

2.7 Mapa Quasi-Periódico

Bergé *et al.* (1984) propuseram um mapa unidimensional inversível com bifurcação tangente, para estudar um protótipo de intermitência tipo I. A inversibilidade inibe a existência de caos. As soluções ou são periódicas ou quasi-periódicas. O mapa é formado por dois arcos de circunferência, um com raio r e centro em $(0, 1)$ e o outro com raio $1 - r$ e centro em $(1, 0)$. O mapa é dado pela equação

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 - \sqrt{r^2 - x_n^2}, & \text{para } x_n < r; \\ \sqrt{(1-r)^2 - (1-x_n)^2}, & \text{para } x_n \geq r, \end{cases} \quad (2.15)$$

e está desenhado na figura 2.20. Este mapa apresenta duas bifurcações tan-

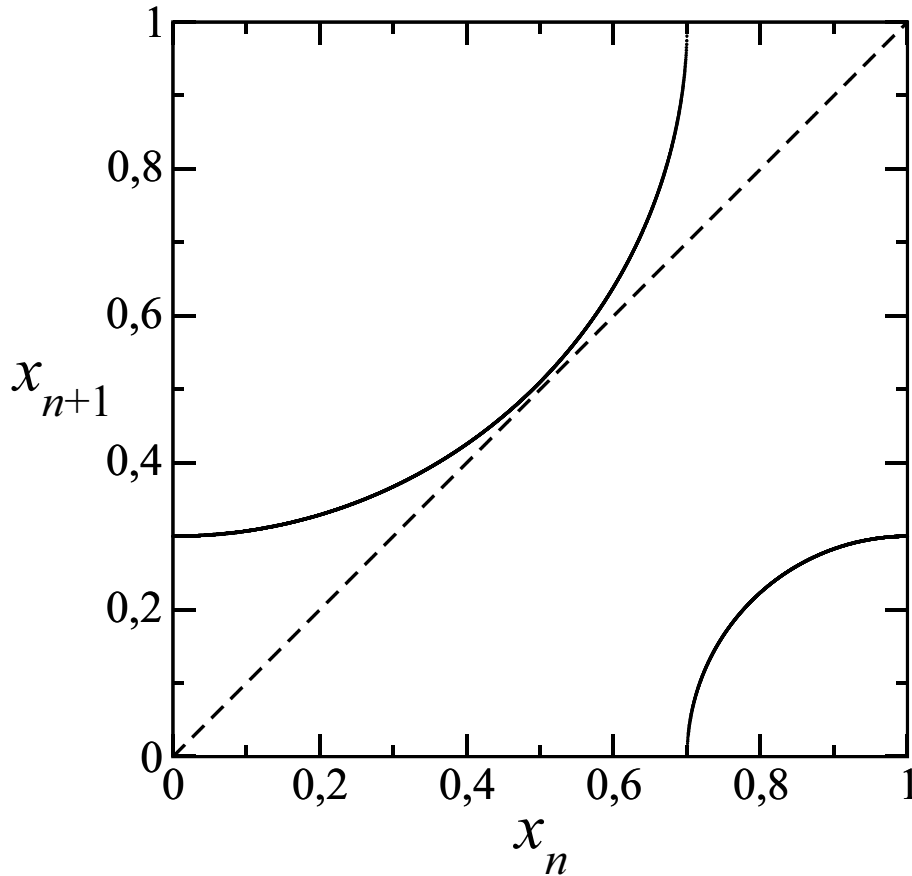


Figura 2.20: Mapa inversível com bifurcação tangente e sem caos. $r = 0,700$.

gentes para período 1, correspondendo aos valores de $r_{c-} = 1 - \sqrt{2}/2 \cong 0,292893218813$, quando o arco inferior tangencia a identidade por baixo; e

$r_c = \sqrt{2}/2 \cong 0,70710678118654752$, quando o arco de círculo superior tangencia a identidade por cima.

O diagrama de bifurcação deste mapa exhibe uma seqüência infinita de janelas periódicas separadas por intervalos de quasi-periodicidade. A simetria faz com que a média temporal das soluções quasi-periódicas seja $1/2$, ao passo que a média em uma janela periódica assume um valor distinto, que evolui com o parâmetro de controle. Neste sistema, as oscilações da média são naturalmente associadas ao surgimento de janelas periódicas separadas por regiões quasi-periódicas. O que também parece acontecer no mapa da forma normal para a intermitência tipo I.

O diagrama de bifurcação e médias mostrados na figura 2.21 foram calculados usando-se 10^5 iterações. Assim como a ampliação mostrada na figura 2.22, que mostra várias janelas periódicas de período maior que 1.

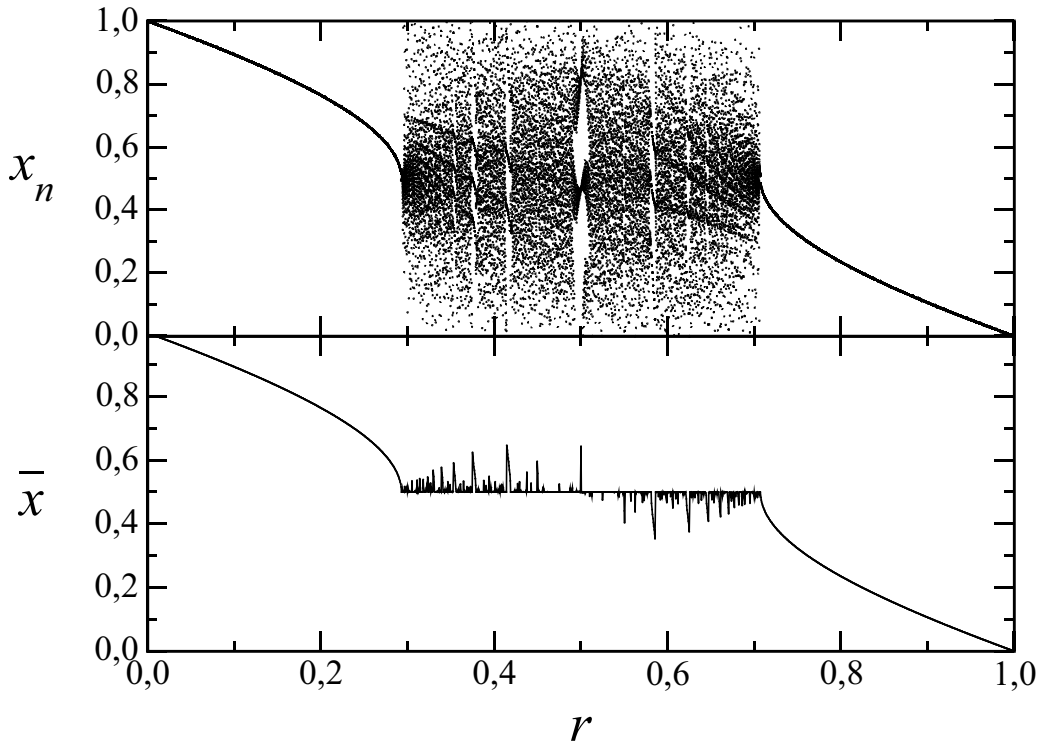


Figura 2.21: Diagrama de bifurcação e média do mapa quasi-periódico.

Na figura 2.23 a média foi colocada em escala logarítmica e o parâmetro ϵ foi definido como $r_c - r$ para observar a tangência do círculo superior. A envoltória das oscilações comporta-se como uma lei de potência com expoente $1/2$ por mais de 6 ordens de grandeza na escala horizontal (aqui reproduzimos apenas três ordens de grandeza). O período das oscilações muda com ϵ , e

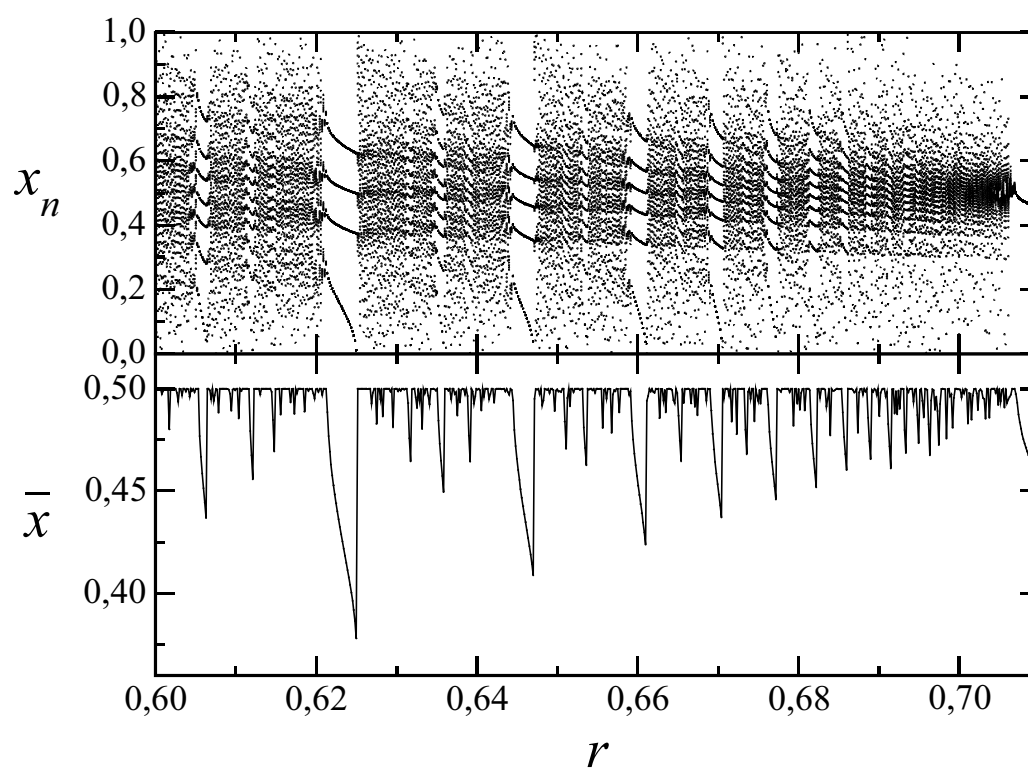


Figura 2.22: Diagrama de bifurcação e média do mapa quasi-periódico próximo à bifurcação tangente do círculo superior.

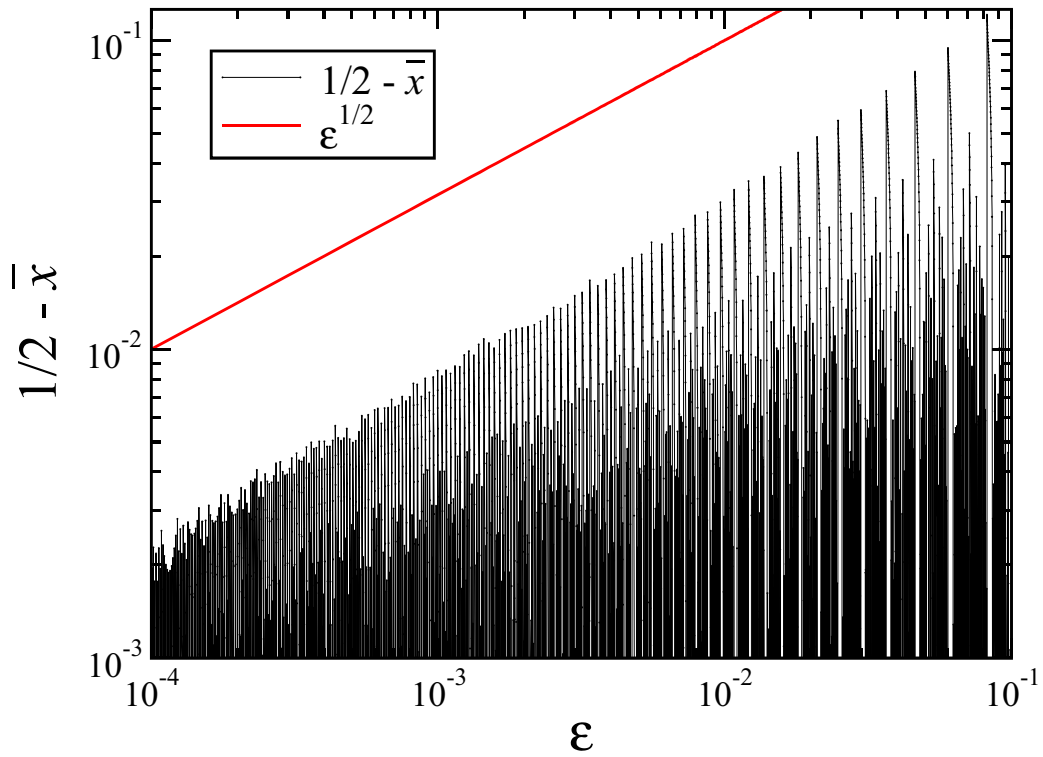


Figura 2.23: Média do mapa quasi-periódico próximo à bifurcação tangente do círculo superior em escala logarítmica. Usamos $\epsilon = \sqrt{2}/2 - r$. A linha tracejada é uma curva $\epsilon^{1/2}$ para comparação.

fica regularizado apenas se usarmos uma transformação de escala com $\epsilon^{-1/2}$, conforme vemos na figura 2.24.

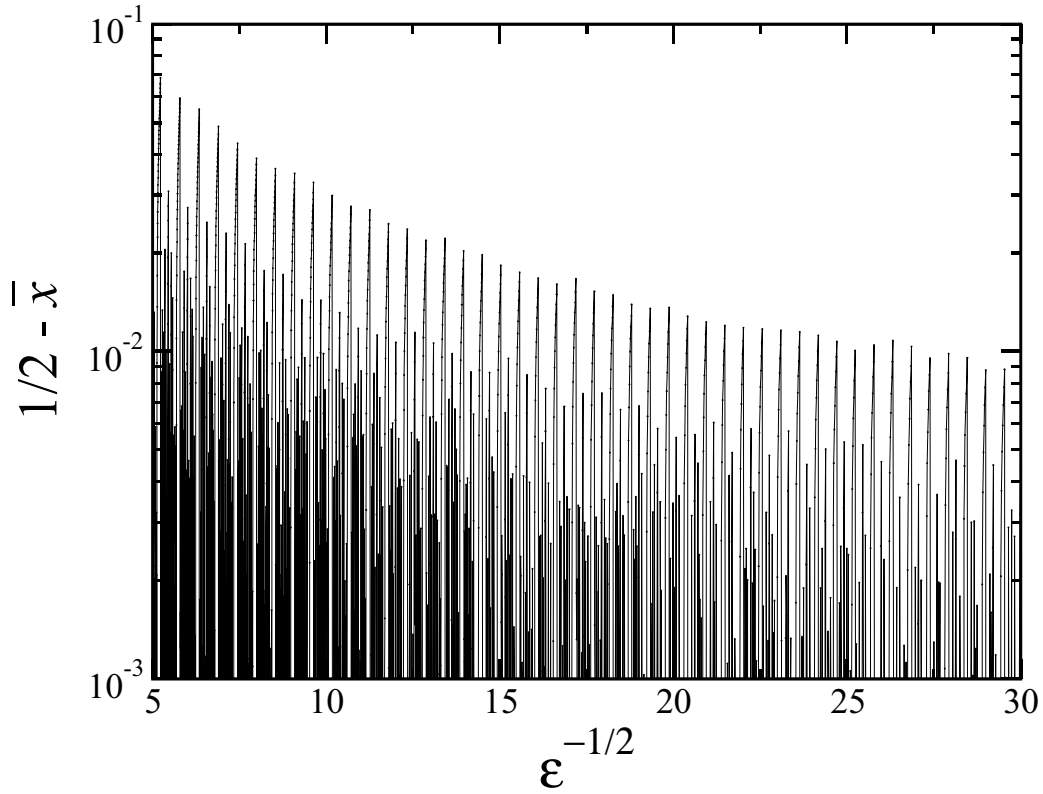


Figura 2.24: Média do mapa quasi-periódico próximo à bifurcação tangente do círculo superior. O eixo horizontal tem os valores de $\epsilon^{-1/2}$ para regularizar o período das oscilações na média. Usamos $\epsilon = \sqrt{2}/2 - r$.

2.8 Efeito do Ruído

Também estudamos o efeito de ruído nestes mapas. O ruído pode ser de duas classes: multiplicativo ou aditivo; e afetar ou os parâmetros ou as variáveis dinâmicas. Expressões para o efeito do ruído no comportamento crítico da intermitência já foram discutidas (Cho *et al.*, 2002). Mas não encontramos nada tratando do efeito do ruído sobre as oscilações que formam a estrutura fina da intermitência tipo I. Não nos preocupamos com os detalhes da estatística do ruído e estudamos apenas o ruído aditivo e dinâmico (ou seja, atuando sobre as variáveis dinâmicas do sistema, e não sobre os parâmetros).

A figura 2.25 mostra algumas variáveis estatísticas calculadas para o mapa de SOM, com ruído branco² e distribuição de probabilidade gaussiana de amplitude (dispersão) $D = 10^{-6}$.

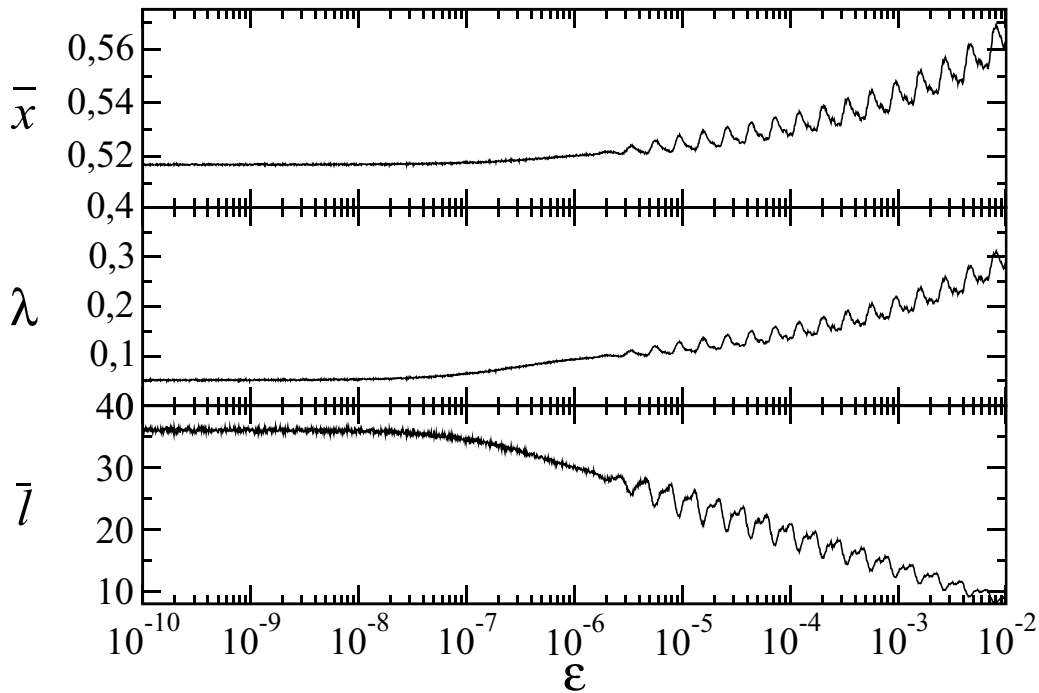


Figura 2.25: Média, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa SOM afetado por ruído.

A posteriori, podemos dizer que o efeito do ruído limita o comprimento

²Chama-se ruído branco às flutuações aleatórias cuja correlação temporal é nula, ou seja, $\xi(t)\xi(t') \approx \delta(t - t')$. O teorema de Wiener-Kinchine implica que o ruído branco oscila rapidamente, pois apresenta componentes de Fourier em todas as frequências, até infinito.

máximo, e, decorrentemente, o comprimento médio das fases laminares. Antes disso também destrói a auto-similaridade do atrator, transformando a invariância discreta de escala do conjunto fractal em uma invariância contínua característica do ruído branco. Este efeito só ocorre quando a amplitude do ruído é comparável com alguma dimensão determinante da dinâmica do sistema, como a largura do canal, por exemplo. Em todos os mapas aqui discutidos a largura do canal é proporcional a ϵ . A destruição das oscilações na figura 2.25 ocorreu para $\epsilon \lesssim D$.

2.9 Efeito da Reinjeção

Pomeau e Manneville usaram a hipótese de reinjeção aleatória com distribuição uniforme para calcular as estatísticas das intermitências. Mas em muitos sistemas importantes esta hipótese não é verificada. No mapa logístico, por exemplo, o comportamento crítico é do tipo $\ln(\epsilon)$, sem contar com a correção das estruturas oscilatórias, janelas periódicas finas e desvios polinomiais. O efeito da reinjeção foi estudado por Kwon *et al.* (1996).

Nós modificamos o mapa de So-Ose-Mori para controlar a distribuição de probabilidade de reinjeção e obtivemos a mesma dependência para frequência das oscilações. A figura 2.26 mostra os máximos e a média de um mapa como o de So-Ose-Mori no qual a reinjeção é aleatória, uniforme. O terceiro segmento de reta, no intervalo $[b:1]$ foi substituído pela função $random(0, 1)$, que retorna um número pseudo-aleatório gerado pelo computador. O período da sequência pseudo-aleatória gerado pela função $random$ do compilador de linguagem C do sistema operacional FreeBSD é da ordem de $2^{35} \cong 3 \times 10^{10}$.

Também ensaiamos fazer uma versão do mapa linear por partes na qual a reinjeção é feita com um segmento de reta abaixo da altura do canal, de modo que o mapa é inversível e não caótico. Mas, neste caso, a média é sempre $1/2$, pois não há janelas periódicas estáveis. Se a altura do segmento sobe, tornando o mapa não inversível, o caos e as oscilações reaparecem. Redefinindo o mapa para a forma

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n + b, & \text{para } x_n \leq c; \\ a^{-1}[x_n - (1 - b)] + 1, & \text{para } c < x_n \leq 1 - b; \\ -h(x_n - 1), & \text{para } x_n > 1 - b, \end{cases} \quad (2.16)$$

o parâmetro h permite controlar a altura da reinjeção. Se $h = 1/b$, temos o mapa SOM original; $h = 1$ dá um mapa inversível, com soluções quasi-periódicas e sem caos; e para h qualquer no intervalo $[1 : 1/b]$ temos caos. Desenhemos um diagrama deste na figura 2.27.

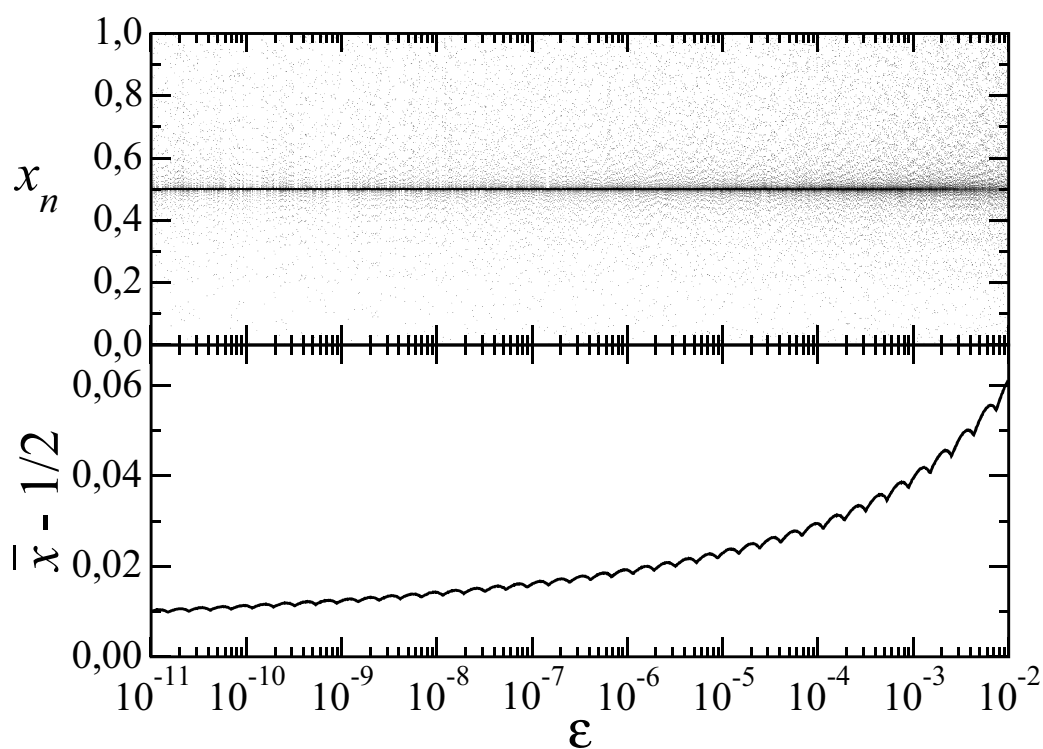


Figura 2.26: Diagrama de bifurcação e média de um mapa linear-por-partes com reinjeção aleatória. A frequência das oscilações permanece inalterada. Usamos $b = 0,2$.

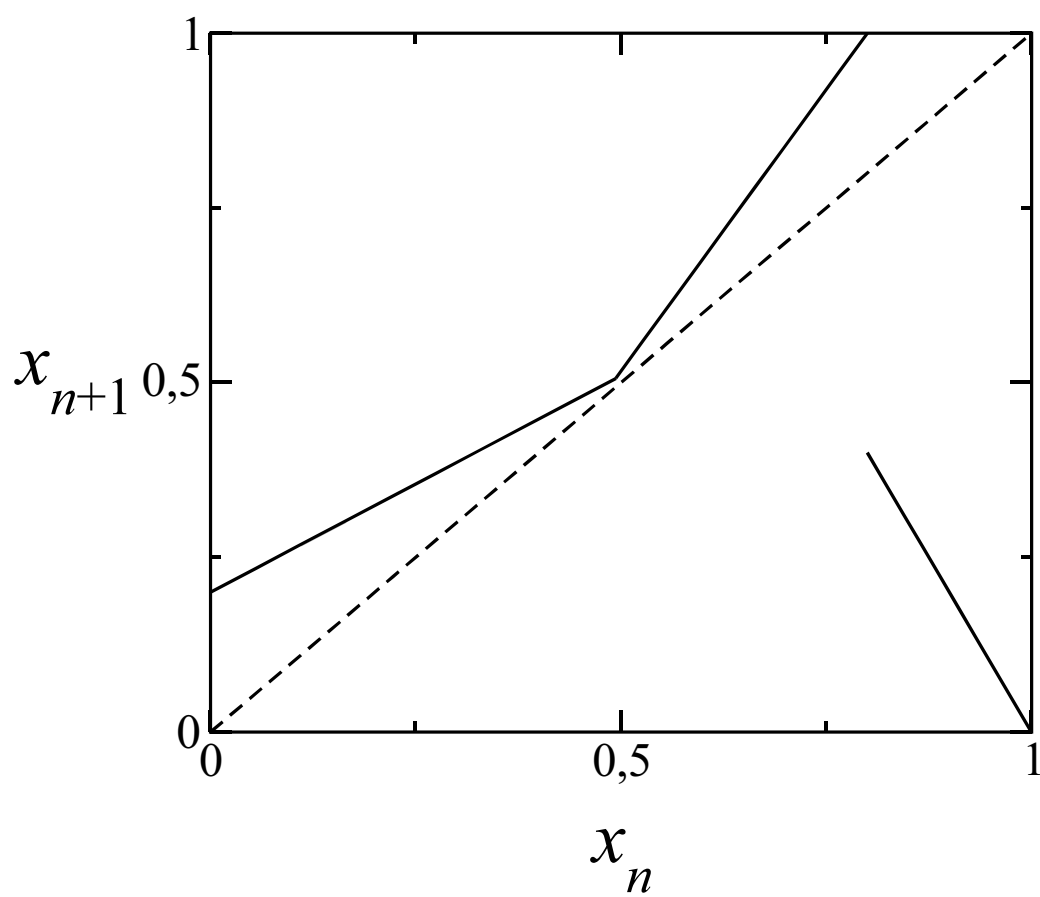


Figura 2.27: Outra generalização do mapa linear-por-partes de SOM. Usamos $b = 0,2$ e $h = 2$.

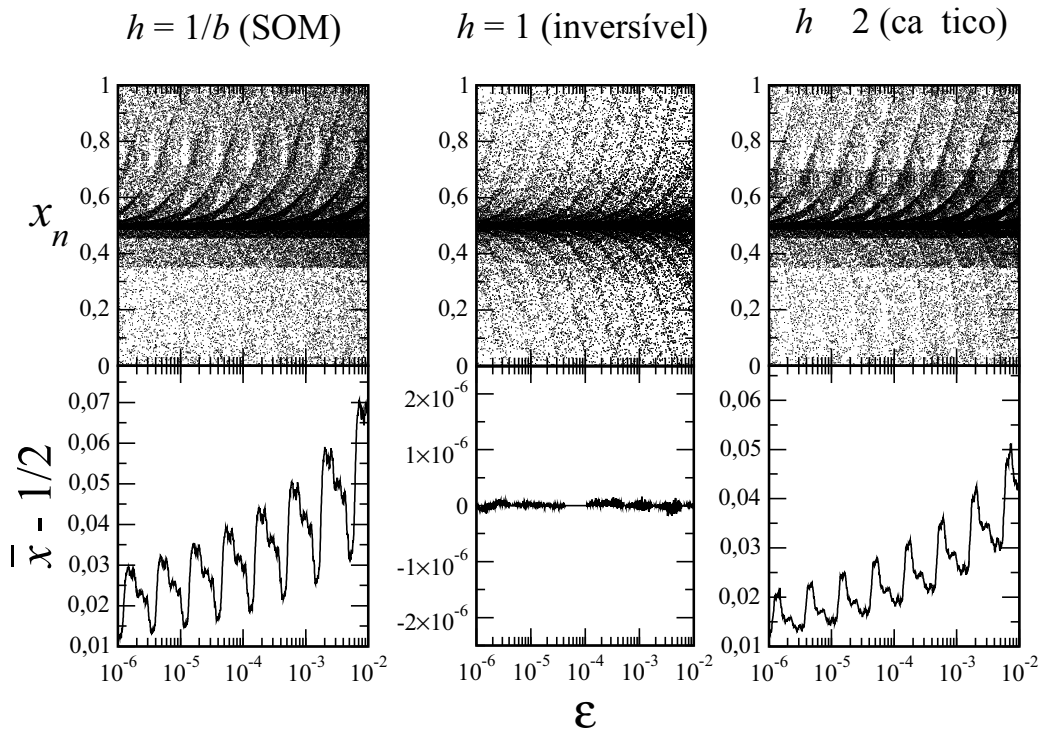


Figura 2.28: Diagrama de bifurcação e média de um mapa linear-por-partes com reinjeção controlada. A frequência das oscilações permanece inalterada. Usamos $b = 0,35$.

2.10 Médias em Fluxos

A média (e, possivelmente, todos os outros observáveis estatísticos) em um fluxo contínuo de equações diferenciais ordinárias também exhibe o comportamento crítico característico dos mapas nas bifurcações com intermitência. O argumento apresentado na seção 2.2 é válido para atratores contínuos. Outro argumento qualitativo para esperar por este fenômeno é que a evolução temporal contínua de uma variável pode ser rigorosamente aproximada por uma série temporal discreta. Em geral, as trajetórias caóticas contínuas exibem um quasi-período, um tempo característico de oscilação, relacionado com a parte imaginária do auto-valor associado a algum ponto fixo instável. Por isso é comum falarmos de “oscilações caóticas” como sinônimo de trajetórias em fluxos. Para que se possa realizar uma amostragem significativa em tempo discreto das variáveis contínuas deve-se satisfazer o critério de Nyquist, que diz que a menor taxa de amostragem para se detectar uma oscilação de frequência ω deve ser 2ω (ou entre 5ω a 8ω para recuperar as mais importantes componentes de Fourier). Mas mesmo quando a taxa de amostragem é de apenas um ponto por (quasi-)período a série discreta obtida contém (para um número suficiente de amostragens) a dinâmica do fluxo, de modo semelhante a um mapa por seção de Poincaré ou um mapa de Lorenz. A série discreta construída pela aquisição de valores da variável contínua em intervalos a uma taxa constante, comparável com o tempo característico de oscilação do sistema forma o chamado *mapa estroboscópico*.

Cada ponto da série temporal discreta dentro de um quasi-período da oscilação constitui um mapa estroboscópico com diferente fase relativa ao primeiro ponto. De maneira que cada ponto no primeiro quasi-período da oscilação é o primeiro ponto de uma família de mapas estroboscópicos que reconstitui a representação discreta. Portanto, se um mapa estroboscópico apresenta o comportamento crítico descrito na seção 2.2, é bem possível que a média realizada sobre a família dos mapas também tenha o mesmo comportamento. Os requisitos são: que a série discreta represente bem a variável contínua; que os mapas estroboscópicos tenham a média laminar diferente da média não-periódica; e que as médias das famílias de mapas com diferentes fases relativas ao quasi-período não sejam simétricas, de modo a cancelar os efeitos dos mapas estroboscópicos individuais. Estas condições são tão gerais que encontramos o comportamento crítico e estrutura fina na média dos fluxos de Rössler, Lorenz, Tachikawa (Laser de três níveis com absorvedor saturável) (Lefranc *et al.*, 1991) e oscilador não-linear com diodo.

2.10.1 Média no Fluxo de Rössler

O fluxo de Rössler (Rössler, 1976) foi apresentado como “o mais simples fluxo de equações diferenciais para o qual há oscilações caóticas”, pois apresentava o menor número de requisitos para tal conhecidos na época: dimensão 3 e um único termo não-linear de segunda ordem (produto entre duas variáveis dinâmicas). As equações podem ser escritas como

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (2.17)$$

e valores típicos de parâmetros são $a = 0,2$, $b = 0,2$ e $c = 5$. A figura 2.29 mostra um diagrama de bifurcação dos máximos da variável contínua $x(t)$ e a média desta como função do parâmetro c . Nota-se uma grande semelhança com o mapa logístico. A figura 2.30 é uma magnificação da

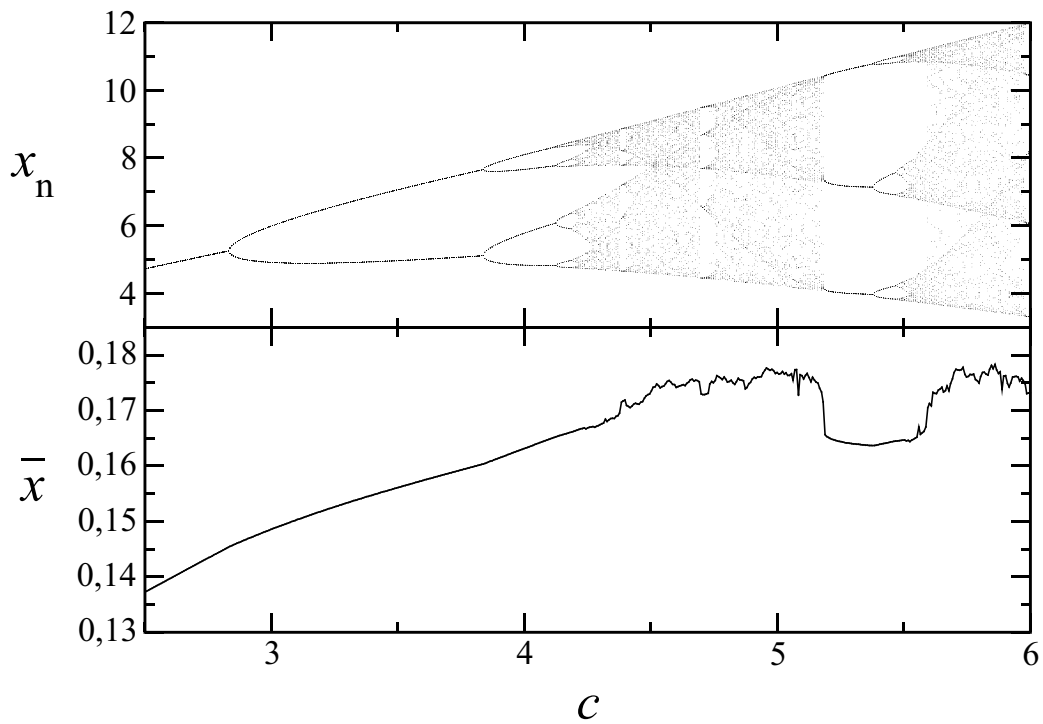


Figura 2.29: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $x(t)$ no sistema de Rössler.

vizinhança da maior janela de período 5. Tamanha é a semelhança entre o atrator de máximos do sistema de Rössler e o mapa logístico, que escolhemos este período para substituir uma figura da janela de período 5 do mapa logístico.

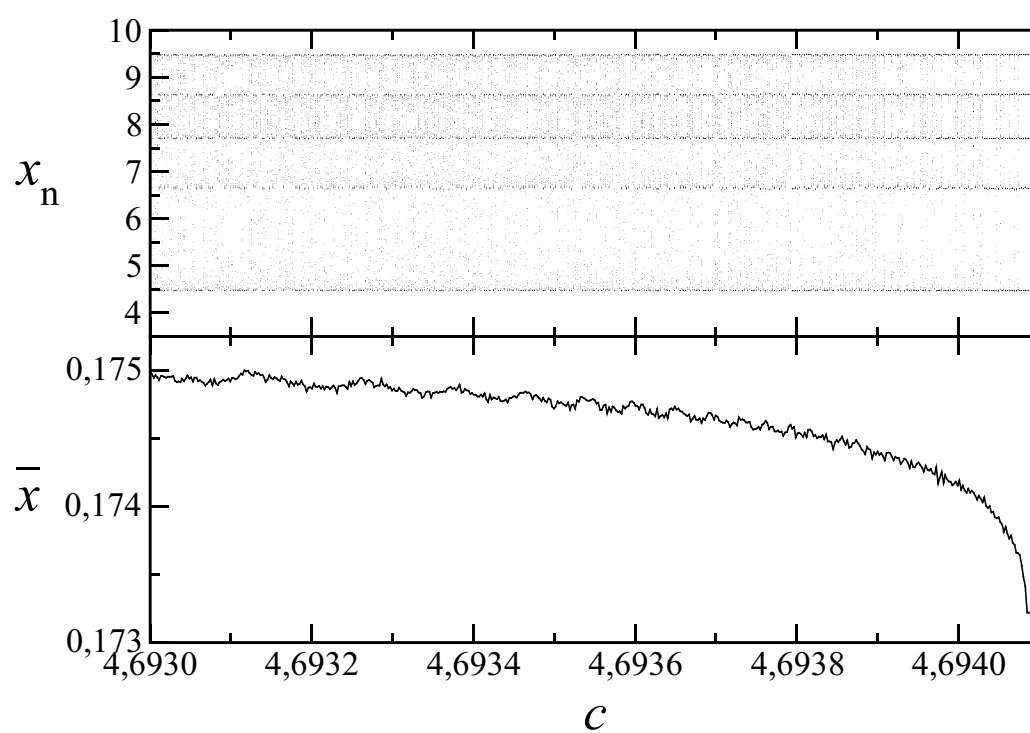


Figura 2.30: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $x(t)$ no sistema de Rössler próximo à janela de período 5.

2.10.2 Média no Fluxo de Lorenz

A figura 2.31 mostra diagramas de bifurcação para os máximos e a média da variável contínua $z(t)$ do fluxo de Lorenz (eq. 1.6) calculado com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r \in [166,050 : 166,250]$. O diagrama de bifurcação dos máximos indica que estamos próximos de uma janela de período 2. A média, reproduzida em escala logarítmica na figura 2.32, mostra o comportamento crítico com forma logarítmica e oscilações com periodicidade tipo lei de potência no parâmetro de controle $\epsilon = r_{crit(2)} + r$. Esta janela foi apresentada por Manneville (1990) com $r_{crit(2)} \cong 166,06$. Aperfeiçoamos o valor do parâmetro crítico crítico para $166,06149 \pm 0,00001$.

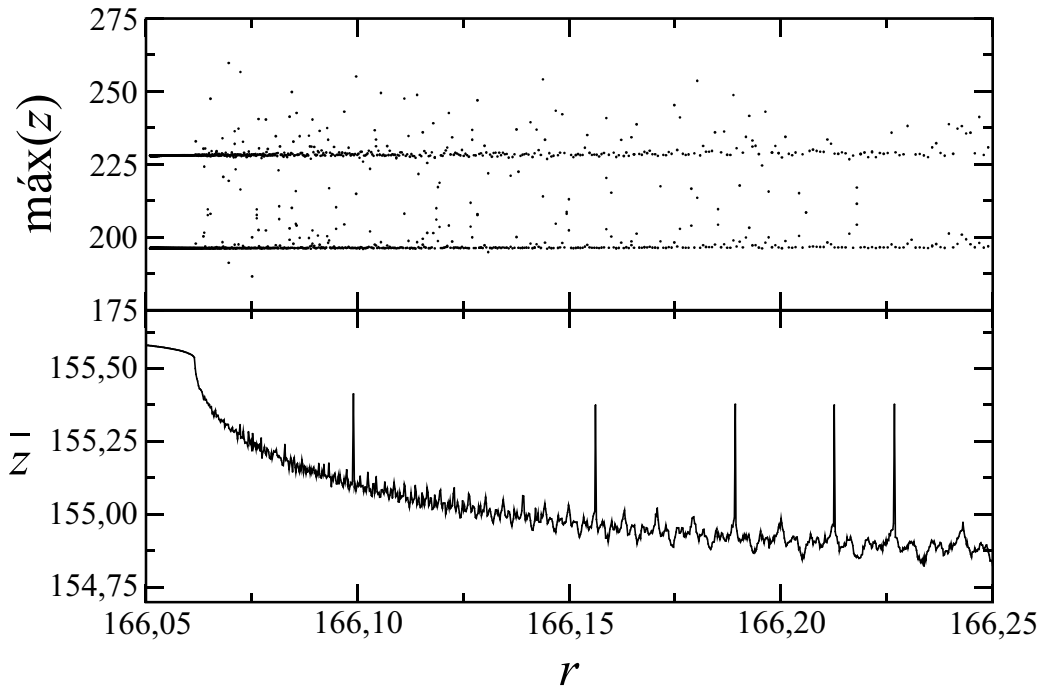


Figura 2.31: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $z(t)$ no sistema de Lorenz com intermitência tipo I.

Haken mostrou que o sistema de Lorenz é análogo (as equações são homomórficas) a um modelo para laser monomodo (Haken, 1975). Neste modelo, a variável z é proporcional à inversão de população nos níveis de energia do meio amplificador do laser e o parâmetro r é proporcional ao bombeio de energia externa que causa esta inversão. Decorrentemente, é intuitivo esperar que a média de z aumente com r , pois conseguimos armazenar mais energia no meio material aumentando o bombeio. Com efeito, apesar do valor da média diminuir localmente com o aumento de r após a bifurcação

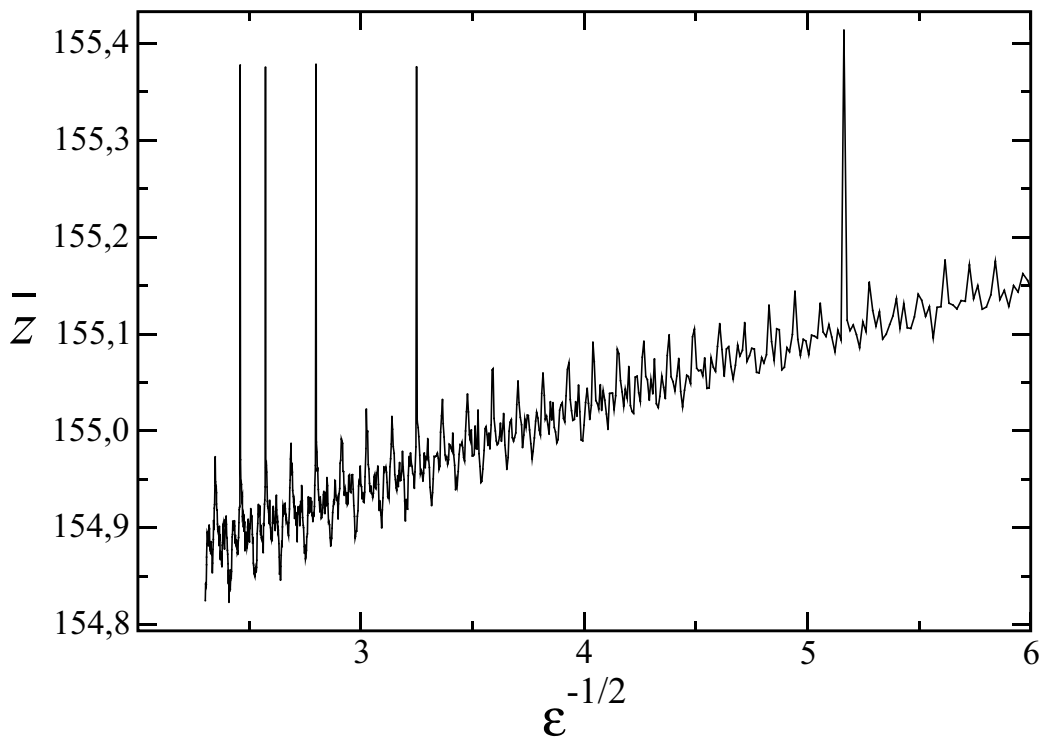


Figura 2.32: Média de $z(t)$ no sistema de Lorenz com intermitência tipo I. A frequência das oscilações fica regularizada fazendo-se uma transformação de escala por lei de potência com expoente $-1/2$ no eixo ϵ .

de periódico para caótico, existe uma tendência global da média crescer com r de modo aproximadamente linear (desprezando as estruturas causadas por bifurcações).

A média de variáveis dinâmicas no modelo de Lorenz-Haken já havia sido sugerida como uma assinatura das bifurcações neste sistema (Lawandy *et al.*, 1987), onde a bifurcação de periódico para pulsado (para parâmetros típicos os pulsos são caóticos) é conhecida como *segundo limiar* de excitação do laser. Entretanto, o aumento da capacidade e velocidade computacionais conseguido nas últimas décadas permite um estudo muito mais detalhado do que nas proposições iniciais.

2.10.3 Laser com Absorvedor Saturável

Fazendo uma analogia aproximada, a bifurcação estudada por Lawandy *et al.* (1987) corresponde a uma transição de fase de primeira ordem, na qual o aumento do bombeio faz a média mudar abruptamente de valor quando o atrator periódico perde sua estabilidade e um atrator caótico já existe para atrair as trajetórias. O mesmo fenômeno acontece com a potência média do laser de CO₂ com absorvedor saturável intracavidade (Lefranc *et al.*, 1991; de S. Cavalcante, 1999; de S. Cavalcante e Rios Leite, 2000a).

Fazendo-se uma descrição do meio amplificador como um sistema de três níveis de energia e do absorvedor como um sistema de dois níveis, ambos interagindo através do campo elétrico com intensidade I , as equações de taxa para o laser de CO₂ com absorvedor saturável (LAS) intracavidade são

$$\begin{cases} \dot{I} &= I (U - \bar{U} - 1) \\ \dot{U} &= \epsilon [W - U (1 + I)] \\ \dot{W} &= \epsilon (A + bU - W) \\ \dot{\bar{U}} &= \bar{\epsilon} [\bar{A} - \bar{U} (1 + aI)] . \end{cases} \quad (2.18)$$

Onde U é a inversão de população do meio amplificador, $\bar{U}$ não é a média temporal de U , mas a inversão de população do meio absorvedor, na notação usada nas referências (Lefranc *et al.*, 1991; de S. Cavalcante, 1999), W é a depleção da população do estado fundamental do amplificador, A é a taxa de bombeio, $\bar{A}$ é a taxa de bombeio térmico no absorvedor, ϵ e $\bar{\epsilon}$ são as taxas de relaxação dos meios amplificador e absorvedor, respectivamente (Lefranc *et al.*, 1991; de S. Cavalcante, 1999).

A figura 2.33 mostra um diagrama de bifurcação e média para a intensidade do laser de CO₂ com os mesmos parâmetros de (Lefranc *et al.*, 1991). Diferentemente do mapa logístico, a seqüência de grandes janelas periódicas segue um comportamento tipo adição de período (cada janela

tem o período uma unidade maior que a anterior), característico de sistemas dominados por uma bifurcação de *tangência homoclínica*. Conforme discutido nesta referência, a tangência homoclínica esperada no final da sequência de bifurcações foi substituída por uma bifurcação de Hopf invertida. Apesar desta diferença, dentro de cada janela periódica pode ocorrer uma cascata de Feigenbaum, apresentando toda a universalidade do mapa logístico. Para a potência do laser (média da intensidade em intervalos longos de tempo), observa-se a subida aproximadamente linear com o parâmetro de bombeio A .

A figura 2.34 mostra um outro cálculo feito em um intervalo menor do parâmetro A , próximo à bifurcação tangente que leva a órbita de período 3. O valor da distância até o ponto crítico ainda é grande o suficiente para vermos grandes deformações no comportamento crítico, inclusive a tendência linear da média crescer com o bombeio. Apesar disso as oscilações já são claramente distinguíveis. A figura 2.35 mostra uma região ainda menor. Nela a proximidade da bifurcação já é suficiente para validar a lei de potência $\times$ logaritmo, prevista para mapas quadráticos.

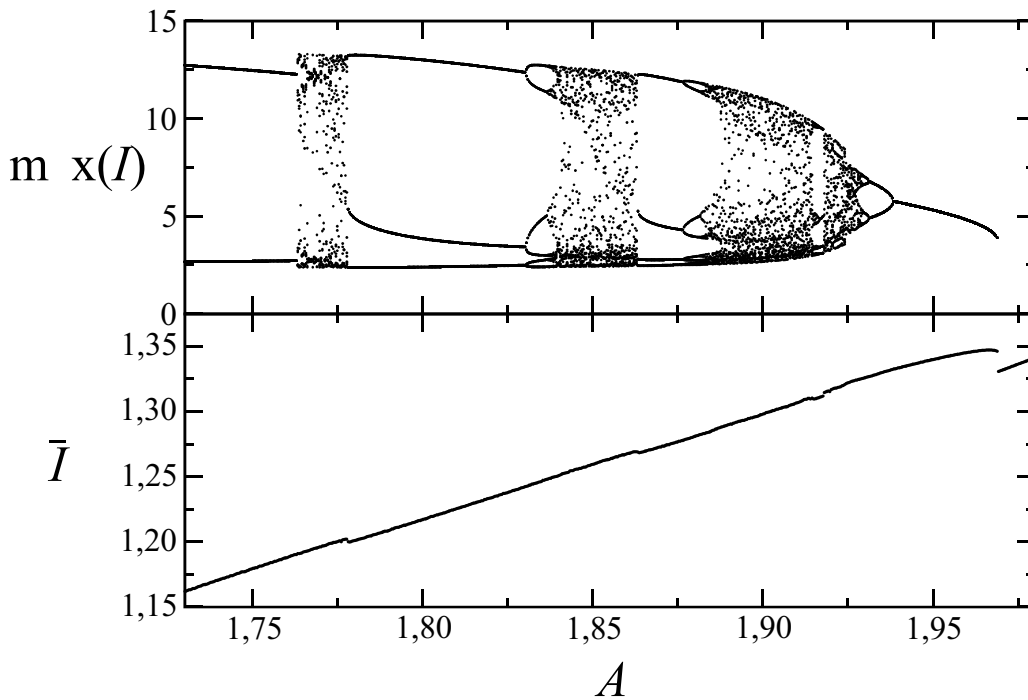


Figura 2.33: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $I(t)$ no modelo de 3-2 níveis para o laser de CO_2 com absorvedor saturável intracavidade (eq. 2.18).

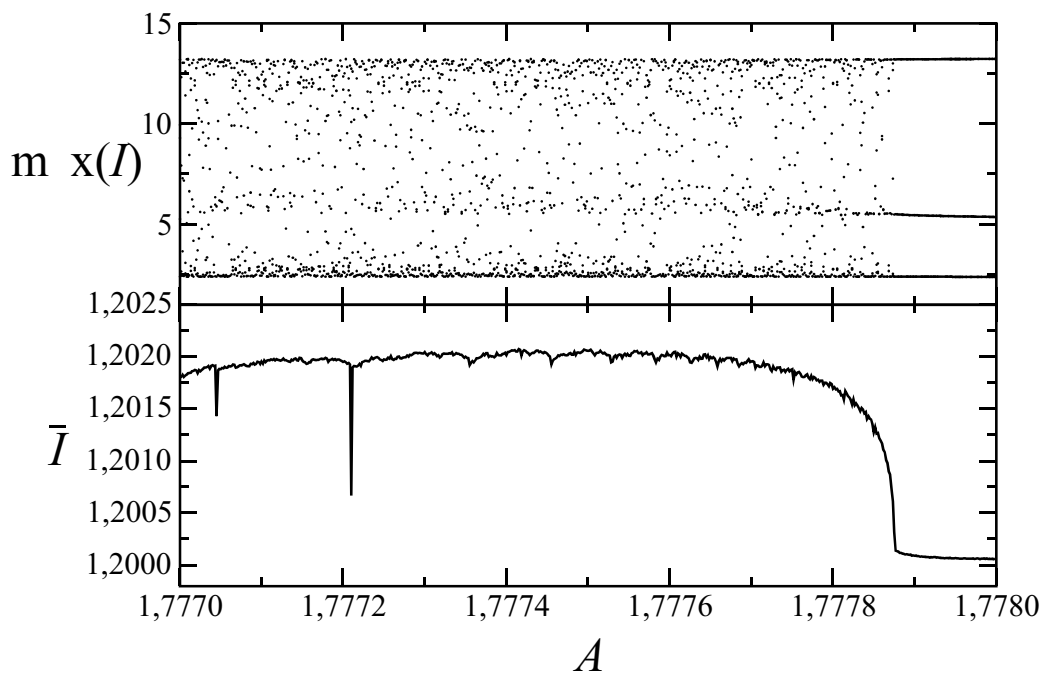


Figura 2.34: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $I(t)$ no modelo para o laser de CO_2 com absorvedor saturável intracavidade com intermitência do tipo I.

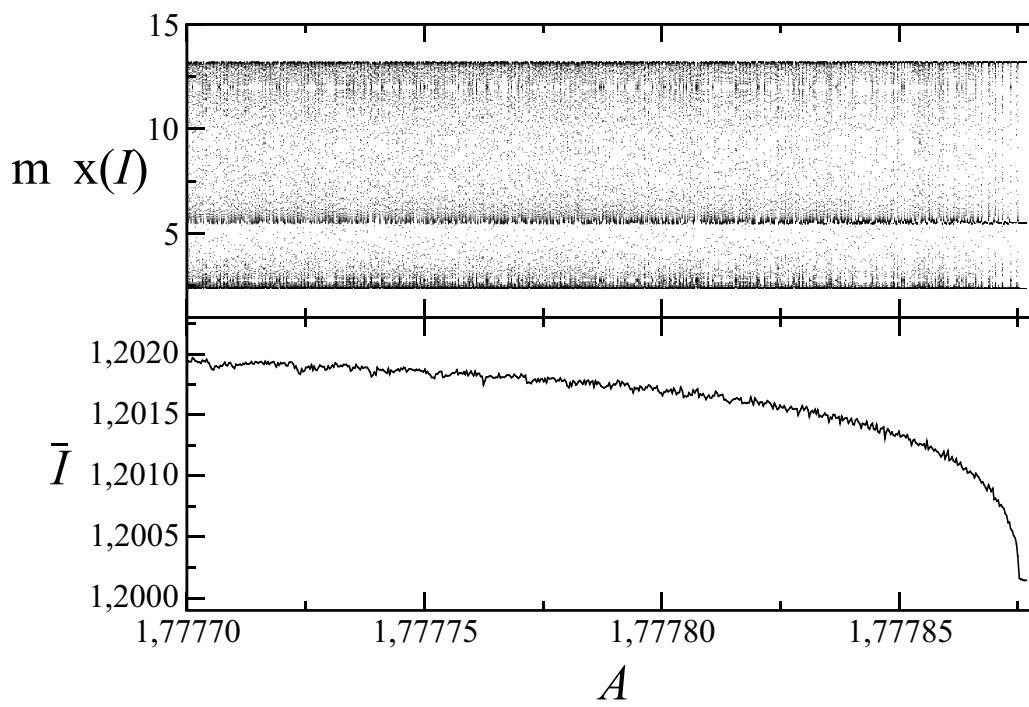


Figura 2.35: Diagrama de bifurcação de máximos e média de $I(t)$ no modelo para o laser de CO_2 com absorvedor saturável intracavidade com intermitência do tipo I.