UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

MAANAÍN RODRIGUES DE SOUSA

O EFEITO DA EXPLICITAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA UM PARA MUITOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Recife
2025

MAANAÍN RODRIGUES DE SOUSA

O EFEITO DA EXPLICITAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA UM PARA MUITOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutora em Psicologia. Área de concentração: Psicologia Cognitiva.

Orientadora: Alina Galvão Spinillo

Recife

2025

. Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Sousa, Maanaín Rodrigues de.
O efeito da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa por crianças do ensino fundamental / Maanaín Rodrigues de Sousa. - Recife, 2025.
77f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, 2025.
Orientação: Alina Galvão Spinillo.
Inclui referências.

1. Estrutura multiplicativa; 2. Proporção simples; 3. Ensino fundamental. I. Spinillo, Alina Galvão. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

MAANAÍN RODRIGUES DE SOUSA

“O EFEITO DA EXPLICITAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA UM PARA MUITOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DO ENSINO FUNDAMENTAL”

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Psicologia Cognitiva.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva.

Aprovada em: 25/02/2025

BANCA EXAMINADORA

POR VÍDEOCONFERÊNCIA
Profª. Drª Juliana Ferreira Gomes da Silva (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

POR VÍDEOCONFERÊNCIA
Prof. Dr. João Alberto da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio Grande

POR VÍDEOCONFERÊNCIA
Profª. Drª. Neila Tonin Agranionih (Examinadora Externa)
Universidade Federal do Paraná

POR VÍDEOCONFERÊNCIA
Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola (Examinador Externo)
Universidade Estadual Paulista

POR VÍDEOCONFERÊNCIA
Profª. Drª. Sandra Maria Pinto Magina (Examinadora Externa)
Universidade Estadual de Santa Cruz

AGRADECIMENTOS

Sinto profunda felicidade em apresentar o resultado de toda a minha dedicação, mas não teria sido possível concluir esses quatro anos de jornada sozinha, portanto, é a quem esteve ao meu lado que dedico agora minha gratidão.

À minha orientadora, Alina Spinillo, por topar o desafio de defender esse projeto em todas as oportunidades, inclusive nas vezes em que eu mesma o questionei. Sua sabedoria, generosidade, firmeza e humildade me inspiram hoje e sempre. Foi um privilégio imenso ser sua orientanda.

Aos pequenos grandes participantes desta pesquisa — verdadeiras estrelas deste trabalho —, bem como aos seus responsáveis, professoras e equipes das escolas parceiras, minha sincera gratidão pela confiança e acolhimento.

Ao meu companheiro de vida, Gustavo, por todo cuidado, ternura e paciência nas longas noites de trabalho e dias difíceis. A você, Mia e Fumaça, toda minha gratidão por serem abrigo, alicerce e presença amorosa em todos os momentos.

À minha família, pelo apoio incondicional, com especial carinho ao meu irmão Tobias, que com sua lucidez e objetividade me ajudou a atravessar os desafios da análise estatística — sua existência é um presente.

Às minhas amigas queridas, especialmente Vitória e Marília, por todo afeto, escuta atenciosa e inspiração constante.

Aos colegas e amigos do doutorado em Psicologia Cognitiva, em especial Leandro e Denis, agradeço pela partilha de saberes e pelas risadas que aliviaram os momentos mais árduos. À Timóteo Leitão, por seu bom humor e parceria nas batalhas invisíveis da vida acadêmica.

Aos professores da banca examinadora, pela atenção e contribuições valiosas.

À CAPES e FACEPE pelo apoio essencial à concretização desta jornada.

Sigo com o coração grato, pois cada passo desta jornada contribuiu para o meu desenvolvimento e transformação. Concluo esta etapa com a certeza de que a ciência se fortalece quando é construída coletivamente e compartilhada.

RESUMO

O presente estudo investigou o efeito da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, de proporção simples, envolvendo multiplicação e divisão, por crianças do 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o estudo parte da premissa de que a correspondência um para muitos é um princípio fundamental do raciocínio multiplicativo. Assim, o objetivo do estudo foi examinar se a explicitação dessa correspondência no enunciado dos problemas influenciaria o desempenho e os procedimentos de resolução adotados pelos estudantes. Participaram da pesquisa 120 estudantes, distribuídos igualmente entre os três anos escolares investigados (3º, 4º e 5º). Os participantes foram solicitados a resolver seis problemas matemáticos, sendo três na Condição 1, na qual a correspondência um para muitos estava explicitamente mencionada no enunciado, e três na Condição 2, na qual essa relação era implícita, ou seja, inexistente ou tendo que ser inferida durante a resolução. A coleta de dados foi realizada em dois momentos: no primeiro, por meio de uma aplicação coletiva para análise do desempenho; e no segundo, por meio de entrevistas individuais com seis participantes de cada ano escolar, visando examinar os procedimentos de resolução adotados. Os resultados indicaram que, independentemente do ano escolar, os participantes apresentaram um desempenho significativamente melhor na Condição 1 (explícita) do que na Condição 2 (implícita), evidenciando que a explicitação da correspondência um para muitos favorece a resolução de problemas de proporção simples. Além disso, os estudantes do 3º ano apresentaram um desempenho inferior em comparação aos do 4º e 5º anos, sem diferenças significativas entre estes últimos, sugerindo que crianças a partir do 4º ano se beneficiam mais do efeito facilitador da explicitação. A análise a partir da entrevista com 18 crianças revelou cinco tipos de procedimentos. Em articulação com o desempenho, o procedimento baseado na razão (Tipo 5) gerou mais acertos do que erros, porém, o procedimento mais frequente em ambas as condições foi o Tipo 4 (algorítmico). Mesmo se beneficiando da correspondência um para muitos quanto ao desempenho, os estudantes não mencionam explicitamente o uso dessa correspondência como procedimento de resolução. Esses achados sugerem que a explicitação da correspondência um para muitos pode ser uma estratégia pedagógica eficaz para o ensino de conceitos multiplicativos e para a facilitação da resolução de problemas de proporção simples, inclusive os que trazem a correspondência um para muitos na condição implícita. O estudo traz implicações educacionais relevantes, apontando para a necessidade de práticas de ensino que promovam a compreensão explícita da relação um para muitos.

Palavras-chave: resolução de problemas matemáticos; proporção simples; estrutura multiplicativa; correspondência um para muitos; ensino fundamental.

ABSTRACT

The present study investigated the effect of the making explicit the one-to-many correspondence in multiplicative structure problems, specifically simple proportion problems involving multiplication and division, by children in the 3rd, 4th, and 5th years of elementary school of Brazil. Based on the Theory of Conceptual Fields, by Vergnaud, the study assumes that one-to-many correspondence is a fundamental principle of multiplicative reasoning. Thus, the objective of the study was to examine whether making this correspondence explicit in the verbal problems would influence students' performance and problem-solving procedures. The research had 120 participants, evenly distributed among the three school years investigated (3rd, 4th, and 5th). The participants were asked to solve six mathematical problems, three in Condition 1, in which the one-to-many correspondence was explicitly mentioned in the verbal problem, and three in Condition 2, in which this relationship was implicit, meaning it was absent or had to be inferred during problem-solving. Data collection was conducted in two stages: first, through a collective testing to analyse performance, and second, through individual interviews with six students from each school year, aiming to examine the problem-solving procedures. The results indicated that, regardless of school year, participants performed significantly better in Condition 1 (explicit) than in Condition 2 (implicit), demonstrating that making the one-to-many correspondence explicit facilitates the resolution of simple proportion problems. Additionally, 3rd-year students performed worse than those in the 4th and 5th years, with no significant differences between the latter, suggesting that children from the 4th year onward benefit more from the facilitating effect of explicitness in verbal problems. The analysis based on interviews with 18 children revealed five types of procedures. When compared to performance data, the ratio-based procedure (Type 5) resulted in more correct answers than errors. However, the most frequently used procedure in both conditions was Type 4 (algorithmic). Even though students benefited from the one-to-many correspondence in terms of performance, they did not explicitly mention using this correspondence as a problem-solving procedure. These findings suggest that making the one-to-many correspondence explicit can be an effective pedagogical strategy for teaching multiplicative concepts and facilitating the solving of simple proportion problems, including those in which the one-to-many correspondence is implicit. The study has important educational implications, highlighting the need for teaching practices that promote an explicit understanding of the one-to-many relationship.

Keywords: mathematical problem-solving; simple proportion; multiplicative structure; one-to-many correspondence; elementary school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da resolução de problemas de estrutura multiplicativa, em termos de enquadramento teórico e empírico, está inserido no âmbito da Psicologia Cognitiva, especificamente Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo, uma vez que investiga o desenvolvimento da capacidade mental de raciocínio lógico-matemático. Uma teoria que demonstra a relação entre Psicologia da Educação Matemática e Psicologia Cognitiva é a Teoria dos Campos Conceituais. Esta é uma teoria cognitiva pós-construtivista, com foco na formação de conceitos, que, segundo Spinillo e Lautert (2006), expressa seu caráter psicológico através da noção de desenvolvimento a partir de campos conceituais, além das noções de esquema (trazida inicialmente por Jean Piaget), e teoremas-em-ação.

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida por Gérard Vergnaud, que dedicou seus estudos a compreender como conceitos matemáticos são adquiridos e desenvolvidos, com maior enfoque no ensino-aprendizagem e tendo como público principal crianças e adolescentes. Tal teoria gerou contribuições importantes para a prática profissional de professores e para o estudo do desenvolvimento cognitivo humano (GITIRANA; CAMPOS; MAGINA; SPINILLO, 2014).

Vergnaud (1982, p. 12) define o campo conceitual como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas firmemente unidos uns aos outros”. Grandes campos conceituais são definidos por Vergnaud (2009), e dois deles serão discutidos neste texto: o das estruturas aditivas, e o das estruturas multiplicativas. No campo conceitual das estruturas aditivas se inserem situações que envolvem a adição, a subtração ou a combinação de ambas as operações. Já no campo conceitual das estruturas multiplicativas, estão inseridas as situações que envolvem a divisão, a multiplicação ou a combinação de ambas as operações. Situações que envolvem combinatória, fração e proporção, por exemplo, fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O raciocínio aditivo, para Nunes e Bryant (1997), está associado a ações de unir ou separar objetos ou conjuntos de objetos, relacionando-se ao esquema de correspondência termo a termo, ou um para um. O raciocínio multiplicativo, por sua vez, relaciona-se ao esquema de correspondência (ou relação) um para muitos, que é invariante em situações multiplicativas e não está presente no raciocínio aditivo. O pensamento de que a multiplicação é apenas uma adição repetida é equivocado, pois a multiplicação não envolve ações de unir ou separar objetos, e sim um novo conjunto de invariantes e sentidos de números. A correspondência um para muitos é um invariante essencial para a compreensão do conceito de proporção, incluído no campo conceitual multiplicativo.

Em termos educacionais, é amplamente reconhecida a dificuldade que alunos do ensino fundamental experimentam na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Em termos psicológicos, é igualmente reconhecida a complexidade desses problemas que requerem formas de raciocinar que envolvem o estabelecimento de relações que nem sempre são compreendidas pelas crianças. Em vista disso, pesquisadores no campo da Psicologia da Educação Matemática têm procurado responder a seguinte questão: Que situações poderiam favorecer a resolução dos problemas de estrutura multiplicativa?

Estudos já desenvolvidos neste campo mostraram que a explicitação da correspondência um para muitos foi fator determinante do sucesso na resolução de problemas de produto cartesiano (e.g. MELO, SILVA, SPINILLO, 2016; SILVA, 2010; SPINILLO, SILVA, 2010). Diante disso, surge a seguinte pergunta: O efeito facilitador da explicitação da correspondência um para muitos também seria observado na resolução de problemas de multiplicação e de divisão do tipo proporção simples? Se a resposta a essa pergunta for afirmativa, além das implicações teóricas acerca do campo conceitual das estruturas multiplicativas, estaremos diante de uma ferramenta didática da maior relevância e de grande amplitude que se aplica a problemas que envolvem tanto o raciocínio combinatório como o proporcional. Essa é a questão central da presente investigação que procura ampliar o conhecimento acerca do raciocínio matemático de alunos do Ensino Fundamental referente ao campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O impacto social e a relevância do presente estudo se justificam diante da dificuldade de alunos do Ensino Fundamental frente à resolução de problemas que requerem a multiplicação e a divisão. Estudos anteriores demonstraram que a correspondência um para muitos é um desafio para a criança compreender conceitos complexos (e.g. NUNES; BRYANT, 1997; GITIRANA et al, 2014; SPINILLO; SILVA, 2016). No entanto, pesquisas feitas no Brasil referentes ao raciocínio combinatório em crianças têm demonstrado que quando essa correspondência é explicitada, as crianças apresentam um melhor desempenho em problemas de produto cartesiano, do que quando essa correspondência não é explicitada (e.g. SPINILLO; SILVA, 2010; SPINILLO; SILVA, 2016; SILVA; SPINILLO, 2020).

O presente estudo se propõe a examinar se a explicitação da correspondência um para muitos também facilitaria a resolução de problemas de proporção simples. Se isso se confirmar, a explicitação da correspondência um para muitos se mostrará uma ferramenta didática importante para o ensino de matemática no Ensino Fundamental, sendo essa uma informação relevante a ser veiculada em livros didáticos e cursos de formação de professores do Ensino Fundamental.

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Em sua Teoria dos Campos Conceituais, que é a base do presente estudo, Gérard Vergnaud (2003; 2009; 2017) define conceito como a junção de três conjuntos, que devem ser considerados para entender a formação do próprio conceito (C):
A fórmula utilizada para entender esta relação é C = (S, I, R), onde:

- **S** refere-se ao conjunto de situações que dão sentido ao conceito
- **I** é o conjunto de invariantes operatórios relacionados ao conceito, eles estruturam as formas de organização de atividades (eskemas) do indivíduo diante das situações
- **R** designa o conjunto de representações simbólicas que indicam as situações e os procedimentos presentes em uma situação.

As situações, no cotidiano escolar, podem se apresentar através de tarefas, atividades, problemas (entre outras formas), e tornam o conceito significativo ao estarem relacionadas ao contexto em que o problema se apresenta ao indivíduo. Já os invariantes são objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidos pelo sujeito diante das situações, e que, como o próprio nome implica, são elementos que não variam. Diante de uma nova situação-problema, o estudante poderá utilizar os invariantes já construídos para analisar, compreender e solucionar. Assim, um esquema, isto é, “uma organização invariante do comportamento para certa classe de situações” é formado (VERGNAUD, 1998, p.168). São os esquemas e invariantes que irão determinar a ação do indivíduo diante da situação-problema (VERGNAUD, 1988; 2017).

Para Vergnaud (1994; 1998), os invariantes operatórios consistem nas propriedades matemáticas, que se fazem presentes tanto na situação (como igualdade, razão, relação um para muitos, equivalência, entre outros), como no raciocínio utilizado pelo estudante em seu processo de resolução. É relevante mencionar que os invariantes podem ser implícitos ou explícitos: são implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação individuais do aluno quando ele não tem consciência, mas são explícitos quando estão ligados a uma concepção geral, estando expressos por palavras ou por outras representações simbólicas comuns. Os invariantes podem ser explícitos na situação-problema em diferentes formas de representação: linguística, numérica, diagramática, entre outras.

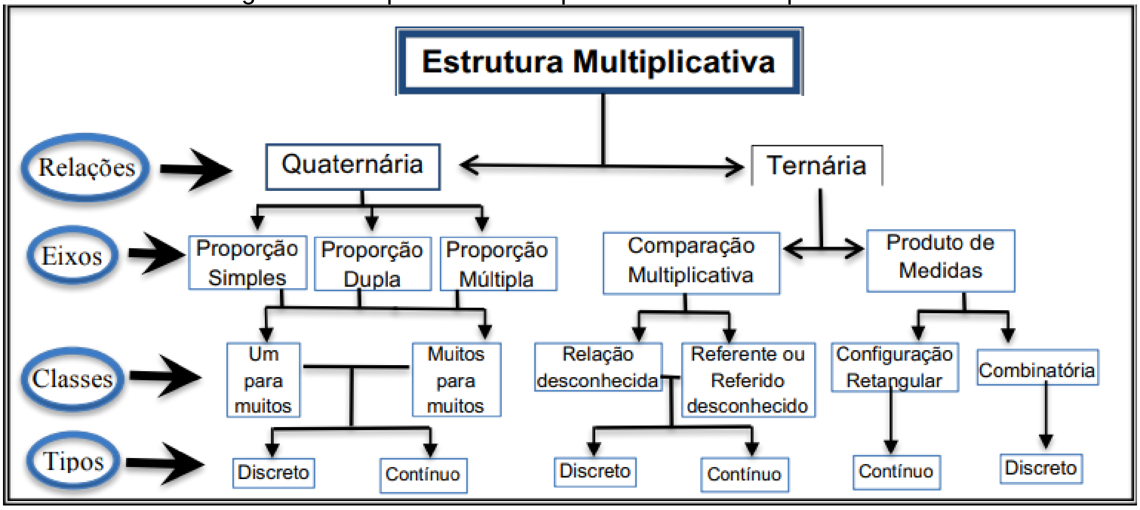
Ainda de acordo com Vergnaud (1998, p. 177), “um conceito não é apenas uma definição. Ele se refere a um conjunto de situações, envolve um conjunto de diferentes invariantes operatórios, e suas propriedades podem ser expressadas por diferentes representações simbólicas e linguísticas”. Um conceito não é compreendido de uma só vez, mas ao longo do tempo, mediante as experiências, maturidade e aprendizagem, de forma progressiva (Vergnaud, 1982). Diversos fatores podem influenciar na formação e no desenvolvimento de conceitos, e o conhecimento conceitual emerge a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático, em que cada problema traz vários conceitos que precisam ser dominados para que seja solucionado.

É importante conhecer sobre o processo de formação de conceitos por parte dos estudantes, bem como os raciocínios que surgem ao longo dele, para que se possa auxiliá-los, uma vez que este processo apresenta grandes desafios. Assim, descrever e explicar formas de raciocinar para crianças é importante para que o conceito de proporção, por exemplo, seja trabalhado em contexto escolar.

Para que um conceito seja ensinado, é preciso que ele seja apresentado aos estudantes em situações diversas, e de maneira articulada com os vários outros conteúdos aos quais se relaciona. Uma única situação pode envolver diversos conceitos e um mesmo conceito pode estar presente em diferentes situações (VERGNAUD, 2017). Isso porque o conceito não é compreendido de forma isolada, mas em articulação com outros, o que resulta nos chamados campos conceituais, como por exemplo o campo das estruturas multiplicativas que envolvem problemas de multiplicação e divisão, e conceitos como fração, razão, proporção, entre outros. O conceito de multiplicação pode estar presente em diversas situações-problema, seja em contexto escolar, apresentados por exemplo através de enunciados verbais, com imagens, material concreto, entre outros, ou em contexto cotidiano, como em uma compra, ou até uma receita feita em casa (VERGNAUD, 2003; 2009; 2017).

Os autores Magina, Merlini e Santos (2016) elaboraram um esquema (Figura 1) com o objetivo de sintetizar as ideias do Campo Conceitual Multiplicativo, a partir das obras de Vergnaud (1983, 1994, 1996). O presente estudo se dedica a investigar problemas que se inserem no eixo proporção simples, do tipo discreto.

Figura 1 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini, Santos (2016)

Existem dois tipos de relações dentro da estrutura multiplicativa, são elas a ternária e a quaternária. A proporção simples é um eixo cuja relação é a quaternária. Isto porque envolve quatro quantidades, de duas grandezas distintas, seguindo uma razão que estabelece esta relação (a x b = c x d). Um exemplo de problema deste tipo, utilizado no presente estudo, é o seguinte: “Tobias foi em um supermercado e viu que 1 pacote de barrinha de cereal vem com 4 barrinhas. Ele comprou 5 pacotes. Quantas barrinhas de cereal ele comprou?”. Neste caso, a quantidade de barrinhas é proporcional à quantidade de pacotes, duas grandezas diretamente proporcionais, sendo, portanto, um problema de proporção simples.

O eixo de proporção simples pode ser subdivido em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos. Na classe um para muitos a relação entre as quantidades está explícita (no problema apresentado é explícita pois o enunciado traz qual a quantidade que vem em apenas um pacote de barrinhas). Na classe muitos para muitos, a relação entre as quantidades está implícita. Em alguns problemas de proporção simples é possível chegar à relação um para muitos. Um problema deste tipo, utilizado no presente estudo é o seguinte: “Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar?” (aqui, é possível encontrar a correspondência de 5 ovos para 1 bolo). Em outros problemas não faz sentido, e não é possível, identificar a relação um para muitos, como o seguinte problema: “Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos. Gustavo ganhou 12 pontos. Quantas voltas ele deu na quadra?" (neste problema é impossível saber quantos pontos se ganha fazendo cada volta, pois só se ganha 4 pontos ao completar 3 voltas).

O eixo referente à proporção dupla, a qual consiste em uma relação quaternária, envolve mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, mas sem relações entre si. Um exemplo desse tipo de problema é: "Um grupo com 30 pessoas vai passar 15 dias na casa de praia. Elas precisam comprar uma quantidade de macarrão suficiente. Por semana 10 pessoas consomem 20kg de macarrão. Quantos quilos de macarrão elas precisam comprar?". Este eixo também é dividido entre as classes de correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos.

Existe ainda o eixo de proporção múltipla, também de relação quaternária entre mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, mas que apresentam uma relação de dependência entre si, diferente da proporção dupla. Em ambos os casos, ao alterar o valor de qualquer grandeza envolvida, todos os outros são alterados. A seguir, um exemplo de problema de proporção múltipla: "a receita de panqueca de Juliana é assim: para cada 6 copos de leite ela usa 18 ovos, e para cada 2 ovos ela usa 4 xícaras de farinha de trigo. Ela notou que só tem 3 copos de leite na geladeira. Para fazer o bolo usando esses 3 copos de leite, quantas xícaras de farinha de trigo ela vai precisar?". Neste eixo também há as classes um para muitos e muitos para muitos.

Dentre as relações ternárias, o único eixo que é necessário explorar, levando em conta os objetivos do presente estudo e as pesquisas que o embasam, é o de produto de medidas. O eixo produto de medidas consiste em uma relação ternária e é composto por duas classes: configuração retangular e combinatória. Os problemas de configuração retangular são situações em que as quantidades representam medidas dispostas na horizontal e na vertical, dispostas de forma retangular. Um exemplo desse tipo de problema é o seguinte: "Qual a área de um campo de futebol que mede 15 metros de frente e 35 metros de comprimento?".

Os problemas de combinatória, por sua vez, remetem à noção do produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos, isto é, a quantidade de agrupamentos ou relações que podem ser formadas a partir de elementos. Um exemplo de problema de combinatória é este: "Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?". A correspondência um para muitos também é um princípio invariante do eixo produto de medidas, uma vez que esse raciocínio é essencial às estruturas multiplicativas.

As classes de problemas apresentadas demonstram que problemas multiplicativos podem ter estruturas diferentes capazes de gerar dificuldade de resolução. O próprio Vergnaud (2017, p. 41) afirma que “a aprendizagem destes diferentes casos de cálculo requer a identificação e eventualmente a explicitação verbal ou simbólica de uma variedade de conceitos”.

2.1 CORRESPONDÊNCIA UM PARA MUITOS: SUA NATUREZA E COMPLEXIDADE

De acordo com Piaget e Szeminska (1971), o esquema de correspondência é um instrumento, construído gradativamente no pensamento das crianças, que ajuda na decomposição de quantidades a serem comparadas entre si. Em um primeiro momento, há o desenvolvimento da correspondência termo a termo em que a criança compara objetos, quantidades ou conjuntos individualmente, um para um. A correspondência termo a termo é um dos princípios da contagem de um conjunto de objetos. Ao contar, para que se chegue ao total correto, é necessário contar cada item apenas uma vez, sendo, portanto, crucial a compreensão da correspondência termo a termo inclusive para a contagem, base do conhecimento matemático.

Este esquema de correspondência termo a termo é desenvolvido em três fases, que evoluem de maneira gradativa: na primeira fase, a criança ainda não tem noções de correspondência nem de equivalência; na segunda fase, há a noção de correspondência termo a termo, porém ainda sem equivalência durável; por fim, na terceira fase há a presença de correspondência termo a termo, acompanhada de duração da equivalência. Além desse esquema de correspondência termo a termo, há o esquema de correspondência um para muitos. Este esquema, por sua vez, consiste na relação entre um elemento e um conjunto de elementos. O desenvolvimento da correspondência um para muitos é também gradativo e marca as primeiras noções de multiplicação, já que a criança começa a entender que um elemento pode estar relacionado a vários outros (PIAGET; SZEMINSKA, 1971).

Diversos autores (GITIRANA et al., 2014; NUNES; BRYANT, 1997; VERGNAUD, 1983; 2003) apontam a relação um para muitos (ou correspondência um para muitos), inerente ao raciocínio multiplicativo, como uma noção que precisa ser compreendida pelas crianças para que sejam capazes de resolver problemas de estrutura multiplicativa que envolvem a divisão e multiplicação. Esses são conceitos básicos para a aprendizagem de conceitos complexos como fração, proporção, porcentagem, probabilidade e combinatória, essenciais para o sucesso em anos escolares posteriores. O desenvolvimento da correspondência um para muitos depende do entendimento de que um objeto pode se relacionar não somente com outro, como na correspondência termo a termo que caracteriza o raciocínio aditivo, mas com vários outros (SPINILLO; SILVA, 2016).

A correspondência um para muitos se caracteriza pela relação entre um dado elemento de um conjunto com elementos de outro conjunto, como no seguinte problema: “A vitamina de banana que a mãe de Pedro faz para ele leva um copo de leite para duas colheres de açúcar. Ela quer fazer vitamina para mais pessoas usando três copos de leite. Quantas colheres de açúcar ela vai usar?” No caso de serem usados três copos de leite, serão necessárias seis colheres de açúcar, de maneira que a razão 1:2, relativa à copos de leite e colheres de açúcar, se mantém constante, mesmo quando a quantidade de elementos varia (3:6). A razão é um tipo de relação um para muitos que pode ser usada como estratégia na resolução de problemas (AVCU; DOĞAN, 2014). A razão unitária (1:X) assume papel importante em situações de ensino de conceitos multiplicativos, como evidenciado em um estudo de intervenção em que os estudantes a usavam de maneira intuitiva para raciocinar de maneira cada vez mais sofisticada (ŞEN; GÜLER, 2017). É possível perceber que a razão unitária é, em última instância, uma relação um para muitos simplificada e explicitada. Esse comentário é importante pois serve de base para a presente investigação, que considera o papel da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), enquanto em situações aditivas a ação utilizada é unir ou separar, no caso da proporção, a ação necessária para manter a invariabilidade é a replicação. A replicação consiste em somar a cada conjunto a unidade necessária para manter a correspondência um para muitos, isto é, a razão unitária da situação-problema. Quando a replicação é efetuada, a razão permanece, mesmo que o número de objetos em um conjunto mude, como no exemplo da vitamina, em que, para replicar a receita e obter 3 copos de vitamina, serão necessárias 6 colheres de açúcar.

Nunes e Bryant (1997) destacaram ainda que as situações de correspondência um para muitos se referem a dois sentidos de número: o primeiro é a proporção, isto é, a expressão da relação entre dois conjuntos, permanecendo invariável mesmo quando o tamanho dos conjuntos varia; e o segundo é o fator escalar, que corresponde ao número de replicações realizadas em ambos os conjuntos, ao mesmo tempo em que mantém a proporção constante apesar da variação no tamanho dos conjuntos.

Com relação à influência da escolaridade na compreensão das relações presentes em problemas de proporção, Nunes e Bryant (1997) apontam que muitas crianças já utilizam o esquema de correspondência um para muitos antes mesmo de serem ensinadas sobre multiplicação na escola. Há pesquisas que trazem evidências de que crianças desde o 2º ano já se mostram capazes de resolver problemas que envolvem o raciocínio proporcional, demonstrando noções de correspondência um para muitos (e.g. LARA, 2011; VANLUYDT, VERSHAFFEL, VAN DOOREN, 2018). Há também estudos que mostram que, ao longo dos anos escolares do ensino fundamental, isto é, do 1º ao 9º ano, as crianças apresentam uma melhora no desempenho em problemas de proporção simples da classe um para muitos, e muitos para muitos (e. g. MAGINA, FONSECA, 2018).

Para investigar o raciocínio proporcional de crianças de 4 a 5 anos (média de idade 5 anos e 3 meses), Vanluydt, Verschaffel e Van Dooren (2018) entrevistaram crianças individualmente, apresentando-lhes problemas com quantidades discretas, como o seguinte: "quantas uvas você teria que dar a esses 4 bonecos (conjunto B: 4 bonecos/número de uvas desconhecidas) para ser justo?". Em cada item, as crianças tinham que construir um conjunto B equivalente ao conjunto A (2 uvas para cada boneco de madeira), colocando os elementos do conjunto B na mesma razão que os elementos no conjunto A.

Como resultado, os autores apontam que por conta da idade e falta de instrução formal no contexto escolar, as crianças acertaram em média um item a cada cinco itens apresentados. Porém, os autores destacam que mais da metade das crianças respondeu corretamente ao item em que a quantidade de uvas do conjunto B era desconhecida, tal item envolvia a relação um-para-muitos. Este resultado mostra que crianças aos 4 e 5 anos já demonstram noções de correspondência um-para-muitos. Além disso, constataram também que muitos participantes adotavam estratégias errôneas de resolução, mas que apontavam tentativas de compreensão das correspondências um para muitos e muitos para muitos, passos importantes para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

2.2 FORMAS DE RACIOCINAR EM PROBLEMAS DE PROPORÇÃO

A proporcionalidade é um dos conceitos matemáticos mais importantes de serem aprendidos no ensino fundamental. Este conceito se relaciona e tem aplicações em diversas áreas (física, química, economia, entre outras), além de ser amplamente utilizado no dia a dia (ao fazer uma receita, ou para comprar o frasco com a maior quantidade pelo menor preço, por exemplo). Para resolver uma situação-problema de proporção, é possível utilizar dois operadores: o operador escalar, e o operador funcional. O operador escalar refere-se às vezes em que cada quantidade da mesma natureza pode ser multiplicada para gerar uma razão equivalente. Já o operador funcional é a relação multiplicativa existente entre duas quantidades de naturezas distintas na proporção (MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020).

No problema: "*Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar?".* É possível utilizar o operador escalar ao encontrar a relação entre as quantidades de bolos inicial e a quantidade de bolos necessária (x3), aplicando-a na quantidade de ovos (15x3) e encontrando, assim, o valor desconhecido (45 ovos). Já com o uso do operador funcional, encontra-se a relação entre a quantidade inicial de bolos e a quantidade de ovos correspondente (x5), aplicando a mesma relação na quantidade de bolos e ovos necessária (9x5), encontrando assim o mesmo valor desconhecido (MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020). Existiria, ainda, a possibilidade de resolução desta situação através da chamada "regra de três", em que se multiplica a quantidade de bolos necessária (9) pela quantidade de ovos utilizados (15), dividindo o resultado pelo número de bolos inicial (3). Vergnaud (1998), portanto, pontua que este tipo de procedimento é raramente utilizado pelos estudantes, não fazendo sentido para eles.

Diversas pesquisas se dedicaram a investigar os tipos de raciocínio utilizados por crianças para resolver problemas de estrutura multiplicativa. Kaput e West (1994) observaram que algumas crianças utilizam erroneamente o raciocínio aditivo para resolver problemas de proporção. Outras se propuseram a entender a relação entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo e a preferência por um ou outro na resolução de problemas por crianças. Van Dooren, De Bock e Verschaffel (2010) afirmam que as crianças podem não diferenciar ambos os tipos de raciocínio, utilizando tanto o raciocínio aditivo para resolver problemas multiplicativos quanto o contrário, fazendo uso da multiplicação em problemas aditivos. Degrande et al. (2018) identificaram que algumas crianças preferem utilizar o raciocínio multiplicativo, em vez do aditivo, na resolução de problemas em que ambos são válidos.

Vanluydt et al. (2019) investigaram habilidades iniciais de proporção em crianças de 5 a 9 anos de idade, antes da inserção da proporção no currículo escolar. Incorporando ao método diferentes problemas desenvolvidos sem o uso de números convencionais, os autores observaram que tanto o raciocínio aditivo quanto o multiplicativo são preditores do raciocínio proporcional, especialmente em problemas que envolvem quantidades discretas. Isto é, a utilização do raciocínio aditivo para resolver problemas multiplicativos, quando válida, não atua como uma barreira, mas auxilia o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Pelen e Artut (2016) investigaram as estratégias que estudantes do oitavo ano utilizaram para resolver problemas aditivos, de proporção direta e inversa, com estruturas numéricas diferentes, com o intuito de constatar se as estratégias de resolução mudam conforme as estruturas. Os autores entendem que a estrutura numérica nas relações multiplicativas pode ocorrer de duas formas: dentro, isto é, a relação de elementos na mesma razão (exemplo: um pacote de sabão acaba em 3 semanas quando a roupa é lavada 4 vezes por semana. Se a roupa for lavada 2 vezes por semana, em quantas semanas o mesmo pacote de sabão acaba?); e entre, referente a relação multiplicativa entre as partes correspondentes de razões diferentes (exemplo: 4 tubos derramando a mesma quantidade de água enchem uma piscina vazia em 12 horas. Em quantas horas 6 tubos vão encher a mesma piscina vazia?). Os resultados do estudo indicam que a estrutura numérica em problemas de proporção inversa influencia as estratégias utilizadas pelos alunos, além de influenciar no desempenho, uma vez que problemas com a estrutura entre razões diferentes se mostrou mais difícil para as crianças.

2.3 SITUAÇÕES QUE FACILITAM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORÇÃO

Esta subseção versará sobre os aspectos considerados facilitadores do raciocínio das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Os aspectos facilitadores mais frequentemente apontados na literatura são dois: o primeiro deles refere-se às características numéricas das tarefas, isto é, a natureza das quantidades, enquanto o segundo refere-se à natureza do suporte de representação disponibilizado durante o processo de resolução. Ambos aspectos serão tratados adiante. Adicionalmente, um aspecto que vem sendo investigado em estudos recentes, e que é o objeto central da investigação do presente estudo, é o papel da explicitação da relação um para muitos em problemas de estrutura multiplicativa. A última parte desta subseção se dedicará ao detalhamento de resultados obtidos por pesquisas que testaram o potencial desta explicitação.

2.3.1 O papel desempenhado pela natureza das quantidades

A natureza das quantidades propostas em situações-problema é o primeiro aspecto elencado por Spinillo, Lautert e Santos (2021) como facilitador da resolução por crianças. Em muitos destes problemas, é necessário associar um número a uma determinada grandeza, que pode ser discreta ou contínua. A aprendizagem da proporcionalidade, para Vergnaud (2017, p. 40) “envolve o encontro com uma diversidade de situações de proporcionalidade entre grandezas contínuas ou entre quantidades discretas”. As grandezas discretas, para Morais e Teles (2014) são originárias de números naturais, nestes casos, a medida obtida é expressa por um número inteiro, isto é, sem fracionamento (como por exemplo: quatro maçãs). Já as grandezas contínuas, é possível obtê-las por meio de medição, e podem ser expressas por números inteiros, fracionários ou decimais (como por exemplo: três litros de água). As quantidades discretas ou contínuas, juntamente com números inteiros ou fracionários, números inteiros pequenos (um ou dois dígitos) ou grandes (de três ou mais dígitos) são frequentemente estudados em pesquisas com problemas matemáticos de proporção.

Uma pesquisa clássica acerca da natureza das quantidades em problemas matemáticos é a de Piaget, Grize, Szeminska e Bang (1968) que evidenciaram que as crianças tinham um melhor desempenho em tarefas com quantidades contínuas do que com quantidades discretas. Pesquisas realizadas posteriormente continuaram trazendo resultados na mesma direção com crianças da educação infantil e de anos iniciais do ensino fundamental (e.g. BEGOLLI et al., 2020; BOYER; JEONG; LEVINE; HUTTENLOCHER, 2008; BOYER; LEVINE, 2015; HURST; CORDES, 2018; SPINILLO; BRYANT, 1999).

Segundo Piaget, Grize, Szeminska e Bang (1968), uma possível explicação é que, mediante quantidades discretas, as crianças tendem a usar estratégias de contagem de elementos, o que, a depender da situação, gera respostas incorretas. As quantidades contínuas, por sua vez, possibilitam que as crianças raciocinem em termos relativos e não em termos absolutos. Outra possível explicação é a sugerida por Mix, Huttenlocher e Levine (2002): as quantidades contínuas permitem o uso de pontos de referência de natureza perceptual, o que pode ser mais acessível para as crianças, inclusive desde mais cedo. O estudo de Spinillo e Bryant (1991) traz resultados no mesmo sentido ao mostrar que crianças desde os 6 anos resolviam com sucesso tarefas de proporção utilizando o referencial de ‘metade’.

2.3.2 O papel desempenhado pelos suportes de representação

Suportes de representação se referem a signos, ferramentas e/ou materiais usados durante a resolução de uma situação-problema (ANGHILERI, 1998). Alguns exemplos de suportes de representação são material concreto manipulativo como fichas, objetos diversos e dedos, ou recursos gráficos como desenhos, tabelas e ilustrações, e até recursos tecnológicos como aplicativos ou calculadoras. Anghileri (1998), afirma que suportes de representação, quando inseridos em uma situação-problema, conferem sentido ao conceito e influenciam as formas de resolução.

Há pesquisas que se dedicam a comparar variações na resolução de problemas a partir de diferentes suportes de representação, mostrando que determinadas situações são mais favoráveis que outras. Por exemplo, Schliemann (1998) pontua que tanto adolescentes como adultos com pouca ou nenhuma escolarização têm dificuldades em compreender expressões como “quanto é 27 mais 19?”, ao mesmo tempo em que compreendem e respondem de maneira adequada perguntas como “Se você tivesse 27 reais e alguém lhe desse mais 19 reais, com quantos reais você ficaria?”, mesmo na ausência de moedas ou cédulas no enunciado. O uso de referentes, e não apenas a apresentação dos números, parece facilitar a compreensão.

Batista e Spinillo (2008) apresentaram material concreto definido (com relação com os elementos trazidos no enunciado dos problemas, explicitando a que quantidades se referem, como copos ou flores) e material concreto indefinido (sem relação evidente com os elementos do enunciado dos problemas, não deixando claro a que quantidades se referem, como fichas), em diferentes situações-problema. Enquanto resultado do estudo, o material concreto definido favoreceu o desempenho e o uso de procedimentos apropriados pelas crianças de 8 anos, porém o mesmo não ocorreu com o material concreto indefinido, fortalecendo a hipótese levantada pelas autoras. Concluiu-se que a natureza do material concreto apresentado às crianças precisa ser considerada, especialmente quanto à sua relação com os referentes das quantidades presentes no enunciado.

Selva (1998) analisou o desempenho e as estratégias adotadas por crianças de 6 a 8 anos ao resolverem problemas de divisão inexata por meio de diferentes situações: a primeira com uso de lápis e papel; a segunda com uso de material concreto (fichas); e a terceira e última com cálculo oral sem uso de qualquer suporte. A autora comparou essas três situações e observou que o uso de fichas e o uso de lápis e papel levavam a um desempenho semelhante, porém, superior ao que foi obtido nas situações apenas com o cálculo oral, indicando que o suporte gráfico favorecia o desempenho da mesma forma que o material concreto. Além disso, as representações gráficas produzidas com lápis e papel possibilitaram estratégias mais flexíveis e apropriadas aos problemas do que a manipulação de fichas, com as quais as crianças faziam apenas representações diretas do enunciado.

Selva e Borba (2005) examinaram o efeito da combinação de diferentes suportes de representação na resolução de problemas de divisão inexata. Neste estudo, crianças de 9 a 11 anos de idade resolveram três situações-problema: 1) fazendo uso de primeiro lápis e papel e depois calculadora; 2) o oposto da situação anterior, utilizando primeiro a calculadora, e depois lápis e papel; e 3) com utilização de manipulativos e depois lápis e papel. A situação que mais propiciou estratégias eficazes de resolução foi aquela em que primeiro usavam lápis e papel e depois a calculadora. Uma conclusão importante deste estudo é que a combinação e a ordem em que diferentes suportes são apresentados influenciam a resolução de problemas.

Borba e Azevedo (2012) compararam o desempenho de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental em diferentes situações com problemas de combinatória. As situações em que as crianças resolviam os problemas por meio da elaboração de árvores de possibilidades com o suporte de um *software* ou com o suporte de lápis e papel, se mostraram mais efetivas. A utilização da árvore de possibilidades favoreceu que as crianças tivessem um maior controle e monitoramento das combinações, evitando a repetição de combinações já feitas e permitindo estabelecer todas as combinações possíveis. Concluiu-se que a elaboração de árvores de possibilidades, tanto de forma virtual como gráfica, é um recurso facilitador na resolução de problemas de combinatória, especialmente os de produto cartesiano.

Pessoa e Borba (2009) observaram que a natureza das representações simbólicas utilizadas pode influenciar na resolução de problemas. Neste estudo, até mesmo estudantes do Ensino Médio que já haviam entrado em contato formal a Análise Combinatória conforme a estrutura curricular, deram preferência a registros mais transparentes, como por exemplo listagens, ao invés de registros em que as relações não estavam claramente à amostra, como mediante a utilização de fórmulas.

Van Essen e Hamaker (1990) apontam que criar uma representação gráfica de um problema, utilizando lápis e papel, pode reduzir a quantidade de informações processadas pela memória de trabalho, uma vez que algumas informações são incorporadas na própria representação, possibilitando o resgate. Além disso, a representação pode tornar as relações matemáticas subjacentes ao problema mais explícitas, ao reorganizar as informações contidas no problema.

Van Dooren, Vancraenenbroeck e Verschaffel (2013) investigaram o papel das representações na resolução de seis problemas multiplicativos (três de isomorfismo e três de produto cartesiano) por crianças estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental. Os efeitos dos suportes de representação foram avaliados através de quatro condições diferentes: 1) sem suporte de representação sistemático e sem instruções específicas; 2) sendo solicitadas a desenhar sua própria representação, esboço ou desenho, para cada problema; 3) recebendo representações adequadas a cada problema (diagrama para os problemas de isomorfismo e arranjo retangular para os problemas de produto cartesiano), com a instrução de que estas representações as ajudariam a resolver; 4) recebendo representações menos adequadas a cada problema (o contrário, com arranjo retangular para os problemas de isomorfismo e diagrama para os problemas de produto cartesiano).

Os resultados indicaram que as crianças que receberam o suporte de representação tiveram um melhor desempenho que as crianças que tiveram que criar as próprias representações, pois muitas crianças construíram suportes que as levaram ao erro. Receber o suporte de representação auxiliou ainda mais na resolução de problemas de produto cartesiano, em comparação com os problemas de isomorfismo. Por fim, com relação ao terceiro questionamento, os autores (VAN DOOREN; VANCRAENENBROECK; VERSCHAFFEL, 2013) concluem que fornecer um suporte de representação contribuiu apenas em problemas nos quais as crianças apresentaram maior dificuldade, isto é, nos problemas de produto cartesiano.

Portanto, é possível, a partir dos estudos mencionados acima, reafirmar que o suporte de representação auxilia na resolução de problemas por crianças. Além disso, aspectos como as características numéricas dos problemas e a natureza dos suportes de representação disponibilizados são fatores que influenciam a resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

Contudo, além da natureza das quantidades e dos suportes de representação, outro fator tem surgido no campo das pesquisas sobre resolução de problemas de estrutura multiplicativa: a explicitação das relações um para muitos. Como discutido a seguir, pesquisas têm investigado o papel desempenhado por esta explicitação de problemas de combinatória e em problemas de proporção simples.

2.3.3 O papel desempenhado pela explicitação da correspondência um para muitos

Para Vergnaud (1996, p. 176), a transformação de invariantes operacionais em palavras e textos não é direta:

> Quando invariantes operacionais são expressos e envolvidos em sistemas de conceitos e símbolos, seu status cognitivo muda, de forma que esquemas possam por vezes se tornar algoritmos. Quando as propriedades relevantes dos objetos matemáticos e operações envolvidas na ação são explícitas, se torna possível analisar suas conexões, e eventualmente demonstrar que um certo conjunto de regras é efetivo para uma certa classe de situações.

Como mencionado, a correspondência um para muitos é um elemento importante para o raciocínio multiplicativo, e devido à sua complexidade, é um desafio para crianças. Na maioria das situações, tanto em pesquisas como no contexto escolar, as relações um para muitos estão implícitas, tendo que ser estabelecidas por aquele que resolve o problema. Este é um aspecto crucial, pois a explicitação dessa correspondência pode ser um fator determinante na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, conforme apontaram Nunes e Bryant (1997) ao discutirem as dificuldades das crianças na resolução de problemas de produto cartesiano.

Analisando estudos que buscaram favorecer a resolução de problemas de produto cartesiano, Spinillo e Silva (2016) evidenciaram que a explicitação da relação um para muitos pode acontecer de duas formas: diagramática, que permite organizar o raciocínio de forma sistemática, oferecendo uma visão clara das relações contidas na situação-problema, e a forma linguística, que expõe as relações de maneira verbal.

Com relação à primeira forma, as autoras mencionam a pesquisa realizada por Borba e Azevedo (2012) para mostrar como a árvore de possibilidades, com e sem o uso de *software*, pode promover um melhor desempenho na resolução de problemas de produto cartesiano. Aparentemente, o uso de setas e traços que ligam um elemento de um conjunto a outros de outro conjunto permite que as crianças gerenciem as diferentes relações um para muitos que se estabelecem neste tipo de problema e melhorem seus procedimentos de resolução. O efeito facilitador da árvore de possibilidades é reafirmado pelo estudo de Montenegro, Borba e Bittar (2020), que afirmam que esta ferramenta auxiliou o desempenho dos participantes, se mostrando mais eficiente do que a listagem sistematizada, por possuir mais congruência com a expressão numérica. A árvore de possibilidades, portanto, é um importante exemplo de diagrama capaz de explicitar a relação um para muitos presente nos problemas de estrutura multiplicativa, em especial, os de combinatória.

A segunda forma de explicitação da relação um para muitos, denominada por Spinillo e Silva (2016), é a linguística. Para as autoras, é possível, através da língua natural, deixar evidentes no enunciado os princípios e as relações que regem o raciocínio combinatório. Como ilustrado pelos estudos relatados a seguir.

Spinillo e Silva (2010) apresentaram problemas de produto cartesiano a crianças de sete e oito anos em duas situações distintas. Na situação 1, os princípios invariantes que governam o raciocínio combinatório, incluindo a correspondência um para muitos, estavam implícitos. Na situação 2, esses princípios eram explicitamente mencionados no enunciado dos problemas. O desempenho das crianças foi significativamente melhor na situação explícita do que na implícita, tanto em relação ao número de acertos como em relação às estratégias adotadas na resolução dos problemas que eram mais sofisticadas na situação explícita. Os dados revelaram, ainda, que as crianças que resolviam primeiro os problemas na situação explícita eram capazes de resolverem problemas na situação implícita com maior sucesso do que as crianças que faziam na ordem inversa. A conclusão foi que mais crianças são capazes de resolver problemas de produto cartesiano quando a correspondência um para muitos é explicitamente mencionada no enunciado dos problemas, e que conseguem aplicar esse princípio na resolução de problemas com a correspondência implícita.

Melo, Silva e Spinillo (2016) desenvolveram um estudo subsequente ao citado acima, no qual investigaram se o auxílio da explicitação da relação um para muitos na resolução de problemas, também se aplicaria a problemas de combinação. Os resultados deste estudo mostraram que o papel facilitador da explicitação foi mais efetivo na resolução de problemas de produto cartesiano, não sendo expressivo na resolução de problemas de combinação com subgrupos de elementos.

No âmbito da proporção, há pesquisas que comparam o desempenho de estudantes do ensino fundamental na resolução de problemas de proporção simples, da classe um para muitos e da classe muitos para muitos (e.g. LAUTERT, SANTOS, MERLINI, 2018; MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014; MAGINA, MERLINI, SANTOS, 2016; MAGINA, FONSECA, 2018; MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020). Tais estudos utilizam a nomenclatura “muitos para muitos” ao se referir aos problemas em que a relação de um elemento com um conjunto de elementos está implícita, que é equivalente, no presente estudo, aos problemas apresentados na Condição 2 (implícita). Em tais pesquisas, os problemas da classe muitos para muitos, isto é, aqueles que tinham a relação um para muitos implícita, foram mais difíceis para as crianças do ensino fundamental.

Dando prosseguimento à investigação do efeito da explicitação linguística no enunciado de problemas de proporção, Spinillo, Lautert e Santos (2021) realizaram um estudo que examinou os efeitos da explicitação da relação um para muitos em problemas de proporção, por 1.160 estudantes do 3° e do 5º ano de escolas públicas do nordeste brasileiro. Os participantes foram solicitados a resolver, utilizando lápis, papel e borracha, três problemas que eram lidos em voz alta pelo examinador, sendo um por vez e apresentados em ordem fixa. No Problema 1, a relação um para muitos era explicitamente mencionada na primeira frase do enunciado. No Problema 2, a relação um para muitos era explicitada na segunda frase do enunciado. Por fim, no Problema 3 a relação um para muitos não era explicitada, tendo que ser inferida pelo participante. Esperava-se que as crianças tivessem mais dificuldades no Problema 3.

Os resultados da pesquisa de Spinillo, Lautert e Santos (2021), analisados a partir do desempenho dos participantes, mostraram que independentemente do ano escolar, as crianças apresentaram um bom desempenho nos Problemas 1 e 2, isto é, problemas em que a relação um para muitos era explicitamente mencionada no enunciado. As crianças obtiveram mais acertos no Problema 1, de multiplicação, que traz a relação um para muitos ainda mais explícita, estando logo na primeira frase. Todavia, como mencionado pelos autores, é possível pensar que o melhor desempenho no Problema 1 (multiplicação) do que no Problema 2 (divisão), decorreu também do fato de a multiplicação ser uma operação mais fácil que a divisão. Os

Problemas 2 e 3 envolviam a divisão como operação central, sendo o maior diferencial a explicitação da relação um para muitos, e, como esperado, crianças de ambos os anos escolares apresentaram mais dificuldades na resolução do Problema 3, no qual esta relação estava implícita.

Sem dúvida, o estudo de Spinillo, Lautert e Santos (2021) é de grande relevância, contudo, alguns aspectos precisam ser considerados acerca dos procedimentos adotados. Um primeiro aspecto refere-se à ausência de controle em relação à quantidade de problemas de multiplicação e de divisão na referida pesquisa. Como comentado anteriormente, é possível pensar que o melhor desempenho no Problema 1 (multiplicação) do que no Problema 2 (divisão) tenha sido consequência do fato de ser um problema de multiplicação, que é mais fácil que o de divisão. Sendo assim, é necessário que haja um estudo que controle esse fator, apresentando a mesma quantidade de problemas de divisão e de multiplicação, de modo a gerar situações variadas nas quais será possível identificar se o que facilitou o desempenho foi a explicitação da relação um para muitos no enunciado ou se foi o fato do problema ser de multiplicação. Esse controle será adotado na presente investigação.

Um segundo aspecto, ainda acerca desse estudo, como enfatizado pelos autores, é o fato de os dados terem sido obtidos por meio de uma aplicação coletiva em que apenas o produto final do processo de resolução foi analisado, o que impossibilitou o acompanhamento individual durante a resolução dos problemas. Assim, faz-se necessária, além da aplicação coletiva, a realização de entrevistas individuais que permitam identificar os procedimentos de resolução adotados pelas crianças. Dessa forma, seria possível analisar se a explicitação da correspondência um para muitos geraria formas de raciocinar distintas daquelas adotadas na resolução de problemas em que essa relação estaria implícita. Além disso, a análise dos procedimentos de resolução poderia favorecer a identificação dos erros mais frequentes, elucidando as possíveis dificuldades apresentadas pelas crianças.

Esses dois pontos acima mencionados podem ser melhor explorados com a realização do presente estudo, que investiga se a explicitação da relação um para muitos exerce algum efeito sobre o desempenho das crianças em problemas de natureza multiplicativa, especificamente em problemas de proporção simples. No presente estudo, será possível levar em conta o raciocínio utilizado pelas crianças através de entrevistas individuais.

3 MÉTODO

3.1 OBJETIVOS E HIPÓTESES

Conforme demonstrado na fundamentação teórica, a correspondência um para muitos trata-se de uma noção complexa, considerada uma forma de raciocinar necessária na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Alguns estudos verificaram que a explicitação desta correspondência em situações de resolução de problemas de produto de medidas favorecia o desempenho de crianças (e.g. MELO, SILVA, SPINILLO, 2016; SPINILLO, SILVA, 2010; SPINILLO, SILVA, 2016). Em vista disso, a pergunta que norteia a presente investigação é: o efeito facilitador da explicitação da correspondência um para muitos também seria observado na resolução de problemas de multiplicação e de divisão do tipo proporção simples? Essa é a questão central da presente investigação que procura ampliar o conhecimento acerca do raciocínio matemático de alunos do Ensino Fundamental referente ao campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Portanto, o estudo teve como objetivo examinar o efeito da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples, de multiplicação e divisão por alunos do 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Para isso, seguiu-se os objetivos específicos: (i) examinar o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa de proporção simples em duas condições: correspondência um para muitos explícita e correspondência um para muitos implícita; (ii) examinar os tipos de procedimentos utilizados pelas crianças na resolução dos problemas apresentados nas duas condições (explícita e implícita); e (iii) investigar o papel da escolaridade no desempenho e nos procedimentos de resolução adotados pelos participantes nas duas condições.

Neste estudo exploratório combina-se uma análise do desempenho e dos procedimentos de resolução adotados com vistas a testar as seguintes hipóteses: (i) de que os participantes de todos os anos escolares apresentariam um desempenho melhor na resolução de problemas na condição explícita do que na condição implícita; e (ii) de que na resolução dos problemas apresentados na condição explícita os procedimentos adotados pelas crianças seriam caracterizados pela explicitação da correspondência um para muitos.

A pesquisa pode trazer contribuições para a Psicologia da Educação Matemática através do estudo do desenvolvimento do raciocínio proporcional em crianças, além de implicações educacionais, ao explorar o potencial didático da explicitação da correspondência um para muitos em problemas de proporção simples.

3.2 PARTICIPANTES

Foram 120 crianças de ambos os sexos, estudantes do 3º (média de idade: 8 anos e 7 meses, DP: 5,48), 4º (média de idade: 9 anos e 11 meses, DP: 6,46) e 5º ano (média de idade: 10 anos e 6 meses, DP: 9,33) do Ensino Fundamental de duas escolas da Região Metropolitana de Recife (PE), com desenvolvimento típico, igualmente divididas em três grupos em função do ano escolar. Os anos escolares investigados foram selecionados pois os estudantes do 3º ano já são introduzidos acerca da resolução de problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Foram incluídas na pesquisa as crianças que estavam devidamente matriculadas, que tinham habilidades de comunicação verbal para possível participação nas entrevistas, e estavam presentes na escola no momento da coleta de dados, que foi realizada em ambiente escolar no horário de aula, entre os meses de março a agosto de 2023. Os participantes foram recrutados após contato inicial com as escolas e obtida autorização da sua participação pelos responsáveis através da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), bem como assinatura do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) por parte das crianças, previamente informadas dos objetivos e procedimentos do estudo. A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco (CAAE: 66740123.0.0000.5208).

3.3 MATERIAL, PROCEDIMENTOS E PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL

A coleta de dados foi realizada em ambiente escolar, em horário de aula, nos turnos da manhã e tarde, com a autorização da coordenação pedagógica e da professora de cada turma, respeitando o calendário e as atividades desenvolvidas.

A presente investigação foi de natureza quanti-qualitativa, e teve sua coleta de dados realizada em dois momentos. No primeiro momento foi realizada uma aplicação coletiva em sala de aula, e no segundo momento, que acontecia imediatamente após o primeiro, foram realizadas entrevistas clínicas individuais com parte das crianças que participaram do primeiro momento.

3.3.1 Primeiro momento

O objetivo do primeiro momento era analisar o desempenho dos participantes na resolução dos problemas. Para isso foi realizada uma aplicação coletiva dos problemas matemáticos na forma escrita, que foram resolvidos individualmente por todos os participantes em sessão única com duração de 40 a 60 minutos.

Foi disponibilizado um caderno de respostas para cada criança responder individualmente, levando o tempo que fosse necessário. Este caderno de respostas continha seis problemas impressos em folhas de papel A4, com espaço suficiente para resolução com lápis e borracha.

Estas aplicações coletivas aconteceram em conformidade com o primeiro objetivo específico do estudo, que foi examinar o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa de proporção simples em duas condições: correspondência um para muitos explícita e correspondência um para muitos implícita.

Na Condição 1 (explícita), a correspondência um para muitos é explicitada no enunciado dos problemas. Na Condição 2 (implícita), a correspondência um para muitos não é explicitada no enunciado dos problemas. Ao todo, cada participante resolveu seis problemas, sendo três na Condição 1 (explícita) e três na Condição 2 (implícita), como ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1 **–** Os problemas de proporção simples em cada condição.

<table>
<tr><th colspan="3">Condição 1 – Problemas com a correspondência um para muitos explícita</th></tr>
<tr><td>Multiplicação</td><td>Problema 1: Tobias foi em um supermercado e viu que 1 pacote de barrinha de cereal vem com 4 barrinhas. Ele comprou 5 pacotes. Quantas barrinhas de cereal ele comprou?</td><td>Problema 2: A receita da massa de pizza de Dona Marlene é assim: para 1 copo de leite ela usa 3 ovos. Para fazer a massa usando 3 copos de leite, quantos ovos ela vai precisar?</td></tr>
<tr><td>Divisão</td><td colspan="2">Problema 3: Rafael comprou um pacote de figurinha. No pacote vem 15 figurinhas. A cada 5 figurinhas ele recebe 1 brinde na lojinha da esquina. Quantos brindes ele vai receber?</td></tr>
<tr><th colspan="3">Condição 2 – Problemas com a correspondência um para muitos implícita</th></tr>
<tr><td>Multiplicação</td><td>Problema 4: Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar?</td><td>Problema 5: Juliana plantou 24 rosas em seu jardim. Para cada 6 rosas ela tem que usar 2 colheres de fertilizante. Quantas colheres de fertilizante ela vai usar?</td></tr>
<tr><td>Divisão</td><td colspan="2">Problema 6: Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos. Gustavo ganhou 12 pontos. Quantas voltas ele deu na quadra?</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

Nos problemas apresentados na Condição 1 (explícita), a razão era unitária, sendo explicitamente mencionada no enunciado dos problemas. No Problema 1 a correspondência um para muitos é explicitada quando se menciona que “[...] 1 pacote de barrinha de cereal vem com 4 barrinhas” (razão 1:4). No Problema 2, a explicitação ocorre quando se menciona que “[...] para 1 copo de leite ela usa 3 ovos” (razão unitária 1:3). No Problema 3, a explicitação ocorre quando se menciona que “[...] a cada 5 figurinhas ele recebe 1 brinde [...]” (razão 1:5). Assim, nos problemas apresentados na Condição 1 (explícita) a razão era unitária.

Nos problemas apresentados na Condição 2 (implícita), a razão não era unitária. No Problema 4 a razão pode ser encontrada no trecho “Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos” (razão 3:15). Na resolução deste problema a criança poderia recorrer ao uso da razão unitária (1:5), porém esta teria que ser inferida durante o processo de resolução, uma vez que não é apresentada no enunciado. No Problema 5 a razão pode ser encontrada no trecho “Para cada 6 rosas ela tem que usar 2 colheres de fertilizante”. Na resolução deste problema a criança poderia recorrer ao uso da razão unitária (1:3), porém esta teria que ser inferida durante o processo de resolução, uma vez que não é apresentada no enunciado. No Problema 6 a razão pode ser encontrada no trecho “a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos”. Esse problema apresenta uma particularidade que o difere dos demais problemas apresentados na Condição 2 (implícita). Nele, a correspondência um para muitos não é possível ser inferida, sendo ela inexistente, como observado no trecho: “a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos” (razão 3:4). Sendo assim, no processo de resolução do Problema 6 não é possível inferir uma razão unitária. Assim, nos problemas apresentados na Condição 2 (implícita) a razão não era unitária.

Para mitigar um possível efeito de ordem, os problemas foram apresentados da seguinte forma: metade das crianças em cada ano escolar recebeu um caderno de respostas com os três problemas na Condição 1 sendo apresentados primeiro, e depois os três problemas na Condição 2 (Ordem 1). A outra metade recebeu o caderno de respostas com os problemas na ordem inversa (Ordem 2).

3.3.2 Segundo momento

O objetivo deste segundo momento foi analisar os procedimentos adotados pelos participantes na resolução dos problemas que haviam solucionado no primeiro momento. Para isso, logo após a conclusão do primeiro momento, 18 crianças foram solicitadas a participar do segundo, que consistia em entrevistas clínicas individuais, sendo seis de cada ano escolar. Uma por vez, essas crianças foram entrevistas em outra sala da escola. Elas foram recrutadas para participação no segundo momento conforme disponibilidade, sem nenhum critério de seleção ligado ao desempenho.

Durante a entrevista a examinadora apresentava para a criança o caderno de resposta que havia recebido no primeiro momento. Cada um dos problemas que havia solucionado no primeiro momento era apresentado, solicitando-se que a criança explicasse seu modo de pensar ao resolver cada problema. As entrevistas duraram cerca de 10 minutos cada e foram gravadas digitalmente em áudio, sendo posteriormente transcritas em protocolos individuais.

4 RESULTADOS

Considerando os objetivos do estudo, os dados foram analisados em função do desempenho na resolução dos problemas e em função dos procedimentos de resolução adotados. Os dados relativos à frequência de acertos foram tratados estatisticamente por meio de testes não paramétricos em função da escolaridade e das condições de resolução dos problemas. Os procedimentos de resolução adotados foram classificados em cinco tipos, definidos a partir das explicações verbalmente apresentadas pelos estudantes durante as entrevistas clínicas e dos registros feitos por eles no caderno de resposta.

Os dados relativos ao desempenho foram analisados considerando todos os 120 participantes da pesquisa, e os dados relativos aos procedimentos de resolução foram analisados considerando os 18 participantes entrevistados no segundo momento, sendo seis em cada ano escolar.

4.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO

Esta análise se baseou no primeiro objetivo específico do estudo, isto é, examinar o desempenho das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa de proporção simples em duas condições: correspondência um para muitos explícita e correspondência um para muitos implícita. Além disso, buscou-se analisar o papel da escolaridade no desempenho dos participantes nas duas condições, em conformidade com o terceiro objetivo específico deste estudo. Os dados foram analisados por meio de testes estatísticos não paramétricos, sendo eles o teste de postos sinalizados de Wilcoxon, o teste U de Mann-Whitney, o Kruskal-Wallis e o teste de Dunn.

4.1.1 O desempenho por condição experimental em cada ano escolar

A Tabela 1 mostra que nos três anos escolares os estudantes tiveram um melhor desempenho nos problemas na Condição 1 (explícita) do que na Condição 2 (implícita). Este resultado foi confirmado pelo teste de postos sinalizados de Wilcoxon que apontou diferença significativa entre as condições, considerando os três anos escolares conjuntamente ($Z= 9479$; $p < 0,001$). O teste também apontou diferenças significativas entre as condições no 3º ano ($Z= 1070$; $p < 0,002$), no 4º ano ($Z= 1050$; $p < 0,002$) e no 5º ano ($Z = 1140$; $p < 0,001$). Em cada ano escolar o desempenho foi melhor na Condição 1 (explícita) que na Condição 2 (implícita), confirmando a hipótese de que a explicitação da correspondência um para muitos no enunciado dos problemas seria um fator que facilitaria a resolução dos problemas de proporção simples.

Tabela 1 **–** Número e percentual de acertos (entre parênteses) em cada condição (explícita ou implícita) e ano escolar

Ano escolar	Condição 1 (explícita)	Condição 2 (implícita)
3º ano	22 (18,3)	5 (4,2)
4º ano	53 (44,2)	25 (20,8)
5º ano	67 (55,8)	34 (28,3)

Fonte: Dados da pesquisa.

Com o intuito de comparar o desempenho entre os anos escolares em cada condição, foi aplicado o teste Kruskal-Wallis, que apontou diferença significativa entre eles na Condição 1 (explícita) (gl = 2; $p < 0{,}001$) e na Condição 2 (implícita) (gl = 2; $p < 0{,}001$). O teste de Dunn, com ajuste do valor de *p*, comparou os anos escolares dois a dois, obtendo-se os níveis de significância que constam na Tabela 2.

Tabela 2 – Níveis de significância obtidos por meio do Teste de Dunn nas comparações entre os anos escolares em cada condição experimental

Anos escolares	Condição 1 (explícita)	Condição 2 (implícita)
3º ano vs. 4º ano	p= 0,0130	p= 0,0172
3º ano vs. 5º ano	p= 0,0000520	p= 0,000145
4º ano vs. 5º ano	p= 0,149 (ns)	p= 0,211 (ns)

Fonte: Dados da pesquisa.

O que se observa na Tabela 2, é que tanto na Condição 1 (explícita) como na Condição 2 (implícita) as crianças do 3º ano apresentam um desempenho significativamente mais limitado que as do 4º e 5º ano. Por sua vez, o desempenho das crianças do 4º e 5º não difere na Condição 1 e nem na Condição 2. Estes dados apontam uma aproximação entre o 4º ano e o 5º ano e um distanciamento desses anos escolares em relação ao 3º ano.

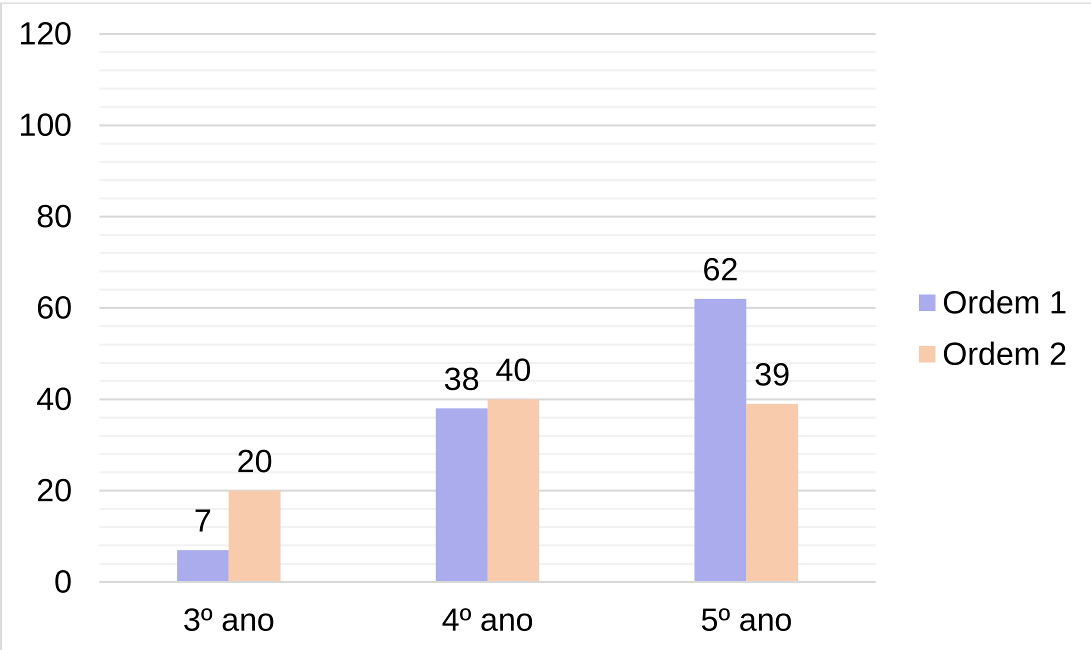
Ao que parece, a explicitação da correspondência um para muitos é fator facilitador na resolução de problemas de proporção simples por crianças do 3º, 4º e 5º anos do ensino fundamental. Os dados sugerem que, a partir do 4º ano, o estudante parece se beneficiar ainda mais da explicitação da correspondência um para muitos, ainda que esse efeito facilitador já seja observado entre as crianças do 3º ano.

4.1.2 O desempenho por ordem de aplicação das condições experimentais

Como descrito anteriormente, foram adotadas duas ordens de aplicação: a Ordem 1 (explícita-implícita), na qual os problemas na Condição 1 (explícita) foram apresentados primeiro e os problemas na Condição 2 (implícita) foram apresentados depois; e a Ordem 2 (implícita-explícita), na qual os problemas foram apresentados de maneira inversa.

Na análise realizada a partir do teste U de Mann-Whitney, considerando os três anos escolares conjuntamente, ao comparar o desempenho entre o grupo de participantes que recebeu os problemas na Ordem 1 e o grupo que recebeu os problemas na Ordem 2, não houve diferença significativa ($p = 0,678$). Quanto ao desempenho dos participantes por ano escolar, a Figura 2 apresenta o número de acertos de cada grupo, tanto na Ordem 1, como na Ordem 2.

Figura 2 – Gráfico comparativo entre as ordens de aplicação



Nota: Ordem 1 – condição explícita seguida da condição implícita; Ordem 2 – condição implícita seguida da condição explícita.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para comparar o desempenho dentro de cada ano escolar, por ordem de aplicação, foi realizado o teste U de Mann-Whitney. O teste apontou diferença significativa no 3º ano ($p = 0,03$), indicando que os estudantes do 3º ano que receberam os problemas na Ordem 2 (implícita-explícita), tiveram um melhor desempenho do que os que receberam na Ordem 1. Já no 5º ano, que teve o desempenho oposto ao do 3º ano e tendo mais acertos na Condição 1 o teste U de

Mann-Whitney apontou diferença significativa (p = 0,02) indicando que os estudantes que receberam os problemas na Ordem 1 (explícita-implícita), tiveram um melhor desempenho. No 4º ano, por sua vez, não houve diferença significativa com relação à ordem de aplicação.

O efeito de ordem em cada ano escolar por condição em cada ordem de aplicação é ilustrado nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Número de acertos em cada condição por ano escolar na Ordem 1 (explícita-implícita)

Ano escolar	Condição 1	Condição 2
3º ano	6	1
4º ano	28	10
5º ano	42	20

Nota: Condição 1 – Explícita; Condição 2 – Implícita.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 3 demonstra apenas os estudantes que receberam os problemas na Ordem 1 (explícita-implícita). Para comparar o desempenho entre os três anos escolares na Ordem 1, em cada condição, foi aplicado o teste Kruskal-Wallis, que indicou diferença significativa tanto na Condição 1 (explícita) (p < 0,01), como na Condição 2 (implícita) (p < 0,01).

Com o objetivo de identificar a direção das diferenças entre os anos escolares em cada condição na Ordem 1 (explícita-implícita), comparando-os dois a dois, foi realizado o teste de Dunn, com ajuste do valor de *p*. Na Condição 1 (explícita), o desempenho entre o 3º e o 4º ano diferiu significativamente (p = 0,01), e também entre o 3º e o 5º ano (p < 0,01). Na Condição 2 (implícita), o teste de Dunn apontou diferença significativa apenas entre 3º e 5º anos escolares (p < 0,01). Aqui, é possível notar que o desempenho dos estudantes do 5º ano que receberam os problemas na Ordem 1 (explícita-implícita) foi o melhor tanto na Condição 1 quanto na Condição 2.

Tabela 4 – Número de acertos em cada condição por ano escolar na Ordem 2 (implícita-explícita)

Ano escolar	Condição 1	Condição 2
3º ano	16	4
4º ano	25	15
5º ano	25	14

Nota: Condição 1 – Explícita; Condição 2 – Implícita.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 4 traz apenas os estudantes que receberam os problemas na Ordem 2 (implícita-explícita). Na comparação entre os anos escolares, dentre os estudantes que receberam os problemas na Ordem 2, o teste Kruskal-Wallis não indicou diferenças. Da mesma maneira, o teste U de Mann-Whitney não apontou diferença significativa em nenhuma das comparações dentro de cada ano escolar.

Diante das análises apresentadas é possível inferir que a Ordem 1 (explícita-implícita), favoreceu o desempenho dos estudantes do 5º ano. Isto porque os estudantes do 5º ano que receberam os problemas na Ordem 1 se destacaram nas análises entre os anos escolares tanto na Condição 1 (explícita), quanto na Condição 2 (implícita), o que não foi observado entre os estudantes que receberam os problemas na Ordem 2 (implícita-explícita). Contudo, é necessário que estudos futuros ampliem a investigação da ordem de aplicação, uma vez que no desempenho geral dos participantes, e também no 3º e 4º anos escolares, a análise feita nesta pesquisa não evidenciou diferenças significativas.

4.1.3 O desempenho em cada problema por condição experimental

O desempenho em cada um dos seis problemas é apresentado na Tabela 5. Dados os valores baixos de desempenho em cada problema, não foi possível aplicar testes estatísticos, de forma que os resultados são discutidos em termos de tendências.

Tabela 5 – Número e percentual de acertos (entre parênteses) em função da escolaridade

	Condição 1 (explícita)			**Condição 2 (implícita)**		
Ano escolar	**Problema 1**	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**	**Problema 5**	**Problema 6**
3º ano	16 (40)	4 (10)	2 (5)	4 (10)	1 (2,5)	0
4º ano	21 (52,5)	18 (45)	14 (35)	12 (30)	5 (12,5)	8 (20)
5º ano	29 (72,5)	26 (65)	12 (30)	20 (50)	10 (25)	4 (10)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Condição 1 (explícita), o Problema 1 e o Problema 2, que envolviam a multiplicação, tiveram mais acertos que o Problema 3 que era de divisão. Com o avanço da escolaridade, em termos de tendência, tanto no Problema 1 como no Problema 2, é possível observar um progresso, visto que as crianças do 4º ano acertaram mais do que crianças do 3º ano, e crianças do 5º ano acertaram mais do que crianças do 4º ano.

Na Condição 2 (implícita), o Problema 4, de multiplicação, teve mais acertos em todos os anos escolares, e o Problema 6 foi particularmente difícil para as crianças do 3º ano, visto que não houve nenhum acerto. Uma tendência de melhora no desempenho em função da escolaridade pode ser notada nos Problemas 4 e 5, sendo estes problemas de multiplicação.

Uma possível explicação para o baixo percentual de acertos no Problema 6, é que além de ser um problema de divisão, não era possível, durante sua resolução, buscar a razão unitária, o que poderia ocorrer na resolução do Problema 4 e do Problema 5, ambos de multiplicação. Esta discussão remete ao fato de que a razão unitária, que é, em última instância, uma correspondência um para muitos, pode se configurar de três maneiras distintas na resolução de problemas de estrutura multiplicativa: (i) estar explícita no enunciado, como ocorreu na Condição 1; (ii) estar implícita porém possível de ser adotada durante o procedimento de resolução, como ocorreu no Problema 4 e no Problema 5 na Condição 2; e (iii) estar implícita porém impossível de ser adotada durante o procedimento de resolução, como ocorreu no Problema 6 na Condição 2.

De modo geral, em ambas as condições os problemas de multiplicação tendiam a ser mais fáceis que os de divisão, sendo este desempenho potencializado quando são apresentados na Condição 1. Nos problemas de divisão, tanto na Condição 1 como na Condição 2, não foi observada uma progressão mais acentuada no desempenho em função da escolaridade, evidenciando uma aproximação entre o desempenho do 4º e do 5º ano.

4.2 ANÁLISE DOS PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO

Nesta seção serão apresentadas as análises relativas ao segundo momento do estudo, isto é, às entrevistas individuais realizadas com 18 participantes, sendo seis de cada ano escolar. Esta análise foi desenvolvida de acordo com o segundo objetivo específico da presente pesquisa, a saber: examinar os tipos de procedimentos utilizados pelas crianças na resolução dos problemas apresentados nas duas condições (explícita e implícita). Além disso, buscou-se investigar o papel da escolaridade nos procedimentos de resolução utilizados pelos participantes, em consonância com o terceiro objetivo específico do presente estudo.

Foram identificados tipos de procedimentos adotados pelas crianças na resolução dos problemas a partir da análise e discussão entre dois juízes (orientadora e orientanda). Ressalta-se que os procedimentos não se caracterizavam como categorias hierárquicas.

Inicialmente serão descritos e exemplificados os tipos de procedimento identificados. Em seguida, apresenta-se a distribuição dos tipos de procedimentos em função da escolaridade e da condição experimental (Condição 1 - Explícita; e Condição 2 - Implícita). Por fim, será apresentada a relação entre tipo de procedimento e desempenho na resolução dos problemas.

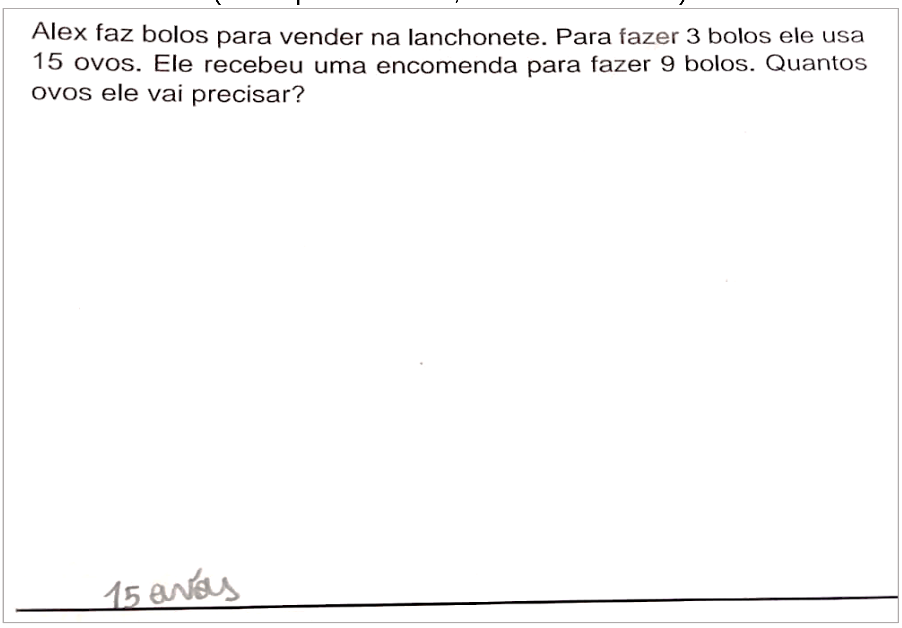
4.2.1 Os tipos de procedimento

Neste estudo foi possível identificar cinco tipos de procedimentos que são descritos e exemplificados a seguir.

Tipo 1 – Procedimento não explicitado ou repetição de informações

A criança não explicita o procedimento adotado ou apenas repete informações numéricas presentes no enunciado do problema.

Figura 3 – Procedimento Tipo 1 adotado na resolução do Problema 4 na Condição 2 (implícita) (Participante: 3º ano, 8 anos e 4 meses)


Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar?

15 ovos

Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Esse eu não entendi, tia.
E: Mas como você chegou nesse resultado?
C: Só coloquei o que tinha aqui, quando eu não entendia eu colocava o que tem em cima [apontando para o trecho do enunciado "...ele usa 15 ovos"].

Figura 4 – Procedimento Tipo 1 adotado na resolução do Problema 3, na Condição 1 (explícita)
(Participante: 5º ano, 10 anos e 9 meses)

Rafael comprou um pacote de figurinha. No pacote vem 15 figurinhas. A cada 5 figurinhas ele recebe 1 brinde na lojinha da esquina. Quantos brindes ele vai receber? 15 brindes

Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: 15 brindes. Fiz de cabeça.
E: Mas como você pensou?
C: Porque se ele vai comprar 15 figurinhas vão ser 15 brindes porque é um pra cada figurinha.

Tipo 2 – Procedimento por adição repetida ou por agrupamento

A criança utiliza a adição repetida (somando parcelas iguais repetidamente até esgotar a quantidade de elementos) ou realiza agrupamentos dos elementos e em seguida realiza uma contagem dos grupos que formou. Representações icônicas (bolas, traços), pictográficas (desenhos) e simbólicas (números) podem ser adotadas.

Figura 5 – Procedimento Tipo 2 adotado na resolução do Problema 1, na Condição 1 (explícita)
(Participante: 4º ano, 10 anos e 3 meses)

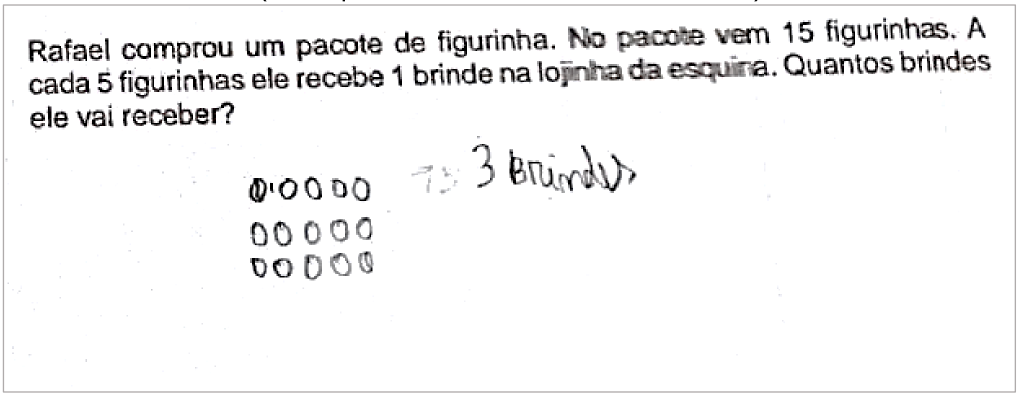
Tobias foi em um supermercado e viu que 1 pacote de barrinha de cereal vem com 4 barrinhas. Ele comprou 5 pacotes. Quantas barrinhas de cereal ele comprou? 20 Barrinha

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: No pacote de cereal vinha 4 barrinhas, já que ele comprou 5 eu fui contando.
E: E como você contou?
C: Eu botei 4 mais 4 aqui até dar 20. Até dar o cálculo certo.

Figura 6 – Procedimento Tipo 2 adotado na resolução do Problema 3, na Condição 1 (explícita)
(Participante: 5º ano, 10 anos e 10 meses)



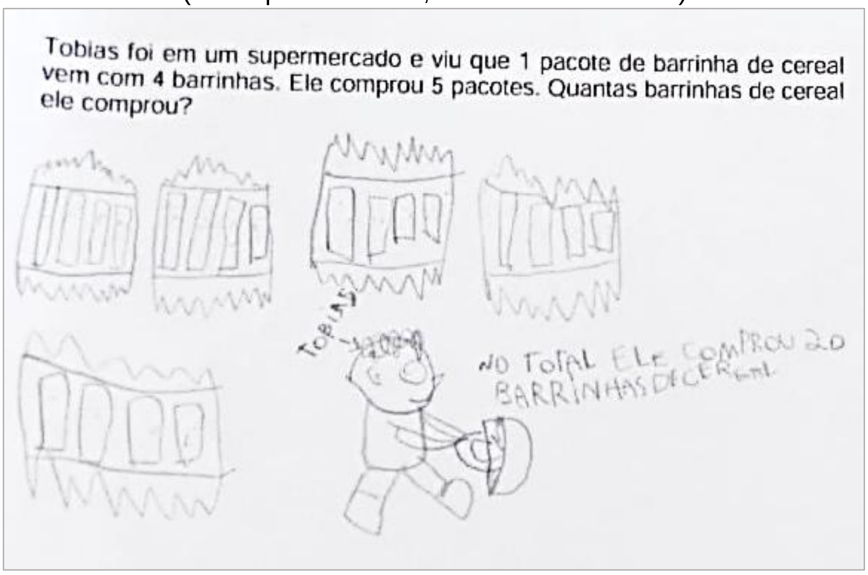
Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Pra responder esse eu fiz bolinhas de 5 até chegar em 15
E: Entendi. E como você chegou nesse resultado?
C: Aqui deu 3 grupos de 5 figurinhas, então ele ganhou 3 brindes.

Tipo 3 – Procedimento por contagem

A criança resolve o problema por meio da contagem de cada elemento utilizando os dedos ou representações icônicas (bolas, traços) e pictográficas (desenhos).

Figura 7 – Procedimento Tipo 3 adotado na resolução do Problema 1, na Condição 1 (explícita)
(Participante: 4º ano, 10 anos e 10 meses)

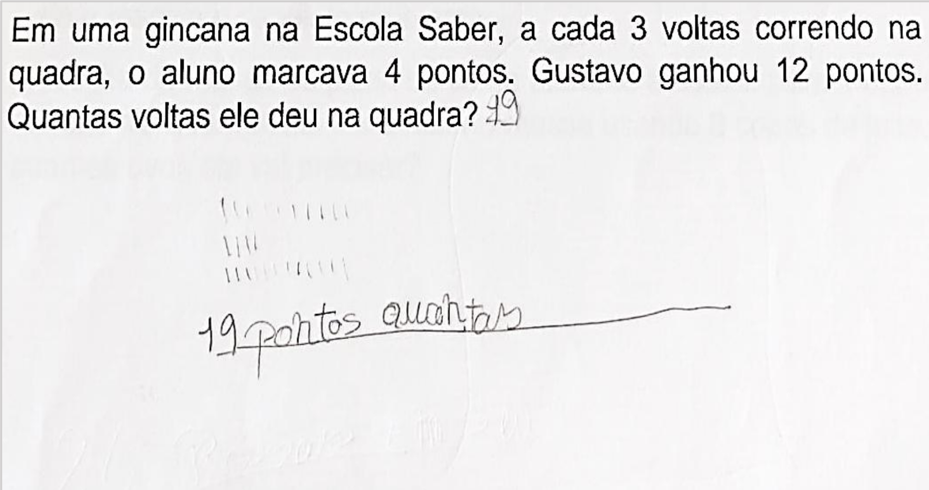


Fonte: Dados da pesquisa.

C: Aqui "tava" dizendo que ele foi no supermercado e viu que um pacote de cereal vem com 4 barrinhas, aí ele decidiu levar 5 pacotes, e daí eu fui fazendo o saco pra contar mais fácil.
E: Então esses desenhos são os sacos?

C: Sim, aí eu fui contando as barrinhas de cereal que tinha dentro, e no total ele comprou 20 barrinhas.

Figura 8 – Procedimento Tipo 3 adotado na resolução do Problema 6, na Condição 2 (implícita)
(Participante: 3º ano, 8 anos e 7 meses)



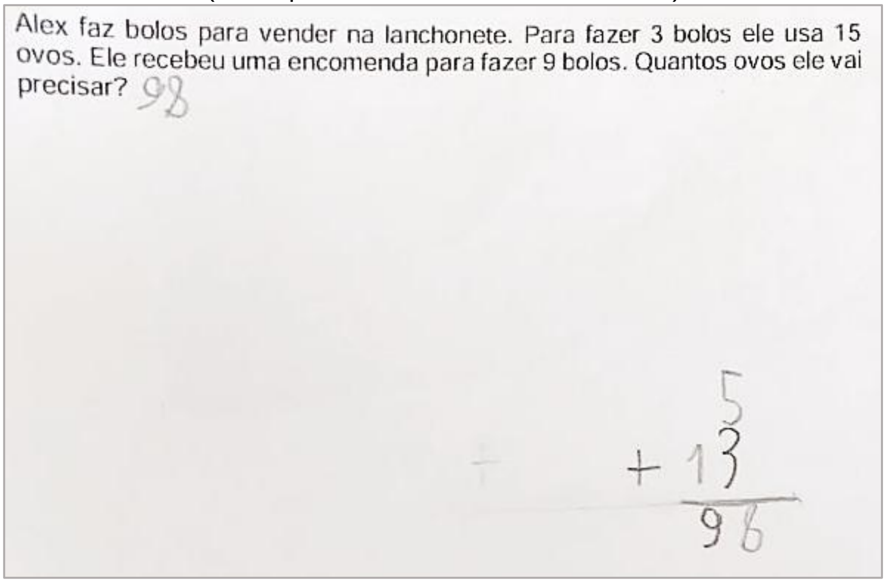
Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Esse aqui eu peguei os números, aí eu peguei 12, 3 e 4 aí eu juntei eles e ficou 19. Eu acabei tendo dificuldade muito tempo, mas eu somei e deu 19.

Tipo 4 – Procedimento algorítmico

A criança utiliza os números ou os dígitos dos números presentes no enunciado do problema, realizando uma operação aritmética sobre eles. Observe que este tipo de procedimento é diferente do procedimento de adição repetida (Tipo 2), não consistindo na soma de parcelas iguais, mas correspondendo a uma operação canônica, isto é, típica do contexto escolar. Representações simbólicas são utilizadas (números).

Figura 9 – Procedimento Tipo 4 adotado na resolução do Problema 6, na Condição 2 (implícita) (Participante: 3º ano, 8 anos e 7 meses)

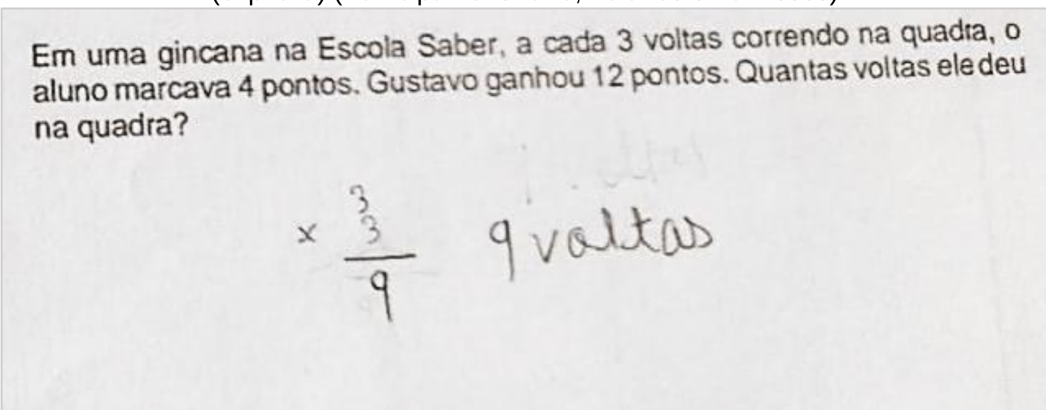

Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar? 98

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 13 \\ \hline 98 \end{array}$$

Resposta dada ao Problema 5 (M., 3º ano)

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Primeiro aí, eu armei a conta e depois eu somei
E: Com quais números?
C: Com o 5, 3 e 1
E: E de onde você tirou esses números?
C: Daqui de cima (apontando para o enunciado do problema).
E: Foi uma conta de que?
C: De mais.

Figura 10 – Procedimento Tipo 4 adotado na resolução do Problema 2, na Condição 1 (explícita) (Participante: 5º ano, 10 anos e 10 meses)


Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos. Gustavo ganhou 12 pontos. Quantas voltas ele deu na quadra?

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 3 \\ \hline 9 \end{array}$$ 9 voltas

Fonte: Dados da pesquisa.

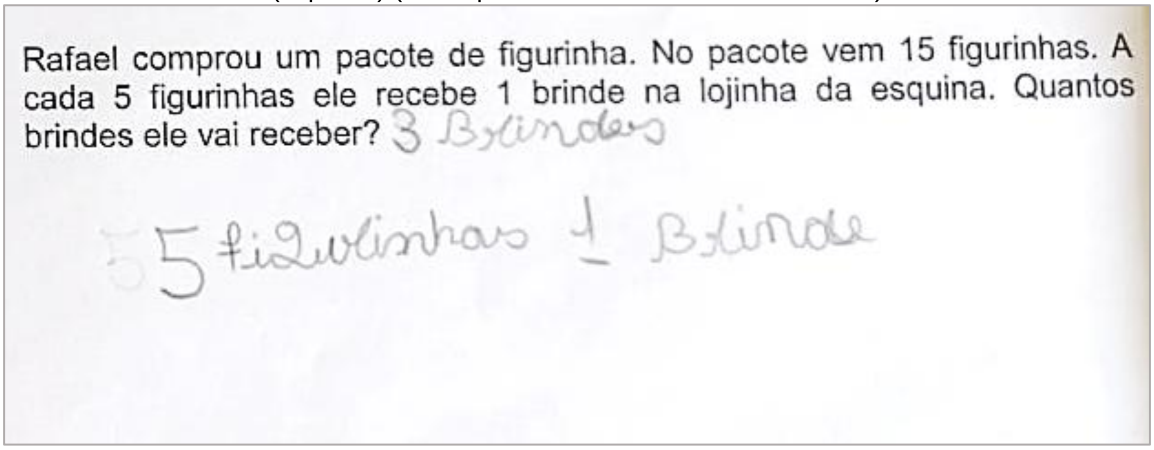
E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Eu botei 3 vezes 3 que é igual a 9, então eu botei que ele deu 9 voltas na quadra.
E: O 3 vezes 3 é o que?
C: Pra marcar quantas voltas ele deu, como ele deu três voltas... quantas voltas ele deu? (lê novamente). Ah entendi agora, o 3 vezes 3

significa que ele deu... como deu 12, eu dividi 12 para 4, aí deu 3, e 3 voltas vezes 3 dá 9. Foi 9 voltas mesmo.

Tipo 5 – Procedimento baseado na razão

A criança utiliza a razão na resolução do problema. Pode envolver a razão unitária em que é estabelecida a correspondência um para muitos, ou pode envolver a razão não unitária, em que é estabelecida a correspondência muitos para muitos.

Figura 11 – Procedimento Tipo 5 adotado na resolução do Problema 3, na Condição 1 (explícita) (Participante: 4º ano, 10 anos e 3 meses)

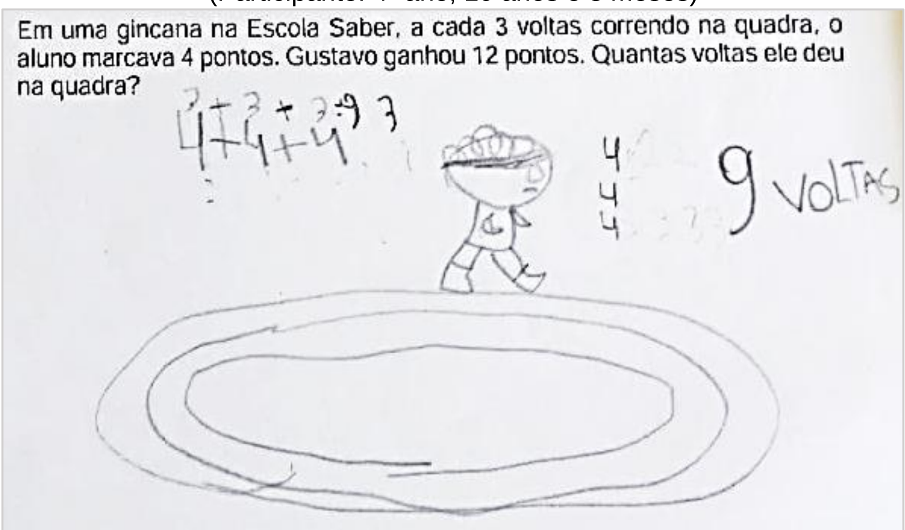

Rafael comprou um pacote de figurinha. No pacote vem 15 figurinhas. A cada 5 figurinhas ele recebe 1 brinde na lojinha da esquina. Quantos brindes ele vai receber? 3 Blindes

5 figulinhas 1 Blinde

Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Esse daqui são 15 figurinhas, e a cada 5 vinha um brinde. Como era 15, aí eu fui contando. Nas 5 primeiras ele recebeu o primeiro, depois mais 5 mais um brinde, mais 5 mais um... desse jeito.

Figura 11 – Procedimento Tipo 5 adotado na resolução do Problema 3, na Condição 1 (explícita) (Participante: 4º ano, 10 anos e 3 meses)

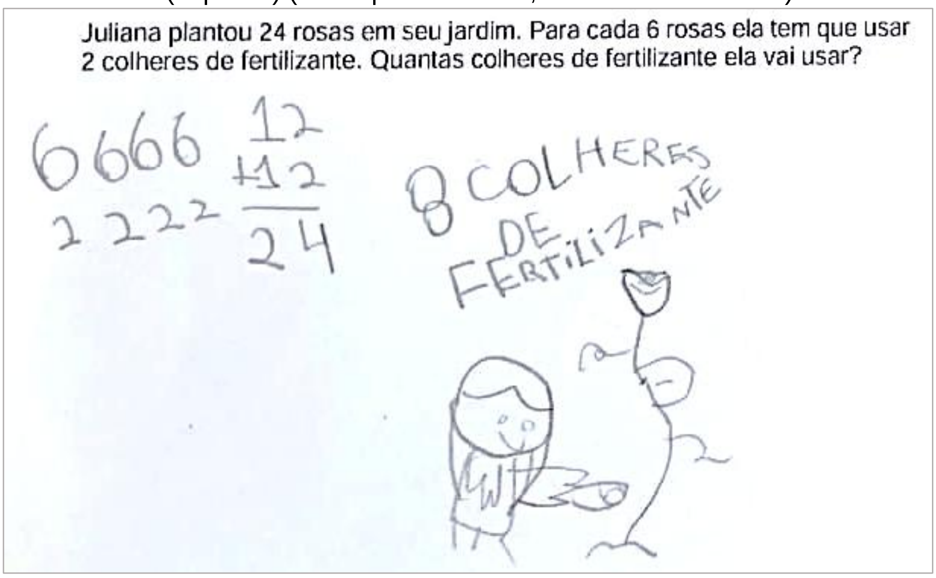

Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos. Gustavo ganhou 12 pontos. Quantas voltas ele deu na quadra?

Fonte: Dados da pesquisa.

C: Teve uma gincana na escola e a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marcava 4 pontos, aí esse menino correu... Gustavo correu 3... 4 três vezes. Aqui ó: um, dois, três (apontando com o dedo para cada círculo desenhado, conforme conta cada um).
E: Como você fez esse cálculo?
C: Eu fiz 4 mais 4 mais 4, aí deu 16, aí ele dando 16 voltas marcava 9 pontos.
E: No final sua resposta foi qual?
C: Ele deu 12 voltas na quadra. Porque Gustavo ganhou 12 pontos, quantas voltas ele deu? E a cada 3 voltas correndo na quadra... ah tá entendi. Mas é porque aqui eu botei 4 mais 4 mais 4, não ia dar 12 voltas... aí... (pausa e calcula mentalmente). Ele deu 9 voltas pra ganhar 12 pontos.

Foram identificadas formas de resolução híbridas que envolviam mais de um dos tipos de procedimento acima mencionados como exibido nas Figuras 11 e 12.

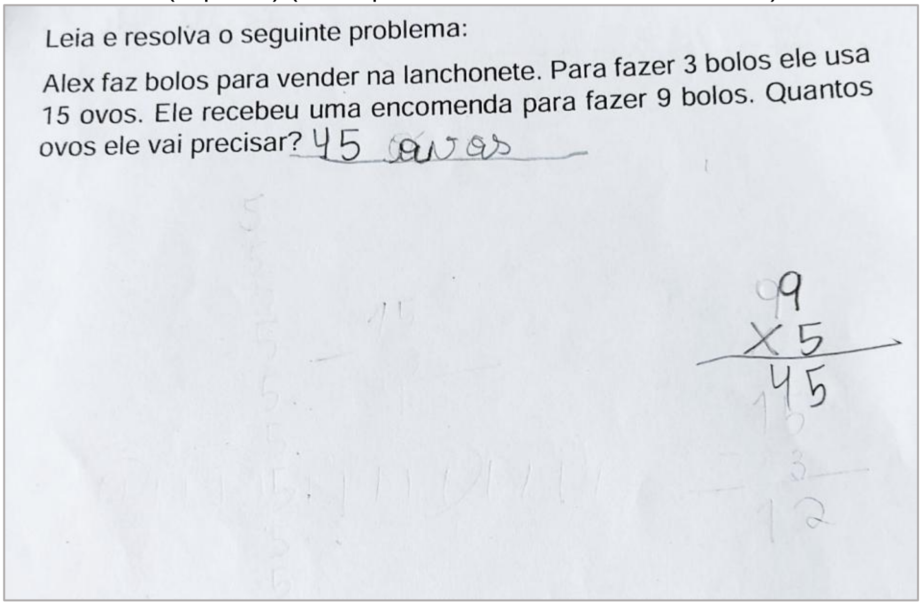
Figura 12 – Procedimentos Tipo 5 e Tipo 4 adotados na resolução do Problema 5, na Condição 2 (implícita) (Participante: 4º ano, 10 anos e 10 meses)



Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Ela queria saber quantas colheres de fertilizante ela ia usar pra 24 rosas. Aí eu fui contando 6 mais 6 igual a 12, aí 12 mais 12 deu 24 aí eu fui contando ali do lado e deu 8 colheres.
E: E aqui do lado como você fez [apontando para as correspondências entre 6 e 2, no canto superior esquerdo]*?*
C: Eu contei 12 mais 12, aí dá 24, aí 2, 2, 2, 2, que é das colheres que ela ia botar, aí deu 8.

Figura 13 – Procedimentos Tipo 5 e Tipo 4 adotados na resolução do Problema 5, na Condição 2 (implícita) (Participante: 5º ano, 10 anos e 9 meses)


Leia e resolva o seguinte problema:

Alex faz bolos para vender na lanchonete. Para fazer 3 bolos ele usa 15 ovos. Ele recebeu uma encomenda para fazer 9 bolos. Quantos ovos ele vai precisar? 45 ovos

9
x5
45

Fonte: Dados da pesquisa.

E: Me explica como foi que você respondeu esse.
C: Esse deu 45 ovos, eu fiz a conta de vezes, 5 vezes 9 deu 45.
E: E o 5? Onde você encontrou?
C: Porque... pra fazer 3 bolos ele não usa 15 ovos? Então 1 bolo é 5 ovos. Aí eu fui contando de 5 em 5 e deu o resultado.

4.2.2 Os tipos de procedimento e a escolaridade

Os dados desta seção foram obtidos no segundo momento do estudo com seis crianças de cada ano escolar. Em vista do baixo número de procedimentos, os dados não foram submetidos a tratamento estatístico, sendo analisados em termos de tendências. A distribuição dos tipos de procedimento em cada ano escolar consta na Tabela 6.

Tabela 6 – Número de tipos de procedimento adotados em função da escolaridade[1]

Procedimento	3º ano	4º ano	5º ano
Tipo 1 (n= 13)	9	3	1
Tipo 2 (n= 23)	8	9	6
Tipo 3 (n= 12)	6	5	1
Tipo 4 (n= 59)	13	16	30
Tipo 5 (n= 13)	0	6	7

Nota: Tipo 1 – procedimento não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado; Tipo 2 – procedimento por adição repetida ou por agrupamento; Tipo 3 – procedimento por contagem; Tipo 4 – procedimento algorítmico; Tipo 5: procedimento baseado na razão.

Fonte: Dados da pesquisa.

[1] Como havia formas de resolução híbridas que envolviam mais de um tipo de procedimento, o número de tipos de procedimento não corresponde ao número de participantes em cada ano escolar (seis).

Conforme a Tabela 6, o procedimento do Tipo 4 (algorítmico) foi o mais frequente, correspondendo a 49% das formas de resolução adotadas pelos participantes entrevistados oriundos dos três anos escolares conjuntamente, sendo isso observado em cada ano escolar, sobretudo entre os estudantes do 5º ano.

O segundo tipo de procedimento mais frequente foi o Tipo 2 (adição repetida ou agrupamento), presente em 19% das formas de resolução adotadas pelas crianças que participaram das entrevistas, sendo ligeiramente mais frequente no 3º e no 4º ano do que no 5º ano.

Procedimentos do Tipo 1 (não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado do problema) e do Tipo 3 (contagem) foram mais observados entre as crianças do 3º e 4º ano do que entre as do 5º ano. O procedimento Tipo 5 (baseado na razão) nunca foi adotado pelas crianças do 3º ano.

É válido ressaltar que as respostas híbridas, aquelas com mais de um tipo de procedimento, são consideradas em mais de uma célula, conforme os tipos de procedimento utilizados. Ao todo, foram obtidas 11 respostas híbridas, sendo oito no 5º ano, três no 4º ano, e nenhuma resposta híbrida no 3º ano. Ao que parece, as crianças em anos escolares mais adiantados, como as do 5º ano, combinam diferentes procedimentos como formas de resolver os problemas. Contudo, devido ao número limitado de participantes entrevistados, não se pode fazer generalizações acerca deste dado.

4.2.3 Os tipos de procedimento e as condições experimentais

A relação entre as condições experimentais (Condição 1 - explícita; e Condição 2 - implícita), e os procedimentos de resolução adotados é ilustrada na Tabela 7. Devido ao número limitado de procedimentos, os dados não foram submetidos a tratamento estatístico, sendo analisados em termos de tendências.

Tabela 7 – Número de tipos de procedimento adotados em cada condição experimental

Procedimento	Condição 1 (explícita)	Condição 2 (implícita)
Tipo 1 (n= 13)	6	7
Tipo 2 (n= 23)	11	12
Tipo 3 (n= 12)	11	1
Tipo 4 (n= 59)	26	33
Tipo 5 (n= 13)	3	10

Nota: Tipo 1 – procedimento não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado; Tipo 2 – procedimento por adição repetida ou por agrupamento; Tipo 3 – procedimento por contagem; Tipo 4 – procedimento algorítmico; Tipo 5 – procedimento baseado na razão.

Fonte: Dados da pesquisa.

O Tipo 4 (algorítmico) foi o mais frequente em ambas as condições. Diferenças entre as condições foram observadas em relação ao procedimento Tipo 3 (contagem) que foi mais frequente na Condição 1 (explícita), e em relação ao procedimento Tipo 5 (baseado na razão) que foi mais frequente na Condição 2 (implícita).

O procedimento Tipo 3 (contagem) foi expressivamente mais frequente em problemas na Condição 1 (explícita), sendo adotado uma única vez em problemas na Condição 2 (implícita). É possível que isto tenha ocorrido porque os problemas em que a correspondência um para muitos estava explícita permitiam que algumas crianças utilizassem a correspondência termo a termo, explicitando este procedimento através da contagem dos elementos.

O procedimento Tipo 5 (baseado na razão) foi mais utilizado em problemas na Condição 2 (implícita) do que na Condição 1 (explícita). Esse foi um resultado inesperado pois a expectativa era que este procedimento fosse mais utilizado na resolução de problemas apresentados na Condição 1, uma vez que nela a razão unitária era explicitamente mencionada no enunciado dos problemas. É possível inferir que, apesar de se beneficiar da explicitação da correspondência um para muitos (Condição 1) na resolução dos problemas, as crianças não adotavam a razão como estratégia de resolução dos problemas nesta condição.

Importante mencionar que em nove das dez ocasiões em que o procedimento Tipo 5 (baseado na razão) foi adotado, aparecia em formas de resolução híbridas, acompanhado de procedimentos do Tipo 2 (adição repetida ou agrupamento) ou Tipo 4 (algorítmico).

4.2.4 Os tipos de procedimento em cada ordem de aplicação

A análise a seguir teve o propósito de investigar a relação entre os procedimentos adotados e a ordem de aplicação dos problemas. Das 18 crianças (seis em cada ano escolar) que participaram das entrevistas, metade recebeu os três problemas na condição explícita primeiro, e, em seguida, os três problemas na condição implícita (Ordem 1), enquanto a outra metade recebeu os problemas na ordem inversa (Ordem 2). A relação entre os procedimentos adotados e a ordem de aplicação dos problemas é ilustrada na Tabela 8. Devido ao número limitado de procedimentos, os dados não foram submetidos a tratamento estatístico, sendo analisados em termos de tendências.

Tabela 8 – Número de tipos de procedimento em cada ordem de aplicação

Procedimento	Ordem 1: Explícita - Implícita	Ordem 2: Implícita - Explícita
Tipo 1 (n= 13)	7	6
Tipo 2 (n= 23)	11	12
Tipo 3 (n= 12)	6	6
Tipo 4 (n= 59)	27	32
Tipo 5 (n= 13)	9	4

Nota: Tipo 1 – procedimento não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado; Tipo 2 – procedimento por adição repetida ou por agrupamento; Tipo 3 – procedimento por contagem; Tipo 4 – procedimento algorítmico; Tipo 5 – procedimento baseado na razão.
Fonte: Dados da pesquisa.

Como mostra a Tabela 8, não fica evidente a existência de um efeito da ordem de apresentação das condições experimentais sobre os tipos de procedimentos adotados pelos 18 participantes. Ao que parece, os tipos de procedimentos de resolução parecem independem da ordem de aplicação das condições.

4.2.5 Os tipos de procedimento em cada problema

Assim como foi analisado o desempenho das crianças em cada problema, buscou-se observar também quais tipos de procedimentos surgiram diante de cada problema apresentado. A Tabela 9 mostra a frequência de cada tipo de procedimento em cada problema por condição. Dada a quantidade baixa de procedimentos, não foi possível aplicar testes estatísticos.

Tabela 9 – Número de tipos de procedimento em cada problema por condição

	Condição 1 (explícita)			Condição 2 (implícita)		
Tipo	**Problema 1**	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**	**Problema 5**	**Problema 6**
Tipo 1	0	2	4	3	3	1
Tipo 2	5	3	3	6	0	6
Tipo 3	5	2	4	0	0	1
Tipo 4	10	11	5	10	13	10
Tipo 5	0	0	3	4	3	3

Nota: Tipo 1 – procedimento não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado; Tipo 2 – procedimento por adição repetida ou por agrupamento; Tipo 3 – procedimento por contagem; Tipo 4 – procedimento algorítmico; Tipo 5 – procedimento baseado na razão.
Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 9 detalha as distinções observadas entre as condições com relação ao procedimento Tipo 3 (contagem) e o procedimento Tipo 5 (baseado na razão). O Tipo 3 (contagem) foi mais observado na Condição 1 (explícita), na Tabela 9 é possível observar que ele aparece apenas no Problema 6. O Tipo 5 (baseado na razão), por sua vez, foi mais observado na Condição 2 (implícita), contudo, ele foi utilizado também no Problema 3, na Condição 1 (explícita).

A partir da Tabela 9 é possível destacar os dados com relação ao Problema 6, que, como mencionado, é impossível inferir, a partir do seu enunciado, a correspondência um para muitos. Mesmo o Problema 6 sendo o mais difícil para participantes de todos os anos escolares, no recorte de participantes entrevistados foi possível identificar a utilização de todos os cinco tipos de procedimentos de resolução. Além disso, o procedimento Tipo 5 (baseado na razão) foi utilizado por três participantes, evidenciando que, mesmo sem identificar a razão unitária, as crianças utilizavam o procedimento baseado na razão para resolver este problema.

4.2.6 Os tipos de procedimento e o desempenho na resolução dos problemas

A relação entre o desempenho e os tipos de procedimento adotados é ilustrada na Tabela 10. Devido ao número limitado de procedimentos, os dados não foram submetidos a tratamento estatístico, sendo analisados em termos de tendências.

Tabela 10 – Número de acertos e erros em cada tipo de procedimento

Procedimento	Acerto	Erro
Tipo 1 (n= 13)	1	12
Tipo 2 (n= 23)	15	8
Tipo 3 (n= 12)	6	6
Tipo 4 (n= 59)	26	33
Tipo 5 (n= 13)	11	2

Nota: Tipo 1 – procedimento não explicitado ou repetição de informações presentes no enunciado; Tipo 2 – procedimento por adição repetida ou por agrupamento; Tipo 3 – procedimento por contagem; Tipo 4 – procedimento algorítmico; Tipo 5: procedimento baseado na razão.

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns dados chamam a atenção na Tabela 10. O primeiro é que o procedimento Tipo 1 (explicitado ou repetição de informações) praticamente não conduz ao acerto, expressando a dificuldade das crianças em solucionar o problema. O segundo dado é que o procedimento Tipo 5 (razão) e o procedimento Tipo 2 (adição repetida ou agrupamento) levam a um número mais expressivo de acertos que de erros. Mais uma vez enfatiza-se a relação entre agrupamento e adição repetida com o uso da razão como formas de raciocinar associadas e que auxiliam na resolução dos problemas.

Merece destaque, ainda, o fato de que embora o procedimento algorítmico (Tipo 4) tenha levado tanto a um maior número de acertos como a um maior número de erros, quando comparado aos demais procedimentos, o uso desse procedimento gerou mais erros. Ao que parece, o maior número de acertos está associado ao uso da razão (Tipo 5) e do agrupamento e adição repetida (Tipo 2).

5 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção, serão apresentadas discussões acerca dos resultados encontrados na presente pesquisa. Inicialmente serão discutidos os resultados relativos ao desempenho. Em seguida, serão discutidos os resultados relativos aos tipos de procedimentos utilizados na resolução dos problemas. Posteriormente, haverá uma discussão articulando desempenho e tipos de procedimento, tal análise permitiu observar quais tipos de procedimento mais levaram acerto e quais conduziram a um maior número de erros nas respostas dos participantes. Por fim, serão trazidas as conclusões do estudo por meio de discussões sobre as contribuições e limitações do estudo, implicações educacionais e sugestões para pesquisas futuras que poderão ampliar o conhecimento deste campo de investigação.

Antes de apresentar as discussões, é importante retomar as pesquisas que inspiraram o estudo e sustentam suas escolhas metodológicas. Tais estudos, mencionados anteriormente, são os referentes à explicitação dos invariantes de problemas de estrutura multiplicativa.

Segundo Spinillo e Silva (2016), a explicitação da relação um para muitos pode ser diagramática, que oferece uma visão clara das relações contidas no problema a partir da sistematização; e linguística, explicitando as relações verbalmente. No presente estudo, optou-se por investigar a explicitação da relação um para muitos na forma linguística, através do enunciado dos problemas de proporção simples.

A forma linguística de explicitação da correspondência um para muitos se mostrou uma ferramenta importante em problemas do tipo combinatório. Esse resultado foi encontrado por Spinillo e Silva (2010), ao observar que crianças de sete a oito anos tiveram um melhor desempenho ao resolver os problemas em que os princípios invariantes que governam o raciocínio combinatório estavam explícitos, incluindo a correspondência um para muitos. As autoras observaram, ainda, que os estudantes que resolviam primeiro os problemas na situação explícita, tiveram mais sucesso ao resolverem problemas na situação implícita do que as que faziam na ordem inversa, apresentando estratégias de resolução mais elaboradas. Melo, Silva e Spinillo (2016), em estudo subsequente, observaram que o papel facilitador da explicitação esteve mais presente na resolução de problemas de produto cartesiano, do que em problemas de combinação com subgrupos de elementos.

Tendo como foco os efeitos da explicitação da relação um para muitos na resolução de problemas de proporção, um estudo importante foi o de Spinillo, Lautert e Santos (2021), realizado com estudantes do 3° e do 5º ano. Nele, os autores constataram que, em ambos os anos escolares, os estudantes tiveram um melhor desempenho ao resolver os problemas com a correspondência um para muitos explícita. Contudo, no estudo citado não foram realizadas entrevistas individuais para compreensão dos procedimentos de resolução, o que permitiria a análise do efeito da condição sobre os procedimentos de resolução e a relação destes procedimentos com o desempenho dos participantes. Como forma de complementar esses achados, no presente estudo foi realizada a análise dos procedimentos de resolução considerando as entrevistas individuais.

O presente estudo buscou ampliar o conhecimento trazido pelos estudos mencionados, tendo como principal objetivo: examinar o efeito da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples, de multiplicação e divisão por alunos do 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

5.1. DISCUSSÃO ACERCA DO DESEMPENHO

A hipótese inicial deste estudo foi a de que os participantes de todos os anos escolares apresentariam um melhor desempenho na resolução de problemas na condição explícita do que na condição implícita. Essa hipótese foi confirmada, uma vez que em cada um dos três anos escolares os estudantes tiveram significativamente mais sucesso na resolução dos problemas na Condição 1 (explícita) do que na Condição 2 (implícita).

Estes resultados se somam àqueles estudos nacionais que evidenciam o papel facilitador da explicitação das relações matemáticas em problemas de estrutura multiplicativa, entre elas a correspondência um para muitos, envolvendo problemas do eixo produto cartesiano, seja essa explicitação feita de forma linguística ou diagramática (e.g. BORBA, AZEVEDO, 2012; MELO, SILVA, SPINILLO, 2016; MONTENEGRO, BORBA, BITTAR, 2020; SPINILLO, SILVA, 2010).

Tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1998), é possível compreender que, em sendo a correspondência um para muitos um invariante, isto é, um dos três componentes envolvidos na formação de um conceito, a explicitação da desta correspondência possibilita que a criança estabeleça relações ainda não consideradas ao resolver problemas da estrutura multiplicativa. Isto é constatado na pesquisa de Silva (2010), com problemas de produto cartesiano, ao verificar que as crianças resolveram melhor os problemas apresentados com a correspondência um para muitos na forma explícita, sendo essa explicitação presente tanto na forma linguística quanto com representações gráficas. Os dados do presente estudo, por sua vez, reforçam o efeito facilitador da explicitação da correspondência um para muitos na forma linguística, através do enunciado, em problemas de proporção simples, outro eixo do Campo Multiplicativo.

Em vista da similaridade metodológica, e por se tratar de uma pesquisa sobre explicitação da correspondência um para muitos em problemas do eixo proporção simples, é relevante articular os resultados desta pesquisa com os obtidos por Spinillo, Lautert e Santos (2021). Mediante a análise de desempenho em três problemas de proporção resolvidos por crianças do 3º e 5º anos, a pesquisa mostrou que as crianças apresentaram um melhor desempenho nos problemas em que a correspondência um para muitos era explicitamente mencionada no enunciado, em comparação com seu desempenho em problemas em que essa correspondência estava implícita. No presente estudo, também foi observado um melhor desempenho nos problemas na Condição 1 (explícita) do que na Condição 2 (implícita), reafirmando, assim, a explicitação da correspondência um para muitos, na forma linguística, como um fator facilitador da resolução de problemas de proporção simples além daqueles de combinatória, conforme documentado por estudos anteriormente mencionados (e.g. MELO, SILVA, SPINILLO, 2016; SILVA, 2010; SPINILLO, SILVA, 2010).

Spinillo, Lautert e Santos (2021) também descobriram que, independentemente do ano escolar (3º e 5º anos), as crianças apresentaram um bom desempenho nos problemas em que a relação um para muitos era explicitamente mencionada no enunciado. Na presente pesquisa, além do 3º e 5º anos, incluiu-se também o 4º ano escolar, e, os resultados foram reafirmados, isto é, nos três anos escolares investigados, os problemas na Condição 1 (explícita) geraram mais acertos.

Ao comparar o desempenho entre os anos escolares em ambas as condições, dados do presente estudo mostraram que crianças do 4º e 5º ano escolares têm desempenhos similares, ao passo em que ambos se distanciam do 3º ano, que apresentou um desempenho limitado em problemas de proporção simples, em ambas as condições. Houve um ganho significativo, com o avanço da escolaridade, entre o 3º e o 4º anos escolares tanto em problemas na Condição 1 (explícita), quanto na

Condição 2 (implícita), o que pode ser visto como um indicador da aprendizagem das crianças acerca de situações proporcionais. Já na comparação entre o 4º e 5º anos, em ambas as condições, não foram encontradas diferenças significativas. Uma possível explicação para este resultado é que as crianças do 4º ano já apresentam uma maior familiaridade com os problemas de estrutura multiplicativa que foram introduzidos no 3º ano. Apesar de existir uma melhora no desempenho conforme a criança avança do 3º ao 4º ano, é importante ressaltar que o desempenho em problemas na condição implícita ainda é muito baixo.

Os achados do presente estudo também se unem às pesquisas que comparam o desempenho de estudantes do ensino fundamental na resolução de problemas de proporção simples, da classe um para muitos e da classe muitos para muitos (e.g. LAUTERT, SANTOS, MERLINI, 2018; MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014; MAGINA, MERLINI, SANTOS, 2016; MAGINA, FONSECA, 2018; MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020). Como já descrito, estes estudos utilizam a nomenclatura “muitos para muitos”, na qual a relação de um elemento com um conjunto de elementos está implícita, que é equivalente, no presente estudo, aos problemas apresentados na Condição 2 (implícita). Assim como refletido em nossos resultados, em todas as pesquisas citadas, os problemas da classe muitos para muitos foram mais difíceis para as crianças do ensino fundamental.

Magina, Santos e Merlini (2014), realizaram uma pesquisa com 175 estudantes do 3º e 5º anos de uma escola pública em São Paulo, com dois problemas de proporção simples envolvendo a divisão, sendo um da classe um para muitos (que neste estudo é relativo à Condição 1) e outro da classe muitos para muitos (relativo à Condição 2). Na pesquisa dos autores, estudantes do 5º ano tiveram um desempenho significativamente melhor em comparação com o 3º ano no problema da classe um para muitos. Porém, com relação ao problema da classe muitos para muitos, o mesmo não foi observado, mostrando que o desempenho de ambos os anos foi aproximado. Este segundo resultado é diferente do que foi observado no nosso estudo, pois, aqui, o desempenho dos estudantes do 5º e também do 4º ano foram significativamente melhores que o desempenho do 3º ano em ambas as condições, tanto explícita quanto implícita.

Para comparar o desempenho de estudantes do 3º e 5º anos do ensino fundamental, de escolas públicas de Recife e Ilhéus, Lautert, Santos e Merlini (2018) desenvolveram um estudo cujo objetivo era investigar o desempenho e os procedimentos de resolução utilizados por esses participantes em quatro problemas de divisão envolvendo proporção simples um para muitos e muitos para muitos. Os autores identificaram diferença significativa na comparação entre os anos escolares investigados, sinalizando que a instrução escolar influencia o desempenho, uma vez que os estudantes que já foram formalmente instruídos sobre divisão (5º ano) apresentam melhor desempenho que as crianças ainda não instruídas (3º ano).

No que se refere à análise da ordem de aplicação das condições em que os problemas foram apresentados, observam-se diferenças entre dados obtidos no presente estudo, e os encontrados por Spinillo e Silva (2010). No estudo feito pelas autoras, ao resolver primeiro os problemas de produto cartesiano na situação explícita, as crianças de sete a oito anos eram capazes de resolver os problemas na situação implícita com maior sucesso do que as crianças que o faziam na ordem inversa. A conclusão das autoras foi que as crianças são capazes de resolver melhor problemas de produto cartesiano quando a correspondência um para muitos é explicitamente mencionada no enunciado dos problemas, e que, a partir disso, são capazes de compreender as relações, aplicando este mesmo princípio na resolução de problemas em que essa correspondência está implícita.

No presente estudo, no entanto, esse efeito não foi observado em todos os anos escolares. Na primeira análise, que considerou os três anos escolares conjuntamente, não foi observada diferença entre os grupos por ordem de aplicação. Quando comparadas as ordens de aplicação em cada ano escolar, no 4º ano não foi observada diferença; no 3º ano, as crianças que resolveram os problemas na Ordem 2 (implícita-explícita) tiveram mais acertos; no 5º ano, o efeito contrário foi observado, ou seja, quem resolveu os problemas na Ordem 1 (explícita-implícita) teve mais sucesso. Em vista desses resultados, afirma-se que a análise da ordem de aplicação do presente estudo não trouxe conclusões suficientes para estabelecer uma ordem de apresentação dos problemas que favoreça o desempenho dos estudantes em problemas de proporção simples, sem diferenciação por condição de explicitação da relação um para muitos.

Quando realizada a comparação entre as condições em cada grupo por ordem de aplicação, foi encontrado um resultado semelhante aos achados de Spinillo e Silva (2010). Dentre o grupo que recebeu os problemas na Ordem 1 (explícita-implícita), observou-se melhora no desempenho a favor da escolaridade na Condição 1 (explícita), visto que as crianças do 4º ano tiveram significativamente mais acertos do que as do 3º ano, e crianças do 5º ano acertaram mais do que as do 4º ano. Na Condição 2 (implícita), por sua vez, verificou-se diferença significativa apenas entre o 3º e 5º anos escolares. Dentre o grupo que recebeu os problemas na Ordem 2 (implícita-explícita), não houve influência da escolaridade e nem diferença significativa entre as condições em cada ano escolar.

Portanto, o desempenho dos estudantes do 5º ano que receberam os problemas na Ordem 1 foi o melhor, em comparação com o 3º e 4º, tanto na Condição 1 quanto na Condição 2. É provável que ter recebido os problemas na Condição 1 (explícita) primeiro, tenha favorecido os estudantes do 5º ano, uma vez que eles se destacaram entre os anos escolares em ambas as condições. Entretanto, para confirmar este dado, é necessário que sejam realizados outros estudos que visem construir e testar sequências didáticas no ensino da proporção.

Quanto à análise de cada problema em cada condição, no presente estudo foi possível elucidar alguns pontos levantados por Spinillo, Lautert e Santos (2021), tornando possível observar os efeitos da multiplicação e da divisão sobre o desempenho por problema. No estudo dos autores não foi possível distinguir se as crianças tiveram um melhor desempenho em determinado problema por este ter a explicitação da relação um para muitos logo na primeira frase do enunciado, ou se o melhor desempenho seria atribuído à operação mais indicada para a resolução do problema ser a multiplicação. Os dados obtidos mostraram que tanto na Condição 1 (explícita) como na Condição 2 (implícita), os problemas de divisão foram os mais difíceis para os estudantes de todos os anos escolares investigados. Este resultado evidencia que problemas de proporção envolvendo a multiplicação tendem a ser mais fáceis para as crianças do que os que envolvem a divisão, especialmente quando a correspondência um para muitos é explicitada.

Nos problemas de divisão, tanto na Condição 1 (explícita) como na Condição 2 (implícita), não foi observada uma progressão mais acentuada no desempenho em função da escolaridade, o que evidencia uma aproximação entre o desempenho do 4º e do 5º ano. Sendo assim, é possível inferir que a maior dificuldade dos participantes nos problemas de proporção envolvendo a divisão, é um fator que pode explicar a proximidade no desempenho do 4º e 5º anos, já que o 3º ano ainda não foi formalmente instruído acerca dessa operação.

Outros estudos sinalizam a dificuldade maior dos estudantes ao resolver problemas de divisão. No estudo de Magina e Fonseca (2018), dentre os problemas da classe um para muitos, as autoras constataram que o problema cuja operação indicada era a multiplicação foi resolvido com sucesso por 30% dos estudantes do 2º ano. Por outro lado, apenas a partir do 7º ano é que metade dos estudantes foram capazes de resolver com sucesso os três problemas apresentados, incluindo os de divisão, mesmo sendo da classe um para muitos.

Ainda sobre a análise de cada problema, é importante discutir as características do Problema 6. Como dito anteriormente, o Problema 6, além de ser um problema que demanda a operação de divisão para sua resolução, nele, é impossível chegarmos à correspondência um para muitos. Veja o problema a seguir: “Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra, o aluno marcava 4 pontos. Gustavo ganhou 12 pontos. Quantas voltas ele deu na quadra?”. Neste problema, a razão (3:4) pode ser identificada pela criança, porém, a correspondência entre voltas e pontos não pode ser transformada em uma correspondência um para muitos, uma vez que Gustavo só ganha quatro pontos ao completar três voltas.

Nesse sentido, Magina, Merlini e Santos (2016) discutem, ao trazer um esquema baseado nos estudos de Vergnaud (1983, 1988, 1994, 1996) que, em problemas de proporção simples, a relação entre as quantidades está implícita, mas pode aparecer em duas situações: na primeira situação é possível chegar à relação um para muitos, como os problemas de multiplicação utilizados no presente estudo, já na segunda, a exemplo do Problema 6, não faz sentido se obter a relação um para muitos. Desta maneira não seria possível para a criança, em problemas deste tipo, utilizar em seu procedimento de resolução a explicitação da relação um para muitos, que afirmamos ser facilitadora também em problemas de proporção. Por esse motivo, é provável que o Problema 6 tenha tornado a Condição 2 (implícita) ainda mais difícil para as crianças. Na próxima seção haverá mais discussões acerca dos procedimentos de resolução utilizados pelas crianças.

A partir dos achados do presente estudo, e com base nas pesquisas mencionadas, é possível inferir que a explicitação da correspondência um para muitos no enunciado dos problemas facilita o desempenho de crianças desde o 3º ano do ensino fundamental, entretanto, seu efeito facilitador beneficia ainda mais o desempenho das crianças a partir do 4º ano.

5.2. DISCUSSÃO ACERCA DOS PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO

Além da aplicação coletiva, no presente estudo, como mencionado, foram realizadas entrevistas individuais que permitiram identificar os procedimentos de resolução adotados pelas crianças. Dessa forma, buscou-se observar se a explicitação da correspondência um para muitos geraria formas de raciocinar distintas daquelas adotadas na resolução de problemas em que essa relação estaria implícita. Além disso, a análise dos procedimentos de resolução auxiliou a descobrir possíveis dificuldades apresentadas pelas crianças, e, ainda a identificação de procedimentos que podem auxiliar o desempenho, ou que conduzem com maior frequência ao erro.

A partir dos registros escritos e das entrevistas feitas com os participantes, observou-se cinco tipos de procedimentos de resolução diferentes. Essa seção será relativa às discussões em torno de cada tipo, bem como dos resultados encontrados em sua análise.

O Tipo 1 foi definido a partir dos procedimentos não explicitados ou com repetição de informações presentes no enunciado. Ressalta-se que este tipo não é compreendido como o mais básico, pois os tipos de procedimento não foram definidos a partir de uma ordem hierárquica. Contudo, observa-se que, ao resolver os problemas desta maneira, a criança demonstra que ainda não compreende o tipo de problema que está sendo apresentado, uma vez que seu registro não apresenta conexão com o enunciado, ou não sabe explicitar qual o raciocínio utilizado para sua resolução.

O Tipo 2 refere-se aos procedimentos por adição repetida ou por agrupamento. Nele, a criança utiliza a adição repetida (somando parcelas iguais repetidamente até esgotar a quantidade de elementos) ou realiza agrupamentos dos elementos e em seguida realiza uma contagem dos grupos que formou. Representações icônicas (bolas, traços), pictográficas (desenhos) e simbólicas (números) podem ser adotadas. Segundo Magina, Santos e Merlini (2014), esta estratégia se aproxima do pensamento multiplicativo enquanto permanece ancorada no raciocínio aditivo.

Em procedimentos do Tipo 3 (contagem) criança resolve o problema por meio da contagem de cada elemento utilizando os dedos ou por meio de representações icônicas (bolas, traços) e pictográficas (desenhos). Ao que parece, a criança se depara com uma situação de estrutura complexa, isto é, a relação um para muitos, relacionada ao raciocínio multiplicativo, e tenta resolvê-la com base em uma estrutura simples – a correspondência termo a termo, que se relaciona ao raciocínio aditivo (PIAGET, 1972; NUNES, BRYANT, 1997).

O Tipo 4 encontrado foi nomeado procedimento algorítmico. Ao resolver os problemas dessa forma, a criança utiliza os números ou os dígitos dos números presentes no enunciado, realizando uma operação aritmética sobre eles. Observe que este tipo de procedimento é diferente do procedimento de adição repetida (Tipo 2), não consistindo na soma de parcelas iguais, mas correspondendo a uma operação canônica, isto é, típica do contexto escolar. Neste tipo de procedimento, as representações simbólicas são utilizadas (números). É importante mencionar que não realizamos separação entre as operações aritméticas aditivas e multiplicativas, pois, neste estudo, buscamos observar a explicitação das relações matemáticas no procedimento das crianças, e não apenas a congruência entre a operação mais indicada, e o registro realizado por cada participante.

Os procedimentos do Tipo 5, por sua vez, são os baseados na razão. Na resolução do problema, a criança utiliza a razão, podendo ser a razão unitária em que é estabelecida a correspondência um para muitos, ou a razão não unitária, em que é estabelecida a correspondência muitos para muitos. Segundo os preceitos da Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Vergnaud (1983; 1988; 1994; 1998), a formação de um conceito envolve o contato com uma variedade de situações em que ele se faz presente, acontecendo de forma gradual e durante um longo período de tempo. Portanto, diferentes situações precisam ser exploradas em sala de aula para que ocorra a aprendizagem das estruturas matemáticas. Na proporção, por exemplo, não basta apenas dominar ou reproduzir os cálculos relativos às operações multiplicativas (como no Tipo 4), mas é preciso compreender os múltiplos conceitos e invariantes envolvidos, sendo capaz, por exemplo, de explicitar a razão contida na situação-problema.

Observou-se que o Tipo 4 (algorítmico) foi o mais frequente em todos os anos escolares, sobretudo no 5º ano. Provavelmente isso decorreu do efeito do ensino das operações aritméticas no contexto escolar que valoriza o uso de algoritmos, sobretudo nos anos mais avançados do ensino fundamental.

Faz-se importante, ainda, discutir esse resultado em articulação com o segundo tipo de procedimento mais frequente entre os registros dos participantes: o Tipo 2 (adição repetida ou agrupamento). Esse procedimento, como mencionado, se aproxima do pensamento multiplicativo, mas está ancorado no raciocínio aditivo pois envolve adição de parcelas iguais. O procedimento que leva em conta o agrupamento também foi incluído neste tipo, pois, o agrupamento se caracteriza pela reunião dos elementos em grupos que serão contados repetidamente.

Mesmo não sendo o procedimento mais adequado para a resolução de problemas de estrutura multiplicativa, o procedimento Tipo 2 (adição repetida ou agrupamento) foi o segundo mais utilizado tanto em problemas na Condição 1 (explícita), como na Condição 2 (implícita). Além disso, verificou-se que este tipo de procedimento levou os participantes a um número mais expressivo de acertos do que de erros. Isso mostra que existem muitas situações em que a adição repetida é suficiente para a resolução de problemas, todavia, em vista do número de erros, também existem situações em que essa abordagem é inadequada.

Magina, Santos e Merlini (2014), ao investigar as estratégias de resolução de crianças ao resolver problemas de proporção simples, observaram que a adição repetida foi mais utilizada pelos estudantes do 3º ano do que pelos do 5º ano, assim como na presente pesquisa. Eles explicam que estas operações de adição repetida são comumente ensinadas com base em uma ordem fixa: primeiro a adição, depois a subtração e, em seguida, multiplicação e divisão. Esta ordem se baseia na ideia de que a multiplicação só pode ser compreendida a partir da aprendizagem da adição repetida, como um fator que conecta ambas as estruturas, aditiva e multiplicativa. Assim, entende-se que a multiplicação só pode ser ensinada quando a criança já tiver aprendido a utilizar esse tipo de procedimento. Todavia, as autoras afirmam que relacionar multiplicação à adição repetida implica que multiplicação sempre gera um aumento, o que nem sempre é verdade, como no caso dos números racionais (exemplo: 0,5 x 0,5 = 0,25).

O próximo passo então, segundo Magina, Santos e Merlini (2014), dentro da lógica que as escolas brasileiras comumente seguem, seria inserir problemas com mais elementos, gerando uma necessidade de um maior número de parcelas. Isto faz com que o procedimento não seja mais possível de ser utilizado, uma vez que se torna exaustivo. Aí então introduz-se o procedimento de multiplicar um dado valor por esse número de parcelas, o procedimento algorítmico (Tipo 4), que aparece com muita frequência em todos os anos escolares, tendo, por vezes, a adição como operação, e aos poucos passando a tomar a forma de operação multiplicativa. Por fim, inicia-se um processo de memorização da tabuada, que ainda é muito presente nas escolas, sendo trazida inclusive no discurso de algumas crianças entrevistadas nesta pesquisa.

Contudo, o procedimento algorítmico (Tipo 4) apresentado pelos participantes desta pesquisa, não se mostrou suficiente para explicitar o raciocínio proporcional. Isto foi refletido em nossos resultados, ao observar que ao utilizar procedimentos do Tipo 4, as crianças não explicitavam claramente o uso da razão e as relações proporcionais estabelecidas na sua resolução, ou não as mencionavam em seu discurso. Além disso, o procedimento Tipo 4 levou tanto ao acerto como ao erro, mas quando comparado aos demais procedimentos, o uso deste gerou mais erros do que acertos. De acordo com Vergnaud (1994; 1998), ao não registrar o raciocínio explicitamente, a criança pode estar fazendo uso implícito do invariante. Para o autor, os invariantes operatórios se referem às propriedades matemáticas do conceito envolvido no problema, e também se referem aos procedimentos que o estudante adota ao resolvê-lo. Tais invariantes podem estar explícitos ou implícitos, neste caso, ao utilizar os procedimentos do Tipo 4, a criança não explicitou os invariantes operatórios envolvidos no conceito de proporção em sua resolução.

Com relação aos procedimentos não explicitados ou de repetição de informações presentes no enunciado do problema (Tipo 1), esses foram mais observados entre as crianças do 3º e do 4º ano, do que entre as crianças do 5º ano, sendo ainda mais utilizados pelas crianças do 3º. Estes resultados estão na mesma direção que os observados nas pesquisas de Lautert, Santos e Merlini (2018), e de Magina, Santos e Merlini (2014), nas quais os estudantes do 3º ano apresentavam mais procedimentos sem conexão com o enunciado, que não explicitavam a operação utilizada ou que não foi possível identificar o raciocínio utilizado, do que os do 5º ano. Apesar das pesquisas citadas não se tratarem da explicitação da relação um para muitos, elas mostram que, no 3º ano, as crianças apresentam mais dificuldade de explicitar seu raciocínio em problemas de proporção simples, quando comparadas com crianças do 5º ano, assim como constatado na presente pesquisa.

A dificuldade das crianças que fizeram uso de procedimentos do Tipo 1, se traduz também em seu desempenho, pois, tanto na Condição 1 (explícita), como na Condição 2 (implícita), este tipo de resolução gerou mais erros do que acertos. Além disso, esse foi um tipo de resolução que teve a mesma frequência em ambas as condições, o que mostra que a não explicitação do procedimento pode ocorrer independentemente da explicitação da relação um para muitos.

Quanto aos procedimentos do Tipo 3, que envolviam a contagem, estes também foram mais utilizados pelos participantes do 3º ano e 4º anos, do que pelos do 5º ano. Além disso, esse tipo de procedimento esteve mais presente em problemas com a condição explícita. É possível relacionar este dado ao estudo de Merlini e Teixeira (2018), no qual foram analisados o desempenho e as estratégias de resolução em problemas de proporção simples, cuja operação mais indicada é a multiplicação. Os autores observaram que mesmo os estudantes do 1º ano do ensino fundamental, que ainda não haviam sido formalmente instruídos acerca da estrutura multiplicativa, utilizaram a representação icônica como estratégia para resolver, com sucesso, os problemas de proporção.

Outra pesquisa que se relaciona a este aspecto, é a de Vanluydt, Vershaffel e Van Dooren (2018), cujo intuito foi investigar se havia algum raciocínio proporcional em crianças de quatro a cinco anos. As conclusões do estudo apontam que já existe uma noção de correspondência um para muitos na maioria das crianças de quatro a cinco anos, o que parece um importante passo inicial no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para realização da pesquisa, os autores utilizaram fichas, com o intuito de que a situação-problema fosse apresentada de maneira não-verbal às crianças, que ainda não estavam alfabetizadas.

Os estudos de Merlini e Teixeira (2018) e de Vanluydt, Vershaffel e Van Dooren (2018) foram trazidos como exemplos, pois, como observado por Piaget (1972), ao relatar seus estudos sobre a correspondência termo a termo, a utilização de recursos mais simples e concretos, como as representações icônicas e os materiais manipuláveis, auxilia a resolução de problemas matemáticos que a criança ainda não foi ensinada a resolver. Isto ocorre pela maior possibilidade de explicitação das relações matemáticas através dessas formas de representação. O uso da contagem, predominantemente por crianças do 3º ano, pode ser visto como uma utilização da correspondência termo a termo para resolução do problema, uma vez que a criança precisa visualizar cada item da situação problema, não se apoiando apenas em registros simbólicos (números). Contudo, esse tipo de procedimento, por ser ancorado ao raciocínio aditivo, não reflete o entendimento das relações proporcionais. No presente estudo, sua utilização gerou tanto erros como acertos, mostrando que este (Tipo 3) é um procedimento que não garante um bom desempenho em situações-problema de estrutura multiplicativa.

Por fim, o procedimento baseado na razão (Tipo 5) foi mais utilizado nos problemas na Condição 2 (implícita). Este é um dado interessante, pois, embora o desempenho geral tenha sido melhor na Condição 1 (explícita), isto não se reflete nos procedimentos utilizados. O procedimento baseado na razão (Tipo 5) foi, ainda, utilizado por participantes na resolução do Problema 6, em que era impossível identificar a razão unitária. Ou seja, a criança não utiliza a explicitação da razão na resolução de problemas com a correspondência um para muitos explícita, mas a utiliza em problemas com a correspondência um para muitos implícita, mesmo diante de uma situação na qual é impossível encontrar a correspondência um para muitos. Isto contraria a segunda hipótese do estudo: a de que na resolução dos problemas apresentados na condição explícita os procedimentos adotados pelas crianças seriam caracterizados pela explicitação da correspondência um para muitos.

Importante mencionar que o procedimento baseado no uso da razão (Tipo 5) se expressou de duas maneiras: na primeira, a criança usa a razão contida no problema e explicita essas relações em sua resolução; ou usa a razão unitária, em que identifica a unidade mínima da relação proporcional entre as quantidades, e lança mão da correspondência um para muitos, na sua resolução.

Esta mesma estratégia foi observada na pesquisa de Magina, Santos e Merlini (2014). Os autores identificaram que os participantes descobriam a relação um para muitos na resolução de um problema da classe muitos para muitos (Condição 2 – implícita), encontrando a quantidade correspondente para cada item, sendo capazes, a partir disso, de replicar os itens quantas vezes fosse necessário, até alcançar o resultado. Os autores também observaram que esta estratégia levava frequentemente ao acerto, resultado também similar ao do presente estudo. Neste sentido, Spinillo, Lautert e Santos (2021) apontam que o estabelecimento da razão é relevante na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, sendo a relação um para muitos “um modo de raciocinar que facilita a compreensão de situações que envolvem conceitos próprios das estruturas multiplicativas, inclusive aqueles mais complexos como a proporção e a combinatória” (p. 125).

No presente estudo, não ficou evidente a existência de um efeito da ordem de apresentação das condições experimentais sobre os tipos de procedimentos adotados. Esse resultado foi diferente do encontrado por Spinillo e Silva (2010) com crianças de sete a oito anos em problemas de combinatória. Os resultados mostraram que as crianças que resolviam primeiro os problemas na situação explícita tiveram mais sucesso ao resolverem problemas na situação implícita do que as que faziam na ordem inversa, apresentando estratégias de resolução mais elaboradas. É possível que a ordem de apresentação dos problemas não tenha exercido nenhum efeito em problemas do eixo proporção simples, assim como observado em problemas de combinatória. No entanto, para confirmar ou confrontar tal resultado, é necessário que sejam realizados novos estudos que testem o efeito da ordem de aplicação sobre os procedimentos de resolução a partir de entrevistas com um maior número de participantes, que viabilize a utilização de análises estatísticas.

Em suma, os resultados da presente pesquisa evidenciam que a explicitação da correspondência um para muitos contribui expressivamente no desempenho de crianças do 3º, 4º e 5º anos do ensino fundamental, sobretudo a partir do 4º ano. Foi possível constatar que, neste estudo, as crianças utilizaram a razão como procedimento de resolução (Tipo 5), mas lançaram mão tanto da razão unitária, como da razão não unitária, não utilizando, de maneira expressiva, a explicitação da correspondência um para muitos como procedimento de resolução. Estes dados mostram que, mesmo se beneficiando da correspondência um para muitos quanto ao desempenho, os estudantes não explicitam essa correspondência na sua resolução.

5.3. IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

O estudo mostrou que o desempenho das crianças melhora significativamente quando é explicitada a relação um para muitos no enunciado dos problemas de proporção simples. Ademais, o uso do procedimento Tipo 5 (baseado na razão), envolvendo a razão não unitária, mas também a razão unitária, com a identificação da relação um para muitos, mostrou-se eficiente na resolução de problemas tanto na condição explícita como implícita, gerando mais acertos do que erros. Portanto, sugere-se a utilização da explicitação da relação um para muitos como ferramenta para auxiliar a resolução de problemas de proporção simples, tanto na sua forma linguística, como mostrado na presente pesquisa, quanto na forma diagramática. A inclusão de problemas que explicitam a correspondência um para muitos no ensino pode facilitar a compreensão de estruturas multiplicativas e proporções, assim, a introdução de problemas em que essa correspondência está implícita será menos desafiadora para as crianças.

A dificuldade encontrada pelos alunos do 3º ano em resolver problemas de proporção simples da classe um para muitos revela a necessidade de apresentar procedimentos de resolução passíveis de serem compreendidos e utilizados pelos estudantes. Quando os estudantes não se mostram, ainda, capazes de explicitar o raciocínio proporcional, é importante que o professor possa oferecer essa explicitação de modo que as relações fiquem evidentes. Uma sugestão seria utilizar esquemas de explicitação diagramática, isto é, visuais, e com material manipulável, viabilizando, assim, um avanço no conhecimento dos estudantes sobre proporcionalidade, e possibilitando a formação de estruturas do campo conceitual multiplicativo.

Alguns estudos trazem intervenções com o ensino de estratégias de resolução, incluindo o uso da razão unitária, que comprovadamente contribuíram com o desempenho e habilidades de raciocínio proporcional de crianças, inclusive com dificuldade de aprendizagem na matemática (ŞEN; GÜLER, 2017; ZHANG et al., 2015). Essas descobertas, junto com as contribuições do presente estudo, trazem a possibilidade da utilização da explicitação em situações de ensino, de modo a auxiliar o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo de crianças do ensino fundamental.

5.4. CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO E PESQUISAS FUTURAS

As contribuições do presente estudo estão centradas na confirmação do papel facilitador da explicitação da correspondência um para muitos. A pesquisa reforça e amplia evidências anteriores trazidas por Spinillo, Santos e Lautert (2021), mostrando que a explicitação dessa correspondência melhora o desempenho de crianças desde o 3º ano do ensino fundamental em problemas de proporção simples, tanto de multiplicação quanto de divisão.

O presente estudo contribui também para a ampliação dos conhecimentos acerca da estrutura multiplicativa, se somando aos estudos que evidenciam o papel facilitador da explicitação das relações matemáticas, entre elas a correspondência um para muitos, em problemas de produto cartesiano, seja essa explicitação feita de forma linguística ou diagramática (e.g. BORBA, AZEVEDO, 2012; MELO, SILVA, SPINILLO, 2016; MONTENEGRO, BORBA, BITTAR, 2020; SPINILLO, SILVA, 2010). A partir dos resultados da presente pesquisa, reafirma-se a importância da explicitação linguística da relação um para muitos em problemas de proporção simples, além dos de produto cartesiano, mostrando que este tipo de explicitação beneficia a compreensão de situações complexas que envolvem o raciocínio multiplicativo.

Ao incluir entrevistas individuais, o presente estudo trouxe conhecimentos acerca dos procedimentos utilizados pelas crianças na resolução de problemas de proporção simples. A partir disso, foi possível observar, com mais detalhes, o raciocínio utilizado por crianças de cada ano escolar para resolver problemas de proporção simples, analisando também como esse raciocínio se apresentou tanto em problemas com a correspondência na condição explícita, como também na condição implícita.

Ressalta-se também as contribuições acerca da investigação do 3º, 4º e 5º anos escolares, possibilitando a identificação de como as diferentes condições de explicitação da relação um para muitos influenciam o desempenho e procedimentos de resolução das crianças, perpassados pelo fator escolaridade. Assim, observou-se as particularidades de cada ano escolar, sendo revelado que a relação um para muitos é também um modo de raciocinar que facilita a compreensão de situações multiplicativas envolvendo proporção simples desde o 3º ano, e que, mesmo se beneficiando, elas não utilizam a explicitação como procedimento de resolução. Essas contribuições reforçam a relevância do estudo tanto com relação à Psicologia cognitiva, como também à Psicologia do desenvolvimento, e ao campo da Educação Matemática.

Dentre as limitações do estudo, ressalta-se que a população entrevistada foi reduzida em comparação com a população que participou da aplicação coletiva dos problemas. Uma população maior de entrevistados poderia evidenciar uma maior variedade de estratégias, podendo surgir outros tipos de procedimento além dos observados no presente estudo. Além disso, seria possível constatar se o procedimento baseado na razão ocorreria em uma maior frequência do que a identificada. Outro ponto que poderia ser melhor investigado em um número maior de entrevistas seria a possibilidade de construir uma sequência didática a partir da identificação de uma hierarquia de procedimentos.

Outra limitação do estudo envolve a investigação apenas com problemas de proporção simples. Como mencionado, os tipos de proporção dupla e múltipla, exploram mais de duas grandezas, que se relacionam duas a duas, e são considerados mais difíceis de resolução pelas crianças. Seria importante em pesquisas futuras investigar se a explicitação da relação um para muitos favoreceria também estes tipos de problema.

Neste estudo, foram apresentados aos estudantes seis tipos de problema, sendo dois de multiplicação e um de divisão, em cada condição de explicitação da correspondência um para muitos. Sendo assim, sugere-se o desenvolvimento de novos estudos que incluam uma quantidade similar de problemas de cada tipo de operação, para que se observe se a explicitação beneficia mais a resolução de um tipo de operação ou de outro, ou até se beneficia igualmente ambos.

Por fim, sugere-se o desenvolvimento de pesquisas de intervenção, que promovam a aprendizagem de estratégias eficientes de resolução de problemas de estrutura multiplicativa, especialmente incluindo a explicitação da relação um para muitos. Criar e testar sequências didáticas baseadas na explicitação das relações um para muitos, verificando seu impacto no desempenho e nas estratégias dos alunos pode ser um caminho importante para ampliar o conhecimento e as contribuições na aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS

ANGHILERI, J. Uses of counting in multiplication and division. In: Thompson, I. (Org.), Language in mathematical education. Buckingham: **Open University Press**, p. 95-104, 1998.

AVCU, R.; DOĞAN, M. What are the strategies used by seventh grade students while solving proportional reasoning problems? **International Journal of Educational Studies in Mathematics**, v.1, n 2, p. 34-55, 2014.

BATISTA, A.; SPINILLO, A. G. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. **Estudos de Psicologia**, UFRN, Natal v. 13, n. 1, p. 13-21, 2008.

BEGOLLI, K. N.; BOOTH, J. L.; HOLMES, C. A.; NEWCOMBE, N. S. How many apples make a quarter? The challenge of discrete proportional formats. **Journal of Experimental Child Psychology**, Amsterdã, v. 192, p. 32-47, 2020.

BORBA, R.; AZEVEDO, J. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. (Eds.). **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2012, p. 89-138.

BOYER, T. W.; LEVINE, S. C. Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. **Developmental Psychology**, v. 51, n. 5, p. 615-620, 2015.

BOYER, T. W.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. Development of proportional reasoning: where young children go wrong. **Developmental psychology**, v. 44, n. 5, p. 1478, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

DEGRANDE, T.; VERSCHAFFEL, L.; VAN DOOREN, W. Beyond additive and multiplicative reasoning abilities: How preference enters the picture. **European journal of psychology of education**, v. 33, n. 4, p. 559-576, 2018.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** São Paulo: Proem, 2014.

HURST, M. A.; CORDES, S. Attending to relations: Proportional reasoning in 3- to 6-year-old children. **Developmental Psychology**, Washington, v. 54, n. 3, p. 428–439, 2018.

KAPUT, J. J.; WEST, M. M. **Missing-value proportional reasoning problems:** Factors affecting informal reasoning patterns**.** 1994.

LARA, I. C. M. O uso da estrutura multiplicativa na resolução de problemas nos anos iniciais da educação básica. **Vidya**, v. 31, n. 2, p. 105-122, 2011.

LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M.; MERLINI, V. L. Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 7, p. 1-13, 2018.

MAGINA, S. M. P.; FONSECA, S. P. Desempenho de estudantes baianos nas estruturas multiplicativas: uma visão quantitativa dos fatos. **Com a Palavra, o Professor**, v. 3, n. 7, p. 53-72, 2018.

MAGINA, S. M. P.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção. **Educação & Realidade**, v. 45, p. e96023, 2020.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais. In: CASTRO FILHO, J. A. (Org.). **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016. p. 65–82.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MELO, L. M. S.; SILVA, J. F. G.; SPINILLO, A. G. Os princípios invariantes e a resolução de problemas de raciocínio combinatório. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, p. 1-20, 2016.

MERLINI, V. L.; TEIXEIRA, A. C. N. As estratégias de resolução dos estudantes do 1º ano em situações de proporção simples. **Com a Palavra o Professor**, v. 3, n. 7, p. 73-89, 2018.

MIX, K. L.; HUTTENLOCHER, J.; LEVINE, S. C. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? **Psychological Bulletin**, Washington, v. 128, n. 2, p. 278–294, 2002.

MONTENEGRO, J.; BORBA, R. E. S. R.; BITTAR, M. Intermediate representations in the learning of combinatorial situations. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 1, p. 1-26, 2020.

MORAIS, M. D.; TELES, R. A. M. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. **Cadernos da TV Escola:** Um salto para o futuro. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. Boletim 24, n. 8, p. 10-16, 2014.

NUNES, T., BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PELEN, M. S.; ARTUT, P. D. An investigation of middle school students' problem solving strategies on inverse proportional problems. In: **Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4). PME; Szeged, Hungary, 2016. p. 51-58.**

PESSOA, C.; BORBA, R. A Compreensão do Raciocínio Combinatório por Alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** 4., 2009, Brasília. Anais... Brasília: UCB, 2009.

PIAGET, J.; GRIZE, J. B.; SZEMINSKA, A.; BANG, V. **Epistemologie et psichologie de la fonction**. Paris: Presses Universitaires de France, 1968.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 1971.

PIAGET, J. Desenvolvimento e aprendizagem. **Studying teaching**, p. 1-8, 1972.

SCHLIEMANN, A. D. Da matemática da vida diária à matemática da escola. In: Schliemann A. D., Carraher, D. W. (Orgs.), **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, p. 11-38.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. *In:* SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. (ed.). **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998. p. 95-119.

SELVA, A.; BORBA, R. O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 47, p.51-72, 2005.

ŞEN, C.; GÜLER, G. Effect of strategy teaching for the solution of ratio problems on students' proportional reasoning skills. **Malaysian Online Journal of Educational Sciences,** v. 5, n. 2, p. 1-15, 2017.

SILVA, J. F. G. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças.** 2010. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, UFPE, 2010.

SILVA, J.F.G.; SPINILLO, A.G. Relações diretas e inversas em problemas de produto cartesiano: É possível facilitar a compreensão de crianças a partir da explicitação dos princípios invariantes? In: Martins, E.; Lautert, S. L. (Eds.), **Diálogos sobre o ensino, a aprendizagem e a formação de professores: Contribuições da Psicologia da Educação Matemática.** Rio de Janeiro: Autografia, 2020, p. 123-151.

SPINILLO, A.G.; BRYANT, P. Children's proportional judgements: the importance of 'half'. **Child Development**, New York, v. 62, p. 427-440, 1991.

SPINILLO, A.G.; BRYANT, P. Proportional reasoning in young children: part-part comparisons about continuous and discontinuous quantities. **Mathematical Cognition**, London, v. 5, n. 2, 1999, p. 181-197.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: Meira, L. L.; Spinillo, A. G. **Psicologia**

cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006, p. 46-80.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. A Importância da Explicitação da Correspondência Um para Muitos na Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 112-128, 2021.

SPINILLO, A. G.; SILVA, J. F. G. Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: Does it help children to solve Cartesian product problems? **Proceedings of the 34rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, p. 216-224, 2010.

SPINILLO, A. G.; SILVA, J. F. G. Alternativas para desenvolver formas apropriadas de resolução de problemas de produto cartesiano. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.

VAN DOOREN, W.; BOCK, D. D.; VERSCHAFFEL, L.. From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. **Cognition and Instruction**, v. 28, n. 3, p. 360-381, 2010.

VAN DOOREN, W.; VANCRAENENBROECK, G.; VERSCHAFFEL, L. The role of external representations in solving multiplicative problems. In: **Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. PME; Kiel, Germany, 2013. p. 321-328.

VAN ESSEN, G.; HAMAKER, C. Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. **The journal of educational research**, v. 83, n. 6, p. 301-312, 1990.

VANLUYDT, E; DEGRANDE, T.; VERSCHAFFEL, L.; VAN DOOREN, W. Early proportional reasoning abilities: The role of relational preference. In: **Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)**. PME, 2019. p. 414-421.

VANLUYDT, E.; VERSCHAFFEL, L.; VAN DOOREN, W. Emergent proportional reasoning: Searching for early traces in four-to five-year olds. In: **Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4)**. PME; Umeå, Sweden, 2018. p. 347-354.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (Orgs.), **Addition and subtraction: a cognitive perspective,** Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1982, p. 141-161.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R. A.; Landau, M. (Eds.), **Acquisition of mathematical concepts and processes.** New York: Academic Press, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research Agenda in Mathematics Education.** Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.** Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: Grossi, E. P. (Ed.), **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Rio de Janeiro: Vozes, 2003, p. 21-64.

VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. **Human development**, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VERGNAUD, G. O que é aprender? Por que Teoria dos Campos Conceituais?. In: Grossi, E. P. (Ed.), **O que é aprender? O iceberg da conceitualização**. Porto Alegre: Geempa, 2017, p. 15-53.