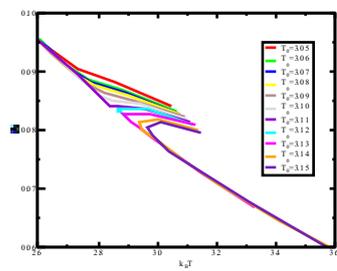


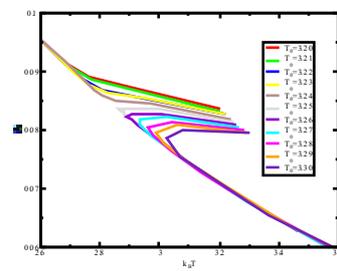
Figura 3.4: Ponto crítico para o modelo com $q = 4$ estados de Potts em 6 dimensões. As linhas contínuas representam as condições iniciais e as tracejadas a evolução do modelo. Note a existência do ponto-de-cela, indicado pela seta.



(a) Bimodal



(b) Gaussiana



(c) Uniforme

Figura 3.5: Estimativas da temperatura crítica do modelo com $\beta = 3$, $\beta = 5$ para as condições iniciais bimodal, gaussiana e uniforme.

Capítulo 4

Modelo para Incêndios Florestais com Árvores Resistentes

Neste capítulo transporemos os limites da *Mecânica Estatística de Equilíbrio* estudando um problema *dinâmico* através de um modelo do tipo *Autômato Celular* [97]. Esse autômato se baseia no modelo pictórico para incêndios florestais proposto por Drossel e Schwabl [64] e no modelo para formação de úlceras causadas pelo Vírus Simples da Herpes na córnea humana, proposto por Landini *e colaboradores* [98]. O modelo Drossel-Schwabl visa obter um cenário ilustrativo do fenômeno conhecido como *Criticalidade Auto-Organizada*, proposto por Bak *e colaboradores* [54, 55] e já discutido na seção 1.4 desta tese. O modelo, aqui estudado, incorpora os aspectos dinâmicos do modelo Drossel-Schwabl e a heterogeneidade, devido à existência de duas populações distintas de células, no modelo de Landini *e colaboradores*. Essa heterogeneidade é crucial para a propagação do Herpes na córnea humana [99, 100] assim como para a robustez do estado crítico auto-organizado do modelo Drossel-Schwabl, aspecto que será focalizado neste trabalho, pela introdução de duas populações de

árvores com distintos graus de resistência à queima.

4.1 Definição do Modelo

O modelo é definido sobre uma rede quadrada $L \times L$, onde a cada sítio (i, j) da rede associamos uma variável do automato σ_{ij} , a qual pode assumir quatro estados distintos e que serão ilustrativamente denominados de *árvores*, em analogia com o modelo para incêndios florestais, mas que possuem um caráter muito mais geral. Esses estados são:

1. Árvore permissível;
2. Árvore resistente;
3. Árvore incendiada;
4. Sítio vazio (ausência de árvore).

Cada sítio da rede interage com seus 8 vizinhos geometricamente mais próximos, o que é conhecido como *vizinhança de Moore*, ilustrada na figura 4.1. No estado inicial a rede é populada com árvores permissíveis e resistentes apenas, com concentrações iniciais $\rho_p^{(0)}$ e $\rho_r^{(0)}$, respectivamente. A partir de então inicia-se a dinâmica do autômato que obedece às seguintes regras, as quais são aplicadas no instante de tempo t para terem efeito no instante de tempo seguinte $(t + 1)$:

1. Qualquer árvore, seja permissível ou resistente, torna-se incendiada “espontaneamente” com probabilidade f se não houver nenhuma árvore incendiada em sua vizinhança;

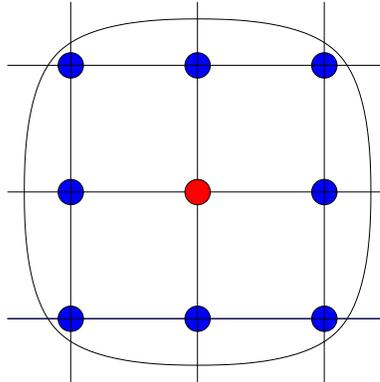


Figura 4.1: Ilustração da vizinhança de Moore na rede quadrada.

2. Num espaço vazio “nasce” uma árvore com probabilidade p , essa árvore é permissível com probabilidade q ou resistente com probabilidade $1 - q$;
3. Uma árvore permissível torna-se incendiada se houver pelo menos uma árvore incendiada em sua vizinhança;
4. Uma árvore resistente torna-se incendiada se houver pelo menos R árvores incendiadas em sua vizinhança;
5. Uma árvore incendiada torna-se um sítio vazio.

Em relação ao modelo Drossel-Schwabl as únicas diferenças são a regra 4, que introduz um tipo determinístico de resistência ao “fogo” e a adoção da vizinhança de Moore ao invés da vizinhança simples, também conhecida como *vizinhança de Neumann*. O tipo de resistência definido na regra 4 é diferente daquele definido em um modelo anterior, onde a resistência possuía um caráter probabilística, regida por uma probabilidade g [101]. Como pode ser visto, o modelo possui quatro parâmetros que definem a sua dinâmica: p , f , q e R e dois que definem o estado inicial, $\rho_p^{(0)}$ e $\rho_r^{(0)}$. Os parâmetros p e f definem duas escalas de tempo: $1/p$, o tempo médio entre o

“nascimento” de duas árvores e $1/f$, o tempo médio entre o surgimento “espontâneo” de dois incêndios distintos. De acordo com as regras 1 a 5 um incêndio é iniciado “espontaneamente” por algum motivo externo, a queda de um raio por exemplo (regra 1), a partir daí ele se propaga por todo o aglomerado de árvores de acordo com as regras 3 e 4, abrindo espaço (regra 5) para que novas árvores nasçam (regra 2) e o processo se repete de maneira indefinida. É esperado que após um intervalo de tempo suficientemente grande o sistema evolua para um estado estacionário independente das condições iniciais. No caso do modelo Drossel-Schwabl, foi especulado que esse estado estacionário seria um estado crítico auto-organizado, caracterizado por um comportamento do tipo *lei de potência* nas distribuições de tamanhos e de tempos de incêndios nos limites onde $1/p \rightarrow \infty$, $1/f \rightarrow \infty$ e $f/p \rightarrow 0$, esses limites definindo uma dupla separação nas escalas de tempo do modelo [66,67]. Contudo, a existência de um comportamento crítico genuíno foi contestada [67,69–72] e até onde saibamos esse tema continua controverso. O parâmetro R define o grau de resistência ao fogo e é definido como sendo o número mínimo de árvores incendiadas necessárias para incendiar por contigüidade uma árvore resistente, note que esse valor está limitado ao número máximo de sítios da vizinhança considerada e representa um fator totalmente *geométrico*. O modelo aqui definido é reduzido ao modelo Drossel-Schwabl quando tomamos $R = 1$ ou fazemos $q = 1$ e esperamos o limite $t \rightarrow \infty$.

O modelo definido pelas regras 1-5 foi estudado anteriormente, focalizando o comportamento das densidades de cada população em função dos parâmetros dinâmicos do modelo [99]. Nesse contexto foram feitas uma aproximação de campo médio e simulações em redes com $L \sim 10^2$, cujos resultados foram comparados e demonstraram boa concordância entre si.

4.2 Modelo Simplificado

Nesta tese consideraremos os limites onde há a separação de escalas de tempo na qual o modelo Drossel-Schwabl apresenta a controversa criticalidade auto-organizada, ou seja, tomaremos os limites $1/f \rightarrow \infty$, $1/p \rightarrow \infty$ e $f/p \rightarrow 0$. Nesses limites o modelo apresenta uma separação das escalas de tempo da dinâmica em dois períodos bem definidos. O primeiro período é o que chamaremos *período de queimada*, onde, iniciado um incêndio, ele se espalha inexoravelmente pelo aglomerado de árvores a que pertence. O segundo período de tempo será chamado *período de crescimento*, que caracteriza a *relaxação* do sistema após um incêndio, ele é definido como o tempo entre o surgimento de dois incêndios consecutivos. O limite $1/p \rightarrow \infty$ estabelece que o período de queimada é muito pequeno comparado com o tempo médio entre o nascimento de duas árvores, isso nos garante que durante o período de queimada nenhuma árvore nova é adicionada à rede. O limite $1/f \rightarrow \infty$ também estabelece que o tempo médio entre o início de dois incêndios consecutivos é muito grande comparado com o período de queimada, assim, a probabilidade de haver dois incêndios distintos na rede é praticamente nula. E o limite $f/p \rightarrow 0$ estabelece que o período de crescimento é muito grande comparado com o tempo entre o “nascimento” de duas árvores. Em média, p/f árvores nascem no período de crescimento, antes que um novo incêndio se inicie.

Em virtude dessas considerações vamos simplificar as regras anteriormente definidas, de modo a impor, implicitamente, os limites $1/f \rightarrow \infty$ e $1/p \rightarrow \infty$ ao modelo, assim, resta-nos apenas ajustar o limite $f/p \rightarrow 0$. As novas regras, simplificadas, são:

1. Se não houver nenhuma árvore incendiada na rede, escolhe-se um sítio qualquer (i, j) aleatoriamente,

- se σ_{ij} corresponder a uma árvore qualquer, permissível ou resistente, então essa árvore será incendiada;
 - se σ_{ij} corresponder a um sítio vazio, então serão escolhidos outros $\theta \equiv p/f$ sítios aleatórios e uma nova árvore será colocada em todos aqueles que estiverem vazios, sendo uma árvore permissível com probabilidade q ou uma árvore resistente com probabilidade $1 - q$;
2. Enquanto houver árvores incendiadas na rede aplicam-se as regras de 3 a 5 definidas no modelo original.

Com essas novas regras passamos de quatro para três parâmetros, θ , o número médio de árvores que nascem no período de crescimento, q e R . Note que impomos a condição de que dois incêndios nunca se sobrepõem e novas árvores nunca crescem enquanto um incêndio se propaga, essa última situação é bastante razoável em incêndios florestais reais, aquela primeira, contudo, pode ser considerada aceitável em muitos casos, mas não em todos. Essas serão as regras que usaremos para obter os resultados das seções seguintes. Vale, contudo, uma pequena observação. A existência de um estado crítico auto-organizado pode trazer um problema com a suposição de que o período de queimada é muito curto em relação às outras escalas de tempo do modelo, isso ocorreria porque o ponto crítico iria impor um comportamento do tipo lei de potência para o tempo de duração dos incêndios, portanto, sem nenhuma escala de tempo característica. Esse problema, contudo, pode ser contornado tomando-se os limites $1/f \rightarrow \infty$ e $1/p \rightarrow \infty$ antes do limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), assim, o tamanho do sistema limita o tempo de duração dos incêndios ao *tempo de varredura* da rede. Entretanto, o limite $\theta \rightarrow \infty$ esbarra no efeito de tamanho finito, o que pode ser notado por um acúmulo nas caudas das distribuições de tamanho e tempo dos

incêndios, como fora notado por Grassberger em [67], mas atribuído ao fato de θ ser finito e não L .

Simulamos as regras simplificadas definidas aqui em redes com $L = 10.000$ para os casos $R = 1, 2$ e $L = 20.000$ nos casos $3 \leq R \leq 8$, para vários valores de θ variando de $\theta = 10.000$ até $\theta = 100.000$. Mantivemos o parâmetro q fixo em $q = 0.5$ em todas as simulações e tomamos medidas do tamanho e do tempo de duração de N incêndios no estado estacionário, sendo que $N = 10^6$ nos casos $R = 1, 2$ e $N = 10^7$ nos casos $R \geq 3$. Com esses dados obtivemos os histogramas das *distribuições acumuladas*, convenientemente normalizadas, para incêndios com tamanho maior que s e duração maior que t , ou seja,

$$P(s) \equiv \frac{1}{\int_1^\infty N(s') ds'} \int_s^\infty N(s') ds', \quad (4.1)$$

$$P(t) \equiv \frac{1}{\int_1^\infty N(t') dt'} \int_t^\infty N(t') dt', \quad (4.2)$$

onde $N(s')$ representa o número de incêndios que consumiram s' árvores e $N(t')$ representa o número de incêndios que duraram t' passos de tempo.

4.3 Expoentes Críticos

O caso $R = 1$ recupera o modelo Drossel-Schwabl, de modo que os resultados obtidos apresentam o mesmo comportamento apresentado em [66], qual seja, um aparente comportamento do tipo lei de potência em uma região seguido de um rápido decaimento, como pode ser visto nas figuras 4.2(a) e 4.2(b), onde vemos as distribuições acumuladas (4.1) e (4.2) para o caso $R = 1$ em uma rede com $L = 10.000$. Os

histogramas foram obtidos a partir de uma amostragem de 10^6 incêndios no estado estacionário numa escala log-log, note que o comportamento em lei de potência torna-se mais evidente a medida que o valor de θ aumenta, tomando de pouco mais de 4 décadas em $\theta = 10.000$ a quase 6 décadas em $\theta = 100.000$ na distribuição acumulada de tamanhos e de pouco mais de 2 décadas em $\theta = 10.000$ a pouco mais de 3 décadas em $\theta = 100.000$ na distribuição acumulada de tempos. O decaimento acentuado nas

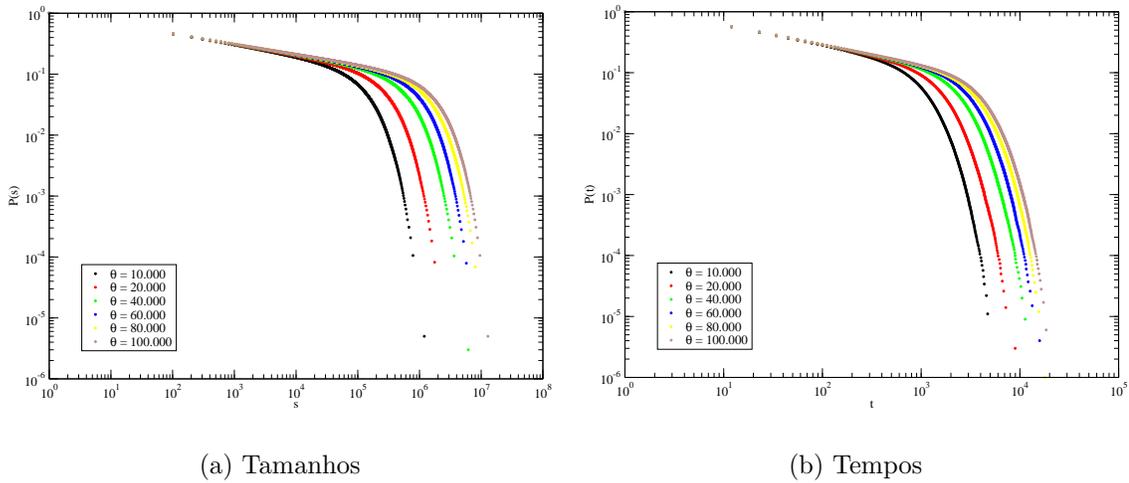


Figura 4.2: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 1$, numa rede quadrada com $L = 10.000$ sítios e levantadas numa amostragem de 10^6 incêndios no estado estacionário.

caudas das distribuições pode ser atribuído a dois fatores. Um deles é a distância do ponto crítico genuíno, conforme foi dito em [102], que só ocorre no limite $\theta \rightarrow \infty$, o outro é o efeito de tamanho finito, o qual também impede que tomemos o limite $\theta \rightarrow \infty$. Note que o volume total de árvores no sistema é $L^2 = 10^8$, valor próximo de onde as curvas com o maior valor de θ começam a decair ($\sim 10^6$) até atingir o incêndio de maior tamanho ($\sim 10^7$). A mesma análise pode ser feita no caso da distribuição acumulada de tempos.

O caso $R = 2$ apresenta o mesmo tipo de comportamento, nesse caso uma parte da população de árvores é resistente ao fogo, mas essa resistência não é suficientemente grande para alterar o comportamento crítico do estado estacionário. Podemos ver as distribuições acumuladas dos tamanhos de incêndios em escala log-log nas figuras 4.3(a) e 4.3(b), contudo, nota-se que o decaimento nas caudas das

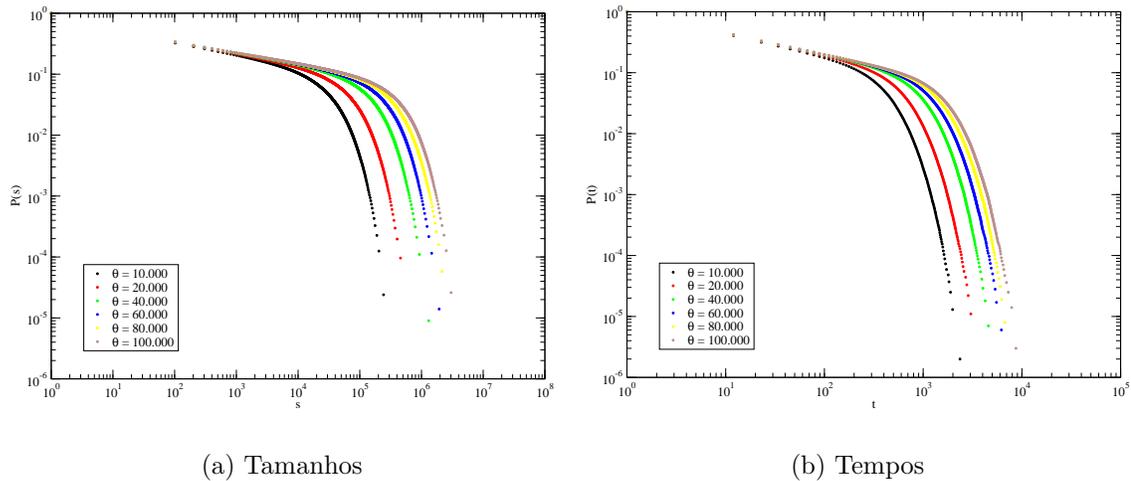


Figura 4.3: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 2$, numa rede quadrada com $L = 10.000$ sítios e levantadas numa amostragem de 10^6 incêndios no estado estacionário.

distribuições começam cerca de uma ordem de grandeza antes do que ocorria no caso $R = 1$.

Esse comportamento do tipo lei de potência sugere o cálculo de *expoentes críticos*, que definem um *comportamento universal* das *grandezas termodinâmicas na criticalidade* [59, 60]. Contudo, deve-se ressaltar, que o tipo de *fenômeno crítico* estudado aqui é muito diferente daquele estudado no contexto da mecânica estatística de equilíbrio. Aqui, estamos tratando um sistema *fora do equilíbrio*, o qual se encontra apenas em um *estado estacionário*, onde grandezas relevantes, como as distribuições de

tamanhos e tempos das relaxações apresentam um comportamento compatível com a *teoria de escala*. Em todo caso, uma analogia com o cenário dos fenômenos críticos em *transições de fases* que ocorre nos sistemas em equilíbrio pode ser utilizada [55,66, 67,103]. Vamos, portanto, obter os expoentes que definem o comportamento do tipo lei de potência das distribuições acumuladas usando a *teoria de escala de tamanho finito* [104], para isso aplicaremos o *método da análise dos momentos* introduzido por De Menech e colaboradores [105,106] e, posteriormente, aplicado por Pastor-Satorras e Vespignani no contexto do modelo para incêndios florestais de Drossel e Schwabl [68,107].

Analisamos as distribuições acumuladas de tamanho, $P(s)$, e de tempo, $P(t)$, dos incêndios como função de θ para os casos $R = 1, 2$ e calculamos os expoentes críticos associados às distribuições escritas na forma de escala,

$$P(s, \theta) = s^{1-\tau} f(s/\theta^\lambda), \quad (4.3)$$

$$P(t, \theta) = t^{1-\beta} g(t/\theta^\phi), \quad (4.4)$$

onde os valores τ , λ , β e ϕ são constantes não-nulas. É assumido que o tamanho L da rede é suficientemente grande para os valores de θ utilizados, de modo que o efeito de tamanho finito possa ser desprezado e o único parâmetro de escala seja θ .

O método da análise de momentos consiste em obter os expoentes de uma distribuição na forma,

$$P(x, L) = x^{-\eta} f(x/L^\xi), \quad (4.5)$$

através do cálculo de seus momentos,

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle_L &\equiv \int_1^\infty x^n P(x, L) dx \\ &= \int_1^\infty x^{n-\eta} f(x/L^\xi) dx, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde substituímos a equação (4.5). Fazendo a substituição $y = x/L^\xi$ em (4.6) e supondo $L \gg 1$, teremos que,

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle_L &= L^{\xi(n-\eta+1)} \int_{L^{-\xi}}^\infty y^{n-\eta} f(y) dy \\ &\approx L^{\xi(n-\eta+1)} \int_0^\infty y^{n-\eta} f(y) dy \\ &\propto L^{\xi(n-\eta+1)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

podemos, então, definir uma função,

$$\sigma(n) \equiv \xi(n - \eta + 1), \quad (4.8)$$

de modo que $\langle x^n \rangle_L \propto L^{\sigma(n)}$. A relação (4.8) é uma relação linear entre $\sigma(n)$ e n , cuja inclinação é ξ . Logo, podemos obter o valor do expoente do parâmetro de escala, ξ , calculando a inclinação da reta definida pelo expoente dos momentos, $\sigma(n)$, como função da ordem do momento, n . O expoente η é, então, obtido pela relação,

$$\sigma(1) = (2 - \eta)\xi,$$

donde,

$$\eta = 2 - \frac{\sigma(1)}{\xi}. \quad (4.9)$$

A vantagem desse método é que podemos utilizar toda a distribuição para calcular o expoente crítico, enquanto no método tradicionalmente utilizado é necessário definir um ponto de corte nas curvas das figuras 4.2 e 4.3 para excluir a região de cauda, onde o decaimento não obedece à lei de potência. Portanto, o que precisamos fazer é calcular os momentos da distribuição para vários valores de n , calcular os expoentes $\sigma(n)$ e extrair os expoentes críticos desejados. Contudo, deve-se tomar o cuidado de verificar se a hipótese (4.5) está correta, o que é equivalente a verificar se a relação (4.8) é, de fato, linear em n . Para isso utilizamos o teste do χ^2 [108] para determinar se a hipótese (4.8) é aceitável estatisticamente. É claro que o teste falha a partir de um certo valor de n , pois os dados obtidos são oriundos de simulações com amostras ainda pequenas e o cálculo numérico dos momentos também pode apresentar imprecisões e divergências.

Os resultados obtidos para as curvas apresentadas nas figuras 4.2 e 4.3 são mostrados na tabela 4.1, onde vemos os quatro expoentes definidos pelas hipóteses de escala. Não foi possível estimar as barras de erro porque utilizamos o teste do χ^2 para estimar a qualidade da regressão dos dados à hipótese de escala. Para incluir uma barra de erro é necessário que se faça uma grande quantidade de amostras das distribuições das figuras 4.2 e 4.3, o que é inviável em um tempo curto.

R	1	2
τ	1,09796	1,06917
λ	1,09618	1,06206
β	1,24702	1,22775
ϕ	0,57899	0,56668

Tabela 4.1: Expoentes da hipótese de escala para as distribuições acumuladas de tamanho e tempo dos incêndios no estado estacionário dos casos $R = 1, 2$.

De posse dos expoentes na tabela 4.1, é possível reescalar as distribuições (4.3)

e (4.4) para obter seus colapsos em uma única função, como é esperado para teoria de escala. Esses colapsos são apresentados nas figuras 4.4 e 4.5 e concordam com a hipótese de pertencerem a uma curva universal.

4.4 Quebra da Criticalidade Auto-Organizada

Embora os resultados para $R = 1$ e $R = 2$ tenham se mostrado aceitáveis para um comportamento crítico auto-organizado, o mesmo não ocorre para os casos $R \geq 3$, onde as hipóteses (4.3) e (4.4) devem ser fortemente rejeitadas.

Os dados das distribuições acumuladas de tamanho e tempo de incêndios apresentam o comportamento anômalo no caso $R = 3$, que não se encaixa nem numa lei de potência, caracterizando um comportamento crítico e sem escala definida de tamanho e tempo, nem num comportamento exponencial, com escalas de tamanho e tempo bem definidas para os incêndios. Esses resultados, para $R = 3$, podem ser vistos em escala log-log nas figuras 4.6(a) e 4.6(b), onde utilizamos redes quadradas com $L = 20.000$ sítios de lado e foram medidos os tamanhos e os tempos de duração de 10^7 incêndios no estado estacionário.

Esse comportamento das distribuições acumuladas dos tamanhos dos incêndios parece se encaixar muito bem nos dados apresentados por Reed e McKelvey [1]. Nesse trabalho é discutido que nem uma distribuição na forma de lei de potência, nem na forma de uma exponencial são apropriadas para modelar os dados.

Os resultados para os demais valores de R , $R \geq 4$, por outro lado, apresentam um nítido decaimento exponencial, com tamanhos e tempos de duração de incêndios bem definidos. As distribuições acumuladas de tamanho e tempo de duração dos incêndios no estado estacionário para os casos $R \geq 4$ são mostrados nas figuras 4.8 a

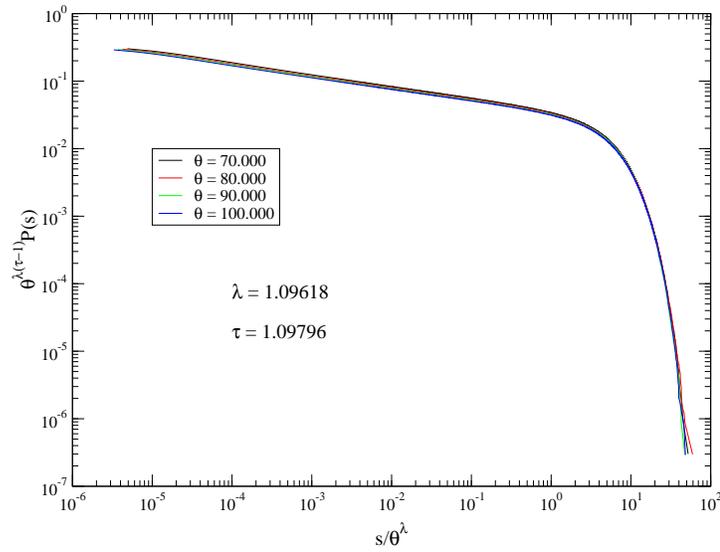
4.12.

Esse comportamento para valores grandes da resistência à queima pode ser entendido observando-se como aglomerados de árvores resistentes são formados no sistema, impedindo, assim, a propagação dos incêndios através de áreas muito grandes. O que ocorre, de fato, é a formação de grandes aglomerados de árvores resistentes, que dominam o sistema no estado estacionário, como pode ser visto na figura 4.13, onde vemos um flagrante de uma região do sistema no estado estacionário no caso $R = 3$, numa rede com $L = 1.000$ sítios de lado e $\theta = 1.000$. Veja que as árvores resistentes, representadas pelos círculos azuis, dominam a rede em relação às árvores permissíveis, representadas pelos círculos vermelhos, e aos sítios vazios, representados em branco. Outro dado indicativo de que incêndios significativos não conseguem se propagar pelo sistema é a densidade total de árvores (resistentes + permissíveis) em função do número de passos do modelo simplificado, apresentado na figura 4.14(a), que pode ser comparado com o comportamento da mesma grandeza para $R = 1$, o modelo Drossel-Schwabl, apresentado na figura 4.14(b).

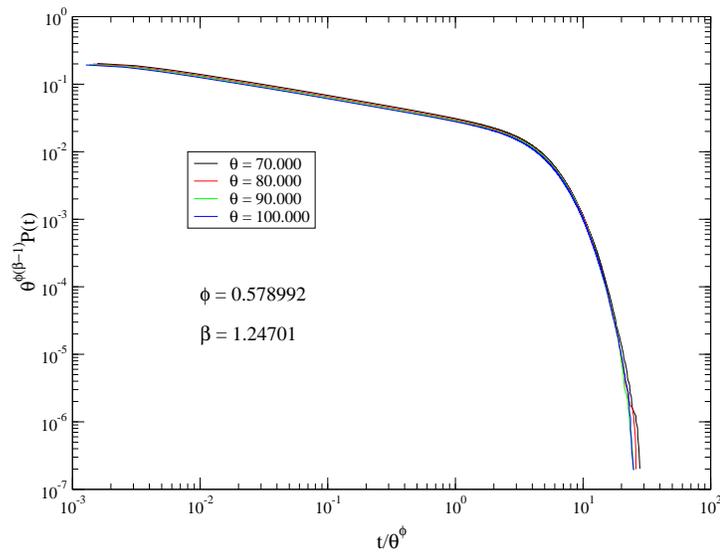
Pode ser visto que os dois estados estacionários são bem diferentes. No caso $R = 1$ a densidade de árvores flutua bastante, devido à grande susceptibilidade à perturbações externas, e mantém-se baixa. No caso $R = 3$ há uma tendência de estabilização em um valor alto, comprovando que o sistema é robusto à perturbações externas.

Vimos, portanto, que o modelo para incêndios florestais proposto por Drossel e Schwabl não apresenta um estado crítico auto-organizado robusto em relação a introdução de árvores com uma resistência determinística. Há, contudo, um valor crítico da resistência, abaixo do qual o modelo apresenta um estado estacionário aparentemente sem escalas de tamanho e tempo definidos, caracterizando a criticalidade

auto-organizada, esse valor crítico, no modelo estudado, é $R = 3$. A razão desse valor pode ser compreendido em termos geométricos, a geometria da rede adotada não é favorável a existência de mais de 4 vizinhos incendiados simultaneamente, contudo esse valor máximo só ocorre em um caso muito particular, quando a frente de onda de um incêndio atinge em diagonal um aglomerado com uma árvore resistente central e oito árvores permissíveis na sua vizinhança, esse comportamento é ilustrado na figura 4.15. Em geral, a probabilidade de mais de duas árvores vizinhas estarem incendiadas é muito pequena, porém 3 vizinhos incendiados ainda ocorrem de maneira razoável, tanto no caso da frente em diagonal como no caso em que a onda atinge o aglomerado pelas laterais.

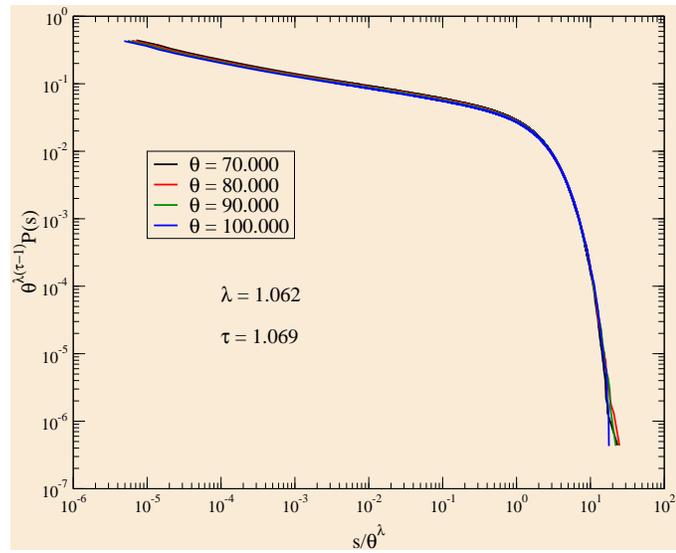


(a) Tamanhos

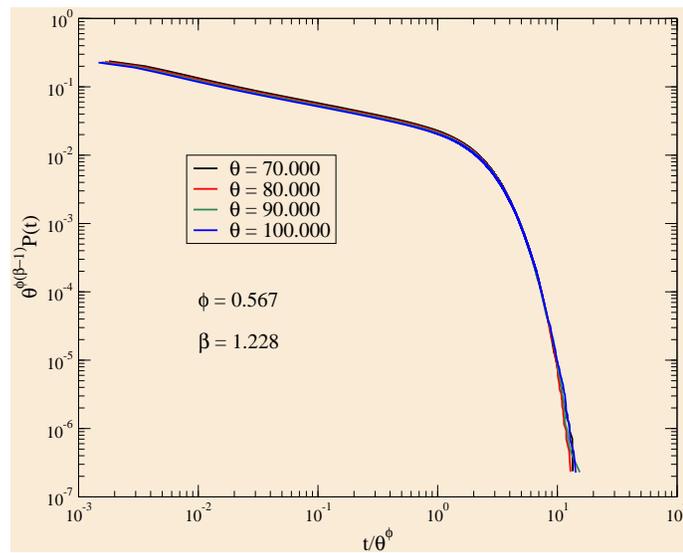


(b) Tempos

Figura 4.4: Colapso das distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para o caso $R = 1$. Rede com $L = 10.000$.

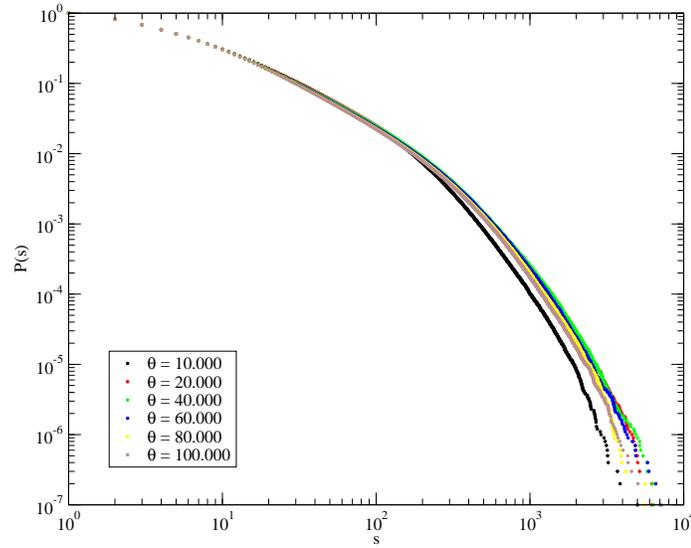


(a) Tamanhos

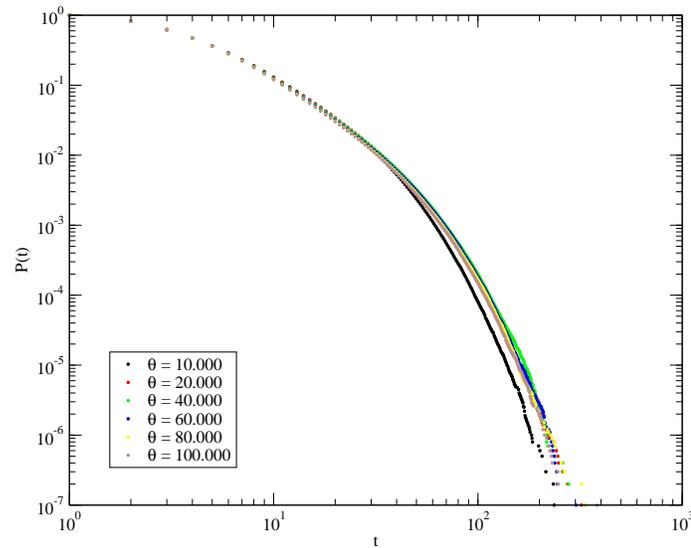


(b) Tempos

Figura 4.5: Colapso das distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 2$. Rede com $L = 10.000$ e $q = 0.5$.



(a) Tamanhos



(b) Tempos

Figura 4.6: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 3$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

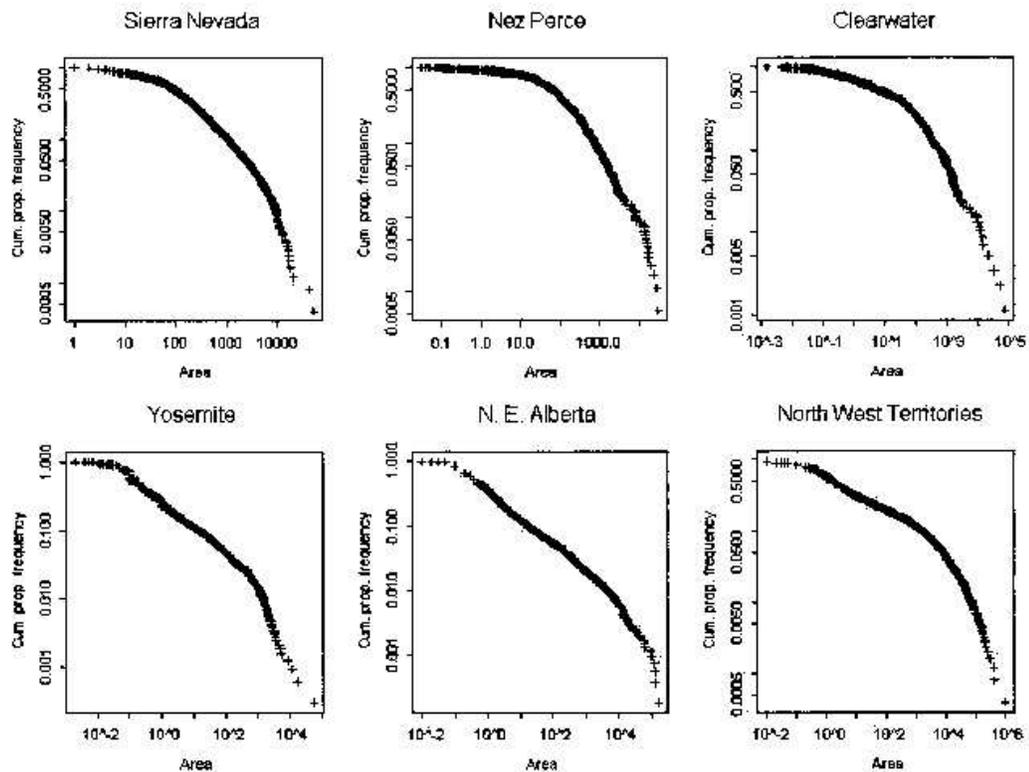


Figura 4.7: Distribuições acumuladas de áreas queimadas em seis regiões florestais. Este gráfico foi retirado de [1], página 240.

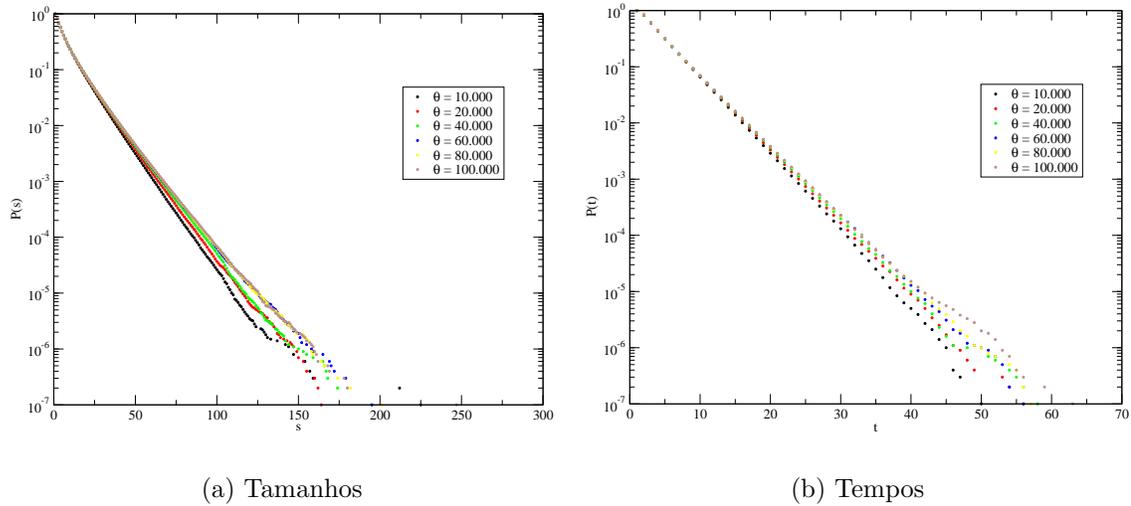


Figura 4.8: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 4$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

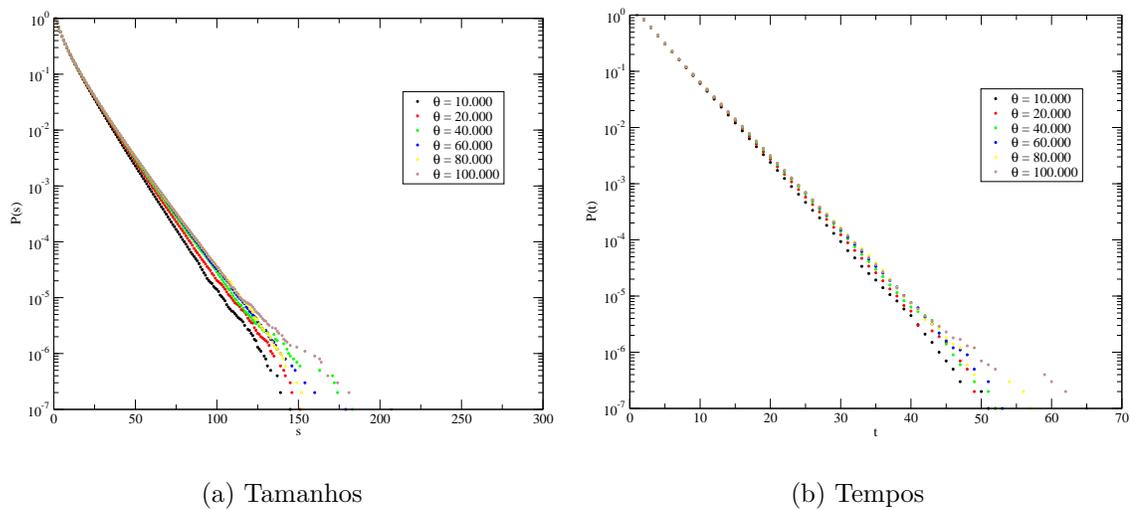


Figura 4.9: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 5$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

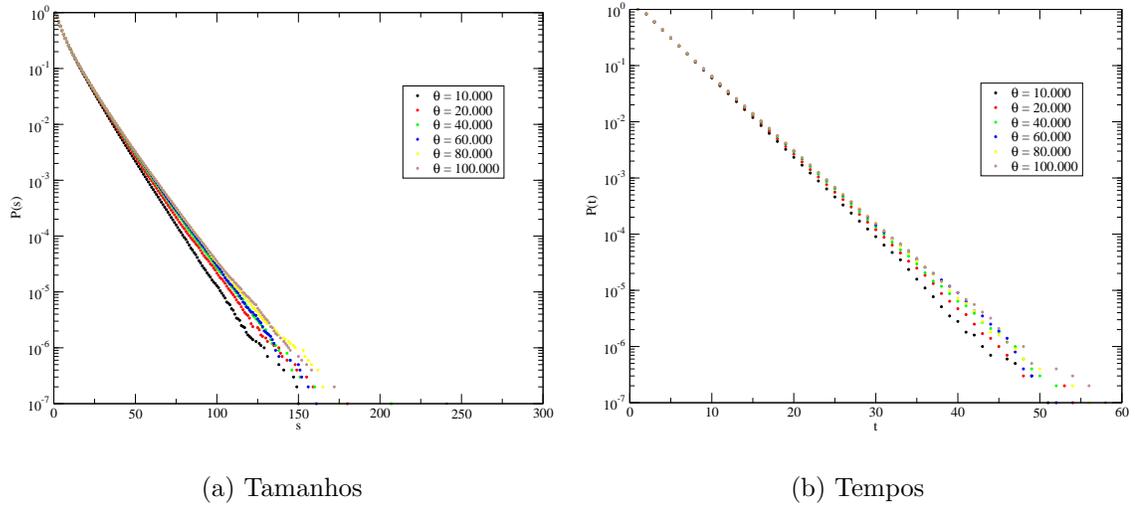


Figura 4.10: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 6$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

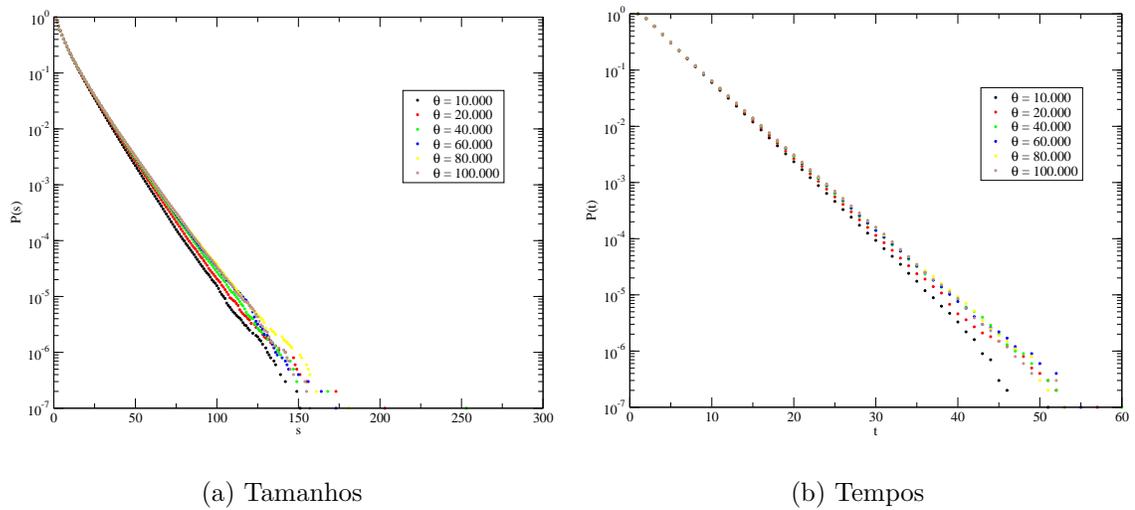


Figura 4.11: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 7$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

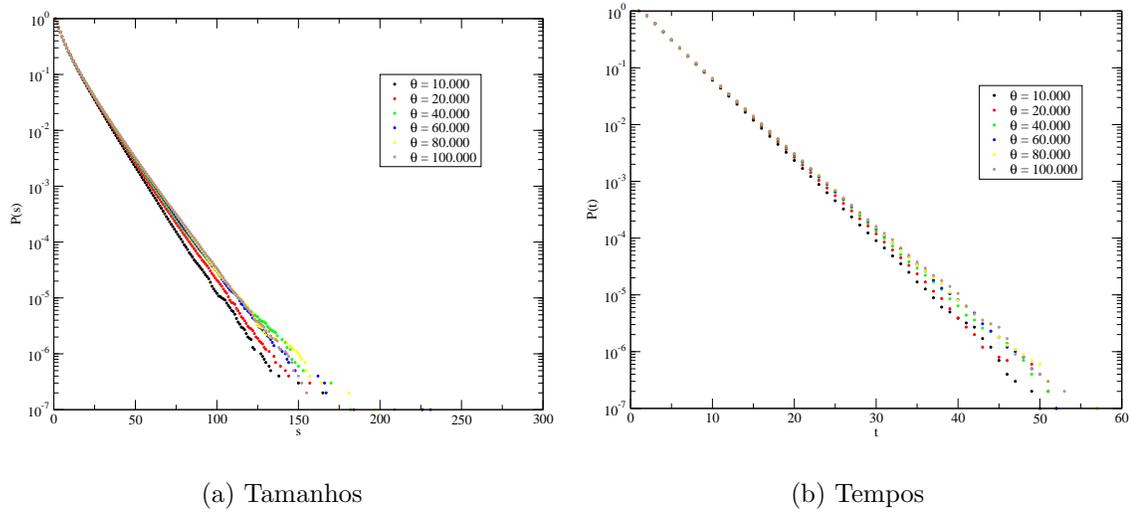


Figura 4.12: Distribuições acumuladas de tamanhos e tempos de incêndios para $R = 8$, em redes com $L = 20.000$ e tomadas sobre 10^7 incêndios no estado estacionário.

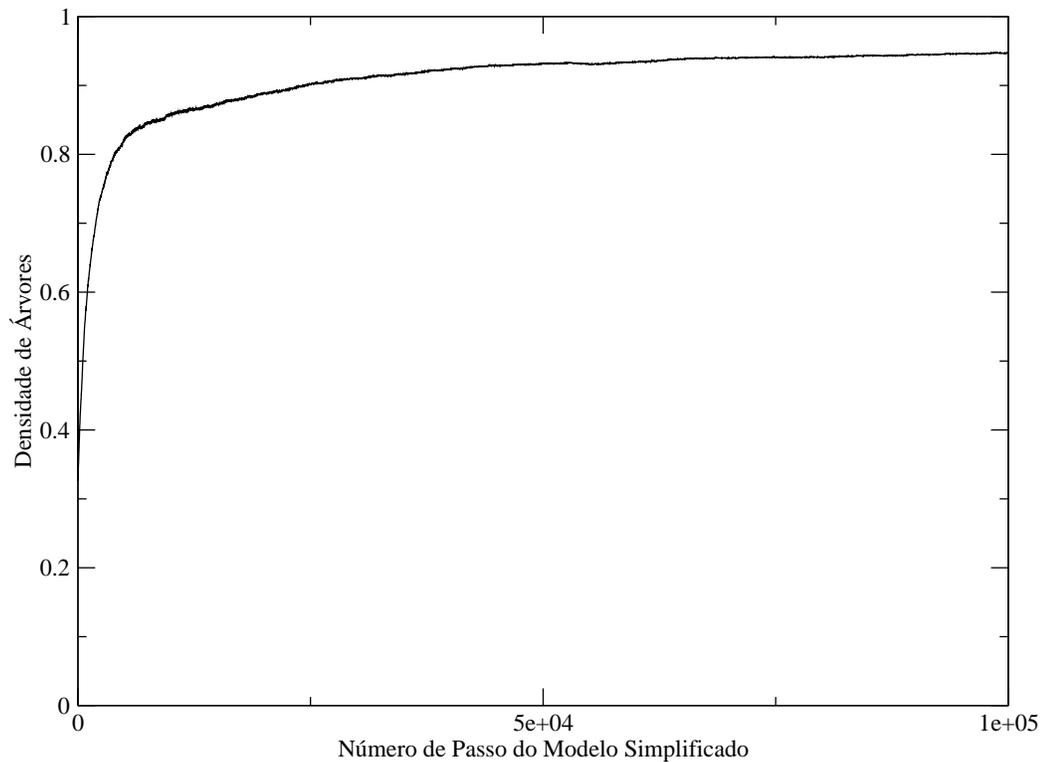


Figura 4.13: Flagrante de uma região do sistema com $R = 3$ no estado estacionário em uma rede com $L = 1.000$ sítios de lado e $\theta = 1.000$. Os círculos vermelhos representam as árvores permissíveis, os círculos azuis as árvores resistentes e os brancos os espaços vazios.

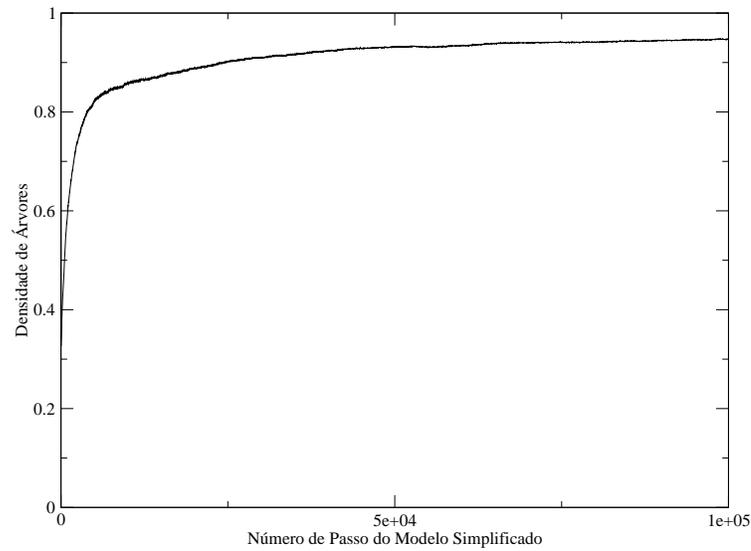
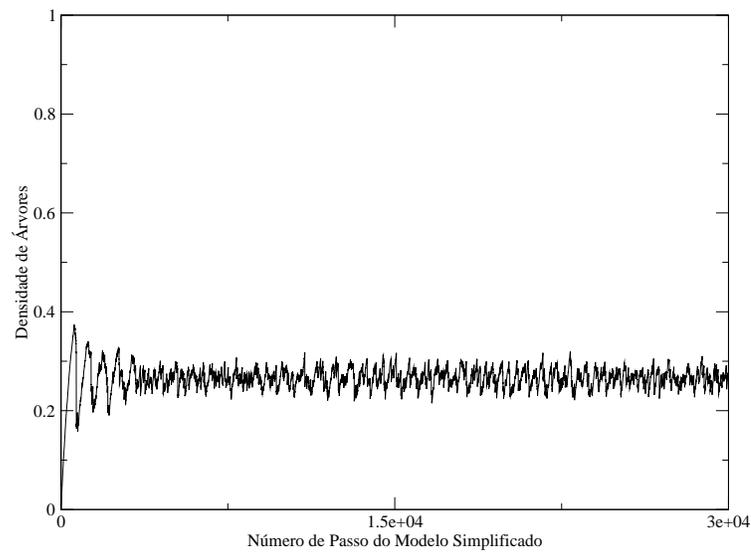
(a) $R = 3$ (b) $R = 1$

Figura 4.14: Densidade total de árvores ao longo de cada iteração do modelo simplificado para $R = 1$ e $R = 3$, $L = 1.000$ e $\theta = 1.000$.

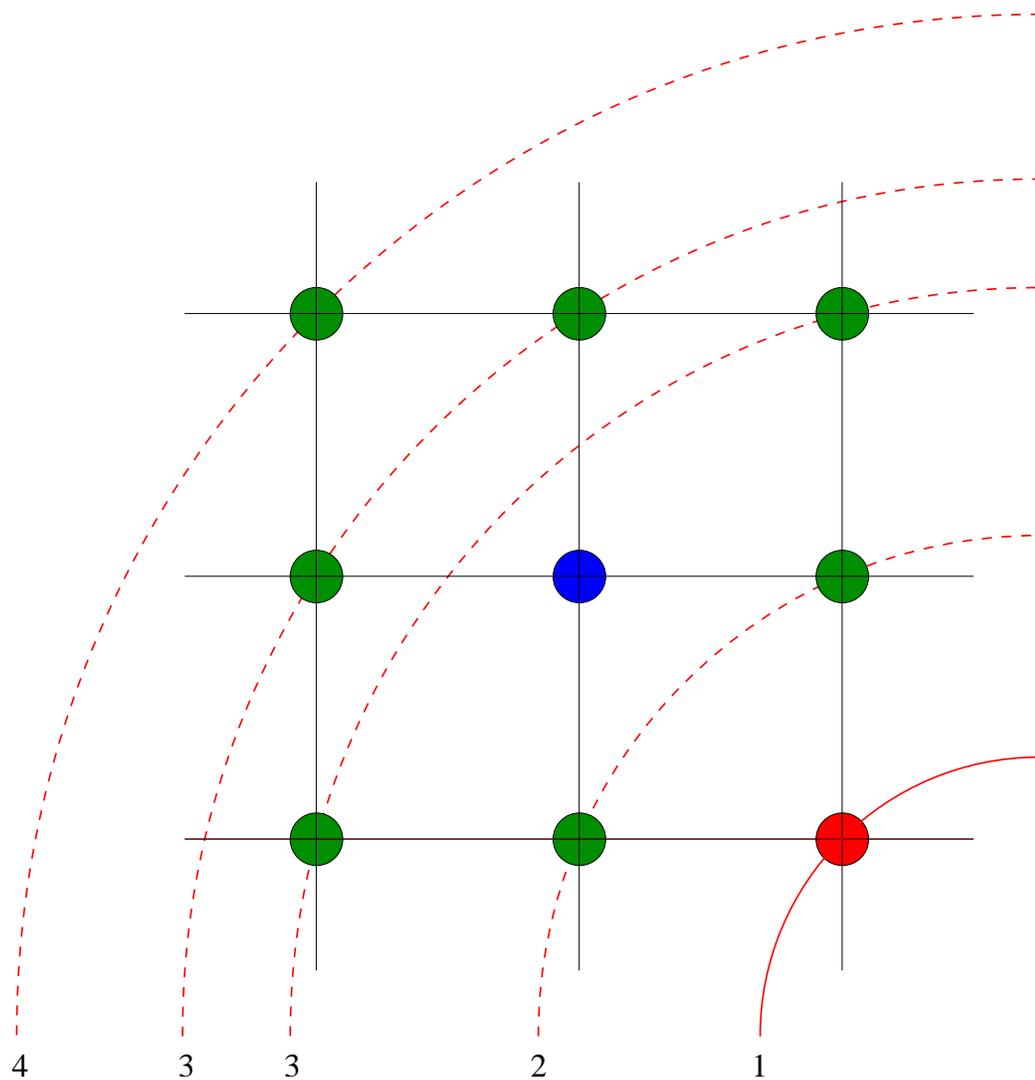


Figura 4.15: Frente de incêndio atingindo um aglomerado particular em diagonal. Os círculos verdes representam árvores permissíveis, o azul uma árvore resistente e o vermelho uma árvore incendiada. A numeração indica em qual passo a frente incendeia alguma árvore do conjunto.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Duas classes de sistemas envolvendo desordem e complexidade foram abordados neste trabalho. A primeira classe envolve dois problemas na Física Estatística de Equilíbrio, são eles o problema da estrutura da fase condensada dos vidros-de-spins de Ising e o problema da existência de uma fase condensada vidro-de-spins no modelo de Potts com interações aleatórias e competitivas. A segunda classe envolve um sistema fora do equilíbrio, que atrai a atenção da comunidade científica há vários anos. É o problema da criticalidade auto-organizada no modelo para incêndios florestais, que visa fornecer argumentos para relacionar a formação de estruturas complexas em vários sistemas dinâmicos e na natureza.

No que concerne o problema da estrutura do estado fundamental dos vidros-de-spins de Ising, estudamos, no capítulo 2, a distribuição do “link overlap” utilizando uma metodologia diferente da utilizada anteriormente na literatura. Com esse método as correlações locais em cada ligação de duas réplicas do sistema são calculadas recursivamente para qualquer temperatura, inclusive para o estado fundamental ($T = 0$). O “link overlap” foi estimado diretamente partindo-se de duas distribuições

de probabilidades iniciais para os acoplamentos entre pares de spins, a distribuição gaussiana e a distribuição delta-bimodal, ambas com média nula e largura unitária. Um comportamento compatível com o modelo de gotas foi encontrado para ambas as distribuições e em todas as temperaturas abaixo de T_c , inclusive no estado fundamental ($T = 0$). Resultados semelhantes são encontrados na literatura para a distribuição gaussiana, redes menores e para $T > 0$ apenas. O estudo do “link overlap” com a distribuição inicial delta-bimodal para os acoplamentos de spins é importante porque essa distribuição introduz frustração exata ao sistema e produz um estado fundamental degenerado, diferentemente do que ocorre com a distribuição gaussiana.

É necessário, contudo, um estudo mais refinado do comportamento da largura da distribuição do “link overlap” para o caso da distribuição inicial bimodal para os acoplamentos, utilizando redes maiores, numa faixa de baixas temperaturas. A análise do “link overlap” também deve ser feita utilizando-se a distribuição de “ponto-fixa”, onde um comportamento universal é esperado.

No modelo para vidros-de-spins de Potts, analisado no capítulo 3, os sistemas com $q = 2, 3$ e 4 estados foram estudados. O caso $q = 2$ reproduz o modelo de Ising, bem conhecido na literatura, que foi incluído para servir de base para os outros casos. Uma fase condensada de baixas temperaturas foi encontrada para todos os casos estudados, mas em dimensionalidades diferentes e dependentes do valor de q . Para $q = 3$ a transição foi encontrada em $d = 5$ e para $q = 4$ em $d = 6$. As temperaturas críticas de cada transição foram estimadas utilizando-se três distribuições iniciais para os acoplamentos: a distribuição gaussiana, a distribuição bimodal e a distribuição uniforme. Assim como ocorre com os vidros-de-spins de Ising, o valor da temperatura crítica depende da distribuição inicial dos acoplamentos e uma distribuição de “ponto-fixa”, representada por uma curva universal no espaço de parâmetros apropriado,

também foi identificada. A temperatura crítica sobre a distribuição de “ponto-fixa” também foi estimada para todos os casos considerados. Essa temperatura crítica sobre a distribuição de “ponto-fixa” estabelece o ponto-crítico instável da equação de renormalização no espaço de parâmetros adotado. Verificamos que o atrator da fase de baixas temperaturas no espaço de parâmetros é um atrator estranho para o caso $q = 3$ em cinco dimensões. O comportamento caótico dos parâmetros das distribuições de acoplamentos ao longo dos passos de renormalização é referenciado na literatura para esse mesmo caso ($q = 3, d = 5$), contudo, o atrator estranho ainda não havia sido identificado. Não foi possível identificar com clareza o atrator estranho para o caso $q = 4$ e $d = 6$, devido a problemas numéricos, contudo, indícios de sua existência foram verificados.

É necessário estudar a natureza da fase condensada do modelo vidros-de-spins de Potts e o comportamento das magnetizações locais sobre o atrator. Um algoritmo mais eficiente precisa ser desenvolvido para se verificar se a natureza da bacia de atração da fase de baixas temperaturas é a mesma para outros valores de q e d . Um estudo mais detalhado do atrator também é necessário, inclusive através do cálculo de sua dimensão fractal. Sugerimos, também, um estudo das propriedades críticas do modelo, com a estimativa dos expoentes críticos para cada uma das distribuições iniciais de acoplamentos utilizadas e para a distribuição de “ponto-fixa”. Caso a fase condensada seja, de fato, uma fase vidro-de-spins, um estudo da fase é, também, sugerido, utilizando-se a mesma metodologia do capítulo 2 para se obter as distribuições do “link overlap” e do “overlap” de Parisi.

Finalmente, no capítulo 4, estudamos uma extensão do modelo para incêndios florestais de Drossel e Schwabl e para formação de úlceras causadas pelo vírus simples da Herpes na córnea de Landini *e colaboradores*. A questão da criticalidade

auto-organizada foi focalizada. O caso $R = 1$, onde o modelo Drossel-Schwabl é reproduzido, foi estudado para que os resultados pudessem ser comparados com a literatura. Utilizando-se um método de análise de momentos, os expoentes críticos das distribuições acumuladas de tamanhos e duração de incêndios foram estimados e concordaram com aqueles apresentados na literatura, embora se saiba que o comportamento em forma de lei de potência para essas distribuições esteja sendo questionado para o modelo Drossel-Schwabl. O caso $R = 2$ apresenta resultados semelhantes ao caso $R = 1$, onde um comportamento em forma de lei de potência também foi assumido e os expoentes estimados pela mesma metodologia. Esses expoentes podem ser comparados com aqueles para $R = 1$ e aparentam pertencer a uma mesma classe de universalidade. Os casos para $R \geq 3$ possuem um comportamento bastante distinto dos casos $R = 1, 2$. O caso $R = 3$ apresenta um comportamento anômalo para as distribuições acumuladas de tamanhos e duração de incêndios, não se comportando nem como uma lei de potência, nem como uma exponencial. Os casos $R > 3$, por outro lado, apresentam um comportamento nitidamente exponencial para essas distribuições, o que indica a existência de escalas de tamanho e tempo bem definidas para os incêndios. O modelo também pode ser utilizado para se estudar incêndios florestais reais.

É necessário, contudo, um estudo mais detalhado das classes de aglomerados formados pelas diversas populações de sítios que estão no sistema, para que se possa entender como a dinâmica de ocupação muda quando árvores mais resistentes são introduzidas. Além disso, uma comparação mais detalhada entre o modelo e dados obtidos a partir de incêndios reais é necessária.

Referências Bibliográficas

- [1] William J. Reed and Kevin S. McKelvey. Power-law behaviour and parametric models for the size-distribution of forest fires. *Ecological Modelling*, 150:239, 2002.
- [2] K. Binder and A. P. Young. Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions. *Reviews of Modern Physics*, 58(4):801, 1986.
- [3] K. H. Fischer and J. A. Hertz. *Spin Glasses*, volume 1 of *Cambridge Studies in Magnetism*. Cambridge University Press, 1 edition, 1991.
- [4] Giorgio Parisi. Complex Systems: a Physicist's Viewpoint. *Physica A*, 263:557, 1999.
- [5] David R. Nelson. *Defects and geometry in condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] D. L. Stein. Spin Glasses: Still Complex After All These Years? *Electronic Preprint Archive (<http://xxx.lanl.gov>)*, cond-mat(0301104), 2003.
- [7] S. F. Edwards and P. W. Anderson. Theory of spin glasses. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 5:965, 1975.

-
- [8] K. Yosida. Magnetic Properties of $Cu - Mn$ Alloys. *Physical Review*, 106:893, 1957.
- [9] M. H. Bancroft. Magnetic Interaction in a Weak Moment System: $Au-Co$. *Physical Review B*, 2(7):2597, 1970.
- [10] V. Cannella and J. A. Mydosh. Magnetic Ordering in Gold-Iron Alloys. *Physical Review B*, 6(11):4220, 1972.
- [11] M. A. Ruderman and C. Kittel. Indirect Exchange Coupling of Nuclear Magnetic Moments by Conduction Electrons. *Physical Review*, 96:99, 1954.
- [12] T. Kasuya. A Theory of Metallic Ferro- and Antiferromagnetism on Zener's Model. *Progress of Theoretical Physics*, 16:45, 1956.
- [13] D. Sherrington and B. W. Southern. Spin glass versus ferromagnet. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 5:L49, 1975.
- [14] David Sherrington and Scott Kirkpatrick. Solvable Model of a Spin-Glass. *Physical Review Letters*, 35(26):1792, 1975.
- [15] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless. Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of spin glass model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 11:983, 1978.
- [16] G. Parisi. Infinite Number of Order Parameters for Spin-Glasses. *Physical Review Letters*, 43(23):1754, 1979.
- [17] G. Parisi. The order parameter for spin glasses: A function on the interval $0 - 1$. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13:1101, 1980.

-
- [18] G. Parisi. Magnetic properties of spin glasses in a new mean field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13:1887, 1980.
- [19] G. Parisi. A sequence of approximated solutions to the S-K model for spin glasses. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13:L115, 1980.
- [20] Daniel S. Fisher and David A. Huse. Ordered Phase of Short-Range Ising Spin-Glass. *Physical Review Letters*, 56(15):1601, 1986.
- [21] A. J. Bray and M. A. Moore. Critical behavior of the three-dimensional Ising spin glass. *Physical Review B*, 31(1):631–633, 1985.
- [22] W. L. McMillan. Domain-wall renormalization-group study of the three-dimensional random Ising model. *Physical Review B*, 31(1):340–341, 1985.
- [23] R. B. Potts. Some Generalized Order-Disorder Transformations. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48:106, 1952. Atualmente Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
- [24] F. Y. Wu. The Potts model. *Reviews of Modern Physics*, 54:235, 1982.
- [25] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, chapter 12, page 322. Academic Press, 1982.
- [26] Dietrich Stauffer. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, London, 1985.
- [27] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, chapter 1, page 14. Academic Press, 1982.

-
- [28] J. Ashkin and E. Teller. Statistics of Two-Dimensional Lattices with Four Components. *Physical Review*, 64:178, 1943.
- [29] Lars Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [30] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, chapter 7, page 88. Academic Press, 1982.
- [31] W. T. Tutte. On Dichromatic Polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*, 2:301, 1967.
- [32] A. N. Berker and S. Ostlund. Renormalization-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering. *Journal of Physics C: Solid State*, 12:4961, 1979.
- [33] P. M. Bleher and E. Žalys. Existence of Long-Range Order in the Migdal Recursion Equations. *Communications in Mathematical Physics*, 67:17, 1979.
- [34] A. A. Migdal. Phase transitions in gauge and spin-lattice systems. *Sov. Phys.-JETP*, 42(4):743, 1976.
- [35] Leo P. Kadanoff. Notes on Migdal's Recursion Formulas. *Annals of Physics*, 100:359, 1976.
- [36] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, 1982.
- [37] R. B. Griffiths and M. Kaufman. Spin systems on hierarchical lattices. Introduction and thermodynamic limit. *Physical Review B*, 26(9):5022, 1982.

-
- [38] J. R. Melrose. Hierarchical lattices: some examples with a comparison of intrinsic dimension and connectivity and ising model exponents. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 16:3077, 1983.
- [39] Yuval Gefen, Benoit B. Mandelbrot, and Amnon Aharony. Critical Phenomena on Fractal Lattice. *Physical Review Letters*, 45(11):855, 1980.
- [40] N. M. Švrakić, J. Kertész, and W. Selke. Hierarchical lattice with competing interactions: an example of a nonlinear map. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:L427, 1982.
- [41] Susan R. Mckay, A. Nihat Berker, and Scott Kirkpatrick. Spin-Glass Behavior in Frustrated Ising Models with Chaotic Renormalization-Group Trajectories. *Physical Review Letters*, 48(11):767, 1982.
- [42] M. Kaufman and R. B. Griffiths. Infinite susceptibility at high temperatures in the Migdal-Kadanoff scheme. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:L239, 1982.
- [43] M. Kaufman and R. B. Griffiths. Exactly soluble Ising models on hierarchical lattices. *Physical Review B*, 24(1):496, 1981.
- [44] P. M. Bleher and E. Žalys. Asymptotics of the Susceptibility for the Ising Model on the Hierarchical Lattices. *Communications in Mathematical Physics*, 120:409, 1989.
- [45] Th. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen. Wilson theory for 2-dimensional Ising spin systems. *Physica (Utrecht)*, 71:17, 1974.

-
- [46] Susan R. McKay and A. Nihat Berker. Magnetic susceptibilities of cluster-hierarchical models. *Physical Review B*, 29(3):1315, 1984.
- [47] T. Tél. Fractals, Multifractals and Thermodynamics: An Introductory Review. *Z. Naturforsch*, 43a:1154, 1988.
- [48] W. A. M. Morgado, S. Coutinho, and E. M. F. Curado. Multifractal Magnetization on Hierarchical Lattices. *Journal of Statistical Physics*, 61(3/4):913, 1990.
- [49] W. A. M. Morgado, E. M. F. Curado, and S. Coutinho. Multifractality in Magnetic Models. *Brazilian Journal of Physics*, 21(2):247, 1991.
- [50] Edvaldo Nogueira Júnior. *Estudo de Modelos de Vidro de Spins com Interações de Longo e Curto Alcance*. PhD thesis, Departamento de Física - UFPE, Janeiro 1996.
- [51] E. Nogueira Júnior and S. Coutinho and F. D. Nobre and E. M. F. Curado and J. R. L. de Almeida. Short-range Ising spin glass: Multifractal properties. *Physical Review E*, 55(4):3934, 1997.
- [52] M. Kaufman and R. B. Griffiths. Spin systems on hierarchical lattices II. Some examples of soluble models. *Physical Review B*, 30(1):244, 1984.
- [53] Bambi Hu. How Universal is Universality? *Annual Report of the Institute of Physics*, 16:47, 1986.
- [54] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise. *Physical Review Letters*, 59(4):381, 1987.

- [55] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Physical Review A*, 38(1):364, 1988.
- [56] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of the Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [57] P. Dutta and P. M. Horn. Low-frequency fluctuations in solids: $1/f$ noise. *Reviews of Modern Physics*, 53(3):497, 1981.
- [58] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, New York, 1988.
- [59] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. International series of monographs on Physics. Oxford University Press, New York, 1971.
- [60] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford Science Publications. Clarendon Press - Oxford, New York, 1992.
- [61] Edoardo Milotti. $1/f$ noise, a pedagogical review. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), physics(0204033), 2002.
- [62] Per Bak, Kan Chen, and Chao Tang. A forest-fire model and some thoughts on turbulence. *Physical Review A*, 147(5,6):297, 1990.
- [63] Peter Grassberger and Holger Kantz. On a Forest Fire Model with Supposed Self-Organized Criticality. *Journal of Statistical Physics*, 63(3/4):685, 1991.
- [64] B. Drossel and F. Schwabl. Self-Organized Critical Forest-Fire Model. *Physical Review Letters*, 69(11):1629, 1992.

-
- [65] Kim Christensen, Henrik Flyvbjerg, and Zeev Olami. Self-Organized Critical Forest-Fire Model: Mean-Field Theory and Simulation Results in 1 to 6 Dimensions. *Physical Review Letters*, 71(17):2737, 1993.
- [66] S. Clar, B. Drossel, and F. Schwabl. Scaling laws and simulation results for the self-organized critical forest-fire model. *Physical Review E*, 50(2):1009, 1994.
- [67] Peter Grassberger. On a self-organized critical forest-fire model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26:2081, 1993.
- [68] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Corrections to scaling in the forest-fire model. *Physical Review E*, 61(5):4854, 2000.
- [69] A. Honecker and I. Peschel. Length scales and power laws in the two-dimensional forest-fire model. *Physica A*, 239(4):509, 1997.
- [70] Klaus Schenk, Barbara Drossel, and Franz Schwabl. Self-organized critical forest-fire model on large scales. *Physical Review E*, 65:026135, 2002.
- [71] P. Grassberger. Critical behaviour of the Drossel-Schwabl forest fire model. *New Journal of Physics*, 4:17, 2002.
- [72] Gunnar Pruessner and Henrik J. Jensen. Broken scaling in the Forest Fire Model. *Physical Review E*, 65:0567707, 2002.
- [73] E. Marinari, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo. Numerical Simulations of Spin Glass Systems. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), cond-mat(9701016), 1997.

- [74] M. A. Moore, Hemant Bokil, and B. Drossel. Evidence for the droplet/scaling picture of spin glasses. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), cond-mat(9808140), 1998.
- [75] B. Drossel, H. Bokil, M. A. Moore, and A. J. Bray. The link overlap and finite size effects for the 3D Ising spin glass. *European Physical Journal B*, 13(2):369, 2000.
- [76] F. Krzakala and O. C. Martin. Spin and link overlaps in 3-dimensional spin glasses. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), cond-mat(0002055), 2000.
- [77] Barbara Drossel, Hemant Bokil, M. A. Moore, and A. J. Bray. The Link Overlap and Finite Size Effects for the 3D Ising Spin Glass. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), cond-mat(9905354), 1999.
- [78] E. Marinari, C. Naitza, and F. Zuliani. Critical behaviour of the four-dimensional spin glass in magnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31:6355, 1998.
- [79] E. Marinari, G. Parisi, J. J. Ruiz-Lorenzo, and F. Zuliani. Comment on “Evidence for the Droplet/Scaling Picture of Spin Glasses”. *Physical Review Letters*, 82(25):5176, 1999.
- [80] Daniel S. Fisher and David A. Huse. Absence of Many States in Realistic Spin Glasses. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20:L1005, 1987.
- [81] David A. Huse and Daniel S. Fisher. Pure states in spin glasses. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20:L997, 1987.

-
- [82] B. W. Southern and A. P. Young. Real space rescaling study of spin glass behavior in three dimensions. *Journal of Physics C: Solid State*, 10:2179, 1977.
- [83] E. M. F. Curado and J. L. Meunier. Spin-Glass in low dimensions and the Migdal-Kadanoff approximation. *Physica A*, 149:164, 1988.
- [84] S. Coutinho, O. Donato-Neto, J. R. L. de Almeida, E. M. F. Curado, and W. A. M. Morgado. Multifractality of Ising models on hierarchical lattices: pure and spin glass cases. *Physica A*, 185:271, 1992.
- [85] Michael E. Fisher. Transformations of Ising Models. *Physical Review*, 113(4):969, 1959.
- [86] L. da Silva, E. M. F. Curado, S. Coutinho, and W. A. M. Morgado. Criticality and multifractality of the Potts ferromagnetic model on fractal lattices. *Physical Review B*, 53(10):6345, 1996.
- [87] Yung Qin and Z. R. Yang. Diamond-type hierarchical lattices for the Potts antiferromagnet. *Physical Review B*, 43(10):8576, 1991.
- [88] Paulo R. Hauser and Evaldo M. F. Curado. Potts Ferromagnet: Transformations and Critical Exponents in Planar Hierarchical Lattices. *Journal of Statistical Physics*, 52(1/2):503, 1988.
- [89] Luciano R. da Silva and Constantino Tsallis. Criticality of the Potts ferromagnet in Migdal-Kadanoff-like hierarchical lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20:6013, 1987.

- [90] M. Kaufman and R. B. Griffiths. First-order transitions in defect structures at a second-order critical point for the Potts models on hierarchical lattices. *Physical Review B*, 26(9):5282, 1982.
- [91] J. M. Yeomans and R. B. Stinchcombe. Critical behaviour of the dilute Ashkin-Teller-Potts model. *Journal of Physics C: Solid State*, 13:L239, 1980.
- [92] Constantino Tsallis and A. C. N. de Magalhães. Pure and random Potts-like models: Real-space renormalization-group approach. *Physics Reports*, 268:305, 1996.
- [93] Osmundo Donato da Silva Neto. *Vidros de Spins em Redes Hierárquicas: Aspectos Configuracionais, Críticos e Multifractais*. PhD thesis, Departamento de Física - UFPE, Fevereiro 1999.
- [94] Constantino Tsallis and Silvio V. F. Levy. Renormalisation group attempts to obtain the transition line of the square-lattice bond-dilute Ising model. *Journal of Physics C: Solid State*, 13:465, 1980.
- [95] E. Nogueira Júnior and S. Coutinho and F. D. Nobre and E. M. F. Curado. Short-range Ising spin glasses: a critical exponent study. *Physica A*, 257:365, 1998.
- [96] Jayanth R. Banavar and Alan J. Bray. Heisenberg and Potts spin glasses: A renormalization-group study. *Physical Review B*, 38(4):2564, 1988.
- [97] J. von Neumann. *The Theory of self-reproducing Automata*. A. W. Burks ed. University of Illinois Press, Illinois, 1967.

-
- [98] G. Landini, G. P. Mission, and P. I. Murray. *Fractals in the Natural and Applied Sciences*. M. M. Novak, Elsevier Science B. V., North Holland, 1994.
- [99] G. Camelo-Neto and S. Coutinho. Dynamical Model For Virus Spread. *Fractals*, 4(2):113, 1996.
- [100] Claudia P. Ferreira, J. F. Fontanari, and Rita M. Zorzenon dos Santos. Phase transitions in a model for the formation of herpes simples ulcers. *Physical Review E*, 64:041903, 2001.
- [101] B. Drossel and F. Schwabl. Forest-fire model with immune trees. *Physica A*, 199:183, 1993.
- [102] Peter Grassberger. Critical Behaviour of the Drossel-Schwabl Forest Fire Model. *Electronic Preprint Archive (<http://xxx.lanl.gov>)*, cond-mat(0202022), 2002.
- [103] Chao Tang and Per Bak. Critical Exponents and Scaling Relations for Self-Organized Critical Phenomena. *Physical Review Letters*, 60(23):2347, 1988.
- [104] J. L. Cardy, editor. *Finite Size Scaling*, volume 2 of *Current Physics-Sources and Comments*. North Holland, Amsterdam, 1988.
- [105] M. De Menech, A. L. Stella, and C. Tebaldi. Rare events and breakdown of simple scaling in the Abelian sandpile model. *Physical Review E*, 58(3):R2677, 1998.
- [106] Claudio Tebaldi, Mario De Menech, and Attilio L. Stella. Multifractal Scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld Sandpile and Edge Events. *Physical Review Letters*, 83(19):3952, 1999.

-
- [107] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Corrections to scaling in the forest-fire model. *Electronic Preprint Archive* (<http://xxx.lanl.gov>), cond-mat(9912046), 1999.
- [108] Philip R. Bevington. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill, New York, 1969.