

## 2.4 Mapa da Forma Normal

Podemos construir um mapa usando a forma normal da intermitência tipo I (eq. 2.1). O processo de reinjeção será introduzido artificialmente com uma generalização do resto da divisão por um número finito: definimos a função  $\text{modulo}(a, b) = a - b \text{ floor}(a/b)$ , onde  $\text{floor}(a/b)$  é o maior número inteiro menor ou igual a  $a/b$ . Esta função traz os números  $a$  que passam do limite  $b$  de volta para o intervalo  $[0 : b]$ . Foi necessário fazer uma translação do mapa da forma normal para que a bifurcação ocorra em  $x = 1$ , do contrário, a dinâmica da entrada no canal seria alterada pela exclusão dos valores negativos de  $x_n$ . Escolhemos o valor limite 2 para a reinjeção, de modo que o mapa fica

$$x_{n+1} = \text{modulo}(1 + \epsilon - x_n + x_n^2, 2), \quad (2.9)$$

o que também pode ser encontrado na literatura representado como

$$x_{n+1} = 1 + \epsilon - x_n + x_n^2 \text{ mod } 2.$$

O gráfico deste mapa está desenhado na figura 2.9 para  $\epsilon = 0,05$ . A figura 2.10 mostra o diagrama de bifurcação e a média da variável dinâmica para este mapa. Observa-se a existência de infinitas janelas periódicas cujo período vai crescendo aditivamente à medida em que  $\epsilon$  vai a zero. O valor do parâmetro crítico para o qual as janelas se formam vai se reduzindo a uma taxa que parece ser logarítmica. Uma análise mais detalhada, entretanto, mostra que a periodicidade é a mesma das oscilações da média, e, assim como no mapa logístico, a lei de escala é com expoente  $-1/2$ .

A figura 2.11 é análoga à figura 2.6, com as quantidades estatísticas calculadas para o mapa da forma normal. Observe que o expoente de Lyapunov cruza o zero infinitas vezes, refletindo a presença das janelas periódicas. No mapa logístico também há um número infinito de janelas periódicas entre quaisquer dois valores do parâmetro  $r$ , mas elas são muito finas para aparecer com uma amostragem finita em uma escala arbitrária, o que faz com que somente algumas sejam observadas. A lei de escala para o surgimento destas janelas pode ser vista na referência (Yorke *et al.*, 1985).

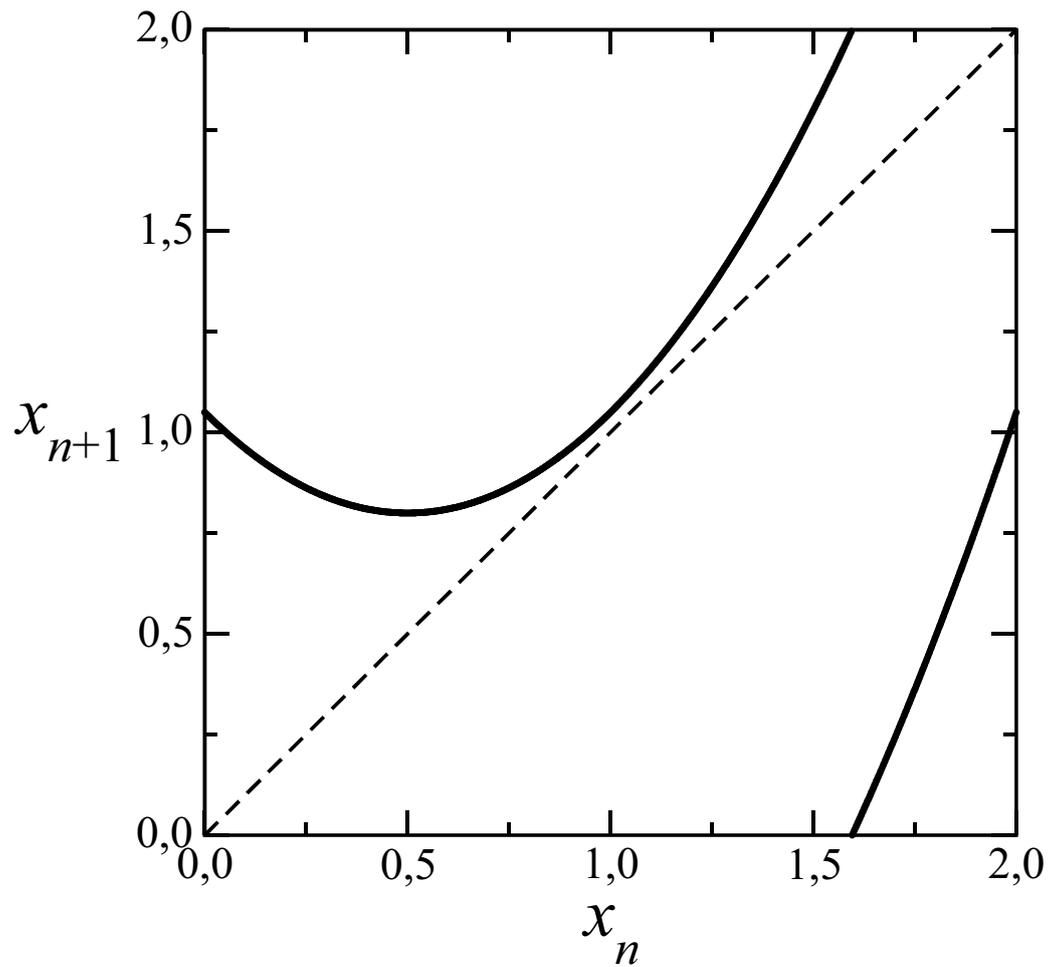


Figura 2.9: Mapa da forma normal para intermitência tipo I com reinjeção tipo *modulo* (eq. 2.9).

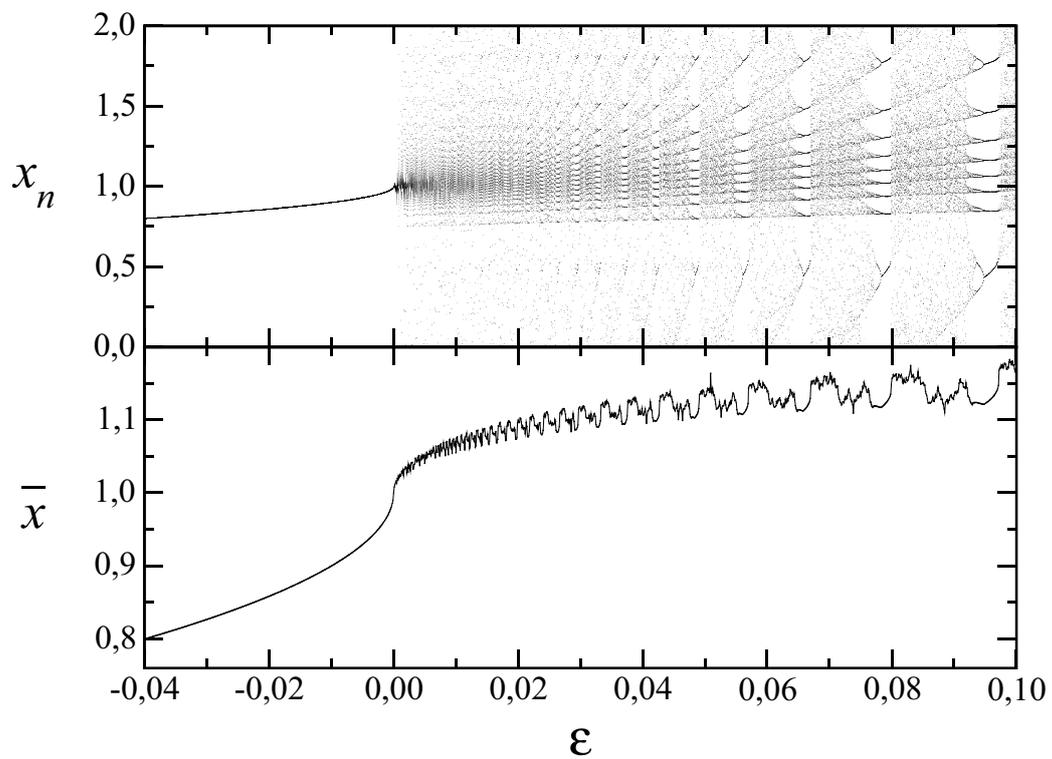


Figura 2.10: Média temporal e atrator do mapa da forma normal para intermitência tipo I com reinjeção usando *modulo 2*.

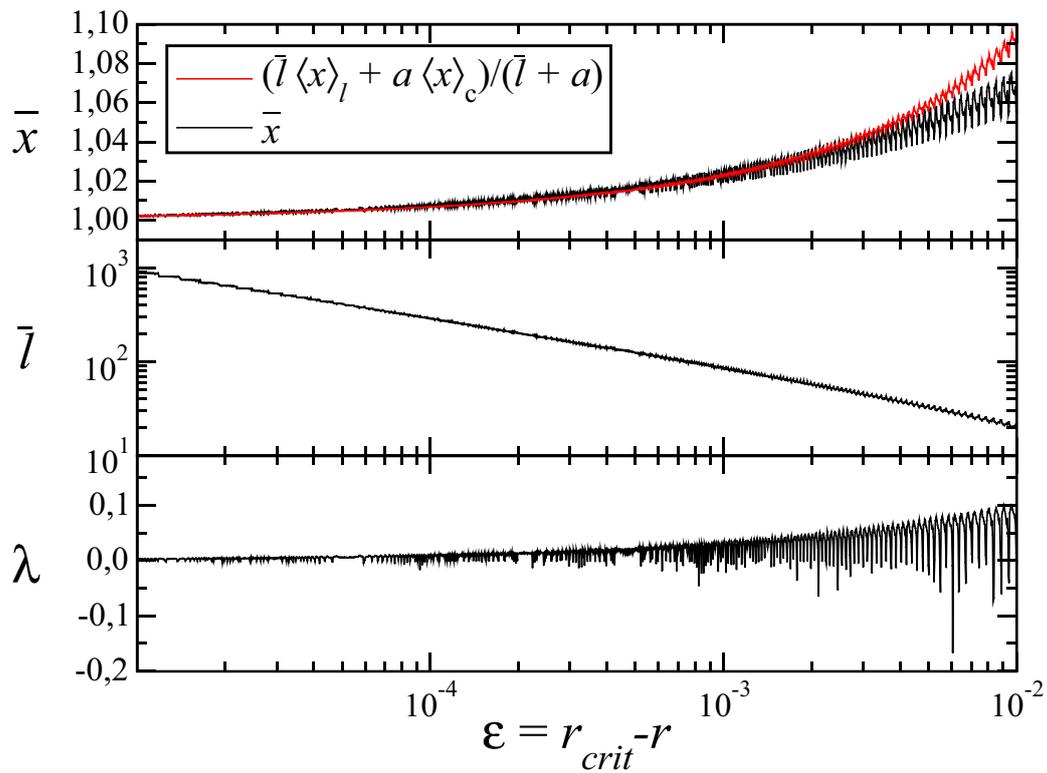


Figura 2.11: Média temporal, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa da forma normal da intermitência tipo I. Os parâmetros usados para o cálculo estão descritos no texto.

## 2.5 Mapa Quártico

Uma maneira de alterar a lei de escala, ou seja, o expoente que aparece no comportamento crítico, é alterar a forma da não-linearidade dominante no canal. É possível, por exemplo, que na expansão em série de potências de uma mapa específico ao redor de um ponto fixo o termo dominante não seja quadrático, mas uma potência par arbitrária (Hirsch *et al.*, 1982). Fizemos cálculos numéricos com um mapa no qual a potência dominante da tangência é quártica:

$$x_{n+1} = \text{modulo} [\epsilon + x_n + (x_n - 1)^4, 2]. \quad (2.10)$$

Mostramos um diagrama deste mapa na figura 2.12.

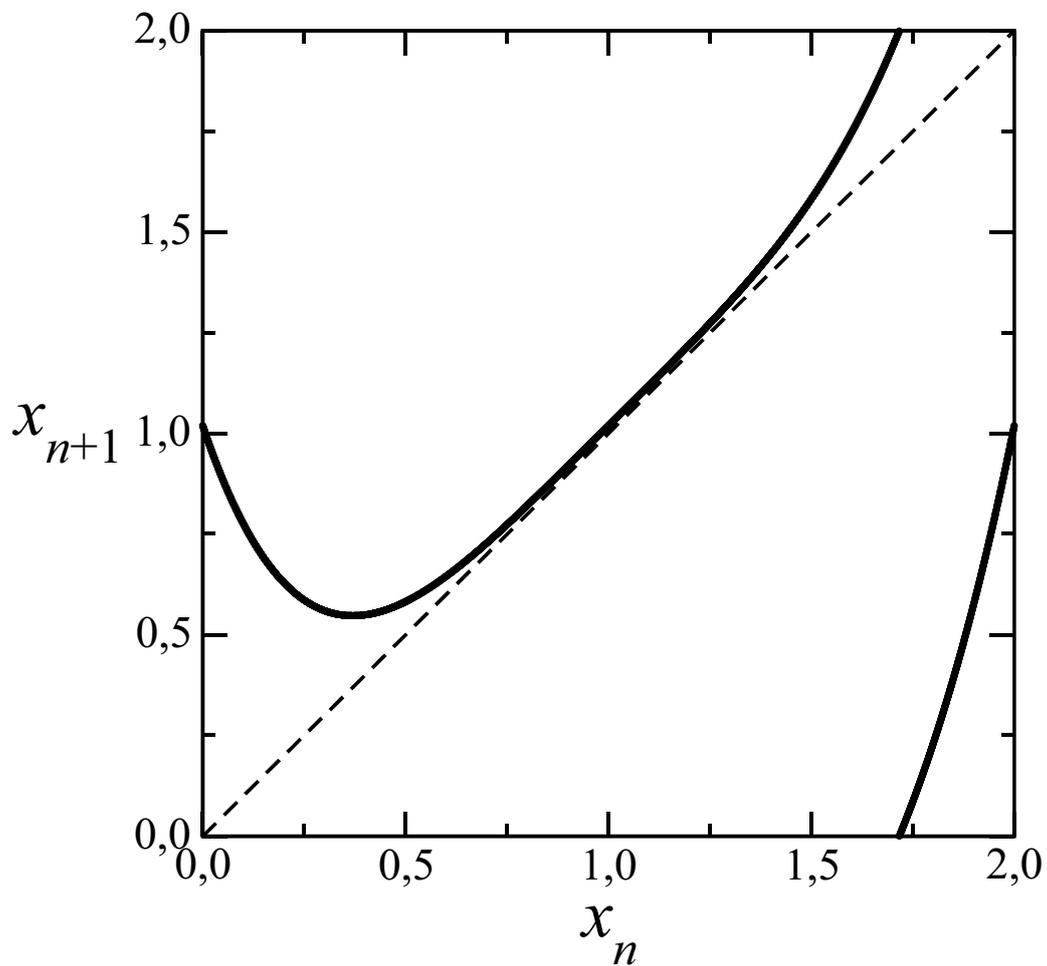


Figura 2.12: Mapa da forma normal para intermitência tipo I com não-linearidade quártica.

A figura 2.13 mostra o diagrama de bifurcação do atrator e da média da variável  $x$ . Observa-se grande similaridade com o mapa quadrático. O ramo periódico antes da bifurcação obedece a um comportamento crítico com expoente  $1/4$ , este corresponde à raiz estável da equação quártica para o ponto fixo com  $\epsilon = 0$ . Um mapa da forma

$$x_{n+1} = \text{modulo} [\epsilon + x_n + (x_n - 1)^z, 2], \quad (2.11)$$

com o termo dominante da não-linearidade par  $z$ , possui comportamento crítico com  $-(\epsilon)^{\frac{1}{z}}$  para a chegada periódica à bifurcação em  $\epsilon = 0$ .

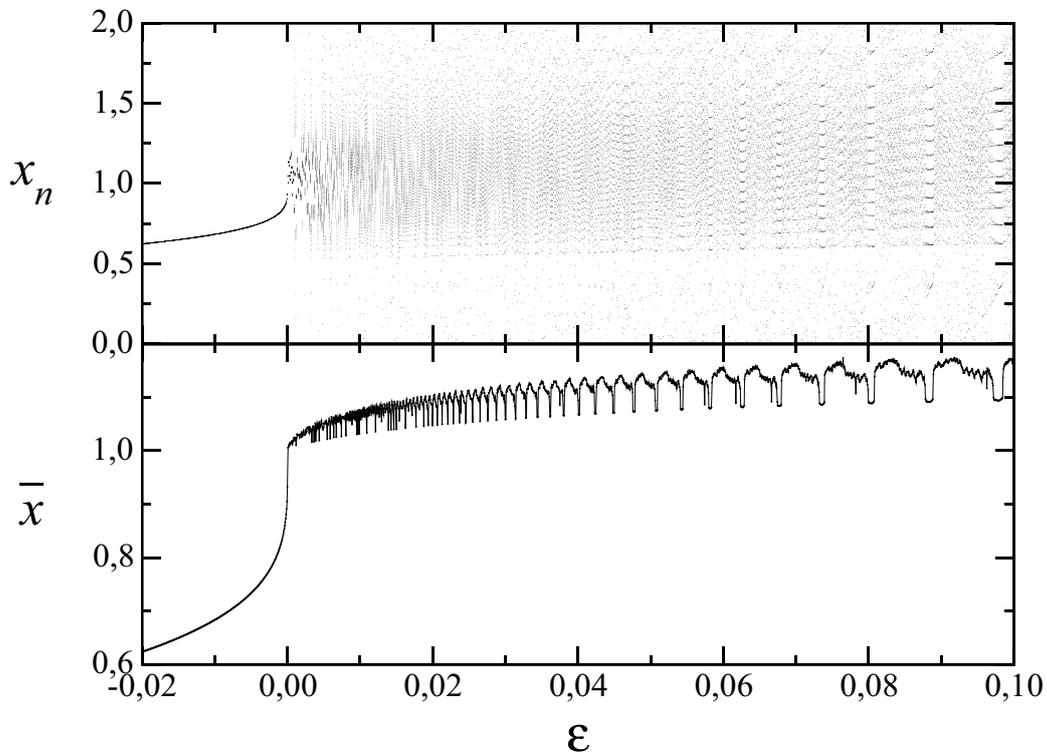


Figura 2.13: Atrator e média do mapa quártico com reinjeção tipo *modulo* e intermitência tipo I.

Após a bifurcação, a envoltória (parte não oscilante) da média satisfaz aproximadamente um comportamento do tipo

$$\bar{x} \propto -\epsilon^{2/3} \ln \epsilon, \quad (2.12)$$

como pode ser visto no gráfico log-log da figura 2.14a). A figura 2.14b) mostra um cálculo numérico de  $\bar{l}$ , para uma largura de canal definida como

0,005, e um ajuste com lei de potência  $-3/4$ . O resultado está de acordo com previsões teóricas que dão (Hirsch *et al.*, 1982)

$$\bar{l} \propto \epsilon^{(1-z)/z}. \quad (2.13)$$

O ajuste com logaritmo é baseado em uma solução da intermitência do

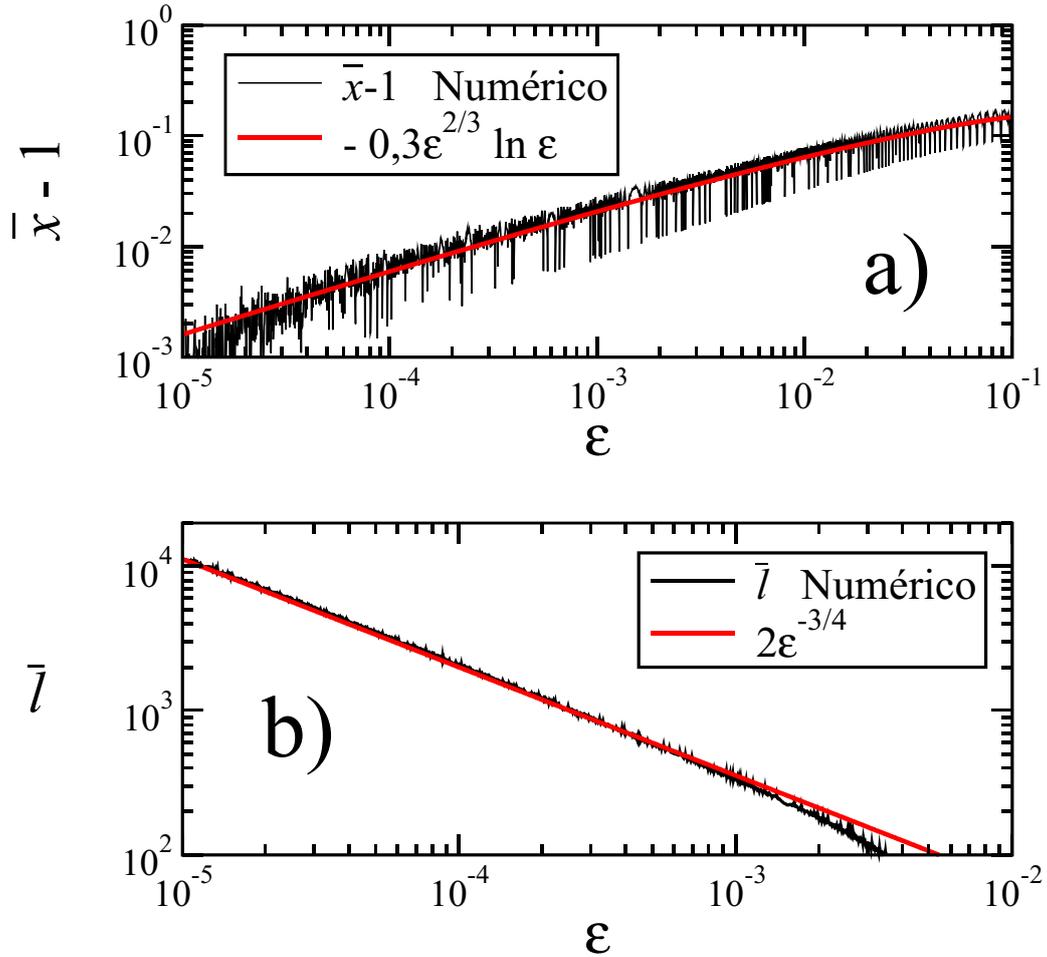


Figura 2.14: Média (a) e comprimento laminar médio (b) do mapa quártico com reinjeção tipo *modulo* e intermitência tipo I. Ambos os cálculos numéricos estão ajustados por expressões descritas no texto.

tipo III (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2002) e sugere uma generalização para o comportamento crítico da envoltória da média como  $\epsilon^{(z-2)/(z-1)} \ln \epsilon$  ( $z > 2$ ). O resultado é muito melhor do que aquele que seria obtido usando-se as aproximações da equação 2.8.

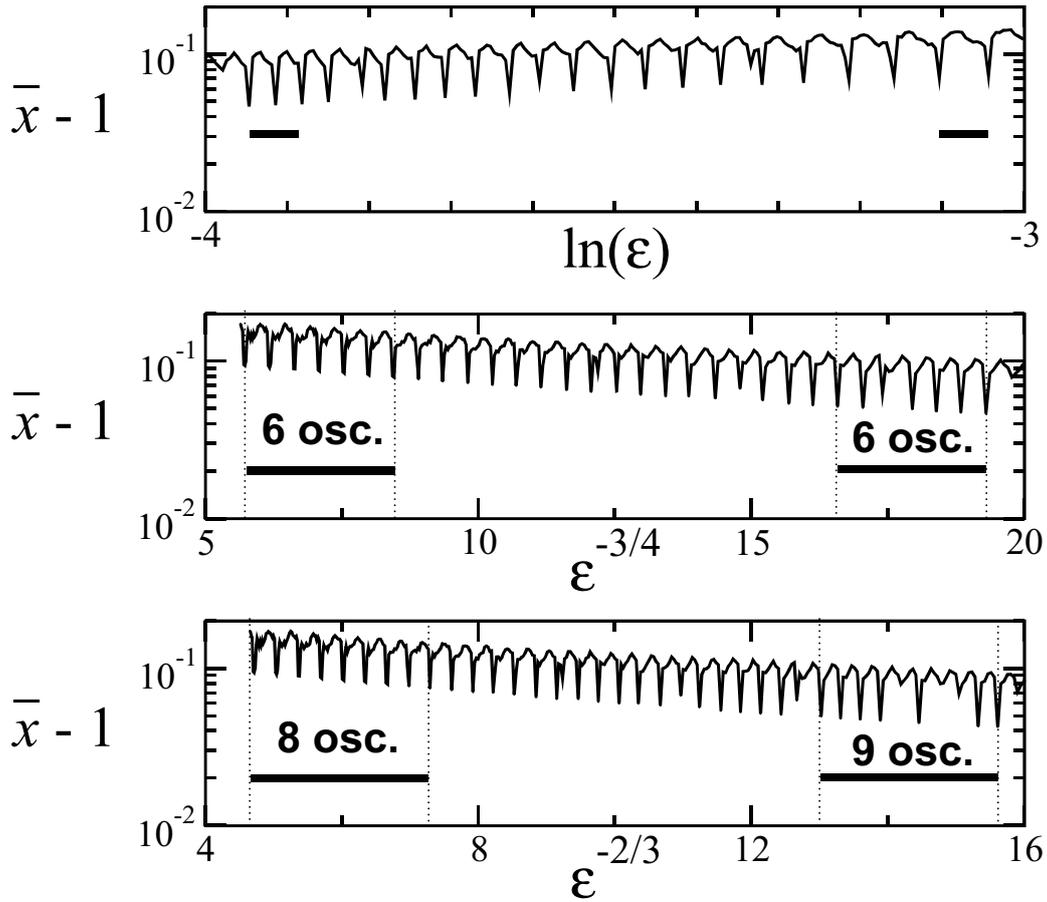


Figura 2.15: Média do mapa quártico com reinjeção tipo *modulo* e intermitência tipo I. Usamos diferentes transformações de escala no eixo  $\epsilon$  para encontrar a frequência das oscilações.

Uma análise cuidadosa mostra que o expoente crítico associado à frequência das oscilações na média é  $-3/4$ , sugerindo que, para uma não-linearidade da forma  $x^z$ , o comportamento crítico será  $\epsilon^{\frac{1-z}{z}}$ . Ilustramos três tentativas de regularizar a frequência das oscilações com as transformações de escala  $\ln \epsilon$ ,  $\epsilon^{-2/3}$  e  $\epsilon^{-3/4}$  na figura 2.15. Em cada gráfico da figura 2.15 colocamos um par de barras horizontais de mesmo comprimento para facilitar a percepção do período das oscilações. Na transformação logarítmica a discrepância dos períodos é grande, o comprimento da primeira barra é quase o de duas oscilações na extremidade esquerda ou de uma, apenas, na extremidade direita. Para as leis de potência a diferença é mais sutil, pois as transformações com expoente  $-3/4$  e  $-2/3$  são semelhantes. Ainda assim podemos contar, com o mesmo comprimento nesta escala, 8 oscilações do lado esquerdo e 9 do lado direito do gráfico com expoente  $-2/3$ .

## 2.6 Mapa de So-Ose-Mori

Mapas lineares-por-partes podem ser mais simples de se tratar analiticamente. Ott (1997) consegue encontrar expressões analíticas para a densidade de probabilidade de visitação de vários mapas unidimensionais lineares-por-partes. Shobu *et al.* (1984) propuseram um mapa linear-por-partes que reproduz qualitativamente a dinâmica da intermitência tipo I. Eles também resolveram analiticamente a densidade de probabilidade de visitação neste mapa para alguns valores de parâmetro que permitem reduzir a dinâmica do mapa àquela de uma partição de Markov. Este mapa foi citado em Kobayashi *et al.* (1993) com o nome de “mapa de So-Ose-Mori” e associado à nona referência deste artigo. De qualquer maneira podemos nos referir ao mapa apresentado por Shobu *et al.* (1984) e a sua generalização, apresentada a seguir, pelo acrônimo de “mapa de SOM”. Apresentamos uma forma generalizada deste mapa como

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n + b, & \text{para } x_n \leq c; \\ a^{-1}[x_n - (1 - b)] + 1, & \text{para } c < x_n \leq 1 - b; \\ -b^{-1}(x_n - 1), & \text{para } x_n > 1 - b, \end{cases} \quad (2.14)$$

onde  $c = (1 - b)/(1 + a)$  e  $a = 1 - 2b + \epsilon$ . Os únicos parâmetros são  $\epsilon$ , o parâmetro de controle que leva à tangência, e  $b$ , a fração do intervalo unitário que corresponde à região de reinjeção. O estudo deste mapa apresentado aqui motivou também a publicação da referência de S. Cavalcante e Rios Leite (2004).

O diagrama da figura 2.16 mostra como este mapa se assemelha à curva tangente do mapa quadrático.

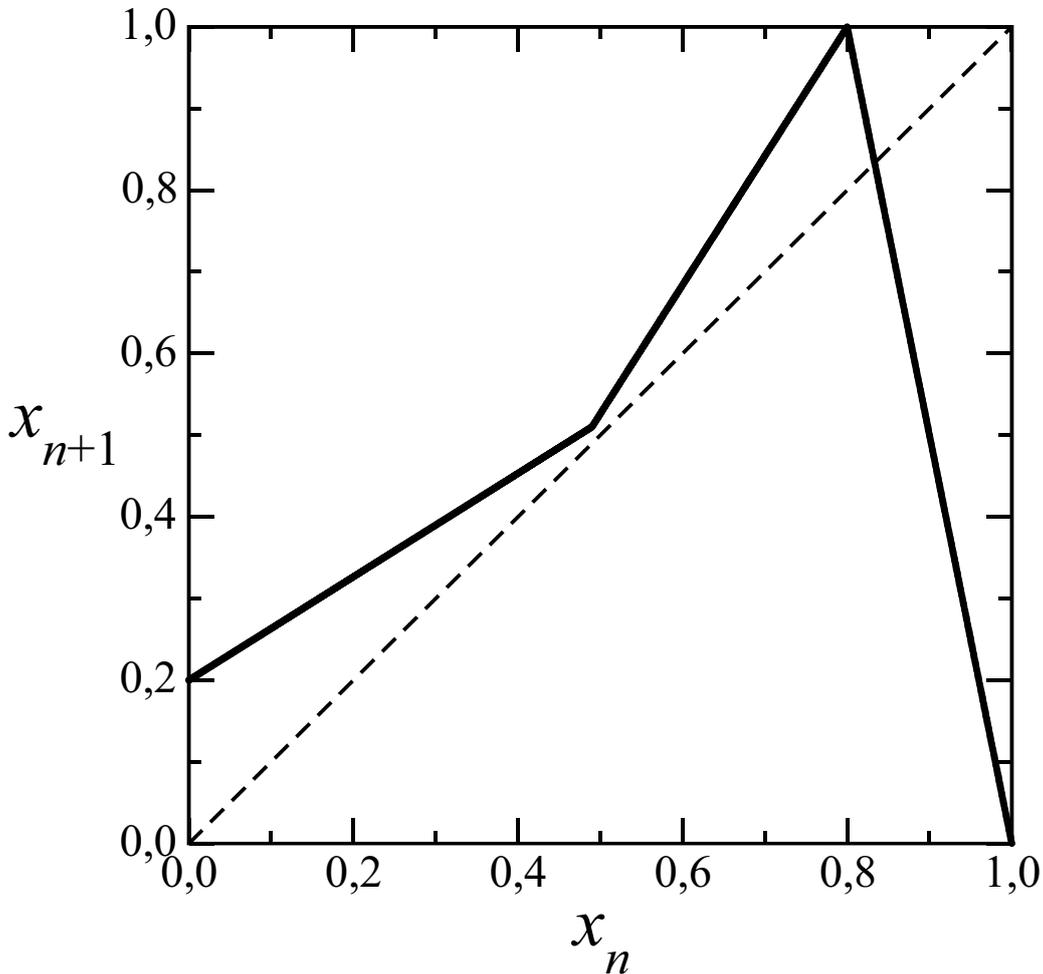


Figura 2.16: Mapa linear-por-partes com intermitência tipo I. Neste gráfico usamos as equações 2.14 com  $b = 0,2$  e  $\epsilon = 0,0332$ .

Mas existe uma diferença fundamental: é possível mostrar que no mapa de SOM a invariância discreta de escala por variação de  $x$  e  $\epsilon$  é perfeita até o limite do tamanho do mapa. Conforme descrito por Shobu *et al.* (1984), existe uma família discreta de valores de  $\epsilon$  para os quais o mapa pode ser descrito por uma partição de Markov simples. Quando  $\epsilon$  assume um destes valores  $\epsilon_n$ , que formam uma progressão geométrica aproximada ( $\epsilon_n/\epsilon_{n-1} \cong 1 - 2b$ ), a densidade de probabilidade do mapa forma uma escada dupla com  $n$  degraus subindo até o valor da tangência e  $n$  degraus descendo até a região de reinjeção. O comprimento e a altura dos degraus formam progressões geométricas perfeitas (para  $\epsilon = 0,4$ ), e o número de degraus vai a infinito quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , de modo que a densidade de probabilidade do atrator caótico

forma um fractal com fator de escala  $1 - 2b$ .

Isto leva a frequência das oscilações a ter um comportamento crítico que não é lei de potência, como nos mapas polinomiais, mas logarítmico, como esperado da teoria apresentada na referência (Sornette, 1998). Aparentemente, esta diferença é devida à deformação que a curva polinomial causa na separação das iterações sucessivas no interior do canal. Observáveis como o expoente de Lyapunov e o *número de enrolamento*<sup>1</sup> do mapa linear-por-partes descontínuo usado para estudar a intermitência tipo V na referência (Qu *et al.*, 1998) também exibem oscilações logarítmicas.

Mostramos um diagrama de bifurcação e a média do mapa de So-Ose-Mori na figura 2.17. Não há janelas periódicas na região  $\epsilon > 0$ , o que garante que as oscilações da média podem acontecer mesmo sem a ocorrência destas janelas. O comportamento crítico na região periódica ( $\epsilon = 0$ ) é linear, consistente com a lei  $(-\epsilon)^1/z$  para  $z = 1$ , ao passo que nos mapas quadráticos sem ruído observa-se expoente  $1/2$ .

A figura 2.18 mostra a média, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov em escala logarítmica. Vemos que a frequência das oscilações permanece constante. O expoente de Lyapunov permanece sempre acima de 0, consistente com a ausência de órbitas periódicas estáveis.

A figura 2.19 mostra dois comportamentos críticos para a média calculados com diferentes valores de  $b$ . O período da oscilação corresponde ao logaritmo do fator de escala, o qual neste mapa vale  $1 - 2b$ . Na figura 2.19 a razão entre os períodos das oscilações deve valer  $\log(0,6)/\log(0,4) \cong 0,2218/0,3979 \cong 0,557$ . Para verificar este resultado desenhamos duas barras cujos comprimentos são aproximadamente iguais aos períodos das oscilações respectivas e medimos a razão entre estes, obtendo  $0,026/0,043 \cong 0,60 \pm 0,05$ .

---

<sup>1</sup>O número de enrolamento (*winding number*) é a razão entre as duas frequências de um sistema quasi-periódico, ou entre as médias das variações de fase em um sistema caótico descrito por osciladores acoplados. Ver (Ott, 1997).

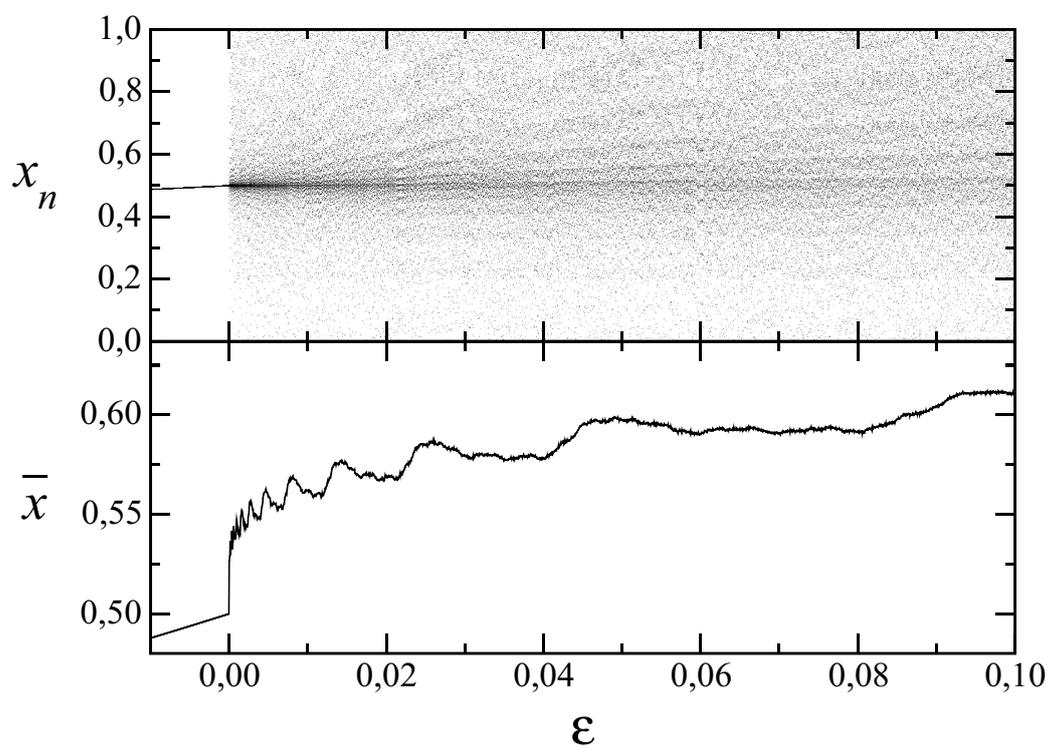


Figura 2.17: Média e atrator do mapa linear-por-partes com intermitência tipo I,  $b = 0,2$

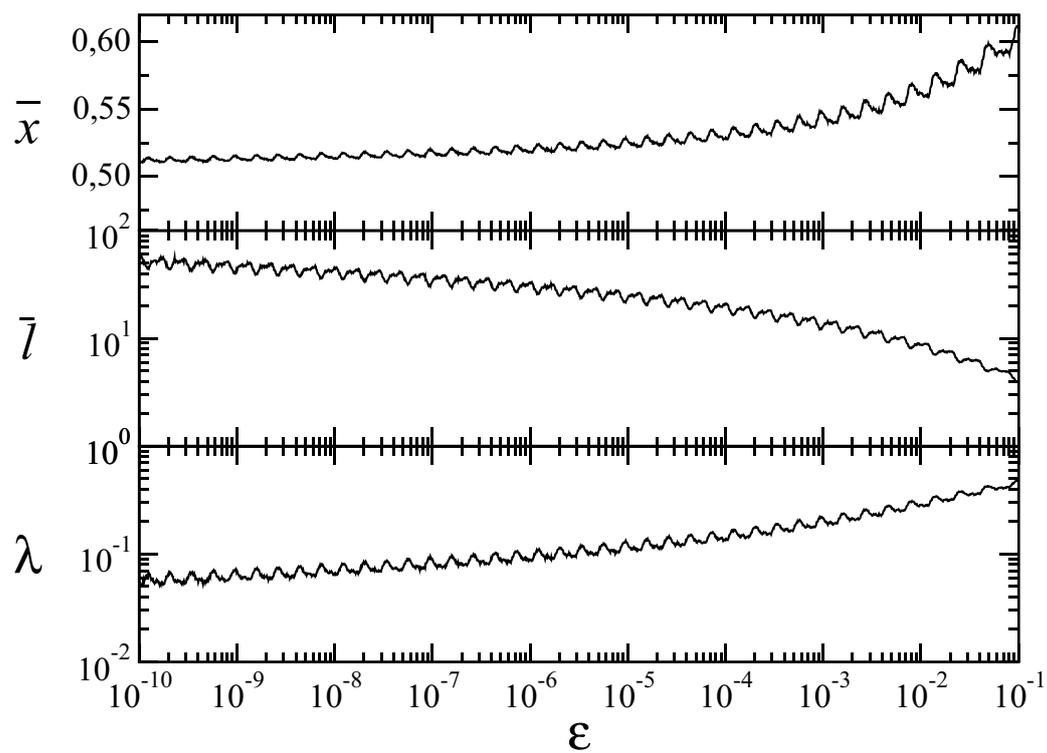


Figura 2.18: Média, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa linear-por-partes com intermitência tipo I,  $b = 0,2$ .

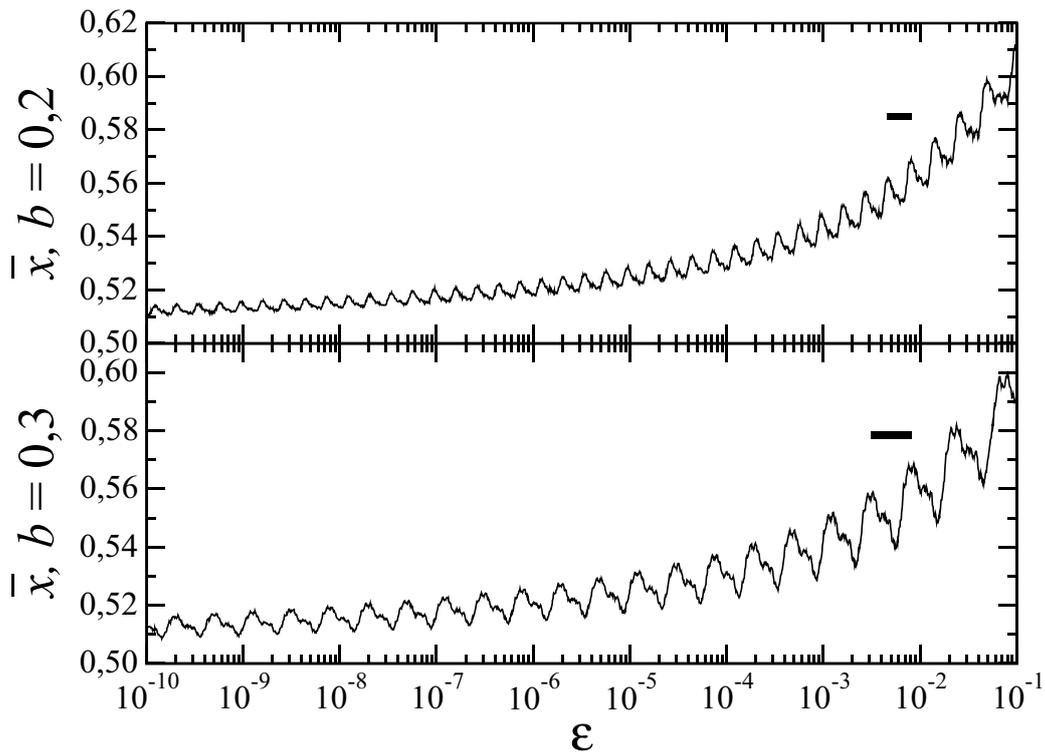


Figura 2.19: Médias em dois mapas lineares-por-partes com diferentes leis de escala. O comprimento das barras é aproximadamente igual ao período da oscilação. A razão entre os comprimentos é 0,60, aproximadamente igual à razão entre os logaritmos dos fatores de escala  $(1 - 2b)$  da densidade de probabilidade dos atratores caóticos.