

# Capítulo 3

## Intermitência Tipo III

### 3.1 Forma Normal

A intermitência classificada por Pomeau e Manneville como tipo III pode ser associada a um mapa discreto da forma

$$x_{n+1} = -(1 + \epsilon')x_n + \alpha'x_n^2 + \eta'x_n^3, \quad (3.1)$$

onde o parâmetro  $\eta'$  deve ser negativo para evitar a formação de outros pontos fixos ou estabilização em período dobrado. A figura 1.7 mostra um gráfico desta lei de evolução e algumas iterações de uma trajetória.

Podemos construir um mapa com esta forma introduzindo um processo de relaminarização tipo *modulo* 1. Mas, como existe um possível escape por valores negativos de  $x$ , optamos por construir o mapa abaixo

$$x_{n+1} = \begin{cases} g(x_n), & \text{para } |g(x_n)| < 1; \\ g(x_n) \bmod 1, & \text{para } g(x_n) \geq 1; \\ -[-g(x_n) \bmod 1], & \text{para } g(x_n) \leq -1, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $g(x_n) = -(1 + \epsilon')x_n + \alpha'x_n^2 + \eta'x_n^3$ .

Um diagrama deste mapa com  $\alpha' = 1$ ,  $\eta' = -1,5$  e  $\epsilon' = 0,05$  é mostrado na figura 3.1. É conveniente estudar também o mapa para a segunda iteração,

$$x_{n+2} = (1 + \epsilon)x_n + \eta x_n^3 + \mathcal{O}(x_n^4), \quad (3.3)$$

com  $\epsilon = 2\epsilon'$  e  $\eta = -2[\eta' + (\alpha')^2]$ , proposto por Manneville. Estabilização e formação de outros pontos fixos não ocorre para  $\eta > 0$ , ou seja,  $(\alpha')^2 < -\eta'$ . A vantagem é que o termo quadrático desaparece. As contribuições para o crescimento de  $x$  oriundas de termos não-lineares pares são canceladas pelas iterações negativas. Apesar disso o mapa com um termo par é qualitativamente diferente do mapa ímpar, pois há uma assimetria entre as iterações

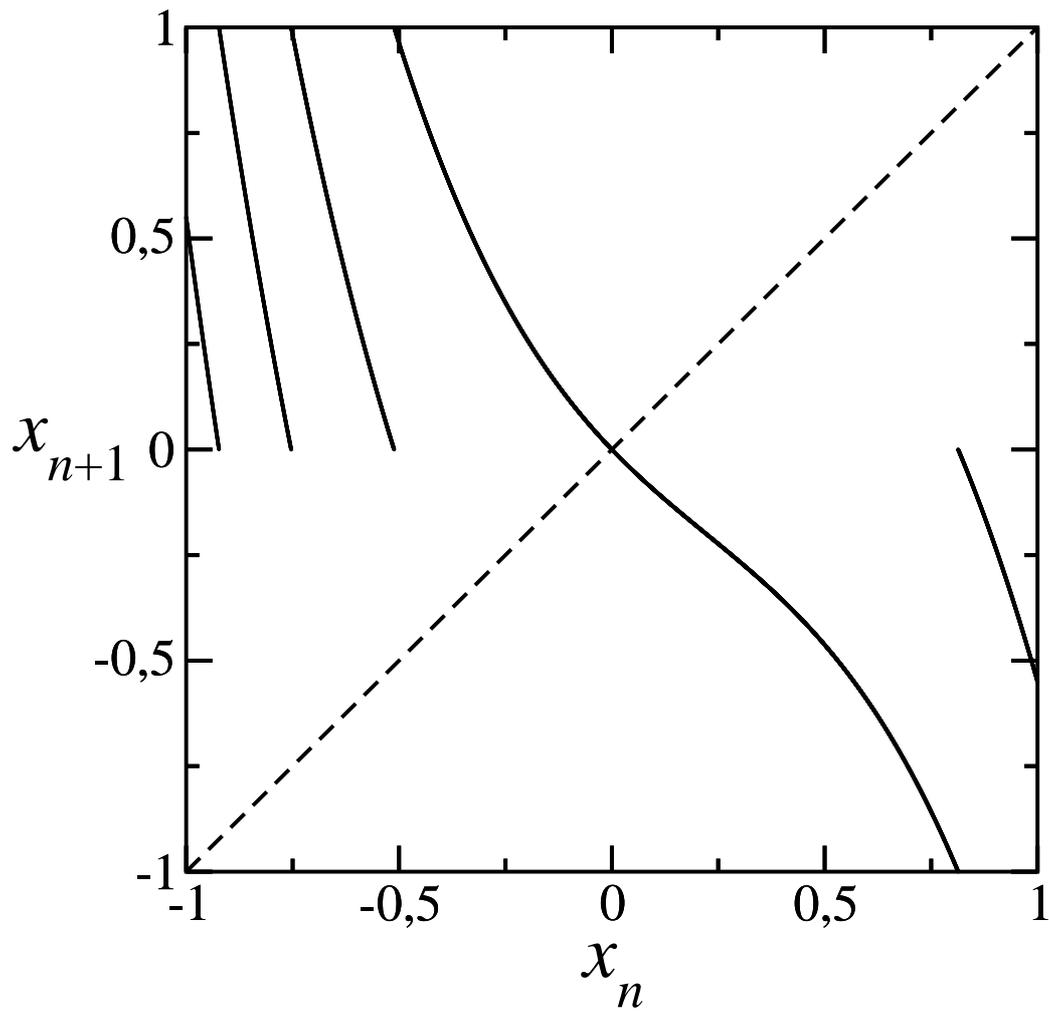


Figura 3.1: Mapa associado à intermitência tipo III. Usamos a equação 3.2, com  $\alpha' = 1$ ,  $\eta' = -1,5$  e  $\epsilon' = 0,05$ .

negativas e positivas. Esta assimetria faz com que a média de  $x$  seja diferente de zero.

Pomeau e Manneville (Manneville, 1990) usaram esta forma normal para construir um mapa usando a reinjeção com *modulo* 1. Eles encontraram a densidade de probabilidade de visitação do atrator caótico (Manneville, 1990). O comportamento crítico de  $\bar{l}$  fica do tipo  $\epsilon^{-1}$

Ao se fazer a expansão de um mapa arbitrário em torno de um ponto fixo (aqui o ponto fixo foi transladado para origem) é possível também que os termos mais significativos sejam de ordem superior. Podemos ter uma forma normal do tipo

$$x_{n+1} = -(1 + \epsilon)x_n - x_n^z, \quad (3.4)$$

onde o expoente  $z$  é um inteiro ímpar. Um mapa com esta forma satisfaz uma dinâmica similar à proposta inicial de Pomeau e Manneville, mas com correções quantitativas.

O mapa da segunda iteração, renormalizado, fica

$$x_{n+2} = (1 + \epsilon)x_n + x_n^z \text{ mod } 1, \quad (3.5)$$

e é conhecido como *mapa de Pomeau e Manneville*. Mostramos um diagrama deste na figura 3.2. Wang (1989) usou este mapa no formalismo termodinâmico da transição de fase para intermitência, com uma técnica alternativa para encontrar a densidade de probabilidade: o mapa é aproximado por um outro, linear-por-partes, para o qual existe uma partição de Markov simples.

Kodama *et al.* (1991) usaram grupo de renormalização com hipótese de reinjeção uniforme para encontrar uma previsão teórica para o comprimento médio das fases laminares, confirmada numericamente no mapa da segunda iteração com reinjeção *modulo* 1. Eles encontraram

$$\bar{l} \propto \epsilon^{-(z-2)/(z-1)}, \text{ para } z > 2, \quad (3.6)$$

e  $\bar{l} \propto |\ln \epsilon|$  para  $z = 2$ . O caso  $z = 3$  dá expoente  $-1/2$ , diferente do  $-1$  previsto inicialmente.

Diversos sistemas exibem a intermitência do tipo III: o laser de Lorenz-Haken (Haken, 1975; Tang *et al.*, 1991), ondas de spin (de Aguiar, 1989), o oscilador não-linear com diodo (Fukushima e Yamada, 1988; Ono *et al.*, 1995), o sistema de Rayleigh-Bénard (Dubois *et al.*, 1983), e talvez, devido a relação entre esta e o caos homoclínico de Shilnikov (Parthimos *et al.*, 2003), também o laser de CO<sub>2</sub> com absorvedor saturável.

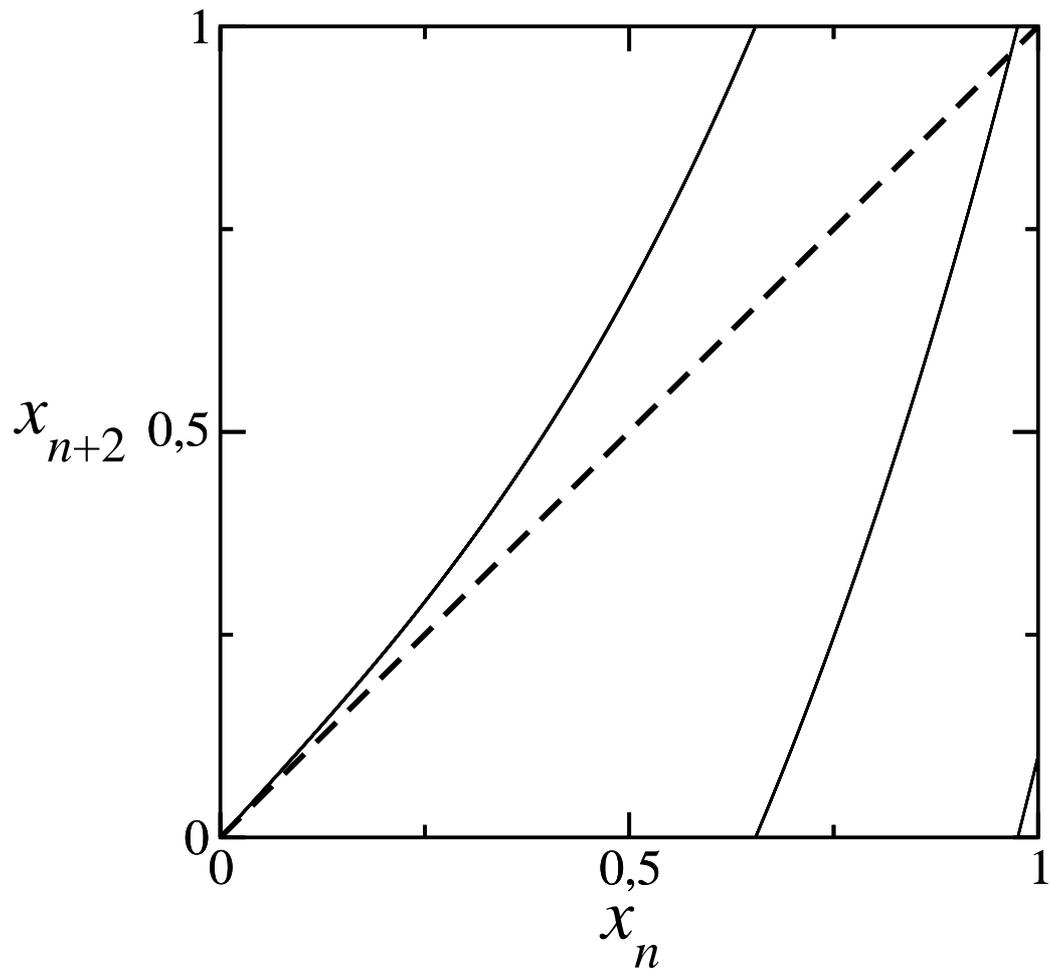


Figura 3.2: Mapa associado à segunda iteração da intermitência tipo III. Usamos a equação 3.5 com  $z = 3$ .

### 3.2 Média da Variável Dinâmica

Conforme discutimos na seção anterior, a média do mapa dado pela equação 3.2 é nula para  $\alpha' = 0$ . A figura 3.3 mostra três cálculos da média feitos com este mapa para  $\alpha'$  maior, menor e igual a zero, respectivamente. Todos com  $2\eta' = -(\alpha')^2 - 1/2$ , para satisfazer a condição  $\eta = 1$  no mapa da segunda iteração. A figura 3.4 mostra que o expoente crítico da média não é afetado

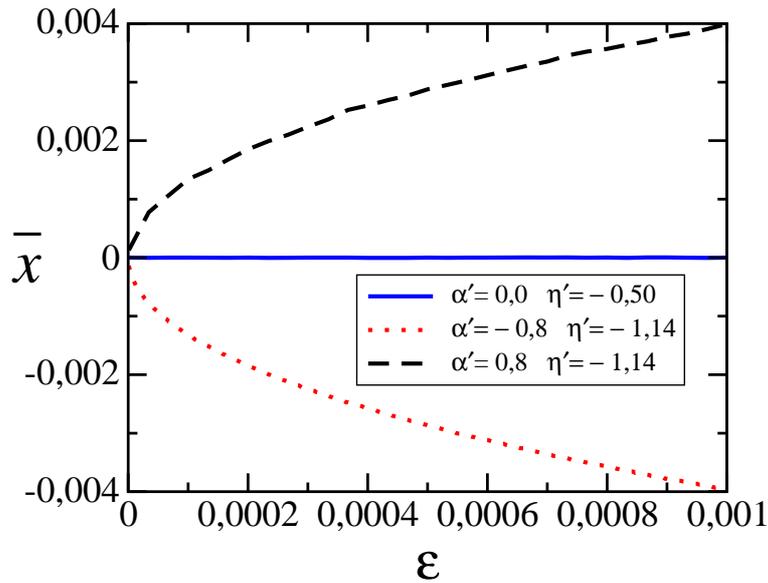


Figura 3.3: Média do mapa da primeira iteração da intermitência tipo III. Usamos a equação 3.2 e três valores de  $\alpha'$

pelo valor de  $\alpha'$ .

Nós usamos a densidade de probabilidade de visitação calculada a partir da equação de Frobenius-Peron (eq. 1.20) para o mapa da segunda iteração com  $z$  arbitrário (eq. 3.5) e encontramos uma expressão analítica para o valor da média da variável dinâmica,  $\langle x_n \rangle$ , com a hipótese de que a probabilidade de reinjeção seja uniforme (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2002):

$$\langle x \rangle = \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\epsilon + x^{(z-1)}} \right]^{-1} \int_0^1 \frac{x dx}{\epsilon + x^{(z-1)}}. \quad (3.7)$$

Esta expressão pode ser integrada no limite de  $\epsilon \rightarrow 0$ , resultando

$$\langle x \rangle \propto \epsilon^{\frac{1}{z-1}}, \text{ para } z > 3, \quad (3.8)$$

$$\langle x \rangle \cong -\frac{1}{\pi} \epsilon^{1/2} \ln \epsilon, \text{ para } z = 3. \quad (3.9)$$

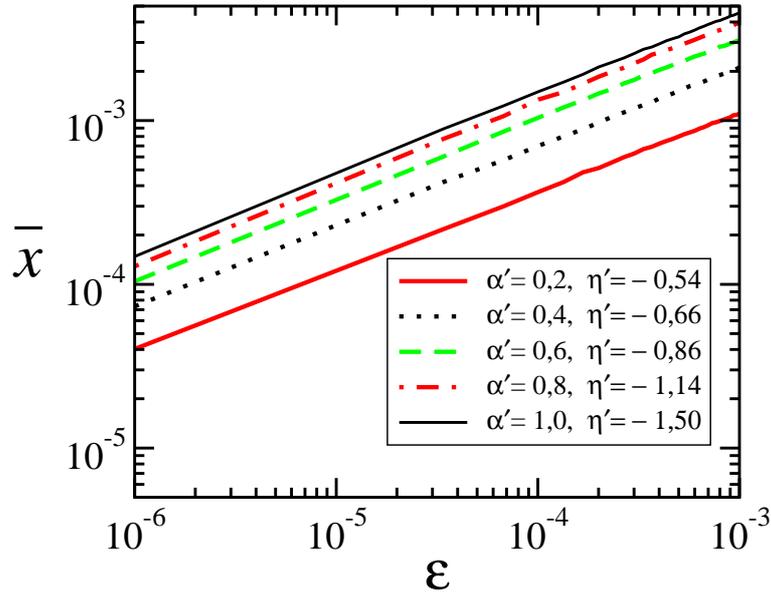


Figura 3.4: Média do mapa da primeira iteração da intermitência tipo III com diferentes valores de  $\alpha'$

A figura 3.5 mostra dois comportamentos críticos com diferentes valores de  $z$  no mapa da segunda iteração (eq. 3.5). Os pontos e quadrados são médias temporais, calculadas numericamente por iteração do mapa, com  $z = 3$  e  $z = 7$ , respectivamente. As curvas contínuas são: para  $z = 3$ , a equação 3.9, e para  $z = 7$ , um ajuste usando mínimos quadrados do coeficiente da equação 3.8.

### 3.3 Efeito da Reinjeção

O efeito da reinjeção na intermitência do tipo III com  $z = 3$  foi estudado por Kim *et al.* (1998). Se a distribuição de probabilidade é uniforme mas limitada a ocorrer acima de certo valor  $\Delta$ , o comportamento crítico para  $\bar{l}$  é

$$\langle l \rangle = \frac{\tan^{-1}\left(c\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\right) - \tan^{-1}\left(\Delta\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\right)}{\sqrt{\epsilon}(c - \Delta)}, \quad (3.10)$$

onde  $c$  é o comprimento definido para o canal. No regime de  $\Delta^2 \ll \epsilon$ , esta expressão vai para a lei de potência  $-1/2$ , como previsto por Kodama *et al.* (1991):

$$\langle l \rangle \propto \epsilon^{-1/2}, \text{ para } \Delta^2 \ll \epsilon, \quad (3.11)$$

e vai para um expoente 0 (comportamento constante) quando  $\Delta^2 \gg \epsilon$ .

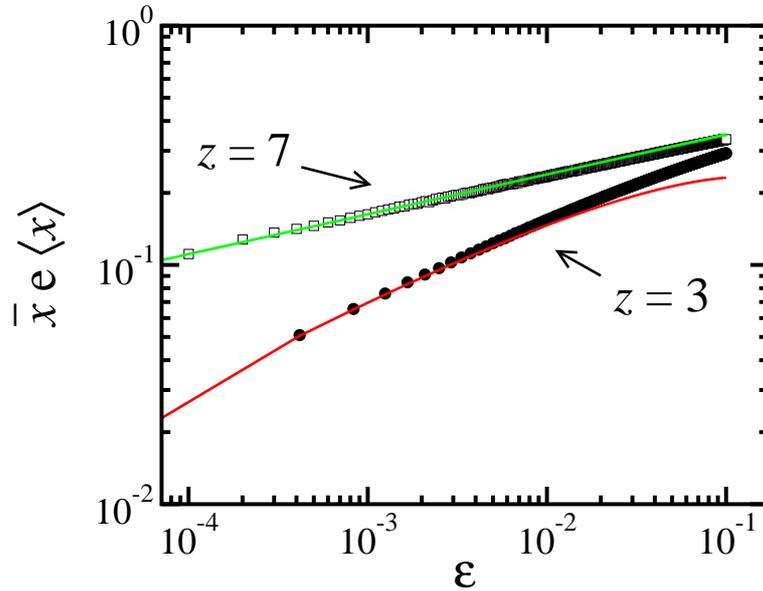


Figura 3.5: Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com diferentes valores de  $z$ .

Para distribuições não-uniformes, diversos comportamentos críticos podem ser obtidos. Kim *et al.* (1998) relatam  $\langle l \rangle \propto \epsilon^{-\beta}$  com  $\beta \in [1/2 : 1]$ .

Usamos o mapa

$$x_{n+1} = \begin{cases} g(x_n), & \text{para } g(x_n) \leq 1; \\ (1 - \Delta) [g(x_n) \bmod 1] + \Delta, & \text{para } g(x_n) > 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

com  $g(x_n) = (1 + \epsilon)x_n + x_n^z$ , para calcular a média de  $x$ . Este tem uma reinjeção aproximadamente uniforme acima de  $\Delta$ .

Usando a equação de Frobenius-Peron determinamos uma expressão analítica aproximada para a média:

$$\langle x \rangle = \left[ \int_{\Delta}^1 \frac{dx}{\epsilon + x^{(z-1)}} \right]^{-1} \int_{\Delta}^1 \frac{x dx}{\epsilon + x^{(z-1)}}. \quad (3.13)$$

No limite de  $\Delta^{z-1} \ll \epsilon$  vale o comportamento da reinjeção uniforme. Para  $\Delta^{z-1} \gtrsim \epsilon$  obtivemos

$$\langle x \rangle \approx -\Delta \ln \Delta, \quad \text{para } z = 3, \quad (3.14)$$

$$\langle x \rangle \approx \frac{3}{2} \Delta, \quad \text{para } z > 3. \quad (3.15)$$

As figuras 3.6 e 3.7 mostram diversos cálculos numéricos com diferentes valores de  $\Delta$  e  $z = 3$  e  $z = 5$ , respectivamente. Foram usadas até  $10^9$

iterações em cada um dos 100 valores de parâmetro em cada curva. Apesar disso a convergência da média é difícil para valores de  $\epsilon$  e  $\Delta$  muito reduzidos. As flutuações são causadas por efeito de tempo finito. Ao contrário da intermitência tipo I, não há evidência de oscilações significativas nos observáveis da intermitência tipo III. As curvas cheias são somas das duas soluções assintóticas:

$$-\Delta \ln \Delta - \frac{\epsilon^{1/2}}{\pi} \ln \epsilon, \text{ para } z = 3 \quad (3.16)$$

é a soma das equações 3.14 e 3.9,

$$\frac{3}{2}\Delta + \frac{3}{4}\epsilon^{1/4}, \text{ para } z = 5 \quad (3.17)$$

é a soma de 3.15 e 3.8 usando  $z = 5$ .

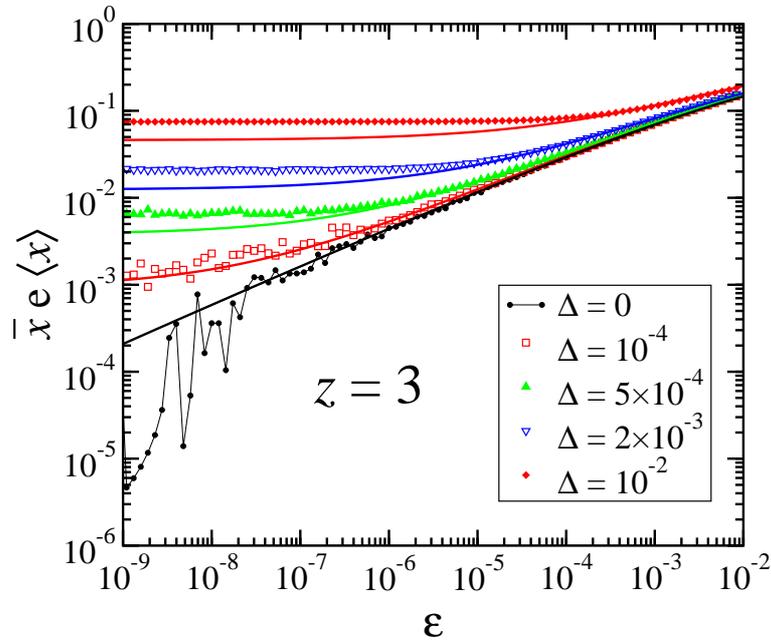


Figura 3.6: Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com reinjeção acima de  $\Delta$ .

A soma das expressões assintóticas descreve bem o comportamento crítico em ambos os regimes. Observamos um desvio sistemático do valor de saturação da média por um fator de 1/2 entre a expressão teórica e o cálculo numérico. Ainda não conseguimos explicar ou corrigir este desvio.

Outro efeito da limitação do intervalo de reinjeção é o adiamento da formação da órbita estável. O ponto fixo estável em  $x = 0$  só é acessível à dinâmica espontânea do sistema se a altura mínima da reinjeção,  $\Delta$ , levar a

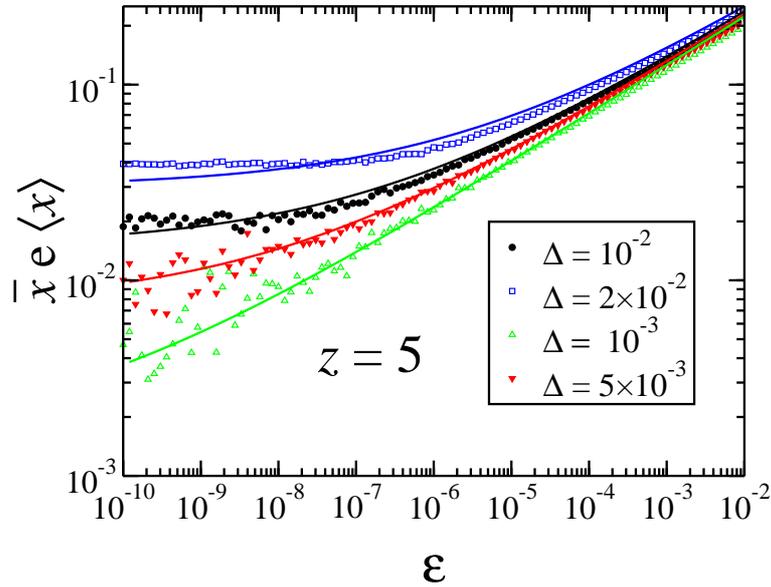


Figura 3.7: Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com reinjeção acima de  $\Delta$ .

um segmento do mapa com valor absoluto de derivada menor que um. Isto faz com que a órbita estável só seja acessada espontaneamente para  $\epsilon < 0$ . Este fenômeno dá origem a histerese na bifurcação.

O efeito do ruído no comportamento crítico para  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon < 0$  foi verificado experimentalmente na referência (Kye *et al.*, 2003). Basicamente, obteve-se as relações:

$$\bar{l} \propto \epsilon^{-1/2}, \text{ para } \epsilon > 0, \quad (3.18)$$

$$\bar{l} \propto \exp(|\epsilon|^2), \text{ para } \epsilon < 0. \quad (3.19)$$

Nós não estudamos detalhadamente o efeito do ruído na intermitência tipo III. Mas acreditamos que o efeito é similar àquele causado por uma reinjeção limitada a uma altura mínima  $\Delta_e$  com o valor efetivo desta igual à amplitude do ruído.