

Capítulo 5

Sincronismo de Sistemas Caóticos

A sincronização de sistemas caóticos é relativamente recente (Fujisaka e Yamada, 1983) e tem atraído grande interesse em várias áreas da ciência, tanto do ponto de vista da física fundamental quanto de potencial aplicação. O fenômeno da sincronização pode acontecer quando dois sistemas, individualmente independentes, passam a reproduzir aproximadamente a mesma trajetória ao longo do tempo quando se cria um termo de interação entre eles. Dentre as diversas formas de sincronização vale ressaltar: a sincronização generalizada (Rulkov *et al.*, 1995), na qual as trajetórias não são iguais, mas têm uma relação funcional; a anti-sincronização, na qual a ocorrência de picos de uma órbita estável em um sistema inibe a ocorrência simultânea destes picos no outro; a sincronização retardada; a sincronização antecipada (Voss, 2000; Masoller, 2001; Masoller *et al.*, 2001), que ocorre em sistemas com realimentação atrasada e permite que o receptor antecipe a trajetória do transmissor antes que ela aconteça; e a sincronização de fase (Rosenblum *et al.*, 1996), na qual não existe uma relação funcional entre os dois subsistemas acoplados, mas as fases relativas das oscilações caóticas ficam travadas.

Uma aplicação interessante, que motivou muitas publicações na área, é o uso da sincronização para transmissão de mensagens mascaradas por uma portadora caótica (Cuomo e Oppenheim, 1993). Um sistema caótico livre, do qual emerge uma trajetória “imprevisível”, pode ser considerado como uma fonte de entropia, na definição de Shanon, o que permite o seu emprego como um canal de comunicação (Shanon e Weaver, 1963). Métodos foram criados para controlar um sistema não-linear de maneira a “guiar” sua trajetória e transmitir uma mensagem, codificada pela seqüência de órbitas periódicas instáveis que serão aproximadamente exibidas pela trajetória (Ott *et al.*, 1990). A mensagem é enviada escolhendo quais órbitas instáveis serão apro-

ximadamente visitadas pelo sistema e em que seqüência. O controle que pode atuar sobre o sistema sem alterar drasticamente suas características naturais é limitado pela capacidade de canal, definida pela teoria da informação (Touchette e Lloyd, 2000; de Moraes *et al.*, 2002).

Muitas técnicas de transmissão de informação são baseadas na sincronização de trajetórias caóticas: além do mascaramento, no qual uma mensagem é somada ao sinal caótico transmitido e subtraída no receptor sincronizado, e do controle, no qual a mensagem é codificada em órbitas, foram propostas técnicas de criptografia caótica, como a modulação do atrator caótico (*Chaos Shift Keying*), na qual uma modulação de um parâmetro do sistema transmissor causa uma mudança na dinâmica que só é facilmente detectada pelo receptor não-linear adequadamente ajustado (Dedieu *et al.*, 1993; de Moraes *et al.*, 1997). É possível também a certificação do transmissor (Tenny *et al.*, 2003), na qual um conjunto de parâmetros do sistema receptor é divulgado publicamente e só leva ao sincronismo com sinais caóticos oriundos do transmissor certificado, permitindo desta forma garantir a identidade do transmissor da mensagem.

Neste capítulo apresentaremos algumas propostas de sincronizar (ou transmitir informação sobre o estado caótico livre) dois lasers caóticos através de um esquema simples de acoplamento incoerente de campo elétrico. O interesse em lasers se deve ao fato deles serem a principal fonte de luz utilizada em comunicações óticas. O acoplamento incoerente, no qual só importa a intensidade da luz do transmissor, é mais simples de se implementar na prática do que o acoplamento coerente, sensível a fase do campo elétrico, e portanto a pequenas flutuações (da ordem do comprimento de onda da luz utilizada) do percurso óptico, quer estas ocorram na distância entre emissor e receptor ou no índice de refração do meio pelo qual a luz se propaga.

A sincronização por acoplamento incoerente (Otsuka e Chern, 1992) já foi explicada e realizada experimentalmente em lasers de CO₂ com absorvedor saturável (Liu *et al.*, 1994; Liu e Rios Leite, 1994; Sugawara *et al.*, 1994) e lasers de diodo com realimentação ótica coerente (Sivaprakasam e Shore, 1999; Fischer *et al.*, 2000). Rogister *et al.* (2001) estudaram numericamente o sigilo da transmissão de informação criptografada por portadora caótica em lasers de diodo com realimentação ótica. A dinâmica dos lasers pode ocorrer em alta velocidade, permitindo uma grande taxa de transmissão de informação (Tang e Liu, 2001).

5.1 Análise de Estabilidade

Para determinar se um determinado sistema, composto por dois subsistemas acoplados, exibe sincronismo podemos fazer uma análise de estabilidade da *variedade transversal*, $\vec{x}_\perp$:

$$\vec{x}_\perp = \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \quad (5.1)$$

Fazendo uma aproximação linear para a evolução temporal do vetor $\vec{x}_\perp$ temos uma equação diferencial semelhante àquela que levou ao expoente de Lyapunov (eq. 1.9). Se a condição inicial $\vec{0}$ for estável o sincronismo do sistema será estável e $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Se as partes reais de todos os autovalores λ_i forem sempre negativas o sincronismo será sempre estável. Se uma destas partes reais de algum autovalor excursionar por valores positivos em algum instante de tempo, porque os coeficientes da matriz jacobiana são dependentes da trajetória, o sincronismo será instável naquele momento. Quando um ou mais autovalor oscila de positivo para negativo em tempos comparáveis com a evolução do sistema temos uma sincronização intermitente (*intermittência on-off*).

Vejamos um exemplo com o acoplamento unidirecional entre dois sistemas de Rössler cujos parâmetros são idênticos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) \end{cases} \quad (5.2)$$

O termo de acoplamento, $\epsilon(x_1 - x_2)$, vai a zero quando os sistemas estão sincronizados. A equação para a evolução da variedade transversal é

$$\begin{cases} \dot{x}_\perp = -y_\perp - z_\perp + \epsilon x_\perp \\ \dot{y}_\perp = x_\perp + ay_\perp \\ \dot{z}_\perp = z_2 x_\perp + (x_1 - c)z_\perp, \end{cases} \quad (5.3)$$

e esta, por sua vez, pode ser escrita em notação matricial, como uma equação diferencial linear não-autônoma (os coeficientes z_2 e x_1 não são constantes)

$$\dot{\vec{x}}_\perp = \begin{bmatrix} \epsilon & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ z_2 & 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \vec{x}_\perp. \quad (5.4)$$

A equação para os autovalores desta matriz é $(\epsilon - \lambda)(1 - \lambda)(x_1 - c - \lambda) + z_2(1 - \lambda) + x_1 - c - \lambda = 0$, e pode dar origem a λ s sempre negativos ou sempre positivos ou oscilantes, dependendo dos parâmetros e das trajetórias de x_1 e x_2 . O autovalor dado por esta equação é desenhado como função do parâmetro de acoplamento na figura 3 da referência (Pecora *et al.*, 1997).

5.2 Modelo de Lang-Kobayashi

Lang e Kobayashi (1980) propuseram um modelo simplificado para descrever o efeito de realimentação ótica coerente ou incoerente em lasers de diodo monomodo. As equações de Lang-Kobayashi apresentam soluções cuja dinâmica é qualitativamente semelhante às observações experimentais. Este modelo, ou variações semelhantes das equações de Maxwell-Bloch, têm sido extensivamente usados na literatura.

Nós introduzimos termos de acoplamento por saturação de população ou amplificação de corrente causada pela injeção de uma intensidade de luz vinda do laser transmissor nas equações para o receptor

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \dot{E}_2(t) &= (1 + i\alpha_2)[G_2 - \gamma_2]E_2(t) \\ &\quad + r_2\gamma_2 E_2(t - \tau_2) \end{cases} \\
 \begin{cases} \dot{N}_2(t) &= \mathbf{i}_2(t)/q - \gamma_{e2}N_2 \\ &\quad - G_2(t)\{|E_2(t)|^2 + a_2|E_1(t - \tau_{12})|^2\}, \end{cases} \quad (5.5) \\
 G_2(t) &= \frac{g_2(N_2 - N_{th2})}{1 + \epsilon_2[|E_2(t)|^2 + a_2|E_1(t - \tau_{12})|^2]}, \\
 \mathbf{i}_2(t) &= \mathbf{i}_{th2} [1 + b_2 |E_1(t - \tau_{12})|^2].
 \end{aligned}$$

Aqui, τ_2 é o tempo de ida e volta de um pulso do laser 2 refletido pelo espelho de realimentação, o termo em $a_2|E_1(t - \tau_{12})|^2$ é a saturação do ganho do laser 2 causada pela intensidade do laser 1, e $b_2|E_1(t - \tau_{12})|^2$ é um termo de ampliação da corrente de bombeio no laser 2 causada pela intensidade do laser 1. Fisicamente, o efeito de a_2 é uma redução no valor instantâneo do ganho do laser 2, causada pela redução da inversão de população, N_2 , devida à emissão estimulada pelo laser 1. O efeito de b_2 pode ser causado por fotocondutividade do semiconductor fora da região de amplificação ou pode ser introduzido artificialmente, usando-se um controle optoeletrônico da corrente de alimentação do laser 2.

A figura 5.1 mostra uma possível configuração para este tipo de acoplamento. A saturação do ganho causa uma tendência ao anti-sincronismo, enquanto a presença de amplificação do bombeio leva a uma tendência de sincronismo em fase. Nos dois casos existe um atraso dinâmico entre o efeito da luz incidente sobre a população e a resposta no campo emitido.

Fizemos cálculos numéricos com as equações de Lang-Kobayashi e os modelos de acoplamento introduzidos nas equações 5.5, ativados individualmente. Os parâmetros usados nos cálculos estão listados na tabela 5.1.

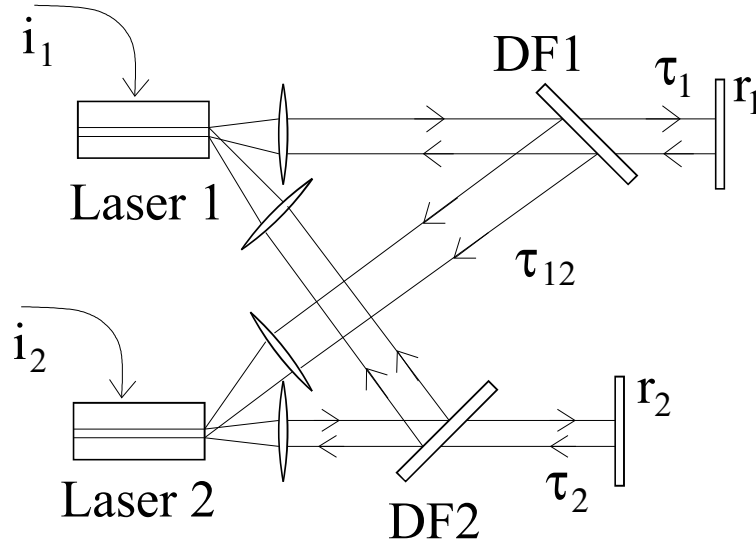


Figura 5.1: Montagem proposta para acoplamento incoerente de lasers de diodo caóticos. i_1 e i_2 são as correntes de bombeio dos lasers. As realimentações com atrasos τ_1 e τ_2 são feitas por espelhos de refletividades r_1 e r_2 . DF1 e DF2 são divisores de feixe (*beam splitters*) e o tempo de acoplamento do laser 1 para o laser 2 é τ_{12} . Nesta figura o acoplamento é bidirecional, nos cálculos numéricos não consideramos o divisor de feixe DF2.

parâmetro	símbolo	valor
fator de aumento da largura de linha	$\alpha_1 = \alpha_2$	3,5
tempo de relaxação da cavidade	$\gamma_1 = \gamma_2$	282
refletividade do espelho de realimentação	$r_1 = r_2$	0,082
tempo de ida e volta na cavidade 1	τ_1	6,00
tempo de ida e volta na cavidade 2	τ_2	4,75
taxa de relaxação da população	$\gamma_{e1} = \gamma_{e2}$	1,66
parâmetro de ganho	$g_1 = g_2$	$3,2 \times 10^{-6}$
população de limiar	$N_{th1} = N_{th2}$	$1,5 \times 10^8$
coeficiente de saturação	$\epsilon_1 = \epsilon_2$	$5,0 \times 10^{-7}$
corrente de limiar 1	i_{th1}	$4,1 \times 10^8$
corrente de limiar 2	i_{th2}	$4,5 \times 10^8$

Tabela 5.1: Parâmetros usados nos cálculos para lasers de diodo. As unidades de tempo e frequência (taxas) foram ajustadas para dar valores numéricos em nanossegundos e GHz, respectivamente.

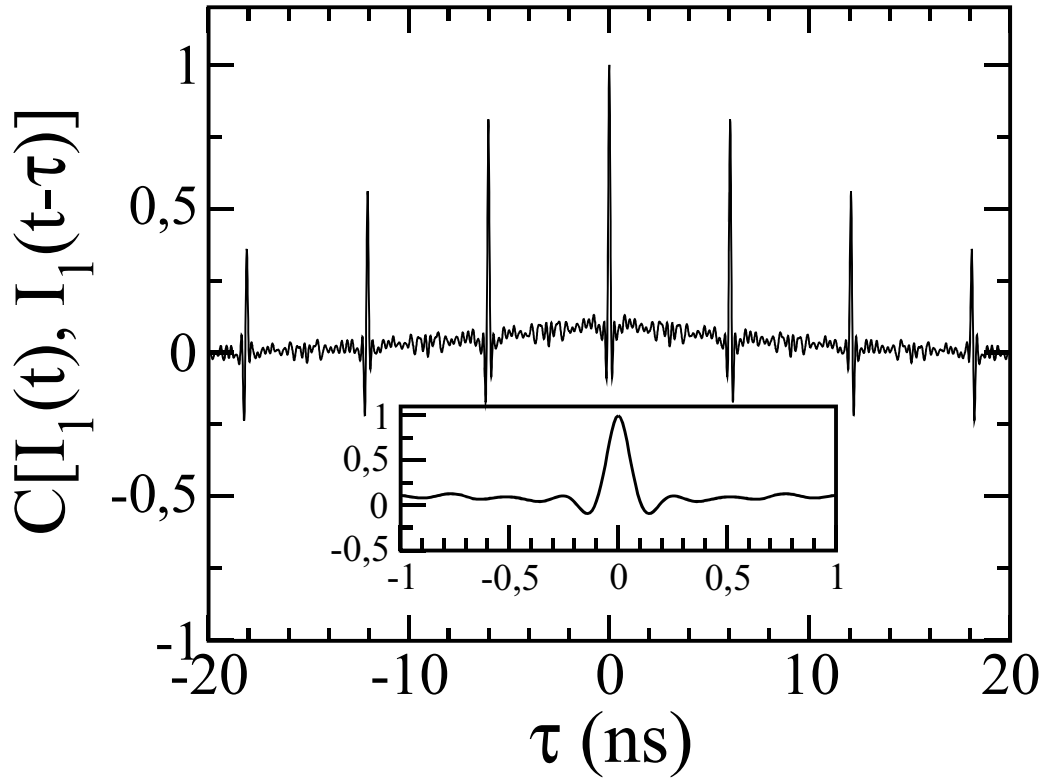


Figura 5.2: Autocorrelação de uma série temporal caótica do laser de diodo.

A qualidade do sincronismo nos dois casos é pobre. Não há um sincronismo perfeito, nem mesmo uma relação funcional unívoca entre as oscilações do laser 1 e do laser 2. Ainda assim, podemos caracterizar o sincronismo através da integral de correlação cruzada entre as intensidades, $C(\tau)$, cuja forma discreta é

$$C(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^N (I_1(t_i) - \bar{I}_1)(I_2(t_i - \tau) - \bar{I}_2)}{\left[\sum_{i=1}^N (I_1(i) - \bar{I}_1)^2 \sum_{i=1}^N (I_2(i) - \bar{I}_2)^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.6)$$

A integral de correlação dá um máximo com valor normalizado 1, quando as séries são idênticas a menos de transformações lineares (-1 quando a constante de proporcionalidade é negativa). O valor de pico pode ocorrer quando uma série é atrasada ou adiantada com respeito a outra por um tempo τ .

Antes de analisar a integral de correlação cruzada devemos ver a autocorrelação das séries temporais de intensidade dos lasers, como por exemplo na figura 5.2. Elas podem apresentar características relativamente incomuns: apesar de não serem periódicas, mostram picos que se destacam da média

nula e se repetem periodicamente, em tempos múltiplos do tempo de retorno do espelho de realimentação, τ_1 ; estes picos só mostram um sinal, ou são positivos ou negativos, e sua amplitude decai com o atraso, pois a série não é periódica. Em séries periódicas sinusoidais, os picos oscilam entre -1 e +1 quando o tempo de atraso τ entre as séries percorre o período das oscilação. Em séries não autocorrelacionadas, como uma série estocástica, o pico só aparece uma vez, no atraso nulo, mas pode ter uma largura finita, característica da apodização no espaço de frequências. Em séries originadas de sistemas caóticos sem termos de retorno, a autocorrelação apresenta oscilações que decaem rapidamente, a largura dos picos é da ordem do tempo de Lyapunov do sistema, que vale o inverso da soma das partes reais dos expoentes de Lyapunov positivos.

A figura 5.3a) mostra um segmento da série temporal para a intensidade ($|E(t)|^2$) do laser 1, com seus pulsos rápidos (frequência da ordem de GHz) e dinâmica lenta (flutuações de baixa frequência, $\cong 0,1\mu s$). A figura 5.3b) mostra a relação entre as intensidades dos lasers 1 e 2 quando ambos os termos de acoplamento são desativados. Com $a_2 = 0$ e $b_2 = 0$, os dois lasers oscilam de maneira completamente descorrelacionada. A integral de correlação cruzada praticamente se anula em todo atraso τ , conforme pode ser visto na figura 5.3c). Ao ativarmos o acoplamento por saturação de população observa-se um trem de pulsos com correlação negativa, indicando uma anti-sincronização (figura 5.4b). A maior correlação acontece para um atraso negativo (causal) um pouco maior que a largura do pico. Os demais indicadores de atraso aparecem em tempos que são múltiplos do tempo de realimentação do laser transmissor, independentemente do tempo de realimentação do laser receptor. Quando usamos o acoplamento por modulação de corrente (figura 5.4c) os picos ficam positivos, indicando uma sincronização em fase. O tempo de atraso para a correlação máxima continua da mesma ordem de grandeza. Verificamos que estes dois tipos de sincronismo são robustos a pequenas variações de parâmetros entre os lasers e à presença de ruído.

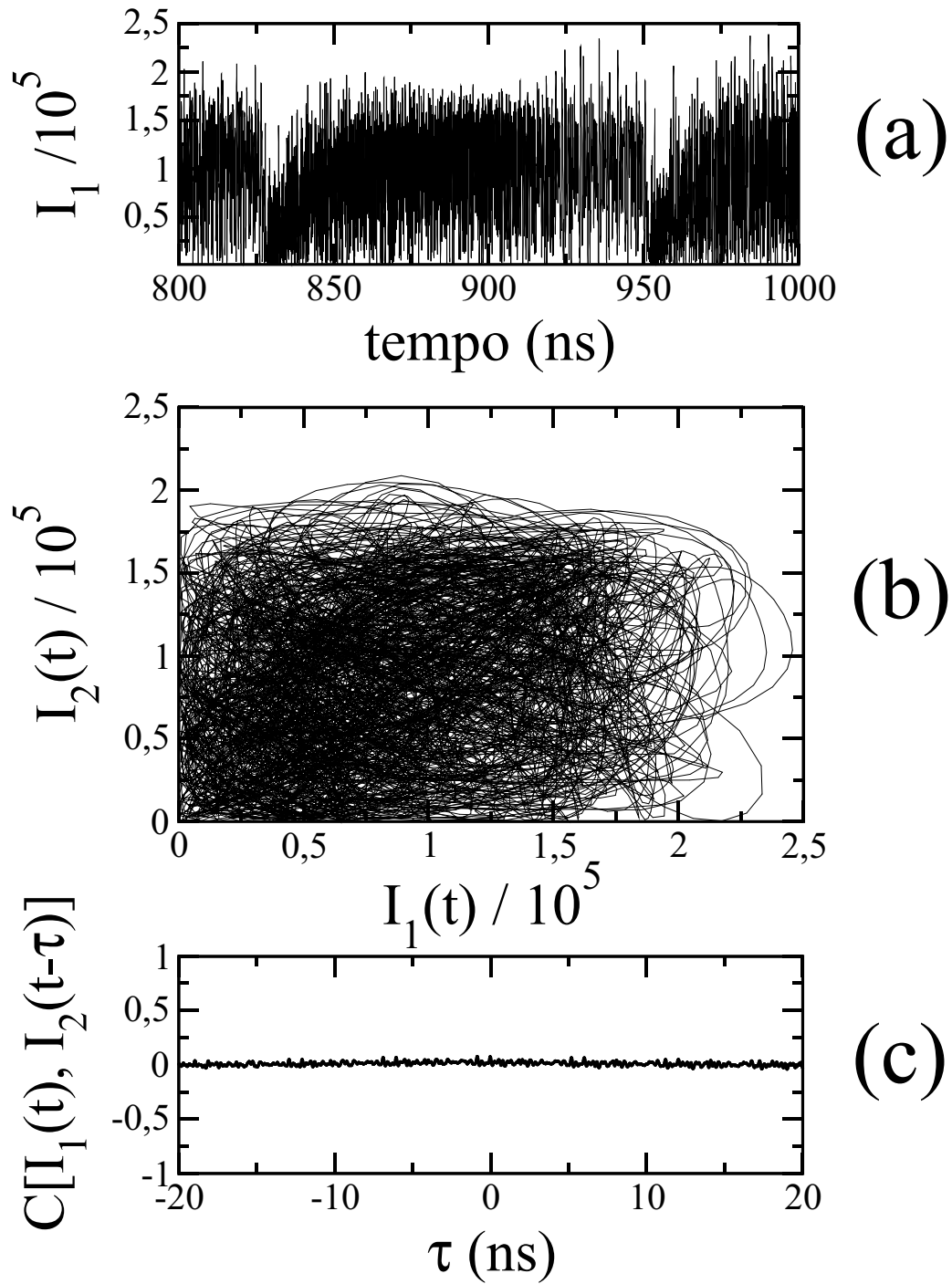


Figura 5.3: Correlações entre séries temporais de lasers de diodo caóticos desacoplados. a) Intensidade do laser 1. b) Intensidade do laser 1 *versus* intensidade do laser 2. Não se vê correlação entre os pulsos. c) Integral de correlação cruzada das intensidades dos lasers 1 e 2. A correlação é nula para todo atraso τ .

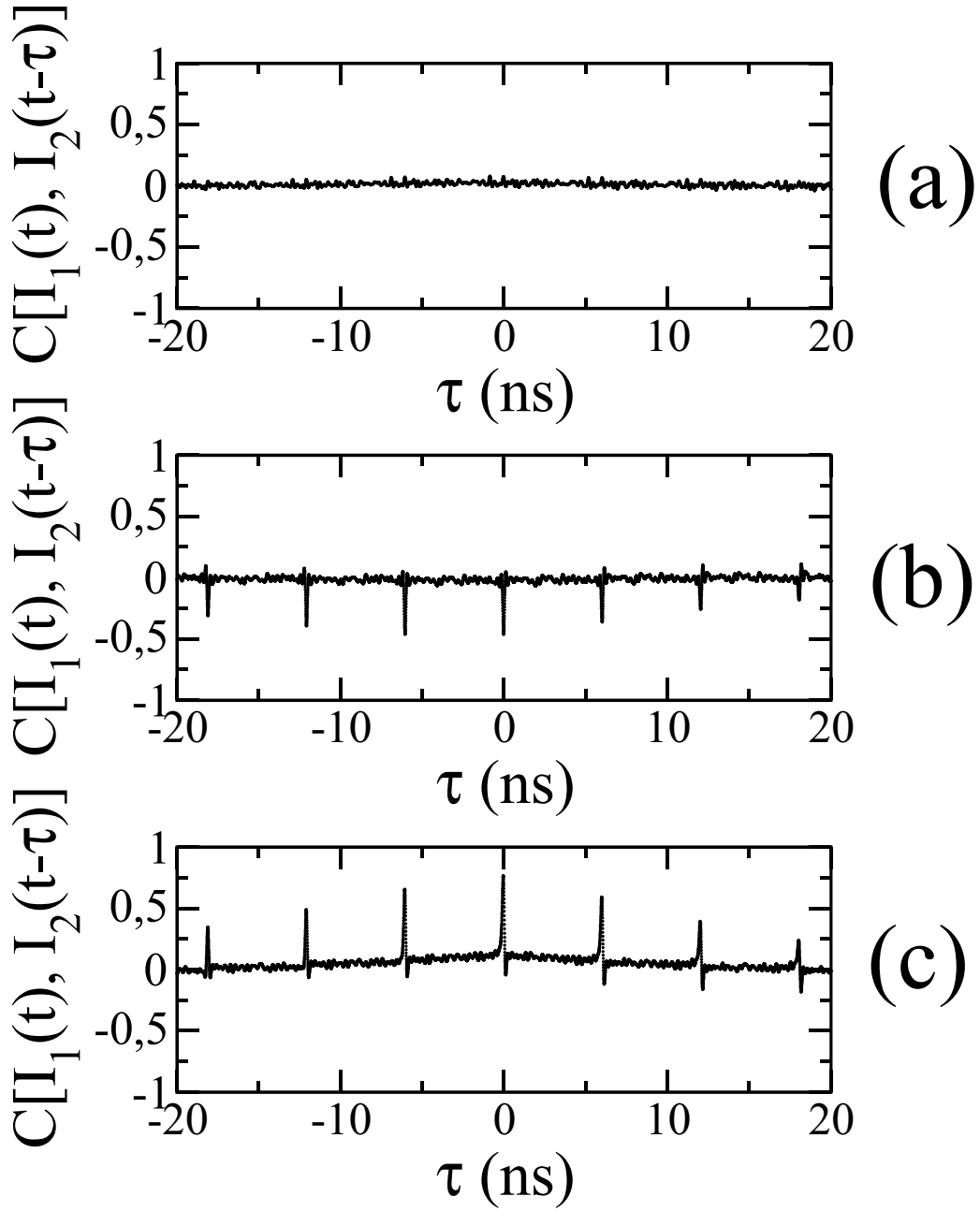


Figura 5.4: Correlações entre séries temporais de lasers de diodo caóticos acoplados. a) sem acoplamento b) receptor com $a_2 = 0,2$ e $b_2 = 0$ mostra anti-sincronismo. c) receptor com $a_2 = 0$ e $b_2 = 10^{-6}$ mostra sincronização em fase.

5.3 Modelo de Haken-Lorenz

Resultados numéricos semelhantes foram obtidos para o acoplamento de lasers de Haken-Lorenz por saturação de população. O modelo de Haken-Lorenz vem das equações de Maxwell-Bloch aplicadas a um laser monomodo. O diagrama de níveis de energia é mostrado na figura 5.5. O tratamento de

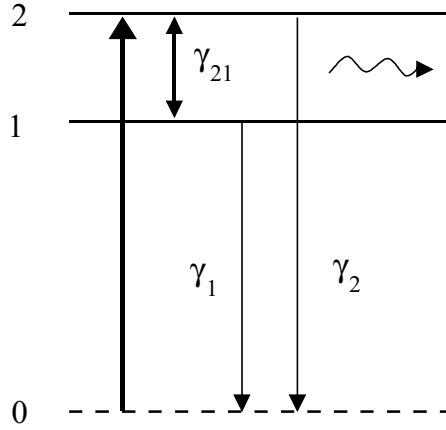


Figura 5.5: Diagrama com os níveis de energia relevantes para o modelo de Haken-Lorenz.

(Haken, 1975) é semi-clássico. O hamiltoniano que descreve a interação de dipolo elétrico ($\mu = e\vec{r}$) do meio material com o campo elétrico (E_0) é dado por

$$H = H_0 + \begin{pmatrix} 0 & -\mu E_0 \\ -\mu E_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Podemos usar a equação de Heisenberg para a evolução da matriz densidade [ver p. ex. Jackson (1975, cap. 8)]

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]. \quad (5.8)$$

Basta tratar dois de seus elementos na mesma linha. Para a população do nível 1, ρ_{11} , e coerência entre os níveis 1 e 2, ρ_{12} , obtemos as equações diferenciais

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= 2\text{Re}\{\mu E_0 \rho_{12}\} + \gamma_1 [\rho_{11} - \rho_{11}(t=0)] \\ i\hbar \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} &= -\omega_0 \rho_{12} + \mu E_0 (\rho_{11} - \rho_{22}). \end{aligned}$$

Definindo $\rho_{21}(t) = \sigma_{21}(t)e^{-i\omega t}$ e $\rho_{11} - \rho_{22} = -\Delta N$ e introduzindo os termos de relaxação chegamos a

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{21}}{dt} &= (\omega - \omega_0)\sigma_{21} - \frac{i\mu E_0}{2\hbar}\Delta N - \frac{\sigma_{21}}{T_2} \\ \frac{d}{dt}\Delta N &= -\frac{i\mu E_0}{\hbar}(\sigma_{21} - \sigma_{12}^*) - \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1}. \end{cases}$$

A frequência de Bohr para este sistema é $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$, e $\sigma_{12} = \sigma_{21}^*$ são os elementos da matriz densidade no referencial de onda girante. Desprezando termos de segunda ordem na frequência do campo (geração de segundo harmônico) e usando a equação de Maxwell para a taxa de variação do campo elétrico induzida pela polarização elétrica, resulta

$$\begin{cases} \dot{E} = -\kappa(E - AP) \\ \dot{P} = -\gamma_{\perp}(P - ED) \\ \dot{D} = -\gamma_{\parallel}(D - 1 + EP), \end{cases} \quad (5.9)$$

onde $E = E_0 \exp(i\omega t)$ é a amplitude (envoltória) do campo elétrico cuja frequência ótica é ressonante com os níveis do meio material, $P = \mu(\sigma_{12} + \sigma_{21})$ é a (envoltória da) densidade de polarização elétrica e $D = \Delta N$ é a densidade de inversão de população. κ é a taxa de decaimento do campo elétrico na cavidade, $\gamma_{\parallel} = \gamma_1 = \gamma_2 = 1/T_1$ é a taxa de relaxação da população, $\gamma_{\perp} = \gamma_{21} = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 + \gamma_{\parallel} = 1/T_2$ é a taxa de relaxação da polarização.

As equações 5.9 são homomórficas às de Lorenz (eq. 1.6) quando fazemos $\gamma_{\perp} = 1$ e

$$\begin{array}{llll} E & \rightarrow & x & \kappa = \sigma \\ AP & \rightarrow & y & \Rightarrow A = r \\ AD & \rightarrow & r - z & \gamma_{\parallel} = b. \end{array}$$

Uma vez que chegamos ao sistema de Lorenz, pode-se realizar um procedimento de sincronização total ou sincronização de fase por acoplamento de campo elétrico ou de intensidade. Aparentemente, conseguimos obter sincronização de fase, mas esta é instável (intermitente) para trajetórias caóticas.

O resultado perseguido inicialmente com o sistema de Lorenz foi obtido com a sincronização de sistemas de Rössler acoplados unidirecionalmente. Seguindo a referência Rosenblum *et al.* (1996), o sistema de Rössler receptor pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + a y_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c). \end{cases} \quad (5.10)$$

A figura 5.6 mostra uma sincronização atrasada. Os parâmetros utilizados foram $\omega_1 = 0,99$, $\omega_2 = 0,95$, $a = 0,165$, $b = 0,2$, $c = 10$ e $\epsilon = 0,3$.

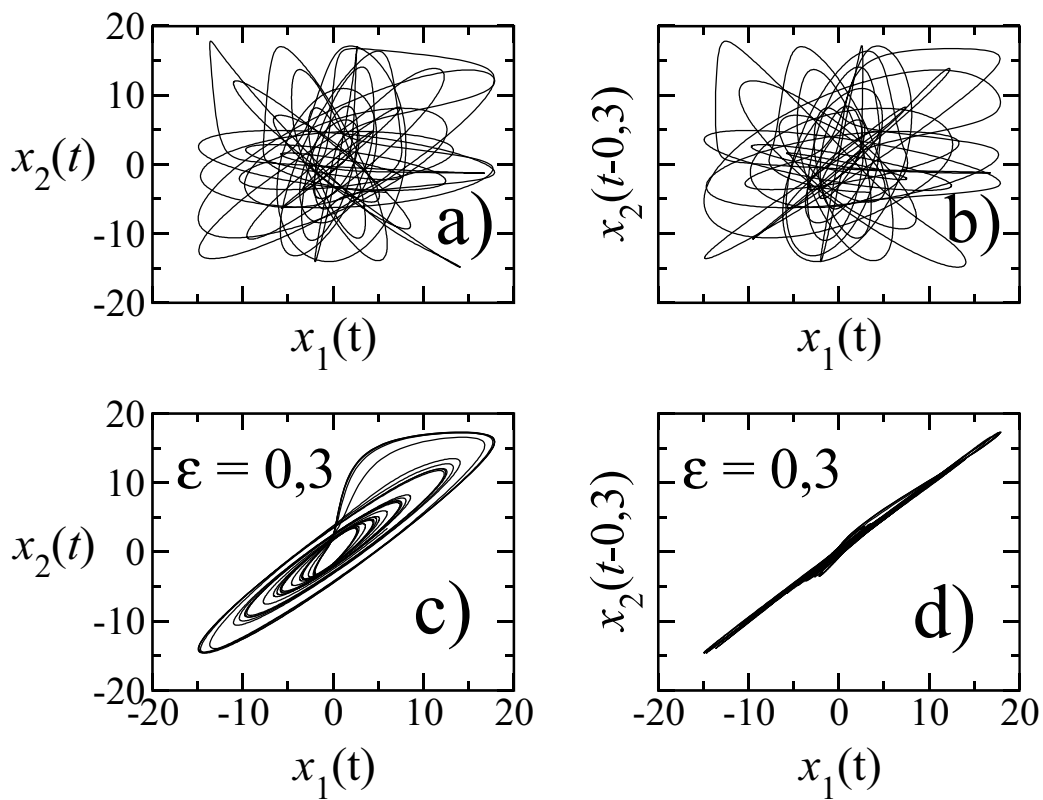


Figura 5.6: Sincronização retardada no sistema de Rössler: a) sem acoplamento não há relação entre as trajetórias, b) mesmo quando comparadas em diferentes instantes. c) Com acoplamento ($\epsilon = 0,3$) percebe-se uma aproximação entre as trajetórias. d) A sincronização quase perfeita ocorre atrasada no tempo por 0,3 unidades.

Capítulo 6

Conclusão

A bifurcação que leva à intermitência de Pomeau e Manneville do tipo I é uma característica universal, abundante em sistemas dinâmicos contínuos e discretos. Apresentamos, através de cálculos numéricos, leis de comportamento crítico para este tipo de bifurcação e também para aquela associada à intermitência do tipo III, numérica e analiticamente. Esta, por sua vez, é quantitativamente similar à de tipo II. Os resultados foram verificados experimentalmente em um oscilador eletrônico altamente não-linear. Ainda não há uma teoria adequada para explicar a periodicidade em lei de potência observada nas bifurcações do tipo I. A tabela 6.1 faz uma listagem dos diversos sistemas estudados neste tese, indicando para cada um o tipo de abordagem, se numérica, analítica e/ou experimental; a natureza contínua ou discreta do sistema; e se o estudo abrange a consideração de efeitos de ruído e não-uniformidade da reinjeção.

Também apresentamos um breve estudo do sincronismo de sistemas caóticos, com ênfase na possibilidade de sua implementação através de sistemas óticos, tais como os modelos de equações de taxa para os lasers de Haken-Lorenz e Lang-Kobayashi. Uma rápida demonstração numérica da sincronização de sistemas de Rössler foi realizada.

Resumimos a seguir os principais resultados discutidos:

- A variação da média das variáveis dinâmicas com o parâmetro de controle pode ser usada para obter informações sobre as bifurcações em um sistema dinâmico.
- Existem oscilações no comportamento crítico associado às intermitências de Pomeau e Manneville.
- A média de sistemas discretos e contínuos com a classe de universalidade do mapa logístico, isto é, intermitência tipo I e não-linearidade

Sistema	Abordagens	Tempo	Ruído/Reinj.
Mapa Logístico	numérica	discreto	–
Forma Normal Tipo I	numérica	discreto	ruído e reinj.
Forma Normal Tipo III	analítica e numérica	discreto	reinjeção
Mapa Quasi-Periódico	numérica	discreto	–
Mapa So-Ose-Mori	analítica e numérica	discreto	ruído e reinj.
Rössler	numérica	contínuo	–
Lorenz	numérica	contínuo	–
LAS	numérica	contínuo	–
RLD Tipo I	numérica e experim.	contínuo	–
RLD Tipo III	numérica e experim.	contínuo	–

Tabela 6.1: Características dos principais sistemas estudados nesta tese.

dominante quadrática, apresenta um comportamento crítico da forma $\epsilon^{1/2} \ln \epsilon$ somada a uma função que fica periódica com a transformação de escala $\epsilon \rightarrow \epsilon^{-1/2}$.

- Para a intermitência tipo I com não-linearidade tipo x^z o comportamento parece ser do tipo $\epsilon^{1/z} \ln \epsilon$.
- No caso do mapa linear-por-partes de So-Ose-Mori encontramos a dependência $\ln \epsilon$ decorada por uma flutuação que se regulariza na escala $\ln \epsilon$.
- Para a intermitência do tipo III encontramos expressões analíticas para o comportamento da média com $-1/\pi\epsilon^{1/2} \ln \epsilon$, para $z = 3$, e $\epsilon^{1/(z-1)}$, para $z > 3$.
- Na intermitência do tipo III não foram encontradas oscilações significativas.
- O comportamento crítico da média foi obtido experimentalmente em bifurcações com intermitência tipo I e tipo III no circuito eletrônico oscilador RLD.

Os estudos aqui apresentados foram objeto de pelo menos sete artigos publicados em revistas internacionais, destinados à literatura especializada em dinâmica de sistemas, caos, física estatística e conceitos fundamentais de física. O estudo do efeito do ruído na média do mapa logístico, assim como das bifurcações experimentais do circuito RLD continua sendo realizado pela equipe do Laboratório de Dinâmica de Lasers.

Referências Bibliográficas

- Bai-lin, H. (1989). *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific, Cingapura, Cingapura.
- Bauer, M., Habip, S., He, D.-R., e Martienssen, W. (1992). New type of intermittency in discontinuous maps. *Physical Review Letters*, **68**(11):1625–1628.
- Bergé, P., Dubois, M., Manneville, P., e Pomeau, Y. (1980). Intermittency in Rayleigh-Bénard convection. *Journal de Physique Lettres*, **41**(15):L341–L345.
- Bergé, P., Pomeau, Y., e Vidal, C. (1984). *L'Ordre dans le Chaos*. Hermann, Paris, França.
- Cho, J.-H., Ko, M.-S., Park, Y.-J., e Kim, C.-M. (2002). Experimental observation of the characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise. *Physical Review E*, **65**:036222.
- Crawford, J. D. (1991). Introduction to bifurcation theory. *Reviews of Modern Physics*, **63**(4):991–1037.
- Cuomo, K. M. e Oppenheim, A. V. (1993). Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical Review Letters*, **71**(1):65–68.
- de Aguiar, F. M. (1989). Intermittencies in the presence of symmetry in spin-wave experiments. *Physical Review A*, **40**(12):7244–7249.
- de Moraes, R. M. e Anlage, S. M. (2003). Unified model and reverse recovery nonlinearities of the driven diode resonator. *Physical Review E*, **68**:026201.
- de Moraes, R. M., de Barros Oliveira-Neto, L., e Rios Leite, J. R. (1997). Analog circuits simulation of communication with chaotic lasers. *Applied Physics Letters*, **70**(11):1357–1359.

- de Moraes, R. M., Uchôa-Filho, B. F., Pimentel, C., Palazzo, R., e Rios Leite, J. R. (2002). Shannon capacity and codes for communicating with a chaotic laser. *IEEE Transactions on Communications*, **50**(6):882–887.
- de S. Cavalcante, H. L. D. (1999). Bifurcações na dinâmica do laser de CO₂ com absorvedor saturável. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco.
- de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2000a). Bifurcations and averages in the homoclinic chaos of a laser with a saturable absorber. *Physica A*, **283**:125–130.
- de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2000b). Bifurcations and averages in the logistic map. *Dynamics and Stability of Systems*, **15**(1):35–41.
- de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2002). Averages and critical exponents in type-III intermittent chaos. *Physical Review E*, **66**:026210.
- de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2003). Intensity coupling and synchronization of chaotic lasers. *Chaos*, **13**(1):209–216.
- de S. Cavalcante, H. L. D. e Rios Leite, J. R. (2004). Logarithmic periodicities in the bifurcations of type-I intermittent chaos. *Physical Review Letters*, **92**(25):254102.
- de S. Cavalcante, H. L. D., Rios Leite, J. R., e Vasconcelos, G. L. (2001). Power law periodicity in the tangent bifurcations of the logistic map. *Physica A*, **295**:291–296.
- Dedieu, H., Kennedy, M. P., e Hassler, M. (1993). Chaos shift keying - modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II - Analog and Digital Signal Processing*, **40**(10):634–642.
- Dubois, M., Rubio, M. A., e Bergé, P. (1983). Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation. *Physical Review Letters*, **41**(16):1446–1449. Ver também *erratum*: PRL **51**:(25), 2345 (1983).
- Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**:25.
- Fiedler-Ferrara, N. e do Prado, C. P. C. (1994). *Caos, uma introdução*. Edgard Blücher, 01061-970 - Caixa Postal 5450 São Paulo - SP - Brasil.

- Fischer, I., Liu, Y., e Davis, P. (2000). Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication. *Physical Review A*, **62**:011801(R).
- Frøyland, J. e Alfsen, K. H. (1984). Lyapunov-exponent spectra for the Lorenz model. *Physical Review A*, **29**(5):2928–2931.
- Fujisaka, H. e Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, **69**(1):32–47.
- Fukushima, K. e Yamada, T. (1988). Type-III intermittency in a coupled nonlinear LCR circuit. *Journal of the Physical Society of Japan*, **57**(11):4055–4062.
- Gambaudo, J.-M., Procaccia, I., Thomae, S., e Tresser, C. (1986). New universal scenarios for the onset of chaos in Lorenz-type flows. *Physical Review Letters*, **57**(8):925–928.
- Goldstein, H. (1950-1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, EUA, 2a. edição.
- Grebogi, C., Hammel, S. M., Yorke, J. A., e Sauer, T. (1990). Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics – containment and refinement. *Physical Review Letters*, **65**(13):1527–1530.
- Grebogi, C., Ott, E., e Yorke, J. A. (1983). Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, **7**:181–200.
- Grebogi, C., Ott, E., e Yorke, J. A. (1986). Critical exponents of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical Review Letters*, **57**(11):1284–1287.
- Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of vector fields*, volume 42. Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Haken, H. (1975). Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Physics Letters*, **53A**(1):77–78.
- Hammel, S. M., Yorke, J. A., e Grebogi, C. (1988). Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **19**(2):465–469.
- Hirsch, J. E., Huberman, B. A., e Scalapino, D. J. (1982). Theory of intermittency. *Physical Review A*, **25**(1):519–532.

- Hu, B. e Rudnick, J. (1982a). Exact solutions to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency. *Physical Review Letters*, **48**(24):1645–1648.
- Hu, B. e Rudnick, J. (1982b). Exact solutions to the renormalization-group fixed-point equations for intermittency in two-dimensional maps. *Physical Review A*, **26**(5):3035–3036.
- Hunt, E. R. (1982). Comment on a driven nonlinear oscillator. *Physical Review Letters*, **49**:1054.
- Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Nova Iorque, EUA, 1a. edição.
- Jeffries, C. e Perez, J. (1982). Observation of a Pomeau-Manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Physical Review A*, **26**(4):2117–2122.
- Kaplan, H. (1994). Return to type-I intermittency. *Physical Review Letters*, **68**(5):553–556.
- Kim, C.-M., Kwon, O. J., Lee, E.-K., e Lee, H. (1994). New characteristic relations in type-I intermittency. *Physical Review Letters*, **73**(4):525–528.
- Kim, C.-M., Yim, G.-S., Ryu, J.-W., e Park, Y.-J. (1998). Characteristic relations of type-III intermittency in an electronic circuit. *Physical Review Letters*, **80**:5317.
- Kobayashi, T., Fujisaka, H., e Just, W. (1993). Thermodynamics and multicorrelations of intermittent dynamics. *Physical Review E*, **47**(5):3196–3205.
- Kodama, H., Sato, S., e Honda, K. (1991). Reconsideration of the renormalization-group theory on intermittent chaos. *Physics Letters A*, **157**(6,7):354–356.
- Kwon, O. J., Kim, C.-M., Lee, E.-K., e Lee, H. (1996). Effects of reinjection on the scaling property of intermittency. *Physical Review E*, **53**(1):1253–1256.
- Kye, W.-H., Rim, S., Kim, C.-M., Lee, J.-H., Ryu, J.-W., Yeom, B.-S., e Park, Y.-J. (2003). Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit. *Physical Review E*, **68**:036203.

- Lai, Y.-C., Liu, Z., Wei, G.-W., e Lai, C.-H. (2002). Shadowability of statistical averages in chaotic systems. *Physical Review Letters*, **89**(18):184101.
- Lang, R. e Kobayashi, K. (1980). External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **QE-16**(3):347–355.
- Lawandy, N. M., Selker, M. D., e Lee, K. (1987). A signature for the Lorenz instability in quantum optics. *Optics Communications*, **61**(2):134–136.
- Lefranc, M., Hennequin, D., e Dangoisse, D. (1991). Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber. *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**(2):239–249.
- Linsay, P. S. (1981). Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. *Physical Review Letters*, **47**:1349–1352.
- Liu, Y., de Oliveira, P. C., Danailov, M. B., e Rios Leite, J. R. (1994). Chaotic and periodic passive *Q*-switching in coupled CO₂ lasers with a saturable absorber. *Physical Review A*, **50**(4):3464–3470.
- Liu, Y. e Rios Leite, J. (1994). Coupling two chaotic lasers. *Physics Letters A*, **191**:134.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. of Atmos. Sci.*, **20**:130.
- Lorenz, E. N. (1964). The problem of deducing the climate from the governing equations. *Tellus*, **XVI**:1–11.
- Maier, R. S. e Stein, D. L. (1996). Oscillatory behavior of the rate escape through an unstable limit cycle. *Physical Review Letters*, **77**(24):4860–4863.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, Nova Iorque.
- Manneville, P. (1990). *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, Boston, Massachusetts, EUA.
- Manneville, P. e Pomeau, Y. (1979). Intermittency and the Lorenz model. *Physics Letters*, **75A**:1–2.
- Masoller, C. (2001). Anticipation in the synchronization of chaotic semiconductor lasers with optical feedback. *Physical Review Letters*, **86**(13):2782–2785.

- Masoller, C., de S. Cavalcante, H. L. D., e Rios Leite, J. R. (2001). Delayed coupling of logistic maps. *Physical Review E*, **64**:037202.
- Metropolis, M., Stein, M. L., e Stein, P. R. (1973). On finite limit sets for transformations on the unit interval. *Journal of Combinatorial Theory*, **15**:25.
- Ono, Y., Fukushima, K., e Yazaki, T. (1995). Critical behavior for the onset of type-III intermittency observed in an electronic circuit. *Physical Review E*, **52**:4520.
- Otsuka, K. e Chern, J.-L. (1992). Synchronization, attractor fission, and attractor fusion in a globally coupled laser system. *Physical Review A*, **45**:5052.
- Ott, E. (1993-1997). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Ott, E. (1993-1997-2002). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2a. edição. nova edição, revista e ampliada.
- Ott, E., Grebogi, C., e Yorke, J. A. (1990). Controlling chaos. *Physical Review Letters*, **64**(11):1196–1199.
- Parthimos, D., Edwards, D. H., e Griffith, T. M. (2003). Shil'nikov homoclinic chaos is intimately related to type-III intermittency in isolated rabbit arteries: Role of nitric oxide. *Physical Review E*, **67**:051922.
- Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., Mar, D. J., e Heagy, J. F. (1997). Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, **7**(4):520–543.
- Platt, N., Spiegel, E. A., e Tresser, C. (1993). On-off intermittency - a mechanism for bursting. *Physical Review Letters*, **70**(3):279–282.
- Poincaré, H. (1899). *Les methodes nouvelles de la mécanique celeste*. 1-3. Gauthier-Villars, Paris, França.
- Pomeau, Y. e Manneville, P. (1980). Intermittent transitions to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, **74**:189.
- Price, T. J. e Mullin, T. (1991). An experimental observation of a new type of intermittency. *Physica*, **48D**:29–52.

- Qu, S.-X., Wu, S., e He, D.-R. (1998). Multiple devil's staircase and type-V intermittency. *Physical Review E*, **57**(1):402–411.
- Rogister, F., Locquet, A., Pieroux, D., Sciamanna, M., Deparis, O., Megret, P., e Blondel, M. (2001). Secure communication scheme using chaotic laser diodes subject to incoherent optical feedback and incoherent optical injection. *Optics Letters*, **26**:1486.
- Rollins, R. W. e Hunt, E. R. (1982). Exactly solvable model of a physical system exhibiting universal chaotic behavior. *Physical Review Letters*, **49**:1295.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., e Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, **76**(11):1804–1807.
- Rulkov, N. F., Suschik, M. M., Tsimring, L. S., e Abarbanel, H. D. I. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, **51**(2):980–994.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, **57**(5):197–198.
- Shanon, C. e Weaver, W. (1963). *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, EUA.
- Shobu, K., Ose, T., e Mori, H. (1984). Shapes of the power spectrum of intermittent turbulence near its onset point. *Progress of Theoretical Physics*, **71**(3):458–473.
- Sivaprakasam, S. e Shore, K. (1999). Signal masking for chaotic optical communication using external-cavity diode lasers. *Optics Letters*, **24**(17):1200–1202.
- Sornette, D. (1998). Discrete-scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, **297**:239–270.
- Strogatz, S. H. (1998). *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, EUA, 1a. edição.
- Sugawara, T., Tachikawa, M., Tsukamoto, T., e Shimizu, T. (1994). Observation of synchronization in laser chaos. *Physical Review Letters*, **72**:3502–3505.

- Tang, D. Y., Pujol, J., e Weiss, C. O. (1991). Type-III intermittency of a laser. *Physical Review A*, **44**(1):35–38.
- Tang, S. e Liu, J. M. (2001). Message encoding-decoding at 2.5Gbit/s through synchronization of chaotic pulsing semiconductor lasers. *Optics Letters*, **26**(23):1843–1845.
- Tenny, R., Tsimring, L. S., Larson, L., e Abarbanel, H. D. I. (2003). Using distributed nonlinear dynamics for public key encryption. *Physical Review Letters*, **90**(4):04793.
- Testa, J., Pérez, J., e Jeffries, C. (1982). Testa, Pérez, and Jeffries respond:. *Physical Review Letters*, **49**:1055.
- Touchette, H. e Lloyd, S. (2000). Information-theoretic limits of control. *Physical Review Letters*, **84**(6):1156–1159.
- van Buskirk, R. e Jeffries, C. (1985). Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, **31**(5):3332–3357.
- Viana, M. (2000). What’s new on the Lorenz strange attractors? *Math. Intelligencer*, **22**(3):6–19. Também disponível no *site* internet do autor: <http://w3.impa.br/~viana>.
- Voss, H. U. (2000). Anticipating chaotic synchronization. *Physical Review E*, **61**(5):5115–5119. Ver também errata: PRE **64**:039904 (2001).
- Wang, X.-J. (1989). Statistical physics of temporal intermittency. *Physical Review A*, **40**(11):6647–6661.
- Yorke, J. A., Grebogi, C., Ott, E., e Tedeschini-Lalli, L. (1985). Scaling behavior of windows in dissipative dynamical systems. *Physical Review Letters*, **54**(11):1095–1098.