



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA E O PROBLEMA DA MEDIDA

por

Fábio Magalhães de Novaes Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Orientador-UFPE)

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (DF - UFPE)

Prof. Francisco de Assis de Brito (UFCEG)

Recife - PE, Brasil
Abril - 2009

Santos, Fábio Magalhães de Novaes.
Cosmologia inflacionária e o problema da medida /
Fábio Magalhães de Novaes Santos. - Recife : O
Autor, 2009.
xi, 106 folhas: il. fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2009.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Cosmologia. 2. Teoria quântica de campos.
3. Universo inflacionário. I. Título.

523.1 CDD (22.ed.) FQ 2010-003



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Fábio Magalhães de Novaes Santos

COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA E O PROBLEMA DA MEDIDA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Presidente e Orientador), Antônio Murilo Santos Macêdo, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Francisco de Assis de Brito, do Departamento de Física da Universidade Federal de Campina Grande, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em trinta de novembro de 2009.



Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Presidente e Orientador



Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo



Prof. Francisco de Assis de Brito

Ao grande estilo...

Agradecimentos

Esta dissertação de mestrado foi resultado de grande trabalho e dedicação e só pôde ser concluída através da contribuição direta ou indireta de várias pessoas as quais sou sinceramente grato.

Primeiramente, agradeço às pessoas cujas contribuições influenciaram diretamente o conteúdo desta dissertação por meio das discussões e sugestões nos corredores e em nossos seminários de grupo: Bruno Cunha, Tiago Nunes, Maury Duarte e David Macêdo. A contribuição destas pessoas foi crucial para a gênese desta dissertação. Agradeço principalmente ao meu orientador Bruno Cunha pela oportunidade e generosidade em compartilhar seu vasto conhecimento de física e por ter me dado liberdade para escolher o meu próprio caminho.

Sou grato também a todos os colegas do departamento de física cujas discussões e sugestões valiosas não posso todas lembrar. Alguns deles são: Cláudio Farias, Marcone Sena, Douglas Lacerda, José Borba, Domingos Salazar, Eduardo, Plínio, Rafael, Saulo, entre outros. Aos meus mestres por terem compartilhado seu conhecimento e experiência sem os quais não teria chegado tão longe em tão pouco tempo. Aos funcionários e servidores públicos da UFPE que permitiram-me desfrutar de um estrutura acadêmica razoável apesar das presentes limitações do sistema público de ensino.

Ao Nathan Berkovits do IFT-UNESP pelo auxílio financeiro e oportunidade de participar da escola ministrada por Anthony Zee no CeSAFT. Aos colegas Farinaldo, Paulo e Carlos, companheiros neste referido curso, pelas discussões estimulantes surgidas naquele árduo mês. Agradeço também ao pessoal do departamento de Física da UFPB pelas escolas e cursos que contribuíram positivamente na minha formação.

Agradeço igualmente aos meus pais e à minha família por terem insistido em uma educação de qualidade para mim, mesmo em momentos difíceis, e por ressaltarem a responsabilidade advinda de ser dono do próprio destino. À minha irmã Fernanda por estar sempre lá quando precisei.

Serei eternamente grato a Poliana, pelo amor, carinho e compreensão incondicionais neste período tão atribulado de nossas vidas.

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNPq.

The law that entropy always increase - the second law of thermodynamics - holds, I think, the supreme position among the laws of nature.

—ARTHUR EDDINGTON

Resumo

No século XX, a cosmologia deixou o campo da metafísica para ser consolidada como um ramo da ciência teórica e experimental. Nos últimos anos tem sido observado um grande avanço no importante aparato observacional da cosmologia tornando possível sondar eventos físicos que ocorreram a cerca de 13 bilhões de anos, supostamente ocorridos próximos à singularidade inicial conhecida como Big Bang. Entretanto, muitos mistérios permanecem esperando para ser resolvidos neste novo e promissor século. Entre eles estão as questões da formação de estruturas cosmológicas e das flutuações de densidade na radiação cósmica de fundo (CMB). A solução mais popular parece ser a chamada inflação cosmológica, a ideia de que um período de expansão acelerada ocorreu cerca de 10^{-43} s após o início do Universo poderia explicar as condições iniciais do Big Bang e o espectro da CMB. Neste trabalho, analisamos a generalidade do modelo mais simples e mais usado na literatura, o modelo ϕ -FRW, e suas propriedades no espaço de fase da teoria. A ação estudada consiste na de Einstein-Hilbert onde supomos uma métrica do tipo Robertson-Walker acoplada com um campo escalar ϕ e um potencial arbitrário $V(\phi)$. Aplicamos a equação de Wheeler-DeWitt no modelo ϕ -FRW e, então, propomos uma medida quântica no espaço de fase modificada pelo princípio holográfico de forma a contar heurísticamente a degenerescência proveniente dos graus de liberdade quânticos da gravitação.

Palavras-chave: Cosmologia, Inflação, Friedmann-Robertson-Walker, Campo escalar, Wheeler-DeWitt, Holografia

Abstract

Cosmology has lost its metaphysical status to become a branch of experimental and theoretical physics in the 20th century. In the last years great progress has been observed on the important observational apparatus of cosmology making possible to probe physical events which happened some 13 billion years ago, supposedly very near the Universe's initial singularity know as the Big Bang. However, many misteries still remain to be solved in this new and promissing century. Among them are the questions of the formation of cosmological structures and density fluctuations on the Cosmic Microwave Background (CMB). The most popular solution to some of these problemas appears to be cosmological inflation, the idea that a period of accelerated expansion occurred 10^{-43} s after the Universe's beginning which could explain the initial conditions of the Big Bang and the CMB radiation spectrum. In this work, we analyse the generality of the simplest and most used model in the literature, the ϕ -FRW model, and its properties in phase space. We study the Einstein-Hilbert action supposing a Robertson-Walker metric coupled to a scalar field ϕ and an arbitrary potential $V(\phi)$. Applying the Wheeler-DeWitt equation to the ϕ -FRW model, we further propose a quantum measure on the configuration space modified to incorporate the holographic principle, a heuristic correction proposed in order to count the degeneracy provenient from the degrees of freedom of quantum gravity.

Keywords: Cosmology, Inflation, Friedmann-Robertson-Walker, Scalar Field, Wheeler-DeWitt, Holography

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Breve História da Cosmologia	2
1.1.1	Modelo Cosmológico Padrão	3
1.1.2	Cenário Inflacionário	5
1.1.2.1	Tipos de Inflação	8
1.1.2.2	Inflação e Teoria de Perturbações Cosmológicas	10
1.2	Breve História do Universo	10
1.3	Inflação Eterna e o Problema da Medida	12
2	Modelo Cosmológico Padrão e a Solução Inflacionária	15
2.1	Métrica de Robertson-Walker	15
2.2	Expansão de Hubble e o Redshift Cosmológico	16
2.3	Escalas Características e Horizontes	18
2.4	Dinâmica do Modelo FRW	19
2.4.1	Tensor de Energia-Momento e Equações de Friedmann-Lemâitre	20
2.4.2	Soluções Particulares e Épocas	21
2.4.3	Parâmetros Cosmológicos e Conteúdo de Energia do Universo	23
2.5	Termodinâmica do Universo Primordial	26
2.6	Cosmologia Inflacionária	31
2.6.1	Resolvendo os Problemas do Big Bang	32
2.6.2	Modelo ϕ -FRW	36
2.6.3	Aproximação Slow-Roll	37
2.6.4	Formalismo de Hamilton-Jacobi da Inflação	39
3	Generalidade da Inflação e o Problema da Medida	41
3.1	Atrator Inflacionário	43
3.2	Medida Canônica no Espaço de Fase	49
3.2.1	Construção da Medida	49
3.2.1.1	Estrutura Simplética e o Espaço de Fase	50
3.2.2	Aplicação da Medida Canônica no Modelo ϕ -FRW	54
4	Equação de Wheeler-DeWitt e Inflação	59
4.1	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral	59
4.2	Quantização Canônica e a Equação de Wheeler-DeWitt	66
4.2.1	Cosmologia Quântica. Interpretação e Probabilidades.	67
4.2.2	Aplicação ao Modelo ϕ -FRW	69

4.3	Medida Quântica para o Modelo ϕ -FRW	71
4.3.1	Soma de Estados em Mecânica Quântica	72
4.3.2	Soma de Estados em WDW-FRW	74
4.3.3	Comportamento Singular das Funções de Green	76
4.3.4	Condições de Slow-Roll no Espaço de Fase	79
4.4	Princípio Holográfico e o Problema da Medida	81
5	Conclusões e Perspectivas	84
A	Variedades e Formas Diferenciais	87
B	Geração Quântica das Perturbações Cosmológicas	89
B.1	Quantizando a Perturbação	93
B.1.1	Espectro de Potências e Flutuações	95
B.1.2	Gerando as Perturbações de Densidade	98
B.1.3	Perturbações Gravitacionais	99

Lista de Figuras

- 1.1 Gráfico da velocidade de recessão das galáxias (km/s) em função da distância estimada (Mpc) de um conjunto de 1355 galáxias. O melhor ajuste aos pontos é uma reta, demonstrando a lei de Hubble. Figura retirada de [1] 4
- 1.2 Projeção de Mollweide das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo medidas pelo WMAP. Créditos: NASA/WMAP Science Team. 4
- 1.3 Demonstração pictórica do problema do horizonte. A região da CMB vista hoje (última superfície de espalhamento) está contida no cone de luz passado, denotado pela intersecção do cone maior com o superfície. Os dois cones menores demonstram que as regiões hachuradas não tiveram tempo para entrarem em contato causal, impossibilitando a termalização das mesmas. 6
- 1.4 Diagrama representando uma transição de fase de 1ª ordem num potencial inflacionário genérico. Enquanto o Universo infla a sua temperatura cai de T_1 a T_4 . Na teoria de Guth, Inflação ocorre em T_2 . Entre T_2 e T_3 , o potencial apresenta dois mínimos. Em T_c , os mínimos têm o mesmo valor. Figura adaptada de [4]. 8
- 1.5 O mecanismo de slow-roll da nova inflação. O potencial é plano o suficiente para gerar inflação com $V(\phi) \approx \text{cte}$. O campo rola lentamente até o poço, quando começa a oscilar e decair em outras partículas, correspondendo ao reaquecimento. 9
- 1.6 Uma visão artística da evolução do Universo. Créditos: NASA/WMAP Science Team. 13
- 1.7 A evolução de um Universo unidimensional com inflação eterna, mostrado em coordenadas comóveis. A taxa de criação de universos é constante e as regiões onde ocorrem o tunelamento são constantes para facilitar a visualização. Num modelo quântico, as taxas e regiões são aleatórias. Figura adaptada de [14]. 14
- 2.1 Conteúdo de Matéria e Energia do Universo na época da formação da CMB e na época atual. Créditos: NASA/WMAP Science Team. 24
- 2.2 Análise de Verossimilhança (*likelihood*) no espaço de parâmetros Ω_Λ vs. Ω_m . Os pontos coloridos derivam do Método Monte-Carlo nos dados do WMAP e, juntamente com os dados de Supernovas (SNLS), favorecem um Universo plano com $\Omega_m \simeq 0.25$. Figura retirada de [20]. 25
- 2.3 O número efetivo de graus de liberdade em função da temperatura. As duas curvas correspondem a diferentes modelos nos quais a energia da transição QCD difere entre 150 e 450MeV. Retirado de [20]. 28

- 2.4 O espectro de potências da CMB é praticamente idêntico ao espectro de uma radiação de corpo negro com temperatura $T \approx 2.7\text{K}$. 30
- 2.5 A diminuição do horizonte comóvel $(Ha)^{-1}$ mostra como inflação supostamente resolve o problema do horizonte. A região que hoje é vista como homogênea estava fora do horizonte na época da CMB. Entretanto, não existe justificativa clara para a termalização anterior da região homogênea. Figura adaptada de [9]. 34
- 2.6 Diagramas conformes de um universo com Big Bang, que apresenta singularidade no passado, e de um universo sofrendo inflação, não apresentando singularidade. Adaptado de [28]. 35
- 3.1 Restrições no espaço de fase. 44
- 3.2 Espaço de fase fica reduzido ao plano (x,y) no caso plano. O campo vetorial em azul mostra como as órbitas tendem às assíntotas em $y = \pm 1/3$, nas quais o regime de Sitter acontece. Assintoticamente as órbitas tendem à espiral em torno da origem, passando a um regime tipo poeira. 45
- 3.3 Desenho do espaço de fase $(\phi, \dot{\phi})$ truncado na esfera de Planck $\rho \sim m_{pl}^4$. Trajetórias que não inflam o suficiente estão dentro da região hachurada na qual $\phi \lesssim 3m_{pl}$. 48
- 3.4 Órbitas do campo vetorial V^μ geram uma variedade n -dimensional θ embebida em M . Duas hipersuperfícies, Σ e Σ' , cortam o fluxo gerando duas superfícies, S e S' . 50
- 4.1 Decomposição do vetor t^a com relação às hipersuperfícies Σ_t . 61
- 4.2 Falha do transporte paralelo de $n^a(p)$ até q coincidir com $n^a(q)$ 63
- 4.3 Contorno de integração de $\oint_C \tilde{G}(z) dz$. 73
- 4.4 Na figura, as regiões Γ_1 e Γ_2 têm um raio menor e igual ao horizonte cosmológico R_H , respectivamente, e a quantidade de entropia que entra no cone de luz passado é a mesma que chega nas regiões tipo espaço. Já no caso da região Γ_3 em que o raio é maior que R_H e o cone de luz é truncada na singularidade em $t = 0$, existe entropia que alcança a região sem passar pelo cone de luz. 82

CAPÍTULO 1

Introdução

A cosmologia pode ser considerada um dos mais novos e ousados campos da física moderna. Seu objetivo é descrever a evolução do Universo, o conteúdo de matéria-energia que o compõe, seu estado futuro e, possivelmente, seu estágio inicial. Nesta dissertação, estaremos preocupados com a última questão sobre o estado inicial do Universo e o que aconteceu nos seus primeiros segundos, assim como sobre a possibilidade de fazermos inferências falsificáveis sobre esta época. A solução praticamente ubíqua na literatura encontra-se no chamado modelo inflacionário. Tal modelo supõe um breve período de expansão acelerada após o Big-Bang com pretensões de apresentar uma justificativa dinâmica que explique a observada homogeneidade, isotropia e platitude do Universo diante de condições iniciais genéricas. Entretanto, muitas críticas podem ser feitas ao modelo inflacionário. Nosso objetivo neste trabalho é apresentar tais críticas e digressar sobre o potencial preditivo das diversas maneiras de implementar o modelo inflacionário. Em particular, desejamos saber se é possível obter uma medida de probabilidade confiável no espaço de fase da teoria clássica, usando argumentos semiclássicos, que responda a seguinte pergunta: qual a probabilidade de ocorrer uma fase inflacionária após o Big-Bang dadas condições iniciais genéricas ao Universo? Por outro lado, existem várias propostas de medidas *a priori* para o Universo assim como uma ampla gama de respostas quantitativas para a questão acima. Portanto, gostaríamos também de responder à seguinte pergunta: é possível usar de algum sólido princípio teórico, tal como a segunda lei da termodinâmica, para colocar restrições sobre a medida do Universo?

Neste capítulo, apresentaremos uma breve revisão histórica da cosmologia e sua emancipação como ciência baseada em dados empíricos expondo os progressos relevantes na área de cosmologia inflacionária e assuntos afins. No capítulo 2, será dada uma introdução ao modelo cosmológico padrão, que descreve com bastante precisão os parâmetros cosmológicos, e à solução inflacionária. No capítulo 3, apresentaremos o problema da medida em cosmologia, a proposta da medida canônica dos universos e como identificar um período inflacionário no espaço da fase da teoria. O formalismo ADM da relatividade geral e a equação de Wheeler-DeWitt serão introduzidos no capítulo 4, no qual os aspectos semiclássicos serão discutidos. Veremos as dificuldades envolvidas na quantização canônica da relatividade geral via a equação

de Wheeler-DeWitt e vamos propor uma nova maneira de contar estados na teoria quântica em busca de definir uma medida de probabilidades no espaço de configurações. Por fim, apresentaremos o princípio holográfico e nossa proposta de incorporá-lo na medida quântica. No capítulo 5, serão apresentadas as considerações finais.

1.1 Breve História da Cosmologia

Em 1915, a história da ciência, em particular da física, foi drasticamente alterada. Um cientista chamado Albert Einstein, o outrora oficial de escritório de patentes, mostrou-se gênio e tornou-se mito descobrindo relações profundas entre matéria, energia, espaço, tempo e geometria. A esta revolução filosófica e científica ele deu o nome de Teoria da Relatividade Geral¹. Inspirado pelas ideias de Mach, seu objetivo era relativizar todo movimento, até mesmo o acelerado, buscando generalizar seu esquema já bem sucedido em entender a eletrodinâmica dos corpos em movimento. Em meio à busca, ele percebeu que a força que mantém os planetas presos em suas órbitas, a qual chamamos de gravidade, pode ser engenhosamente entendida como a curvatura intrínseca do espaço-tempo, e seu potencial atrativo resultado de como as geodésicas se curvam e se atraem em relação aos corpos massivos geradores de curvatura. Finalmente, a proposta de um *princípio da equivalência* entre aceleração e gravidade fez com que Einstein percebesse a natureza global da gravitação e a necessidade de se percorrer distâncias finitas para medir o que chamamos de campo gravitacional. Einstein soube escolher a estrutura matemática apropriada, campos tensoriais em variedades diferenciáveis, postulou a covariância da teoria e escreveu sua celebrada equação tensorial, a equação de Einstein²

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ab}$$

relacionando a curvatura do espaço-tempo com o tensor energia-momento da matéria. Esta equação tensorial pode ser vista como um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares acopladas descrevendo a evolução do protótipo de uma geometria, a métrica g_{ab} . Apesar destas equações não necessariamente definirem uma topologia global do espaço-tempo, é possível propor soluções razoáveis com certo grau de simetria. A partir deste ponto, Einstein e outros cientistas perceberam que as equações da RG poderiam descrever a conformação e evolução de todo o Universo e, assim, o embrião de uma nova ciência foi criado, a cosmologia observacional. A abstração do homem chegou a níveis antes inimagináveis, permitindo o homem

¹Daqui pra frente, apenas RG.

²Neste trabalho, adotaremos $c = \hbar = 1$ a não ser quando apropriado explicitar as constantes

especular a origem e evolução das estrelas e galáxias. A ciência mais uma vez alcançara os mitos.

Apesar da presença de vários modelos teóricos, a cosmologia observacional demorou muitos anos para chegar num status científico razoável. Os dois grandes resultados da pré-história da cosmologia observacional foram as medidas de Hubble do desvio para o vermelho das galáxias (*redshift galáctico*), corroborando com modelos de um Universo se expandindo no tempo (ver Figura 1.1), e as flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo,³ primeiramente medidas pelo telescópio COBE em 1992 e depois pela sonda WMAP lançada em 2001 (ver Figura 1.2). Estas medidas cosmológicas se mostraram surpreendentes e cruciais para o início da cosmologia, pois estão em clara contradição com a visão de um Universo eterno e estático implicitamente presente na física Newtoniana. O próprio Einstein se viu preso a este preconceito introduzindo uma inexplicada constante cosmológica em suas equações para obter um Universo estático. Só depois de discussões com o astrônomo holandês Willem de Sitter e com a aparição dos dados de Hubble que ele se convenceu estar vivendo num Universo em expansão. Foram necessários vários anos para que a comunidade científica se convencesse da possibilidade de se fazer inferências testáveis sobre a evolução do Universo e da matéria em larga escala.

1.1.1 Modelo Cosmológico Padrão

Na década de 40, George Gamow e seus colaboradores foram os responsáveis por criar o que posteriormente seria chamado de *modelo do Big-Bang Quente*. Eles uniram argumentos de física de partículas e cosmologia para tentar explicar a abundância dos isótopos de elementos leves na natureza, isto é, as diferentes proporções de deutério, hélio-3, hélio-4 e lítio-7 com relação ao hidrogênio. Seus resultados comprovaram-se extremamente bem sucedidos e uma das previsões da teoria foi a presença de uma radiação cósmica de fundo remanescente do Big-Bang com temperatura atual da ordem de 3 K. Tal resultado é considerado hoje o mais importante do modelo e o ajudou a se estabelecer ante as outras opções existentes na época.

No final da década de 80, foi estabelecido um consenso entre os cosmólogos sobre os ingredientes básicos do modelo do Big Bang sob o nome de *modelo cosmológico padrão*. O modelo do Big-Bang é baseado no modelo FRW (ver capítulo 2) e tal descrição do Universo tem como base o chamado *princípio cosmológico*. Este princípio defende que a nossa galáxia não ocupa um lugar especial no Universo, podendo ser considerado como uma extensão do princípio Copernicano a escalas cosmológicas. O princípio cosmológico toma sua forma no

³Em inglês, *cosmic microwave background*. Daqui pra frente, apenas CMB

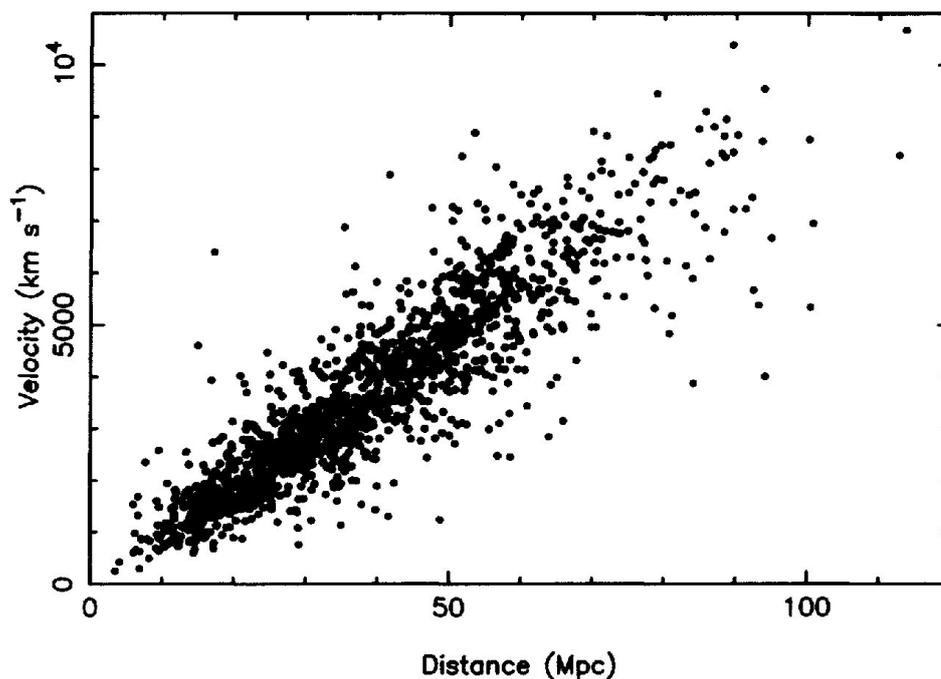


Figura 1.1 Gráfico da velocidade de recessão das galáxias (km/s) em função da distância estimada (Mpc) de um conjunto de 1355 galáxias. O melhor ajuste aos pontos é uma reta, demonstrando a lei de Hubble. Figura retirada de [1]

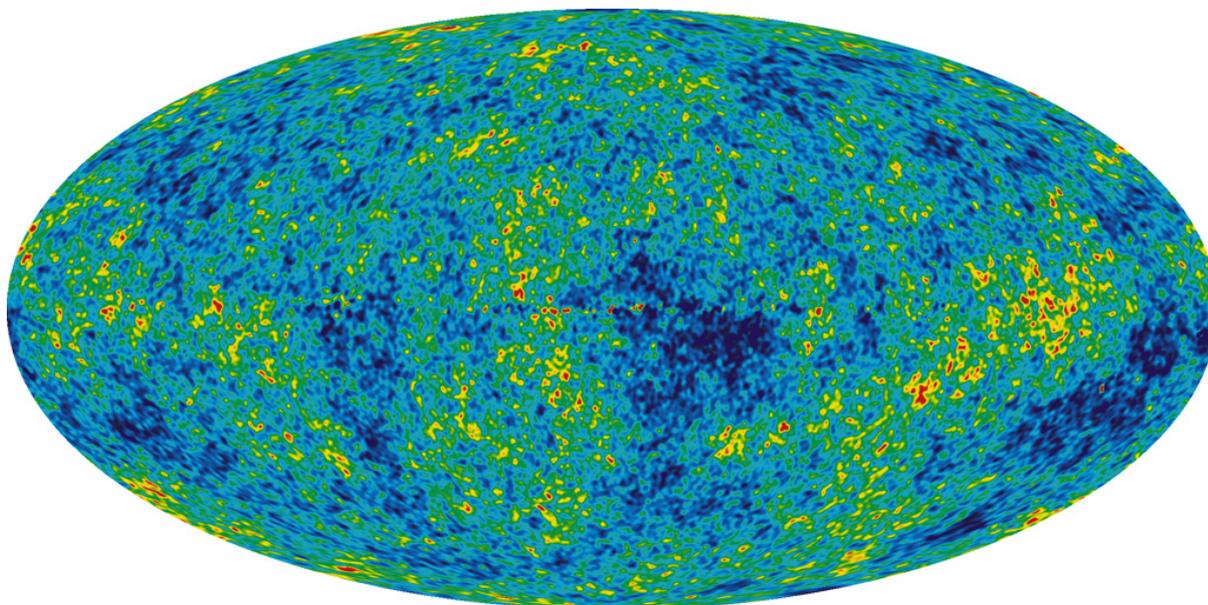


Figura 1.2 Projeção de Mollweide das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo medidas pelo WMAP. Créditos: NASA/WMAP Science Team.

modelo padrão como um Universo homogêneo e isotrópico em larga escala que se expande depois de um início altamente denso e quente, possivelmente apresentando uma singularidade inicial. São consideradas como as principais evidências experimentais do modelo:

- O redshift galáctico;
- A homogeneidade e isotropia em larga escala;
- A radiação CMB de temperatura $T \approx 2.7$ K;
- A abundância dos elementos leves (resultado da *teoria da nucleossíntese primordial*).

Este modelo solidificou-se e estendeu-se devido a influência do avançado estágio da física de partículas na época, avanço este amalgamado no aclamado modelo padrão das partículas elementares. Os físicos de partículas já haviam percebido a importância da cosmologia na verificação de vários aspectos do modelo padrão não facilmente testáveis nos aceleradores e também como possível fonte de nova física presente nas várias propostas de extensão do modelo padrão a energias mais altas. Às diversas aplicações deste campo da física na cosmologia chamou-se de *cosmologia de partículas* e suas principais aplicações referem-se ao denso e quente Universo primordial após o Big Bang. O Universo primordial, com sua alta energia, funciona efetivamente como o mais poderoso acelerador de partículas da natureza.

1.1.2 Cenário Inflacionário

Apesar dos seus declarados sucessos, o modelo padrão da cosmologia apresenta certos problemas relacionados com a dificuldade de se especificar as condições iniciais do Universo compatíveis com a observação. Em geral, os obstáculos mais citados com relação ao Universo primordial são:

- Problema do horizonte;
- Problema da platitude;
- Problema da homogeneidade e isotropia.

O problema do horizonte⁴ refere-se a certas regiões que não estariam em contato causal no universo primordial e, portanto, não poderiam apresentar a mesma temperatura no espectro CMB. O problema da platitude tem a ver em como a relação entre matéria e curvatura extrínseca, decorrente das equações de Einstein, mostra que o Universo é muito plano atualmente

⁴Horizonte de eventos: região causalmente conectada a uma determinada era (ver Capítulo 2)

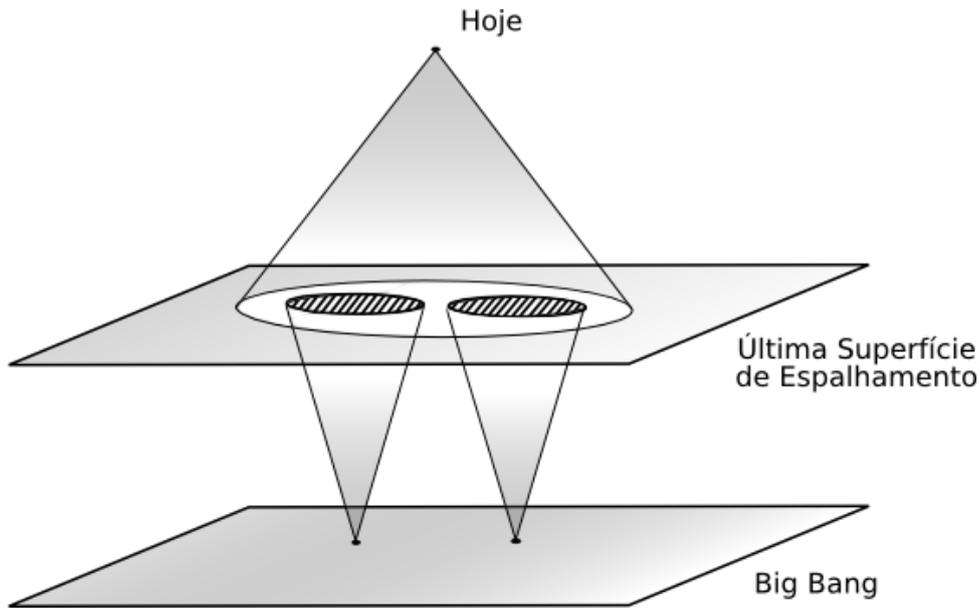


Figura 1.3 Demonstração pictórica do problema do horizonte. A região da CMB vista hoje (última superfície de espalhamento) está contida no cone de luz passado, denotado pela intersecção do cone maior com o superfície. Os dois cones menores demonstram que as regiões hachuradas não tiveram tempo para entrarem em contato causal, impossibilitando a termalização das mesmas.

apesar de tal condição mostrar-se instável nas equações da dinâmica. Por fim, o problema da homogeneidade e isotropia pode ser resumido com a pergunta: por que o espectro CMB (consequentemente, o Universo observável) apresenta alto grau de homogeneidade e isotropia mesmo tendo ocorrido cerca de 300.000 anos após o Big Bang? Não deveríamos considerar tais condições como atípicas? Todas essas questões nos levam a, pelo menos, três possíveis alternativas: (a) O Universo começou com condições muito especiais (b) Algum mecanismo dinâmico gerou as condições iniciais de homogeneidade e isotropia do Universo primordial, ou (c) É impossível explicar o que ocorreu no Universo primordial, a energias próximas da energia de Planck sem antes termos uma teoria quântica da gravidade gerando modelos e previsões observáveis para essa época. Dentre as alternativas, a hipótese de um mecanismo dinâmico é a mais fácil de ser desenvolvida e testada. Esta hipótese encontra-se encapsulada no *modelo inflacionário* no qual, supostamente, todas os problemas acima seriam resolvidos.

Mais do que um modelo, podemos dizer que existe uma ideia ou *cenário inflacionário*, que tem como característica crucial um período de expansão acelerada ocorrido entre cerca de 10^{-43} s e 10^{-34} s após o início do Universo provocado pelo potencial efetivo de algum campo quântico presente nessa era. O mecanismo da inflação seria, então, uma justificativa das condições iniciais aparentemente atípicas do Universo. Além de propor uma solução para os problemas do modelo do Big Bang, a inflação permite reproduzir com grande precisão o

espectro CMB e a formação de estruturas de larga escala⁵, embora necessite de um ajuste fino das constantes envolvidas e uma escolha apropriada do potencial.

No modelo inflacionário, o problema do horizonte seria resolvido pois, por exemplo, uma expansão acelerada expande o horizonte futuro de regiões inicialmente sem conexão causal de forma que se encontrem dentro do horizonte observável hoje na CMB (ver fig. 1.3). Já o problema da platitude seria resolvido pois um período acelerado resulta numa planificação do Universo, isto é, o caso plano passa a ser um ponto fixo estável do sistema durante este período. Por fim, o problema da isotropia seria solucionado através da análise do espectro das flutuações quânticas impostas nas perturbações de densidade (ou temperatura) produzidas após a inflação.

Historicamente, o modelo inflacionário surgiu num artigo de Alan Guth [2] como uma proposta de resolver o problema do horizonte e isotropia, além de diluir a grande quantidade de monopolos magnéticos no Universo presentes em certas teorias de grande unificação⁶, incompatível com a observação. Embora Guth seja considerado o pai da inflação, Starobinsky [3] propôs um mecanismo similar, embora mais complexo, um ano antes do referido artigo acima. Em seu artigo seminal [2], Guth observou que uma transição de fase de primeira ordem no potencial do bóson de Higgs no modelo SU(5) de grande unificação⁷, equivalente a um mecanismo de superresfriamento do Universo, poderia gerar um vácuo metaestável, chamado de *falso vácuo*, e, conseqüentemente, uma densidade de energia do vácuo positiva que faria o Universo inflar (ver figura 1.4). A inflação terminaria quando o campo tunelasse para o mínimo global do potencial e, a partir daí, haveria produção de entropia devido a criação de partículas e um eventual reaquecimento do Universo. Esta última fase serviria como um novo início do Universo, pois as condições iniciais anteriores à inflação seriam perdidas, e as novas condições seriam aquelas do modelo do Big Bang Quente já discutido.

O mecanismo de Guth remete a uma das principais ideias do modelo padrão de partículas, também conhecida em teoria do estado sólido e em mecânica estatística: a quebra espontânea de simetria. No modelo padrão, as partículas elementares ganham massa devido a quebra de simetria do potencial associado ao bóson de Higgs. A detecção do bóson de Higgs é uma das grandes esperanças do LHC⁸ quando este começar a funcionar neste ano de 2009.

A relação entre transições de fase e o Universo primordial é um dos principais pontos que fizeram a cosmologia de partículas se consolidar como principal ferramenta preditiva do Uni-

⁵*Large Scale Structures* ou LSS.

⁶*Grand Unified Theories* ou GUT's.

⁷O modelo de Higgs pode ser visto como uma generalização relativística da teoria de Ginzburg-Landau da supercondutividade. O campo clássico do modelo de Higgs seria análogo ao condensado de Bose-Einstein composto de pares de Cooper em um supercondutor.

⁸*Large Hadron Collider*, o acelerador de partículas do CERN

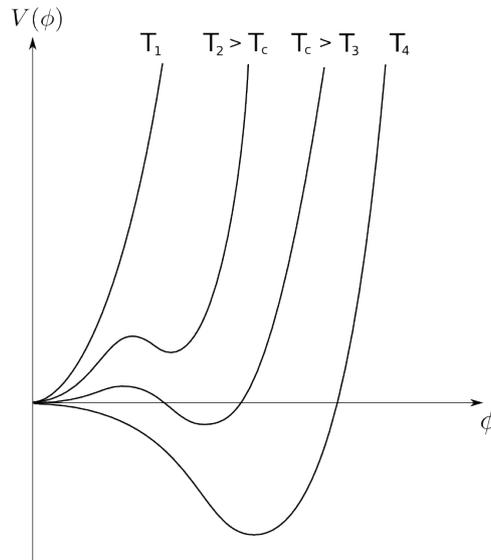


Figura 1.4 Diagrama representando uma transição de fase de 1ª ordem num potencial inflacionário genérico. Enquanto o Universo infla a sua temperatura cai de T_1 a T_4 . Na teoria de Guth, Inflação ocorre em T_2 . Entre T_2 e T_3 , o potencial apresenta dois mínimos. Em T_c , os mínimos têm o mesmo valor. Figura adaptada de [4].

verso primordial. Especula-se que houveram pelo menos duas transições de fase no início do Universo, a quebra de simetria eletrofraca e a chamada *Bariogênese* na qual os quarks passaram a existir em estado ligado formando, por exemplo, prótons e neutrons. Na próxima seção, será apresentada uma cronologia do Universo primordial em função da densidade de energia do Universo explicitando as transições de fase supostamente ocorridas no Universo primordial.

Apesar de seus avanços, o modelo de Guth apresentou o chamado *problema da saída graciosa* devido à formação e colisão de regiões de simetria quebrada, também chamadas de universosbolha ou *pocket universes*. Estas “bolhas de universo” ajudariam a resolver o problema da abundância de monopolos magnéticos no modelo SU(5), pois o número de monopolos formados seria da ordem de bolhas formadas e esta quantidade poderia ser pequena. A eventual colisão das bolhas produziria energia suficiente para reaquecer estas regiões e, conseqüentemente, o Universo a energias próximas a da Grande Unificação de 10^{15} GeV. Entretanto, o mecanismo de colisões produziria um universo muito inhomogêneo em comparação com o observado [5, 6].

1.1.2.1 Tipos de Inflação

As dificuldades iniciais da proposta de Guth foram rapidamente superadas e logo surgiram alternativas, formuladas principalmente por Andrei Linde [7]. Hoje considera-se que existem,

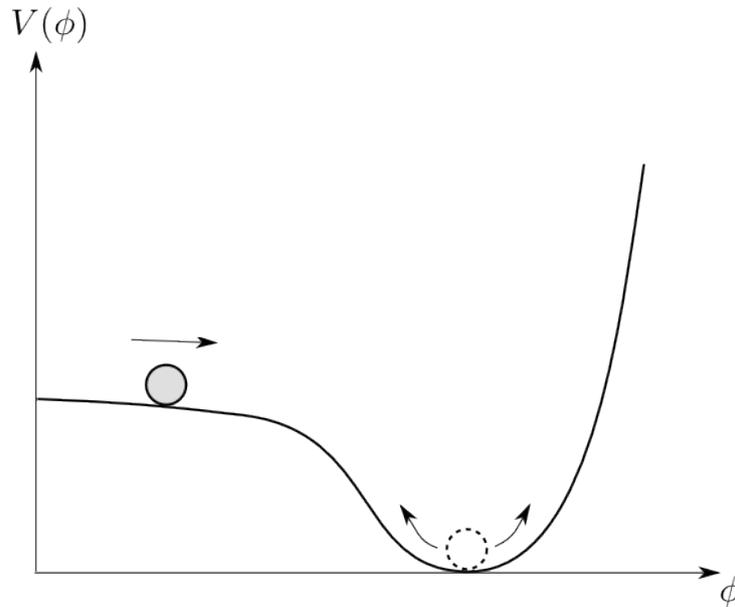


Figura 1.5 O mecanismo de slow-roll da nova inflação. O potencial é plano o suficiente para gerar inflação com $V(\phi) \approx \text{cte}$. O campo rola lentamente até o poço, quando começa a oscilar e decair em outras partículas, correspondendo ao reaquecimento.

basicamente, três tipos de modelos inflacionários: a velha inflação, a nova inflação e a inflação caótica. A *velha inflação* consiste no modelo de falso vácuo discutido acima proposto por Guth. Já a *nova inflação*, proposta por Linde para resolver o problema da saída graciosa, tem como principal ideia transformar a brusca transição de fase por tunelamento do modelo de Guth por uma transição mais suave em que o campo “rolaria suavemente” para o vácuo verdadeiro, o chamado mecanismo de *slow-roll*. De acordo com a nova inflação, em vez de existirem dois mínimos na fase de transição, o mínimo correspondente ao falso vácuo seria degenerado, provocando um deslocamento clássico do campo em direção ao vácuo verdadeiro formado na transição (ver fig. 1.5). Na fase de slow-roll, a energia potencial seria aproximadamente constante tempo suficiente para fazer o universo inflar. O campo começaria a oscilar e decairia em novas partículas quando atingisse o vácuo verdadeiro, reaquecendo o universo.

Com o tempo, o campo gerador da inflação disassociou-se do Higgs e passou a ser chamado de *Inflaton*. O modelo antes específico gerador da inflação passou a ser considerado um mecanismo genérico. Linde passou a disseminar a ideia de que inflação seria uma propriedade genérica do modelo FRW minimamente acoplado com um campo escalar na chamada *Inflação Caótica*. Um período inflacionário poderia ser produzido por um imensa gama de potenciais, até mesmo um bem simples como $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ [8]. De fato, Linde reconheceu em seu livro [4] que inflação não seria natural em teorias de partículas elementares no contexto da velha e

nova inflação devido às fortes restrições necessárias na forma do potencial do inflaton e a certas hipóteses que não poderiam ser satisfeitas pela teoria. Estes problemas não estariam presentes na Inflação Caótica.

A ideia básica da Inflação Caótica é que o inflaton poderia tomar valores aleatórios (i.e., caóticos) no universo primordial em diferentes regiões do espaço. De acordo com o princípio da incerteza, quando o Universo tivesse a idade de um tempo de Planck t_p , a densidade de energia do inflaton poderia assumir valores entre zero e a densidade de energia de Planck M_p^4 . Como as equações clássicas da RG devem valer apenas para tempos maiores que t_p , este seria o período apropriado para se impor as condições iniciais do Universo. Dessa forma, o inflaton seria livre para começar sua evolução com valores de ϕ grandes o suficiente para gerar um período inflacionário razoável. A ideia é que regiões com ϕ maior implicam num $V(\phi)$ maior e, portanto, uma expansão mais rápida e prolongada, fazendo estas regiões dominarem sobre as outras.

1.1.2.2 Inflação e Teoria de Perturbações Cosmológicas

Apesar do modelo inflacionário ter surgido para resolver o problema das condições iniciais do Universo, seu maior sucesso está na dedução do espectro CMB (ver fig. 1.2) e das anisotropias associadas a ele. O método usado para tratar o Universo primordial é chamado de *teoria de perturbações cosmológicas* e está na base da teoria de formação de estruturas em larga escala, isto é, galáxias e aglomerados de galáxias.

Como esta dissertação trata-se mais especificamente do problema das condições iniciais da inflação, o tratamento usado para descrever as flutuações de densidade do Universo primordial não será apresentado em detalhes aqui. De acordo com [9], a própria teoria de formação de estruturas é muito mais extensa do que a usada nos modelos inflacionários, pois estes se limitam a tratar da evolução de *pequenas* perturbações e, portanto, restringem-se ao regime linear da teoria. Uma breve discussão com os principais pontos físicos no caso inflacionário foi feita no apêndice B. Para mais detalhes da teoria de perturbações cosmológicas, ver [10, 9].

1.2 Breve História do Universo

O cenário inflacionário gerou tantos sucessos que acabou sendo incorporado ao modelo cosmológico padrão. É praticamente consenso entre os cosmólogos que o Universo surgiu com energia da ordem de M_{pl} por algum mecanismo desconhecido (tunelou do "nada", emergiu da esponja espaço-temporal) e logo sofreu um período de expansão acelerada devido a um

mecanismo igualmente desconhecido, modelado heurísticamente pelo campo inflaton.

A física além da escala de Planck é o território de teoria de cordas e de quaisquer outras teorias de gravidade quântica. Existem várias propostas na literatura sobre a origem do Universo, tais como cosmologia de gás de cordas [11], condensados taquiônicos [12] e *loop quantum cosmology* [13].

Como vimos acima, o período inflacionário serve para gerar condições iniciais apropriadas para o modelo do Big Bang Quente que descreve a evolução subsequente do Universo. Tal modelo baseia-se numa métrica homogênea e isotrópica cuja variável dinâmica é o fator de escala $a(t)$ (ver seção 2.1). O conteúdo de energia do Universo divide-se, em geral, entre matéria bariônica, radiação, matéria escura, neutrinos e energia escura. Existem vários modelos cujas proporções e presenças desses componentes são diferentes. Para mais detalhes, ver 2.4.3.

Podemos dividir a evolução do Universo em *épocas* como função da escala energética e do conteúdo de energia dominante. Como veremos no cap. 2, a densidade de energia da matéria vai com $\rho_m \propto a^{-3}$ e da radiação com $\rho_r \propto a^{-4}$. Isso implica que, no Universo primordial, quando $a(t) \rightarrow 0$, a radiação dominava e podemos considerar sua evolução clássica como a de um gás de fótons muito denso e quente em primeira aproximação. No cap. 2, quando tratarmos da termodinâmica do Universo, veremos que tal aproximação é razoável.

Em termos gerais, podemos resumir a cronologia do Universo nas seguintes fases [9] em função da energia da radiação primordial:

- $M_{pl} > \rho^{1/4} > 100 \text{ GeV}$

Predominam teorias especulativas sem aparentes testes diretos;

Inflação acontece;

Big Bang Frio ocorre após inflação;

Partículas decaem em partículas relativísticas, há o reaquecimento iniciando o *Big Bang Quente* no qual a matéria estaria em equilíbrio térmico com a radiação;

- $100 \text{ GeV} > \rho^{1/4} > 10 \text{ GeV}$

Física descrita pelo modelo padrão ou alguma extensão dele;

Transição de fase eletrofraca em $\rho^{1/4} \sim 100 \text{ GeV}$: Eletromagnetismo e força fraca se separam;

Possível geração da assimetria bárion-antibárion;

~ 100 MeV: Transição quark-hádron na escala QCD⁹. Quarks deixam de existir em estado livre e passam a existir como prótons, neutrons e píons livres;

~ 10 MeV: Última energia na qual o Big Bang Quente valida os cálculos da nucleossíntese.

~ 0.1 MeV: Era da *Nucleossíntese*

Prótons e neutrons se unem para formar núcleos de elementos leves.

~ 10 eV: Fim da era de domínio da radiação ($\rho_r \sim \rho_m$).

- $10 \text{ eV} > \rho^{1/4}$

Começa a era de dominação da matéria;

~ 0.1 eV: Era da *Recombinação*¹⁰

Elétrons passam a se ligar com núcleos formando átomos. Radiação não desacopla completamente pois ainda existem íons gerando espalhamento.

Logo após a recombinação, acontece a era do *Último Espalhamento*. A radiação desacopla da matéria e o Universo passa a ser transparente. A superfície da CMB vista na fig. 1.2 formou-se nesta era quando o Universo tinha cerca de 300.000 anos e é chamada de *última superfície de espalhamento*;

~ 10^{-3} eV: Começa a formação de estruturas em larga escala quando o Universo tinha cerca de 10^9 anos. Teoria de perturbações cosmológicas permite descrever a evolução das irregularidades no Universo homogêneo.

1.3 Inflação Eterna e o Problema da Medida

O fenômeno considerado pelos especialistas da área como sendo uma característica básica, talvez, até mesmo, essencial, dos modelos inflacionários é a chamada *Inflação Eterna*. Apesar de aparentemente se referir a um outro tipo de inflação, a inflação eterna refere-se ao aspecto assintótico dos modelos inflacionários e sobre o eventual domínio de regiões inflacionárias sob as outras regiões do Universo. O fato das regiões inflacionárias se expandirem muito mais rápido que as outras faz com que o volume do Universo seja dominado pela expansão inflacionária.

⁹*Quantum Chromodynamics*

¹⁰O nome Recombinação é um pouco enganador, pois os objetos em questão nunca estiveram combinados antes.

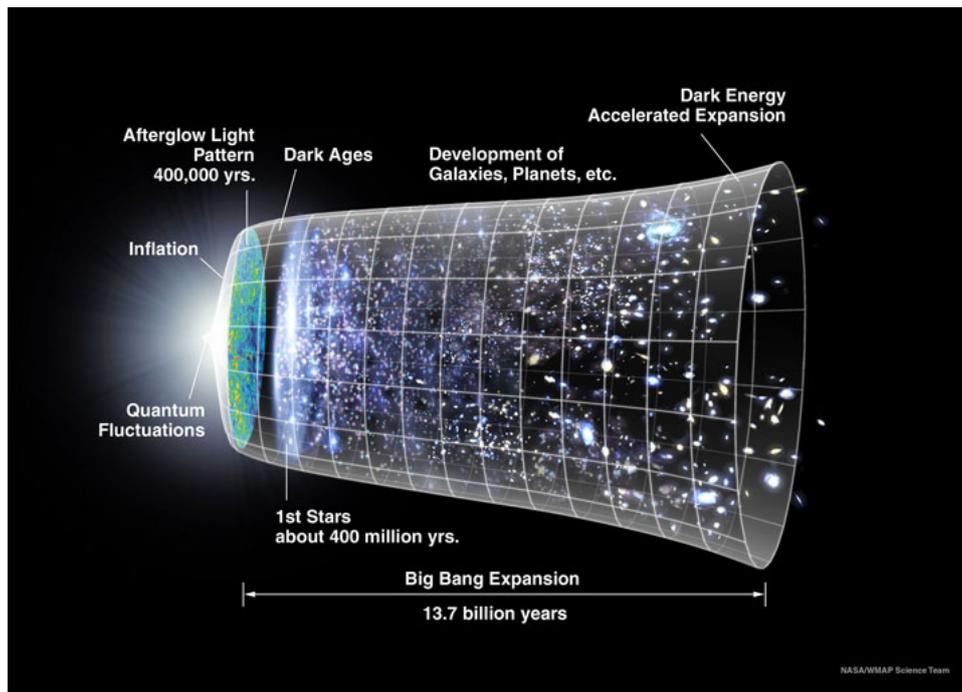


Figura 1.6 Uma visão artística da evolução do Universo. Créditos: NASA/WMAP Science Team.

A inflação eterna foi descoberta em 1983 por Steinhardt [15] e Vilenkin [16] no contexto da nova inflação. A ideia deles pode ser resumida se imaginarmos o Universo como iniciado todo num falso vácuo. Apesar de algumas regiões tunelarem e decaírem num Universo normal, a taxa de decaimento é menor do que a taxa com que as regiões de falso vácuo se expandem, gerando um Universo que infla eternamente numa escala global (ver fig. 1.7). Esse mecanismo geraria um *multiverso* aleatoriamente populado por universosbolha, enquanto que a estrutura global do multiverso se expandiria para sempre no falso vácuo. O comportamento assintótico do multiverso implicaria na existência de infinitos universos similares ao nosso.

Por outro lado, os universosbolha não seriam idênticos. Poderiam diferir, por exemplo, no período de inflação e isso geraria diferenças observáveis na CMB e no conteúdo de matéria do universo. Esse cenário geraria um problema na determinação das condições iniciais do multiverso (o Universo, com 'U' maiúsculo). Acredita-se que o comportamento assintótico do multiverso seria alcançar um estado estacionário, isto é, um estado de equilíbrio, no qual naturalmente as condições iniciais seriam perdidas. O multiverso não teria memória. Portanto, o máximo que poderíamos fazer seria definir uma distribuição de probabilidade sobre universosbolha e tentar saber quão típico é o nosso universo. Mas, a quantidade infinita de universos e a dificuldade de se definir uma seção espacial de tempo constante englobando todos os universos mostrou-se um grande obstáculo na definição de uma medida probabilística no multiverso. Este

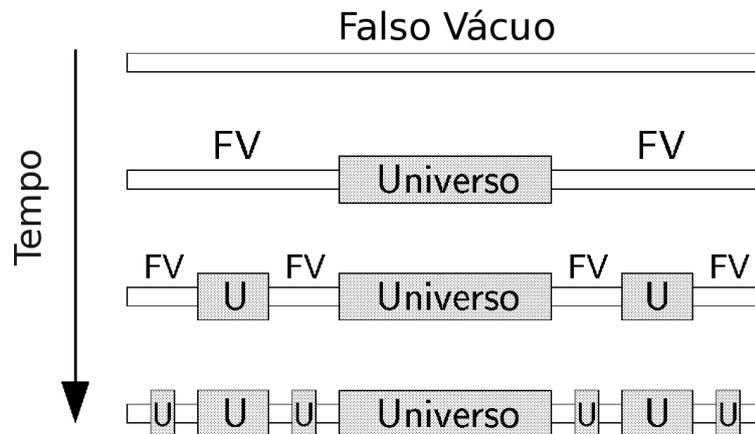


Figura 1.7 A evolução de um Universo unidimensional com inflação eterna, mostrado em coordenadas comóveis. A taxa de criação de universos é constante e as regiões onde ocorrem o tunelamento são constantes para facilitar a visualização. Num modelo quântico, as taxas e regiões são aleatórias. Figura adaptada de [14].

é o chamado *problema da medida da inflação eterna*.

No ano 2000, Leonard Susskind, um dos pais da teoria de cordas, sugeriu o *panorama antrópico*¹¹ da cosmologia, no qual a medida seria definida no espaço dos campos *moduli* da teoria de cordas, associados com as possíveis compactificações das dimensões extras [17]. As diversas configurações possíveis de campos e compactificações no panorama estariam relacionadas com diferentes vácuos de cordas. Susskind notou que uma medida baseada em probabilidades iguais *a priori* seria genérica demais para se concluir que nosso universo é um elemento típico no multiverso. Ele propôs que as únicas afirmativas sensíveis da cosmologia no multiverso seriam baseadas no princípio antrópico, isto é, só seria relevante perguntar: “Dado o subconjunto de universos que seres humanos podem vir a existir, quão típico é o nosso universo?”. Em suma, com o princípio antrópico espera-se que as condições de existência de vida seriam naturalmente as mais prováveis.

A realização prática do panorama antrópico seria definir uma medida sob os parâmetros efetivos da natureza, como as constantes de acoplamento do modelo padrão de partículas. As primeiras propostas surgiram em torno da constante cosmológica. A comunidade de cordas vislumbrou a possibilidade de se estabelecer o primeiro resultado confirmável da teoria se eles conseguissem mostrar no contexto do panorama de cordas, não necessariamente usando o princípio antrópico, que o valor observado da constante cosmológica é o mais provável [18, 19]. De fato, existem vários artigos na literatura propondo uma nova medida no multiverso.

¹¹*Anthropic landscape*, em inglês

Modelo Cosmológico Padrão e a Solução Inflacionária

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão das bases do modelo padrão da cosmologia, encapsuladas no chamado modelo FRW, de forma predominantemente heurística. Começamos por descrever a métrica de Robertson-Walker na seção 2.1, que está relacionada ao princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia em larga escala. Na seção 2.2, falamos sobre o Universo em expansão e o redshift galáctico, consequências diretas do modelo FRW observadas experimentalmente. Para concluir a exposição dos elementos cinemáticos, descrevemos as escalas características envolvidas no modelo na seção 2.3.

Partimos para a descrição da dinâmica do modelo FRW na seção 2.4, na qual expomos o tensor de energia-momento de um fluido perfeito relativístico e as equações de Friedmann-Lemâitre responsáveis pela evolução do fator de escala da métrica. A topologia e subsequente evolução do Universo dependem do conteúdo e composição energética do mesmo e são também discutidas nessa seção. Na seção 2.5, vemos que o Universo primordial é razoavelmente descrito por um plasma relativístico de partículas em equilíbrio térmico e, daí, deduzimos sua termodinâmica. Finalizamos o capítulo com a seção 2.6 que trata do essencial da cosmologia inflacionária, principal interesse do presente trabalho.

Uma revisão recente mais detalhada da cosmologia do Big Bang pode ser encontrada em [20]. Supõe-se aqui que o leitor tenha conhecimentos básicos de Relatividade Geral, conforme [21] e [22]. Ao longo deste capítulo, considere que $c = \hbar = k_B \equiv 1$, a não ser quando as constantes estejam explicitadas.

2.1 Métrica de Robertson-Walker

O protótipo da cosmologia padrão é o chamado modelo de Friedmann-Robertson-Walker, o modelo FRW, baseado na métrica de Robertson-Walker (também conhecida como métrica

FRW, terminologia usada adiante):

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

onde a métrica representa uma variedade isomorfa a $\mathbb{R} \times \Sigma$ tal que as seções de tempo constante Σ são 3-superfícies maximalmente simétricas¹, t é o tempo cósmico e $R(t)$ é o fator de escala que modela a expansão do Universo. A constante K está associada à curvatura extrínseca das seções espaciais, podendo ser redefinida como $\kappa = K/|K|$, de forma que o fator de escala normalizado $a(t) = R(t)/R_0$ tome o valor $a_0 = 1$ na era atual. Dessa forma, $\kappa = +1, -1, 0$ passam a ser os valores correspondentes a uma geometria fechada (esférica), aberta (hiperbólica) ou plana, respectivamente. Em [22], os conceitos de homogeneidade e isotropia são definidos matematicamente e é demonstrado que estes implicam que a métrica de Σ deve ser a de uma superfície maximalmente simétrica.

Note que em (2.1) estamos escolhendo coordenadas específicas para descrever o Universo observável e o único grau de liberdade presente na métrica é o fator de escala $R(t)$, i.e., apenas o fator de escala tem dimensão. As coordenadas (t, r, θ, ϕ) são chamadas de *coordenadas comóveis* e são escolhidas com relação aos chamados *observadores isotrópicos*. Tais observadores são definidos com relação ao fluido isotrópico que modela o Universo em larga escala (ver seção 2.4.1). É, por vezes, conveniente reexpressar a métrica (2.1) como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + S_\kappa^2(x)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (2.2)$$

onde $S_\kappa(x) = (\text{sen}x, x, \text{senhx})$ para $\kappa = (+1, 0, -1)$ e $a(t)$ é o fator de escala adimensional definido acima. O tempo próprio entre as seções espaciais é dado por Δt , e a distância própria quando $dt = d\theta = d\phi = 0$ é dada por $a(t)\Delta x$. A distância própria é por vezes chamada de *distância física*, enquanto que Δx é chamada de *distância comóvel*.

2.2 Expansão de Hubble e o Redshift Cosmológico

Na década de 20, o astrônomo Edwin Hubble fez a grande descoberta, ilustrada pela fig. 1.1, de que as galáxias próximas a nossa estão se distanciando com velocidade dada pela famosa

¹Note que a topologia de $\mathbb{R} \times \Sigma$ é escolhida pela conveniência das coordenadas e não existe princípio físico que a determine. Apesar disso, a topologia de Σ é passível de determinação através de experimentos. Em cosmologia quântica usa-se o formalismo de integral de trajetórias definido no espaço de 3-métricas positivo-definidas. É possível estender a integração sobre diferentes topologias e calcular a geometria mais provável.

lei de Hubble:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (2.3)$$

onde H_0 é a constante de Hubble. É importante ressaltar que esta equação trata de uma velocidade média, desprezando o movimento aleatório das galáxias próximas devido às chamadas *velocidades peculiares* das mesmas. À primeira vista, a eq. (2.3) parece contradizer o princípio cosmológico de homogeneidade; a vizinhança de qualquer galáxia deve parecer a mesma em qualquer lugar do Universo. Mostremos que é exatamente isso que implica a eq. (2.3).

Considere as posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 respectivamente a duas galáxias próximas entre si. No caso não-relativístico, isto é, no caso da lei de Hubble, válida a curtas distâncias, a velocidade relativa \mathbf{v}_{12} de distanciamento das duas galáxias é dada por

$$\mathbf{v}_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1, t) - \mathbf{v}_2(\mathbf{r}_2, t), \quad (2.4)$$

o que implica, pela eq. (2.3), em

$$\mathbf{v}_{12} = H_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = H_0 \mathbf{r}_{12}, \quad (2.5)$$

mostrando que o resultado (2.3) está de acordo com o princípio cosmológico de homogeneidade. De fato, a equação mais geral que mantém a homogeneidade e isotropia da distribuição de velocidades é da forma $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{r}$. Este resultado está contido na métrica (2.2), pois, se dois corpos estão distantes de $D(t) = a(t)D_c$, a velocidade relativa entre eles será

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) &= \dot{a}(t)D_c \\ &= H(t)D(t), \end{aligned}$$

onde $H(t) \equiv (\dot{a}/a)(t)$ é chamado de *parâmetro de Hubble*. Este parâmetro indica se o Universo está se expandindo ou se contraindo, correspondente aos casos $H(t) > 0$ e $H(t) < 0$, respectivamente. O parâmetro de Hubble é aproximadamente constante a curtas distâncias, sendo este o resultado básico da lei de Hubble (2.3).

A maneira mais direta, usada por Hubble, de medir a distância dos objetos celestes é pela análise espectroscópica da radiação emitida pelos mesmos. O que Hubble observou nas suas medidas foi um *redshift* (desvio para o vermelho) de certas frequências características no espectro das galáxias. Este resultado é uma consequência direta da lei de Hubble se definirmos o redshift z como

$$z \equiv \frac{v_1 - v_2}{v_1} \approx \frac{v_{12}}{c}, \quad (2.6)$$

onde v_1 é a frequência da luz emitida, v_2 é a frequência observada e v_{12} é a velocidade relativa entre as fontes. Tal qual acima, a aproximação é válida para curtas distâncias. Usando a métrica (2.2), é possível mostrar que

$$1 + z = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.7)$$

Este resultado é válido para qualquer distância [21, 22].

2.3 Escalas Características e Horizontes

Para completarmos a apresentação das características cinemáticas do Universo, falta introduzirmos as escalas características da expansão e os conceitos de horizonte de partícula e horizonte de eventos. As escalas características mais importantes estão relacionadas com o parâmetro de Hubble H : o *tempo de Hubble* H^{-1} e o *raio de Hubble* cH^{-1} (iguais nas unidades em que $c = 1$). O raio de Hubble é por vezes chamado de *horizonte*, pois é uma estimativa aproximada da distância percorrida por um raio de luz idealizado (caminho sem obstáculos) num período aproximadamente igual ao tempo de Hubble. Estas escalas podem ser visualizadas geometricamente por meio dos chamados *cones de luz*, geralmente desenhados em *diagramas conformes* ou em *diagramas de Penrose*. Tais diagramas explicitam a estrutura causal do Universo ou de uma dada região do Universo devido à hipótese da velocidade da luz ser a maior velocidade possível. Exemplos de cones de luz podem ser vistos na fig. 1.3.

Raios de luz são aqueles que percorrem caminhos tal que $ds^2 = 0$, i.e., caminhos com norma nula ou *tipo luz*. De acordo com a métrica (2.2), isto implica que $dt = a(t)dx$ e, portanto, a *distância comóvel* percorrida por um raio de luz ideal é dada por

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} \equiv \Delta \tau, \quad (2.8)$$

que coincide com a definição do *tempo conforme*, τ , correspondente a uma reparametrização do tempo comóvel tal que a métrica FRW seja conforme a uma das métricas maximalmente simétricas. Quando $t_1 = 0$, correspondente ao Big Bang, a distância física

$$r_{hor}(t) \equiv a(t) \Delta x = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.9)$$

é chamada pelos cosmólogos de *horizonte de partícula*, que é a distância máxima ideal percorrida pela luz desde o Big Bang até um dado tempo t . Mais precisamente, o horizonte de partícula corresponde à fronteira do cone de luz passado cujo raio máximo é dado por (2.9).

Analogamente, o *horizonte de eventos* corresponde à fronteira da região casualmente conectada por raios de luz num tempo futuro. As definições acima podem ser entendidas geometricamente como as fronteiras da parte inferior e superior de um cone de luz, respectivamente.

Tais escalas são importantes para estudarmos a evolução de outras escalas relevantes no período inflacionário, como, por exemplo, a escala correspondente ao Universo observável atualmente. É interessante notar que podemos ignorar a expansão do Universo em regiões muito menores que o raio de Hubble e em tempos muito menores que o tempo de Hubble e, portanto, processos físicos, como o estabelecimento do equilíbrio, podem ser tratados sem se considerar a expansão do Universo.

2.4 Dinâmica do Modelo FRW

A métrica (2.1) nos remete, em princípio, a uma estrutura que pode ser interpretada como sendo o correspondente matemático do que é costumeiramente chamado de *espaço-tempo*. Por outro lado, de acordo com uma visão Machiana do Universo, o espaço-tempo *per se* não tem significado a não ser como um modelo relacional construído das posições relativas dos corpos massivos. Assim, uma maneira intuitiva de realizar o espaço-tempo nessa ideia é vê-lo como uma estrutura que emerge da imposição de coordenadas à distribuição de matéria do Universo tomada no limite do contínuo, significando que podemos considerar o Universo em sua totalidade como um fluido relativístico. Assim, de acordo com essa visão, qualquer modelo do Universo está incompleto enquanto a distribuição de matéria não for imposta na forma de um tensor de energia-momento T_{ab} na equação de Einstein.

Entretanto, existem soluções da equação de Einstein onde $T_{ab} = 0$, como, por exemplo, a solução de Schwarzschild, que representa um buraco negro estático, mostrando uma aparente dificuldade na defesa do ponto de vista Machiano. Por outro lado, podemos interpretar fisicamente tais soluções assim como interpretamos soluções das equações de Maxwell no vácuo, isto é, como perturbações no campo advindas de uma fonte distante. A solução de Schwarzschild é, portanto, interpretada como o campo gravitacional exterior a uma distribuição de matéria esféricamente simétrica muito densa, cuja natureza não é crucial para a solução. Esta discussão nos leva a conclusão de que uma solução cosmológica tipo FRW deve apresentar *necessariamente* uma fonte de energia ou matéria em função do caráter *global* da solução. Assim, a métrica FRW pode ser vista como uma aplicação não-trivial da equação de Einstein, no sentido que seu uso natural estaria atrelado a encontrar soluções de campos gravitacionais *locais*, como as dos buracos negros.

2.4.1 Tensor de Energia-Momento e Equações de Friedmann-Lemâitre

As simetrias decorrentes da homogeneidade e isotropia da métrica FRW são bastante fortes de modo a restringir qualquer proposta de distribuição de matéria a de um fluido perfeito relativístico. A forma relativística do tensor de energia-momento deste fluido é dada por²

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P g_{ab} \quad (2.10)$$

onde ρ é a densidade de energia do fluido, P é a pressão e u_a é a velocidade normalizada do fluido parametrizada pelo tempo cósmico, i.e., $u^a u_a = -1$. Para chegarmos à expressão (2.10), basta escrevermos o tensor de um fluido em repouso nas coordenadas comóveis,

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix},$$

em forma covariante (independente de coordenadas), i.e., num referencial em que o fluido se move com velocidade u_a .

A equação de Einstein em sua forma mais geral é dada por

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 8\pi G T_{ab} + \Lambda g_{ab}, \quad (2.11)$$

onde Λ é a chamada *constante cosmológica*, principal candidata a responsável pela atual expansão acelerada do Universo. A constante Λ é frequentemente interpretada como uma densidade de energia do vácuo $\rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$. Entretanto, um cálculo ingênuo em teoria quântica de campos supondo um *cutoff* na energia de Planck dá um valor para Λ cerca de 10^{121} vezes maior que o observado, possivelmente o maior erro de estimativa teórica da história da física. Modelos nos quais Λ pode evoluir no tempo são chamados de modelos de *energia escura* ou *quintessência*, denotando o fato da desconhecida origem dessa energia do vácuo. Como veremos abaixo, o período inflacionário em que o fator de escala cresce exponencialmente com o tempo é equivalente a uma época dominada pela constante cosmológica.

Impondo o tensor energia-momento (2.10) na equação (2.11) acima e usando a métrica (2.2), chegamos nas equações de movimento de Friedmann-Lemâitre, daqui em diante chamadas

²É importante notar que, em geral, estaremos escrevendo os tensores em forma abstrata, isto é, os índices latinos $abc \dots$ representam as “entradas” das aplicações lineares num espaço abstrato, enquanto que índices gregos $\mu\nu\rho \dots$ representam as coordenadas do tensor em um sistema de coordenadas específico.

de equações de FRW (vide cap. 5 de [22]):

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.13)$$

onde a primeira equação é muitas vezes chamada de *equação de Friedmann*. A conservação do tensor energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ nos gera uma outra equação dinâmica importante:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.14)$$

Esta equação pode ser deduzida a partir das outras duas e, portanto, temos um sistema com duas equações diferenciais não-lineares acopladas cujas variáveis relevantes podem ser interpretadas como sendo a, H, ρ e P .

A eq. (2.14) pode ser vista como consequência da 1ª lei da termodinâmica se interpretarmos $E = \rho a^3$ como a energia de uma porção de fluido num volume $\mathcal{V} = a^3$ e $dW = Pd\mathcal{V}$ como o trabalho realizado pelo fluido quando se expande por um volume $d\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} d\rho a^3 + 3a^2 da(\rho + P) &= 0, & \text{por (2.14)} \\ d(\rho a^3) &= -Pda^3 \\ dE &= -dW \end{aligned}$$

Isto significa que $dQ = 0$ e a expansão do fluido cósmico pode ser vista como adiabática.

Estas considerações termodinâmicas são válidas com relação a um referencial se expandindo com o fluido cósmico. Para referenciais em movimento, existem algumas formulações alternativas da Termodinâmica relativística. A abordagem clássica deixa as equações da termodinâmica invariantes, como visto em [23], que também discute modificações da termodinâmica usual no contexto da RG. Uma alternativa seria supor que a temperatura T do fluido é invariante por transformações de Lorentz, como visto em [24].

2.4.2 Soluções Particulares e Épocas

A abordagem mais comum para se encontrar soluções particulares das equações de FRW é supor que o fluido é barotrópico, i.e., obedece a uma equação de estado $P = w\rho$. Daí, a equação

(2.14) pode ser explicitamente resolvida

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1+w)\frac{da}{a} \\ \therefore \rho &\propto a^{-3(1+w)}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) na equação de Friedmann (2.12), temos que, no caso $w \neq -1$ e $\Lambda = \kappa = 0$,

$$a(t) \propto t^{2/[3(1+w)]}.\tag{2.16}$$

Os casos particulares fisicamente relevantes da equação de estado são do tipo poeira $w = 0$, correspondendo a um conteúdo de matéria, e do tipo radiação $w = 1/3$. Estes são os valores compatíveis com a mecânica estatística usual de um fluido não-relativístico, no qual $P_m = 0$, e de um fluido relativístico, no qual $P_r = \rho/3$. Daí, temos que as densidades de matéria e radiação vão com $\rho_m \propto a^{-3}$ e $\rho_r \propto a^{-4}$, respectivamente. Note a dependência esperada com o inverso do volume comóvel na matéria. No caso da radiação, a potência inversa maior corresponde ao redshift $1/a$ sofrido pelos fótons, de acordo com a eq. (2.7).

Assim, podemos definir duas *épocas*, isto é, dois períodos cuja densidade dominante é a de matéria ou de radiação. No Universo primordial, acredita-se que tenha sido uma época de *domínio da radiação*. Isto segue devido as altas densidades e temperaturas alcançadas nessa época. Falaremos brevemente sobre a termodinâmica do Universo primordial na próxima seção. Como a densidade da radiação cai com a quarta potência de $a(t)$ e o Universo se expande, a matéria tende a dominar. Vimos na introdução que isto ocorreu quando $\rho^{1/4} \sim 10\text{eV}$, perto do tempo de recombinação. Em suma, temos as seguintes eras, de acordo com (2.15) e (2.16) :

Radiação:	$\rho_r \propto a^{-4}$	$a(t) \propto t^{1/2}$	$H(t) = 1/2t$
Matéria:	$\rho_m \propto a^{-3}$	$a(t) \propto t^{2/3}$	$H(t) = 2/3t$

Analisando a eq. (2.15), vemos que, para $w > -1/3$, $\rho > Ca^{-2}$, onde C é uma constante. Isto implica que podemos desprezar o termo de curvatura em (2.12) no Universo primordial. Assim, $\kappa = 0$ e o Universo é efetivamente plano. Este é o problema da platitude mencionado na introdução.

Por fim, existe um regime exótico $w = -1$ equivalente a um universo dominado por Λ . Este

valor de w está relacionado a um fluido onde $P = -\rho$. uma equação de estado cujo componente é desconhecido pela física padrão. A eq. (2.14) implica em $\rho = \text{cte}$, algo no mínimo estranho para um Universo em expansão como o nosso. Note também que um universo dominado por $\Lambda > 0$ se expande aceleradamente, de acordo com (2.13).

Como vimos no final da subseção 2.4.1, quando o Universo se expande por um volume $d\mathcal{V}$, ele perde uma energia $dE = -Pd\mathcal{V}$. Entretanto, para manter ρ constante, o fluido deve ganhar uma energia $dE = \rho d\mathcal{V}$. Portanto, podemos interpretar esta expansão como se o fluido estivesse conectado a um reservatório térmico disponibilizando energia ilimitada para a expansão. A grande questão em torno de Λ é: de onde vem essa energia?

Em suma, um universo preenchido com um fluido com $w = -1$ equivale a um universo dominado pela constante cosmológica Λ . Este universo se expande aceleradamente com o fator de escala crescendo de forma exponencial

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t} \quad (2.17)$$

e a métrica neste período corresponde a do espaço de *de Sitter*

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\sqrt{\Lambda/3}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.18)$$

Esta métrica é o protótipo ideal de um espaço-tempo que infla.

2.4.3 Parâmetros Cosmológicos e Conteúdo de Energia do Universo

Os parâmetros do modelo FRW tais como o parâmetro de Hubble H e a constante κ não são simples de serem medidos experimentalmente. Um dos maiores problemas da cosmologia observacional é encontrar maneiras indiretas de medir estes parâmetros e o conteúdo de matéria do Universo. Eventualmente, é útil reescrever os parâmetros do modelo em termos de outras quantidades observáveis, os chamados *parâmetros cosmológicos*. Por exemplo, uma prática padrão quando se trata de medir tempos e distâncias cosmológicas é procurar escrever os parâmetros relevantes no modelo em termos do redshift z , que é um observável facilmente mensurável. Para mais detalhes sobre parâmetros cosmológicos e sobre como eles são medidos, vide [25].

A topologia do Universo, isto é, o valor de κ , pode ser inferida se reexpressarmos a eq. (2.12) como

$$\Omega_{tot}(a) - 1 = \frac{\kappa}{a^2 H^2}, \quad (2.19)$$

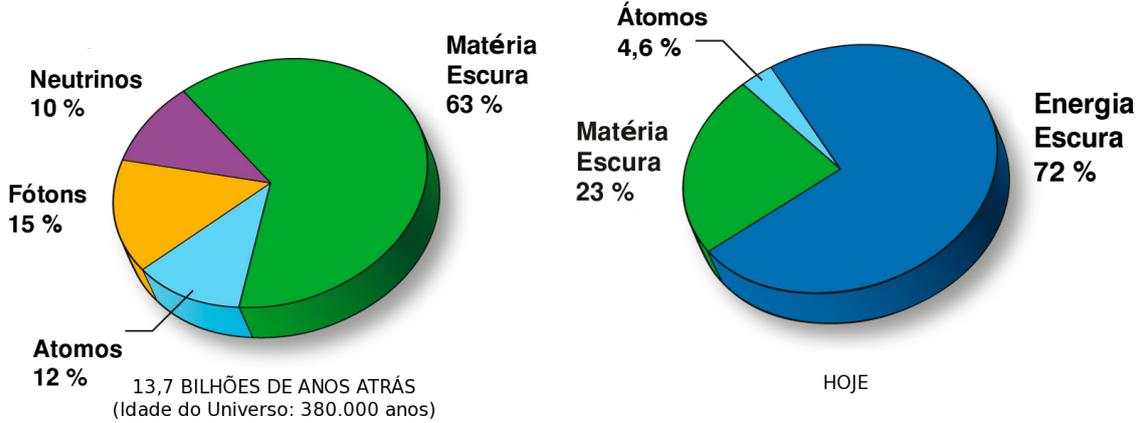


Figura 2.1 Conteúdo de Matéria e Energia do Universo na época da formação da CMB e na época atual. Créditos: NASA/WMAP Science Team.

onde $\Omega_{tot}(a) = (\rho/\rho_c)(a)$ é o parâmetro de densidade cosmológica e $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ é a densidade crítica tal que $\kappa = 0$ e o Universo é plano. Note a dependência do fator de escala em $\Omega_{tot}(a)$ e que estamos considerando Λ como uma contribuição ρ_Λ na eq. de Friedmann. Dessa forma, o conteúdo energético do Universo em função da época pode ser expresso como $\Omega_{tot}(a) = \Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_\Lambda(a)$, correspondendo às densidades de matéria (incluindo matéria escura), radiação e energia escura (possivelmente variando no tempo), respectivamente. A introdução da matéria e energia escuras é necessária para os valores teóricos se aproximarem dos medidos. Por isso, o modelo padrão da cosmologia é muitas vezes chamado de modelo Λ CDM³. Na fig. 2.1, vemos os resultados médios aproximados de 3 anos da sonda WMAP, usando o modelo Λ CDM com $\kappa = 0$, indicando que a energia escura domina o conteúdo de energia do universo atual.

É possível definir um parâmetro de curvatura $\Omega_\kappa(a) \equiv -\kappa/a^2H^2$, apesar do mesmo não se referir a uma fonte de densidade de energia física. Este parâmetro define uma escala, a escala de curvatura $r_c = a|\kappa|^{-1/2}$. É possível verificar que, nos casos $\kappa \neq 0$, a métrica (2.2) tende à métrica plana no limite $r \ll r_c$. Isto é, localmente é sempre possível descrever o Universo como plano.

É útil reexpressarmos (2.19) em termos dos parâmetros de densidade atuais, $\Omega_i \equiv \rho_i^0/\rho_c^0$, tal que $\rho_c^0 = 3H_0^2/8\pi G$:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_i a^{-3(1+w_i)} + \Omega_\kappa a^{-2}, \quad (2.20)$$

³CDM significa *Cold Dark Matter*.

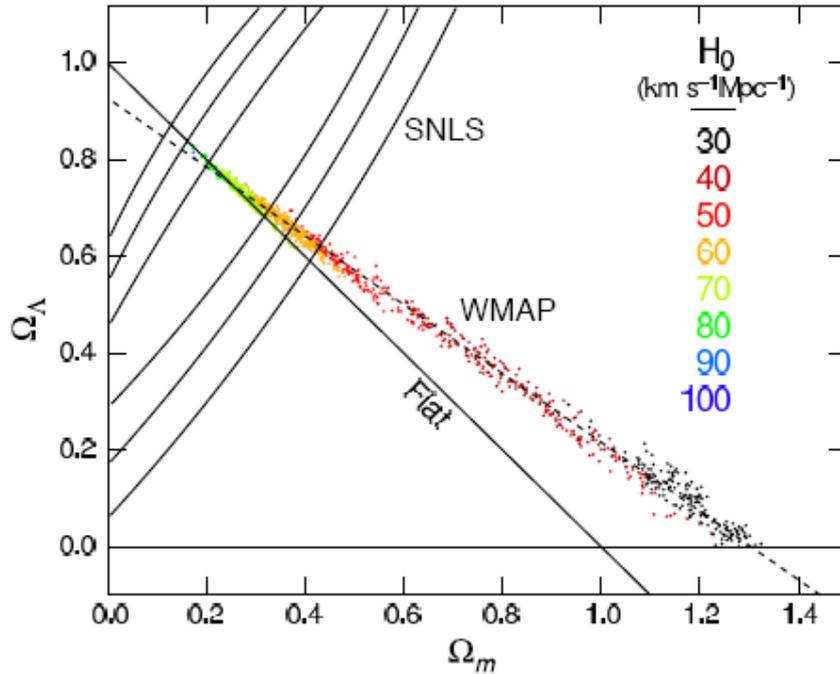


Figura 2.2 Análise de Verossimilhança (*likelihood*) no espaço de parâmetros Ω_Λ vs. Ω_m . Os pontos coloridos derivam do Método Monte-Carlo nos dados do WMAP e, juntamente com os dados de Supernovas (SNLS), favorecem um Universo plano com $\Omega_m \simeq 0.25$. Figura retirada de [20].

onde usamos (2.15). Note que $\sum_i \Omega_i + \Omega_\kappa = 1$ na época atual. De acordo com a fig. 2.1 e 2.2, temos que $\Omega_\kappa \approx 0$ e, dado que $\Omega_m = \Omega_{\text{bárions}} + \Omega_{\text{dark}}$, $\Omega_b \approx 0,046$, $\Omega_d \approx 0,23$ e $\Omega_\Lambda \approx 0,72$.

No status atual da cosmologia, existe frequentemente mais de uma maneira de determinar um parâmetro experimentalmente. Uma consequência disto é a incerteza no valor do parâmetro de Hubble no presente, dado em função do *parâmetro de Hubble reescalado* h :

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

onde as observações sugerem que h esteja entre 0,5 e 0,8. Note que $1\text{Mpc} = 1 \text{ Megaparsec} = 3,26 \times 10^6$ anos-luz. O melhor resultado recente indica que $H_0 = 72\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \pm 10\%$. Para uma descrição dos métodos observacionais usados na medição de H_0 , ver [20]. Daí temos que a idade estimada do Universo e o tamanho do Universo observável são dados por

$$\begin{aligned} H_0^{-1} &= 9,78 h^{-1} \text{ Gyr} \\ &= 2998 h^{-1} \text{ Mpc}. \end{aligned}$$

Outro parâmetro cosmológico importante é o espectro de potência da perturbação de cur-

vatura:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) \left[\frac{k}{k_*} \right]^{n-1}, \quad (2.21)$$

onde n é conhecido como o *índice espectral* e k_* é uma escala escolhida arbitrariamente. Tal parâmetro está definido na seção B.1.2 do apêndice B. O espectro de Harrison-Zel'dovich corresponde ao caso $n = 1$, i.e., com valor constante independente de escala⁴. As observações mostram que o espectro CMB tem $n \approx 1$, sendo um espectro quase livre de escala. Com o tempo, o espectro muda de forma e, no caso CMB, a teoria de perturbações lineares funciona até o presente. No entanto, no caso de flutuações de densidade de matéria, é preciso levar em conta termos não-lineares na evolução gravitacional.

O parâmetro cosmológico capaz de aferir experimentalmente se o universo está se expandindo aceleradamente ou não é o *parâmetro de desaceleração*, q_0 , definido por

$$q_0 = - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \Big|_0 = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_r + \frac{1+3w}{2}\Omega_\Lambda, \quad (2.22)$$

onde a segunda igualdade foi expressa em termos de parâmetros observáveis. Note que só para $w < -1/3$ o último termo à direita pode ser negativo e implicar em $\ddot{a} > 0$. A melhor estimativa da equação de estado para Λ é $w = -0,967^{+0,073}_{-0,072}$, baseado no modelo Λ CDM [20].

Para uma descrição mais abrangente dos parâmetros cosmológicos, ver [25].

2.5 Termodinâmica do Universo Primordial

De acordo com o modelo padrão, o Universo primordial deve ser bem descrito por um período dominado por radiação identificada como um plasma de partículas relativísticas formado por quarks, léptons, bósons de calibre e bósons de Higgs em equilíbrio térmico. É importante ressaltar que tais afirmações só valem num sentido aproximado, mas, apesar de parecerem por demasiado artificiais, elas funcionam e seu sucesso está demonstrado na descrição da CMB e na predição da abundância de elementos leves na natureza. Cabe aqui nesta seção uma justificativa dessas aproximações e a menção de alguns resultados básicos da teoria de gases ideais que definem as quantidades termodinâmicas relevantes do plasma primordial.

Enquanto a questão do domínio da radiação justifica-se pela exposição da seção acima, a afirmação sobre o equilíbrio térmico não parece tão óbvia. Afinal, o Universo se expande numa taxa H e este fato deve influenciar o estabelecimento do equilíbrio das partículas, ou, dito de

⁴*Scale-free spectrum.*

outra forma, o fato da métrica FRW não ser estacionária deve afetar a dinâmica de equilíbrio. Com certeza, o conteúdo de matéria não pode ter evoluído para o estado atual se tivesse se mantido sempre em equilíbrio térmico e deve ter passado por fases fora do equilíbrio. Por outro lado, estima-se que tais fases possam ser desprezadas [20] dado que a taxa de interações Γ_i de partículas de uma espécie i obedeça

$$\Gamma_i > H.$$

Isto significa que deve haver pelo menos uma interação num tempo H^{-1} . Na prática, tal condição serve para sabermos se as partículas em questão devem ser consideradas como componentes do plasma primordial, isto é, em linguagem de física de partículas, se as partículas estão acopladas com o banho térmico. Num procedimento mais preciso de estabelecimento do equilíbrio devemos integrar a equação de Boltzmann e uma descrição de tal tratamento pode ser vista em [26]. Por hora, usemos tal critério para estabelecer alguns resultados interessantes sobre o plasma primordial.

De acordo com a estatística de um gás perfeito relativístico, as expressões para a densidade de energia ρ e pressão P são dadas por

$$\rho = \int E dn_p, \quad (2.23a)$$

$$P = \frac{1}{3} \int \frac{p^2}{E_p} dn_p \quad (2.23b)$$

onde $E_p^2 = p^2 + m^2$ e a densidade de estados é dada por

$$dn_p = \frac{g}{2\pi^2} \frac{1}{\exp[(E_p - \mu)/T] \pm 1} p^2 dp, \quad (2.23c)$$

onde g é o número de graus de liberdade da espécie, μ corresponde ao potencial químico e o \pm corresponde à estatística de Fermi e Bose, respectivamente. Note que a expressão da pressão acima vem da equação $P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle p \frac{dE}{dp} \rangle$ da mecânica estatística usual [27]. Assim, a densidade de espécies é $n = \int dn_p$ e a densidade de entropia é dada por

$$s = \frac{\rho + P - \mu n}{T}. \quad (2.24)$$

Note que, no caso não-relativístico $m \gg T$, é possível usar as expressões (2.23) para obter $\rho = mn$ e $P = nT$, implicando em $P = (T/m)\rho$. Logo, $P \ll \rho$ neste limite, confirmando o uso

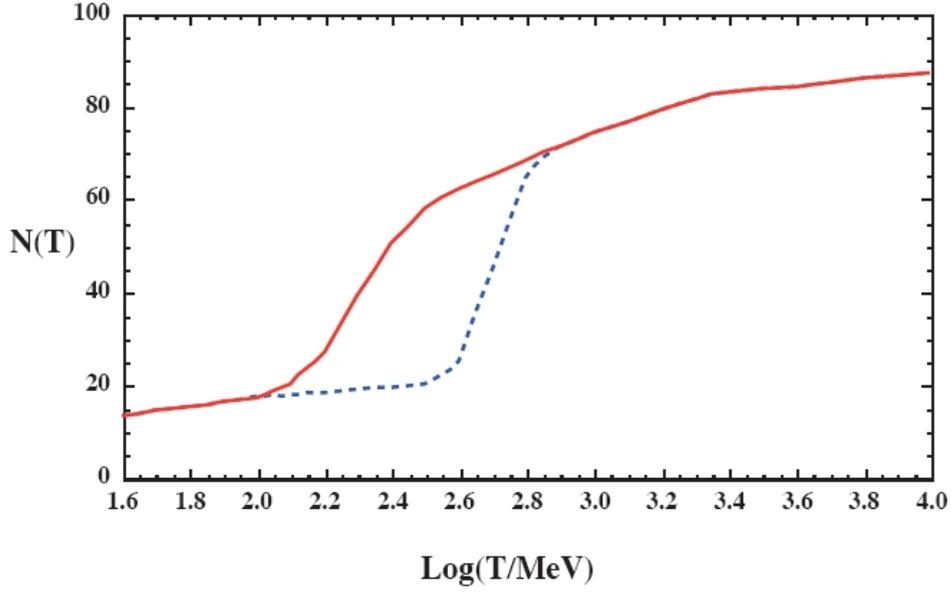


Figura 2.3 O número efetivo de graus de liberdade em função da temperatura. As duas curvas correspondem a diferentes modelos nos quais a energia da transição QCD difere entre 150 e 450 MeV. Retirado de [20].

de $P = 0$ num fluido tipo poeira.

O potencial químico pode ser frequentemente desprezado nos cálculos relacionados ao modelo padrão e, portanto, é razoável tomarmos $T \gg \mu$. As expressões acima podem ser calculadas explicitamente no caso relativístico $T \gg m$. Considerando que a radiação é composta apenas por fótons, usamos a estatística de Bose e $g = 2$ nas equações (2.23) e a eq. (2.24) para obter

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4; \quad P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma; \quad s_\gamma = \frac{4\rho_\gamma}{3T}; \quad n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (2.25)$$

onde $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann. Das expressões acima, temos que $\rho_\gamma \propto T^4 \propto s_\gamma T$, e, então, podemos converter (2.14) em uma equação de conservação da entropia:

$$\frac{d(sa^3)}{dt} = 0. \quad (2.26)$$

Esta equação pode ser vista como consequência da relação $T \propto a^{-1}$ da expansão e resfriamento da radiação.

Agora, note que $\rho \propto n \propto \exp(-m/T)$ no caso não-relativístico, enquanto que $\rho \propto T^4$ no caso relativístico. Portanto, a densidade de energia do fluido primordial pode ser aproximadamente expressa apenas em termos das partículas relativísticas. No limite relativístico referido

acima, a radiação deve ser composta por mais partículas além de fótons, surgidas através da produção de pares partícula-antipartícula, cujas massas obedecem $m \ll T$. Podemos definir um número efetivo de graus de liberdade $N(T)$ da radiação primordial como função da temperatura através da equação

$$\rho = \left(\sum_B g_B + \frac{7}{8} \sum_F g_F \right) \frac{\pi^2}{30} T^4 \equiv \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4, \quad (2.27)$$

onde $g_{B(F)}$ é o número de graus de liberdade de cada espécie bosônica (fermiônica). O fator $7/8$ vem da diferença das integrais estatísticas de Bose e de Fermi. A dependência de $N(T)$ com a temperatura depende do modelo de partículas específico usado (ver fig. 2.3). Por exemplo, numa extensão do modelo padrão na qual haja supersimetria o número efetivo de graus de liberdade deve ser, no mínimo, multiplicado por 2 devido a presença dos superparceiros de cada partícula.

Podemos combinar a expressão (2.27) na eq. (2.14) e, lembrando que $a \propto T^{-1}$, integrar (2.14) para obtermos uma estimativa da idade do Universo em função de T na era de radiação:

$$t = \left(\frac{90}{32\pi^3 G N(T)} \right)^{1/2} T^{-2}, \quad (2.28)$$

ou, expressando T em MeV

$$t = \frac{2.4}{\sqrt{N(T)}} T_{\text{MeV}}^{-2}. \quad (2.29)$$

Estima-se que a abordagem acima de equilíbrio termodinâmico local deve se tornar inválida para temperaturas maiores que 10^{16} GeV, correspondendo a tempos menores que 10^{-38} s, isto é, na época do período inflacionário. Portanto, neste aspecto inflação deve ser um fenômeno de não-equilíbrio.

Vale ressaltar aqui que, à medida que a temperatura vai caindo e com ela a taxa de interação de uma dada espécie i , a situação de equilíbrio deixa de valer para esta espécie e dizemos que ela desacopla do banho térmico. Isto resulta numa diminuição de $N(T)$ e, como a entropia deve permanecer constante, diz-se que a entropia daquelas partículas passaram para o plasma primordial. Por outro lado, as espécies altamente relativísticas, $T_D \gg m$, e altamente não-relativísticas, $T \ll m$, que desacoplam na temperatura T_D com o banho térmico permanecem “congeladas” num estado de equilíbrio, mantendo a mesma distribuição estatística na energia de desacoplamento E_D . Isto ocorre, por exemplo, no caso dos fótons, ou partículas sem massa em

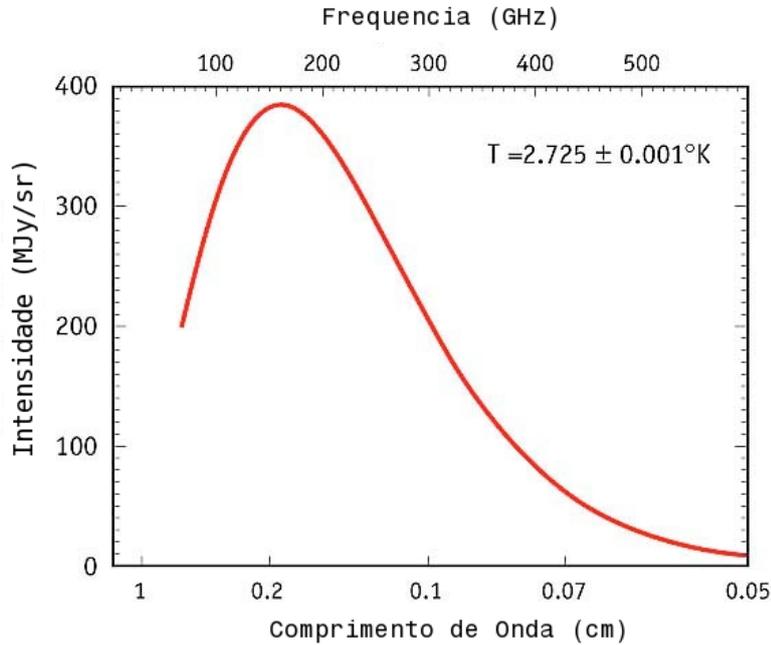


Figura 2.4 O espectro de potências da CMB é praticamente idêntico ao espectro de uma radiação de corpo negro com temperatura $T \approx 2.7\text{K}$.

geral, pois, enquanto a energia sofre um redshift $E \propto a^{-1}$ de acordo com (2.7), a temperatura cai igualmente com $T \propto a^{-1}$, mantendo a razão da distribuição estatística $E/T = a_D E_D / a_D T_D = E_D / T_D$ constante. Dizemos que tal distribuição é *auto-similar* e isto justifica a distribuição de corponegro da radiação CMB com temperatura $T \approx 2.7\text{K}$ nos dias de hoje (ver fig. 2.4).

A interpretação física do modelo FRW decorrente desta seção é a de um gás ideal inicialmente denso e quente, identificado como um plasma relativístico de partículas elementares homogêneo e isotrópico que sofre expansão (ou contração) adiabática. Este plasma vai ficando menos homogêneo a medida que o tempo passa devido à natureza universalmente atrativa da gravidade. Em princípio, o aparecimento das inomogeneidades parece ser contra-intuitiva, pois um gás ideal tende a se homogeneizar com o tempo de acordo com 2ª lei da termodinâmica. Acontece que a taxa de interações Γ das espécies vai diminuindo com o tempo, implicando num posterior fase de domínio gravitacional onde o crescimento das pequenas inomogeneidades passa a ter influência predominante, pelo menos no que concerne à estrutura local do Universo, culminando no surgimento de galáxias e outras estruturas observadas atualmente. Entretanto, o modelo FRW como apresentado acima pressupõe que o Universo começou num estado muito homogêneo, distinto do comportamento assintótico de um gás ideal, trazendo dúvidas para os cosmólogos sobre as condições iniciais do modelo e sua aparente arbitrariedade. Daí surgi-

ram, entre outros, os problemas do horizonte, da platitude e da homogeneidade e isotropia. A solução mais popular para estes problemas está nos chamados modelos inflacionários, apresentada na próxima seção.

2.6 Cosmologia Inflacionária

Como vimos na introdução, o modelo cosmológico padrão parte do pressuposto que o Universo deve ter sofrido um período de expansão acelerada, chamado de inflação, resultado de uma transição de fase do campo inflaton na era de Planck $\rho^{1/4} \sim M_{pl} \sim 10^{19}\text{GeV}$. Nesta seção iremos explicar melhor como a inflação propõe resolver os problemas associados às condições iniciais e como implementar inflação usando o campo inflaton minimamente acoplado com potencial $V(\phi)$. Entretanto, antes de tratarmos das características básicas do cenário inflacionário, vamos dirigir algumas palavras sobre o status epistemológico da teoria inflacionária.

Os modelos inflacionários têm feito sucesso desde a década de 80 até hoje por terem gerado uma rica gama de resultados relacionados com uma suposta solução dos problemas filosóficos das condições iniciais do Universo e, principalmente, por terem explicado os desvios da homogeneidade e isotropia em larga escala. Provavelmente, muito mais importante no caminho de construção e validação de uma teoria são seus resultados teóricos concordarem com os experimentos, trazendo à tona novas indagações e fenômenos a serem explorados. Entretanto, sob esse ponto de vista a inflação não deve ser encarada como uma teoria, mas como, no máximo, uma *prototeoria*, enquanto não existir delineamento claro da física em escalas superplanckianas, isto é, enquanto não houver uma teoria da gravidade quântica validada experimentalmente. Teoria de cordas é, sem dúvida, uma possível teoria da gravidade, pelo menos no sentido perturbativo, e já gerou diversos modelos sobre o início do Universo. Mas a liberdade da teoria (ou teorias) de cordas em determinar parâmetros físicos é tão grande que dificilmente será possível decidir-se sobre estas questões num contexto metafísico. Faltam, evidentemente, vínculos observacionais para truncar a máquina geradora de teorias e modelos na escala de Planck. A não ser que a teoria das teorias mostre-se única e gere um fluxo de renormalização no *ensemble* de arbitrariedade aparente intrínseco a um panorama de 10^{500} vácuos de cordas.

A nosso ver, a inflação consiste apenas em um regime dinâmico possível no modelo FRW cuja origem física ainda é obscura. Existe a suposição da existência de um campo escalar chamado inflaton, acoplado com um potencial arbitrário $V(\phi)$, gerando um período inflacionário em meio às condições iniciais aleatórias no possível *ensemble* de universos pertencen-

centes ao multiverso⁵. De fato, há ainda muita liberdade nas hipóteses dos modelos para se referir a uma teoria inflacionária. Portanto, no que concerne a esta dissertação, a inflação deve ser tratada apenas como um regime dinâmico possível nos chamados modelos ϕ -FRW, de um ou mais campos escalares acoplados com gravidade⁶.

Diante deste terreno altamente especulativo sobre as condições iniciais do Universo, várias tentativas foram feitas para responder a pergunta: quão genéricas são as órbitas inflacionárias? Isto é, dadas condições iniciais arbitrárias no modelo FRW, qual a probabilidade do universo inflar? Por outro lado, será possível inverter a lógica e nos perguntarmos: dadas as condições atuais do universo, qual a probabilidade dele ter inflado?

No decorrer desta seção, iremos apresentar o formalismo e argumentos padrões da chamada cosmologia inflacionária como preparação para os capítulos posteriores na tentativa de elucidar as questões postas acima. Os resultados concernentes à geração das flutuações da CMB estão expostos no apêndice B. No que segue, considere $M_{pl}^2 = (8\pi G)^{-1} = 1$.

2.6.1 Resolvendo os Problemas do Big Bang

Inflação até hoje foi a ideia mais bem sucedida em explicar as anisotropias da CMB e a formação de estruturas em larga escala no Universo primordial. Acontece que resultados experimentais validam um modelo, mas não solidificam uma teoria. No caso da inflação, tal alimento teórico está na suposta solução para os problemas nas condições iniciais do modelo FRW. Não por acaso, foi assim que a inflação surgiu no artigo [2], como uma solução para os problemas do horizonte e platitude, além de procurar resolver o excesso de monopolos magnéticos da teoria SU(5). Agora que já apresentamos o modelo FRW em seus detalhes matemáticos, iremos descrever como estes problemas emergem neste contexto.

I. Problema do Horizonte

Como vimos na fig. 1.3, o problema do horizonte resume-se a como explicar a termalização de regiões distantes que não tiveram tempo de entrar em contato causal desde o Big Bang. A CMB apresenta um aspecto termalizado, algo inesperado dadas condições iniciais arbitrárias para um gás ideal.

O região comóvel em contato causal com um evento em $t = 0$ num universo plano tem raio

⁵Assim é o caso da inflação caótica eterna, bastante mencionado na literatura

⁶Embora nada impeça que tal regime seja gerado por outros tipos de campos tensoriais.

dado pela eq. (2.8):

$$\begin{aligned} x &= \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{\Omega_i^{1/2}(a) a^2} \end{aligned}$$

que, usando (2.15), nos dá

$$x \propto \begin{cases} a & \text{Radiação} \\ a^{1/2} & \text{Matéria} \end{cases}$$

Portanto, a distância causal do Big Bang até a última superfície de espalhamento é $x_{CMB} \sim a(t_{CMB})$, enquanto que a região observada da CMB hoje é de $x_0 \sim 1 - a^{1/2}(t_{CMB}) \approx 1$, dado que $1 \gg a_{t_{CMB}}$. Logo, $x_0 \gg x_{CMB}$ e a região observável hoje é bem maior que a possível região termalizada.

II. Problema da Homogeneidade

Os cosmólogos supõem que o universo primordial era bem mais homogêneo do que hoje baseado nas observações da CMB. As variações de densidade na última superfície de espalhamento são da ordem de 10^{-5} . Por outro lado, como já discutido, a tendência local da gravidade é acumular matéria num ponto, tendendo a uma singularidade dependendo da distribuição de velocidades locais. De fato, este comportamento singular das soluções gravitacionais foi inicialmente descartado por ser considerado anômalo. Entretanto, na década de 60, devido aos teoremas topológicos de Hawking e Penrose, descobriu-se que a formação de singularidades é um comportamento ubíquo nas soluções da RG e o surgimento de singularidades é natural na teoria clássica.

III. Problema da Platitude

O problema da platitude, como já foi dito, é resultado de $\Omega = 1$ ser um ponto fixo instável da equação de Friedmann (2.19), pois o raio de Hubble comóvel $H^{-1}/a \propto t^{1+3w}$ decresce com o tempo dado que $w > -1/3$, isto é, para conteúdos de matéria obedecendo a *condição de energia forte*. Logo, $\Omega \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$. Por outro lado, vimos que o Universo mesmo hoje ainda é quase plano, implicando numa enorme platitude no universo primordial. O fato desta

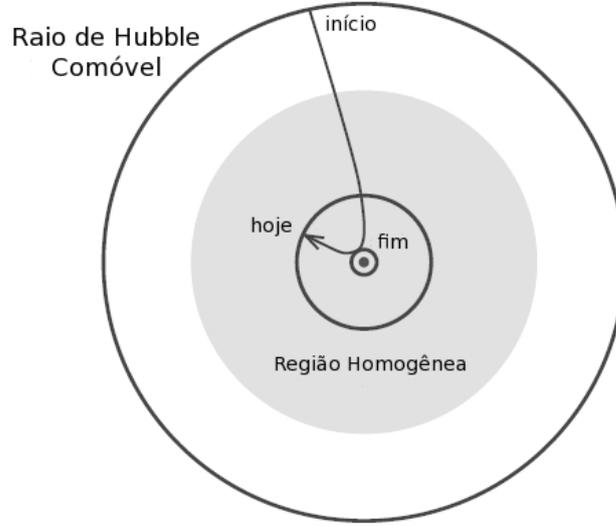


Figura 2.5 A diminuição do horizonte comóvel $(Ha)^{-1}$ mostra como inflação supostamente resolve o problema do horizonte. A região que hoje é vista como homogênea estava fora do horizonte na época da CMB. Entretanto, não existe justificativa clara para a termalização anterior da região homogênea. Figura adaptada de [9].

configuração ser instável em evoluções normais leva os cosmólogos a crerem que tal situação requer um ajuste fino das condições iniciais do universo.

Em suma, os problemas do Big Bang geram uma dificuldade no poder preditivo do modelo cosmológico padrão pelo fato das condições iniciais parecerem ter sido escolhidas por um criador cósmico, já que não são previstas nem no contexto da RG, nem no contexto da física de partículas. Como não é possível estabelecer condições iniciais precisas, os cosmólogos se contentariam com uma explicação termodinâmica das observáveis.

Uma análise crua dos problemas acima indica uma solução simples: fazer com que H^{-1}/a diminua com o tempo em vez de aumentar. Desta forma, o ponto fixo passa de instável para estável e a diminuição do horizonte comóvel permitiria uma homogeneização do universo englobando uma região termalizada antes da inflação. De fato, não é difícil mostrar que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho + 3P < 0} \quad . \quad (2.30)$$

Não por acaso, a eq. (2.30) apresenta *três definições equivalentes para um período acelerado do universo*. Em particular, inflação corresponde ao período de expansão exponencial equivalente ao caso $w = -1$.

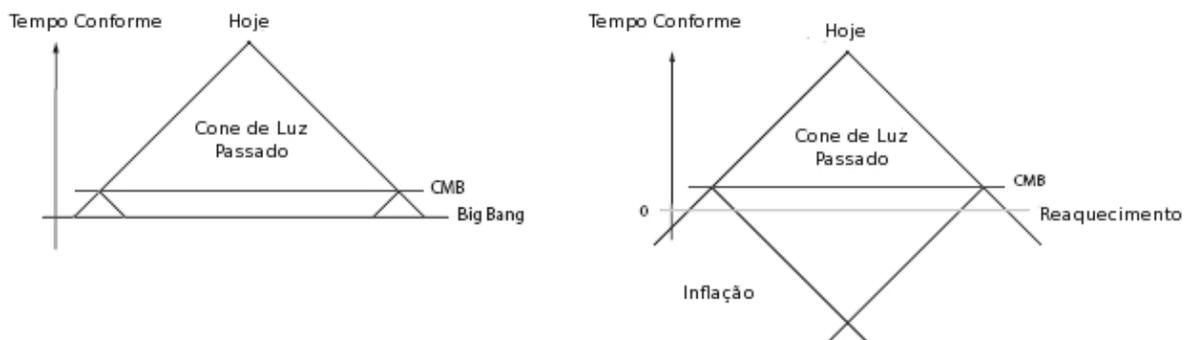


Figura 2.6 Diagramas conformes de um universo com Big Bang, que apresenta singularidade no passado, e de um universo sofrendo inflação, não apresentando singularidade. Adaptado de [28].

Vejamos com mais detalhes como se dá a evolução de escalas no período inflacionário para entendermos melhor a resolução do problema do horizonte. A análise da estrutura causal de um espaço-tempo pode ser simplificada se usarmos o tempo conforme, cuja expressão é idêntica a (2.8). Esta transformação deixa a métrica na forma $d\bar{s}^2 = a^2(t) ds^2$ e, portanto, como toda transformação conforme, deixa raios de luz invariantes. Na fase de de Sitter, H é constante, e, portanto, o tempo conforme é dado por

$$\begin{aligned} \tau &= H^{-1} \int \frac{da}{a^2} \\ &= -\frac{H^{-1}}{a}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

cuja imagem é $-\infty < \tau < 0$, como mostrado na fig. 2.6, sendo que a inflação supostamente termina antes de $a \rightarrow \infty$. Note que o domínio da transformação é $-\infty < t < \infty$, implicando na ausência de singularidade no espaço-tempo em evidente contraste com a solução tipo Big Bang, que apresenta uma singularidade no passado. De fato, de acordo com (2.16), o espaço-tempo apresentará singularidade no passado se $w > -1/3$. Assim, sem a singularidade no passado, há tempo das regiões mais distantes dentro do horizonte observável terem entrado em contato e termalizarem.

Podemos citar pelo menos duas dificuldades com as resoluções dos problemas acima. Primeiramente, a terceira definição de inflação exige a presença de um fluido exótico desconhecido que não obedece a condição de energia forte. No entanto, extensões do modelo padrão de partículas e os campos moduli de teoria de cordas formam um conjunto abundante de possíveis candidatos a inflaton, embora não seja fácil encontrar um bom candidato com as propriedades requeridas. Em segundo lugar, pode-se argumentar que o problema do horizonte é apenas parcialmente

resolvido dado que a questão da termalização da região observável é deixada para o período pré-inflacionário, o universo pode ter começado num tempo qualquer no passado.

2.6.2 Modelo ϕ -FRW

A dinâmica de um campo escalar ϕ minimamente acoplado com gravidade é gerada pela extremização da seguinte ação:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R + \mathcal{L}_\phi \right), \quad (2.32)$$

tal que R é o escalar de curvatura, a métrica tem assinatura $(-+++)$ e

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi), \quad (2.33)$$

é a lagrangiana do campo escalar. Note a escolha do sinal negativo na frente do termo cinético devido à assinatura da métrica.

Usando a definição covariante do tensor energia-momento (ver, por exemplo, [22]),

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{ab}},$$

obtemos

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + V(\phi) \right). \quad (2.34)$$

Devido à homogeneidade da métrica FRW, é razoável supor que $\phi = \phi(t)$. Assim, o tensor energia-momento pode ser reescrito em coordenadas comóveis como

$$T_{\mu\nu} = \dot{\phi}^2 u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right).$$

A eq. (2.10) implica que $T_0^0 = -\rho$ e $T_i^i = P$, e, aplicando isto acima temos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.35)$$

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.36)$$

Por enquanto, não temos uma equação de estado bem definida, pois para cada valor de ρ fixo, a pressão P não está univocamente determinada. Como nosso objetivo é obter $\ddot{a} > 0$, é necessário

que $w = \frac{p}{\rho} < -1/3 \Rightarrow \dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Portanto, inflação ocorre quando o potencial $V(\phi)$ domina a energia cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

As equações de movimento do modelo ϕ -FRW podem ser obtidas extremizando a ação (2.32) com relação à métrica ou, mais facilmente, substituindo (2.35) e (2.36) nas equações (2.12) e (2.14):

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (2.37)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (2.38)$$

onde $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$. Essas são as equações básicas para se tratar inflação. Note que (2.38) é a equação de Klein-Gordon na métrica FRW. A eq. (2.38) equivale a de um oscilador harmônico amortecido pela expansão do universo devido ao parâmetro H no caso $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ou para ϕ próximo de um mínimo do potencial. Os regimes interessantes do modelo podem ser entendidos essencialmente através desta equação. As equações acima podem ser entendidas como três equações ordinárias de 1ª ordem definidas no espaço de condições iniciais $(H, \phi, \dot{\phi})$. Iremos mais a fundo na análise do espaço de fase no cap. 3 em que apresentaremos a medida canônica dos universos.

Uma outra equação interessante para a análise do sistema pode ser obtida derivando-se (2.37) com relação ao tempo e usando (2.38):

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\kappa}{a^2} \quad (2.39)$$

Note que $H(t)$ atinge um máximo quando $\dot{H} = 0$, isto é, no caso plano, quando $\dot{\phi}^2 = 0$ e, portanto, a taxa de expansão é máxima nesse caso. É possível ver também nesta equação que a tendência natural de $H(t)$ é decrescer com o tempo, a não ser no caso acima ou quando $a(t)$ e $\dot{\phi}$ forem pequenos o suficiente. Isto significa que, mesmo com $V(\phi) = 0$, podemos ter um período inflacionário gerado pela alta curvatura do universo.

2.6.3 Aproximação Slow-Roll

Para que haja um período acelerado no universo, como vimos, temos que ter $\dot{\phi}^2 < V$. Entretanto, existe um período acelerado ideal, no qual a taxa de expansão é máxima e $a(t) \propto \exp(Ht)$, o chamado *período de Sitter* ou *inflacionário*, equivalente a uma época dominada pela constante cosmológica. A ideia da *aproximação slow-roll* é se aproximar ao máximo deste período ideal. Então, para gerar o máximo de inflação possível, a energia potencial deve dominar sobre a en-

ergia cinética e o termo inercial do campo deve ser pequeno o suficiente para haver o tempo de inflação necessário:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (2.40a)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_{,\phi}| \quad (2.40b)$$

Definindo os *parâmetros de slow-roll* como

$$\varepsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (2.41a)$$

$$\eta(\phi) \equiv \frac{V_{,\phi\phi}}{V}, \quad (2.41b)$$

pode-se verificar que as condições (2.40) são equivalentes a $\varepsilon, |\eta| \ll 1$. Usando esta aproximação em (2.37) e (2.38), temos que

$$H^2 \approx \frac{1}{3} V(\phi), \quad (2.42)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V_{,\phi}. \quad (2.43)$$

Note que as condições de slow-roll (2.41) são necessárias, mas não suficientes para que (2.40) sejam satisfeitas. Ela restringe a forma do potencial não necessariamente restringindo o valor de $\dot{\phi}$, resultado de reduzirmos a ordem do sistema FRW para 1. Supõe-se que a inflação acaba quando $\varepsilon \approx 1$. As condições de slow-roll podem ser feitas precisas no formalismo de Hamilton-Jacobi da inflação, delineado abaixo.

A conexão entre $\ddot{a} > 0$ e as condições de slow-roll é facilmente entendida se usarmos (2.42) e (2.43) na expressão abaixo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \approx H^2(1 - \varepsilon), \quad (2.44)$$

que é claramente positivo para $\varepsilon \ll 1$.

Naturalmente, para que inflação resolva os problemas do Big Bang, ela deve ocorrer por um período suficiente de modo que o horizonte comóvel adentre a região termalizada. É costume usar o número de *e-foldings* como parâmetro de duração da inflação

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt \approx \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi, \quad (2.45)$$

onde a última expressão decorre da aproximação slow-roll.

2.6.4 Formalismo de Hamilton-Jacobi da Inflação

As condições de slow-roll acima não são exatas e não permitem um ajuste mais preciso das condições para a inflação ocorrer. No artigo [29], os autores apresentam uma maneira de tratar as não-linearidades surgidas no tratamento das perturbações de vários campos e da métrica geradas no período inflacionário. Tal tratamento permite uma definição exata para o fim da inflação. No que segue, apresentaremos o caso mais simples de uma métrica FRW plana acoplada com apenas 1 campo.

A essência do método está em notar que, em vez de descrever a inflação através do potencial $V(\phi)$, podemos obter equações exatas para o parâmetro de Hubble $H(\phi)$, onde o campo ϕ é interpretado como a variável tempo. A relação entre ϕ e o tempo decorre da eq. (2.39), pois, supondo que $\dot{\phi} \neq 0$, podemos dividir a equação por $\dot{\phi}$ e obter

$$\dot{\phi} = -2H_{,\phi} . \quad (2.46)$$

Substituindo este resultado na eq. (2.37), temos uma equação similar a de Hamilton-Jacobi:

$$(H_{,\phi})^2 - \frac{3}{2}H^2 = -\frac{1}{2}V(\phi) . \quad (2.47)$$

Antes tínhamos um sistema com 3 equações de 1ª ordem dependentes de duas variáveis (a, ϕ) que foi agora reduzido para duas equações de 1ª ordem dependentes de ϕ . De fato, em geral, H deve ser uma função de (ϕ, a) ou de (ϕ, t) , mas, como mostra a eq. (2.46), H é função apenas de ϕ no caso plano. Isto significa que, achada a solução $H(\phi)$, podemos integrar (2.46) obtendo $\phi(t)$ e, conseqüentemente, $H(t)$ cuja integração leva a $a(t)$ ou $a(\phi)$. Portanto, a variável dinâmica relevante no caso plano é apenas ϕ e o espaço de fase $(\phi, \dot{\phi})$.

Como inflação é um fenômeno caracterizado principalmente por seu caráter geométrico, impor condições sobre $H(\phi)$ parece ser mais apropriado do que em $V(\phi)$. Os parâmetros de slow-roll de Hamilton-Jacobi podem ser definidos como

$$\epsilon_H \equiv 2 \left(\frac{H_{,\phi}}{H} \right)^2 , \quad (2.48a)$$

$$\eta_H \equiv 2 \frac{H_{,\phi\phi}}{H} . \quad (2.48b)$$

Note que o primeiro parâmetro de slow-roll pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\varepsilon_H &= 2 \left(\frac{H_{,\phi}}{H} \right)^2 = 3 - \frac{V}{H^2} && \text{por (2.47)} \\ &= \frac{\dot{\phi}^2/2}{\dot{\phi}^2/2 + V} && \text{por (2.37)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{P + \rho}{\rho} \\ \varepsilon_H &= \frac{3}{2} (1 + w) .\end{aligned}$$

Como $w < -1/3$ é a condição para haver um período acelerado, podemos dizer *precisamente* que há inflação quando $\varepsilon_H = 0$. Além disso, o segundo parâmetro pode ser escrito na forma

$$2 \frac{H_{,\phi\phi}}{H} = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad \Rightarrow \quad \eta_H = 3 \left(\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right) ,$$

onde a primeira equação segue de (2.46).

Em suma, temos que

$$\begin{aligned}\varepsilon_H &= \frac{\dot{\phi}^2/2}{\dot{\phi}^2/2 + V} , \\ \eta_H &= 3 \left(\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right) ,\end{aligned}$$

e, portanto, $\varepsilon_H, |\eta_H| \rightarrow 0$ é equivalente à condição de slow-roll com ε e η . De fato, é possível mostrar que, na aproximação slow-roll, $\varepsilon_H \rightarrow \varepsilon$ e $\eta_H \rightarrow \eta - \varepsilon$. Por fim, podemos usar $H(\phi)$ no número de e -foldings

$$N(\phi) = -\frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{H}{H_{,\phi}} d\phi . \quad (2.49)$$

onde usamos a relação (2.46).

Generalidade da Inflação e o Problema da Medida

No capítulo anterior, vimos que o cenário inflacionário propõe resolver o problema das condições iniciais do big bang e gerar o espectro de perturbações de densidade do universo primordial¹. Entretanto, o cenário inflacionário não se faz uma teoria devido a ainda presente arbitrariedade em seus modelos. Existe a pretensão do inflaton ser gerado por algum modelo de física de altas energias, mas a questão permanece elusiva. Além dos problemas com sua declarada arbitrariedade, nem todos os cientistas estão convencidos que modelos inflacionários não necessitam de condições especiais. Neste capítulo iremos analisar o grau de generalidade das órbitas inflacionárias no espaço de fase do modelo ϕ -FRW. Revisaremos as principais tentativas de se definir uma medida de probabilidade com relação às condições iniciais do modelo clássico. A ideia é deduzir, dadas condições iniciais iguais *a priori*, qual a probabilidade de termos um universo que infla.

Como vimos na seção 2.6.1, os problemas do big bang são resolvidos através de um mecanismo dinâmico que estabelece as condições iniciais do modelo, mas deixa de lado a sensibilidade das condições da própria inflação, como, por exemplo, na questão da existência prévia de uma região com simetria Robertson-Walker. De fato, esta crítica, entre outras, foram enfatizadas por Wald e Hollands em seu artigo [30]. O principal resultado do artigo foi um simples modelo não-inflacionário, considerado artificial pelos autores, gerando um espectro livre de escala, único resultado realmente válido da inflação, de acordo com os autores.

Outro comentário no artigo foi sobre o disseminado caráter genérico da inflação. De acordo com os autores, não existe motivo forte para se esperar que o estado de equilíbrio do universo seja igual ao de um gás ideal, pois o caráter puramente atrativo da gravidade deve gerar um universo assintoticamente inhomogêneo. Supondo um universo fechado, dado que este se inicie num big bang inflacionário, é difícil imaginar, segundo [30], que o campo escalar suba o potencial novamente num período de “deflação” no big crunch. Portanto, deflação seria ergodicamente pouco provável e, portanto, como a evolução da equação de Einstein é simétrica no tempo, a inflação deveria ter a mesma pequena probabilidade da deflação.

Kofman *et al* [31] produziram uma réplica ao artigo de Wald e Hollands. Na réplica, os au-

¹Ver Apêndice B

tores ressaltaram que inflação é dinamicamente provável devido ao “atrator inflacionário”, que veremos abaixo, e o caráter irreversível da inflação devido ao processo de criação de partículas na época do reaquecimento. Evidentemente, enquanto os modelos inflacionários estiverem atrelados às suas várias possíveis formulações, potenciais e não se condensarem em uma teoria inambígua, será difícil por um fim nessas questões.

Existem duas maneiras correntes de analisar a generalidade de um período inflacionário. A mais discutida na literatura é aquela apresentada na seção 1.3, na qual se considera que inflação pode acontecer em instantes e regiões diferentes do espaçotempo. Tenta-se, portanto, definir uma medida no volume do *multiverso* de possíveis vácuos ou condições iniciais da inflação caótica. Uma via muito menos ambiciosa explorada na literatura, se resumindo a alguns poucos artigos ao longo de cerca de 30 anos, é a análise do multiverso clássico, isto é, o *ensemble* gerado pelas condições iniciais no espaço de fase dos modelos inflacionários. Esta abordagem procura responder, dado que a inflação tenha ocorrido numa escala $\rho \lesssim M_{pl}^4$, qual a probabilidade do universo inflar em sua evolução. Ambas as questões, nos dois multiversos possíveis, são frequentemente referidas como o *problema da medida em cosmologia*.

Possivelmente, a primeira análise do tipo foi feita em 1985 por Belinskii, Grischuk, Zel’dovich e Khalatnikov em [32], na qual os autores concluíram que inflação é algo genérico nos modelos. Papel crucial na análise foi o caráter atrativo das órbitas dos modelos inflacionários, atualmente chamado de atrator inflacionário. Em 1987, motivados por esse artigo, Gibbons, Hawking e Stewart [33] usaram a medida natural induzida pela estrutura simplética do espaço de fase de sistemas hamiltonianos para concluir que inflação realmente seria algo provável classicamente. Revisaremos essa abordagem na seção 3.2. Um ano depois, Hawking e Page [34] publicaram um artigo utilizando a mesma medida para concluir que as probabilidades de inflação e deflação seriam ambíguas por serem divergentes. Recentemente surgiram abordagens renovadas do problema da medida baseados no princípio da indiferença de Laplace ou princípio da informação mínima [35, 36].

Curiosamente, Hawking [37] já havia endereçado a questão da probabilidade de ocorrer inflação num tratamento semiclássico de ϕ -FRW usando a função de onda do universo [38]. No próximo capítulo, apresentaremos a abordagem semiclássica através da equação de Wheeler-DeWitt.

3.1 Atrator Inflacionário

Nesta seção iremos analisar o espaço de fase do modelo ϕ -FRW exposto na seção 2.6.2 com um potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Neste caso, de acordo com (2.35) e (2.36), a densidade e pressão do campo são dadas por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.1)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.2)$$

Podemos dizer que há três regimes possíveis na dinâmica:

- i) $\dot{\phi}^2 \ll m^2\phi^2 \quad \Rightarrow \quad P = -\rho \quad \text{Regime de Sitter}$
- ii) $\dot{\phi}^2 \gg m^2\phi^2 \quad \Rightarrow \quad P = \rho \quad \text{Regime Rígido}$
- iii) $\langle \dot{\phi}^2 \rangle_t \sim \langle m^2\phi^2 \rangle_t \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle_t = 0 \quad \text{Regime tipo Poeira,}$

onde $\langle \cdot \rangle_t$ significa uma média temporal. Estes regimes são essencialmente consequência da equação de movimento do campo ϕ , que é a equação do oscilador harmônico amortecido. As equações de movimento de FRW (2.13) e (2.14) ficam

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{3} \left(\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (3.3)$$

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi} - m^2\phi, \quad (3.4)$$

estão definidas no espaço de condições iniciais $(\phi, \dot{\phi}, H)$ e obedecem ao vínculo hamiltoniano² dado pela equação de Friedmann (2.37)

$$H^2 = \frac{1}{6} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.5)$$

Usando (3.5) em (3.3), temos que

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.6)$$

Esta equação implica que H é uma função monótona nos casos $\kappa = 0, -1$ e, portanto, que as órbitas só cruzam superfícies de H constante uma única vez.

²Para uma explicação mais aprofundada dessa nomenclatura, ver cap. 4.

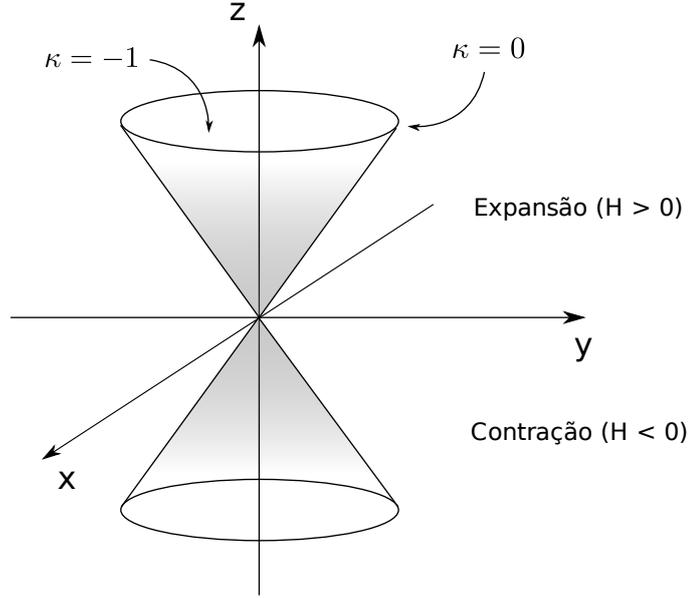


Figura 3.1 Restrições no espaço de fase.

Definindo as variáveis (x, y, z, η)

$$\phi = \sqrt{6}x, \quad \dot{\phi} = \sqrt{6}my, \quad H = mz, \quad t = \frac{\eta}{m}$$

o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x_{\eta} = y, \\ y_{\eta} = -x - 3zy, \\ z_{\eta} = x^2 - 2y^2 - z^2, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $z_{\eta} = a_{\eta}/a$ é o parâmetro de Hubble. Já o vínculo (3.5) torna-se

$$x^2 + y^2 - z^2 = \frac{\kappa}{m^2 a^2}. \quad (3.8)$$

Quando $\kappa = 0$, o vínculo acima define um cone no espaço de fase (ver fig. 3.1) e o movimento limita-se a este cone. Nos casos $\kappa = -1, +1$, é fácil ver que as órbitas permanecem dentro do cone e fora do cone, respectivamente, por (3.8). Note que, nos casos $\kappa = -1, 0$, o sinal de H não pode mudar, correspondendo a universos que sofrem apenas expansão ou contração. Também de acordo com a mesma equação, vemos que a origem do gráfico corresponde a $a(t) \rightarrow \infty$.

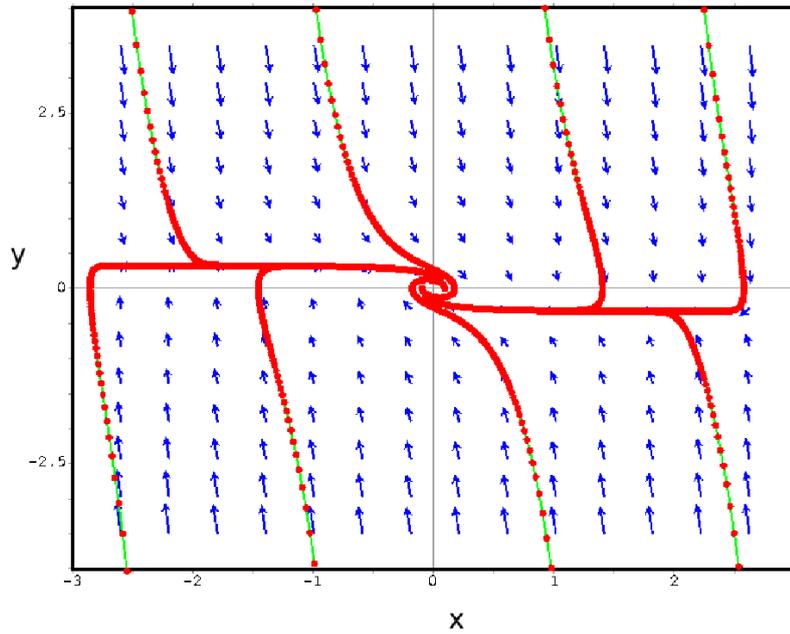


Figura 3.2 Espaço de fase fica reduzido ao plano (x,y) no caso plano. O campo vetorial em azul mostra como as órbitas tendem às assíntotas em $y = \pm 1/3$, nas quais o regime de Sitter acontece. Assintoticamente as órbitas tendem à espiral em torno da origem, passando a um regime tipo poeira.

Para compreendermos o aspecto qualitativo do sistema, vamos nos restringir ao caso plano em expansão, $\kappa = 0$, $H > 0$. Uma análise mais completa desse sistema pode ser encontrada nos artigos originais [32, 39] e no artigo mais recente [40]. Usando o vínculo (3.8), reduzimos a dimensão do sistema (3.7) para dois:

$$\begin{cases} x_\eta = y, \\ y_\eta = -x - 3y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad (3.9)$$

O espaço de fase correspondente ao sistema reduzido encontra-se na fig. 3.2, na qual fica claro o porque do termo atrator. As trajetórias tendem à espiral estável na origem, único ponto fixo do sistema, assintotando as retas $y = \pm 1/3$.

Usando coordenadas polares, o sistema (3.9) fica

$$\begin{cases} r_\eta = -3r^2 \sin^2 \theta \\ \theta_\eta = -1 - 3r \sin \theta \cos \theta, \end{cases} \quad (3.10)$$

mostrando que o centro é realmente estável, pois $r_\eta \leq 0$. No limite assintótico $\eta \rightarrow \infty$, equivalente a $r \rightarrow 0$, temos que $\theta_\eta \approx -1$ e, portanto, $\theta \approx -\eta$. Substituindo na equação para r_η , obtemos a solução assintótica:

$$r \approx \frac{2}{3\eta} \stackrel{(3.8)}{\Rightarrow} z = \frac{a_\eta}{a} = \frac{2}{3\eta} \Rightarrow a \propto \eta^{2/3} ,$$

correspondente a solução tipo poeira, como esperado no regime iii) acima. Fisicamente, este seria o regime final da inflação, a fase de reaquecimento, onde o campo ϕ comporta-se como um oscilador harmônico amortecido.

Vejamos o que acontece no sistema nos dois outros regimes:

i) $y^2 \ll x^2$ (Regime de Sitter)

Neste caso, $z \approx |x|$, e, portanto,

$$\begin{cases} x_\eta = y , \\ y_\eta = -(1 \pm 3y)x \end{cases} \quad (3.11)$$

Nas assíntotas horizontais da fig. 3.2, temos que $y_\eta \ll x$ e, portanto, pela equação acima, $y_* \approx \mp 1/3$. Assim,

$$\phi(t) = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} mt \quad ; \quad H(t) = -\frac{1}{3} m^2 t ,$$

com t começando de $-\infty$.

ii) $y^2 \gg x^2$ (Regime rígido)

Neste caso, $z \approx |y|$, e, portanto,

$$\begin{cases} x_\eta = y , \\ y_\eta = \mp 3y^2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3\eta} \Rightarrow z = \frac{1}{3\eta} \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{1}{3} \ln \eta ,$$

isto é,

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \quad ; \quad H(t) = \frac{1}{3t}$$

com t_0 arbitrário e $t_0 < t < \infty$.

Iremos agora fazer algumas estimativas com relação à solução inflacionária. Sem perda de generalidade, consideremos o caso $x > 0$. Primeiramente, note que $z \approx x$ e (3.11) implicam que

$$\begin{aligned} z &= \frac{a\eta}{a} \approx -\frac{y\eta}{1+3y} \\ \Rightarrow \frac{a(t_f)}{a(t_i)} &\approx \left[\frac{\dot{\phi}(t_i) - \dot{\phi}_*}{\dot{\phi}(t_f) - \dot{\phi}_*} \right]^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por outro lado, dividindo as duas equações em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{y}{y-y_*} dy &= -3x dx \\ -\int \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi} - \dot{\phi}_*} d\dot{\phi} &= m\sqrt{\frac{3}{8}} \phi^2 \\ \Rightarrow (\dot{\phi} - \dot{\phi}_*) e^{-\dot{\phi}/\dot{\phi}_*} &\propto e^{3\phi^2/4} \end{aligned}$$

Como, neste caso, $\dot{\phi} \sim \dot{\phi}_* \Rightarrow e^{-\dot{\phi}/\dot{\phi}_*} \sim 1$, podemos escrever que $(\dot{\phi} - \dot{\phi}_*) \propto e^{3\phi^2/4}$. Substituindo este resultado em (3.12):

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \exp[(\phi_i^2 - \phi_f^2)/4]$$

O período inflacionário termina quando $m^2\phi^2 \sim \dot{\phi}_*^2$, isto é, quando $\phi_f \sim \sqrt{2/3}$. De acordo com [9], para satisfazer as observações costuma-se estimar que a inflação deve durar cerca de 60 e-folds. Logo,

$$\begin{aligned} (\phi_i^2 - \phi_f^2)/4 &\sim 60 \\ \phi_i &\sim 2\sqrt{60}. \end{aligned}$$

Como estamos fazendo $M_{pl} = m_{pl}/\sqrt{8\pi} = 1$ e ϕ tem unidade de massa, temos que

$$\phi_i \sim 2\sqrt{\frac{60}{8\pi}} m_{pl} \Rightarrow \boxed{\phi_i \sim 3m_{pl}}, \quad (3.13)$$

que é, portanto, o raio mínimo para ocorrer inflação³. Este valor nos permite fazer uma estimativa da região no espaço de fase que não infla o suficiente, dado que a inflação se inicie na escala de Planck. De acordo com a fig. 3.3, $\Delta L \sim 6m_{pl}$ e dado que o comprimento da esfera de

³Note que, apesar desta estimativa estar acima da escala de Planck, a energia potencial escala com $m^2 m_{pl}^2$ e, portanto, $m < m_{pl}$ permite uma densidade de energia menor que m_p^4 .

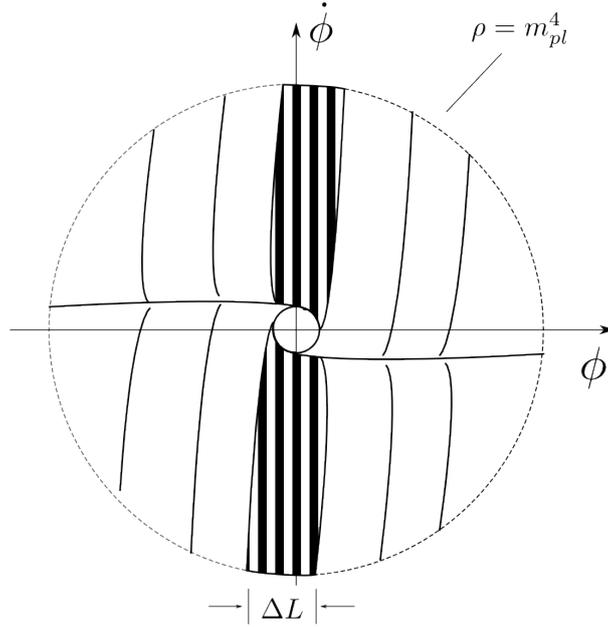


Figura 3.3 Desenho do espaço de fase $(\phi, \dot{\phi})$ truncado na esfera de Planck $\rho \sim m_{pl}^4$. Trajetórias que não inflam o suficiente estão dentro da região hachurada na qual $\phi \lesssim 3m_{pl}$.

Planck é $L \sim 2\pi\phi_{pl} \sim 2\pi m_{pl}^2/m$, podemos estimar a densidade das soluções que não inflam o suficiente se usarmos probabilidades iguais a priori na esfera de Planck:

$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{m}{m_{pl}}. \quad (3.14)$$

A massa do campo escalar pode ser estimada através dos resultados obtidos no apêndice B para flutuações de densidade geradas na inflação. De acordo com a seção B.1.2, $\Delta_S \sim \frac{V^{3/2}}{V_{,\phi}}$. Usando a estimativa do espectro $\Delta_S \sim 10^{-5}$ citada em (B.31), obtemos

$$\left. \frac{V^{3/2}}{V_{,\phi}} \right|_{k=aH} \sim m\phi_H^2 \sim 10^{-5}. \quad (3.15)$$

Cálculos feitos em [4] indicam que, na época da saída do horizonte, $\phi_H \sim 10$ e, portanto, estima-se que $m \sim 10^{-7}$ em escalas naturais, isto é, $m \sim 10^{-7}m_{pl}$. Logo, podemos estimar que

$$\frac{\Delta L}{L} \sim 10^{-7}, \quad (3.16)$$

indicando que a inflação parece ser algo inevitável no modelo em questão.

3.2 Medida Canônica no Espaço de Fase

A discussão do atrator inflacionário acima nos levou à conclusão de que inflação parece ser algo genérico no espaço de fase clássico. Entretanto, a suposição de probabilidades iguais *a priori* na esfera de Planck é algo não muito genérico, pois não existe uma teoria garantindo a escala inicial da inflação ou garantindo a suposição de probabilidades iguais. A abordagem tomada por Gibbons *et al* em [33] procura definir uma medida no espaço de fase de maneira mais formal e precisa para resolver a questão da generalidade das órbitas inflacionárias proposta em [32]. Nesta seção, iremos revisar a medida canônica no espaço de fase e sua aplicação.

3.2.1 Construção da Medida

Sistemas hamiltonianos são sistemas dinâmicos definidos no espaço de fase. Veremos abaixo que o modelo ϕ -FRW pode ser visto como um sistema dinâmico 4-dimensional com um vínculo dado pela eq. (2.37), que pode ser entendido como a energia total do sistema. O que foi mostrado em [33] é que sistemas hamiltonianos têm um elemento de volume natural no espaço de fase definido através das equações de movimento ou, na linguagem de sistemas dinâmicos, definido pela estrutura simplética do espaço de fase. Esse elemento de volume é uma medida da densidade de órbitas na variedade gerada pela dinâmica e pode, portanto, ser interpretado como uma medida de probabilidades iguais *a priori* no espaço de fase. Isto significa que estamos definindo uma medida de informação mínima, isto é, com grau de ignorância máximo, de acordo com o princípio da indiferença de Laplace. Segundo [33], tal medida deve obedecer as seguintes importantes propriedades:

- (i) Ser positivo definida;
- (ii) Independente da escolha da superfície de Cauchy⁴ e das variáveis descrevendo o espaço de fase;
- (iii) Ser construída apenas usando as simetrias do sistema dinâmico, isto é, sem usar suposições *ad hoc* como, por exemplo, cutoffs na escala de Planck.

Vamos construir a medida canônica e mostrar que realmente apresenta tais propriedades.

⁴Superfície apropriada para imposição das condições iniciais

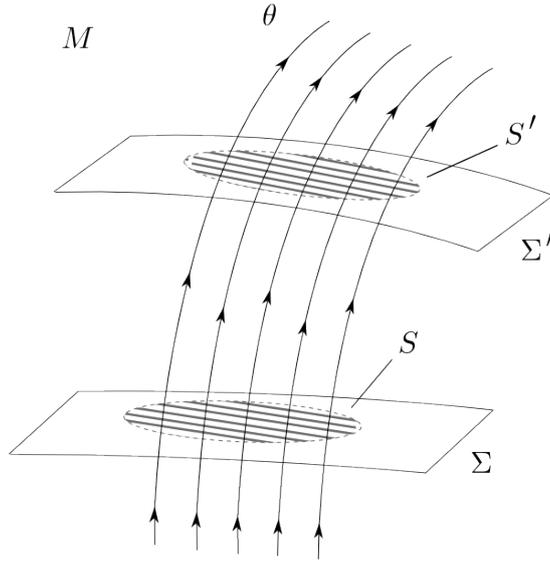


Figura 3.4 Órbitas do campo vetorial V^μ geram uma variedade n -dimensional θ embebida em M . Duas hipersuperfícies, Σ e Σ' , cortam o fluxo gerando duas superfícies, S e S' .

3.2.1.1 Estrutura Simplética e o Espaço de Fase

Dada uma variedade n -dimensional M , considere um sistema dinâmico n -dimensional independente do tempo⁵ em M :

$$\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu(x^1, \dots, x^n) \quad , \quad (\mu = 1, \dots, n) . \quad (3.17)$$

onde $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ são coordenadas locais⁶ em M e $V^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $C^\infty(M)$. Podemos ver a evolução do sistema de duas formas usando uma família de difeomorfismos a um parâmetro $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$; globalmente, se fixarmos um dado $t \in \mathbb{R}$, como um difeomorfismo $\phi_t : M \rightarrow M$, ou, localmente, a partir das órbitas geradas por $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$, resultado da integração de (3.17) para um dado $p \in M$ inicial. Por isso, chamamos o vetor V de *gerador das órbitas* ϕ_t . Além disso, pelo teorema da existência e unicidade das soluções, sabemos que existe apenas uma órbita passando por um dado $p \in M$ e, portanto, cada ponto em M corresponde a uma solução única. Por fim, dado que o sistema dinâmico acima tenha um vínculo algébrico $\mathcal{C} = 0$, a evolução fica limitada a uma variedade $(n-1)$ -dimensional θ , conforme a fig. 3.4.

No caso de interesse do sistema dinâmico (3.17), definimos uma medida $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ numa

⁵Note que todo sistema de EDOs não-autônomo $(n-1)$ -dimensional pode ser convertido num sistema autônomo n -dimensional se escolhermos $x^n \equiv t$.

⁶Note que, mais precisamente, na definição (3.17), deveríamos escrever $x^\mu \equiv (\psi \circ C) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $C : \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma curva suave em M e $\psi : (O \subset M) \rightarrow (U \subset \mathbb{R}^n)$ corresponde a uma carta em M .

hipersuperfície S de θ como

$$\mu(S) = \int_S \omega \quad (3.18)$$

onde ω é uma $(n-2)$ -forma em S . Para que a medida seja independente da superfície S , temos que impor $\mu(S) = \mu(S')$, isto é,

$$\int_S \omega = \int_{S'} \omega. \quad (3.19)$$

Dado que $S' = \phi_t S$, podemos usar o *pullback* ϕ_t^* para obtermos o seguinte resultado⁷:

$$\begin{aligned} \int_{S'} \omega &= \int_{\phi_t S} \omega \\ &= \int_S \phi_t^* \omega \\ \Rightarrow \quad \omega &= \phi_t^* \omega, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde usamos (3.19) na última linha. Por fim, esta última condição é equivalente a

$$\mathcal{L}_V \omega = 0, \quad (3.21)$$

onde \mathcal{L}_V é a *derivada de Lie* de ω com relação ao campo vetorial V gerador das órbitas ϕ_t . Uma p -forma que obedeça uma das três condições equivalentes (3.19), (3.20) ou (3.21) é dita um *invariante integral*.

Uma *estrutura simplética* numa variedade $2n$ -dimensional M^{2n} é definida como uma 2-forma ω^2 que seja *fechada* e *não degenerada*, isto é, respectivamente,

$$d\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad \forall \xi, \exists \eta : \omega(\xi, \eta) \neq 0,$$

onde $\xi, \eta \in T_p M$ e a dupla (M^{2n}, ω^2) forma o que chamamos de *variedade simplética*. Pelo *Teorema de Darboux* [41], é sempre possível achar coordenadas locais (p_i, q^i) numa variedade simplética tal que a estrutura simplética seja dada por

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i. \quad (3.22)$$

Suponha que o sistema dinâmico (3.17) seja hamiltoniano. Isto significa que está definido num espaço de fase $2n$ -dimensional Γ_n , mapeado por n coordenadas generalizadas q^i e por seus n momentos conjugados $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$, onde L é a lagrangiana do sistema. Nos referimos

⁷Note que o pullback, neste caso, equivale a uma mudança de coordenadas em M .

a $2n$ -upla $(p, q) \equiv (p_i, q^i)$ como um ponto em Γ_n . Como o sistema considerado é independente do tempo, a hamiltoniana é naturalmente constante, correspondendo a um vínculo algébrico $H(p, q) = 0$ no sistema dinâmico⁸, restringindo a evolução a uma hipersuperfície θ . A evolução do fluxo hamiltoniano obedece às equações de Hamilton

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (i = 1 \dots n) \quad (3.23)$$

e, portanto, o gerador das curvas integrais no espaço de fase V_H é dado por

$$V_H = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad (3.24)$$

onde passamos a usar a convenção de soma de Einstein. Naturalmente, podemos verificar que a hamiltoniana é conservada ao longo das órbitas tomando a derivada de Lie da mesma

$$\mathcal{L}_{V_H} H(p, q) = V_H(H) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

De acordo com um teorema mostrado em [41], todo *agregado cotangente* $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ possui uma estrutura simplética natural, isto é, construída apenas através da projeção natural $f : T^*M \rightarrow M$. Podemos resumir a demonstração deste teorema com as seguintes considerações: (a) T^*M é $2n$ -dimensional e pode ser mapeado por coordenadas locais (p, q) ; (b) Uma 1-forma em M pode ser escrita nessas coordenadas como $\omega^1 = \sum_i p_i dq^i$; (c) Por fim, a derivada exterior $\omega^2 = d\omega^1 = \sum_i dp_i \wedge dq^i$ nos dá uma estrutura simplética natural em T^*M , da forma (3.22). Como o espaço de fase Γ_n é um agregado cotangente, os teoremas citados acima garantem que existe uma estrutura simplética natural ω_n em Γ_n dada por (3.22).

A estrutura simplética do espaço de fase nos permite definir uma forma-volume em Γ_n como a n -ésima potência de ω_n , isto é, $\Omega_n \propto (\omega_n)^n$, que pode ser feita positivo-definida multiplicando-se por uma constante apropriada dependente de n , satisfazendo, assim, a condição (i) acima. A condição (iii) acima também é satisfeita por essa medida dado que sua construção é natural, isto é, independe de suposições externas ao sistema dinâmico. Assim, resta apenas mostrarmos que Ω_n é um invariante integral, respeitando a condição (ii). Para isso, basta mostrarmos que a estrutura simplética ω_n é um invariante integral, pois, dado um pullback ϕ^* , uma p -forma $\omega \in \Omega^p(M)$ e uma q -forma $\eta \in \Omega^q(M)$, a seguinte propriedade segue da definição de pullback:

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta \quad (3.25)$$

⁸Que, como veremos, corresponde ao caso da RG.

Portanto, se a estrutura simplética ω_n é um invariante integral, então, por (3.20) e (3.25), $(\omega_n)^n$ também o é.

Entretanto, como vimos acima, nós não queremos uma medida em Γ_n , mas, sim, na hipersuperfície de energia constante θ onde ocorre a evolução do sistema hamiltoniano. Para isso, basta aplicarmos o pullback $\phi_1^* : \Omega^p(\Gamma_n) \rightarrow \Omega^p(\theta)$ em ω_n . Na prática, o teorema de Darboux nos garante que podemos mapear Γ_n usando novas coordenadas (P_i, Q^i) tal que $P_n = H(p, q)$ e, por (3.23), $Q^n = t$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sum_{i=1}^{n-1} dP_i \wedge dQ^i + dH \wedge dt \\ &\equiv \omega_{n-1} + dH \wedge dt, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde ω_{n-1} é a estrutura simplética natural no espaço de condições iniciais Γ_{n-1} , isto é, o espaço de fase obtido com a restrição a uma hipersuperfície de t constante em θ . Note que, as coordenadas originais se relacionam com as novas através de uma transformação canônica $(p_i, q^i) \rightarrow (P_i, Q^i)$. Por fim, dado o pullback $\phi_2^* : \Omega^p(\theta) \rightarrow \Omega^p(\Gamma_{n-1})$, segue de (3.26) que $\omega_{n-1} = \phi_2^* \phi_1^* \omega_n$.

É possível mostrar que a restrição $\phi_1^* \omega_n$ é um invariante integral usando a seguinte identidade

$$\mathcal{L}_{V_H}(\phi_1^* \omega_n) = i_{V_H} d(\phi_1^* \omega_n) + di_{V_H}(\phi_1^* \omega_n), \quad (3.27)$$

onde $i_V : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ é a *derivada interior* com relação ao campo V . O primeiro termo é zero pela naturalidade da derivada exterior e por ω_n ser fechada:

$$d(\phi_1^* \omega_n) = \phi_1^* d\omega_n = 0.$$

Já o segundo termo necessita de uma pequena manipulação

$$\begin{aligned} i_{V_H}(\phi_1^* \omega_n) &= i_{V_H} \omega_{n-1} + i_{V_H}(0 \wedge dt) \\ &= \omega_{n-1}(V_H, \cdot) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{Q^i} H dQ_i + \partial_{P_i} H dP^i \\ &= -dH|_{\theta}, \end{aligned}$$

que é claramente zero em θ e, portanto, (3.27) é zero.

Definimos, então, uma 2-forma invariante em θ como $\omega_C \equiv (\omega_n)|_{H=0}$ que, pelas consid-

erações acima, gera um forma volume invariante Ω_θ em θ . Além disso, podemos definir uma forma volume numa hipersuperfície de tempo constante em Γ_{n-1} como $\Omega_{n-1} \propto (\omega_{n-1})^{n-1}$ obedecendo $\mathcal{L}_{V_H}\Omega_M = 0$, resultado equivalente ao *teorema de Liouville* em Γ_{n-1} . Note que, como

$$\omega_C = \omega_{n-1} + 0 \wedge dt ,$$

então, $\Omega_M = \Omega_\theta|_{t=const}$. Portanto, a medida procurada em Γ_{n-1} é a restrição de Ω_θ a uma hipersuperfície de tempo constante.

Podemos interpretar a medida $\mu(S) = \int_S \Omega_\theta$, tal que $S \subset \theta$, como o fluxo de um “campo magnético” $B \equiv \star \Omega_\theta$, onde $\star : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^{n-p}(N)$ denota o *operador dual de Hodge* numa variedade métrica n -dimensional N . Note que, neste caso, $N = \Gamma_n$ e a métrica é o delta de Kronecker δ_{ab} . Além disso, como Γ_n é $2n$ dimensional e Ω_θ uma $2n-1$ forma, B é uma 1-forma em θ . Como Ω_θ é fechada, temos que $d\star B = 0$ e, como consequência direta,

$$\star d\star B = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_a B_a = 0 \quad (3.28)$$

Assim, pelo teorema de Stokes, B é conservado em θ . Além disso, como $dH = \omega_{n-1}(V_H, \cdot) = 0$ em θ , $\Omega_\theta(V_H, \cdot) = \omega_{n-1}(V_H, \cdot) = 0$ e, portanto, $(\star B)(V_H, \cdot) = 0$. Em notação indicial, a última igualdade pode ser escrita como

$$\varepsilon^{ab}_{c\dots ef} B_a (V_H)_b = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{[a} (V_H)_{b]} = 0 \quad \text{ou} \quad B \wedge V_H = 0 ,$$

onde $\varepsilon^{ab}_{c\dots ef}$ é o *tensor de Levi-Civita*. Este resultado implica que B e V_H são paralelos, indicando que podemos entender B como um campo de fluxo das órbitas no espaço de fase.

Por fim, notamos que $\Omega_M = dA$ globalmente, pois, como vimos acima, $\omega_{n-1} = d(p_i dq^i)$ e, portanto, existe uma definição natural para o “potencial vetor” A . Assim, podemos usar o teorema de Stokes para reduzir a dimensão da integral da medida:

$$\mu(S) = \int_S \star B = \int_{\partial S} A , \quad (3.29)$$

que pode ser visto como uma generalização do teorema da circulação do cálculo vetorial.

3.2.2 Aplicação da Medida Canônica no Modelo ϕ -FRW

A RG é uma teoria invariante por difeomorfismos e, em particular, invariante por uma reparametrização da coordenada tempo. A introdução de parâmetros explicitando essa reparametrização está na essência do formalismo ADM da RG, visto em detalhes no cap. 4. Na prática, para

o modelo FRW, esta reparametrização é introduzida na métrica através da *função lapso* $N(t)$:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j . \quad (3.30)$$

Usando esta métrica na ação (2.32) e fazendo o volume espacial comóvel igual a 1, obtemos a lagrangiana

$$L = -\frac{3}{N}a\dot{a}^2 + 3N\kappa a + \frac{1}{2N}a^3\dot{\phi}^2 - Na^3V(\phi) .$$

Assim, os momentos conjugados

$$p_a = -\frac{6}{N}a\dot{a} \quad , \quad p_\phi = \frac{1}{N}a^3\dot{\phi} \quad , \quad (3.31)$$

nos permitem escrever a hamiltoniana do sistema

$$\mathcal{H} = N \left(-\frac{p_a^2}{12a} + \frac{p_\phi^2}{2a^3} + a^3V(\phi) - 3\kappa a \right) . \quad (3.32)$$

Se encararmos N como uma variável do sistema, temos que $p_N = \partial L / \partial \dot{N} = 0$ e, portanto, $\mathcal{H} = 0$, correspondendo ao vínculo algébrico citado acima, equivalente à equação de Friedmann (3.5). A hamiltoniana nula é uma propriedade característica de sistemas hamiltonianos invariantes por difeomorfismos [42, 43], como é o caso da RG. Assim, a função N pode ser vista como um multiplicador de Lagrange na hamiltoniana que é, necessariamente, um vínculo e, portanto, faremos $N = 1$ nas considerações abaixo sem perda de generalidade.

O espaço de fase de (3.32) é (p_a, p_ϕ, a, ϕ) , podendo ser reduzido para apenas 3 variáveis usando o vínculo hamiltoniano. Seguindo [36], escolhemos eliminar p_ϕ em (3.32) :

$$p_\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{6}p_a^2 a^2 - 2a^6 V(\phi) + 6a^4 \kappa} . \quad (3.33)$$

É conveniente trabalhar com as variáveis (H, λ, ϕ) , onde $\lambda \equiv \ln a$, $H = \dot{\lambda}$ e, portanto, $p_\lambda = ap_a = -6He^{3\lambda}$. Nessas variáveis,

$$\begin{aligned} \omega_C &= (dp_\lambda \wedge d\lambda + dp_\phi \wedge d\phi) \Big|_{\mathcal{H}=0} \\ &= e^{3\lambda} \left(-6dH \wedge d\lambda \pm 3 \frac{6H^2 - 2V + 4\kappa e^{-2\lambda}}{\sqrt{6H^2 - 2V + 6\kappa e^{-2\lambda}}} d\lambda \wedge d\phi \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{6H}{\sqrt{6H^2 - 2V + 6\kappa e^{-2\lambda}}} dH \wedge d\phi \right) . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Neste caso, a dimensão do sistema é 4 e, portanto, $n = 2$ e $\Omega_\theta \propto \omega_C$. Consequentemente, Ω_M é a restrição de ω_C a uma superfície de tempo constante. Podemos escolher uma das variáveis (H, λ, ϕ) representando o tempo, dado que a escolha da variável tempo é arbitrária. Esta escolha faz sentido desde que a variável escolhida seja monótona, pelo menos num intervalo bem definido. Isto equivale a contar as órbitas de forma unívoca, isto é, escolher uma superfície na qual as órbitas cruzem uma única vez. Por (3.6), sabemos que, nos casos $\kappa = 0, -1$, as órbitas cruzam superfícies de H constante uma única vez, pois H é uma função monótona. Fazendo $H = H_S = \text{constante}$ em (3.34) e integrando, obtemos a medida no espaço de condições iniciais (λ, ϕ) :

$$\mu(S) = \iint_S 3e^{3\lambda} \frac{6H_S^2 - 2V + 4\kappa e^{-2\lambda}}{\sqrt{6H_S^2 - 2V + 6\kappa e^{-2\lambda}}} d\phi d\lambda . \quad (3.35)$$

Esta integral diverge para $\lambda \rightarrow \infty$ e, portanto, a medida não está bem definida. Semelhante resultado foi obtido por Hawking e Page em [34], onde tentou-se calcular a razão entre órbitas inflacionárias e não-inflacionárias. Os autores notaram que pode-se conseguir um resultado finito nesta razão se calcularmos a integral acima para um dado λ finito e depois tomarmos o limite $\lambda \rightarrow \infty$. Entretanto, sendo ambas as medidas infinitas, a razão entre as órbitas depende de como o limite é tomado, isto é, depende da escolha da superfície de Cauchy e de como a medida é truncada. De fato, em [34], superfícies de Cauchy com ρ constante foram escolhidas como exemplo, assim como no artigo do atrator inflacionário [32], e foi mostrado que a medida das órbitas não-inflacionárias é pequena para $\rho \gg m^2$, isto é, na esfera de Planck, e grande para $\rho \ll m^2$. Este exemplo explicita a ambiguidade envolvida no processo de truncagem de medidas infinitas.

A proposta de Gibbons e Turok em [36] é que soluções com λ grande são fisicamente indistinguíveis por serem planas, de acordo com a equação de Friedmann com H constante. A ideia é impor um limite inferior $\Delta\Omega_\kappa$ no parâmetro de curvatura $\Omega_\kappa = -\kappa/(e^{2\lambda}H_S^2)$, que tende a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$. Isto equivale a limitar a superfície S num valor $\lambda = \lambda_m$ e, assim, podemos usar o potencial vetor $A = p_\lambda d\lambda + p_\phi d\phi$ para simplificar a integral da medida, como feito em (3.29):

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int_{\partial S} A \\ &= \int_{\lambda=\lambda_m} p_\phi d\phi + \int_{\lambda \rightarrow -\infty} p_\phi d\phi + \lim_{\phi \rightarrow \infty} \left[- \int_{-\infty}^{\lambda_m} p_\lambda d\lambda \Big|_{\phi>0} + \int_{-\infty}^{\lambda_m} p_\lambda d\lambda \Big|_{\phi<0} \right] \\ &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} e^{3\lambda_m} \sqrt{6H_S^2 - 2V + 6\kappa e^{-2\lambda_m}} d\phi , \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde o segundo termo da segunda linha se anula pela dependência $e^{3\lambda}$ em p_ϕ e os outros dois termos são idênticos de sinais contrários dado que $V(\phi)$ é par. Este resultado pode ser obtido diretamente se integrarmos (3.35) em λ até o valor limite λ_m . Para contarmos de forma correta o número de órbitas, nos livramos da duplicidade do sinal de p_ϕ multiplicando a medida acima por 2. Assim,

$$\mu(S) = 2 \int a^3 |\dot{\phi}| d\phi \equiv \oint p_\phi d\phi, \quad (3.37)$$

resultado que corresponde ao invariante adiabático do sistema com hamiltoniana

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3(t)} + a^3(t)V(\phi) \quad (3.38)$$

isto é, um campo $\phi(t)$ acoplado com um parâmetro $a(t)$ que evolui lentamente em comparação ao campo. Note que, como pode ser visto na fig. 3.2, no final da inflação $m \gg H$ e o campo entra no período oscilatório. Assim, podemos aproximar $V(\phi)$ por $\frac{1}{2}m^2\phi^2$. De acordo com [36], para $\Delta\Omega_\kappa$ e H_S pequenos o suficiente, a evolução do campo $\phi(t)$ é adiabática e a medida canônica torna-se independente do cutoff. Isto implica que a medida calculada com λ finito no final da inflação é a mesma no limite $\lambda \rightarrow \infty$.

Agora podemos usar estas considerações e calcular a medida de probabilidade de soluções inflacionárias com N e-foldings voltando no tempo. Este seria um exemplo de *approach top-down* na inferência de probabilidades em cosmologia [44]. Primeiramente, contemos todas as soluções na superfície $H = H_S$. Usando (2.46) em (3.37), temos que

$$\mu(S) = \int_{\phi_-}^{\phi_+} 4a^3 \left| \frac{dH}{d\phi} \right| d\phi \quad (3.39)$$

calculada em $H = H_S$. Os limites de integração são dados pela (2.47), isto é, $\phi_\pm = \pm H_S \sqrt{6}/m$. Para calcular a densidade de órbitas inflacionárias, a equação relevante é também a de Hamilton-Jacobi (2.47). Como vimos acima, a solução slow-roll corresponde a $H \approx \sqrt{V/3}$ e, então, é possível resolver (2.47) iterativamente ao redor deste valor, obtendo uma solução exata $H_{SR}(\phi)$ [36], correspondente às separatrizes da fig. 3.2.

O resto do argumento de [36] consiste em calcular o número de soluções com $N = \int dt H$ e-foldings fazendo uma perturbação $H \rightarrow H_{SR} + \delta H$. Esta variação aplicada em (2.47) nos dá

$$\frac{d\delta H}{d\phi} = 3 \frac{H\delta H}{H_{,\phi}}. \quad (3.40)$$

onde desprezamos termos de 2ª ordem. Por outro lado, usando (2.46) com o tempo invertido,

temos que

$$\frac{dN}{d\phi} = 2 \frac{H}{H_{,\phi}}$$

e, portanto,

$$\frac{d\delta H}{d\phi} = \frac{3}{2} \frac{dN}{d\phi} \delta H \quad (3.41)$$

$$\frac{d\delta H}{dN} = \frac{3}{2} \delta H. \quad (3.42)$$

Assim, a perturbação cresce com o número de e-foldings. Se δH for positivo, a solução torna-se rapidamente dominada pela energia cinética e foge da solução slow-roll. Por outro lado, se δH for negativo, a solução tende a cair na espiral perto do centro e também não infla. Logo, de acordo com essa análise, inflação seria um regime frágil entre esses dois comportamentos e não seria muito provável. Explicitamente, a probabilidade de ocorrer N e-foldings é

$$P(N) \approx \frac{\delta H_S}{\mu(S)} \approx \frac{C(N)e^{-3N/2}}{\mu(S)}$$

onde $C(N) \approx (H - \sqrt{V/3})_{SR}$ é uma função que cresce lentamente com N . Portanto, de acordo com [36], N e-foldings de inflação slow-roll seria um regime exponencialmente suprimido classicamente.

De acordo com [31], tal conclusão é dúbia, pois poderíamos ter invertido todo o argumento fazendo $t \rightarrow -t$ e obteríamos justamente a resposta contrária. Os autores de [31] defendem que a segunda lei da termodinâmica seria o fator decisivo para escolher a outra opção, já que os processos de criação de partículas no período inflacionário são irreversíveis. Entendemos que é necessária a discussão de argumentos físicos além desse modelo clássico simplificado, algo que faremos no próximo capítulo.

Equação de Wheeler-DeWitt e Inflação

No capítulo anterior, vimos como construir uma medida de probabilidades no espaço de fase do modelo ϕ -FRW. Entretanto, tal abordagem mostrou-se insuficiente em vista da medida ser infinita. Hawking e Page mostraram que mesmo a razão entre órbitas inflacionárias e não-inflacionárias é ambígua, isto é, a obtenção de um resultado finito varia com a escolha da superfície de Cauchy. Gibbons e Turok propuseram uma resolução do problema supondo um cutoff físico na medida e argumentaram que inflação seria pouco provável com relação a medida canônica. Entretanto, a argumentação não nos parece definitiva. Neste capítulo, iremos propor uma nova medida de probabilidades baseada no cálculo da função de onda do universo, Ψ , através da equação de Wheeler-DeWitt, o equivalente cosmológico da equação de Schrödinger.

4.1 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

O formalismo Hamiltoniano da RG, também chamado de formalismo ADM¹, é o caminho natural para uma quantização canônica da RG. Foi Dirac um dos primeiros a tentar quantizar a RG usando o procedimento canônico [45]. Ele notou os problemas envolvidos em quantizar uma teoria hamiltoniana com vínculos e acabou desenvolvendo um método geral para tratar a questão. Entretanto, o procedimento não fixa o espaço de Hilbert das soluções univocamente, gerando outros problemas teóricos. Bryce DeWitt publicou no final da década de 60 uma série de três artigos [46] propondo soluções para alguns dos problemas envolvidos na quantização canônica da gravidade. A abordagem iniciada por Dirac e desenvolvida por DeWitt não gerou muitos frutos na época devido à enorme dificuldade de se quantizar a RG com os métodos conhecidos de teoria de campos. Foi no primeiro destes artigos que DeWitt introduziu a chamada equação de Wheeler-DeWitt que apresentaremos abaixo. Alguns dos problemas associados à quantização canônica são o problema do ordenamento, a definição do produto escalar no espaço de Hilbert associado e o problema do tempo.

Atualmente, existe uma proposta de quantização inspirada na quantização canônica de

¹Arnowitt-Misner-Wheeler.

Dirac chamada de *Loop Quantum Gravity*, na qual diz-se conseguir resolver os problemas em quantizar a gravidade usando novas variáveis, no caso, as holonomias associadas ao espaço-tempo [47].

Considere uma teoria de campos genérica no espaço de Minkowski dada pela ação

$$S[\Psi] = \int \mathcal{L} d^4x \quad (4.1)$$

onde $S[\Psi]$ é um funcional nos campos tensoriais representados aqui genericamente por $\Psi = \{\phi, \psi_a, \chi_{abc}, \dots\}$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ representa uma lagrangiana² de caráter local. A extensão usual dessa construção adotada em teoria de campos em espaços curvos é simplesmente substituir o espaço plano de Minkowski por uma variedade n -dimensional M e as derivadas parciais por derivadas covariantes ∇_a . Portanto, a ação fica

$$S[\Psi] = \int_M \mathcal{L} e \equiv \int_M \mathcal{L} , \quad (4.2)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \nabla_a \Psi)$ e $e = \sqrt{-g} e$ é o volume invariante definido em (A.2), sendo que, por motivos de praticidade, o fator jacobiano é absorvido na lagrangiana.

A passagem do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano, embora trivial no espaço plano, exige uma certa cautela no espaço curvo, pois, em geral, não existe um vetor de killing tipo tempo em M que induza uma folheação temporal no espaço-tempo. Portanto, só é possível construir uma teoria hamiltoniana em M dado que exista um isomorfismo $\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma_t$, onde Σ_t representa uma família de $(n-1)$ -superfícies tipo espaço embebidas em M . Isto nos permite quebrar a simetria entre espaço e tempo no formalismo lagrangeano e escrever

$$S = \int_{\mathbb{R}} L \quad , \quad L = \int_{\Sigma} \mathcal{L} .$$

Assim, seguimos o procedimento padrão definindo o momento conjugado

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Psi}} ,$$

e, dado que Π é invertível, obtemos a hamiltoniana através da transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L} \quad , \quad H = \int_{\Sigma} \mathcal{H} .$$

Em geral, a função Π não é invertível, podendo ser então encarada como um vínculo [45]. Por

²Mais precisamente, uma densidade de Lagrangiana.

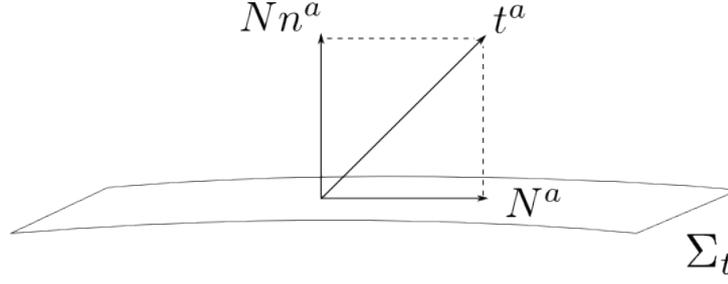


Figura 4.1 Decomposição do vetor t^a com relação às hipersuperfícies Σ_t .

fim, a extremização da ação $\delta S = 0$, que se dá fixando as configurações dos campos com relação a duas hipersuperfícies Σ_t inicial e final, nos dá as equações de Hamilton para os campos

$$\dot{\Psi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi} \quad , \quad (4.3)$$

$$\dot{\Pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Psi} \quad . \quad (4.4)$$

O principal motivo de termos revisado tal construção canônica, além de estabelecer notação, é explicitar a *escolha do tempo* no formalismo hamiltoniano. Em princípio, a escolha do difeomorfismo ϕ é completamente arbitrária no formalismo hamiltoniano, isto é, podemos folhear M da maneira que acharmos mais conveniente. Por outro lado, espera-se que, pelo menos, tal folheação nos dê alguma noção de energia bem definida.

A ação da RG é a chamada *ação de Einstein-Hilbert*

$$S_G = \int_M \sqrt{-g} R \quad , \quad (4.5)$$

onde R é o escalar de curvatura ou escalar de Ricci. As equações de Einstein são obtidas extremizando a ação com relação à métrica g_{ab} .

Para podermos formular a RG em termos de uma hamiltoniana, precisamos escolher o difeomorfismo ϕ que diz como se dá a evolução temporal do sistema. Isto é equivalente a escolher um campo t^a em M tal que $t^a \nabla_a t = 1$, onde t é a coordenada tempo. Podemos decompor t^a com relação ao campo n^a normal às hipersuperfícies Σ_t :

$$t^a = N n^a + N^a \quad , \quad (4.6)$$

onde $N = -n_a t^a$ é a *função lapso*, $N_a = h_{ab} t^b$ é o *vetor deslocamento* e $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ é a *métrica induzida* em Σ_t . Assim, podemos escrever a métrica em M em termos de coordenadas

locais (t, x^i) como

$$ds^2 = (-N^2 + N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j . \quad (4.7)$$

Portanto, em vez de descrevermos a RG através do par (M, g_{ab}) , estamos usando o conjunto (Σ, h_{ab}, N, N_a) , que, como mostrado em [22], contém a mesma informação que (M, g_{ab}) . Intuitivamente, o que estamos fazendo é observar a evolução temporal de uma hipersuperfície (Σ, h_{ab}) embebida em M . Em termos físicos, a métrica induzida h_{ab} é o campo apropriado para descrever a dinâmica em RG.

Para definirmos o espaço de fase, só nos resta escolher qual quantidade geométrica deve representar o momento canonicamente conjugado a h_{ab} . A quantidade apropriada é a *curvatura extrínseca*³, K_{ab} , dada por

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b . \quad (4.8)$$

A curvatura extrínseca, ao contrário da curvatura intrínseca, que é um invariante local independente da imersão, representa a curvatura de uma superfície quando embebida numa variedade de dimensão maior. Uma possível interpretação geométrica é que K_{ab} codifica a falha do transporte paralelo da normal n^a em Σ , conforme a fig. 4.2. Entretanto, no nosso caso, a interpretação apropriada é que K_{ab} mede a variação temporal de h_{ab} . Isto fica claro se escolhermos um difeomorfismo tal que $N_a = 0$ e $N = 1$, de forma que:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ab}}{\partial t} \equiv \frac{1}{2} \dot{h}_{ab} . \quad (4.9)$$

Usando a métrica espacial h_{ab} e a curvatura extrínseca, é possível reescrever o tensor de Riemann e obter as *relações de Gauss-Codazzi*. A demonstração dessas relações e o que segue abaixo é um pouco extensa e não muito elucidativa, podendo ser encontrada em [22]. Usando coordenadas isotrópicas, isto é, tal que $N = 1$ e $N^a = 0$, podemos escrever as relações de Gauss-Codazzi como

$$R_{ijk}{}^0 = D_i K_{jk} - D_j K_{ik} , \quad (4.10)$$

$$R_{ijk}{}^m = {}^3 R_{ijk}{}^m + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m , \quad (4.11)$$

onde $R_{abc}{}^d$ é o tensor de Riemann e D_a é a derivada covariante em Σ . Usando estas relações,

³Também conhecida como *segunda forma fundamental* em geometria diferencial de superfícies no \mathbb{R}^n .

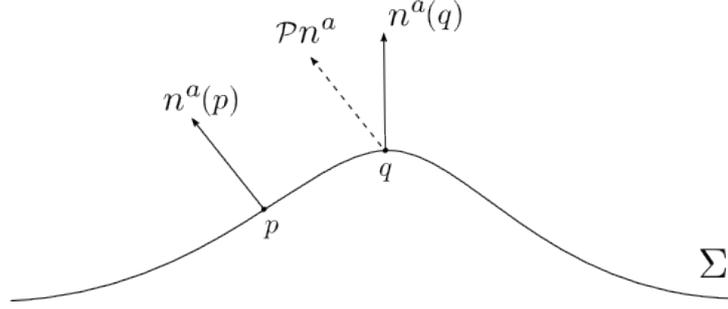


Figura 4.2 Falha do transporte paralelo de $n^a(p)$ até q coincidir com $n^a(q)$

pode-se calcular as seguintes projeções do tensor de Einstein G_{ab} em forma covariante:

$$G_{ab}n^an^b = \frac{1}{2} \left[{}^3R - K_{ab}K^{ab} + K^2 \right] \quad (4.12)$$

$$G_{cd}n^cn^d{}_b = D_aK_b^a - D_bK_a^a. \quad (4.13)$$

É possível verificar que estas equações dependem apenas de primeiras derivadas no tempo [22] e que, portanto, correspondem a vínculos nas equações de Einstein, já que estas últimas são equações de evolução, apresentando derivadas segundas na variável temporal.

Com um pouco mais de manipulação algébrica, os vínculos acima nos permitem reescrever a ação de Einstein-Hilbert na forma

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R = N\sqrt{h} \left[{}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right], \quad (4.14)$$

a menos de um termo de superfície. O momento conjugado a h_{ab} pode finalmente ser obtido a partir de \mathcal{L}_G :

$$\pi^{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} \left(K^{ab} - Kh^{ab} \right) \quad (4.15)$$

Podemos usar este resultado para obter a hamiltoniana, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= \sqrt{h} \left\{ N \left[-{}^3R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 \right] - 2D_a(h^{-1/2}\pi^{ab})N_b \right. \\ &\quad \left. + 2D_a(h^{-1/2}\pi^{ab}N_b) \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde o último termo é um termo de fronteira em $H_G = \int_{\Sigma} \mathcal{H}_G$ e será desprezado no que segue. As equações de Hamilton podem ser diretamente obtidas de \mathcal{H}_G , mas não iremos colocá-las aqui por não serem muito elucidativas. Mais importantes são os vínculos obtidos pela variação

de \mathcal{H}_G com relação a N e N_a :

$$\frac{\delta \mathcal{H}_G}{\delta N} = 0 \quad \Rightarrow \quad -{}^3R + h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} h^{-1} \pi^2 = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}_G}{\delta N_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_a(h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0 \quad , \quad (4.18)$$

onde a primeira equação é o vínculo hamiltoniano e a segunda é o vínculo no momento. Estas equações são a manifestação hamiltoniana da invariância por difeomorfismos da teoria.

Vamos agora especializar o formalismo ADM para o caso homogêneo e isotrópico do modelo ϕ -FRW. Neste caso, a métrica (4.7) reduz-se a

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (4.19)$$

pois $N_a = 0$ e $h_{ij} = a^2(t) \gamma_{ij}$, onde γ_{ij} é a métrica da hipersuperfície maximalmente simétrica. Incluindo a hamiltoniana \mathcal{H}_ϕ associada ao campo ϕ em (4.16), obtemos a hamiltoniana⁴

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} N \sqrt{h} \left[{}^3R - 4h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} + 2h^{-1} \pi^2 \right] + N \sqrt{h} \mathcal{H}_\phi \quad , \quad (4.20)$$

onde

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{2} h^{-1} p_\phi^2 + V(\phi) \quad . \quad (4.21)$$

A curvatura extrínseca é dada por

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} \dot{h}_{ab} \\ &= \frac{1}{N} a \dot{a} \gamma_{ab} \\ &= \frac{1}{N} \theta h_{ab} \quad , \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\theta \equiv \dot{a}/a$ é fator de expansão da métrica. Substituindo em (4.15), obtemos o momento conjugado

$$\pi^{ab} = -\frac{2}{N} \theta \sqrt{h} h^{ab} \quad . \quad (4.23)$$

Note que Π_{ab} corresponde apenas a contração ou distensão da métrica h_{ab} .

É interessante para o tratamento quântico da próxima seção reescrever o vínculo hamiltoniano como a equação de Hamilton-Jacobi da RG, obtida através da substituição dos momentos por derivadas da função principal de Hamilton $S[h_{ab}, \phi]$. Vamos escolher usar como variável

⁴Note que o acoplamento entre gravidade e matéria se dá via $S = \int \frac{m_p^2}{16\pi} \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi$.

de configuração o volume espacial, \sqrt{h} , ao invés de h_{ab} . Esta escolha é fisicamente justificada, pois a isotropia da métrica FRW permite codificar os graus de liberdade de h_{ab} apenas no volume associado à h_{ab} . Dito de outra forma, a eq. (4.8) sugere que a evolução gravitacional apenas expande ou contrai o volume comóvel por um fator \sqrt{h} , sendo esta a dinâmica efetiva de h_{ab} . No que segue, faremos $N = 1$, o que equivale a uma reparametrização do tempo tal que $d\tau/dt = N$.

Pela regra da cadeia, escrevemos

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ab}} = \frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}} \frac{\delta \sqrt{h}}{\delta h_{ab}}. \quad (4.24)$$

Usando a identidade

$$\delta \sqrt{h} = \frac{1}{2} \sqrt{h} h^{ab} \delta h_{ab} \quad (4.25)$$

em (4.24), obtemos

$$\pi^{ab} = \frac{\delta S}{\delta h_{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{h} h^{ab} \frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}}, \quad (4.26)$$

e, tirando o traço,

$$\pi = h_{ab} \pi^{ab} = \frac{3}{2} \sqrt{h} \frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}}. \quad (4.27)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \pi^{ab} \pi_{ab} &= \frac{3}{4} h \left(\frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}} \right)^2, \\ \pi^2 &= \frac{9}{4} h \left(\frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}} \right)^2, \end{aligned}$$

e o vínculo hamiltoniano fica

$$\frac{3}{4} \left(\frac{\delta S}{\delta \sqrt{h}} \right)^2 - \frac{1}{2} h^{-1} \left(\frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} [{}^3R - 2V(\phi)] = 0, \quad (4.28)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi do modelo ϕ -FRW.

A proposta de Wheeler-DeWitt para quantizar a RG é usar a regra de correspondência canônica no vínculo hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$ e obter uma equação diferencial responsável pela descrição quântica do sistema, a chamada equação de Wheeler-DeWitt. Faremos isso na próxima seção.

4.2 Quantização Canônica e a Equação de Wheeler-DeWitt

Quando DeWitt escreveu seu trabalho [46] em 1967, um dos seus intuits era descrever a variedade infinito-dimensional \mathcal{M} correspondente a todas as configurações possíveis da métrica espacial h_{ij} , que, como vimos, denota os graus de liberdade da gravitação no formalismo ADM. Esta variedade \mathcal{M} é costumeiramente chamada de *superespaço* e sua “métrica” associada, G_{ijkl} , de *supermétrica*. Wheeler sugeriu a DeWitt que a equação referente à evolução quântica seria obtida usando a regra de correspondência

$$\pi^{ij} = -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \quad (4.29)$$

no vínculo $\mathcal{H}_G = 0$, obtendo

$$\left[G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + {}^3R\sqrt{h} \right] \Psi[h_{ij}] = 0, \quad (4.30)$$

onde $\Psi[h_{ij}]$ é chamada de função de onda⁵ do universo e a supermétrica é dada por

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{1/2} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \quad (4.31)$$

A eq. (4.30) é conhecida como *equação de Wheeler-DeWitt* (WDW).

A equação de WDW é uma equação diferencial funcional hiperbólica de segunda ordem definida no espaço de configurações \mathcal{M} e, devido à natureza de G_{ijkl} , deve ser resolvida ponto-a-ponto na hipersuperfície Σ . Isto significa que a cada ponto temos uma equação diferencial diferente a ser resolvida. Tal tarefa é extraordinária dentro dos limites atuais da análise de equações diferenciais funcionais, mas, por outro lado, o modelo ϕ -FRW apresenta simetria suficiente para reduzir o número de graus de liberdade a dois, \sqrt{h} e ϕ , ambos funções apenas de t , de forma que a equação de WDW passa a ser tratável. Dizemos, assim, que a eq. (4.30) está definida no *minisuperespaço*, nomenclatura convencional da área de cosmologia quântica.

A equação (4.30) pode ser vista como um operador que projeta funções quadrado integráveis $L^2(\mathbb{R})$ genéricas no subespaço \mathcal{S} de soluções de (4.30), assim como toda equação dinâmica na física. Para definirmos um espaço de Hilbert \mathcal{H} em \mathcal{S} , precisamos de um produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ bem definido. Não existe um procedimento genérico para isso e este é chamado de o *problema do espaço de Hilbert*. De fato, tal tarefa não é simples, pois, além das propriedades naturais, o produto interno precisa ser conservado no tempo para que haja

⁵Mais precisamente, funcional de onda.

uma descrição probabilística bem definida no espaço de fase, assim como na mecânica quântica. Para isso, é necessária uma noção global de tempo, algo não disponível genericamente na teoria covariante da RG. Logo, a definição do espaço de Hilbert está associada ao famoso *problema do tempo* da cosmologia quântica, pois é necessária uma noção de tempo *a priori* para impor conservação temporal. Outra maneira de notar o problema do tempo é perceber que não podemos usar a hamiltoniana \mathcal{H} para expressar evolução temporal no sentido de mecânica quântica já que esta é identicamente nula.

DeWitt propôs em seu artigo seminal [46] um produto interno conservado com relação às hipersuperfícies Σ_t , mas que, em geral, não é positivo-definido. Atualmente, um ex-aluno do Bryce DeWitt, agora professor de Matemática na Turquia, Ali Mostafazadeh, trabalha com a teoria de operadores *pseudo-hermitianos*, e já propôs algumas possíveis definições unitariamente equivalentes de um produto interno em \mathcal{H} [48], algo ainda a ser investigado pelo presente autor.

Alguns outros problemas envolvidos com a quantização canônica da RG são o *problema das observáveis*, que consiste na dificuldade em se dizer quais as variáveis físicas observáveis do problema descrevem a dinâmica quântica, e o *problema do ordenamento* na equação de WDW, já que a prescrição (4.29) não define univocamente a forma da equação de WDW (4.30).

4.2.1 Cosmologia Quântica. Interpretação e Probabilidades.

A pergunta fundamental da cosmologia quântica é a seguinte: qual a interpretação física da função de onda do universo? Tal questão gerou debates acirrados na comunidade com relação a utilidade e interpretação desse conceito. Assim como na Mecânica Quântica (MQ) usual, não há consenso com relação ao caráter físico da função de onda e boa parte dos físicos se sente incomodada com a interpretação ortodoxa da MQ, apesar de sua evidente aplicabilidade.

Assim como em MQ, espera-se que a função de onda do universo esteja associada à probabilidade de se observar um determinado universo. Entretanto, existem questões ainda mais incômodas no caso da cosmologia quântica, como, por exemplo, o fato do nosso Universo ser considerado o sistema fechado por excelência. Relacionado a isto, aparentemente não é possível observar outros universos. Em MQ, é comum usar a noção de probabilidade frequentista como uma maneira prática de compreender o caráter não determinista das medições em sistemas quânticos. A manifestação probabilística se dá por meio de um ensemble físico de experimentos, isto é, usa-se a função de onda para se calcular médias de observáveis numa sequência de experimentos com condições idênticas. Mas, como já notamos acima, não dispomos de um ensemble de universos no sentido dessa interpretação.

Dadas essas considerações, parece ser inevitável tomar uma postura Bayesiana no caso da Cosmologia Quântica. Isto significa que devemos partir de certas probabilidades *a priori*, o que quer que signifiquem tais probabilidades, e usar o chamado *princípio da indiferença de Laplace*, também conhecido como princípio da máxima ignorância ou informação mínima [36]. Essa postura de um mínimo de informação é equivalente a supor probabilidades iguais *a priori*. A partir daí, se desejável, podemos impor novas condições baseados em inferências experimentais. Uma possível crítica a tal postura seria que esta interpretação é subjetiva ou antrópica. Geralmente, o que se supõe é que estamos inferindo a probabilidade de *qualquer sistema físico* medir um certo valor observável. O que chamamos de medida é simplesmente a interação do sistema com outro sistema físico, como, por exemplo, um elétron interagindo com os fótons vindos da CMB.

De acordo com a discussão em [36], chamamos de $P(U)$ a probabilidade *a priori* de se estar num universo U e $P(\mathcal{O})$ a probabilidade de se fazer uma observação \mathcal{O} em qualquer universo U . A probabilidade condicional $P(\mathcal{O}|U)$ de se estar em U e observar \mathcal{O} é chamada de *likelihood*⁶ e a probabilidade $P(U|\mathcal{O})$ de, dada uma observação \mathcal{O} , se estar num universo U é chamada de probabilidade *a posteriori*. Por fim, a probabilidade de se estar num universo U e observar \mathcal{O} é $P(U \cup \mathcal{O})$.

É um resultado básico da teoria da probabilidades a seguinte identidade

$$P(U \cup \mathcal{O}) = P(U|\mathcal{O})P(\mathcal{O}) = P(\mathcal{O}|U)P(U) \quad (4.32)$$

e, portanto, podemos calcular probabilidades *a posteriori* a partir de *likelihoods* através da fórmula

$$P(U|\mathcal{O}) = \frac{P(\mathcal{O}|U)P(U)}{P(\mathcal{O})} = \frac{P(\mathcal{O}|U)P(U)}{\int_M P(\mathcal{O}|U)P(U)dU} \quad (4.33)$$

onde a integral é definida sobre o multiverso M . Note que o denominador segue da normalização da probabilidade $P(U|\mathcal{O})$. No caso da cosmologia, o que determina o universo U são os parâmetros cosmológicos comentados na seção 2.4.3. Na figura 2.2, temos um exemplo do uso de uma distribuição *likelihood* na qual o observável é o parâmetro de Hubble H_0 .

Probabilidades *a priori* $P(U)$ seriam algo definido por uma teoria fundamental da física⁷ e estão intimamente relacionadas ao panorama de vácuos de teoria de cordas mencionado na introdução [17, 18]. Por outro lado, aqueles que advogam o princípio antrópico da cosmologia afirmam que não é possível determinar $P(U)$ e estamos limitados a fazer inferências *a posteriori*

⁶Verossimilhança, confiança.

⁷Existe também a alternativa de se usar *a prioris impróprios*, desde que se deseje tomar uma postura Bayesiana do problema [49].

$P(U|\mathcal{O})$. Este tratamento *top-down* da cosmologia inspirou trabalhos recentes de Gibbons e Turok [36] e de Hawking e Hertog [44].

Em princípio, as análises vistas no cap. 3 resumiram-se a usar dU como a medida canônica no espaço de fase (3.29), supondo $P(U)$ constante, e a inferir a probabilidade de inflação de forma *a posteriori* a partir do valor de H no final da inflação. Nesta abordagem, não nos importamos em explicar de onde vem a inflação, mas, sim, em saber se é provável, dado que é uma plausível explicação para o Universo observável.

4.2.2 Aplicação ao Modelo ϕ -FRW

Agora, iremos aplicar o procedimento de quantização canônica na equação (4.28). Fazendo a mudança de variável $\alpha \equiv \log \sqrt{h}$, usamos a prescrição⁸

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{h} \frac{\partial S}{\partial \sqrt{h}} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad , \quad p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad (4.34)$$

para obter a equação de WDW do modelo ϕ -FRW a partir de (4.28)

$$\left[\frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{2} e^{2\alpha} [2V(\phi) - {}^3R] \right] \Psi(\alpha, \phi) = 0 \quad , \quad (4.35)$$

que, fazendo $\alpha \rightarrow \sqrt{3/2} \alpha$, fica

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + W(\alpha, \phi) \right] \Psi(\alpha, \phi) = 0 \quad , \quad (4.36)$$

onde $W(\alpha, \phi) = e^{\sqrt{6}\alpha} [2V(\phi) - {}^3R(\alpha)]$. Chamemos esta equação de WDW-FRW. No que segue abaixo, supomos um Universo plano, i.e., ${}^3R(\alpha) = 0$ e absorveremos o fator de 2 no potencial $V(\phi)$.

Não existe solução geral conhecida para a equação hiperbólica acima. A transformada de Fourier da equação (4.36) não nos permite achar a função de Green diretamente pois o termo misto $W(\alpha, \phi) \Psi(\alpha, \phi)$ induz uma relação entre diferentes componentes de Fourier via o teorema da convolução. Por outro lado, nosso interesse é achar soluções para algum caso particular de interesse, como o potencial quadrático $V(\phi) = m^2 \phi^2$ ou o potencial exponencial $V(\phi) = \exp(A\alpha)$, onde A é uma constante. O primeiro caso foi resolvido de forma aproximada por Hawking usando a aproximação semiclássica (WKB) e geometrias compactas no formal-

⁸Note que substituímos as derivadas funcionais por derivadas parciais dado que, no modelo ϕ -FRW, α e ϕ não são funções em Σ .

ismo de integral de trajetórias⁹ [37]. O método foi recentemente revisitado em [50] no contexto inflacionário. Entretanto, Hawking usa a interpretação ortodoxa da função de onda e não discute sobre os problemas envolvidos na definição de um produto interno positivo definido. O caso exponencial foi resolvido por Salopek e Bond [29] transformando a equação (4.36) numa equação de Klein-Gordon através de uma mudança de coordenadas apropriada. O procedimento vale para vínculos hamiltonianos particulares que podem ser colocados na forma

$$-p_1^2 + p_2^2 + Ae^{(aq_1+bq_2)} = 0 ,$$

através de uma transformação canônica [51, 52]. Note que ambos os casos dependem da forma do potencial e, portanto, das coordenadas usadas para escrever a equação de WDW-FRW. Uma boa revisão sobre os problemas envolvidos em encontrar soluções particulares e interpretações para a equação de WDW encontra-se em [52].

O método de mudança de coordenadas pode ser visto de uma maneira mais genérica se supormos possível dividir a eq. (4.36) por W , obtendo

$$(\square_W + 1)\psi = 0 , \quad (4.37)$$

onde

$$\begin{aligned} \square_W &\equiv G^{ab} \partial_a \partial_b \\ &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Assim, podemos identificar G^{ab} como a inversa da supermétrica associada ao elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{ab} dx^a dx^b \\ &= W(\alpha, \phi)(d\alpha^2 - d\phi^2) . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto, a solução da equação (4.37) depende apenas de encontrarmos uma mudança de coordenadas que leve a supermétrica (4.39) a uma métrica conhecida, como, por exemplo, a de Minkowski ou a de um pedaço de deSitter. Daí, recaímos numa equação diferencial cuja solução é conhecida. Tentamos obter uma transformação genérica dessa métrica para uma das métricas maximalmente simétricas em 4D, mas, aparentemente, tal transformação não existe,

⁹A proposta envolve uma soma sobre variedades sem fronteira (*No-boundary proposal*). O método se baseia na intuição de Hawking de que variedades com fronteira exigem o conhecimento exato das condições de contorno do universo, algo não acessível a um observador local. Filosoficamente, a ausência de fronteira seria desejável.

exceto no caso particular acima em que $V(\phi)$ é uma exponencial. Isso se deve ao fato dessas métricas serem conformes a Minkowski por um fator $\Omega(x)$ dependendo de apenas uma variável, o tempo conforme, enquanto o fator $W(\alpha, \phi)$ de (4.39) depende genericamente de duas variáveis.

Seria interessante, se possível, estabelecer alguma relação entre WDW-FRW e a equação de Schrödinger. Suponha que possamos tomar $t \equiv \alpha$ como a coordenada temporal intrínseca do sistema. O vínculo hamiltoniano (4.28) pode ser reescrito como

$$-p_\alpha^2 + p_\phi^2 + e^{A\alpha}V(\phi) = (p_\alpha + h)(-p_\alpha + h) = 0 ,$$

onde $h(\alpha) \equiv \sqrt{p_\phi^2 + e^{A\alpha}V(\phi)}$. Daí, podemos supor que a eq. de WDW é equivalente a duas equações de Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \pm \hat{h} \psi , \quad (4.40)$$

dado que seja possível estabelecer um significado preciso ao operador \hat{h} . Por outro lado, se tentarmos obter a equação de WDW-FRW através de uma dessas equações aplicando \hat{h} em (4.40), obtemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \pm i \frac{\partial \hat{h}}{\partial \alpha} \psi + \hat{h}^2 \psi = 0 , \quad (4.41)$$

que é inequivalente a (4.36) devido ao termo $\partial \hat{h} / \partial \alpha$. Portanto, este procedimento só permite uma identificação entre as soluções de WDW e a equação de Schrödinger se h independer da variável escolhida como tempo. Note que isto não é possível, em geral, na eq. de WDW-FRW.

4.3 Medida Quântica para o Modelo ϕ -FRW

Nesta seção, iremos propor uma nova maneira de contar estados em cosmologia quântica baseada em argumentos básicos de mecânica quântica (MQ). Entretanto, veremos que esta maneira não se aplica diretamente a WDW-FRW, pois esta equação não é separável. Usaremos esta exposição para motivar uma possível abordagem covariante do problema. Também serão apresentadas as condições de slow-roll no espaço de fase do modelo ϕ -FRW, com o intuito de serem usadas para contar o número de soluções que inflam na teoria.

4.3.1 Soma de Estados em Mecânica Quântica

Em MQ, o propagador associado a equação de Schrödinger $i\partial_t\psi = \hat{H}\psi$ é dado por

$$\begin{aligned} G(x,y,t,t_0) &= \langle x|e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|y\rangle \\ &= \sum_n H_n^*(x)H_n(y)e^{-iE_n(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde $H_n(x)$ são autofunções do operador hamiltoniano \hat{H} independente do tempo, supondo um espectro discreto sem degenerescências. Fazendo $t_0 = 0$, obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} G(t) &\equiv \int dx dy \delta(x-y) G(x,y,t,0) \\ &= \sum_n \underbrace{\left(\int dx H_n^*(x)H_n(x) \right)}_{=1} e^{-iE_n t} \\ &= \sum_n e^{-iE_n t} \\ &= \sum_n \langle n|e^{-i\hat{H}t}|n\rangle \\ G(t) &= \text{Tr}(e^{-i\hat{H}t}). \end{aligned}$$

É fácil ver que, sob uma transformação de Wick $t \rightarrow -i\beta$, $G(t)$ vai em $Z(\beta)$, onde Z é a função de partição da mecânica estatística quântica, que conta o número de estados do sistema quântico em questão. Isto indica que a função de Green está associada ao número de estados contidos no espectro de \hat{H} . Entretanto, o procedimento acima só vale para equações tipo Schrödinger, a rotação de Wick introduz condições de contorno periódicas na função de onda e, em princípio, $Z(\beta)$ conta estados apenas no limite termodinâmico. Assim, precisamos de um procedimento alternativo para contar todos os estados de um sistema quântico qualquer que esteja relacionado diretamente com a função de Green da equação de Schrödinger associada.

Seguindo a pág. 114 do livro do Sakurai [53], definimos a função $\tilde{G}(E)$ como

$$\begin{aligned} \tilde{G}(E) &= -i \int_0^\infty dt G(t) e^{iEt} \\ &= -i \sum_n \int_0^\infty dt e^{i(E-E_n)t} \\ &= -i \sum_n \delta(E - E_n) \\ &= -i \sum_n \langle n|\delta(E - E_n)|n\rangle. \end{aligned} \quad (4.43)$$

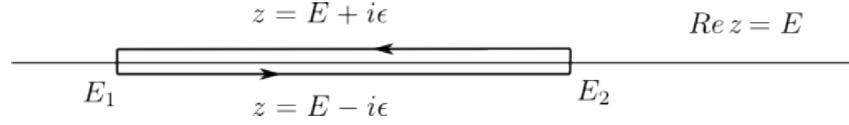


Figura 4.3 Contorno de integração de $\oint_C \tilde{G}(z) dz$.

Note que esta é uma definição formal e a divergência na delta pode ser evitada fazendo uma continuação analítica para o plano complexo através da prescrição $E \rightarrow E + i\varepsilon$. Calculando a integral em t explicitamente, temos que

$$\tilde{G}(E + i\varepsilon) = \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\varepsilon}. \quad (4.44)$$

A função (4.44) pode ser entendida como a densidade de estados com energia $E = E_n$ para um dado n fixo. Se integrarmos em E fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, acertamos os pólos da função $(E - E_n)^{-1}$ e podemos definir formalmente que estamos contando o número N de estados presentes no espectro de H

$$N = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E_1}^{E_2} \text{Im} \tilde{G}(E + i\varepsilon) dE, \quad (4.45)$$

onde $\text{Im} G(E)$ significa que estamos tomando a parte real de G . O fator de $\text{Im} \tilde{G}(E)$ segue do contorno mostrado na fig. 4.3 e da propriedade $\tilde{G}(E - i\varepsilon)^* = \tilde{G}(E + i\varepsilon)$, que segue da definição de $\tilde{G}(E)$. Note que no contorno da figura estamos supondo um espectro finito, isto é, $E_1 < E < E_2$, e que não há polos em E_1 e E_2 .

Este tratamento simplificado pode ser visto em mais detalhes no cap. 2 do livro de teoria de campos em espaços curvos de S. A. Fulling [54] onde o autor expõe a teoria espectral de operadores diferenciais elípticos autoadjuntos. Lá os passos mostrados aqui para um espectro discreto são generalizados usando a chamada *medida de Stieltjes* $d\mu(j)$, definida sob o espectro $\sigma(\hat{H})$ da hamiltoniana, que leva em conta espectros mistos, i.e., contínuos e discretos, e suas degenerescências. O cálculo da densidade de estados para um espectro genérico segue de forma similar ao que deduzimos acima

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\omega, \mu) &= \int d\mu(j) \langle j | \delta(\hat{H} - \omega^2) | j \rangle \\ &= \int d\mu(j) dt \langle j | e^{-i(\hat{H} - \omega^2)t} | j \rangle \\ &= \int dt \left[\int d\mu(j) d\phi H_j(\phi) H_j^*(\phi) e^{-i\omega_j^2 t} \right] e^{i\omega^2 t} \\ &= \int dt G(t) e^{i\omega^2 t}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Portanto, o número de estados no espectro de \hat{H} é dado por

$$N(\mu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma(H)} \text{Im} \mathcal{N}(\omega + i\varepsilon, \mu) d\omega. \quad (4.47)$$

Por outro lado, fazendo a integral de \mathcal{N} sobre t ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\omega, \mu) &= \int d\phi \int d\mu(j) \frac{H_j(\phi) H_j^*(\phi)}{\omega_j^2 - \omega^2} \\ &= i \int d\phi G_\omega(\phi, \phi), \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde $G_\omega(x, y)$ é a função de Green associada à equação $(\hat{H} - \omega^2)u = 0$.

4.3.2 Soma de Estados em WDW-FRW

Podemos agora tentar aplicar a medida (4.47) no problema de interesse. A equação WDW-FRW (4.36) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \hat{K}(\alpha, \phi) \right] \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (4.49)$$

onde

$$\hat{K}(\alpha, \phi) \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V(\phi) e^{A\alpha}. \quad (4.50)$$

é um operador diferencial elíptico autoadjunto. Se não fosse a dependência de H em α , poderíamos fazer a transformada de Fourier da equação acima, obtendo uma equação do tipo $\hat{K}u(\phi) = \omega^2 u(\phi)$, recaíndo num problema similar ao tratado acima, isto é, o caso de uma equação de Schrödinger independente do tempo. Entretanto, como já mencionamos, a transformada de Fourier de (4.49) induz uma equação entre diferentes componentes de Fourier, dificultando a obtenção direta do autovalor ω de \hat{K} . Apesar da inadequação do método, a eq. (4.48) indica que a soma de estados deve estar relacionada com o cálculo da função de Green no mesmo ponto.

Uma definição conveniente para o nosso problema é, em vez de $\hat{K}(\alpha, \phi)$, usar a hamiltoniana relativística $\hat{H} \equiv \partial_\alpha^2 + \hat{K}$ e tentar especializar o procedimento acima para $\hat{H}\psi = 0$, isto é, para o caso de autovalor nulo. A partir daí, não é difícil notar que estamos interessados em calcular a projeção equivalente a (4.46) no caso $\omega = 0$

$$N(\mu) = \int d\mu(j) \langle j | \delta(\hat{H}) | j \rangle. \quad (4.51)$$

Note que neste caso estamos contando todos os estados que são solução de WDW-FRW, pois

$$\delta(\hat{H}) \sim \hat{P} \equiv \int d\tau e^{-i\hat{H}\tau} \quad (4.52)$$

projeta autovetores genéricos em autovetores com autovalor nulo. Em particular, estamos interessados em contar os estados na representação do espaço de configurações (ϕ, α) . Podemos, então, definir autovetores simultâneos dos operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\alpha}$, denotados por $|\phi, \alpha\rangle$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \int d\phi d\alpha \langle \phi, \alpha | \hat{P} | \phi, \alpha \rangle \\ &= \int d\phi d\alpha d\tau \langle \phi, \alpha | e^{-i\hat{H}\tau} | \phi, \alpha \rangle \\ &= \int d\phi d\alpha d\tau G(\phi, \phi, \alpha, \alpha; t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

é o número total de estados $|\phi, \alpha\rangle$ soluções de $\hat{H}|\phi, \alpha\rangle = 0$. Note que $G(\phi, \phi, \alpha, \alpha; t)$ é a função de Green da equação de Schrödinger associada calculada no mesmo ponto. Por outro lado, formalmente temos que

$$\begin{aligned} \int d\phi d\alpha d\tau \langle \phi, \alpha | e^{-i\hat{H}\tau} | \phi, \alpha \rangle &= \int d\tau d\mu(j) H_j(\phi, \alpha) H_j^*(\phi, \alpha) e^{-i\omega_j \tau} \\ &= \int d\mu(j) \frac{1}{\omega_j} H_j(\phi, \alpha) H_j^*(\phi, \alpha) \\ &= G(\phi, \phi, \alpha, \alpha) \end{aligned}$$

onde $G(\phi, \phi', \alpha, \alpha')$ é a função de Green da equação $\hat{H}\psi = 0$. Assim,

$$\mathcal{N} = \int d\phi d\alpha \lim_{\substack{\phi \rightarrow \phi' \\ \alpha \rightarrow \alpha'}} G(\phi, \phi', \alpha, \alpha') \quad (4.54)$$

é a medida que estávamos procurando e o principal resultado desta seção. Em particular, temos que $\mathcal{N} = \dim(\mathcal{H})$, onde \mathcal{H} é o espaço de Hilbert das soluções de WDW-FRW. Apesar do limite coincidente tomado acima ser claramente divergente para o caso de \hat{H} hiperbólico, é possível remover esta divergência através da *regularização* (identificar e explicitar os termos divergentes) e *renormalização* (curar as divergências) da função de Green, algo que será discutido na próxima subseção.

No capítulo 3, vimos que para uma geometria plana ou aberta α , que está relacionada com o volume do Universo, é uma função monótona e, portanto, pode ser encarada como uma

parametrização da evolução dinâmica no período inflacionário. Assim, é interessante restringir a medida a uma hipersuperfície de α constante de forma a contarmos todos os estados do campo ϕ presentes num dado volume do Universo

$$\mathcal{N}(\alpha) = \int d\phi \lim_{\substack{\phi' \rightarrow \phi \\ \alpha' \rightarrow \alpha}} G(\phi, \phi', \alpha, \alpha'). \quad (4.55)$$

Definimos o número de graus de liberdade N de um sistema quântico como sendo

$$N = \ln \mathcal{N} = \ln[\dim(\mathcal{H})], \quad (4.56)$$

de forma que um sistema de n spins tem $\mathcal{N} = 2^n$ estados e $N = n \ln 2 \sim n$ graus liberdade. Vale ressaltar que, se o número de estados $\mathcal{N}(\alpha)$ varia com α , o número de graus de liberdade do sistema também varia e, conseqüentemente, a entropia. Em particular, como o volume do Universo e^α tende a crescer com a evolução, o número de graus de liberdade deve aumentar com e^α . Como vimos no capítulo 2, o período inflacionário é equivalente a um período dominado pela constante cosmológica e , portanto, não deve ser considerado uma evolução adiabática já que neste caso a densidade de energia ρ permanece constante. De fato, esta é a ideia básica da inflação, expandir o Universo tão rapidamente que os graus de liberdade locais não entrem em equilíbrio térmico, de forma que regiões inicialmente homogêneas se expandam e continuem homogêneas.

4.3.3 Comportamento Singular das Funções de Green

Na subseção acima vimos como contar estados de um operador autoadjunto separável a partir do núcleo resolvente do mesmo. Os argumentos apresentados baseiam-se em

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

fato este que, traduzido para operadores elípticos \hat{K} , implica na identidade formal

$$\int_0^\infty e^{-t(\hat{K}-z)} dt = (\hat{K} - z)^{-1}, \quad (4.57)$$

onde $(\hat{K} - z)^{-1}$ pode ser entendido como o operador inverso de $(\hat{K} - z)$ e o seu núcleo naturalmente corresponde à função de Green ou *núcleo resolvente* da equação de autovalores de \hat{K} . Além disso, dado que \hat{H} tenha um espectro limitado inferiormente, o teorema de Cauchy sob

um caminho apropriado¹⁰ nos dá [54]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (\hat{K} - z)^{-1} dz = \mathbf{1} .$$

A projeção deste resultado no espaço das funções integrada na medida de Stieltjes corresponde ao resultado (4.48) acima.

De um certo ponto de vista, o que está sendo feito neste procedimento é relacionar o núcleo $H(t, x, y)$ de $e^{-t\hat{K}}$ com o núcleo resolvente $G_z(x, y)$. De fato, a projeção de (4.57) é dada por

$$G_z(x, y) = \int_0^\infty H(t, x, y) e^{tz} dt , \quad (4.58)$$

onde $H(t, x, y)$ é também chamada de *núcleo de calor*¹¹, pois está associado à equação de calor

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -K(x)H . \quad (4.59)$$

Logo, em princípio, o conhecimento de H determina G_z . É possível usar uma expansão aproximada de H no limite $t \rightarrow 0$ e $x \rightarrow y$ se o núcleo de calor não for conhecido, a chamada *expansão no núcleo de calor*¹²

$$H(t, x, y) \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\sigma(x, y)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) t^n , \quad (4.60)$$

onde $\sigma(x, y) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (x - y)^\mu (x - y)^\nu$ é a metade da distância geodésica e d é a dimensão da variedade. Em particular,

$$H(t, x, x) \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n . \quad (4.61)$$

Este limite é chamado de *limite coincidente*. Existe um teorema garantindo a convergência local da expansão baseado no comportamento regular dos operadores elípticos e do núcleo de calor. Este teorema também indica uma prescrição para calcular os coeficientes $a_n(x)$ da série recursivamente e mostra que estes coeficientes são independentes de coordenadas, dependendo apenas de invariantes de curvatura intrínsecos da variedade. Para mais detalhes e o enunciado do teorema, ver [54].

Por outro lado, nosso problema é diferente, pertencendo à classe dos operadores hiperbólicos. Isto complica a questão de se encontrar as funções de Green deste operadores, pois

¹⁰Tomando o sentido horário.

¹¹Heat kernel.

¹²Heat kernel expansion.

estes apresentam singularidades e podem depender do caráter global da variedade na qual estão definidos. Portanto, a abordagem de uma série aproximada como a descrita acima fatalmente não irá convergir localmente de forma uniforme, minando o procedimento neste caso. Entretanto, é um resultado da teoria assintótica de equações diferenciais parciais lineares que a estrutura singular das funções de Green é univocamente determinada, trabalho seminal do primeiro quarto de século devido a Hadamard [55]. Em vez de se tentar obter uma solução absolutamente convergente, usa-se o procedimento acima para achar uma solução aproximada chamada *parametriz* da forma

$$G \sim G_{\text{singular}} + G_{\text{suave}}$$

na qual a estrutura singular é univocamente definida. O resultado depende de se a dimensão da variedade é par ou ímpar e serve para mostrar a existência e unicidade da função de Green de uma dada classe de equações diferenciais parciais. Note que, em geral, G_{suave} não coincide assintoticamente com a parte suave da função de Green real, dependendo das condições de contorno impostas na função de Green.

O procedimento de Schwinger-DeWitt corresponde a expandir o núcleo da equação obtida via uma rotação de Wick de (4.60)

$$i \frac{\partial H}{\partial s} = K_{(x)} H , \quad (4.62)$$

onde $K_{(x)}$ é um operador hiperbólico. O resolvente segue analogamente a (4.58)

$$G_m(x, y) = i \int_0^\infty H(s, x, y) e^{-im^2 s} ds , \quad (4.63)$$

onde $x = (x_0, \mathbf{x})$ e $y = (y_0, \mathbf{y})$. A substituição da série equivalente a (4.60) em (4.63) nos dá a *série de Hadamard* da função de Green. A identidade anterior pode ser formalmente obtida através do análogo de (4.57)

$$i \int_0^\infty e^{-i(\square + \dots + m^2)s} ds = (\square + \dots + m^2)^{-1} . \quad (4.64)$$

No caso $d = 4$, a série de Hadamard é dada por

$$G(x, y) \sim \frac{U}{\sigma} + V \ln \sigma + W , \quad (4.65)$$

onde U, V e W são funções suaves [54]. A função V apresenta uma expansão

$$V(x, y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, y) \sigma^n ,$$

e W também apresenta uma expansão similar.

Voltando à equação (4.55), vemos que a medida proposta depende da função de Green calculada no mesmo ponto, isto é, do limite coincidente da mesma. No caso $d = 2$, correspondente à WDW-FRW, a série de Hadamard tem uma singularidade logarítmica e, portanto, o limite coincidente não está bem definido. Este mesmo problema é encontrado em Teoria Quântica de Campos quando se necessita calcular funções de dois pontos no mesmo ponto. No caso de espaços curvos, este tipo de divergência é encontrada na definição do valor esperado do Tensor Energia-Momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle(x, x)$. A solução convencional é chamada de *renormalização* do tensor energia-momento e pode ser encontrada através de diversas implementações, sendo que a mais significativa fisicamente é o método de *point-splitting*. Este método consiste em subtrair a parte singular da expansão de Hadamard de forma que o valor esperado seja definido como o limite coincidente da parte suave da expansão. Este procedimento é similar ao ordenamento normal de $T_{\mu\nu}$ no espaço de Minkowski. Sua justificativa física está no fato de que apenas diferenças de energia com relação ao estado de vácuo, ou a um estado apropriado, são mensuráveis. Nossa pretensão futura é delinear com mais precisão os argumentos acima e usar o *point-splitting* para renormalizar a medida (4.55).

4.3.4 Condições de Slow-Roll no Espaço de Fase

Definida a medida do número de estados da teoria, queremos traduzir as condições de slow-roll para o espaço \mathcal{S} de soluções da equação de WDW-FRW. É interessante reescrever as condições de slow-roll

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^2 &\ll V(\phi), \\ |\ddot{\phi}| &\ll |3H\dot{\phi}|,\end{aligned}$$

em termos de $p_a = -6a\dot{a} = -6e^{\sqrt{3}/2}$ e $p_\phi = a^3\dot{\phi}$. A primeira condição fica

$$\left(\frac{p_\phi}{a^3}\right)^2 \ll V(\phi). \quad (4.66)$$

Já a segunda condição, usando que $\dot{p}_\phi = 3Ha^3\dot{\phi} + a^3\ddot{\phi} = 3Hp_\phi + a^3\ddot{\phi}$, temos

$$\begin{aligned}|\dot{p}_\phi - 3Hp_\phi| &\ll |3Hp_\phi| \\ |\dot{p}_\phi| - |3Hp_\phi| &\ll |3Hp_\phi| \\ |\dot{p}_\phi| &\ll |6Hp_\phi|.\end{aligned} \quad (4.67)$$

Por outro lado, $\dot{p}_\phi = -\partial \mathcal{H}_\phi / \partial \phi = -V_{,\phi}$ e $6H = -p_a/a^2$, e, portanto, as condições de slow-roll podem ser escritas como

$$\left(\frac{p_\phi}{a^3}\right)^2 \ll V(\phi) \quad (4.68)$$

$$|V_{,\phi}| \ll \left|\frac{p_a p_\phi}{a^2}\right|. \quad (4.69)$$

Em termos de $\alpha = \sqrt{2/3} \log a^3 = \sqrt{6} \log a$, temos que $\dot{\alpha} = \sqrt{6}(\dot{a}/a) = -p_a/\sqrt{6}a^2$ e, portanto,

$$p_\alpha = \frac{da}{d\alpha} p_a = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{p_a}{a^2} e^{\frac{\sqrt{6}\alpha}{2}}.$$

Logo, substituindo estes resultados em (4.68) e (4.69), concluímos que

$$p_\phi^2 \ll V e^{\sqrt{6}\alpha} \quad (4.70)$$

$$|V_{,\phi}| \ll \sqrt{6} e^{-\frac{\sqrt{6}\alpha}{2}} |p_\alpha p_\phi| \quad (4.71)$$

Podemos usar a equação (4.70) para achar uma aproximação de WDW-FRW no período inflacionário. No procedimento canônico, esta condição se traduz como

$$-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi \ll V e^{\sqrt{3}\alpha} \psi.$$

Isto implica que podemos desprezar a derivada segunda em ϕ na eq. (4.36), obtendo

$$\left[\partial_\alpha^2 + e^{\sqrt{6}\alpha} V(\phi)\right] \psi = 0. \quad (4.72)$$

onde $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}$. Fazendo a transformação $u = e^{\sqrt{6}\alpha/2}$, a eq. acima se reduz a

$$\left[\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{d}{du}\right) + \frac{2}{3} V\right] \psi(u) = 0, \quad (4.73)$$

que é a equação de Bessel de ordem $\nu = 0$ e a solução é dada em termos de funções de Bessel apropriadas às condições de contorno. É possível usar a aproximação WKB nas regiões em que o fator de escala é muito pequeno e muito grande, algo feito em [56] para um universo fechado $\kappa = 1$.

4.4 Princípio Holográfico e o Problema da Medida

Esta última seção consiste na apresentação do princípio holográfico e da implementação do mesmo em nossa proposta de uma medida quântica para o modelo ϕ -FRW. As considerações aqui feitas serão breves dado o caráter heurístico e preliminar da proposta.

Em 1972, Jacob Bekenstein [57] percebeu que se um sistema físico for jogado dentro de um buraco negro, a entropia desse sistema desapareceria do Universo a não ser que se associe uma entropia ao buraco negro. Baseando-se no famoso *teorema da área* demonstrado por Hawking um ano antes [58] de que a área de um buraco negro genérico só pode aumentar, Bekenstein propôs que a entropia do buraco negro deve ser proporcional à área A do horizonte de eventos do mesmo, isto é, $S = \eta A$. O fenômeno semiclássico da radiação Hawking emitida por um buraco negro [59] posteriormente permitiu calcular o fator de proporcionalidade como sendo $\eta = 1/4$ em unidades de Planck. Logo, em unidades convencionais

$$S = k \frac{A}{4l_p^2}, \quad (4.74)$$

onde k é a constante de Boltzmann e $l_p^2 = G\hbar/c^3$ é o quadrado do comprimento de Planck. Assim, Bekenstein propôs a *segunda lei da termodinâmica generalizada*¹³ na qual a soma das entropias do buraco negro e da matéria deve ser sempre positiva. Entretanto, a área de um buraco negro aumenta de acordo com a massa jogada nele, independente da entropia da matéria do sistema, isto é,

$$\Delta S_{\text{total}} = \frac{\Delta A}{4} - S_{\text{matéria}}.$$

Portanto, a GSL pode ser quebrada dado que existam sistemas com entropia arbitrariamente grande. Tal fato fez com que Bekenstein propusesse um *limite superior para a entropia de um sistema qualquer*, o chamado *limite de Bekenstein* [60], o qual não será revisado aqui. Por outro lado, existe um outro limite mais fraco do que o de Bekenstein para a entropia chamado de *limite de Susskind*[61] ou *limite de entropia esférico*. Este limite se baseia no processo de colapsar um dado sistema físico num buraco negro com a mesma massa, de forma que

$$S_{\text{matéria}} \leq \frac{A}{4}, \quad (4.75)$$

onde A é a área mínima de uma superfície esférica que encobre o sistema. Claramente, a massa inicial do sistema deve ser menor do que a massa de um buraco negro de área A , senão o sistema

¹³Generalized Second Law (GSL).

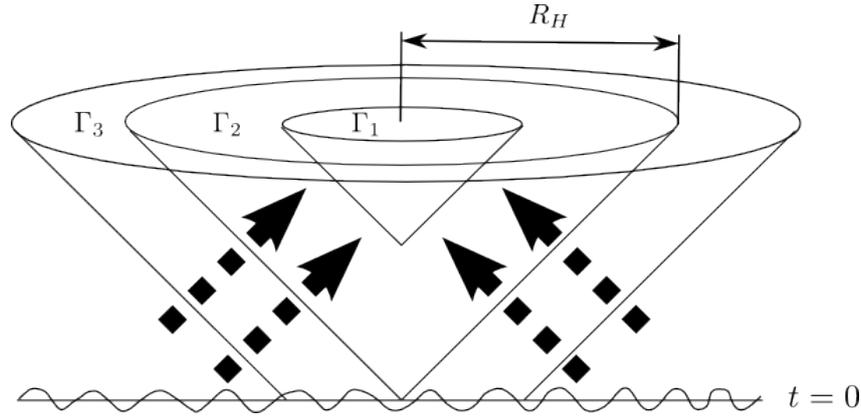


Figura 4.4 Na figura, as regiões Γ_1 e Γ_2 têm um raio menor e igual ao horizonte cosmológico R_H , respectivamente, e a quantidade de entropia que entra no cone de luz passado é a mesma que chega nas regiões tipo espaço. Já no caso da região Γ_3 em que o raio é maior que R_H e o cone de luz é truncada na singularidade em $t = 0$, existe entropia que alcança a região sem passar pelo cone de luz.

já seria efetivamente um buraco negro. Este limite é tido como válido dadas certas condições apropriadas no sistema [62].

Inspirados por estes limites na entropia de um sistema qualquer, 't Hooft [63] e Susskind [61] propuseram separadamente que estes resultados impõem limitações intrínsecas no número de graus de liberdade contidos numa dada região espacial, remontando ao significado da entropia em mecânica estatística. Esta ideia está encapsulada na forma do *princípio holográfico*, o qual diz que uma região qualquer de área A deve ser completamente descrita por não mais que $A/4$ graus de liberdade [64]. Tal afirmativa é no mínimo desconcertante para o *status quo* da física teórica moderna baseada em teorias de campos locais nas quais o número de graus de liberdade escala com o volume da região e não com a área.

Entretanto, o princípio holográfico não se sustentou por si só, pois o limite de entropia esférico mostrou-se falho em casos importantes como o da cosmologia. É fácil ver que, em cosmologias tipo FRW, o limite superior de entropia é quebrado. Considere um universo plano com densidade de entropia comóvel s . A equação (4.75) implica que, dada uma região com raio comóvel R ,

$$s \frac{4\pi R^3}{3} < \pi R^2 .$$

Este limite é saturado quando $R \geq 3/4s$.

Fischler e Susskind [65] propuseram uma modificação no limite de entropia que leva em conta o fluxo de entropia no cone de luz passado da região de interesse. Eles notaram que uma superfície esférica tipo espaço deve ter um raio no máximo do tamanho do horizonte cosmológico de modo que a entropia contida na região não supere a quantidade de entropia que

flui pela superfície do cone de luz passado, conforme a fig. 4.4. Portanto, o limite de entropia fica nesse caso

$$sR_H^3 < [aR_H]^2, \quad (4.76)$$

onde

$$R_H(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (4.77)$$

Note que a desigualdade (4.76) pode ser respeitada todo tempo desde que o universo se expanda numa taxa apropriada. Posteriormente, Bousso generalizou este raciocínio no que ele chamou de *limite de entropia covariante* [66]. Para uma revisão do princípio holográfico, ver [64].

Toda essa discussão aplica-se à nossa medida quântica de ϕ -FRW se notarmos que (4.55) não conta as degenerescências implicadas pelo princípio holográfico. Mais precisamente, para cada valor de a no espaço de configurações, deve haver uma degenerescência proporcional a a^2 , isto é, proporcional a área do horizonte cosmológico em questão. Isto significa que existem graus de liberdade da gravitação quântica que não estão sendo contados na medida semiclássica (4.55). Nossa proposta, por fim, é que, pelo princípio holográfico, a degenerescência deve ser proporcional a área do horizonte cosmológico $(H^{-1})^2$, isto é, deve ser proporcional a a^2 ou, equivalentemente, a um fator $e^{2\alpha/3}$ no número de graus de liberdade da inflação

$$N_H(\alpha) \propto e^{2\alpha/3} \ln \mathcal{N}(\alpha). \quad (4.78)$$

Conclusões e Perspectivas

Desde as civilizações mais antigas existem mitos cosmogônicos sobre a origem do Universo. Foram necessários cerca de 300 anos de desenvolvimento da ciência galileana, tal como conhecemos, para começarmos a sondar algo sobre os primórdios do vasto cosmos. A cosmologia é uma ciência ainda incipiente, mas que caminha num ritmo acelerado na precisão das observações e teorias sobre os parâmetros cosmológicos.

Nesta dissertação, apresentamos vários fatores relevantes na busca de um entendimento da área mais especulativa da cosmologia, o início do Universo. Na introdução, vimos um pouco da história e dos desenvolvimentos do modelo padrão da cosmologia, seus principais sucessos e do seu mais recente desdobramento, o período inflacionário. Apresentamos os tipos de inflação e a noção de inflação eterna.

No capítulo 2, vimos o modelo padrão cosmológico com mais detalhes. Discutimos os problemas com as condições iniciais do Big Bang e apresentamos a solução inflacionária: justificar as condições iniciais do modelo cosmológico padrão através de uma expansão acelerada pós Big Bang. Entretanto, o modelo inflacionário consiste na introdução de um potencial *ad hoc* acoplado com gravidade e isto gerou dúvidas na comunidade científica sobre o status de mecanismo dinâmico fundamental propagado pelos descobridores do mesmo. De acordo com Andrei Linde e seus colaboradores, inflação seria um fenômeno genérico da natureza.

No capítulo 3, vimos que enquanto não temos uma teoria quântica da gravidade dizendo algo sensível e testável sobre as condições iniciais do universo, uma possível abordagem para a questão da generalidade da inflação é analisar a densidade de órbitas inflacionárias no espaço de fase da RG. Apresentamos a argumentação clássica do atrator inflacionário e sobre a aparente predominância das órbitas no espaço de fase da teoria feita no trabalho de Belinskii *et al.* Revisamos o trabalho de Gibbons, Hawking e Stewart de 1987, que propuseram uma medida natural sobre o conjunto de todos os universos baseada na estrutura simplética do espaço de fase e concluíram precipitadamente que as órbitas inflacionárias eram realmente algo genérico. Entretanto, vimos que Hawking e Page reviram a conclusão um ano depois argumentando que a razão entre órbitas inflacionárias e nãoinflacionárias é ambígua. Gibbons e Turok refizeram a análise e concluíram que inflação é exponencialmente suprimida com o número de *e*-foldings.

Com isso, revisamos a literatura básica sobre o problema da medida em cosmologia.

Apresentamos o formalismo hamiltoniano da RG visando aplicar a quantização canônica na teoria no capítulo 4. A Relatividade Geral é uma teoria invariante por difeomorfismos e, portanto, a hamiltoniana é proporcional aos seus vínculos. Usamos a regra de correspondência canônica no vínculo hamiltoniano e obtivemos a famosa equação de Wheeler-DeWitt, análogo semiclássico da equação de Schrödinger em RG, proposta por Bryce DeWitt em 1967. A solução dessa equação, a chamada de função de onda do universo, não é fácil de ser encontrada e sua interpretação depende da interpretação probabilística da teoria e, portanto, da definição de um produto interno no espaço de Hilbert. Este problema está relacionado ao fato de que a equação de WDW não apresenta um tempo bem definido, dependendo apenas das coordenadas generalizadas. Por causa desses problemas, as tentativas de associar o quadrado da função de onda a uma probabilidade não foram bem sucedidas até hoje.

A equação de WDW passa a ser tratável na aproximação do minisuperespaço, como no caso do modelo ϕ -FRW, onde o infinito número de variáveis de configuração se reduz a uma quantidade finita. Mesmo assim, o problema do tempo e, portanto, do espaço de Hilbert permanecem. Possíveis soluções são tomar uma das variáveis como um tempo intrínseco ou impor um tempo extrínseco na teoria e tentar achar uma equação de Schrödinger equivalente a WDW. Entretanto, vimos que as soluções de WDW são equivalentes a de uma equação de Schrödinger se a hamiltoniana associada independe do tempo. Essa dificuldade pode ser superada se for possível achar uma transformação canônica que leve a equação de WDW para um caso tratável.

Apesar das dificuldades inerentes ao problema de introduzir uma interpretação probabilística bem definida e, portanto, uma medida na abordagem quântica da RG, desenvolvemos no final do capítulo 4 as bases para uma medida quântica que conta os estados associados da RG. A proposta está relacionada com o espectro do operador hermiteano \hat{H} associado à equação de WDW de forma que procuramos expressar a medida em termos da função de Green da equação reduzida. Vimos que a medida envolve o cálculo da função de Green no mesmo ponto, função esta que apresenta divergências características catalogadas por Hadamard na década de 20. O conhecimento do comportamento assintótico das funções de Green de operadores diferenciais parciais lineares faz parte do argumento de renormalização via o método de point-splitting, procedimento que pretendemos usar para obter uma contagem finita de estados via a medida quântica. Apresentamos as condições de slow-roll no espaço de fase visando a aplicação futura na medida proposta. Por fim, revisamos os *insights* físicos contidos no princípio holográfico e sobre como pretendemos incorporá-lo na medida quântica.

O objetivo deste trabalho foi revisar a literatura de cosmologia inflacionário e ganhar intuição sobre o problema da medida em cosmologia e propor uma nova medida quântica no

espaço de soluções do modelo ϕ -FRW. Este é um problema muito importante e, ao nosso ver, ainda não resolvido satisfatoriamente. Apesar de todos os sucessos dos modelos inflacionários, gostaríamos de obter, se possível, um resultado semiclássico robusto o suficiente para servir como guia no imensidão de vácuos da teoria quântica da gravitação.

Uma maneira de entender o princípio holográfico é dizer que os graus de liberdade de um sistema gravitacional estão codificados numa hipersuperfície do volume em que o sistema se encontra. Como vimos no cap. 3, a medida canônica é proporcional ao volume do universo a^3 . Nossa ideia foi introduzir holografia em nossa proposta de contagem de estados de forma que o número de graus de liberdade seja proporcional à área, i.e., proporcional a a^2 . Pretendemos dar continuidade ao trabalho aqui exposto analisando quantitativamente as consequências do conceito de holografia na medida quântica proposta neste trabalho no caso particular da inflação para diferentes potenciais $V(\phi)$.

Variedades e Formas Diferenciais

Neste apêndice, vamos revisar alguns conceitos básicos do cálculo em variedades de forma bastante livre sem nos preocupar com detalhes formais, apesar de buscarmos precisão nas definições. Para mais detalhes, ver [22, 21].

Uma variedade é um *espaço topológico* M com uma *cobertura* de abertos $\{O_\alpha\}$ e uma família de *cartas* $\{\psi_\alpha\}$, chamada *atlas*, tal que $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, onde $\{U_\alpha\}$ são abertos em \mathbb{R}^n . Além disso, as *funções de transição* $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ devem ser suaves, isto é, devem ser C^∞ . Se, além disso, as cartas em si forem suaves, isto é, se forem *difeomorfismos*, dizemos que M tem uma estrutura diferenciável e é dita uma *variedade diferenciável*. Informalmente, uma variedade pode ser vista como uma “colagem” de abertos $\{O_\alpha\}$ que localmente se parecem com \mathbb{R}^n e as cartas correspondem a mudanças de coordenadas.

Vetores tangente são aplicações lineares $V_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em $p \in M$ e nos referimos ao o espaço de todos os vetores tangentes em $p \in M$ como o *espaço tangente* T_pM . Este objeto pode ser estendido para o de um *campo vetorial* $V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, definido em cada ponto p de M . Vetores tangente são análogos à derivada direcional de funções ou, similarmente, a vetores tangentes a uma curva em M . De fato, esta analogia serve para extendermos o conceito geométrico de vetores de objetos extensos para objetos definidos em cada ponto. Então, é possível definir uma base coordenada $\{\partial_\mu\}$ como uma derivada usual de funções em M e escrever vetores tangente e campos vetoriais das seguintes formas

$$V_p = v^\mu \partial_\mu \Big|_p \quad \text{e} \quad V = v^\mu \partial_\mu .$$

Vetores cotangente são aplicações lineares $\omega_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre vetores tangentes em p e o espaço de todos os vetores cotangentes em p é chamado de *espaço cotangente* T_p^*M . Tais vetores consistem na contraparte dual dos vetores tangente e, se definirmos uma base dual associada $\{dx^\mu\}$ por $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$, temos que $\dim T_pM = \dim T_p^*M$.

Para definirmos integração de funções em M , necessitamos definir uma *orientação* e uma *forma volume* em M . Uma orientação está bem definida em M se for sempre possível achar duas cartas x^μ, y^ν , tal que o jacobiano $J = \det(\partial x^\mu / \partial y^\nu)$ seja positivo. Uma *forma volume* em

M é definida como uma n -forma positivo definida. Dado que M é orientável, existe uma forma volume dada por

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad (\text{A.1})$$

tal que $h(p) : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $h(p) > 0, \forall p \in M$ e ' \wedge ' é o produto exterior entre duas p -formas. Como a n -forma acima é única a menos de uma função multiplicativa, segue que toda forma volume em M é equivalente a (A.1) a menos do sinal de $h(p)$ e podem ser divididas em dois tipos: orientação positiva e negativa. Dado que M tenha uma métrica, podemos definir uma forma volume invariante por mudança de coordenadas dada por

$$\varepsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \equiv \sqrt{|g|} d^n x. \quad (\text{A.2})$$

Por fim, definimos a integral de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ num aberto $U \subset M$ com carta ψ como

$$\int_U f \omega \equiv \int_{\psi(U)} f(\psi^{-1}(x)) h(\psi^{-1}(x)) dx^1 \dots dx^n,$$

onde a última integral corresponde a integral convencional de Riemann ou Lebesgue em \mathbb{R}^n .

Geração Quântica das Perturbações Cosmológicas

Vamos agora descrever em termos físicos o maior sucesso do cenário inflacionário, as flutuações de densidade do universo primordial. A evolução clássica do campo ϕ não pode gerar flutuações de densidade a não ser pela presença de termos estocásticos afetando sua dinâmica com condições iniciais ajustadas para concordar com a observação. A proposta da inflação é produzir o espectro de perturbações como consequência de flutuações quânticas microscópicas. As flutuações seriam efeito da produção de partículas no vácuo em teoria quântica de campos¹.

Os exemplos teóricos mais conhecidos da criação de partículas estão no efeito Unruh e na radiação Hawking de um buraco negro [67, 68]. Estes efeitos, apesar de similares matematicamente, são distintos por ocorrerem em vácuos com diferentes simetrias. De acordo com o livro [68], a característica essencial para a criação de partículas nesses casos é a presença de horizontes, mais especificamente, horizontes de killing bifurcados. De fato, os observadores inerciais no espaço de Minkowski não veem o banho térmico de partículas característico do efeito Unruh, diferentemente de observadores relacionados às órbitas geradas por boosts de Lorentz, pois, para estes observadores, não há horizontes. Efeito similar ocorre no espaço de de Sitter; este é o que nos interessa para inflação. Existem observadores estáticos para os quais existe horizonte. Portanto, é de se esperar que haja criação de partículas no espaço de Sitter e esta seria a motivação física do efeito perturbativo que vamos descrever abaixo. Fomos particularmente influenciados pela excelente introdução pedagógica à inflação encontrada em [28] e, como neste artigo, tomaremos uma abordagem que predomina a descrição física da inflação sem entrar em muitos detalhes na extensa álgebra envolvida. Para um tratamento mais aprofundado, ver [9, 10].

No período inflacionário, é de se esperar que efeitos quânticos microscópicos estendam-se para escalas cosmológicas muito maiores que as originais devido à grande expansão do fator de escala. Esta ideia justifica como as flutuações quânticas, caracterizadas pela função de dois pontos no vácuo, influenciam na formação de estruturas em larga escala. Flutuações de densidade geram flutuações de temperatura e, portanto, o espectro CMB deve apresentar características equivalentes às das flutuações de densidade. Além disso, perturbações de densidade,

¹De agora em diante, TQC.

devido ao acoplamento entre matéria e gravidade, devem intuitivamente gerar flutuações da métrica. De fato, o que produz todas as flutuações é o campo escalar ϕ do modelo ϕ -FRW quando quantizado. Para cada flutuação δg , existe uma *função de transferência*, especificada pelo modelo cosmológico, relacionando os modos $\delta g_{\mathbf{k}}$ com os modos $\delta \phi_{\mathbf{k}}$:

$$\delta g_{\mathbf{k}} = T_g(t, k) \delta \phi_{\mathbf{k}} .$$

Por motivos que não serão explicados aqui, costuma-se obter as flutuações em termos da *perturbação de curvatura* $\mathcal{R}(t, \mathbf{x})$, pois, em geral, esta não varia após a saída do horizonte (ver abaixo). A definição do espectro dada em (2.21) é análoga às definições dos espectros dadas mais abaixo. Para mais detalhes desse processo e da teoria de perturbações cosmológicas, junto com uma definição de $\mathcal{R}(t, \mathbf{x})$, ver [9].

Em suma, flutuações escalares geram o espectro da CMB, enquanto que as flutuações tensoriais da métrica geram anisotropias neste espectro devido às ondas gravitacionais. A física básica na geração de perturbações está surpreendentemente relacionada ao oscilador harmônico e, naturalmente, à distribuição gaussiana. Parece continuar a valer que quanto a mais altas energias chegamos, mais fundamental e simples, em termos lógicos, é a física.

Suponha que o campo $\phi(t, x)$ possa ser decomposto como

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta \phi(t, \mathbf{x}) , \quad (\text{B.1})$$

onde $\phi_0(t)$ é o campo de fundo homogêneo e $\delta \phi(t, \mathbf{x})$ é uma perturbação supostamente pequena. A ação descrevendo a evolução desse campo acoplado com a métrica é dada por (2.32) e, se substituirmos, além de (B.1), uma perturbação na métrica, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$, na ação e explicitarmos termos até 2ª ordem em $\delta \phi$, obteremos equações não-lineares de evolução das perturbações. O procedimento envolve manipulações extensivas que não são cruciais para nosso objetivo e estão detalhados na referência [10]. No tratamento abaixo, a perturbação do campo desacopla da perturbação da métrica, permitindo-nos calcular apenas a perturbação escalar do campo. Tal procedimento é exato no chamado *calibre espacial plano* e para escalas distantes bem menores que o horizonte.

A ação de um campo escalar real num espaço-tempo FRW é dada por (2.32), cuja extremização com relação a ϕ nos dá a equação de Klein-Gordon FRW:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 .$$

Usando (B.1), vemos que tal equação é válida para a perturbação $\delta \phi(t, \mathbf{x})$. Expandindo $\delta \phi$ em

componentes de Fourier,

$$\delta\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} (\delta\phi_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

a equação de movimento fica

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} + V_{,\phi\phi}\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde expandimos $V_{,\phi}$ em primeira ordem na perturbação. Note que a expansão se dá em coordenadas comóveis. Isto significa que as escalas físicas relevantes são dadas por $\lambda_k \sim a/k$. Dizemos que, quando $k < aH$, a escala está *fora do horizonte*, e quando $k > aH$ a escala está *dentro do horizonte*. Em particular, escolhe-se uma escala cosmológica máxima $\lambda_{max} \sim k_{min}^{-1}$, correspondendo aproximadamente ao tamanho do universo observável, e uma escala mínima $\lambda_{min} \sim k_{max}^{-1}$ como cutoff da análise inflacionária, estimando-se que a inflação acabe quando $k_{max} = aH$.

No limite slow-roll, $\eta = V_{,\phi\phi}/V \ll 1$ implica em $V_{,\phi\phi} \ll H^2$ e, portanto, podemos desprezar o último termo em (B.2):

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Note que esta equação é a de um oscilador harmônico amortecido com constante de mola k/a e coeficiente de fricção H . A discussão do parágrafo anterior nos induz a analisar os dois limites interessantes da equação, $k \gg aH$ e $k \ll aH$. No primeiro caso, a escala física está bem dentro do horizonte e a eq. (B.3) se reduz a de um oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo k/a . Já no segundo caso, quando a escala está bem fora do horizonte, a equação tende a de um oscilador superamortecido, em que a velocidade decai exponencialmente com o tempo e a amplitude permanece praticamente constante.

Definindo a *variável de Mukhanov* $v \equiv a\delta\phi$ e mudando para o tempo conforme (2.31), obtemos a principal equação da teoria de perturbações inflacionárias

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Esta equação decorre da extremização da seguinte ação:

$$\delta_2 S = \frac{A}{2} \int d\tau d^3x \left[(v')^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{a''}{a} v^2 \right],$$

tal que $v = v(t, \mathbf{x})$. Se tivéssemos realizado o procedimento completo de expandir a ação original até 2ª ordem na perturbação teríamos chegado ao mesmo resultado, a menos da constante multiplicativa. Analisemos, novamente, os limites relevantes da análise inflacionária:

- $k \gg aH$ (Limite Subhorizonte):

Neste limite, temos que

$$\begin{aligned} \frac{a''}{a} &= \frac{d}{dt}(a\dot{a}) \\ &= \frac{d}{dt}(a^2H) \\ &\approx 2a^2H^2, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde usamos a aproximação slow-roll na última equação. Portanto, o termo k^2 domina na eq. (B.4):

$$v_{\mathbf{k}}'' + k^2 v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (\text{B.6})$$

e, portanto, a solução normalizada em função do tempo conforme é dada por

$$v_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (\text{B.7})$$

Esta solução é escolhida de forma que o estado de vácuo da teoria quântica seja um autoestado da hamiltoniana \hat{H} (ver B.1).

- $k \ll aH$ (Limite Superhorizonte):

Já neste limite, temos que

$$v_{\mathbf{k}}'' - \frac{a''}{a} v_{\mathbf{k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathbf{k}} \propto a \quad \Rightarrow \quad \delta\phi = \frac{v}{a} \propto \text{const.}$$

Os modos não evoluem fora do horizonte. Diz-se que estão “congelados”.

De acordo com (B.5), a equação (B.4) pode ser reescrita como

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) v_{\mathbf{k}} = 0,$$

que é equivalente à equação de Bessel se fizermos a substituição $z = k\tau$,

$$\frac{d^2 v_{\mathbf{k}}}{dz^2} + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) v_{\mathbf{k}} = 0,$$

e a transformação $v_{\mathbf{k}} = z^{1/2} f_{\mathbf{k}}$:

$$\frac{d^2 f_{\mathbf{k}}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df_{\mathbf{k}}}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) f_{\mathbf{k}} = 0,$$

tal que $v^2 = 9/4$, cuja solução pode ser escrita apropriadamente como uma combinação linear das funções de Hankel $H_{3/2}^{(1)}$ e $H_{3/2}^{(2)}$. Devido ao comportamento assintótico dentro do horizonte (B.7), no qual $k|\tau| \rightarrow \infty$, a função de Hankel apropriada é

$$H_{3/2}^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} \left(1 + \frac{1}{iz}\right),$$

e a solução normalizada e ajustada ao comportamento assintótico é, por fim,

$$v_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right), \quad (\text{B.8})$$

chamada de função de Bunch-Davies.

B.1 Quantizando a Perturbação

A equação (B.4) é equivalente a equação do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo. Portanto, a quantização dos modos (B.8) segue da mesma forma, só que ao invés de quantizarmos as coordenadas posição e momento, em teoria quântica de campos nós quantizamos os campos e as coordenadas simplesmente servem para indexar o campo. Vejamos uma breve revisão do processo de quantização de campos no espaço plano.

Dada a ação da teoria

$$S[\phi] = \int dt L(\phi, \partial_{\mu}\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi - V(\phi) \right) \quad (\text{B.9})$$

da teoria, o procedimento de *quantização canônica* de um campo escalar no espaço de Minkowski segue da seguinte forma:

1. Define-se o momento conjugado ao campo

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi)}$$

2. Para transformar a hamiltoniana \mathcal{H} em operador, promovemos ϕ e π a operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$ tais que valham as relações de comutação canônicas em tempos iguais:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.10})$$

e os outros comutadores se anulam². Em particular, hamiltonianas quadráticas nos campos e nos momentos tornam-se auto-adjuntas com a prescrição acima.

3. Expande-se o campo em termos dos operadores de criação e destruição \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right] \quad (\text{B.11})$$

onde $u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^*$ formam uma base completa da equação de Klein-Gordon resultante, isto é,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \phi - V_{,\phi} = 0 \quad (\text{B.12})$$

onde $\square \phi \equiv \partial_\mu \partial^\mu \phi$ é o operador d'Alembertiano. A imposição das relações de comutação induzem a definição de um produto interno³ definido como

$$\begin{aligned} (u, w) &= -i \int dt (u \partial_t w^* - (\partial_t u) w^*) , \\ &\equiv -i \int dt (u \overleftrightarrow{\partial}_t w) . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Se impormos as condições

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^*) &= 0 , \\ (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) &= \delta^3(k - k') , \\ (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}) &= -\delta^3(k - k') , \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

obtemos as relações de comutação entre \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta^3(k - k') , \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 . \end{aligned}$$

²A regra de substituição de funções no espaço de fase por operadores pode levar a ambiguidades no *ordenamento de fatores* da Hamiltoniana. Não existe uma resposta geral a essa questão e o ordenamento deve ser escolhido com cautela dependendo do problema.

³Este produto interno serve apenas para normalizar os modos, pois não é positivo definido. Descartamos, assim, seu caráter métrico, exceto nos subespaços apropriados.

4. Definimos, por fim, o espaço de Fock associado aos operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ de forma igual ao do oscilador harmônico, isto é, definimos o estado de vácuo como

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \quad (\text{B.15})$$

e o estado de n partículas no modo \mathbf{k} como

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\mathbf{k}}^\dagger)^n|0\rangle.$$

Os estados com diferentes números de partículas distribuídos entre diferentes modos segue igual ao oscilador harmônico.

A descrição acima é apenas um resumo operacional para o que vem abaixo. Para mais detalhes sobre o processo de quantização de campos, ver [69, 67, 68, 54]. A extensão para espaços curvos é simples, apesar dos desdobramentos não-triviais [67, 68, 54]. Grosseiramente, basta introduzir o fator jacobiano $\sqrt{-g}$ na ação, isto é, definir os campos sobre uma variedade qualquer. Segue que a equação de Klein-Gordon torna-se mais geral e pode gerar uma extensa classe de equações diferenciais dependendo das simetrias e coordenadas escolhidas.

Voltando ao nosso problema de quantizar os modos $v_{\mathbf{k}}$ do espaço de Sitter, expandimos o campo $v(t, \mathbf{x})$ como

$$\hat{v}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (\text{B.16})$$

onde os modos são dados em (B.8) e definimos o chamado *vácuo de Bunch-Davies* impondo (B.15). Os modos $v_{\mathbf{k}}$ são definidos a partir das condições (B.14).

É importante notar que a escolha deste vácuo depende intrinsecamente das simetrias do espaço de de Sitter. Isto significa, em particular, que depende das coordenadas usadas para mapear a variedade, já que a forma específica da equação de Klein-Gordon (B.12) está relacionada com a escolha das coordenadas. Logo, não existe um único vácuo no espaço de Sitter, assim como não existe um vácuo preferencial em espaços-tempo genéricos. Por isso, ainda não existe consenso sobre a escolha do vácuo apropriado para inflação.

B.1.1 Espectro de Potências e Flutuações

A ideia da inflação é que as flutuações quânticas subhorizonte oscilem, evoluam e congelem fora do horizonte. Portanto, vamos calcular a função de dois pontos no limite subhorizonte. A

função de dois pontos no vácuo é dada por

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^2 \rangle &\equiv \langle 0 | \delta\hat{\phi}(\mathbf{x}) \delta\hat{\phi}(\mathbf{x}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}'} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

onde expandimos $\delta\phi$ em termos dos modos $\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}$. A condição de realidade implica que $\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^* = \delta\hat{\phi}_{-\mathbf{k}}$ e, portanto,

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}'}^* \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}.$$

Como vimos, os modos $\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}$ obedecem a equação do oscilador harmônico amortecido. Portanto, obedecem uma distribuição equivalente a da posição do oscilador, isto é, uma gaussiana, que é uma distribuição isotrópica. Tal hipótese de isotropia foi assumida implicitamente quando expandimos a perturbação em modos de fourier, base apropriada para tratar com simetrias de translação e rotação. Logo, temos que $\langle \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \langle |\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^2 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle |\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \\ &= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} 4\pi \langle |\delta\hat{\phi}_k|^2 \rangle \\ \langle \delta\phi^2 \rangle &\equiv \int \frac{dk}{k} \Delta_\phi^2(k), \end{aligned} \tag{B.17}$$

onde o *espectro de potência* é definido por

$$\Delta_\phi^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\delta\hat{\phi}_k|^2 \rangle. \tag{B.18}$$

Notando que

$$\delta\hat{\phi}_k = \hat{b}_k u_k + \hat{b}_{-k}^\dagger u_{-k}^*,$$

onde $u_k = v_k/a$, e usando a propriedade de aniquilação do vácuo dos operadores \hat{b}_k e \hat{b}_k^\dagger , temos que

$$\begin{aligned} \langle |\delta\hat{\phi}_k|^2 \rangle &= u_k u_{-k}^* \langle 0 | b_k b_{-k}^\dagger | 0 \rangle \\ &= u_k u_{-k}^* \langle 0 | [b_k, b_{-k}^\dagger] | 0 \rangle \\ &= |u_k|^2, \end{aligned}$$

Assim, o espectro fica

$$\begin{aligned} \Delta_\phi^2(k) &= \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{a^2} \\ &= \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{1}{2ka^2} \left[1 + \frac{1}{(k\tau)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} [p^2 + H^2], \end{aligned} \tag{B.19}$$

onde $p \equiv k/a$ é o momento físico. Note que o primeiro termo corresponde ao espectro do espaço de Minkowski, gerando uma divergência ultravioleta em (B.17), enquanto que o segundo é o resultado realmente não trivial da inflação, originando as flutuações observadas. Na literatura, supõe-se que a divergência pode ser evitada através de uma renormalização da integral, embora ainda haja dúvidas sobre a validade tal procedimento de subtração [70]. De fato, é comum descartar o primeiro termo e se referir a

$$\Delta_\phi^2 = \frac{H^2}{4\pi^2} \tag{B.20}$$

como o espectro *quase* livre de escala da inflação⁴. Note que este resultado deve ser considerado como aproximado, pois tomamos o limite slow-roll exato quando desprezando o termo $V_{,\phi\phi}$ da equação (B.2). Também podemos chegar ao mesmo resultado se tomamos o limite $k\tau \rightarrow 0$ de (B.19), isto é, tomando o limite subhorizonte.

Podemos truncar a função de dois pontos de forma heurística lembrando as escalas mínima e máxima de interesse da inflação, comentadas acima. Assim, a eq. (B.17) fica:

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^2 \rangle &= \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk}{k} \frac{H^2}{4\pi^2} + O(p^2) \\ &\sim H^2 \ln \left(\frac{k_{max}}{k_{min}} \right) \end{aligned}$$

⁴Nearly scale-free spectrum.

$$\therefore \boxed{\langle \delta\phi^2 \rangle \sim H^2}. \quad (\text{B.21})$$

B.1.2 Gerando as Perturbações de Densidade

É possível relacionar as flutuações do campo escalar com as flutuações de densidade de forma simplificada através do *formalismo de atraso temporal*⁵, criado por Guth e Pi em [71]. Esse formalismo é apropriado para justificar o tratamento meramente expositivo que faremos no resto dessa seção.

A ideia por trás do formalismo é que flutuações positivas $\delta\phi$ fazem o campo subir o potencial $V(\phi)$ e, com isso, prolongam a inflação na região na qual ocorre a flutuação. A partir de (B.21), estimamos que $\delta\phi \sim H$, já que a flutuação média é zero, e, portanto,

$$\delta t = \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \sim \frac{H}{\dot{\phi}} \quad (\text{B.22})$$

De acordo com o cenário inflacionário, as flutuações de $\delta\phi$ só são transferidas aos graus de liberdade de matéria na época do reaquecimento, na qual, supostamente, $\rho = 3H^2$ e $H \sim t^{-1}$ para fluidos normais. Um prolongamento da inflação provoca um aumento de densidade dado por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 2\frac{\delta H}{H} \sim -H\delta t. \quad (\text{B.23})$$

Usando (B.22) e as equações de slow-roll, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 &\sim \left(\frac{H^2}{\dot{\phi}}\right)^2 \\ &\sim \frac{V^3}{V_{,\phi}^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 &\sim \frac{V}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Como essa expressão é apenas aproximada, devemos escolher com cautela em que momento da inflação calcular o lado direito da mesma. Geralmente escolhe-se o tempo no qual a escala de interesse sai do horizonte, $k = aH$.

⁵*Time-Delay Formalism*

Definimos o espectro equivalentemente ao do campo escalar:

$$\left\langle \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)^2 \right\rangle \equiv \int \Delta_S^2(k) d\ln k \quad (\text{B.25})$$

tal que o espectro de potência adimensional é dado por $\Delta_S^2(k) = (k^3/2\pi^2)\langle|\delta_k|^2\rangle$ e os modos de fourier δ_k são chamados de *perturbações de densidade fracionárias*. No tratamento perturbativo mais geral, há contribuições de todos os conteúdos de energia do modelo padrão. Os modos δ_k expressos em termos da transformada inversa de Fourier são proporcionais a $\delta\rho/\rho$ e, portanto, devem ser proporcionais a (B.24). É possível mostrar que

$$\Delta_S^2(k) \Big|_{k=aH} = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon} \Big|_{k=aH} \propto k^{n_S-1}$$

onde o fator numérico vem do cálculo exato não explicitado. Costuma-se calcular o espectro em $k = aH$, pois, a partir daí, a perturbação em questão deixa de evoluir. Define-se o *índice espectral escalar* através da expressão:

$$n_S - 1 = \frac{d\ln\Delta_S^2}{d\ln k} \Big|_{k=aH} \quad (\text{B.26})$$

Notando que, quando $k = aH$,

$$d\ln k = \frac{dk}{k} = \frac{da}{a} = H dt = -\frac{3H^2}{V_{,\phi}} d\phi = -\frac{V}{V_{,\phi}} d\phi ,$$

pode-se reexpressar (B.26) através dos parâmetros de slow-roll:

$$n_S - 1 = 2\eta - 6\epsilon . \quad (\text{B.27})$$

Quando $n_S = 1$, temos um espectro livre de escala de Harrison-Zeldovich.

B.1.3 Perturbações Gravitacionais

Além das perturbações quânticas dos campos escalares presentes na inflação, falta comentarmos um pouco sobre os resultados das perturbações tensoriais. Como já foi dito, o acoplamento do inflaton com a métrica na ação (2.32) é o que gera as perturbações $\delta h_{\mu\nu}$. Estas perturbações, em sua parte, são identificadas como ondas gravitacionais e induzem polarizações no espectro CMB, apesar de ainda não terem sido identificadas pelos satélites. A previsão

da geração de ondas gravitacionais é considerada a única previsão não genérica da inflação, já que outros modelos conseguem igualmente produzir um espectro quase livre de escala, como, por exemplo, no cenário do *universo ekpyrótico*⁶ proposto em [72]. Neste modelo, o universo teria sido criado por um choque de duas branas embebidas num espaço de dimensão maior e é naturalmente realizado em teoria de cordas, sendo que apresenta um espectro de ondas gravitacionais diferente da inflação.

As perturbações gravitacionais são deduzidas de forma completamente análoga à vista acima, sendo possível mostrar que

$$\delta h \sim H \sim \sqrt{V},$$

onde h representa uma das duas polarizações possíveis das ondas gravitacionais. O espectro de flutuações tensoriais é dado por

$$\Delta_T^2(k) \Big|_{k=aH} = \frac{2}{3\pi^2} V \Big|_{k=aH} \propto k^{n_T}. \quad (\text{B.28})$$

É importante notar que a detecção do espectro acima permite inferir a escala de energia apropriada para ocorrer inflação, $V^{1/4}$. Já o índice tensorial espectral é definido como

$$n_T \equiv \frac{d \ln \Delta_T^2}{d \ln k} \approx -2\varepsilon. \quad (\text{B.29})$$

Note que $n_T = 0$ corresponde a um espectro livre de escala, diferentemente do caso escalar, por uma escolha histórica de diferente convenções. Por fim, definimos o importante parâmetro experimental, a *razão tensorescalar*:

$$r \equiv \frac{\Delta_T^2(k)}{\Delta_S^2(k)} = 16\varepsilon. \quad (\text{B.30})$$

Uma estimativa razoável para que ondas gravitacionais sejam observadas além do nível de ruído é que $r > 0.01$. Por enquanto, os experimentos já chegaram a $r < 0.3$ e ainda não detectaram as polarizações. Valores típicos para alguns dos observáveis acima são, de acordo com os dados de 3 anos da WMAP [28, 73],

$$\begin{aligned} \Delta_S(k_0) &= (4,75 \pm 0,10) \times 10^{-5}, \quad k_0 \equiv 0,05, \\ n_S &= 0,96 \pm 0,04 \quad (r \equiv 0 \text{ a priori}). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

⁶*Ekpyrotic Universe*. A palavra *ekpyrosis*, o fogo cósmico que tudo queima, representa a fase de contração no universo cíclico que é destruído e reconstruído na filosofia estoíca.

Desvios da Gaussianidade e da aproximação adiabática são sempre testados, mas não foram encontrados. Para os dados de 5 anos da WMAP e sua interpretação nos parâmetros cosmológicos, ver [74].

Referências Bibliográficas

- [1] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, May 2003.
- [2] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” *Phys. Rev.*, vol. D23, pp. 347–356, 1981.
- [3] A. A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Phys. Lett.*, vol. B91, pp. 99–102, 1980.
- [4] A. D. Linde, “Particle Physics and Inflationary Cosmology,” 2005. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0503203>
- [5] A. H. Guth and E. J. Weinberg, “Cosmological Consequences of a First Order Phase Transition in the SU(5) Grand Unified Model,” *Phys. Rev.*, vol. D23, p. 876, 1981.
- [6] S. W. Hawking and I. G. Moss, “Supercooled Phase Transitions in the Very Early Universe,” *Phys. Lett.*, vol. B110, p. 35, 1982.
- [7] A. D. Linde, “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems,” *Phys. Lett.*, vol. B108, pp. 389–393, 1982; ———, “Coleman-Weinberg Theory and a New Inflationary Universe Scenario,” *Phys. Lett.*, vol. B114, p. 431, 1982; ———, “Temperature Dependence of Coupling Constants and The Phase Transition in The Coleman-Weinberg Theory,” *Phys. Lett.*, vol. B116, p. 340, 1982; ———, “Scalar Field Fluctuations in Expanding Universe and the New Inflationary Universe Scenario,” *Phys. Lett.*, vol. B116, p. 335, 1982.
- [8] ———, “Chaotic Inflation,” *Phys. Lett.*, vol. B129, pp. 177–181, 1983.
- [9] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [10] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, “Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions,” *Phys. Rept.*, vol. 215, pp. 203–333, 1992.
- [11] R. H. Brandenberger, “String Gas Cosmology,” 2008. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0808.0746>
- [12] B. C. Da Cunha and E. J. Martinec, “Closed string tachyon condensation and worldsheet inflation,” *Phys. Rev.*, vol. D68, p. 063502, 2003.

- [13] M. Bojowald, “Inflation from Quantum Geometry,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 261301, 2002.
- [14] A. H. Guth, “Inflation and eternal inflation,” *Phys. Rept.*, vol. 333, pp. 555–574, 2000.
- [15] P. J. Steinhardt, “Natural Inflation,” invited talk given at Nuffield Workshop on the Very Early Universe, Cambridge, England, Jun 21 - Jul 9, 1982.
- [16] A. Vilenkin, “The Birth of Inflationary Universes,” *Phys. Rev.*, vol. D27, p. 2848, 1983.
- [17] L. Susskind, “The anthropic landscape of string theory,” 2003. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0302219>
- [18] R. Bousso, “Holographic probabilities in eternal inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 191302, 2006.
- [19] R. Bousso, R. Harnik, G. D. Kribs, and G. Perez, “Predicting the Cosmological Constant from the Causal Entropic Principle,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 043513, 2007.
- [20] K. A. Olive and J. A. Peacock, “Big-Bang cosmology,” *Phys. Lett.*, vol. B667, p. 1, 2008.
- [21] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison-Wesley, 2004.
- [22] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [23] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford, 1934.
- [24] P. T. Landsberg, “Special relativistic thermodynamics,” *Proc. Phys. Soc.*, vol. 89, pp. 1007–1016, 1966.
- [25] C. Amsler *et al.*, “Review of particle physics,” *Phys. Lett.*, vol. B667, p. 1, 2008. [Online]. Available: <http://pdg.lbl.gov/index.html>
- [26] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early universe,” *Front. Phys.*, vol. 69, pp. 1–547, 1990.
- [27] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics, Second Edition*. Butterworth-Heinemann, July 1996.
- [28] D. Baumann, “On the Quantum Origin of Structure in the Inflationary Universe,” 2007. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0710.3187v1>
- [29] D. S. Salopek and J. R. Bond, “Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, no. 12, pp. 3936–3962, Dec 1990.
- [30] S. Hollands and R. M. Wald, “An alternative to inflation,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 34, pp. 2043–2055, 2002.
- [31] L. Kofman, A. Linde, and V. F. Mukhanov, “Inflationary theory and alternative cosmology,” *JHEP*, vol. 10, p. 057, 2002.

- [32] V. A. Belinsky, L. P. Grishchuk, I. M. Khalatnikov, and Y. B. Zeldovich, “Inflationary stages in cosmological models with a scalar field,” *Physics Letters B*, vol. 155, no. 4, pp. 232 – 236, 1985; V. A. Belinskii, L. P. Grishchuk, Y. B. Zel’dovich, and I. M. Khalatnikov, “Inflationary stages in cosmological models with a scalar field,” *Soviet Physics - JETP*, vol. 62, no. 2, pp. 195–203, 1985. [Online]. Available: <http://link.aip.org/link/?SPJ/62/195/1>
- [33] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and J. M. Stewart, “A natural measure on the set of all universes,” *Nuclear Physics B*, vol. 281, no. 3-4, pp. 736 – 751, 1987.
- [34] S. W. Hawking and D. N. Page, “How probable is inflation?” *Nuclear Physics B*, vol. 298, no. 4, pp. 789 – 809, 1988.
- [35] U. Kirchner and G. F. R. Ellis, “A probability measure for flrw models,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 6, pp. 1199–1213, 2003. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0264-9381/20/1199>
- [36] G. W. Gibbons and N. Turok, “The measure problem in cosmology,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 063516, 2008.
- [37] S. W. Hawking, “Quantum Cosmology,” presented at Les Houches Summer School on Theoretical Physics, Les Houches, France, Jun 27 - Aug 4, 1983.
- [38] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave Function of the Universe,” *Phys. Rev.*, vol. D28, pp. 2960–2975, 1983.
- [39] V. A. Belinsky and I. M. Khalatnikov, “On The Degree Of Generality Of Inflationary Solutions In Cosmological Models With A Scalar Field,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 66, p. 441, 1987.
- [40] G. N. Felder, A. V. Frolov, L. Kofman, and A. V. Linde, “Cosmology with negative potentials,” *Phys. Rev.*, vol. D66, p. 023507, 2002.
- [41] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1997.
- [42] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2nd ed. Livraria da Física, 2007.
- [43] J. C. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots, and Gravity (Series on Knots and Everything, Vol. 4)*. World Scientific Pub Co Inc, October 1994.
- [44] S. W. Hawking and T. Hertog, “Populating the landscape: A top down approach,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 123527, 2006.
- [45] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, 2001.
- [46] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. 1. the canonical theory,” *Phys. Rev.*, vol. 160, pp. 1113–1148, 1967.

- [47] C. Rovelli, *Quantum gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [48] A. Mostafazadeh, “A genuine probability interpretation for Klein-Gordon fields and its implications for quantum cosmology,” 2002; —, “Wave function of the universe and its meaning,” *Czech. J. Phys.*, vol. 54, pp. 93–99, 2004; —, “Pseudo-Hermitian Quantum Mechanics,” 2008. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0810.5643>
- [49] E. T. Jaynes, *Probability Theory: The Logic of Science (Vol 1)*. Cambridge University Press, April 2003.
- [50] J. B. Hartle, S. W. Hawking, and T. Hertog, “The Classical Universes of the No-Boundary Quantum State,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 123537, 2008.
- [51] C. Simeone, “Path integral for minisuperspaces and its relation with non equivalent canonical quantizations,” *Phys. Lett.*, vol. A310, pp. 143–147, 2003.
- [52] T. P. Shestakova and C. Simeone, “The problem of time and gauge invariance in the quantization of cosmological models. I: Canonical quantization methods,” *Grav. Cosmol.*, vol. 10, pp. 161–176, 2004.
- [53] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics Rev. Ed.*, S. F. Tuan, Ed. Addison-Wesley, 1994.
- [54] S. A. Fulling, “Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time,” *London Math. Soc. Student Texts*, vol. 17, pp. 1–315, 1989.
- [55] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven, USA: Yale University Press, 1923.
- [56] J. J. Halliwell, “Introductory Lectures on Quantum Cosmology (1990),” 2009. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0909.2566>
- [57] J. D. Bekenstein, “Black holes and the second law,” *Nuovo Cim. Lett.*, vol. 4, pp. 737–740, 1972.
- [58] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 26, pp. 1344–1346, 1971.
- [59] —, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 43, pp. 199–220, 1975.
- [60] J. D. Bekenstein, “A Universal Upper Bound on the Entropy to Energy Ratio for Bounded Systems,” *Phys. Rev.*, vol. D23, p. 287, 1981.
- [61] L. Susskind, “The World as a hologram,” *J. Math. Phys.*, vol. 36, pp. 6377–6396, 1995.
- [62] R. M. Wald, “The thermodynamics of black holes,” *Living Rev. Rel.*, vol. 4, p. 6, 2001.
- [63] G. ’t Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” 1993.

- [64] R. Bousso, “The holographic principle,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 825–874, 2002.
- [65] W. Fischler and L. Susskind, “Holography and cosmology,” 1998. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9806039>
- [66] R. Bousso, “A Covariant Entropy Conjecture,” *JHEP*, vol. 07, p. 004, 1999.
- [67] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “Quantum Fields in Curved Space,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1982) 340p.
- [68] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (Chicago Lectures in Physics)*. University Of Chicago Press, 1994.
- [69] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [70] R. Durrer, G. Marozzi, and M. Rinaldi, “On Adiabatic Renormalization of Inflationary Perturbations,” 2009. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0906.4772v3>
- [71] A. H. Guth and S.-Y. Pi, “Fluctuations in the new inflationary universe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, no. 15, pp. 1110–1113, Oct 1982.
- [72] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, “The ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang,” *Phys. Rev.*, vol. D64, p. 123522, 2001.
- [73] D. N. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 170, p. 377, 2007.
- [74] E. Komatsu *et al.*, “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 180, pp. 330–376, 2009.