



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

TESE DE DOUTORADO

**BIFURCAÇÕES COM INTERMITÊNCIA E SINCRONISMOS DE
SISTEMAS CAÓTICOS: CIRCUITOS ELETRÔNICOS E LASERS**

por

Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:

Prof. José Roberto Rios Leite (Orientador-UFPE)

Prof. Herch Moysés Nussenzveig (UFRJ)

Prof. Celso Grebogi (USP)

Prof. Flávio Meneses de Aguiar (UFPE)

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva (UFPE)

Recife - PE, Brasil

Outubro - 2003



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 3271-8449/3271-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

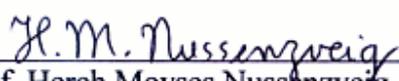
BIFURCAÇÕES COM INTERMITÊNCIA E SINCRONISMO DE SISTEMAS CAÓTICOS: CIRCUITOS ELETRÔNICOS E LASERS

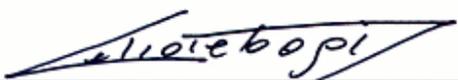
A Banca Examinadora composta pelos Professores José Roberto Rios Leite (Presidente e Orientador) da Universidade Federal de Pernambuco, Herch Moyses Nussenzveig da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Celso Grebogi da Universidade de São Paulo, Flavio Menezes de Aguiar e Mauro Copelli Lopes da Silva, ambos da Universidade Federal de Pernambuco consideram o candidato:

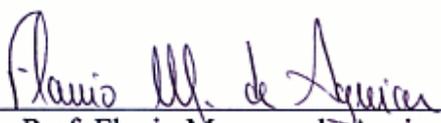
() Aprovado com Distinção (X) Aprovado () Reprovado

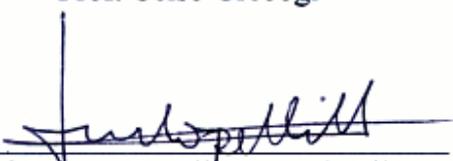
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos vinte dias do mês de outubro de 2003.


Prof. José Roberto Rios Leite
Presidente e Orientador


Prof. Herch Moyses Nussenzveig


Prof. Celso Grebogi


Prof. Flavio Menezes de Aguiar


Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Apresentação	1
1.2	Dinâmica	3
1.3	Caos Determinístico	7
1.3.1	Mapas	13
1.4	Medida Probabilística Natural	17
1.5	Dimensão Fractal	19
1.6	Intermitência	22
2	Intermitência Tipo I	25
2.1	Revisão	25
2.2	Média da Variável Dinâmica	27
2.3	Mapa Logístico	31
2.3.1	Período das Oscilações	36
2.4	Mapa da Forma Normal	38
2.5	Mapa Quártico	42
2.6	Mapa de So-Ose-Mori	46
2.7	Mapa Quasi-Periódico	52
2.8	Efeito do Ruído	57
2.9	Efeito da Reinjeção	58
2.10	Médias em Fluxos	62
2.10.1	Média no Fluxo de Rössler	63
2.10.2	Média no Fluxo de Lorenz	65
2.10.3	Laser com Absorvedor Saturável	67
3	Intermitência Tipo III	71
3.1	Forma Normal	71
3.2	Média da Variável Dinâmica	75
3.3	Efeito da Reinjeção	76

4	Oscilador Eletrônico Não-Linear Forçado	80
4.1	Circuito Oscilador RLD	80
4.2	Modelo para o Oscilador RLD	81
4.3	Análise Numérica	84
4.3.1	Intermitência Tipo I	88
4.4	Experimentos com o Oscilador RLD	92
4.4.1	Intermitência Tipo I	94
4.4.2	Intermitência Tipo III	98
5	Sincronismo de Sistemas Caóticos	102
5.1	Análise de Estabilidade	104
5.2	Modelo de Lang-Kobayashi	105
5.3	Modelo de Haken-Lorenz	111
6	Conclusão	114
	Referências Bibliográficas	116

Lista de Figuras

1.1	Séries temporais do sistema de Lorenz	9
1.2	Uma solução do atrator de Lorenz projetada no plano $x-z$	12
1.3	Mapa de máximos da variável z do atrator de Lorenz.	14
1.4	Etapas da construção do conjunto de Cantor.	21
1.5	Mapa logístico construindo conjunto de Cantor.	21
1.6	Tangência associada à intermitência do tipo I.	23
1.7	Mapa com intermitência do tipo III.	24
2.1	Diagrama qualitativo da bifurcação tangente associada à intermitência do tipo I.	26
2.2	Evolução do atrator e da média do mapa logístico	28
2.3	Distribuição espacial e temporal de uma série com caos intermitente	30
2.4	Tangência entre a terceira iteração do mapa logístico e a reta identidade, característica da intermitência tipo I.	32
2.5	Média e diagrama de bifurcação do mapa logístico próximo a janela de período 3.	33
2.6	Média temporal, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa logístico.	34
2.7	Média temporal e atrator do mapa logístico próximo à janela de período 7.	35
2.8	Oscilações na média temporal do mapa logístico próximo à janela de período 7.	37
2.9	Mapa da forma normal para intermitência tipo I.	39
2.10	Média temporal e atrator do mapa da forma normal para intermitência tipo I.	40
2.11	Média temporal, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa da forma normal da intermitência tipo I.	41
2.12	Mapa com intermitência tipo I e não-linearidade quártica.	42
2.13	Atrator e média do mapa quártico com intermitência tipo I.	43

2.14	Média (a) e comprimento laminar médio (b) do mapa quártico com intermitência tipo I.	44
2.15	Média do mapa quártico com intermitência tipo I.	45
2.16	Mapa linear-por-partes com intermitência tipo I.	47
2.17	Média e atrator do mapa linear-por-partes com intermitência tipo I.	49
2.18	Média, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa linear-por-partes com intermitência tipo I.	50
2.19	Médias em dois mapas lineares-por-partes com diferentes leis de escala.	51
2.20	Mapa com bifurcação tangente e sem caos.	52
2.21	Diagrama de bifurcação e média do mapa quasi-periódico.	53
2.22	Diagrama de bifurcação tangente e média do mapa quasi-periódico.	54
2.23	Média do mapa quasi-periódico em escala logarítmica.	55
2.24	Média do mapa quasi-periódico em escala $\epsilon^{-1/2}$	56
2.25	Média, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa SOM com ruído.	57
2.26	Diagrama de bifurcação e média de um mapa linear-por-partes com reinjeção aleatória.	59
2.27	Mais um mapa linear-por-partes	60
2.28	Diagrama de bifurcação e média de um mapa linear-por-partes com reinjeção controlada.	61
2.29	Diagrama de bifurcação e média no sistema de Rössler.	63
2.30	Diagrama de bifurcação e média no sistema de Rössler.	64
2.31	Diagrama de bifurcação e média no sistema de Lorenz.	65
2.32	Média no sistema de Lorenz com intermitência tipo I	66
2.33	Diagrama de bifurcação e média no modelo do LAS.	68
2.34	Diagrama de bifurcação e média no modelo do LAS.	69
2.35	Diagrama de bifurcação e média no modelo do LAS.	70
3.1	Mapa associado à intermitência tipo III	72
3.2	Mapa associado à segunda iteração da intermitência tipo III.	74
3.3	Média do mapa da primeira iteração da intermitência tipo III. Usamos a equação 3.2 e três valores de α'	75
3.4	Média do mapa da primeira iteração da intermitência tipo III com diferentes valores de α'	76
3.5	Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com diferentes valores de z	77

3.6	Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com reinjeção acima de Δ	78
3.7	Médias do mapa da segunda iteração da intermitência tipo III com reinjeção acima de Δ	79
4.1	Diagrama esquemático do circuito RLD	82
4.2	Capacitância equivalente imitando um diodo real	83
4.3	Série temporal do circuito RLD calculada numericamente.	85
4.4	Mapas discretos construídos a partir da série temporal RLD.	86
4.5	Mapas numéricos do RLD com intermitência tipo I.	89
4.6	Diagrama de mínimos e média temporal da tensão com intermitência tipo I. Numérico.	90
4.7	Média temporal numérica da tensão com intermitência tipo I.	91
4.8	Diagrama esquemático experimental do circuito RLD	93
4.9	Série experimental do circuito RLD com intermitência tipo I	94
4.10	Mapa de próximo máximo experimental do circuito RLD com intermitência tipo I	95
4.11	Diagrama de bifurcação e média experimentais do circuito RLD com intermitência tipo I	96
4.12	Comprimento médio experimental das fases laminares do circuito RLD com intermitência tipo I. Reproduzido de (Cho <i>et al.</i> , 2002).	97
4.13	Série experimental do circuito RLD com intermitência tipo III	98
4.14	Mapa de próximo máximo experimental do circuito RLD com intermitência tipo III	99
4.15	Diagrama de bifurcação e média experimentais do circuito RLD com intermitência tipo III	100
4.16	Comprimento médio experimental das fases laminares do circuito RLD com intermitência tipo III.	101
5.1	Montagem para acoplamento incoerente de lasers de diodo caóticos.	106
5.2	Autocorrelação de uma série caótica do laser de diodo	107
5.3	Correlações entre séries temporais de lasers de diodo caóticos desacoplados	109
5.4	Correlações entre séries temporais de lasers de diodo caóticos acoplados.	110
5.5	Níveis de energia no modelo de Haken-Lorenz	111
5.6	Sincronização no sistema de Rössler	113

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros numéricos para o RLD	85
4.2	Ajuste para média da intermitência tipo I no modelo RLD . . .	91
5.1	Parâmetros usados nos cálculos para lasers de diodo.	106
6.1	Características dos principais sistemas.	115

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, pelo apoio e pela minha formação.

A minha esposa, Lucélia, pelo estímulo e confiança. Aos meus amigos e colegas de trabalho, especialmente Clécio Clemente, Wilson Barros, Vladimir Jerez, Sergio Barreiro Degiorgi.

Aos funcionários e técnicos do departamento.

À equipe do Laboratório de Dinâmica de Lasers: Érika Medeiros, Fábio Oikawa, Jhon Fredy Martinez e prof. Rios Leite; e aos companheiros que se foram (para outra equipe ou grupo de pesquisa, espero!) Fabio Rueda, Jonas Campelo Gomes, Daniel Perez, Lincoln Porfírio Sousa, Marconi Brandão.

Aos co-autores e colaboradores dos trabalhos realizados e professores que se instigam pela dinâmica não-linear: Cristina Masoller, Mauro Copelli, Flávio Aguiar, e especialmente às dicas sobre propriedades da medida probabilística do prof. Marcelo Viana do IMPA.

Dedicatória

Dedico esta tese a todas as pessoas que acreditam que a descoberta e a compreensão da natureza são empolgantes e divertidas.
Que a chama da curiosidade e da sede de saber nunca se apague.

Resumo

Estudamos, analítica e numericamente, bifurcações com intermitência em mapas discretos e fluxos contínuos de equações diferenciais ordinárias autônomas. Identificamos uma estrutura fina nos observáveis estatísticos, formada por oscilações cuja frequência aumenta com a proximidade do ponto crítico. Comportamentos críticos foram objeto de experimentos em circuitos eletrônicos não-lineares forçados. Em seguida tratamos o problema da sincronização de sistemas caóticos e, particularmente, de lasers acoplados através de injeção ótica incoerente.

Na proximidade das bifurcações, foram estudadas as dependências com o parâmetro de controle de propriedades como o comprimento médio das fases laminares, o expoente de Lyapunov médio do atrator e os momentos estatísticos das variáveis dinâmicas. Uma análise detalhada destas grandezas revelou uma estrutura fina, até recentemente não enfatizada na literatura. Esta estrutura é formada por oscilações cuja frequência diverge com a proximidade do ponto crítico, de maneira similar às oscilações log-periódicas relatadas por Sornette e outros em sistemas dotados de invariância discreta de escala.

Pomeau e Manneville caracterizaram três tipos de bifurcações com intermitência. O tipo I ocorre nas bifurcações tangentes de mapas unidimensionais, como no mapa logístico, e em fluxos, como os de Rössler e Lorenz. Além destes, também estudamos o mapa de So-Ose-Mori e o modelo para o laser de CO₂ com absorvedor saturável intracavidade. No mapa logístico e em um mapa da forma normal da bifurcação tangente quadrática, o período das oscilações diminui polinomialmente com um expoente 1/2. No mapa de So-Ose-Mori encontramos a periodicidade logarítmica. Também estudamos o comportamento crítico na intermitência do tipo III, para a qual é possível encontrar a medida natural invariante analiticamente.

Experimentos foram realizados com um circuito eletrônico oscilador RLC forçado, no qual o capacitor é substituído por um diodo de junção semicondutora. A forte não-linearidade da capacitância no diodo dá origem a oscilações caóticas, as quais podem exibir intermitências dos tipos I e III. Levantamos o comportamento crítico para estas intermitências.

No sincronismo de lasers, estudamos diversos modelos de acoplamento incoerente. Procuramos por sincronização perfeita, retardada e de fase, nos modelos de Haken-Lorenz, do laser de CO₂ com absorvedor saturável e de Lang-Kobayashi para laser de diodo com realimentação ótica.

Abstract

Bifurcations with intermittency are studied, both numerically and analytically, in discrete maps and continuous fluxes of ordinary autonomous differential equations. A fine structure is identified for the statistical observables. This structure is constituted of oscillations, whose frequency diverges as a control parameter approaches its critical value. Critical behavior was observed experimentally in nonlinear driven electronic circuits. We also deal with the problem of the synchronization of chaotic systems, mainly, of lasers coupled by incoherent optical injection.

The dependences on the control parameter of properties such as the average length of laminar phases, the average Lyapunov exponent and the statistical *momenta* of the dynamical variables were studied at the vicinity of the bifurcations. A more detailed analysis reveals a fine structure, not very emphasized until recently. An oscillation is found, whose frequency diverges with the proximity of the critical point, similarly to the log-periodic oscillations studied by Sornette and others in systems endowed with discrete scale invariance.

Pomeau and Manneville have characterized three types of intermittency. Type-I occurs at tangent bifurcations of unidimensional maps, as seen in the logistic map, and in fluxes, like the Rössler and Lorenz ones. We have studied those and also the So-Ose-Mori map and a continuous model for the CO₂ laser with an intracavity saturable absorber. In the logistic map and in a map for the normal form of quadratic tangent bifurcation the period of the oscillations is found to reduce in a polynomial fashion, with exponent 1/2. In the So-Ose-Mori map logarithmic periodicity is found. We have also studied the critical behavior of type-III intermittency, whose natural invariant probabilistic measure was found analytically.

Experiments were performed with an electronic oscillator, a driven RLC circuit whose capacitor is replaced by a semiconductor diode. Strong non-linearity for the diode capacitance enables chaotic oscillations and intermittencies of types I and III to occur. We have obtained the critical behavior of these.

For laser synchronism, we have studied several models of incoherent coupling. We tested for perfect, retarded and phase synchronization in the model of Haken-Lorenz, in the model for the CO₂ laser with saturable absorber, and in the Lang-Kobayashi model for diode lasers subjected to optical feedback.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

A presente tese está dividida em seis capítulos. No primeiro fazemos uma rápida introdução sobre a dinâmica de sistemas não-lineares, bifurcações e caos, e encerramos exibindo o fenômeno da intermitência, cujas formas classificadas por Pomeau e Manneville são discutidas mais detalhadamente nos capítulos 2 e 3. Estes dois últimos capítulos apresentam resultados originais e fazem uma redescoberta da média de variáveis dinâmicas como uma importante e informativa propriedade a ser observada durante as bifurcações de sistemas dinâmicos. Lawandy *et al.* (1987) já haviam sugerido o uso da média para detetar bifurcações no sistema de Haken-Lorenz. No capítulo 2 relatamos a existência de oscilações no comportamento crítico da intermitência tipo I e no capítulo 3 encontramos expressões analíticas generalizadas para a densidade de probabilidade de visitação no atrator e aplicamos estas expressões no cálculo da média. Ainda nestes dois capítulos, apresentamos uma relação, válida no limite assintótico, entre a média da variável dinâmica e a duração média das fases laminares, esta última sendo uma propriedade muito estudada na literatura de intermitência. O capítulo 4 apresenta experimentos realizados com um circuito eletrônico não-linear para estudar tais bifurcações. Em seguida, o capítulo 5 trata da sincronização de sistemas caóticos, com ênfase em modelos de acoplamento de lasers por injeção ótica incoerente, e particularmente uma análise introdutória de lasers de diodo feitos caóticos por realimentação ótica (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2003). O capítulo 6 resume os principais resultados obtidos.

Nenhum dos tópicos abordados pretende ser uma descrição completa; ao invés disso, preferimos apenas apontar os principais conceitos necessários à apreciação dos resultados originais. Descrições detalhadas e demonstrações

podem ser encontradas nas referências citadas no texto. Vale destacar os livros Ott (1997); Strogatz (1998); Manneville (1990); Bergé *et al.* (1980), e em português, Fiedler-Ferrara e do Prado (1994). Um livro bastante completo mas cujo rigor matemático o torna mais hermético é Guckenheimer e Holmes (1983). A segunda edição de Ott (2002) foi revista e ampliada, incluindo agora a sincronização de caos.

Nas bifurcações com caos intermitente, abordamos principalmente as descrições unidimensionais, em especial seguindo a classificação de Pomeau e Manneville (Manneville, 1990; Pomeau e Manneville, 1980) para os três tipos de intermitência que foram usados para demonstrar como um fluxo laminar pode evoluir para comportamento turbulento. A intermitência do tipo I, apresentada no capítulo 2, ocorre nas bifurcações tangentes de mapas unidimensionais, como exemplificado no mapa logístico (Ott, 1997; de S. Cavalcante e Rios Leite, 2000b), e em fluxos, como os de Rössler e Lorenz, na proximidade de bifurcações sela-nó, quando estas dão origem a órbitas periódicas a partir de um atrator caótico.

Além dos acima citados, também estudamos as propriedades estatísticas da intermitência tipo I no mapa de So-Ose-Mori (Shobu *et al.*, 1984) e no modelo contínuo para o laser de CO₂ com absorvedor saturável intracavidade (Lefranc *et al.*, 1991).

Foram estudadas as dependências com o parâmetro de controle de propriedades como o comprimento (duração) médio(a) das fases laminares, o expoente de Lyapunov médio do atrator e os momentos estatísticos das variáveis dinâmicas. Estas grandezas se comportam de maneira similar a parâmetros de ordem ou observáveis termodinâmicos em fenômenos críticos, sendo a bifurcação similar a uma transição de fase neste caso, embora o conceito de bifurcação seja muito mais geral. Um tratamento analítico pode ser aplicado à intermitência do tipo III, permitindo a determinação da sua medida invariante natural, a qual por sua vez serve para computar analiticamente todas as grandezas acima (Manneville, 1990; de S. Cavalcante e Rios Leite, 2002).

Para a intermitência do tipo I, uma análise detalhada destas quantidades revelou uma estrutura fina, até recentemente não enfatizada na literatura. Esta estrutura é constituída pela adição de oscilações, cuja frequência diverge com a proximidade do ponto crítico, de maneira similar às oscilações log-periódicas relatadas por Sornette (Sornette, 1998) e outros, em sistemas dotados de invariância discreta de escala. No mapa logístico e em um mapa da forma normal da bifurcação tangente quadrática, o período das oscilações diminui polinomialmente com um expoente 1/2 (de S. Cavalcante *et al.*, 2001). No mapa de So-Ose-Mori encontramos a periodicidade logarítmica. A intermitência tipo III não mostra nenhuma oscilação significativa.

Experimentos foram realizados com um circuito eletrônico oscilador RLC

forçado, no qual o capacitor é substituído por um diodo de junção semicondutora (van Buskirk e Jeffries, 1985). Denominaremos este circuito pela sigla RLD, conforme é feito em algumas referências. A forte não-linearidade da capacitância no diodo dá origem a oscilações caóticas, as quais podem exibir intermitências dos tipos I e III (Kim *et al.*, 1998; de S. Cavalcante e Rios Leite, 2002). Levantamos o comportamento crítico para estas intermitências mas não foi possível identificar a estrutura fina neste sistema, apesar de evidências de que ela esteja presente.

No sincronismo, estudamos sistemas de Rössler acoplados e lasers, usando modelos de acoplamento por saturação de população, baseados no sincronismo de lasers de CO₂ com absorvedor saturável intracavidade (Liu *et al.*, 1994; de S. Cavalcante e Rios Leite, 2003). Procuramos por sincronização perfeita, sincronização retardada e sincronização de fase (Rosenblum *et al.*, 1996) no modelo de Haken-Lorenz para lasers de ganho elevado e dinâmica populacional não-adiabática (Haken, 1975) e no modelo de Lang-Kobayashi para laser de diodo com realimentação ótica (Lang e Kobayashi, 1980).

1.2 Dinâmica

A natureza é repleta de problemas complexos cuja solução talvez esteja bem além da capacidade de compreensão humana. Ainda assim, há também diversas classes de problemas e sistemas físicos para os quais a nossa limitada capacidade de modelagem mostra-se eficiente. Nestes sistemas somos capazes de fazer descrições quantitativas e qualitativas apuradas e prever comportamentos e evolução.

Por exemplo: podemos prever com precisão todos os eclipses do Sol e da Lua pelos próximos milhões de anos, mas não somos capazes de prever com precisão a posição final de uma bola de pingue-pongue lançada aleatoriamente dentro de uma caixa.

A ciência que se dispõe a descrever os fenômenos naturais de maneira geral é a física, e a parte da física que busca fazer previsões de comportamento de sistemas naturais a partir de leis de evolução e do conhecimento do estado atual ou anterior do sistema, por extensão e analogia com a mecânica, é a dinâmica.

Podemos dizer que a dinâmica clássica, em sua forma atual, foi iniciada por Isaac Newton. A partir de suas leis de movimento e conhecida a lei de força, Newton pôde determinar e resolver equações diferenciais que explicam o movimento dos corpos. Por exemplo: o problema de dois corpos submetidos a uma lei de atração com força proporcional à massa e inversamente proporcional ao inverso do quadrado das distâncias foi resolvido por Newton

para explicar as leis de movimento dos planetas formuladas por Kepler.

Hooke descobriu que a lei de força proporcional à posição com constante negativa explicava as oscilações harmônicas, como as resultantes do problema massa-mola. Mas uma dificuldade surge pela nossa limitação em resolver equações diferenciais, mesmo simples, quando estas não são lineares. Por exemplo: logo se descobriu que o problema de três corpos que se atraem mutuamente por força gravitacional é muito difícil de se resolver, no sentido de se obter fórmulas analíticas explícitas para os movimentos dos três corpos. Somente algumas configurações de condições iniciais, dotadas de alguma simetria, podem ser resolvidas analiticamente. De fato, de acordo com o teorema de Bertrand (Goldstein, 1980, página 93), dentre as leis de força central (atuando na direção do vetor posição do corpo que aplica a força) somente as duas acima dão origem a órbitas fechadas estáveis para todas as trajetórias ligadas (trajetórias ligadas são aquelas para as quais as distâncias entre os corpos permanecem finitas).

Mais tarde descobriu-se que as equações de movimento podem ser obtidas a partir de um princípio de extremo variacional, conhecidas as condições de vínculo que o sistema deve obedecer e o funcional a ser extremizado. A 2ª lei de Newton, por exemplo, pode ser obtida a partir do princípio de mínima ação, que leva às equações de Euler-Lagrange. O princípio de Fermat da minimização do tempo de propagação dos raios luminosos (com velocidade calculada a partir do índice de refração) permite encontrar a lei de Snell para a refração¹. A maximização da entropia preservando um potencial livre é a base da termodinâmica. Em geral, uma classe muito abrangente de sistemas naturais pode ser descrita a partir da extremização de um funcional adequado.

Quando as grandezas de interesse estão estendidas continuamente pelo espaço, como em dinâmica de fluidos, propagação de calor, ondas, etc. As leis de movimento, em geral, vão implicar em equações diferenciais parciais (EDPs). Equações diferenciais ordinárias (EDOs) ocorrem, por exemplo, em problemas de força central, mesmo com a adição de forças dissipativas (não-centrais, atrito, p. ex.), como na dinâmica dos centros de massa de partículas ou dinâmica de rotação de objetos rígidos. Elas também resultam de aproximações feitas em sistemas espaço-temporais, como no caso das equações de Lorenz, discutidas na seção 1.3 e nas referências (Lorenz, 1963; Strogatz,

¹De fato, é possível mostrar que todas as leis de propagação da ótica geométrica são deriváveis do princípio de Fermat em sua forma moderna: “Um raio de luz indo entre dois pontos deve atravessar um comprimento ótico estacionário com respeito a variações do caminho.” Nesta forma o caminho pode ser um máximo, mínimo ou ponto-de-sela. Também pode-se mostrar que o princípio de Fermat é homomórfico ao princípio de mínima ação de Euler-Lagrange, para um potencial dado como função do índice de refração.

1998), e dos modelos para lasers [seções 2.10.3 e 5.2, e referências (Haken, 1975; Lefranc *et al.*, 1991; Lang e Kobayashi, 1980)].

Para um sistema de partículas com n coordenadas espaciais generalizadas, q_i , as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (1.1)$$

são obtidas a partir da extremização diferencial do funcional Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V$, onde T é a energia cinética e V a energia potencial. Quando este é função apenas das posições e velocidades², e não de derivadas temporais de ordem superior ou integrais ao longo do espaço ou do tempo, as n equações de Euler-Lagrange são de segunda ordem. Uma transformação de Legendre pode mudar as variáveis (q, \dot{q}) das equações de Euler-Lagrange em (q, p) e o funcional Lagrangeano no funcional Hamiltoniano, de maneira que o princípio de mínima ação leva a equações de primeira ordem, mas com a dimensão $2n$.

Uma vez conhecidos o funcional Hamiltoniano, as variáveis canônicas generalizadas e as condições de vínculo, as equações de Hamilton-Jacobi provém a lei de evolução temporal do sistema, seja este conservativo ou não. Assim, a dinâmica de uma grande variedade de sistemas naturais pode ser descrita com a matemática de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Analisemos o caso elementar de uma partícula submetida a uma força central conservativa e cuja energia potencial é função apenas da posição. $\mathcal{H} = T + V$, é o funcional Hamiltoniano, que é igual à soma da energia cinética T com a energia potencial V . $q(t) = x(t)$ e $p(t) = mv(t)$ são as variáveis canônicas conjugadas. No formalismo Lagrangeano temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} m\dot{q},$$

que, para massa constante, resulta

$$\frac{md^2q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (1.2)$$

onde as três quantidades $F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ podem ser identificadas como as componentes do vetor força atuando sobre a partícula e as equações 1.2 podem ser reconhecidas como a 2ª lei de Newton. Temos então, para cada direção do espaço, uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução depende das condições iniciais para a posição e para a velocidade.

²Em mecânica clássica é costume usar um ponto sobre uma variável para representar sua derivada com respeito ao tempo. Ou seja, $\dot{x} \equiv dx/dt$.

As equações canônicas de Hamilton-Jacobi (Goldstein, 1980) são

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \partial\mathcal{H}/\partial p_i, \\ -\dot{p}_i &= \partial\mathcal{H}/\partial q_i,\end{aligned}\tag{1.3}$$

e se reduzem a

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= p_i/m, \\ \dot{p}_i &= -\partial V/\partial q_i,\end{aligned}\tag{1.4}$$

ou seja, duas equações de primeira ordem³, cuja solução também necessita dos valores iniciais para a posição e *momentum*. Usando $p_i = mdq_i/dt$ também chegamos nas equações de movimento de Newton. O espaço formado pelas variáveis generalizadas de posição e quantidade de movimento, parametrizadas pelo tempo, é chamado de *espaço de fase*. Em sistemas conservativos, o volume do espaço de fase definido por um conjunto de soluções é conservado, fato cuja demonstração é conhecida como Teorema de Liouville (Goldstein, 1980).

Quando a evolução temporal causa uma contração do volume no espaço de fase o sistema é dito dissipativo. As soluções que definem a fronteira do volume e que possuem diferentes energias acabam colapsando para uma mesma superfície ou linha, ou ponto, ou, em geral, para um conjunto invariante por evolução temporal, o qual se denomina *atrator*. O conjunto de condições iniciais que acabam por evoluir para um atrator específico é denominado sua *bacia de atração*.

É fato conhecido que as soluções de equações diferenciais ordinárias formam um espaço vetorial quando estas equações são lineares. A dimensão deste espaço é igual ao número de equações independentes de primeira ordem. As soluções de equações diferenciais lineares só exibem três tipos de comportamento: ou são oscilações harmônicas; ou divergem; ou convergem para um ponto fixo. Portanto, é natural esperar que muitos dos problemas de interesse atual estejam relacionados a equações não-lineares. Em geral, o conjunto de soluções de equações não-lineares pode não ser um espaço vetorial. Para muitos problemas, por exemplo, no caso daqueles que exibem soluções não-periódicas no regime estacionário ($\lim_{t \rightarrow \infty}$), fica difícil escrever

³Um sistema de equações diferenciais pode ser representado em notação vetorial. Por exemplo:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})\tag{1.5}$$

é o equivalente a

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

expressões analíticas explícitas para as soluções a partir de um estado inicial arbitrário. Mas isto não significa que devemos abandonar qualquer tentativa de descrever e compreender estes sistemas.

A saída veio no trabalho de Poincaré (Poincaré, 1899). Ele enfatizou uma abordagem qualitativa do problema, com forte apelo geométrico. Não vamos tentar acompanhar uma trajetória específica, mas tratar de maneira genérica a tendência de evolução do fluxo definido pelo sistema. Com isso pretendemos determinar características estatísticas de conjuntos de órbitas. Por exemplo: será que o sistema solar é estável? Ou será que algum planeta pode escapar para o espaço? Esta abordagem acaba tendo conseqüências que vão bem além da mecânica celeste (Strogatz, 1998). Poincaré foi o primeiro a vislumbrar a possibilidade da existência de caos, no qual um sistema determinístico exibe comportamento aperiódico que depende sensivelmente das condições iniciais, tornando predições de longo prazo impossíveis.

1.3 Caos Determinístico

Uma das áreas mais interessantes da dinâmica é aquela que trata dos sistemas caóticos determinísticos. Assim como sistemas estatísticos, nos quais a dimensão do espaço de fase é da ordem do número de Avogadro, sistemas de baixa dimensionalidade também podem exibir comportamento caótico, caracterizado por uma dependência exponencialmente crescente das soluções dinâmicas com as condições iniciais. Esta dependência leva à imprevisibilidade da evolução do sistema para uma solução específica. Apenas grandezas estatísticas (médias) podem ser determinadas com precisão após longos intervalos de tempo. E mesmo estas, são sujeitas a grandes desvios estatísticos, levando a definições de novas quantidades, criadas para caracterizar o nosso conhecimento de tais sistemas e a nossa habilidade de sobre eles fazer previsões de curto prazo.

Para exemplificar esta situação, comparemos três sistemas dinâmicos que caem em diferentes classes de universalidade: um gás ideal de partículas clássicas confinadas em um recipiente de paredes rígidas; o oscilador harmônico simples; e o sistema de Lorenz, discutido a seguir. No gás ideal, nosso conhecimento completo do sistema não é possível por causa do número muito elevado de partículas, mas quantidades estatísticas, como a pressão e a temperatura, têm valores bem definidos e sofrem flutuações pequenas. No oscilador harmônico simples todas as quantidades relevantes são conhecidas, e não há significado ou necessidade para definições como temperatura ou pressão. No sistema de Lorenz, oscilações embebidas por um espaço tridimensional ficam restritas a uma região de tamanho finito; soluções ar-

bitrariamente próximas terminam por se afastar, reduzindo a importância e a computabilidade de trajetórias; quantidades estatísticas, como a distribuição de probabilidade no espaço de fase, tornam-se relevantes; e novas características, como a dimensão fractal do atrator, o expoente de Lyapunov, entre outras, dão informações que, em sistemas estatísticos, como o gás ideal, não são significativas (Lorenz, 1963).

O sistema de Lorenz foi proposto como um modelo contínuo extremamente simplificado para descrever a turbulência convectiva em fluidos (o chamado *problema de Rayleigh-Bénard*). As equações diferenciais são

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{cases} \quad (1.6)$$

com σ , r e b parâmetros positivos. Estas equações também descrevem lasers de ganho elevado com dinâmica populacional não-adiabática, conforme foi mostrado por Haken (1975). Foi o primeiro sistema contínuo de equações no qual se descobriu o caos determinístico e tem sido usado como paradigma para a caracterização e definição deste. Para uma introdução didática ver Viana (2000). A não-linearidade aparece sob a forma dos produtos xz e xy no segundo membro das equações 1.6.

Para valores típicos de parâmetros e condições iniciais, as soluções destas equações são não-periódicas e a separação entre trajetórias com condições iniciais infinitesimalmente próximas cresce de maneira exponencial. Isto pode ser demonstrado numericamente, como na figura 1.1, na qual mostramos a componente z de duas soluções que começam separadas por uma distância de 10^{-3} e logo estão completamente descorrelacionadas.

Esta sensibilidade pode ser quantificada em termos dos *expoentes de Lyapunov*. Ao acompanharmos uma trajetória típica⁴ do sistema podemos fazer uma aproximação linear das equações do fluxo para ter uma estimativa da tendência de crescimento de pequenos desvios. O vetor diferença é regido pelo sistema de equações lineares

$$\dot{\delta\vec{x}} = J \left[\vec{f}(\vec{x}) \right] \delta\vec{x}, \quad (1.7)$$

⁴Existem infinitos valores de condições iniciais que dão origem a órbitas periódicas instáveis, isto é, sensíveis a perturbações infinitesimais. Estas órbitas não são trajetórias típicas, pois a probabilidade de se escolher uma condição inicial que permaneça numa órbita instável é nula, para condições iniciais escolhidas aleatoriamente na bacia do atrator. Além disso, mesmo que uma condição inicial não típica seja escolhida, erros numéricos no cálculo da evolução, como o arredondamento feito pelo computador ou a aproximação causada pelo algoritmo de integração da EDO, fazem com que a órbita não seja seguida, revelando sua instabilidade.

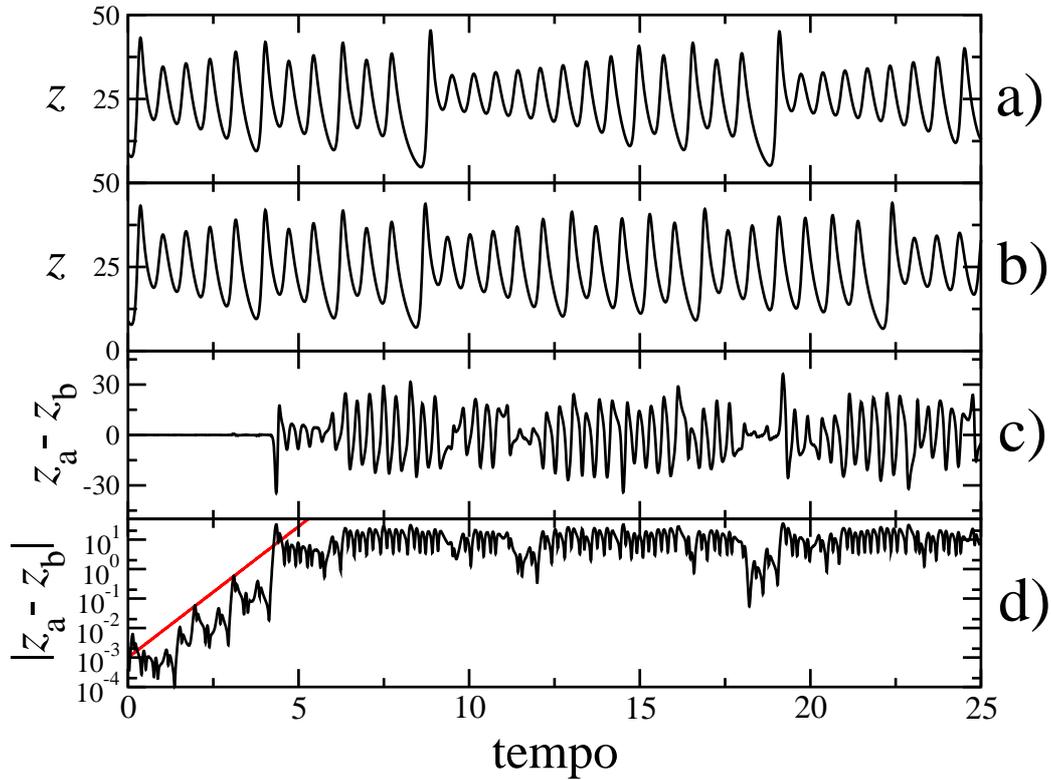


Figura 1.1: Séries temporais do sistema de Lorenz ilustrando a dependência exponencialmente crescente da diferença entre duas soluções com condições iniciais infinitesimalmente próximas. Os parâmetros utilizados foram $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. As condições iniciais para o gráfico a) são $x_0 = 1,000$, $y_0 = 3,0$ e $z_0 = 9,0$, em b) usamos as mesmas condições iniciais exceto por $x_0 = 1,001$. Em c) aparece a diferença $z_a(t) - z_b(t)$. d) mostra o valor absoluto desta diferença em escala logarítmica e suavizado. Nas quatro primeiras unidades de tempo o valor absoluto da diferença cresce cinco ordens de grandeza. A curva vermelha em d) é um ajuste com a expressão $10^{-3} \exp(\lambda t)$, no qual o valor de $\lambda = 2,05$ foi encontrado e corresponde, aproximadamente, ao expoente de Lyapunov positivo deste sistema.

onde J é a matriz jacobiana derivada do fluxo \vec{f} . No sistema de Lorenz esta equação fica

$$\begin{cases} \dot{\delta x} &= \sigma(\delta y - \delta x) \\ \dot{\delta y} &= r\delta x - \delta y - z\delta x - x\delta z \\ \dot{\delta z} &= y\delta x + x\delta y - b\delta z. \end{cases} \quad (1.8)$$

Embora estejamos tratando de um sistema não-linear, autônomo, e com dimensão seis, as equações 1.8 sugerem que as variáveis x , y e z podem ser tratadas como parâmetros dependentes do tempo em um sistema linear e não-autônomo. Conforme discutido anteriormente (ver pág. 6), as soluções para este sistema formam um espaço vetorial de dimensão três e cada componente ortogonal no espaço das soluções deve ter a forma

$$\delta \vec{x}_i = \vec{\delta}_{0i} \exp(\lambda_i t). \quad (1.9)$$

Na equação 1.9, a parte real de λ_i dá a taxa de expansão no tempo da solução para a diferença entre trajetórias próximas; e a parte imaginária representa uma frequência de oscilação (podendo a representação complexa ser substituída por uma representação com funções trigonométricas reais). Se um dos λ_i tem parte real positiva, existe uma tendência das soluções do sistema original se afastarem naquela direção, ou dos erros cometidos em uma solução crescerem. Se um λ_i tem parte real negativa, aquela direção do espaço de fase é localmente contraída. Observe-se que, no caso de λ_i complexos, haverá sempre um complexo conjugado, λ_i^* , e teremos o comportamento de expansão, contração ou oscilação das trajetórias contido em um plano.

Como os coeficientes do sistema, em geral, não são constantes, o caráter das soluções gira para outras direções e muda de amplitude com a evolução temporal. Assim é necessário falar em um comportamento médio, tomando-se os valores médios dos expoentes, ordenados por magnitude, enquanto se acompanha uma trajetória típica do sistema. A parte real destes expoentes médios é a que se refere a literatura como *expoente de Lyapunov médio*. Se acompanharmos uma trajetória específica ou um segmento de trajetória, restrito no tempo ou no espaço, estaremos falando de um *expoente de Lyapunov local*. Frøyland e Alfsen (1984) calcularam os expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz.

Um teorema importante (Fiedler-Ferrara e do Prado, 1994) afirma que um fluxo contínuo autônomo só exhibe soluções caóticas se tiver pelo menos um expoente de Lyapunov nulo, um positivo e um negativo, o que restringe a dimensão destes fluxos a $N \geq 3$. Equações diferenciais com termos atrasados no tempo, entretanto, podem exibir caos com menos de três equações.

Outra propriedade interessante é a relação entre a dissipação e a variação de volume do espaço de fase. Considere um conjunto de condições iniciais

dadas pela superfície de um sólido no espaço de fase (x, y, z) . Para um fluxo contínuo arbitrário a taxa de variação do volume com o tempo é dada por

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV. \quad (1.10)$$

Para as equações 1.6 temos $\nabla \cdot \vec{f} = -\sigma - 1 - b$, o que dá uma taxa de contração de volume constante no tempo. Se o volume inicial do sólido é V_0 , como função do tempo este volume valerá $V(t) = V_0 \exp [-(\sigma + 1 + b)t]$, que vai para zero quando o tempo cresce. Como sabemos que as soluções vão convergir para um conjunto de volume nulo mas que não é um ponto nem um órbita fechada (pois estamos interessados em valores de parâmetros para os quais a solução não seja periódica nem divergente), a superfície do volume inicial deve evoluir para ficar espalhada pelo espaço tridimensional e dentro de uma região com tamanho finito. Quando o atrator de um fluxo ou de um mapa não é um ponto fixo nem uma trajetória periódica (ou *quasi-periódica*, formada por uma superposição de duas ou mais oscilações periódicas com frequências incomensuráveis entre si) dizemos que é um *atrator estranho*. Em geral os atratores estranhos possuem uma *dimensão fractal* (discutida adiante) fracionária. O atrator para soluções caóticas típicas do sistema de Lorenz tem dimensão fractal D_0 tal que $1 < D_0 < 3$, indicando que ele “ocupa mais espaço” que uma linha (dimensão 1) e menos do que um volume (dimensão 3). Strogatz (1998, pág. 413) mostra um valor 2,05 para a dimensão de correlação, descrita mais adiante. Este valor indica que o atrator de Lorenz “ocupa um pouco mais espaço” do que o faria uma superfície (dimensão 2).

A figura 1.2 mostra uma projeção de uma solução neste atrator sobre o plano x - z . Esta solução foi calculada numericamente usando o método padrão de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração constante. Uma descrição bastante intuitiva dos métodos mais usados para integração de equações diferenciais pode ser encontrada em (Strogatz, 1998, cap. 2).

Dado que os sistemas não-lineares podem ser altamente sensíveis às condições iniciais, e particularmente os sistemas caóticos o são, podemos questionar a validade da integração numérica de soluções para equações diferenciais como as de Lorenz. Qualquer método numérico introduz um erro na computação do estado futuro calculado a partir do estado atual. O acúmulo destes erros e a representação finita dos números reais em computadores digitais poderia levar a pseudo-soluções que não estejam relacionadas ao sistema verdadeiro. Felizmente, o problema não é tão grave, como explicado pelo *teorema do sombreamento* de trajetórias (Hammel *et al.*, 1988; Grebogi *et al.*, 1990). Este afirma que, para condições matemáticas que não vamos

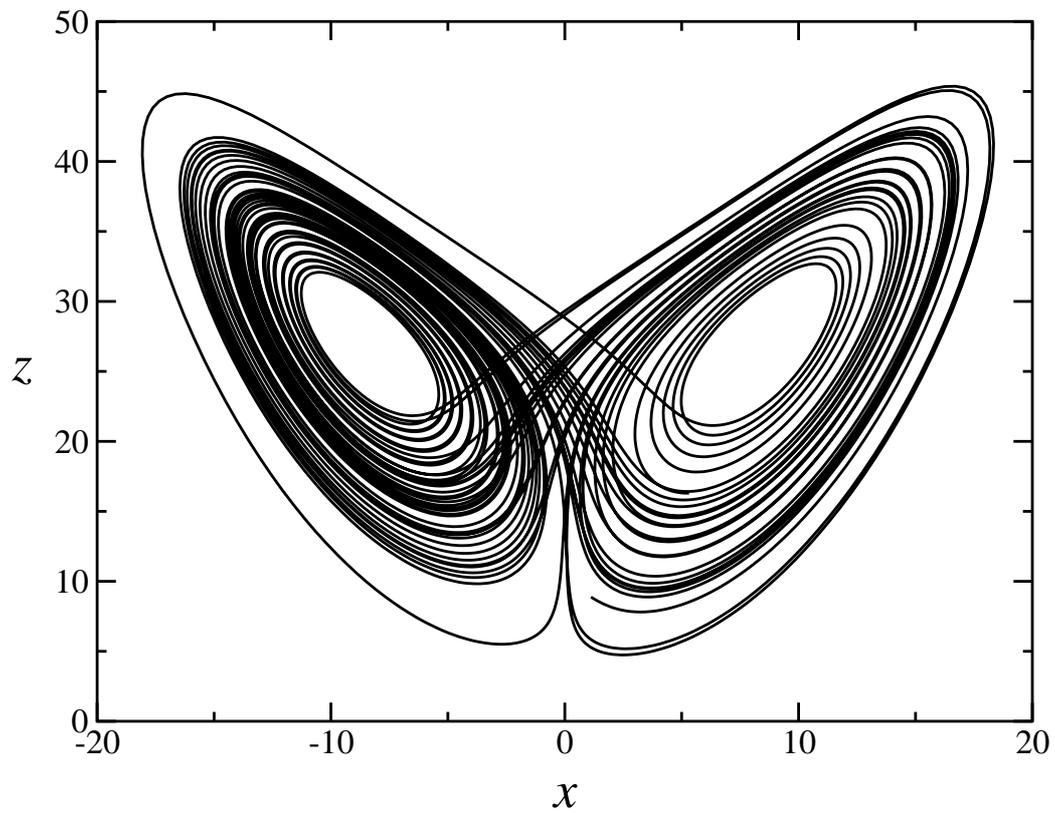


Figura 1.2: Uma solução do atrator de Lorenz, calculada com as equações 1.6 e parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, projetada no plano x - z . As condições iniciais usadas foram $x_0 = 1,0$, $y_0 = 3,0$ e $z_0 = 9,0$.

detalhar aqui, as trajetórias computadas numericamente são infinitesimalmente próximas de trajetórias verdadeiras durante intervalos de tempo mais ou menos longos, dependendo do sistema.

Lorenz também observou uma dinâmica discreta ao construir um mapa discreto a partir das séries temporais contínuas obtidas numericamente. Ele percebeu que existe um certo grau de correlação temporal nas oscilações caóticas semelhantes àquelas da figura 1.1a) e b). Em alguns intervalos a amplitude da oscilação vai crescendo a partir de um pico inicial relativamente pequeno, até atingir uma certa amplitude limite, depois da qual ocorre um ou mais vales e picos de amplitude relativamente grande e o processo se repete. O número de oscilações em cada evento é aparentemente aleatório. Para descrever este comportamento, Lorenz construiu um mapa no qual se desenha o valor do máximo local (pico) da variável z em função do valor do máximo anterior no tempo. O resultado é um mapa discreto como o mostrado na figura 1.3, cuja dinâmica exhibe as principais características da evolução do sistema contínuo.

Na verdade, Lorenz demonstrou com este mapa de próximo máximo, que o sistema tem caos, e não trajetórias com período muito grande.

O comportamento dinâmico do sistema de Lorenz pode ser compreendido qualitativamente pela análise dos *pontos fixos* instáveis do espaço de fase. Pontos fixos são aqueles para os quais a taxa de evolução do sistema se anula, $\vec{f}(\vec{x}) = 0$. O fluxo dado pelas equações 1.6 tem apenas três pontos fixos: chamemos O , C_- e C_+ . Uma obtenção passo-a-passo destes pode ser vista em Strogatz (1998). O ponto O fica na origem do sistema de coordenadas. Os pontos C_- e C_+ têm coordenada z positiva e ficam simetricamente opostos com respeito ao eixo z . Os pontos C_- e C_+ são pontos instáveis tipo sela, ou seja, atraem as trajetórias em uma direção perpendicular à superfície do atrator e as repelem no plano tangente a este. Assim, o aumento de amplitude nas oscilações pode ser interpretado como um afastamento espiral de uma trajetória ao redor de um dos pontos C_{\pm} . Depois de se afastar de maneira não-linear, a trajetória eventualmente atinge a região de repulsão do ponto O , onde recebe um grande impulso que a joga para fora do plano, na região de atração do outro ponto C_{\mp} . Ocorre então outra seqüência espiral ao redor deste outro ponto.

1.3.1 Mapas

Caos em sistema discretos também pode ser obtido através de mapas. A equação de diferenças finitas em primeira ordem

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \quad (1.11)$$

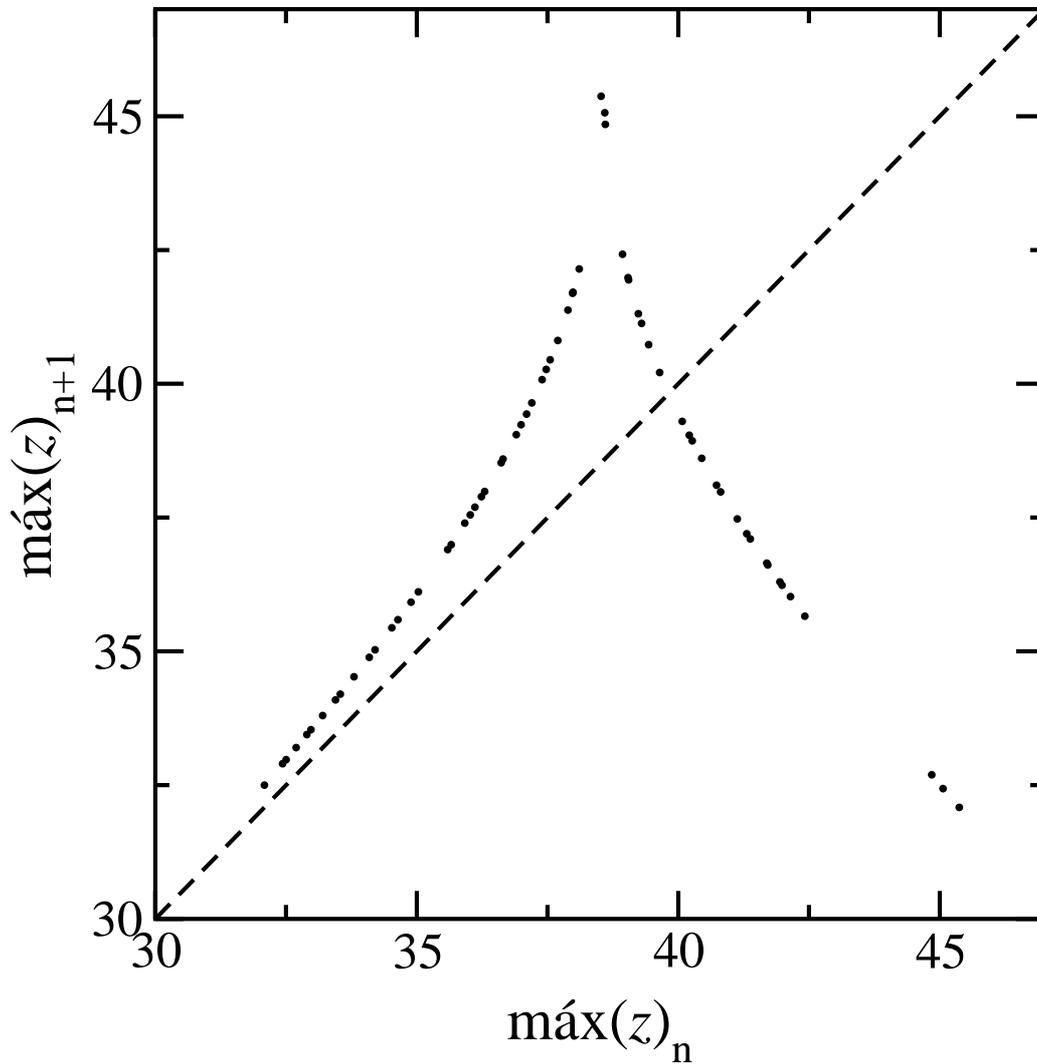


Figura 1.3: Mapa de máximos da variável z do atrator de Lorenz. Este mapa foi construído extraindo-se 65 máximos da série mostrada na figura 1.2.

é o paradigma dos mapas caóticos. Na verdade, é possível mostrar que uma grande classe de mapas deste tipo pode ser transformada no mapa de Hénon.

$$\begin{cases} x_{n+1} = A - x_n^2 + By_n \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (1.12)$$

O exemplo mais conhecido é o mapa logístico, o primeiro sistema discreto no qual se demonstrou a existência de caos determinístico. O mapa logístico surgiu inicialmente como um modelo para descrever dinâmica populacional de insetos com amostragem sazonal. A equação, normalizada por

uma população máxima, é

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.13)$$

e pode ser obtida a partir do mapa de Hénon (eq. 1.12) tomando-se o limite $B \rightarrow 0$. A taxa de contração de área (ou volume) no espaço por iteração é dada pela matriz jacobiana derivada do mapa. Fisicamente, $1/B$ pode ser interpretado como uma taxa de dissipação no espaço de fase das variáveis x e y , ou mais exatamente, o fator de expansão/contração de área por iteração do mapa é igual ao determinante da matriz jacobiana. O limite $B \rightarrow 0$ significa, então, dissipação infinita (extremamente rápida comparada com o tempo discreto de amostragem) na direção y . O mapa logístico exibe diversas características universais. Entre estas, a rota para o caos a partir da cascata de dobramentos de período (Feigenbaum, 1978); o surgimento de janelas periódicas estáveis seguindo o ordenamento de Sarkovskii [ver p. ex. (Ott, 1997, pág. 49)]; e a estrutura da dinâmica simbólica demonstrada por Metropolis *et al.* (1973). Todas as janelas periódicas do mapa logístico surgem por *bifurcação tangente* (ver seção 1.6 e Ott (1997)), e desaparecem em uma *crise* (Grebogi *et al.*, 1983). A crise é uma mudança abrupta na dinâmica caótica, causada por uma colisão entre um atrator caótico e uma órbita periódica instável. Mais tarde se mostrou que todos os mapas unimodais satisfazendo certas propriedades (derivada Schwartziana negativa) apresentam comportamento semelhante. Daí a denominação de universal (Ott, 1997).

Para estudar fluxos contínuos, com grande dissipação (contração de volume no espaço de fase) é comum usar o *mapa de próximo máximo*, ou *mapa de Lorenz*, construído a partir do máximo local de uma variável contínua. No caso do sistema de Lorenz, usamos $z(t)$ [assim como o próprio Lorenz, na referência (Lorenz, 1963)]. Da seqüência de pontos obtida, vemos que o mapa pode ser aproximado pela equação de uma cúspide, ($z_{n+1} = 1 - \sqrt{|2z_n - 1|}$), cuja forma pode ser ajustada através de translações e dilatações de escala para reproduzir os pontos obtidos em uma solução do sistema dado pelas equações 1.6. Isto é válido no regime de alta dissipação (o volume vai a zero rapidamente), e é apenas uma aproximação para o sistema de Lorenz. De fato, o conjunto de pontos formados no mapa de próximo máximo (figura 1.3) não forma uma curva fina, mas sim um conjunto fractal com alguma espessura.

Em geral, a maioria dos sistemas caóticos tem a sua dinâmica determinada por alguns poucos tipos de bifurcações de pontos ou órbitas, e as formas como estas bifurcações ocorrem são qualitativamente similares a bifurcações elementares, como as tratadas em (Crawford, 1991). É comum fazer uma análise qualitativa do comportamento de um sistema dinâmico representando

as bifurcações de interesse por um modelo de bifurcação simplificado, válido para uma expansão local da equação exata em série de potências. Quando os coeficientes deste modelo são normalizados, dizemos que a expansão local é chamada de *forma normal* da bifurcação em questão. Por exemplo: a cascata de bifurcações de dobramento de período que aparece no cenário de Feigenbaum tem cada bifurcação aproximada pela forma normal

$$x_{n+1} = x_n(1 + \epsilon - x_n^2). \quad (1.14)$$

As formas normais associadas as bifurcações com intermitência serão estudadas em capítulos subseqüentes.

Em mapas discretos, dimensão 1 já é suficiente para comportamento caótico, desde que o mapa não seja inversível. Mapas inversíveis unidimensionais podem apresentar soluções quasi-periódicas, nas quais a diferença infinitesimal entre duas soluções cresce linearmente (ou polinomialmente) com o tempo. Mapas inversíveis podem apresentar soluções caóticas a partir de dimensão 2. O mapa de Hénon é inversível e bidimensional. O conceito de expoente de Lyapunov permanece válido para mapas, havendo um único expoente positivo para mapas unidimensionais caóticos. Fazemos a aproximação linear da equação 1.11 no caso unidimensional e nas proximidades de um ponto fixo x^* :

$$x_{n+1} - x^* = f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) - x^*.$$

Fazendo $M = f'(x^*)$, a derivada da função $f(x)$ avaliada em x^* e usando a definição de ponto fixo para mapas, $f(x^*) = x^*$, obtemos

$$x_{n+1} - x^* = M(x_n - x^*). \quad (1.15)$$

M é conhecido como *multiplicador de Floquet*. Comparando com a dinâmica de um fluxo teríamos $M = \exp(\lambda T)$, onde λ é o autovalor do fluxo contínuo linearizado e T é o equivalente contínuo do tempo discreto unitário entre iterações do mapa.

Ao invés de um ponto fixo, também poderíamos usar $x_p^* = f^{(p)}(x_p^*)$, um dos p pontos fixos da p -ésima iteração do mapa, para o caso de analisarmos a estabilidade de uma órbita periódica de período p

$$x_{n+p} - x_p^* = \frac{df^{(p)}(x_p^*)}{dx}(x_n - x_p^*). \quad (1.16)$$

Se o mapa não é unidimensional, podemos obter uma matriz jacobiana para a aproximação linear

$$\vec{x}_{n+p} = M \left[\vec{f}^{(p)}(x_p^*) \right] \vec{x}_n, \quad (1.17)$$

cada autovalor da matriz M corresponde a um multiplicador de Floquet em uma direção do hiper-espaço. Se ao invés de um ponto fixo ou trajetória periódica estivermos acompanhando uma trajetória arbitrária, estes autovalores serão as exponenciais dos expoentes de Lyapunov desta trajetória.

Voltando a discutir mapas unidimensionais, com um ponto fixo ou ponto fixo de uma ordem de iteração superior do mapa (trajetória periódica), x_p^* , podemos ter $|M| < 1$, este ponto (trajetória) será estável (atrator), pois o conjunto dos $x_{n+p} - x_p^*$ formará uma série geométrica que converge para 0. Se $|M| > 1$ temos um ponto (trajetória) instável, ou seja x_p^* é repulsor. A variação de um parâmetro pode alterar o valor de M e de x_p^* . Quando $|M|$ passa pelo valor 1, o ponto ou trajetória x_p^* muda qualitativamente de comportamento, houve uma *bifurcação*. Um valor $M = -1$ é associado à bifurcação de dobramento de período, pois pode corresponder, por exemplo, à troca de estabilidade entre a órbita de período 1 e a órbita de período 2 que acontece quando ϵ passa de negativo para positivo na equação 1.14. O valor $M = 1$ é associado à bifurcação tangente, descrita na seção 1.6. Uma revisão sistemática da teoria de bifurcações dinâmicas em sistemas discretos e contínuos pode ser encontrada na referência (Crawford, 1991).

1.4 Medida Probabilística Natural

Para atratores resultantes de sistemas dinâmicos, a *medida probabilística*, μ , de um subconjunto do espaço de fase (um ponto ou intervalo, em sistemas unidimensionais) é definida como a fração de tempo que as trajetórias do sistema passam neste subconjunto com respeito ao tempo total passado no restante do espaço de fase disponível. No caso do atrator de um sistema dinâmico, com o espaço de fase particionado em hipercaixas C_i , a medida pode ser calculada como

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, \vec{x}_0, T)}{T}, \quad (1.18)$$

onde $\eta(C_i, \vec{x}_0, T)$ é a quantidade de tempo que a órbita originada na condição inicial \vec{x}_0 (dentro da bacia de atração do atrator de interesse) passa dentro da caixa C_i no intervalo $0 \leq t \leq T$.

Sendo uma probabilidade, a medida tem as propriedades características de aditividade, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, e de que a medida do conjunto todo é unitária. Assim, se M é o atrator caótico de interesse, $\mu(M) = 1$.

Dizemos que uma medida é *invariante* pela transformação f quando o resultado da iteração em um mapa (ou evolução temporal em um fluxo)

preserva esta medida, ou seja,

$$\mu(X) = \mu [f^{-1}(X)]. \quad (1.19)$$

Uma medida invariante é dita *natural* quando é robusta a pequenas perturbações. Um sistema no qual a medida natural é única é chamado ergódico, e satisfaz a hipótese ergódica de Boltzmann, de que médias temporais são iguais a médias de *ensemble*. Há também sistemas dotados de multi-estabilidade, ou seja, nos quais existe mais de uma medida natural, correspondendo a diferentes atratores que coexistem no espaço de fase. Neste caso, condições iniciais distintas podem levar a atratores diferentes, e a média temporal será diferente da média de ensemble. Ainda neste caso, é possível que as fronteiras entre os atratores e/ou entre suas bacias de atração sejam fractais, de maneira que entre cada duas condições que levam a um atrator haja infinitas condições que levam a outro.

A existência de uma medida invariante também pode ser descrita em termos de uma densidade de probabilidade. Se $\mu(x)$ é a medida probabilística dos pontos no intervalo infinitesimal dx podemos definir uma densidade $\rho(x) = \mu(x)/dx$. Para mapas unidimensionais a definição de que a densidade invariante não é alterada pela iteração do mapa leva à equação de Frobenius-Peron:

$$\rho(x) = \sum_i \rho [f_i^{-1}(x)] |f' [f_i^{-1}(x)]|^{-1}, \quad (1.20)$$

onde $f_i^{-1}(x)$ são as pré-imagens de x pela aplicação de f , ou, seja, todos os valores y_i tais que $f(y_i) = x$ e f' é a derivada do mapa avaliada sobre estes valores.

Esta equação permite encontrar a medida natural de alguns mapas caóticos simples (Ott, 1997). Em particular, Manneville (1990) a usou para encontrar esta medida no mapa que serve de paradigma para a intermitência do tipo III, e nós utilizamos esta medida para calcular a média da variável caótica nesta intermitência, conforme descrito no capítulo 3 (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2002). O fato da equação para a densidade apresentar termos inversamente proporcionais à derivada do mapa também sugere que as regiões de derivada pequena vão apresentar maior densidade, quando forem visitadas. Com efeito, as regiões de derivada nula, sua próximas iterações, e as regiões cuja derivada seja próxima de 1, quando acessíveis à dinâmica, freqüentemente correspondem a picos na densidade de probabilidade do atrator nos mapas unidimensionais, ou seja, regiões muito visitadas. Estes picos podem ser vistos como “cicatrices” escuras em um diagrama do atrator (Bailin, 1989), se o número de pontos utilizado (ou o tempo de amostragem) não for grande o suficiente para preencher todo o atrator.

1.5 Dimensão Fractal

Como observou Mandelbrot (1982): “A costa de uma ilha ou de um continente não é perfeitamente descrita por uma linha poligonal; o formato das montanhas não é cônico; a forma de uma nuvem nunca é esférica. A maioria dos fenômenos naturais parece fugir das formas euclidianas, preferindo dar origem a formas geométricas fractais.”

A dimensão fractal de um conjunto (ou objeto) pode ser definida a partir da relação entre o número de hiper-caixas de diâmetro ϵ usadas para cobri-lo e o diâmetro destas caixas, no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Suponha, por exemplo, que estamos cobrindo um segmento de reta em duas ou três dimensões. O número mínimo de caixas disjuntas, de diâmetro ϵ , necessário para que o conjunto das caixas contenha o segmento de reta deve ser tal que a medida do comprimento do segmento L seja a soma dos diâmetros das caixas. Se estas têm todas o mesmo diâmetro, a soma vale $L = N\epsilon$. Se ao invés de uma curva estivéssemos recobrimo uma superfície suave, teríamos uma relação similar para a área desta superfície em termos da área total das caixas bidimensionais $S = N\epsilon^2$, para volumes teremos $V = N\epsilon^3$, e generalizando, o tamanho de um objeto embebido em um hiper-espaço de dimensão M será

$$L = N\epsilon^D,$$

onde D , também representado como D_0 ou D_H é a *dimensão de capacidade* ou *dimensão de Hausdorff*, ou ainda *dimensão por contagem de caixas*.

Assim para calcularmos a dimensão fractal de um conjunto-objeto formado por pontos localizados em um hiper-espaço, sendo estes pontos localizados por um conjunto de M coordenadas, e limitado por uma distância máxima $L = 1$, podemos dividir o espaço ao redor do conjunto em $\mathcal{N} = \epsilon^M$ caixas e contar o número $N(\epsilon)$ de quantas destas contém pelo menos um ponto pertencente ao conjunto-objeto. No limite em que o tamanho das caixas é o menor possível acima da resolução espacial das coordenadas de localização dos pontos usamos a relação

$$\begin{aligned} \ln L = 0 &= \ln N + D \ln \epsilon \\ -\ln N &= D \ln \epsilon \\ D &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Uma definição mais geral para descrever estes conjuntos é aquela do *espectro de dimensões*, na qual atribuímos um peso a cada caixa do espaço

dependendo de uma potência da probabilidade de visitaçoão daquela caixa pelo conjunto de pontos do objeto.

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (1.22)$$

onde $I(q, \epsilon) = \sum_i \mu_i^q(\epsilon)$ é uma soma da probabilidade de visitaçoão da caixa μ_i com cada termo elevado ao parâmetro contínuo q . Intuitivamente, q implica em um peso ou importância da probabilidade na soma, e conseqüentemente, na dimensão calculada. Para $q = 0$ temos a dimensão de capacidade, só contam as caixas ocupadas e todas contam com o mesmo peso, sem levar em consideração o número (ou medida, ou massa) de ocupação. A dimensão de capacidade está associada a “capacidade de canal” definida em teoria da informação e engenharia de comunicações. Também está relacionada à chamada *entropia topológica* do sistema que é um limitante superior para a taxa de geração de entropia (informação) no sistema. Para $q = 1$ temos a chamada dimensão de informação, que dá a relação entre a entropia (na definição de Boltzmann $S = -k \sum_i \mu_i \ln \mu_i$) do nosso conjunto e a escala na qual este está sendo observado. Com $q = 1$, o numerador da equação 1.22 é uma definição da *entropia de Kolmogorov-Sinai* do conjunto. $q = 2$ dá a dimensão de correlação, relacionada com a probabilidade de dois pontos ocorrerem próximos por uma distância ϵ . Para $q \rightarrow -\infty$ a dimensão obtida leva em conta as regiões do conjunto com medida pequena, isto é, baixa taxa de visita, enquanto $q \rightarrow \infty$ prioriza as regiões muito visitadas.

Para mostrar uma das maneiras pelas quais a geometria fractal pode aparecer em sistemas dinâmicos vamos comparar a evolução do atrator do mapa logístico (eq. 1.13) com o famoso *conjunto de Cantor do terço central*. No sistema de Lorenz com parâmetros típicos, o próprio atrator (figura 1.2) é um objeto fractal. No caso do mapa logístico a dimensão por contagem de caixas para um valor de parâmetro típico do caos é 1. Apesar disto a densidade de probabilidade é repleta de singularidades, levando a valores fracionários de D_q para $q > 0$.

O conjunto (ou *poeira*) de Cantor é formado a partir do intervalo unitário, no limite de infinitas iteraçoões do processo de se retirar o terço central de cada intervalo compacto restante da iteraçoão anterior, conforme esboçado na figura 1.4. Para calcular a sua dimensão por contagem de caixas basta verificar que, em cada iteraçoão do processo de construção, há $N = 2^n$ caixas de tamanho $\epsilon = 3^{-n}$ cada uma. Usando a equação 1.21 obtém-se $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,630929753571 \dots$. Apesar disto, sua medida euclideana, dada pela soma dos infinitos segmentos restantes, é nula, como podemos calcular a partir do complemento da soma dos intervalos retirados em cada etapa da construção.

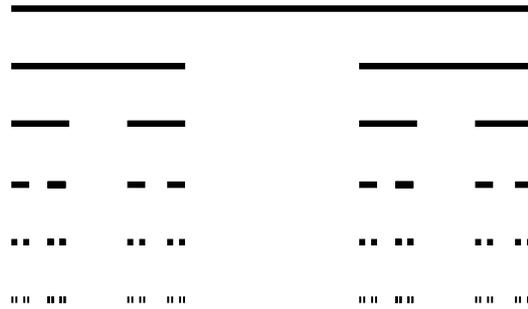


Figura 1.4: Etapas da construção do conjunto de Cantor do terço central.

A figura 1.5 mostra algumas iterações no atrator do mapa logístico calculados em diferentes valores do parâmetro r . O atrator passa por infinitas bifurcações, mas observemos aqui a cascata inversa de fusão de faixas caóticas. Para ressaltá-la, alguns valores de r foram escolhidos para calcular um número maior de iterações, desenhadas com pontos maiores e sobrepostas sobre o atrator menos denso. Vemos que o mapa logístico passa por todas as etapas de construção de um conjunto de Cantor, quando r é variado apropriadamente. Este fato também é uma evidência de que os mapas universais

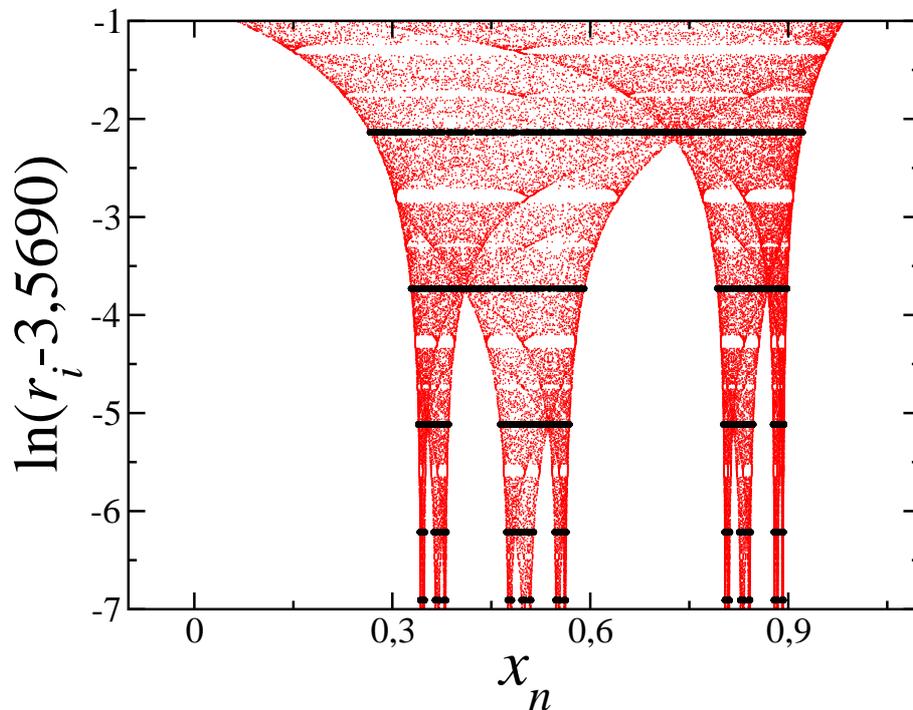


Figura 1.5: Mapa logístico construindo conjunto de Cantor.

podem apresentar características de fractais, como a invariância discreta de escala, em diferentes etapas de sua construção, quando se fazem variações adequadas da escala de observação e dos parâmetros simultaneamente. Os valores de r utilizados na figura 1.5 para ressaltar as etapas de construção do conjunto de Cantor foram $r_i = 3,687, 3,593, 3,575, 3,571$ e $3,5700$.

1.6 Intermitência

A chamada transição por intermitência para um atrator caótico foi caracterizada por Pomeau e Manneville (1980) como uma rota para o caos. Está relacionada à proximidade de uma bifurcação, na qual a variação de um parâmetro destrói a estabilidade de uma órbita periódica estável e o caos que segue apresenta longos períodos de oscilação semelhante à órbita recém extinta. Esta fenomenologia guarda similaridade com a turbulência que ocorre em fluidos (Bergé *et al.*, 1980; Dubois *et al.*, 1983)

Originalmente, Pomeau e Manneville classificaram três tipos de intermitência e propuseram a analogia dos sistemas contínuos com mapas unidimensionais que exibem comportamento similar, quantitativa e qualitativamente. O comportamento intermitente também tem um caráter universal, no sentido de que muitos sistemas dissipativos podem ser reduzidos a mapas unidimensionais e estes, por sua vez, aproximados em séries de potências nas proximidades dos pontos fixos. E, entre as formas normais mais comuns, estão as que correspondem às intermitências de Pomeau e Manneville, presentes nos mapas unimodais, como o logístico, e nos fluxos de Rössler e Lorenz, etc. (Manneville e Pomeau, 1979).

O tipo I ocorre próximo a uma *bifurcação tangente*. O mapa da j -ésima iteração aproxima-se da tangência com a reta identidade. Quando o parâmetro é tal que ocorre a formação de um canal estreito entre a curva do mapa e a identidade, a trajetória passará um grande número de iterações no interior deste canal, pois as diferenças entre uma iteração e a próxima são muito pequenas. Do ponto de vista de teoria de bifurcações, a bifurcação tangente apresenta um multiplicador de Floquet passando pelo valor $+1$ (Crawford, 1991). Logo após a bifurcação, uma expansão linear do mapa dá um multiplicador de Floquet um pouco maior que 1, o que significa que a próxima iteração será um pouco maior (mais distante do ponto onde houve a tangência) do que a atual. O ponto fixo estável é chamado também *nó* em parte da literatura de teoria das bifurcações. Como ele colide com um ponto fixo instável, formando um ponto-de-sela no valor crítico do parâmetro de controle, a bifurcação tangente também é dita *bifurcação sela-nó*. Há ainda a denominação de *bifurcação do céu azul* (*blue sky*) porque a órbita periódica

(ou o caos) surge a partir do nada (“*appears out from the blue sky*”).

A figura 1.6 mostra um diagrama qualitativo do mapa próximo à tangência, os vértices da curva em forma de escada que tocam a curva parabólica do mapa são pontos da trajetória, com a seta indicando a direção no tempo em que eles acontecem. A reta tracejada corresponde à identidade, $y = x$.

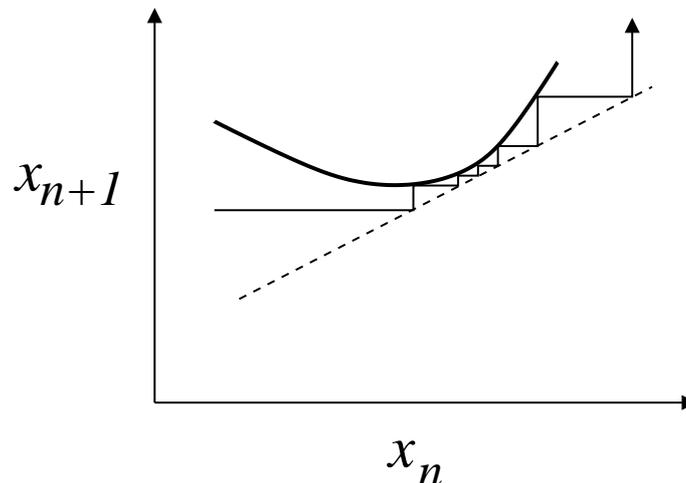


Figura 1.6: Diagrama qualitativo da tangência associada à intermitência do tipo I em mapas discretos unidimensionais.

O tipo II corresponde a um multiplicador de Floquet cruzando o círculo unitário no plano complexo por um número com componente imaginária não-nula. Assim, após a bifurcação, a parte real do multiplicador de Floquet é um fator expansor e a parte imaginária corresponde a uma frequência de oscilação para as iterações do mapa. Este tipo não pode ocorrer em mapas unidimensionais com variável real. A representação complexa pode ser substituída por uma representação com funções trigonométricas (Guckenheimer e Holmes, 1983).

O tipo III ocorre com uma bifurcação na qual o multiplicador de Floquet passa pelo valor -1 , ou seja, a próxima iterada é maior em valor absoluto mas tem sinal oposto a atual. Isto pode ser descrito como uma bifurcação de dobramento de período sub-crítica, ou seja, a órbita de período duplo existe para valores do parâmetro abaixo do valor crítico mas é instável, contrariamente às bifurcações super-críticas da cascata de Feigenbaum. A figura 1.7 é o análogo da 1.6 para este tipo de intermitência.

É possível mostrar que a intermitência do tipo II é análoga a do tipo III, uma vez que o módulo do número complexo (amplitude da oscilação) satisfaz a mesma regra que a forma normal para a segunda iterada da intermitência tipo III.

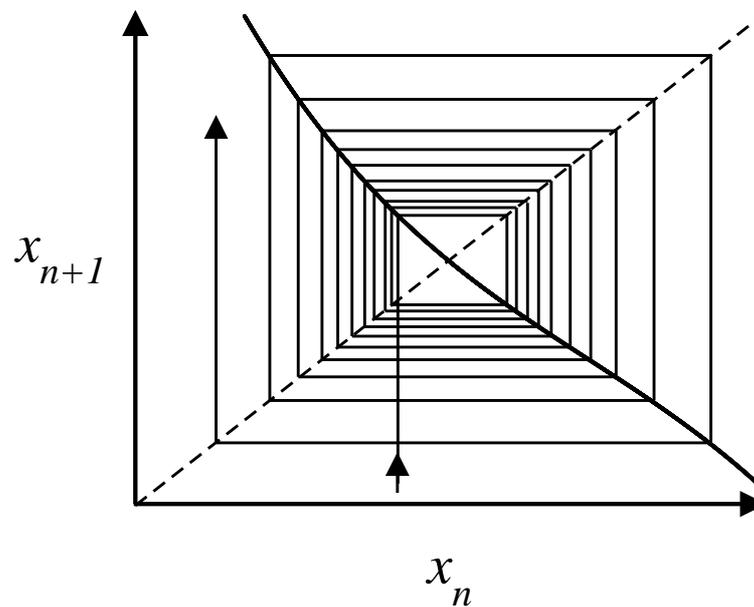


Figura 1.7: Diagrama qualitativo do mapa unidimensional associado à intermitência do tipo III.

Vários outros tipos de intermitência foram relatados após o trabalho original de Pomeau e Manneville: tipo V (Bauer *et al.*, 1992; Qu *et al.*, 1998), tipo X (Price e Mullin, 1991; Gambaudo *et al.*, 1986) e intermitência *on-off* (Platt *et al.*, 1993). Esta última é associada à sincronização de sistemas caóticos.

Capítulo 2

Intermitência Tipo I

2.1 Revisão

A intermitência primeiramente classificada por Pomeau e Manneville tem forma normal

$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + x_n^2. \quad (2.1)$$

Esta forma aparece, por exemplo, nas bifurcações tangentes do mapa logístico, e portanto, é uma característica “universal” de sistemas caóticos fortemente dissipativos. Para $\epsilon < 0$ e pequeno, temos dois pontos fixos, um estável e o outro instável, que correspondem às raízes de uma equação polinomial do segundo grau,

$$x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-\epsilon}.$$

O ponto fixo estável é o atrator do sistema. O comportamento é periódico. Com o decréscimo do valor absoluto de ϵ estes pontos fixos vão se aproximando, até a coalescência em $\epsilon = 0$. A partir deste valor, a forma normal não possui mais pontos fixos em período 1 [ver fig. 8, pág. 1001, e eq. 5.29, pág. 1005, de Crawford (1991)]. Entretanto, para ϵ positivo próximo de zero, uma cicatriz da órbita de período 1 pode ser vista no atrator, em virtude do estreito canal de passagem das iterações formado entre a curva do mapa e a identidade em $x = 0$. A figura 2.1 mostra, qualitativamente, a coalescência dos pontos fixos com a variação de ϵ . Este tipo de comportamento tem analogia com o caos intermitente que aparece no estudo da turbulência (Bergé *et al.*, 1980; Dubois *et al.*, 1983), e, devido a seu caráter universal, aparece em sistemas contínuos dissipativos, como o sistema de Lorenz. Apesar de eventualmente sofrer desvios do comportamento unidimensional quando a contração no espaço de fase não é suficiente para validar a aproximação unidimensional (Kaplan, 1994). O sistema de Lorenz, com seus mapas em forma

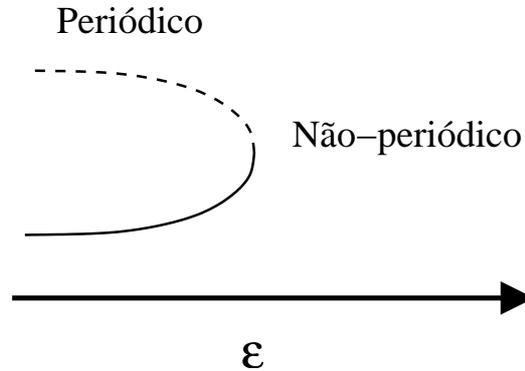


Figura 2.1: Diagrama qualitativo da bifurcação tangente associada à intermitência do tipo I.

de cúspide, também pode exibir bifurcações tangentes, e, decorrentemente, intermitência do tipo I (Manneville e Pomeau, 1979).

O período no qual a variável x está atravessando o canal entre a equação do mapa e a reta identidade é caracterizado por um grande número de iterações cujos valores são próximos (o multiplicador de Floquet local é pouco maior que um), a série temporal parece ser periódica, o sistema é dito estar passando por uma fase laminar, como no escoamento ordenado de um fluido. Eventualmente a amplitude acumulada cresce até o regime não-linear, quando um mecanismo não-linear (não indicado na equação 2.1, mas a ser especificado mais adiante) pode levar a uma reinjeção (também chamada relaminarização) de volta à proximidade do canal. Uma característica de interesse, estudada por Pomeau e Manneville, é o tempo (duração) médio das fases laminares, \bar{l} , como função do parâmetro ϵ . Usando a hipótese de que a reinjeção ocorre com uma distribuição uniforme sobre o canal, Pomeau e Manneville, e outros, usando diferentes técnicas, obtiveram uma lei de comportamento crítico tipo

$$\bar{l} = \epsilon^{-1/2}. \quad (2.2)$$

A divergência do comprimento da fase ordenada lembra uma transição de fase, como a magnetização no modelo de Ising.

A teoria de grupo de renormalização foi aplicada à intermitência do tipo I, inclusive para corrigir resultados que não correspondiam às observações feitas em experimentos numéricos. Não é do nosso conhecimento que a teoria de renormalização tenha obtido expoentes críticos complexos ou oscilações com outro tipo de periodicidade (Hu e Rudnick, 1982a,b; Kodama *et al.*, 1991) especificamente para as bifurcações tangentes.

Além de teoria de grupo de renormalização, outras técnicas podem ser

utilizadas para o cálculo das grandezas estatísticas nos sistemas com intermitência. A primeira técnica usada foi a aproximação do mapa por equações contínuas e integração destas, por exemplo (Hirsch *et al.*, 1982; Hu e Rudnick, 1982b; Bergé *et al.*, 1980). Uma terceira alternativa seria a integração sobre a densidade de probabilidade calculada com a equação de Frobenius-Peron (eq. 1.20).

Entretanto, o comportamento crítico obtido por estes métodos depende de peculiaridades como a densidade de probabilidade de reinjeção (Kwon *et al.*, 1996), presença de ruído (Hirsch *et al.*, 1982; Cho *et al.*, 2002), diferentes formas de não-linearidade (Hu e Rudnick, 1982a; Kodama *et al.*, 1991), etc. Estes fatores não foram completamente esgotados no início da teoria. O efeito da reinjeção no comportamento crítico foi estudado em sistemas experimentais (Kim *et al.*, 1994) e cálculos numéricos (Kwon *et al.*, 1996).

Uma revisão relativamente antiga da intermitência tipo I, porém detalhada, pode ser encontrada em Hirsch *et al.* (1982). Particularmente, esta trata dos desvios sofridos pelo comportamento intermitente unidimensional quando a dimensão aumenta, ou seja, quando a dissipação de volume no espaço de fase diminui.

Apesar dos refinamentos calculados desde a proposição original de Poineau e Manneville, nós encontramos uma estrutura fina no comportamento crítico (*scaling*) associado à intermitência tipo I (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2000b; de S. Cavalcante *et al.*, 2001). Não é do nosso conhecimento que estas oscilações tenham sido relatadas anteriormente neste sistema. Aparentemente, em todos os métodos, mesmo os chamados “exatos”, como a teoria de grupo renormalização, as soluções oscilantes não aparecem ou são desprezadas. Sornette (1998) e outros têm enfatizado a existência de oscilações em sistemas dotados de invariância discreta de escala. Também encontramos estas oscilações em diversos outros mapas que apresentam intermitência tipo I (mapa da forma normal quadrática com reinjeção tipo *modulo*, mapa de So-Ose-Mori, mapa com forma normal de tangência quártica) e nas médias temporais das variáveis dinâmicas dos sistemas de Lorenz (seção 1.3), Rössler [seção 2.10.1 e referência Rössler (1976)], no modelo do oscilador RLD (cap. 4), e no modelo de Tachikawa para lasers com absorvedor saturável intracavidade (seção 2.10.3).

2.2 Média da Variável Dinâmica

Para estudar a relação característica da intermitência tipo I escolhemos um dos mais simples observáveis que se pode extrair de um sistema físico: a

média da variável dinâmica x_n , definida como

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n. \quad (2.3)$$

O cálculo da média do mapa logístico já tinha sido usado por Lorenz (Lorenz, 1964) para ilustrar a sensibilidade que os sistemas dinâmicos não-lineares possuem a pequenas variações de parâmetros. Reproduzimos e estudamos com mais detalhes a média no mapa logístico em (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2000b). A figura 2.2 mostra o atrator e a média da variável

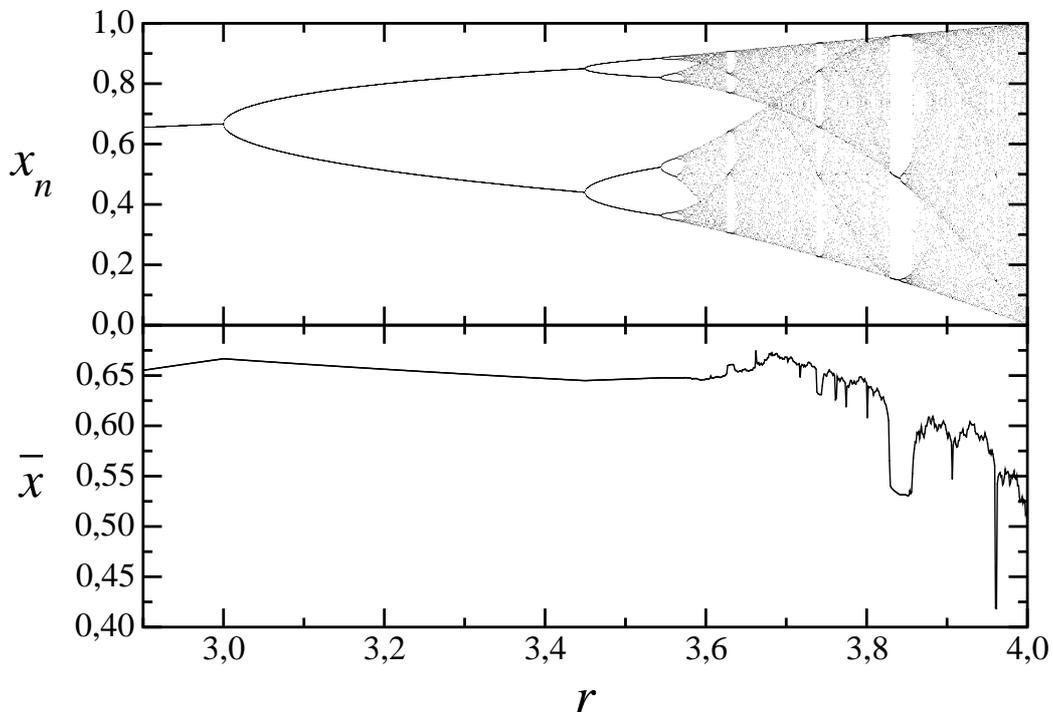


Figura 2.2: Atrator e média do mapa logístico como função do parâmetro r .

dinâmica x_n do mapa logístico como função do parâmetro r (ver eq. 1.13). As bifurcações para janelas periódicas na região caótica são visíveis na média como platôs, dando um aspecto “mal comportado” para a média, que Lorenz (1964) apontou como um possível empecilho para a determinação do clima de uma região. Apesar destas flutuações e das flutuações temporais que exigem grandes intervalos de tempo para sua determinação precisa, podemos afirmar que média de um sistema não-linear é robusta a perturbações nos valores dos parâmetros (globalmente estável) e a presença de ruído (Lai *et al.*, 2002).

Kobayashi *et al.* (1993) descrevem a diferença entre médias de tempo finito e suas flutuações com respeito a média de tempo infinito. Estas flutuações servem de base para construir um formalismo termodinâmico para sistemas com intermitência.

Nos mapas unidimensionais aqui analisados é válida a hipótese ergódica, de modo que, para quase toda condição inicial na bacia do atrator, a média das iterações no tempo, \bar{x} , (descartado um transiente curto comparado com o número total de iterações) é igual à média ($\langle x \rangle$) dos valores de x integrados em todo o espaço disponível, usando como peso a medida natural do atrator:

$$\langle x \rangle = \bar{x}. \quad (2.4)$$

Podemos então fazer médias de *ensemble*, usando muitas condições iniciais e descartando um transiente para permitir que estas trajetórias convirjam para o atrator. Na verdade, a combinação de médias temporais e de *ensemble* é mais precisa para o cálculo numérico, pois evita que condições iniciais viciadas localmente no tempo (ou seja, transientes longos) causem flutuações.

No cenário intermitente a transição do estado caótico (ou quasi-periódico) para o periódico ocorre aos poucos, com o aumento gradual dos comprimentos das fases laminares. Isto nos permite desenvolver uma relação entre os comportamentos críticos da duração média das fases laminares, também chamada o comprimento laminar médio, \bar{l} , e da média de uma variável caótica ou quasi-periódica no regime de intermitência: suponha que as fases laminares e o restante do atrator caótico (ou quasi-periódico) tenham médias espaciais diferentes, conforme a figura 2.3, chamemos estes valores $\langle x \rangle_l$ e $\langle x \rangle_c$, respectivamente. É bastante comum que estes valores sejam diferentes pois os pontos da órbita periódica geralmente são distribuídos de maneira assimétrica pelo espaço, nas posições próximas da tangência, onde o mapa tem derivada unitária. Já os pontos da trajetória caótica tendem a ser distribuídos nas regiões onde o mapa tem derivada nula ou em suas iterações, e as trajetórias quasi-periódicas tendem a ser distribuídas simetricamente. Usamos também a hipótese de que, para pequenas variações de ϵ , as mudanças nos valores destas médias são pequenas, porque o atrator será pouco deformado espacialmente. Apesar disso, os tempos de visitação da região laminar (canal) e da parte não-laminar (atrator caótico ou quasi-periódico) variam muito, pois uma destas regiões vai gradativamente deixando de ser visitada pelas trajetórias do sistema. Com isso a contribuição para a média temporal oriunda da parte caótica do atrator vai diminuindo progressivamente, até desaparecer por completo ao fim da bifurcação.

Vamos usar as hipóteses de que as médias espaciais $\langle x \rangle_l$ e $\langle x \rangle_c$ são constantes em ϵ , assim como a , o número médio de iterações da fase caótica entre

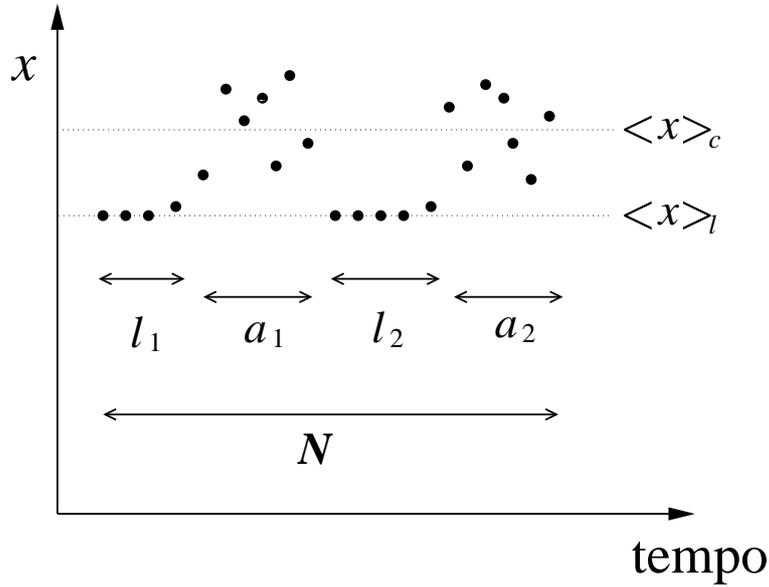


Figura 2.3: Distribuição espacial e temporal de uma série com caos intermitente.

dois eventos laminares, que pode ser expresso como

$$a = \frac{1}{N - k} \sum_i a_i, \quad (2.5)$$

onde a_i é o número de iterações caóticas na i -ésima erupção e $k = \sum_i l_i$ o número total de iterações laminares em uma série discreta de tamanho N , obtida para um dado valor de ϵ (ver figura 2.3). Chegamos à seguinte expressão para a média total:

$$\bar{x} = \frac{k \langle x \rangle_l + (N - k) \langle x \rangle_c}{N}. \quad (2.6)$$

Em termos deste números, \bar{l} pode ser estimado como

$$\bar{l} = \frac{k}{(N - k)/a} = \frac{ak}{N - k}, \quad (2.7)$$

onde $(N - k)/a$ pode ser interpretado como o número médio de eventos laminares, o qual é igual ao número médio de erupções caóticas.

Substituindo em 2.6 resulta

$$\bar{x} = \frac{\bar{l} \langle x \rangle_l + a \langle x \rangle_c}{\bar{l} + a}. \quad (2.8)$$

No limite de ϵ muito pequeno, $\bar{l} \rightarrow \infty$, e $\bar{x} \rightarrow \langle x \rangle_l$. Quando ϵ cresce, temos $\bar{l} \ll a$, ou seja, $\bar{x} \rightarrow \langle x \rangle_c$. Não é do nosso conhecimento que nenhuma relação como esta tenha sido apresentada anteriormente na literatura. Este resultado é aproximadamente verificado em realizações numéricas do mapa logístico, e é válido também para a intermitência tipo III, ou de qualquer outro tipo, se as hipóteses discutidas anteriormente forem válidas. As principais fontes de desvio são a variação da duração das erupções caóticas, que crescem muito quando ϵ é relativamente grande ($\cong 10^{-2}$ ou 10^{-1}) e a variação nos valores de $\langle x \rangle_l$ e $\langle x \rangle_c$ com ϵ .

2.3 Mapa Logístico

Para ilustrar a intermitência tipo I com um exemplo verdadeiro, usemos o mapa logístico (eq. 1.13). A figura 2.4 mostra a formação dos três canais entre o mapa da terceira iteração, $y = f^3(x_n)$, e a reta identidade, $y = x_n$, na proximidade da única janela de período 3. Realizando iterações sucessivas de x_n , com $\epsilon = r_{crit(3)} - r$ pequeno, a região próxima do canal acumula cada vez maior percentual de pontos, que correspondem a comprimentos cada vez maiores para as fases laminares, até que, no valor $\epsilon = 0$, o comprimento laminar diverge. A alta densidade de probabilidade de visitação na região dos três canais pode ser vista pelas cicatrizes escuras horizontais no diagrama de bifurcação da figura 2.5. A bifurcação de caótico para periódico não ocorre abruptamente, mas uma “cicatriz” da órbita de período 3 estável vai aparecendo antes que a órbita periódica (i. e., os pontos fixos) exista.

A figura 2.5 mostra a evolução da média temporal com o parâmetro de controle. A média mostra um comportamento tipo lei de potência, como faria um parâmetro de ordem em uma transição de fase de segunda ordem. Além da curva em forma de lei de potência também podemos distinguir oscilações de pequena amplitude e formato “ruidoso”, que aumentam de frequência com a aproximação do ponto crítico. Para esta figura foram usados 4000 valores de ϵ igualmente espaçados, e em cada um deles, 2000 condições iniciais distintas foram iteradas 10^6 vezes, para obter uma excelente convergência do valor da média. Este enorme número de iterações (2×10^9) parece ir além do limite permitido pelo teorema do sombreamento, que permitira apenas $N \sim \delta^{-1/2}$, com δ sendo o erro de arredondamento médio do computador ($\sim 10^{-13}$), o número máximo de iterações seria $N \sim 10^6$. Mas esta estimativa para o erro médio não é válida próximo à bifurcação tangente, pois o expoente de Lyapunov é pequeno, fazendo com que o erro médio de arredondamento numérico seja significativo apenas durante a reinjeção, e não na fase laminar. Com isto o número que deve ser comparado a $\delta^{-1/2}$ é o número de iterações

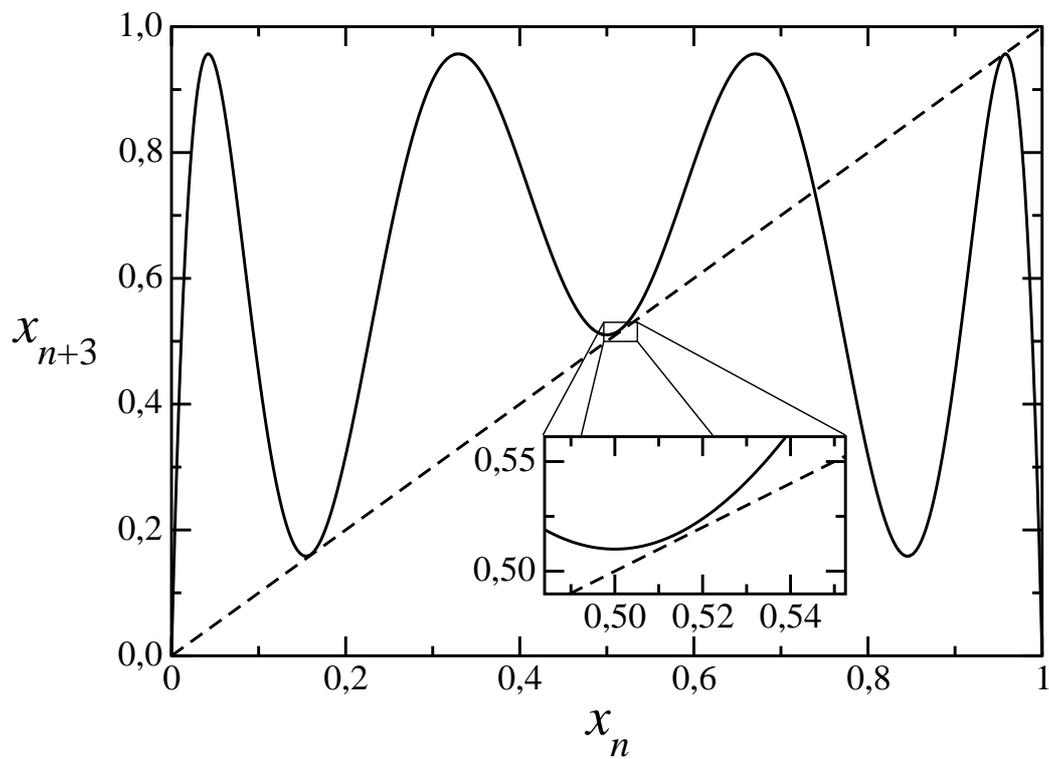


Figura 2.4: Tangência entre a terceira iteração do mapa logístico e a reta identidade, característica da intermitência tipo I. A figura foi desenhada com $r = 3,827000$ e o valor de $r_{crit(3)}$ é $1 + \sqrt{8} \cong 3,828427$.

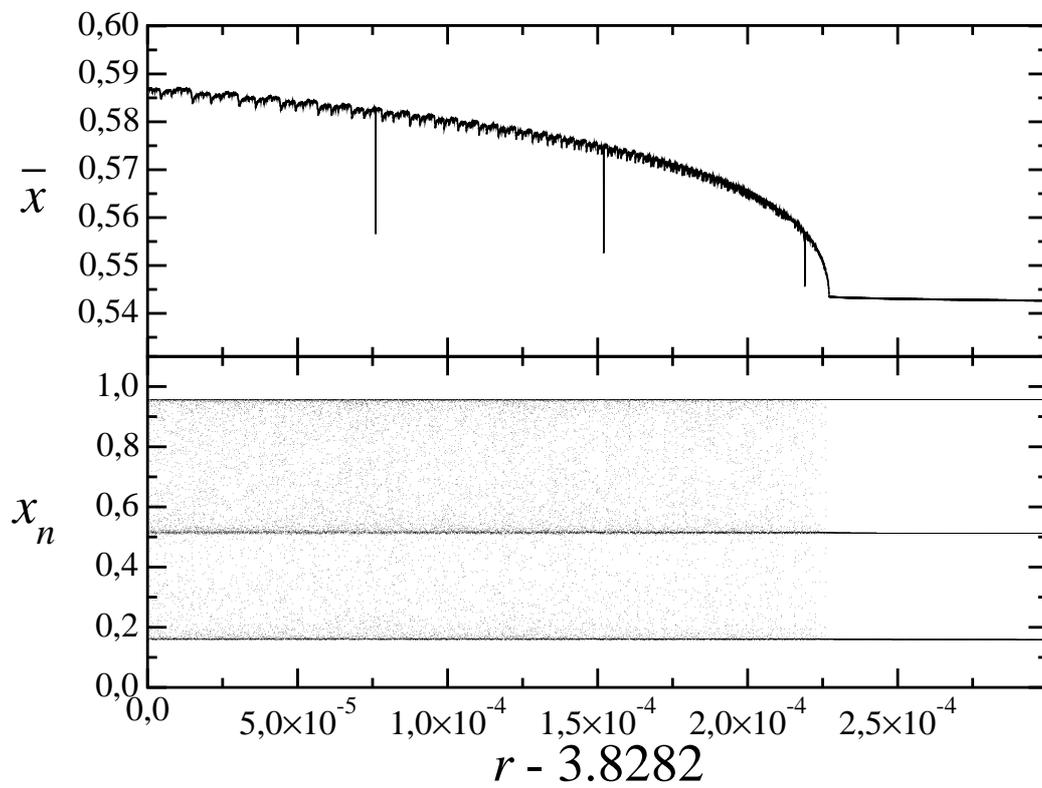


Figura 2.5: Média e diagrama de bifurcação do mapa logístico próximo a janela de período 3.

na parte reinjetora do mapa, que é da ordem de 10^5 para a figura 2.5.

A figura 2.6 mostra a média temporal \bar{x} , o comprimento médio das fases laminares \bar{l} , e o expoente de Lyapunov λ , calculados numericamente na proximidade da janela de período 3 do mapa logístico. Um comprimento laminar é definido contando quantas iterações no período desejado permanecem próximas por uma distância escolhida $d = 0,1$, que corresponde à largura do canal. Este cálculo foi feito com 1000 condições iniciais distintas e $N = 10^5$ iterações em cada um dos 2000 valores de ϵ igualmente espaçados em escala logarítmica. Para ϵ menor que 10^{-4} as oscilações da média não são visíveis, pois a separação entre os valores de ϵ , apesar de ser muito pequena, é menor ou da ordem do período das oscilações. Ainda assim, podemos distinguir o comportamento crítico com expoente característico $1/2$. Também mostramos uma transformação que usa os valores calculados numericamente para \bar{l} na relação 2.8 para estimar a média de x , ajustando empiricamente os valores de $\langle x \rangle_l = 0,5427$, $\langle x \rangle_c = 0,670$ e $a = 8$.

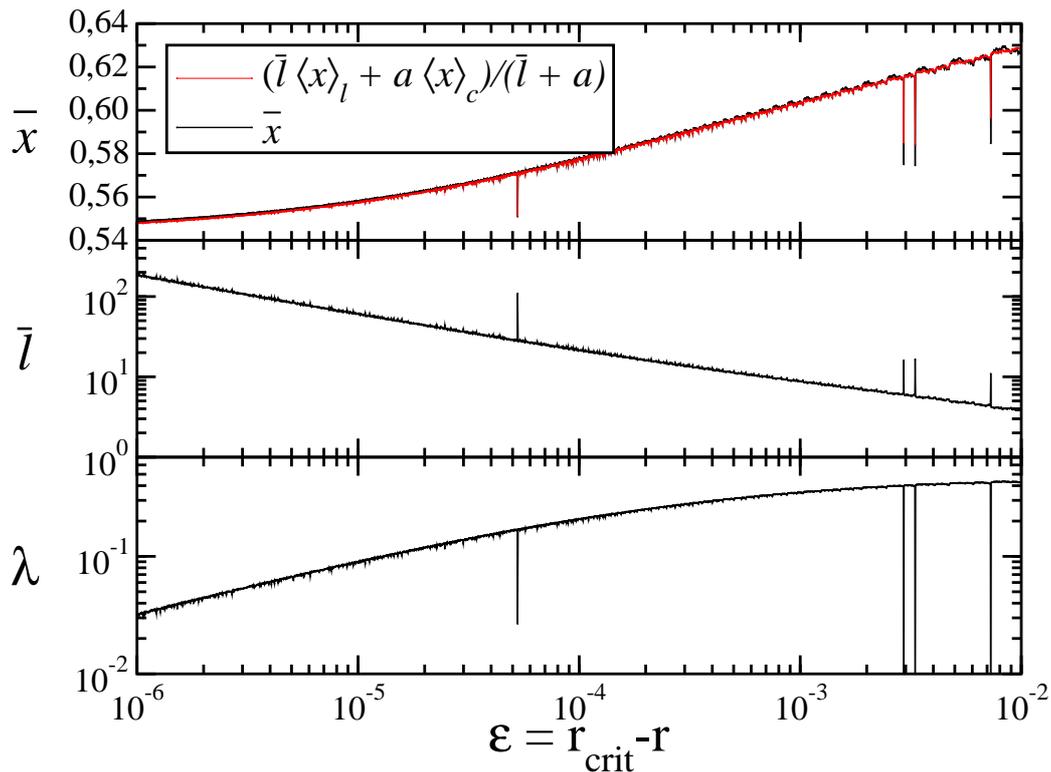


Figura 2.6: Média temporal, comprimento médio das fases laminares e expoente de Lyapunov para o mapa logístico. Os parâmetros usados para o cálculo estão descritos no texto.

Todas as bifurcações tangentes de caótico para periódico no mapa logístico exibem comportamento similar. Assim como a saída destas janelas periódicas, que ocorre por meio de uma crise, na qual a fronteira de um atrator caótico auto-similar ao mapa logístico, gerado a partir de uma cascata de dobramentos de período, colide com a órbita instável gerada na bifurcação tangente. A dependência da taxa de escape em caos transiente e nas crises do mapa logístico mostram oscilações com periodicidade logarítmica (Grebogi *et al.*, 1983, 1986; Maier e Stein, 1996).

A cascata de dobramento de período se reflete na média como um conjunto infinito de descontinuidades na derivada da média temporal com respeito ao parâmetro r . Este estudo da média foi apresentado na referência (de S. Cavalcante e Rios Leite, 2000b). A figura 2.7 mostra a bifurcação que leva à órbita de período 7. Comparativamente à janela de período 3, as oscilações

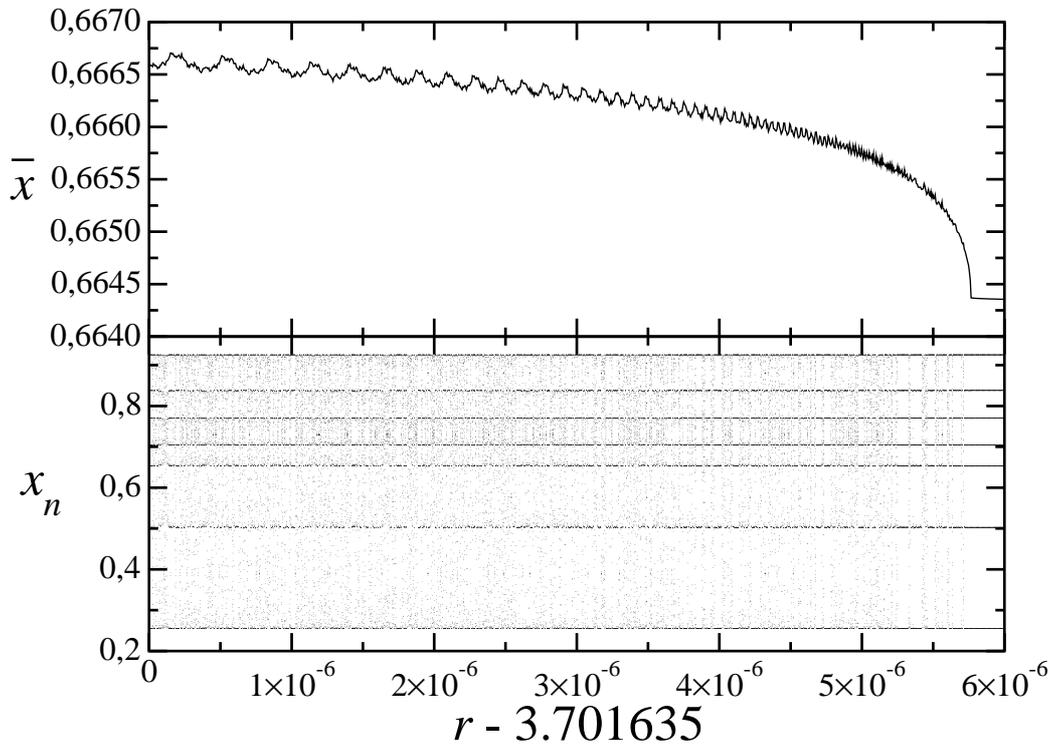


Figura 2.7: Média temporal e atrator para o mapa logístico próximo à janela de período 7. Os parâmetros usados para o cálculo estão descritos no texto.

são muito maiores para grandes janelas de período 5, 7, 4, etc., possivelmente por causa de uma maior diferença entre os valores de $\langle x \rangle_l$ e $\langle x \rangle_c$ e da alta frequência de oscilação na janela de período 3. Esta oscilação rápida dificulta um bom cálculo da média (há apenas duas decimais nas figuras 2.6 e 2.5) pois

se confunde com o erro de convergência no valor do envelope suave. A maioria das grandes janelas inspecionadas é qualitativamente similar à figura 2.7, apresentando oscilações da ordem de 5% do envelope (descontando-se a altura do ponto crítico), e claramente visíveis para amostragem de ϵ suficiente, mesmo com um número de iterações na faixa de 10^4 . A frequência destas oscilações, em todas as janelas observadas, parece variar com uma lei de potência, conforme descrito a seguir.

2.3.1 Período das Oscilações

Sornette (1998) relata a presença de oscilações semelhantes às observadas na figura 2.7 em diversos sistemas dotados de invariância discreta de escala, como acontece por exemplo em fractais. Se considerarmos um observável como a dimensão fractal e variarmos continuamente o fator de escala ϵ , usado para o cálculo de D_0 , haverá valores para os quais ϵ será submúltiplo do fator de escala natural do sistema (por exemplo: no conjunto de Cantor do terço central o fator natural de escala é $1/3$). Entre dois submúltiplos deste valor a medida acumulada (massa, ou número de pontos) para o cálculo da dimensão não aumenta, para saltar abruptamente quando o próximo valor é alcançado. Isto faz com que a relação entre a medida do conjunto L e o fator de tamanho das caixas ϵ seja, em escala logarítmica, uma reta cuja inclinação dá a dimensão fractal, modulada por uma pequena oscilação de frequência é constante. O período desta oscilação corresponde ao fator de escala natural do conjunto fractal. Para multifractais, com dois ou mais fatores de escala característicos incomensuráveis, são vistas oscilações quasi-periódicas.

No mapa logístico e na maioria dos outros mapas, entretanto, a invariância de escala não é perfeita, o diagrama de bifurcação não é exatamente auto-similar por ampliações de x e ϵ em uma escala constante. Em decorrência disto, além de possuir muitas componentes de Fourier, como uma função de Weierstrass, as oscilações do mapa logístico e do mapa da forma normal variam sua frequência, mesmo em escala logarítmica. De fato, a frequência medida para diversas janelas varia com $\epsilon^{-1/2}$ (de S. Cavalcante *et al.*, 2001). A figura 2.8 mostra as oscilações com duas transformações do eixo ϵ : uma transformação logarítmica e uma transformação com $\epsilon^{-1/2}$. A segunda transformação consegue regularizar melhor a frequência das oscilações. O valor de $r_{crit(7)} \cong 3,70164076416034$ foi encontrado numericamente usando a tangência da equação para a sétima iteração.

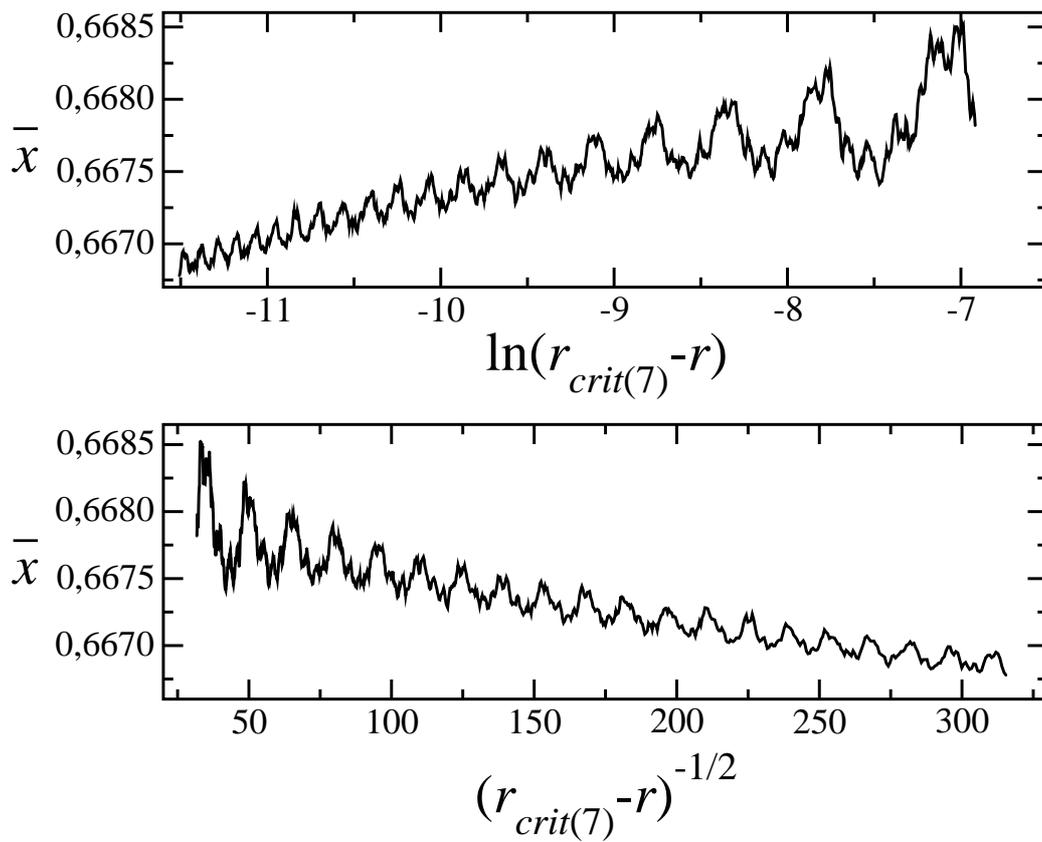


Figura 2.8: Oscilações na média temporal do mapa logístico próximo à janela de período 7. Duas transformações distintas foram usadas no parâmetro. Os parâmetros usados para o cálculo estão descritos no texto.