



**UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO**

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Eletrônica e Sistemas

Graduação em Engenharia Eletrônica

José Ribamar Ribeiro Lino

Controle de Atitude e Estabilização de Cubesat

Recife
Abril de 2024

José Ribamar Ribeiro Lino

Controle de Atitude e Estabilização de Cubesat

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Orientador: Prof. Gilson Jerônimo da Silva Júnior, D.Sc.

Recife

Abril de 2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Lino, José Ribamar Ribeiro.

Controle de Atitude e Estabilização de Cubesat / José Ribamar Ribeiro Lino. -
Recife, 2024.

72 : il., tab.

Orientador(a): Gilson Jerônimo da Silva Júnior

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Engenharia Eletrônica -
Bacharelado, 2024.

Inclui referências.

1. Sistemas de Controle. 2. Cubesat. 3. Estabilização. 4. Atitude. 5. Controle.
I. Silva Júnior, Gilson Jerônimo da. (Orientação). II. Título.

000 CDD (22.ed.)

José Ribamar Ribeiro Lino

Controle de Atitude e Estabilização de Cubesat

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Banca Examinadora

Prof. Gilson Jerônimo da Silva Júnior, D.Sc.
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Daniel de Filgueiras Gomes, D.Sc.
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Rafael Cavalcanti Neto, D.Sc.
Universidade Federal de Pernambuco

Recife

Abril de 2024

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que foram fundamentais para a realização deste trabalho:

À minha família, pelo constante apoio, compreensão e paciência ao longo dessa jornada acadêmica.

Ao meu orientador, Gilson, pela orientação dedicada, incentivo constante e valiosas contribuições que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao Projeto de Extensão Asa Branca Aerospace e à Equipe de Sistemas de Controle por proporcionarem um ambiente colaborativo e oportunidades de aprendizado que enriqueceram minha experiência acadêmica.

Expresso minha gratidão aos professores do Departamento de Engenharia de Sistemas (DES) pela dedicação ao ensino e por compartilharem seu conhecimento e experiência, contribuindo para minha formação acadêmica.

A todos vocês, meu sincero agradecimento por fazerem parte desta jornada e por seu apoio e encorajamento ao longo do caminho.

Resumo do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao DES/UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Eletrônica (Eng.)

Controle de Atitude e Estabilização de Cubesat

José Ribamar Ribeiro Lino

Este trabalho foca no controle de atitude e estabilização de CubeSats, essencial para garantir o sucesso de suas missões. Nesse trabalho, houve um extensivo uso de rodas de reação, assim como o desempenho de diferentes controladores, como o Controlador Proporcional-Derivativo (PD) e o Regulador Quadrático Linear (LQR). A justificativa para essa pesquisa reside na crescente importância dos nanosatélites em missões comerciais, contrastando com a escassez de estudos sobre a estabilização tridimensional de CubeSats usando rodas de reação. Os objetivos incluem um estudo abrangente da dinâmica do CubeSat, investigação de representações de atitude, modelagem de motores DC e desenvolvimento de controladores eficazes.

Palavras-chave: Sistemas de Controle, Cubesat, Estabilização, Atitude, Controle.

Abstract of Course Conclusion Work presented to DES/UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Electronic Engineering (Eng.)

Attitude Control and Stabilization of CubeSat

José Ribamar Ribeiro Lino

This paper focuses on the attitude control and stabilization of CubeSats, essential to ensure the success of their missions. In this study, there was extensive use of reaction wheels, as well as the performance evaluation of different controllers, such as the Proportional-Derivative (PD) Controller and the Linear Quadratic Regulator (LQR). The justification for this research lies in the increasing importance of nanosatellites in commercial missions, contrasting with the lack of studies on the three-dimensional stabilization of CubeSats using reaction wheels. The objectives include a comprehensive study of CubeSat dynamics, investigation of attitude representations, DC motor modeling, and development of effective controllers.

Keywords: Control Systems; Cubesat; Stabilization; Attitude, Control.

Lista de Figuras

2.1	Cubesat 1U: Especificações das dimensões ¹	7
2.2	Controle em malha aberta [4].	8
2.3	Função de transferência de malha aberta [6].	8
2.4	Controle em malha fechada [4].	9
2.5	Controle em malha fechada generalizado [6].	9
2.6	Ação de controle proporcional ao sistema do tipo torque [6]	10
2.7	Especificações da resposta transitória [6].	12
2.8	Rotação utilizando a representação do Ângulo e Eixo de Euler [11].	22
2.9	Referencial inicial I.	24
2.10	Referencial intermediário H.	24
2.11	Referencial intermediário G.	25
2.12	Referencial final F.	25
3.1	Diagrama elétrico do modelo linear de um motor DC [5].	34
3.2	Diagrama de blocos do controle de Atitude(Apontamento).	37
3.3	Diagrama de blocos do Controle de Estabilidade.	38
3.4	Motor DC[12].	40
3.5	Especificações do motor DC026C-1 [12].	41
3.6	Dados de enrolamento do motor DC026C-1[12].	41
3.7	Exemplo ilustrativo de uma roda de reação. ²	43
4.1	Polos da planta simplificada e os polos dos requisitos	46
4.2	Polos e zeros para a realizar a avaliação do Critério de fase LGR.	47

4.3	Polos e zeros para a realizar a avaliação do Critério de módulo LGR.	48
4.4	Polos da malha direta e os polos dos requisitos.	49
4.5	Subsistema do Simulink para a dinâmica do CubeSat.	52
4.6	Diagrama de blocos da Dinâmica [13]	52
4.9	Subsistema do Simulink do controlador PD.	53
4.7	Subsistema do Simulink para a dinâmica simplificada.	53
4.8	Diagrama de blocos da Dinâmica Linear simplificada.	53
4.10	Subsistema do Simulink do controlador LQR.	54
4.11	Controlador PD: Lei de Realimentação para o modo de estabilização.	54
4.12	Controlador PD: Lei de realimentação para o modo de apontamento.	55
4.13	Controlador LQR: Lei de realimentação para o modo de estabilização.	55
4.14	Controlador LQR: Lei de realimentação para o modo de apontamento.	55
4.15	Subsistema do Simulink para o atuador.	56
4.16	Diagrama de bloco do atuador para 3 eixos.	56
4.17	Diagrama de bloco do atuador(Motor DC + Roda de Reação).	56
4.18	Subsistema do Simulink para a cinemática com quaternion.	57
4.19	Diagrama de bloco da cinemática.	57
4.20	<i>Script MATLAB</i> para cálculo da matriz $\Omega(\vec{\omega})$	58
4.21	Agrupamento de <i>To workspace</i>	58
4.22	Simulação do apontamento com um controlador PD.	59
4.23	Atitude do sistema para um referência [1.2, 1, 1.3].	60
4.24	Compensação dos ganhos para o apontamento.	60
4.25	Atitude do sistema para um referência [1.2, 1, 1.3] após a compensação.	61
4.26	Simulação da estabilização com um controlador PD.	61
4.27	Velocidade angular do sistema para uma velocidade angular inicial de [50, 25, 20] rad/s.	62
4.28	Compensação dos ganhos para o estabilização.	62
4.29	Velocidade angular do sistema após a compensação.	63
4.30	Simulação do apontamento com um controlador LQR.	63

4.31	Simulação da estabilização com um controlador LQR.	64
4.32	Resposta inicial controlador LQR para apontamento.	64
4.33	Resposta do controlador LQR para apontamento após ajustes.	65
4.34	Resposta do controlador LQR em modo de estabilização com Q identidade.	65
4.35	Resposta do controlador LQR em modo de estabilização com Q identidade.	66
4.36	Simulação do Coppelia com Simulink.	67

Lista de Tabelas

2.1	Classificação dos Pequenos Satélites de acordo com a sua massa [1]. . .	6
2.2	Efeito do aumento dos ganhos K_p , K_I e K_D do controlador PID [4]. . .	17
2.3	Erro estacionário em termos de K [6].	18
2.4	Ângulos de Euler: Sequências assimétricas [11].	26
2.5	Ângulos de Euler: Sequências simétricas [11].	27
3.1	Elementos do motor DC.	35
3.2	Motor DC Pittman DC026C-1: Tabela completa.	43

Lista de Abreviações

$1U$ <i>One Unit</i>
LGR	. Lugar geométrico das raízes
LQR	. <i>Linear Quadratic Regulator</i>
PD	... <i>Proportional Derivative</i>
K_p <i>Ganho proporcional</i>
K_i <i>Ganho integrativo</i>
K_d <i>Ganho derivativo</i>
ω_n <i>Frequência natural</i>
ω_d	<i>Frequência natural amortecida</i>
σ	.. <i>Coefficiente de atenuação</i>
ζ	<i>Coefficiente de amortecimento</i>
t_r <i>Tempo de subida</i>
t_p <i>Tempo de pico</i>
t_s	... <i>Tempo de acomodação</i>
M_p <i>Máximo sobressinal</i>
J <i>Função de custo</i>
Q <i>Matriz Q</i>
R <i>Matriz R</i>

Lista de Símbolos

A Ampère
V Volt
cm	.. Centímetro
kg	.. Quilograma
s	... Segundos
rad	... Radianos
H Henry
N Newton
m Metro
m^2	Metro cuadrado
Ω Ohm

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Abreviações	xii
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Justificativa	2
1.2 Objetivo Geral	2
1.2.1 Objetivos específicos	3
1.3 Organização do TCC	3
2 Fundamentos para pequenos satélites	5
2.1 Pequenos Satélites	5
2.2 Sistemas de Controle	7
2.3 Sistemas de Segunda ordem	10
2.3.1 Sistema subamortecido	11
2.3.2 Sistema superamortecido(Sobreamortecido)	11
2.3.3 Sistema criticamente amortecido	12
2.4 Especificações da resposta transitória	12
2.5 Lugar geométrico das raízes	14
2.6 Controlador PID	16
2.6.1 Erros estacionários	17

2.7	Controlador Regulador quadrático linear	19
2.8	Atitude	20
2.8.1	Referenciais	20
2.8.2	Teorema de Euler para rotações	21
2.8.3	Ângulo e eixo de Euler	22
2.8.4	Ângulos de Euler	23
2.8.5	Quatérnios	27
3	Desenvolvimento	30
3.1	Dinâmica	30
3.1.1	Simplificando a dinâmica	32
3.2	Modelo de Motor DC	34
3.3	Modelagem do Espaço de estados da Malha direta	36
3.3.1	Apontamento	37
3.3.2	Estabilização	38
3.4	Modelagem da Função de transferência da Malha Direta	39
3.4.1	Estabilização	39
3.4.2	Apontamento	40
3.5	Motor DC Pittman DC026C-1	40
3.5.1	Estimando K_b	42
3.5.2	Estimando Bm	42
3.6	Roda de Reação	43
4	Projeto e Simulação	44
4.1	Projeto de Controladores	44
4.2	Controlador PD	45
4.2.1	Controle de Estabilização	45
4.2.2	Controle de Atitude	49
4.3	Controlador LQR	50
4.3.1	Controle LQR para Apontamento de Sistemas	50

4.3.2	Controle LQR para Estabilização do Sistema	51
4.4	Elementos da Modelagem	52
4.5	Simulações	58
4.5.1	Controlador PD	59
4.5.2	Controlador LQR	63
4.6	Simulações com Animações	66
4.6.1	Coppelia Sim	66
4.6.2	Modelo do CubeSat 1U	67
5	Considerações Finais	68
5.1	Conclusão	68
5.2	Dificuldades Encontradas	69
5.3	Trabalhos Futuros	69
	Referências Bibliográficas	71

Capítulo 1

Introdução

A EXPLORAÇÃO espacial tem passado por avanços significativos nas últimas décadas, com destaque para os CubeSats, pequenos satélites modulares que ganharam popularidade nos últimos anos. Uma dessas inovações notáveis são os CubeSats, pequenos satélites modulares que têm ganhado popularidade desde nos últimos anos, com cerca de 1700 pequenos satélites lançados no período de 2012 a 2019[1]. Considerados como uma plataforma acessível e flexível para testes tecnológicos no espaço, os CubeSats oferecem uma entrada viável no campo do desenvolvimento de tecnologia espacial.

No entanto, apesar de sua crescente utilização, os CubeSats ainda enfrentam desafios de design não resolvidos, e um dos desafios cruciais enfrentados no contexto da operação de satélites é o controle da atitude e estabilização. Esta função é fundamental para o sucesso das missões espaciais, especialmente quando se considera a utilização exclusiva de rodas de reação para a estabilização. Com uma variedade de atuadores à disposição, como rodas de reação, magnetorquers e propulsores, projetar um sistema eficaz para orientar um CubeSat requer uma compreensão sólida da mecânica espacial.

Este trabalho concentra-se em explorar o funcionamento das rodas de reação no controle de atitude dos CubeSats com 3 eixos de liberdade, examinando também o desempenho comparativo de diferentes controladores, como o Controlador Proporcional Derivativo (PD) e o Regulador Quadrático Linear (LQR), quando combinados

com motores DC e rodas de reação. Além disso, são investigadas estratégias específicas de apontamento e estabilização adaptadas às características dos CubeSats, assim como a simplificação da dinâmica desses dispositivos para uma análise mais aprofundada[2].

1.1 Justificativa

O controle de atitude é um componente crítico em missões espaciais, especialmente para CubeSats, que têm se tornado cada vez mais relevantes na exploração espacial moderna. Embora existam diversos métodos de controle de atitude disponíveis, o uso de rodas de reação em CubeSats apresenta desafios únicos que ainda não foram completamente explorados na literatura científica.

A maioria das pesquisas existentes concentra-se no uso de magnetorquers para controle de atitude, deixando uma lacuna significativa no conhecimento sobre a implementação efetiva de sistemas de controle baseados em rodas de reação para CubeSats. Esta lacuna é particularmente relevante considerando que as rodas de reação oferecem vantagens potenciais em termos de precisão e resposta rápida no controle de atitude.

Além disso, o crescente interesse comercial em CubeSats, evidenciado pelo lançamento de aproximadamente 1700 pequenos satélites entre 2012 e 2019, demanda soluções mais eficientes e confiáveis para o controle de atitude.

1.2 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo investigar e avaliar o uso de quatérnios para representação da atitude de um CubeSat 1U, em substituição aos tradicionais ângulos de Euler. Busca-se analisar a eficácia de diferentes estratégias de controle, comparando o desempenho de um controlador PD convencional com um controlador mais sofisticado baseado em LQR (Regulador Quadrático Linear), utilizando rodas de reação como atuadores.

A partir de hipóteses formuladas analiticamente, pretende-se responder à seguinte questão de pesquisa: "É possível implementar um sistema eficaz de controle de atitude e estabilização para um CubeSat 1U equipado com três rodas de reação, utilizando controladores PD ou LQR?". Esta investigação seguirá uma abordagem analítica a posteriori, empregando ferramentas de simulação para verificar e validar as hipóteses propostas.

1.2.1 Objetivos específicos

- Realizar um estudo profundo sobre quatérnios no contexto de atitude de um corpo, principalmente no que o diferencia do usual Ângulo de Euler;
- Pesquisar modelos de Motor DC comerciais, para utilizar os seus parâmetros nas simulações;
- Projetar e implementar controladores PD e LQR para o sistema, estabelecendo métricas claras de desempenho para comparação;
- Validar os controladores propostos através de simulações numéricas detalhadas, utilizando ambientes como Simulink e MATLAB;
- Analisar comparativamente o desempenho dos controladores em termos de precisão de apontamento, tempo de resposta e robustez.

1.3 Organização do TCC

O conteúdo deste trabalho está dividido em 4 capítulos e um apêndice. As referências encontram-se nas páginas finais.

O **Capítulo 2** oferece uma base teórica sólida para a compreensão dos conceitos essenciais abordados no trabalho. Explora-se inicialmente as noções de atitude e suas diferentes formas de representação, seguido por uma análise detalhada

da modelagem de motores DC, crucial para o entendimento do sistema de controle proposto. Além disso, são discutidos os tipos de controladores relevantes para o controle de atitude e estabilização.

No Capítulo 3 são apresentados os detalhes do desenvolvimento do trabalho, desde a investigação aprofundada da dinâmica do CubeSat até a implementação dos controladores projetados. Inicia-se com uma análise detalhada da dinâmica do CubeSat, incluindo a seleção de um modelo de motor DC e a investigação de seus parâmetros relevantes.

No Capítulo 4 Em seguida, são abordados os processos de modelagem do sistema na forma de espaço de estados e função de transferência, fornecendo uma base sólida para o projeto de controladores. Posteriormente, são discutidas as etapas de projeto e implementação dos controladores, seguidas pela realização de simulações para avaliar o desempenho do sistema de controle desenvolvido.

No Capítulo 5 as considerações finais do trabalho são apresentadas, incluindo uma análise comparativa dos dois tipos de controladores desenvolvidos. São discutidas as vantagens e desvantagens de cada abordagem, bem como a sua eficácia na solução do problema proposto. Também discute-se as possíveis direções para futuras pesquisas na área.

O Apêndice A. contém os códigos MATLAB utilizados durante o desenvolvimento do trabalho, oferecendo uma referência útil para reprodução dos resultados e aprofundamento nos métodos e técnicas empregados ao longo do processo de pesquisa e desenvolvimento.

Capítulo 2

Fundamentos para pequenos satélites

ESTE capítulo tem como objetivo principal apresentar a fundamentação teórica essencial para o entendimento de nanosatélites, especificamente um CubeSat 1U. É abordada a dinâmica desse tipo de satélite, fornecendo uma compreensão profunda de suas características operacionais. Além disso, é realizada uma avaliação detalhada do modelo de um Motor DC, cuja integração é crucial para o funcionamento adequado do CubeSat. São discutidas diversas formas de representação de atitude, explorando as técnicas mais pertinentes para o problema em questão. Também são apresentados diferentes tipos de controladores, essenciais para a estabilização e controle de apontamento do CubeSat, juntamente com técnicas que auxiliam no projeto eficiente desses controladores. Essa análise teórica fornece uma base sólida para o desenvolvimento e implementação dos sistemas de controle necessários para o sucesso da missão do CubeSat.

2.1 Pequenos Satélites

Os satélites desempenham um papel fundamental na sociedade moderna, proporcionando uma ampla gama de serviços essenciais para a comunicação, navegação, observação da Terra e pesquisa científica. Eles são importantes para a infraestrut-

Tabela 2.1: Classificação dos Pequenos Satélites de acordo com a sua massa [1].

Categoria	Massa(kg)
Femto	0.01 - 0.09
Pico	0.1 - 1
Nano	1.1 - 10
Micro	11 - 200
Mini	201 - 600

tura de telecomunicações, permitindo a transmissão de dados, voz e vídeo em escala global. Além disso, os sistemas de posicionamento por satélite, como o GPS, são indispensáveis para a navegação terrestre, marítima e aérea, além de desempenharem um papel crucial em aplicações de mapeamento e geolocalização. Na área da pesquisa científica, os satélites são utilizados para estudar o clima, monitorar o meio ambiente, observar fenômenos naturais e explorar o espaço exterior, fornecendo dados valiosos para entender melhor o nosso planeta e o universo. Por sua vez, Os pequenos satélites, também conhecidos como nanosatélites ou CubeSats, representam uma classe de satélites que vêm se destacando na exploração espacial nas últimas décadas[3]. Esses satélites são caracterizados por seu tamanho compacto e modularidade, o que os torna mais acessíveis e econômicos em comparação com os satélites tradicionais. Os pequenos satélites são classificados como mostra a Tabela 2.1, de acordo com a sua massa [1].

Além dessa definição, existem também outros padrões utilizados, como por exemplo os CubeSat 1U, que pode ser visto na imagem 2.1, que são padronizados em unidades cúbicas de 10 centímetros de lado e podem ser combinados em formações para realizar uma variedade de missões espaciais, possuindo uma massa menor que 1,33kg. Existem também os CanSats, que utilizam uma estrutura cilíndrica, no tamanho e volume de uma lata de refrigerante. Tanto o CubeSat quanto o CanSats são utilizados em uma ampla gama de aplicações, incluindo observação da Terra,

comunicação, pesquisa científica e educação espacial[3].

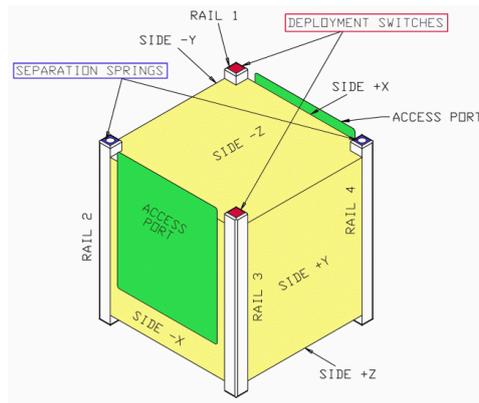


Figura 2.1: Cubesat 1U: Especificações das dimensões ¹

2.2 Sistemas de Controle

Um sistema de controle é uma estrutura organizada de componentes que trabalham juntos para regular o comportamento de um sistema dinâmico. Esses componentes podem incluir sensores para medir variáveis de entrada, atuadores para modificar variáveis de saída, e elementos de processamento para tomar decisões com base nas informações recebidas. A configuração desses componentes é projetada para garantir que o sistema responda de maneira desejada às mudanças em seu ambiente ou condições de operação.

Ao aplicar a teoria de sistemas lineares, espera-se que a relação de causa e efeito seja previsível e consistente em todos os componentes do sistema. Isso significa que as mudanças nas variáveis de entrada terão efeitos previsíveis nas variáveis de saída, tornando possível prever e controlar o comportamento do sistema com precisão. Além disso, um sistema de controle em malha aberta, como está na Figura 2.2, utiliza um controlador e um atuador para obter a saída desejada, e aqui não há qualquer tipo de realimentação.

¹Fonte: California Polytechnic State University. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6e/CubeSat_Design_Specification_rev._12_-_1U_dimensions_-_main.png. Acesso em: 05 jan. 2024.

Um sistema de controle em malha aberta somente utiliza um dispositivo de atuação (Atuador) para controlar o processo de forma direta sem o auxílio de qualquer realimentação [4]. Na prática, a união do bloco de controlador e atuador dados na Figura 2.2 pode ser um amplificador, um filtro, uma ligação mecânica ou outro elemento de controle apropriado para efetuar o controle do processo em questão, e por sua simplicidade e baixo custo, muitos produtos de uso não-crítico utilizam tal abordagem de controle [5].

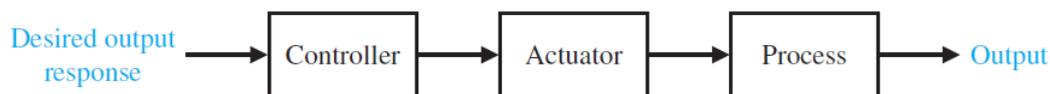


Figura 2.2: Controle em malha aberta [4].

Além disso, Admitindo-se um controle, atuador e processo linear e invariante no tempo, na qual $X(s)$ é a transformada de Laplace da entrada $x(t)$, e $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída $y(t)$. Sendo assim, referente à Figura 2.3, a função de transferência $G(s)$ do sistema [6] é dada pela Equação

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (2.1)$$

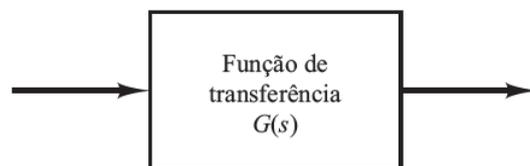


Figura 2.3: Função de transferência de malha aberta [6].

Por outro lado, um sistema de controle em malha fechada utiliza uma medição adicional da saída atual em relação à referência, como mostra a Figura 2.4. Comu-

mente é utilizado um subtrator, responsável por realizar a diferença entre a referência e a saída atual, sendo esta abordagem denominada como realimentação negativa [4]. É importante salientar que é necessário a presença de um sensor na saída para que esse tipo de controle seja efetuado, e tipicamente há erros associados ao sensor utilizado.

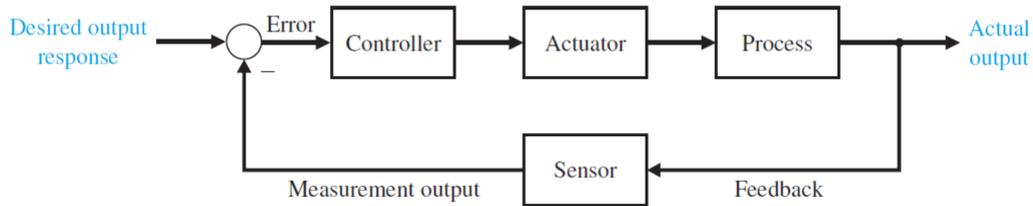


Figura 2.4: Controle em malha fechada [4].

Analisando de outra maneira, é possível representar um sistema de controle em malha fechada de outra forma mais compacta e algébrica, conforme a Figura 2.5.

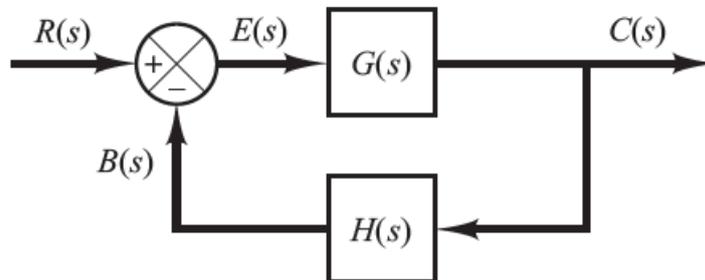


Figura 2.5: Controle em malha fechada generalizado [6].

Algebricamente, define-se as equações extraídas a partir da Figura 2.5 como:

$$E(s) = R(s) - B(s), \quad (2.2)$$

$$C(s) = E(s)G(s), \quad (2.3)$$

$$B(s) = C(s)H(s). \quad (2.4)$$

Isolando $C(s)$ e $R(s)$ nas equações (2.2),(2.3) e (2.4), tem-se que a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ [6], que é definida como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (2.5)$$

2.3 Sistemas de Segunda ordem

Considerando que há um o sistema a ser controlado e que ele é composto por elementos de inércia e atrito viscoso, e com um elemento proporcional em seu ramo direto, o diagrama equivalente tem a sua representação como mostra a Figura 2.6.

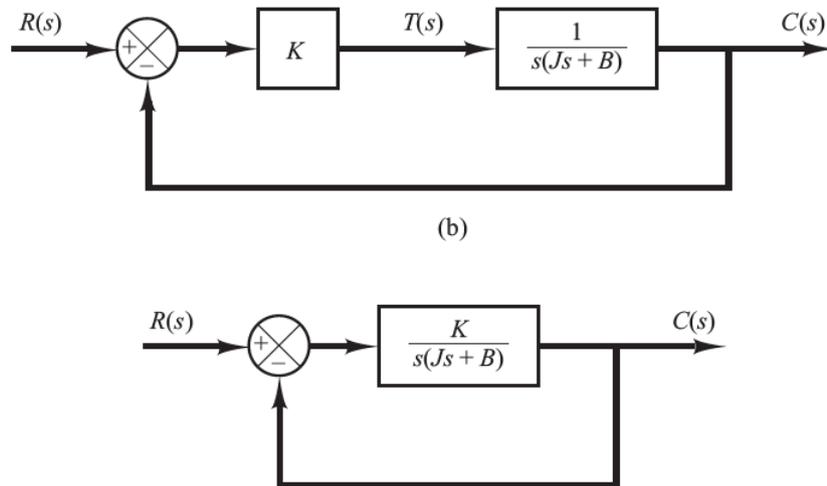


Figura 2.6: Ação de controle proporcional ao sistema do tipo torque [6]

Utilizando a Equação (2.5) vista na seção anterior temos então uma função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ [6] dada como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/Js + K/J}. \quad (2.6)$$

A Equação (2.6) é um exemplo de um sistema de segunda ordem muito utilizado para realizar análises. Escrevendo a frequência natural amortecida como

$\omega_d = \sqrt{\frac{K}{J} - \left(\frac{B}{2J}\right)^2}$ e a atenuação $\sigma = \frac{B}{2J}$. E, sendo o módulo do polo do sistema dado por ω_n , conhecido como frequência natural [6], dado por

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 = \left(\frac{B}{2J}\right)^2 + \frac{K}{J} - \left(\frac{B}{2J}\right)^2 = \frac{K}{J}. \quad (2.7)$$

A partir disso, escreve-se a frequência natural amortecida e o coeficiente de atenuação em função de ω_n e do coeficiente de amortecimento ζ como

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n, \quad (2.8)$$

$$\sigma = \zeta \omega_n. \quad (2.9)$$

Substituindo as equações (2.9), (2.8) e (2.7) na Equação (2.6) tem-se então a equação da forma padrão de segunda ordem escrita como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}. \quad (2.10)$$

Assim, o comportamento do sistema é descrito por meio dos parâmetros ζ e ω_n . Comumente a entrada $r(t)$ será um degrau unitário, ou seja, $R(s) = 1/s$, muito utilizada para analisar a resposta do sistema em função de cada um de seus parâmetros.

2.3.1 Sistema subamortecido

Um sistema de segunda ordem subamortecido é considerado quando $0 < \zeta < 1$ [6], nesse caso a resposta ao degrau $c(t)$ [6] poderá ser escrito como

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen} \left(\omega_d t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right). \quad (2.11)$$

2.3.2 Sistema superamortecido(Sobreamortecido)

Um sistema de segunda ordem é considerado sobreamortecido ou superamortecido quando $\zeta > 1$ [6], nesse caso, a resposta ao degrau [6] é escrita como

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right). \quad (2.12)$$

2.3.3 Sistema criticamente amortecido

Um sistema de segunda ordem é dito criticamente amortecido quando $\zeta = 1$ [6], e a resposta ao degrau [6] é dada como

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) = 1 - e^{-\sigma t}(1 + \sigma t). \quad (2.13)$$

2.4 Especificações da resposta transitória

Para o caso de um sistema de segunda ordem, há características de desempenho que são especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada em degrau unitário [6]. Algumas características comuns, como mostra a Figura 2.7, são abordadas a seguir. Supõe-se que a resposta ao degrau do sistema é subamortecida como está na Equação (2.11).

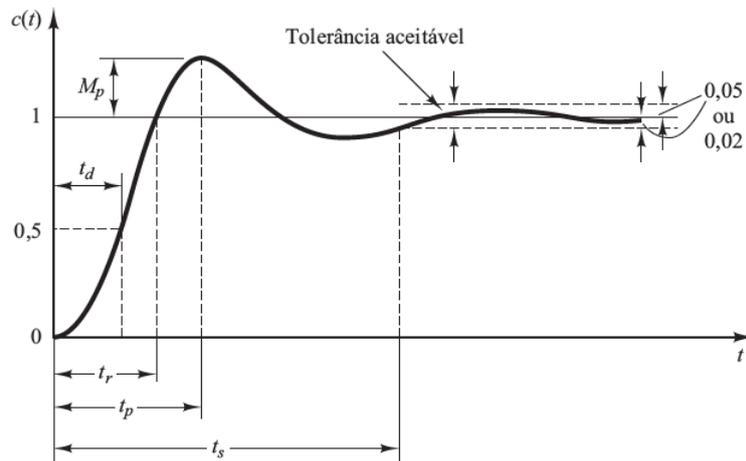


Figura 2.7: Especificações da resposta transitória [6].

Define-se o tempo de subida como o tempo necessário para que a resposta seja igual ao valor em estado estacionário [6], e pode ser calculado por

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}. \quad (2.14)$$

Outro parâmetro muito importante é o tempo de pico, que é basicamente o tempo necessário para atingir o valor máximo. Utilizando a Equação (2.11), chega-se a

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}. \quad (2.15)$$

O máximo sobressinal é muito importante para contabilizar o quão acima da referência o pico ficou, é um parâmetro muito crucial para processos que são sensíveis à variações. Para realizar a análise, é importante lembrar que o valor de que $c(t)$ assume em estado estacionário será aproximadamente o valor da referência, para este caso, assume-se que este valor é 1. Dessa forma, o máximo sobressinal é dado como

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\sigma\pi/\omega_d}. \quad (2.16)$$

O tempo de acomodação refere-se ao período necessário para que a resposta de um sistema atinja e permaneça dentro de uma faixa aceitável de variação, e, a faixa aceitável é dada pela variável i , em que $0\% < i < 100\%$. Considerando a Equação ??, chega-se a

$$1 - i = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.17)$$

$$i = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.18)$$

$$\ln(i) = -\sigma t_s - \ln(\sqrt{1 - \zeta^2}), \quad (2.19)$$

$$\sigma t_s = -\ln(i) - \ln(\sqrt{1 - \zeta^2}). \quad (2.20)$$

Dessa forma, então o tempo de acomodação é expresso como

$$t_s = \frac{\ln(100) - \ln(100 \times i) - \ln(\sqrt{1 - \zeta^2})}{\sigma}. \quad (2.21)$$

2.5 Lugar geométrico das raízes

O lugar das raízes é um método criado por Evans em 1948 para avaliação da modificação geométrica dos polos a partir da variação do ganho de um controle proporcional. Essa técnica tem sido utilizada até hoje quando lida-se com sistemas de controle lineares. Mais especificamente, é um método capaz de ilustrar o quão sensível um sistema é com a variação de algum parâmetro [4].

Supõe-se que há uma planta ou processo a ser controlado, então, a representação do sistema em malha fechada poderá ser dada como mostra a Figura 2.5. A função de transferência de malha fechada é dada na Equação (2.5), mas, haverá um parâmetro variável, denominado como K, logo, a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}. \quad (2.22)$$

Desse modo, os polos da Equação (2.5) são justamente as raízes do polinômio $1 + KG(s)H(s)$, logo, temos a equação

$$1 + KG(s)H(s) = 0. \quad (2.23)$$

Dessa maneira, há duas condições que satisfazem a Equação(2.23) [6], são elas

$$|KG(s)H(s)| = 1, \quad (2.24)$$

$$\angle G(s)H(s) = 180(2r + 1) = \pi + 2\pi k, \quad r, k \in \mathbb{Z} \quad (2.25)$$

Reescrevendo $KG(s)H(s)$ em razão de seus polos e zeros, então

$$KG(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}, \quad m \leq n. \quad (2.26)$$

Logo, com base na Equação (2.26), é possível reescrever as condições dadas nas equações (2.24) e (2.25) [6] como

$$|KG(s)H(s)| = K \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1, \quad (2.27)$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle s + z_i - \sum_{j=1}^n \angle s + p_j = 180(2r + 1), \quad (2.28)$$

respectivamente. Assim, o método do local das raízes consiste de uma série de regras sistemáticas para desenhar esse local geométrico [4], contendo:

1. Local das raízes no eixo real: Para esta etapa, considera-se a equação característica do sistema em malha aberta. Por exemplo, se a equação característica é dada por $1 + KG(s)H(s) = 0$, onde $G(s)$ é a função de transferência do sistema, então o local das raízes no eixo real ocorre quando $G(s)$ é real, ou seja, quando a parte imaginária de $G(s)$ é zero.
2. Desenho das assíntotas: As assíntotas são desenhadas para o caso em que o número de polos excede o número de zeros. As assíntotas são linhas retas no plano complexo que descrevem o comportamento dos polos quando K tende ao infinito. Considerando n como o número de polos e m o número de zeros, com um $r \in \mathbb{Z}$, o ângulo dessas assíntotas, e o ponto de partida das assíntotas, respectivamente, é dado por

$$\phi = \frac{180(2r + 1)}{n - m}, \quad (2.29)$$

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}. \quad (2.30)$$

3. Ponto de partida do eixo real: O ponto de partida do eixo real é o ponto onde

o local das raízes começa no eixo real. Isso ocorre quando K é zero, ou seja, no ponto onde a função de transferência do sistema em malha aberta é idêntica ao denominador da equação característica, ou seja,

$$\frac{dKG(s)H(s)}{ds} = \frac{d(-1)}{ds} = 0 \quad (2.31)$$

4. Ponto de cruzamento com o eixo imaginário: Este ponto ocorre quando a função de transferência do sistema em malha aberta é puramente imaginária. Isso pode ser encontrado resolvendo $G(s) = j\omega$, onde ω é a frequência angular.
5. Ângulos de partida ou chegada de polos/zeros: Os ângulos de partida e chegada referem-se aos ângulos formados pelos polos e zeros com o eixo real no local das raízes. Os polos partem do sistema quando K aumenta e chegam quando K diminui, já os zeros fazem o oposto.

2.6 Controlador PID

O sinal de controle $c(t)$ de um controlador PID, teoricamente, pode ser escrito como

$$c(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.32)$$

No domínio do plano s , aplicando a Transformada de Laplace na Equação (2.32), obtém-se a função de transferência [4] dada pela Equação

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (2.33)$$

Contudo, a forma mais comumente utilizada para implementar um controlador PID [7] é utilizando a função de transferência

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right). \quad (2.34)$$

Tabela 2.2: Efeito do aumento dos ganhos K_p , K_I e K_D do controlador PID [4].

Ganhos	Overshoot	Tempo de acomodação	Erro estacionário
Aumento do K_p	Aumenta	Impacto pequeno	Diminui
Aumento do K_I	Aumenta	Aumenta	Zera
Aumento do K_D	Diminui	Diminui	Sem alteração

Ao avaliarmos a função de transferência descrita pela Equação (2.34), nota-se que no termo derivativo há um filtro passa baixas com um polo em $-N$, onde esse valor N , por padrão, geralmente é $N = 100$, e tal filtro tem o intuito de remover os ruídos de alta frequência.

Para ficar mais fácil o entendimento acerca dos ganhos de cada termo do controlador PID para uma entrada $u(t)$ degrau unitário, a Tabela 2.2 resume o que já foi dito anteriormente sobre os cada um dos termos do controlador PID.

2.6.1 Erros estacionários

Comumente os sistemas de controle são classificados de acordo a sua capacidade de seguir o sinal de entrada $u(t)$, seja ele um degrau, rampa ou parábola. Considerando a seguinte função de transferência de malha aberta [6]

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1) \dots (T_p s + 1)}, \quad (2.35)$$

E, sabendo que a função de transferência em malha fechada é dada pode ser dada de acordo com a Equação (2.5), considerando que a realimentação é unitária, ou seja, $H(s) = 1$, então a função de transferência entre o erro e o sinal de entrada $E(s)/R(s)$ [6] pode ser escrita como

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}. \quad (2.36)$$

Com o auxílio do teorema do valor final [6], concluí-se que o erro estacionário(e_{ss}) é

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}. \quad (2.37)$$

Para o caso onde a entrada é um degrau, ou seja, $R(s) = 1/s$, então

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (2.38)$$

Considerando $N = 0$ na Equação (2.35), tem-se que

$$K_q = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1) \dots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K, \quad (2.39)$$

Logo o erro em estado estacionário é

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}. \quad (2.40)$$

Agora, considerando $N \geq 1$ na Equação 2.35, temos que

$$K_q = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \rightarrow \infty \quad (2.41)$$

Dessa forma, o erro em estado estacionário é

$$e_{ss} = 0. \quad (2.42)$$

Sendo assim, a mesma análise pode ser feita para os outros tipos de entrada (rampa e parábola) para alguns valores de N , e, dessa forma, obtém-se a Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Erro estacionário em termos de K [6].

	$\mathbf{r(t)} = \mathbf{1}$	$\mathbf{r(t)} = \mathbf{t}$	$\mathbf{r(t)} = \mathbf{t^2/2}$
Sistema do tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Sistema do tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema do tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

2.7 Controlador Regulador quadrático linear

Dado um modelo linear descrito em sua forma de espaço de estados como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad (2.43)$$

E, sabendo que o vetor \vec{u} pode ser escrito como

$$\vec{u}(t) = -K\vec{x}(t), \quad (2.44)$$

para determinar a matriz K se faz necessário minimizar a função de custo, ou índice de desempenho, $J(t)$ [6], sendo que tal função de custo pode ser escrita como

$$J = \int_0^{\infty} (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt, \quad (2.45)$$

Em que Q é uma matriz definida semi-positiva ou real simétrica, R é uma matriz definida positiva ou real simétrica. Observa-se que uma matriz qualquer, A , pode ser considerada como definida positiva [8] se ela satisfaz a seguinte propriedade :

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x}. \quad (2.46)$$

Por outro lado, uma matriz B definida semi-positiva [8] é definida se ela satisfaz a condição a seguir:

$$\vec{x}^T B \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x}, \vec{x} \neq 0. \quad (2.47)$$

De forma simplificada, as matrizes Q e R funcionam como “pesos”, a matriz Q possui pesos para cada estado do vetor de estados \vec{x} , por sua vez, a matriz R possui pesos para cada entrada do vetor de controle \vec{u} .

Dessa forma, uma vez que as matrizes A , B , Q , R estão definidas, é necessário solucionar a Equação algébrica contínua de Ricatti para a matriz P [9], e tal Equação é escrita como

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (2.48)$$

Após solucionar a Equação (2.48), substituí-se as matrizes P encontradas na Equação (2.44) e assim obtém-se um $u(t)$ dado como

$$\vec{u}(t) = -K\vec{x}(t) = -R^{-1}B^T P\vec{x}(t). \quad (2.49)$$

Logo, encontra-se uma matriz K para cada matriz P , em seguida avalia-se então qual das matrizes K fará com que os autovalores da matriz $(A - BK)$ possuam partes reais negativas, ou seja, polos no eixo real negativo do plano s .

2.8 Atitude

Em geometria, a atitude de um objeto (corpo rígido, plano ou linha), faz parte da descrição de como ele é colocado no espaço em 3D que ocupa [10].

2.8.1 Referenciais

Para analisar a atitude é muito útil utilizar referenciais pré-definidos. Sendo assim, define-se dois referenciais para executar as análises posteriores, um inercial e outro não-inercial.

Referencial do Corpo/Não-Inercial

Um sistema de coordenadas do corpo da espaçonave é definido por uma origem em um ponto específico dentro do corpo da espaçonave e três eixos cartesianos. Esse sistema é utilizado para alinhar os diversos componentes durante a montagem da espaçonave. No entanto, durante o lançamento, os componentes podem se mover devido às forças extremas sofridas, e também podem se mover durante a órbita devido a deformações térmicas. É feito todo o esforço possível para limitar esses movimentos, mas nem sempre eles podem ser negligenciados. Se devem ser ou não negligenciados

depende da precisão de apontamento exigida pela espaçonave. Além disso, alguns componentes da espaçonave, como os painéis solares ou instrumentos giratórios, são movidos intencionalmente. Portanto, é comum definir o sistema de coordenadas do corpo da espaçonave de forma operacional como a orientação de alguma base de navegação suficientemente rígida, que é um subsistema da espaçonave que inclui os sensores de atitude mais críticos e instrumentos de carga útil. A base de navegação muitas vezes toma a forma de uma bancada óptica especialmente construída, com seus sensores e componentes de carga útil acoplados. O objetivo da estimativa de atitude e do controle de atitude é determinar e controlar a orientação da base de navegação em relação a algum sistema de referência externo [11].

Referencial Inercial

Por outro lado, no caso de um sistema de referência inercial é um sistema em que as leis de movimento de Newton são válidas. É um fato bem conhecido da mecânica clássica que qualquer sistema em movimento com velocidade constante e sem rotação em relação a um sistema inercial também é inercial. A existência desses sistemas de referência dinamicamente preferidos levanta a questão interessante se há algo em relação ao qual todos os sistemas inerciais são não-rotativos e não-acelerados.

2.8.2 Teorema de Euler para rotações

O teorema de Euler para rotações é um importante resultado matemático na análise de movimentos de rotação tridimensionais. Segundo esse teorema, qualquer rotação tridimensional pode ser representada por um eixo de rotação fixo no espaço e um ângulo de rotação em torno desse eixo, conforme mostra a Figura 2.8.

2.8.3 Ângulo e eixo de Euler

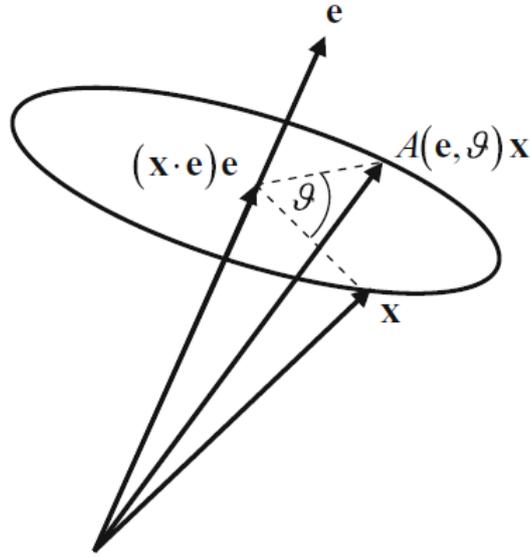


Figura 2.8: Rotação utilizando a representação do Ângulo e Eixo de Euler [11].

Considerando a Figura 2.8, expressa-se o vetor \vec{x} como uma soma da sua componente paralela ao vetor eixo de Euler e e a componente perpendicular ao eixo de Euler.

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} = (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{e}) \quad (2.50)$$

Aplicando o operador de rotação $A(\vec{e}, v)$ na Equação (2.50), tem-se então a equação

$$A(\vec{e}, v)\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + (\cos(v))\vec{x}_{\perp} - \text{sen}(v)\vec{e} \times \vec{x}. \quad (2.51)$$

Isolando o termo $A(\vec{e}, v)$ na equação 2.51, teremos então que

$$A(\vec{e}, v) = \cos(v)I_{3 \times 3} - \text{sen}(v)[\vec{e} \times] + (1 - \cos(v))\vec{e}\vec{e}^T. \quad (2.52)$$

Sabendo que [11]

$$[\vec{x}\times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

e após mais algumas modificações na Equação (2.52), tem-se a equação a seguir que representa a matriz de atitude utilizando a representação de Ângulo e eixo de Euler:

$$A(\vec{e}, v) = I_{3\times 3} - \text{sen}(v)[\vec{e}\times] + (1 - \cos(v))[\vec{e}\times]^2, \quad (2.53)$$

A representação eixo-ângulo é amplamente utilizada em aplicações de mecânica e controle, como na descrição de rotações de corpos rígidos, orientação de satélites, animação por computador, entre outras. Essa representação é particularmente útil em situações em que é necessário descrever uma rotação complexa de forma simples e intuitiva.

2.8.4 Ângulos de Euler

A representação de um ângulo de Euler expressa uma rotação de um referencial inicial I para um referencial final F como um produto de três rotações [11], ou seja,

$$A_{FI}(\vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi, \phi, \theta, \psi) = A_{FG}(\vec{e}_\psi, \psi)A_{GH}(\vec{e}_\theta, \theta)A_{HI}(\vec{e}_\phi, \phi). \quad (2.54)$$

Dessa forma, a rotação tridimensional de um corpo pode ser descrita como uma rotação em torno de um eixo fixo no espaço, como mostra a Figura 2.10, seguida de uma segunda rotação em torno de um eixo perpendicular ao primeiro eixo conforme a Figura 2.11, seguida de uma terceira rotação em torno de um eixo perpendicular aos dois primeiros eixos como está na Figura 2.12.

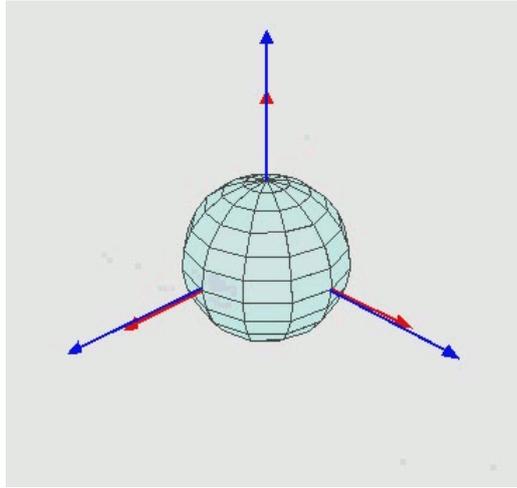


Figura 2.9: Referencial inicial I.

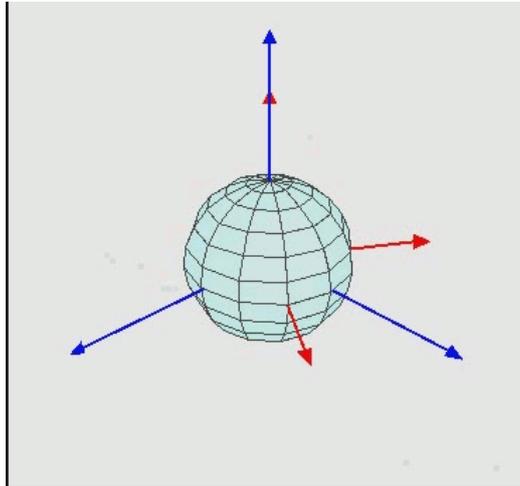


Figura 2.10: Referencial intermediário H.

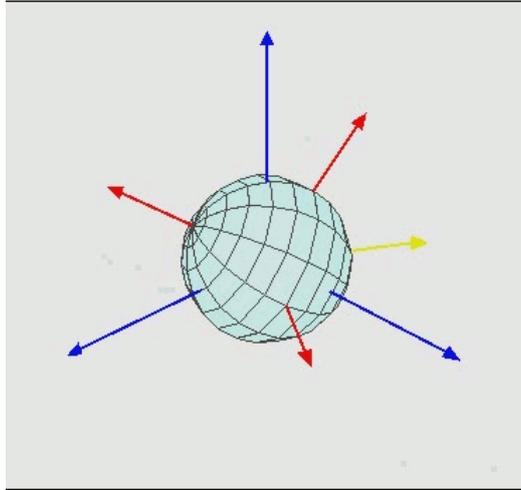


Figura 2.11: Referencial intermediário G.

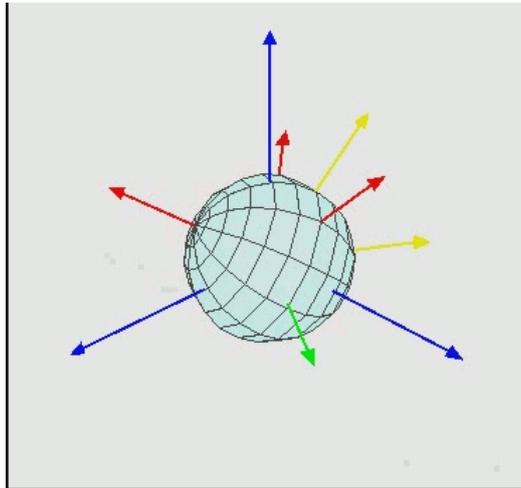


Figura 2.12: Referencial final F.

Ao total, existem doze sequências possíveis para realizar essas rotações em torno de eixos para os ângulos de Euler, sendo seis simétricas e seis assimétricas [11]. Agora, para um exemplo mais concreto, escolhendo-se a sequência simétrica 3 - 1 - 3, e considerando a Equação (2.54) se transformará em

$$A_{313}(\phi, \theta, \psi) = A(\vec{e}_3, \psi)A(\vec{e}_1, \theta)A(\vec{e}_3, \phi) = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Após realizar os produtos entre as três matrizes na Equação (2.56), obtém-se então que

$$A_{313}(\phi, \theta, \psi) = A(\vec{e}_3, \psi)A(\vec{e}_1, \theta)A(\vec{e}_3, \phi) = \begin{bmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & c\psi s\phi + s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ -s\psi c\phi - c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & -s\theta c\phi & c\theta \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Ademais, as tabelas 2.5 e 2.4 fornecem as matrizes de atitude para as seqüências simétricas e assimétricas, respectivamente.

Tabela 2.4: Ângulos de Euler: Sequências assimétricas [11].

Sequência	Matriz de Atitude
1 - 2 - 3	$\begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi - c\phi s\theta c\psi \\ -c\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$
1 - 3 - 2	$\begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi \\ -s\theta & c\phi c\theta & s\phi c\theta \\ c\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi \end{bmatrix}$
2 - 1 - 3	$\begin{bmatrix} c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ s\phi c\theta & -s\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$
2 - 3 - 1	$\begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\theta & -s\phi c\theta \\ s\phi s\psi - c\phi s\theta c\psi & c\theta c\psi & c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi \\ s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & -c\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi \end{bmatrix}$
3 - 1 - 2	$\begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & -c\theta s\psi \\ -s\phi c\theta & c\phi c\theta & s\theta \\ c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\theta s\phi - c\phi s\theta c\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$
3 - 2 - 1	$\begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi c\theta & -s\theta \\ -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\psi \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$

Tabela 2.5: Ângulos de Euler: Sequências simétricas [11].

Sequência	Matriz de Atitude
1 - 2 - 1	$\begin{bmatrix} c\theta & s\phi s\theta & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi \\ s\theta c\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi \end{bmatrix}$
1 - 3 - 1	$\begin{bmatrix} c\theta & c\phi s\theta & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi \\ s\theta s\psi & -s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi \end{bmatrix}$
2 - 1 - 2	$\begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi & -s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi \\ s\phi s\theta & c\theta & c\phi s\theta \\ c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & -s\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi \end{bmatrix}$
2 - 3 - 2	$\begin{bmatrix} -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi \\ -c\phi s\theta & c\theta & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi \end{bmatrix}$
3 - 1 - 3	$\begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ -c\theta s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix}$
3 - 2 - 3	$\begin{bmatrix} -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & -s\theta c\psi \\ -s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ c\phi s\theta & s\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix}$

2.8.5 Quatérnios

Há muitas formas de interpretar um quatérnio, mas, usualmente os quatérnios são comumente escritos como um vetor de quatro componentes com algumas operações bem definidas para o mesmo [11]. E, as três primeiras componentes de um quatérnio \mathbf{q} são comumente escritas como um vetor de 3 dimensões ($\vec{q}_{1:3}$), e a quarta (q_4) dimensão é um escalar, note que também é possível fazer uma relação entre esse vetor $\vec{q}_{1:3}$ com o vetor \vec{e} e o ângulo v , da mesma forma, também há uma relação entre a componente escalar q_4 com o ângulo v , ou seja, é possível escrever um quatérnio \mathbf{q} como

$$\mathbf{q}(\vec{e}, v) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q}_{1:3} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e} \sin(v/2) \\ \cos(v/2) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Sendo assim, após aplicar-se a Equação (2.57) na Equação (2.52), como resultado, tem-se uma matriz de atitude

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_2q_1 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_3q_1 + q_2q_4) & 2(q_3q_2 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Propriedades dos quatérnios

Além disso, duas operação muito importante entre quatérnios é o seu produto, e supondo um quatérnio \mathbf{q} e um outro quatérnio \mathbf{Q} [11], essas operações de produtos são definidas como:

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_4\vec{Q}_{1:3} + Q_4\vec{q}_{1:3} - \vec{Q}_{1:3} \times \vec{q}_{1:3} \\ Q_4q_4 - \vec{Q}_{1:3} \cdot \vec{q}_{1:3} \end{bmatrix}; \quad (2.59)$$

$$\mathbf{Q} \odot \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_4\vec{Q}_{1:3} + Q_4\vec{q}_{1:3} + \vec{Q}_{1:3} \times \vec{q}_{1:3} \\ Q_4q_4 - \vec{Q}_{1:3} \cdot \vec{q}_{1:3} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Além disso, O quatérnio identidade(I_q) é definido como um quatérnio com o vetor nulo e o escalar unitário, ou seja,

$$\mathbf{I}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Por sua vez, o conjugado de um quatérnio \mathbf{q} é comumente escrito como quatérnio(\mathbf{q}^*) e é definido como uma troca do sinal do seu vetor de 3 dimensões, assim,

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} -\vec{q}_{1:3} \\ q_4 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Ainda, há uma propriedade muito importante em relação a um quatérnio e seu conjugado, o produto entre os dois resulta em

$$\mathbf{q} \odot \mathbf{q}^* = \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{I}_q. \quad (2.63)$$

Ou seja, a partir da propriedade definida na Equação (2.63), tem-se que

$$\frac{\mathbf{q} \odot \mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} = \mathbf{I}_q = \mathbf{q} \odot \mathbf{q}^{-1}. \quad (2.64)$$

Logo, define-se o inverso de um quatérnio \mathbf{q} como

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2}. \quad (2.65)$$

Também, as operações [11] que envolvem um vetor \vec{x} e um quatérnio \mathbf{q}^{-1} são definidas nas equações a seguir :

$$[\vec{x} \otimes] = \begin{bmatrix} -[\vec{x} \times] & \vec{x} \\ -\vec{x}^T & 0 \end{bmatrix} = \Omega(\vec{x}); \quad (2.66)$$

$$\vec{x} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q} = [\vec{x} \otimes] \mathbf{q} = \Omega(\vec{x}) \mathbf{q}; \quad (2.67)$$

$$\mathbf{q} \otimes \vec{x} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{q} \otimes] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Capítulo 3

Desenvolvimento

NESTE capítulo é apresentado o desenvolvimento teórico das equações da dinâmica de forma simplificada, a análise desses modelos a partir de métodos de análise para sistemas de controle, os modelos de simulações criados no Simulink, a execução desses modelos e a comparação entre eles.

3.1 Dinâmica

A dinâmica rotacional de um Cubesat pode ser expressa em uma equação definida como

$$\dot{\vec{H}}_B^c = \vec{L}_B^c - \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^c \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1 avalia-se a dinâmica a partir do referencial do próprio Cubesat [11]. A velocidade angular vetorial $\vec{\omega}_B^{BI}$ significa que estamos medindo a velocidade angular do corpo B em relação ao referencial inercial I . A notação \vec{H}_B^c representa o momento angular do corpo B em relação ao ponto c , que é uma medida da quantidade de movimento rotacional do corpo. Por sua vez, o vetor torque \vec{L}_B^c representa a taxa de variação do momento angular do corpo B em relação ao ponto c , indicando a força que causa a mudança na rotação do corpo.

Por outro lado, se o referencial fosse inercial, a Equação (3.1) não manteria o

termo $\vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^c$ que representa o efeito de Coriolis que sempre está presente quando observamos o sistema a partir de um referencial não inercial.

Além disso, sabendo que o momento angular do CubeSat no referencial do corpo pode ser escrito como [11]

$$\vec{H}_B^c(t) = J_B^c \vec{\omega}_B^{BI}(t), \quad (3.2)$$

ao substituir-se a Equação (3.2) na Equação (3.1), como resultado tem-se uma representação da dinâmica do Cubesat, sem qualquer outro atuador ou objeto acoplado ou mesmo, e podemos expressá-la como

$$\dot{\vec{\omega}}_B^{BI}(t) = (J_B^c)^{-1}[\vec{L}_B^c(t) - \vec{\omega}_B^{BI}(t) \times (J_B^c \vec{\omega}_B^{BI}(t))]. \quad (3.3)$$

No entanto, ao considerar a presença de rodas de reação acopladas ao CubeSat, o momento angular total [11] do CubeSat pode ser expresso como:

$$\vec{H}_B^c(t) = J_B \vec{\omega}_B^{BI}(t) + \vec{H}_B^r(t), \quad (3.4)$$

Além disso, o torque das rodas de reação pode ser escrito como:

$$\vec{L}_B^r(t) = \dot{\vec{H}}_B^r(t). \quad (3.5)$$

A dinâmica rotacional de um corpo com rodas de reação é dada pela Equação:

$$\vec{\omega}_B^{BI}(t) = J_B^{-1}(\vec{H}_B^c - \vec{H}_B^r) \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.4) na Equação (3.1), chega-se então na dinâmica do sistema dado por

$$\dot{\vec{H}}_B^c = \vec{L}_B^c - \vec{\omega}_B^{BI} \times (J_B \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{H}_B^r) \quad (3.7)$$

Ao derivar a Equação 3.6, obtém-se como resultado:

$$\dot{\vec{\omega}}_B^{BI}(t) = J_B^{-1}(\dot{\vec{H}}_B^c - \dot{\vec{H}}_B^r) \quad (3.8)$$

Substituindo as equações 3.7 e 3.5 na Equação 3.8, tem-se como resultado a Equação 3.9, que representa a dinâmica rotacional do CubeSat com rodas de reação acopladas:

$$\dot{\vec{\omega}}_B^{BI}(t) = J_B^{-1}[\vec{L}_B - \vec{L}_B^r - \vec{\omega}_B^{BI} \times (J_B \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{H}_B^r)]. \quad (3.9)$$

3.1.1 Simplificando a dinâmica

Considerando a Equação (3.9), para facilitar a aplicação dos métodos de análise de sistemas de controle, é necessário linearizar essa equação. Ao analisar mais detalhadamente o termo não linear (Equação 3.10), observa-se que para um Cubesat com um tensor de inércia J_B diagonal.

$$\vec{\omega}_B^{BI} \times (J_B \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{H}_B^r) \quad (3.10)$$

Sabendo dessa característica do tensor de inércia J_B , é possível escrevê-lo da seguinte forma:

$$J_B = \begin{bmatrix} j_b & 0 & 0 \\ 0 & j_b & 0 \\ 0 & 0 & j_b \end{bmatrix} = j_b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = j_b I_3 \quad (3.11)$$

Considerando o tensor de inércia J_B como está escrito na Equação 3.11 é possível então fazer a seguinte simplificação:

$$\vec{\omega}_B^{BI} \times (J_B \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{H}_B^r) = \vec{\omega}_B^{BI} \times J_B \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^r \quad (3.12)$$

$$= \vec{\omega}_B^{BI} \times j_b I_3 \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^r \quad (3.13)$$

$$= \vec{\omega}_B^{BI} \times j_b \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^r \quad (3.14)$$

$$= j_b \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^r \quad (3.15)$$

Sabendo que o produto vetorial de um vetor consigo mesmo resulta no vetor nulo, ou seja, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ para qualquer vetor \vec{a} , podemos aplicar essa propriedade ao vetor de velocidade angular $\vec{\omega}_B^{BI}$. Assim, no cenário considerado, podemos simplificar o termo não linear dado na Equação 3.10 como está escrito na Equação 3.16, onde não há a presença do termo de precessão giroscópica ($\vec{\omega}_B^{BI} \times J_B \vec{\omega}_B^{BI}$):

$$\vec{\omega}_B^{BI} \times (J_b \vec{\omega}_B^{BI} + \vec{H}_B^r(t)) \approx \vec{\omega}_B^{BI} \times \vec{H}_B^r(t). \quad (3.16)$$

E, sabendo que a tensor de Inércia J_B do CubeSat é, em módulo, muito superior ao módulo do tensor de Inércia J_R das rodas de reação, então de forma grosseira podemos concluir que o termo não linear aproximado na Equação 3.16 é desprezível nesse cenário. Portanto, a Equação (3.9) se reduz a:

$$\dot{\vec{\omega}}_B^{BI}(t) = J_B^{-1}[\vec{L}_B(t) - \vec{L}_B^r(t)]. \quad (3.17)$$

3.2 Modelo de Motor DC

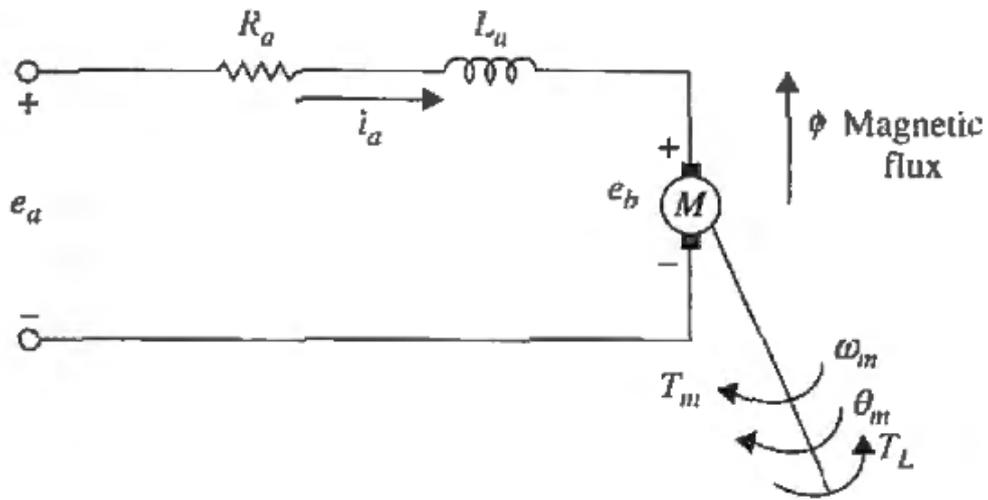


Figura 3.1: Diagrama elétrico do modelo linear de um motor DC [5].

Primeiramente, é importante ressaltar alguns elementos presentes no motor DC controlado por armadura que são essenciais para efetuar modelagem matemática [5], como por exemplo:

Tabela 3.1: Elementos do motor DC.

Símbolo	Descrição
$i_a(t)$	Corrente de armadura
R_a	Resistência da armadura
$e_b(t)$	Tensão da força contra-eletromotriz
$T_L(t)$	Torque da carga
$T_m(t)$	Torque do motor
$K_i(t)$	Constante de torque
L_a	Indutância de armadura
$e_a(t)$	Tensão de entrada
$K_b(t)$	Constante da força contra-eletromotriz
$\omega_m(t)$	Velocidade angular do rotor
$\theta_m(t)$	Deslocamento angular do rotor
J_m	Momento de Inércia do Rotor
B_m	Constante de atrito viscoso

Como é possível ver na Figura 3.1, o torque gerado pelo motor DC , $T_m(t)$, é proporcional à corrente de armadura, $i_a(t)$, e à força do campo eletromagnético presente [4]. Para facilitar a análise, supõe-se que o campo magnético é constante, logo o torque do motor é proporcional somente à corrente de armadura, $i_a(t)$, e uma constante de torque do motor, K_i , logo

$$T_m(t) = K_i i_a(t). \quad (3.18)$$

Além disso, a força contra-eletromotriz induzida, e_b , é proporcional à velocidade angular do motor ω_m [5],

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t). \quad (3.19)$$

Ainda, sabendo que J_m é o momento de inércia do rotor, e B_m é o coeficiente de

atrito viscoso, aplica-se a Lei de Kirchhoff para as tensões e a segunda lei de Newton para o circuito dado na Figura 3.1, o que resulta em

$$L \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = e_a(t) - K_b \omega_m(t). \quad (3.20)$$

Além disso, utilizando a segunda lei de newton para rotações [5], encontra-se que

$$\frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m} T_m(t) - \frac{1}{J_m} T_L(t) - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt}. \quad (3.21)$$

Dessa forma, a partir das equações (3.21),(3.20),(3.19) e (3.18), é possível chegar na função de transferência $\Theta_m(s)/E_a(s)$ que pode ser escrita como

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{s^3 J_m L_a + (J_m R_a + B_m L_a) s^2 + (B_m R_a + K_m K_b) s}, \quad (3.22)$$

também é possível ter a sua representação em espaço de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_b/L_a & 0 \\ K_i/J_m & -B_m/J_m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_m \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t). \quad (3.23)$$

3.3 Modelagem do Espaço de estados da Malha direta

Nesta seção, será apresentada a modelagem matemática do sistema de controle de atitude do CubeSat. A modelagem inclui a representação em espaço de estados considerando a dinâmica do atuador e do satélite. É importante destacar que a modelagem foi realizada em um sistema SISO (*Single Input, Single Output*) e não MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*).

Dado o modelo do atuador conforme descrito na Seção 3.2 e a Equação (3.17) com um torque externo $L_B(t)$ nulo, podemos prosseguir para a representação da

malha direta do sistema na forma de espaço de estados.

3.3.1 Apontamento

É importante ressaltar que, no contexto do modo de apontamento, a malha direta resulta da integração do atuador, dinâmica do CubeSat e cinemática associada. Essa cinemática pode ser representada utilizando Ângulos de Euler, Quatérnios ou Integração da velocidade angular. A Figura 3.2 ilustra os blocos selecionados para essa análise, destacando as conexões entre os blocos mencionados, onde $V(s)$ e $\theta(s)$ representam a entrada e saída, respectivamente.

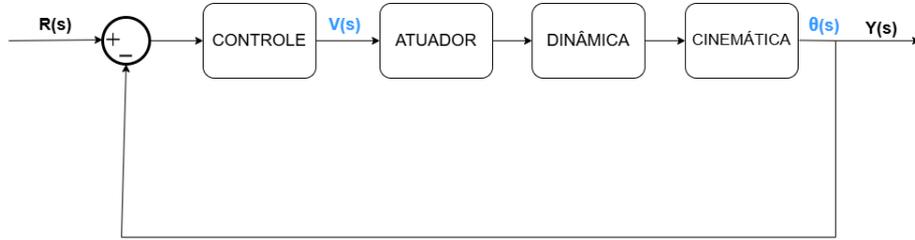


Figura 3.2: Diagrama de blocos do controle de Atitude(Apontamento).

Considerando as equações (3.17) e (3.23) e as variáveis de estado a seguir:

1. $x_1(t) = i_a(t)$ (Unidade: A - Ampère);
2. $x_2(t) = \omega_B^m(t)$ (Unidade: rad/s - radianos por segundo);
3. $x_3(t) = \theta(t)$ (Unidade: rad - radianos).

E as variáveis de entrada e saída, respectivamente, são definidas a seguir:

1. $u(t) = v(t)$ (Unidade: V - Volt);
2. $y(t) = \theta(t)$ (Unidade: rad - radianos).

Assim, ao considerarmos as equações (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) e (3.17), podemos derivar a representação em espaço de estados na sua forma matricial apresentada abaixo:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & J_B^{-1} J_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & J_B^{-1} J_r & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad (3.24)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t). \quad (3.25)$$

3.3.2 Estabilização

Por outro lado, a malha direta da estabilização concentra-se na integração do atuador com a dinâmica do CubeSat, uma vez que a saída a ser realimentada é a velocidade angular. É importante ressaltar que toda a análise matemática está sendo realizada sobre um sistema SISO (*Single Input, Single Output*) e não MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*). A Figura 3.3 apresenta os diagramas selecionados para a análise em espaço de estados, destacando os blocos envolvidos nesse processo.

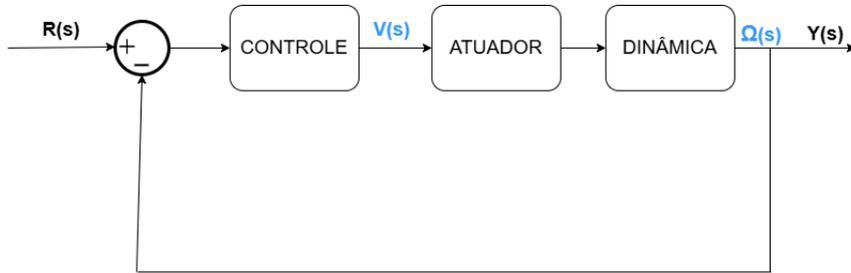


Figura 3.3: Diagrama de blocos do Controle de Estabilidade.

No modo de estabilização, novamente, as equações (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) e (3.17) são consideradas. Neste caso, ocorre uma sutil alteração nas variáveis de estado em comparação com o modo de apontamento, uma vez que nosso foco não está na atitude, mas sim na velocidade angular. As variáveis de estado para este modo são as seguintes:

1. $x_1(t) = i_a(t) [A]$;

2. $x_2(t) = \omega_B^m(t) [rad/s]$;
3. $x_3(t) = \omega_B^{BI}(t) [rad/s]$;

As entradas e saídas são definidas da seguinte forma:

1. $u(t) = v(t) [V]$.
2. $y(t) = \omega_B^{BI}(t) [rad/s]$;

Assim, o espaço de estados é representado na forma matricial a seguir:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ \frac{J_r K_i}{J_B J_m} & -\frac{J_r B_m}{J_B J_m} & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad (3.26)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t). \quad (3.27)$$

3.4 Modelagem da Função de transferência da Malha Direta

Mais uma vez, ao levar em conta o modelo do atuador descrito na Seção 3.2 e a Equação (3.17) com um torque externo $L_B(t) = 0$, é possível representar o comportamento da entrada e saída da malha direta utilizando a Função de Transferência, essa abordagem é particularmente útil em certos tipos de projeto de controladores.

3.4.1 Estabilização

Considerando as equações (3.22) e (3.17) concluí-se que a Função de transferência $\Omega_B^{BI}(s)/V(s)$ é dada como

$$\frac{\Omega_B^{BI}(s)}{V(s)} = \frac{(K_i J_B)/(J_m L_a J_r)}{s^2 + (R_a/L_a + B_m/J_m)s + (K_i K_b + B_m R_a)/J_m L_a}. \quad (3.28)$$

3.4.2 Apontamento

Para o caso de apontamento, a única diferença em relação ao desenvolvimento da Seção 3.4.1 seria em relação à variável de saída, pois aqui há o interesse na variável $\Theta(s)$ e não em $\Omega_B^{BI}(s)$. Contudo, sabe-se que existe uma relação dada como

$$\Theta(s) = \frac{\Omega_B^{BI}(s)}{s} \quad (3.29)$$

entre essas duas variáveis. Dessa forma, a função de transferência é escrita como

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{1}{s} \frac{(K_i J_B)/(J_m L_a J_r)}{s^2 + (R_a/L_a + B_m/J_m)s + (K_i K_b + B_m R_a)/J_m L_a}. \quad (3.30)$$

3.5 Motor DC Pittman DC026C-1

Para realizar as próximas etapas, considerou-se que utilizaremos o motor DC da Fabricante Pittman, o DC026C-1[12].



Figura 3.4: Motor DC[12].

Dadas as tabelas vistas nas figuras 3.5 e 3.6, nota-se que não há menções à constante de força contra eletromotriz, K_b , e tampouco ao coeficiente de atrito viscoso B_m .

MOTOR DATA	Units	DC026C-1	DC026C-2	DC026C-3
Max DC Terminal Voltage	V	48	48	48
Max Speed (Mechanical)	rpm	10000	10000	10000
Continuous Stall Torque	Nm	0.014	0.017	0.022
	oz-in	1.9	2.4	3.2
Peak Torque (Maximum)	Nm	0.059	0.084	0.13
	oz-in	8.3	12	19
Rotor Inertia	kg m ²	0.00000099	0.0000012	0.0000016
	oz-in-s ²	0.00014	0.00017	0.00023
Motor Weight	g	76	86	110
	oz	2.7	3.1	3.7

Figura 3.5: Especificações do motor DC026C-1 [12].

DC026C-1	Units								
Rated Voltage	V	6.00	7.58	9.55	12.0	15.2	19.1	24.0	30.3
Rated Torque	Nm	0.011	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
	oz-in	1.5	1.5	1.5	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
Rated Speed	rpm	5080	5250	5350	5450	5610	5570	5530	5580
Rated Current	A	1.9	1.5	1.1	0.92	0.73	0.57	0.45	0.36
Rated Power	W	5.7	5.8	5.7	5.8	5.9	5.8	5.8	5.8
No Load Speed	rpm	6970	6990	6910	7000	7100	7030	6970	7010
No Load Current	A	0.40	0.32	0.25	0.20	0.16	0.13	0.098	0.079
Torque Constant	Nm/A	0.00763	0.00964	0.0123	0.0153	0.0191	0.0243	0.0307	0.0386
	oz-in/A	1.08	1.37	1.74	2.16	2.70	3.43	4.35	5.46
Voltage Constant	V/krpm	0.799	1.01	1.29	1.6	2.00	2.54	3.22	4.04
Terminal Resistance	Ω	0.800	1.22	1.87	2.89	4.47	7.08	11.3	17.8
Inductance	mH	0.41	0.66	1.05	1.63	2.55	4.10	6.55	10.23
Peak Current	A	7.5	6.2	5.1	4.2	3.4	2.7	2.1	1.7

Figura 3.6: Dados de enrolamento do motor DC026C-1[12].

Dessa forma, as próximas subseções 3.5.1 e 3.5.2 são reservadas à metodologia utilizada para encontrar uma aproximação dessas constantes a partir das equações vistas nas seções 3.2 e 3.3.

3.5.1 Estimando K_b

Considerando a Equação (3.20), quando não há carga acoplada ao rotor, estima-se que $di_a(t)/dt \approx 0$. Sendo assim, reescrevendo a Equação (3.20) temos então que

$$0 = \frac{e_a(t)}{L_a} - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{K_b}{L_a}\omega_B^m(t). \quad (3.31)$$

Neste caso, segundo a tabela vista na Figura 3.6, para uma dada tensão $e_a(t)$, possuímos os valores associados de R_a , L_a , $i_a(t)$ e $\omega_B^m(t)$. Logo, para obter a constante K_b , é necessário apenas isolá-la dos outros termos, logo

$$K_b = \frac{e_a(t) - R_a i_a(t)}{\omega_B^m(t)}. \quad (3.32)$$

3.5.2 Estimando B_m

Considerando que o termo da aceleração angular $\dot{\omega}_m(t)$ presente na Equação 3.21 é aproximadamente nulo, concluí-se que

$$0 = \frac{T_m(t)}{J_m} - \frac{B_m}{J_m}\omega_B^m(t). \quad (3.33)$$

Aqui, também é necessário somente isolar o termo B_m presente na Equação (3.33), visto que os demais parâmetros, teoricamente, são invariantes no tempo e são dados na tabela presente na Figura 3.6. Portanto, concluí-se que

$$B_m = \frac{T_m(t)}{\omega_B^m(t)}. \quad (3.34)$$

Uma vez que as equações (3.32) e (3.34) são aplicadas na tabela presente na Figura 3.6, obtém-se então a Tabela 3.2 que possui os parâmetros ausentes na Tabela vista na Figura 3.6.

Tabela 3.2: Motor DC Pittman DC026C-1: Tabela completa.

$E_a(V)$	6	7.58	9.55	12	15.2	19.1	24	30.3	Média
Torque(Nm)	0.011	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.01025
$\omega_B^m(rad/s)$	729.89	731.99	723.61	733.03	743.51	736.18	729.89	734.08	732.78
$i_a(A)$	0.4	0.32	0.25	0.2	0.16	0.13	0.098	0.079	0.204
$K_t(Nm/A)$	0.00763	0.00964	0.0123	0.0153	0.0191	0.0243	0.0307	0.0386	0.01969625
$R_A(\Omega)$	0.8	1.22	1.87	2.89	4.47	7.08	11.3	17.8	5.92875
$L_a(mH)$	0.41	0.66	1.05	1.63	2.55	4.1	6.55	10.23	3.3975
$K_b(Vrad^{-1}s)$	0.00778	0.00982	0.0126	0.0156	0.0195	0.0247	0.0313	0.0394	0.0200
$B_m(s^{-1})$	0.0000151	0.0000151	0.0000138	0.0000136	0.0000134	0.0000136	0.0000137	0.0000136	0.0000140

3.6 Roda de Reação

Utilizou-se uma roda de reação feita com material PLA (**ácido poliláctico**), em um formato cilíndrico, com uma altura de 1.8 cm e um raio de 2.4 cm. Sabendo que o PLA possui uma densidade de aproximadamente $1,04 \text{ g/cm}^3$, temos então que a massa total da roda de reação é aproximadamente 33.875 g . Sabendo que o momento angular da roda de reação, considerando que o eixo está no centro dela, pode ser calculado a partir da Equação

$$J_r = \frac{1}{2}Mr^2, \quad (3.35)$$

em que M é a sua massa e r é o seu raio. Dessa forma, temos o momento angular J_r de aproximadamente $9.756 \times 10^{-6} \text{ kg} \times \text{m}^2$.



Figura 3.7: Exemplo ilustrativo de uma roda de reação.¹

¹Fonte: Retired electrician. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yauza_209-1_\(disassembly\)_-_capstan-flywheel,_upright_01.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yauza_209-1_(disassembly)_-_capstan-flywheel,_upright_01.jpg). Acesso em: 24 fev. 2024.

Capítulo 4

Projeto e Simulação

4.1 Projeto de Controladores

Nesta seção, considerou-se as constantes a seguir que estão presentes na Tabela 3.2 e na tabela presente na Figura 3.5:

1. $R_a = 5.929 \Omega$;
2. $L_a = 0.0034 H$;
3. $K_b = 0.0201 Vrad^{-1}s$;
4. $K_i = 0.0197 Nm/A$;
5. $B_m = 1.399 \times 10^{-5} N \times s/m^2$;
6. $J_m = 9.9 \times 10^{-7} kg \times m^2$.

Ainda, considerou-se um momento de inércia da roda de reação de aproximadamente $J_r = 9.756 \times 10^{-6} kg \times m^2$, que foi calculado na Seção 3.6, e um tensor de inércia do corpo, J_b dado como, sendo que os momentos de inércia estão desacoplados, o que justifica o formato diagonal da matriz:

$$J_b = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0022 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0022 \end{bmatrix} kg \times m^2. \quad (4.1)$$

4.2 Controlador PD

4.2.1 Controle de Estabilização

Primeiramente, define-se os requisitos para o projeto do controlador. Neste caso, queremos um tempo de acomodação t_s de aproximadamente 100 s, um máximo sobressinal(M_p) de 1%. Primeiramente, isola-se o coeficiente de amortecimento, ζ , na Equação (2.16), resultando em

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}. \quad (4.2)$$

Aplicando o M_p de 1% na Equação (4.2), obtém-se um $\zeta = 0.826$. Em seguida, isola-se o termo da frequência natural ω_n presente na Equação (2.21), obtendo o termo da frequência natural como

$$\omega_n = \frac{\ln(100) - \ln(\sqrt{1 - \zeta^2})}{t_s \zeta}. \quad (4.3)$$

Então, após aplicarmos $t_s = 1$ s na Equação (4.3), obtemos um $\omega_n = 0.0627$ rad/s. Logo, para este ω_n , obtém-se os seguintes valores de frequência natural amortecida ω_d e o coeficiente de atenuação σ :

1. $\omega_d = 0.0353$ rad/s;
2. $\sigma = 0.0518$ s⁻¹.

Sendo assim, queremos que os polos $-0.0518 \pm 0.0353j$ pertençam ao lugar geométrico das raízes. Em seguida, calcula-se os polos da função de transferência da malha direita representada pela Equação (3.28) com as constantes fornecidas anteriormente. Com isso, obtém-se polos em -1674.2 e -85, e assim podemos plotar os polos obtidos até agora no plano s, como mostra a Figura 4.1.

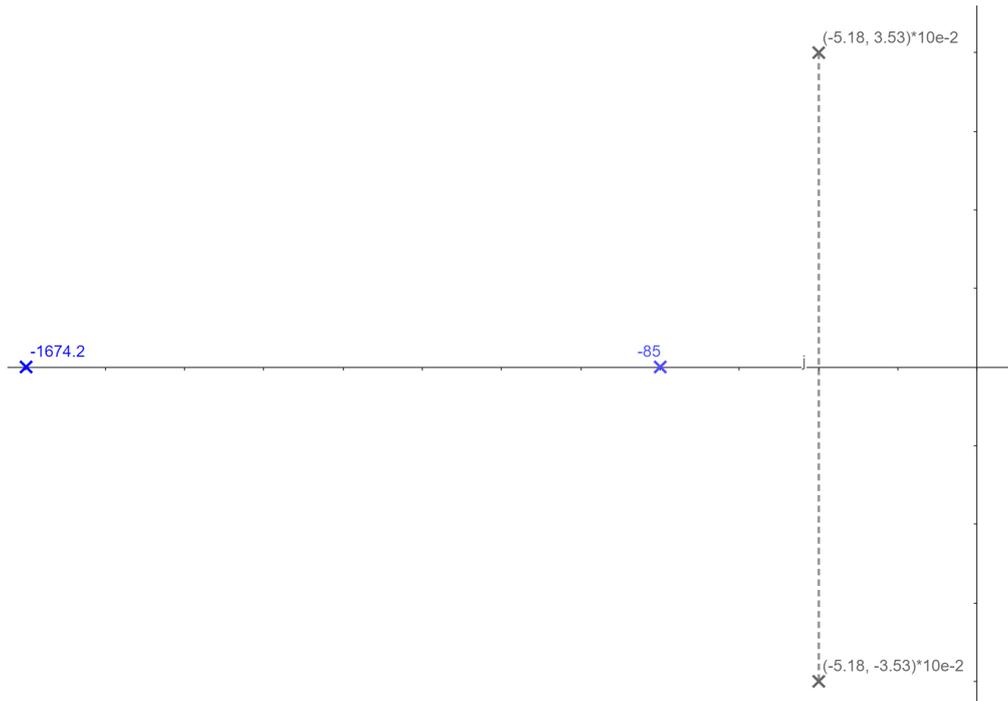


Figura 4.1: Polos da planta simplificada e os polos dos requisitos

Agora, sabendo que estamos utilizando um controlador PD com uma função de transferência $G_c(s)$ escrita como

$$G_c(s) = (K_p + NK_d) \frac{s + \frac{NK_p}{K_p + NK_d}}{s + N} = K \frac{s + a}{s + N}. \quad (4.4)$$

Considerando $a = NK_p/(K_p + NK_d)$ e $K = K_p + NK_d$ e com $N = 16000$, plota-se o polo e o zero do controlador PD na Figura 4.1, resultando em um gráfico que pode ser visto na Figura 4.2.

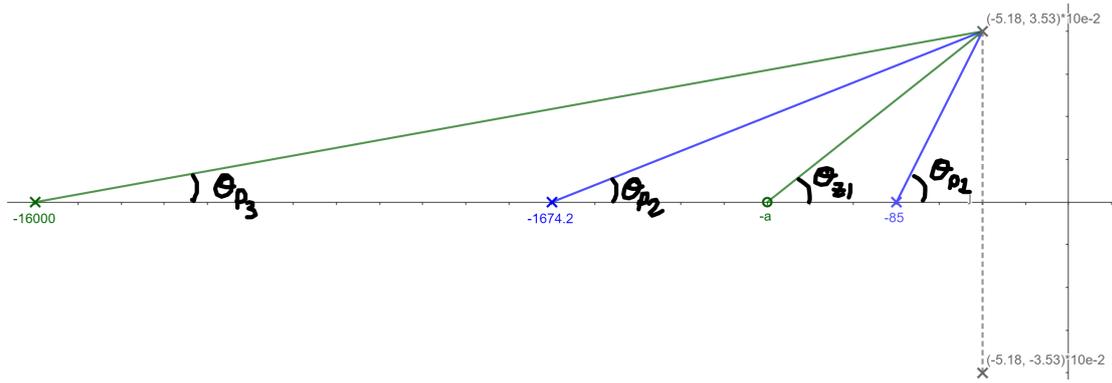


Figura 4.2: Polos e zeros para a realizar a avaliação do Critério de fase LGR.

Sendo assim, agora podemos utilizar a condição de fase do Lugar geométrico das raízes, representada pela Equação (2.25), resultando em

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = \pi. \quad (4.5)$$

Interpretando a Figura 4.2 obtém-se as equações a seguir:

$$\theta_{z_1} = \text{atan} \left(\frac{3.53 \times 10^{-2}}{a - 5.18 \times 10^{-2}} \right); \quad (4.6)$$

$$\theta_{p_1} = \text{atan} \left(\frac{3.53 \times 10^{-2}}{85 - 5.18 \times 10^{-2}} \right); \quad (4.7)$$

$$\theta_{p_2} = \text{atan} \left(\frac{3.53 \times 10^{-2}}{1674.2 - 5.18 \times 10^{-2}} \right); \quad (4.8)$$

$$\theta_{p_3} = \text{atan} \left(\frac{3.53 \times 10^{-2}}{16000 - 5.18 \times 10^{-2}} \right). \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) na Equação (4.5), e após resolver a equação, tem-se que $a = 80.85$.

Após isso, é necessário encontrar o valor de K da Equação (4.4), e isso pode ser feito a partir da condição de módulo do Lugar geométrico das raízes, dado na Equação (2.24). Considerando a Figura 4.3, onde estão todos os comprimentos dos

polos e zeros, o valor de K pode ser computado sabendo que

$$K = \frac{L_{p1}L_{p2}L_{p3}}{K_m L_{z1}}, \quad (4.10)$$

e usando $K_m = (K_i J_B)/(J_m L_a J_r)$ que é determinado a partir dos valores já considerados nesta Seção, tem-se que $K = 0.0216$.

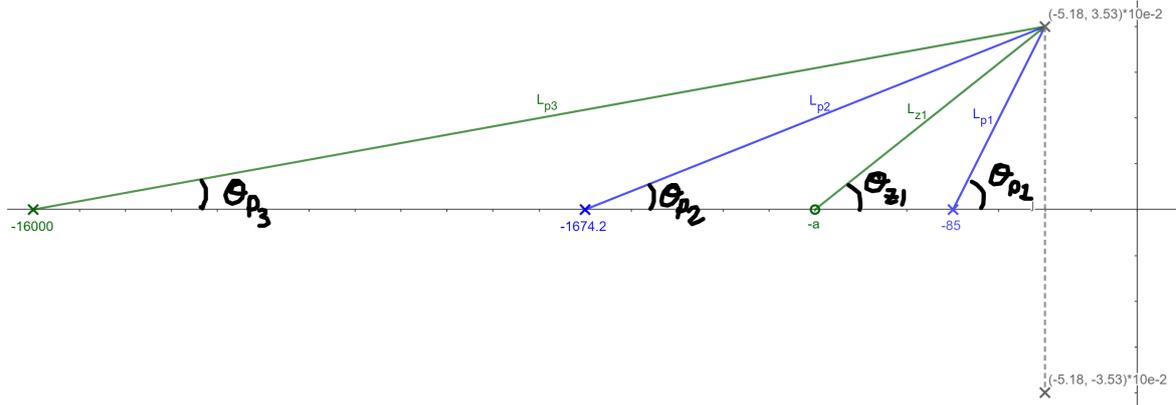


Figura 4.3: Polos e zeros para a realizar a avaliação do Critério de módulo LGR.

Feito isso, com os valores de K e a encontrados, monta-se o seguinte sistema de equações:

$$K_p + NK_d = K; \quad (4.11)$$

$$a = \frac{NK_p}{K_p + NK_d}. \quad (4.12)$$

Solucionando o sistema de equações (4.11) e (4.11), a solução $K_p = 1.0922 \times 10^{-4}$ e $K_d = 1.3577 \times 10^{-6}$ é encontrada. Contudo, nota-se que esses valores para os ganhos do controlador PD estão baixos, e portanto, são ajustados, visto que há uma simplificação da dinâmica do sistema, como foi visto na Seção 3.1.1.

4.2.2 Controle de Atitude

Para o controle de atitude, também define-se o tempo de acomodação t_s para aproximadamente 100 s e um máximo sobressinal M_p de 1%. Ou seja, os mesmos requisitos do caso da estabilização, sendo assim, os polos para a função de transferência em malha fechada de um sistema padrão de segunda ordem são os mesmos. Logo, para esses dois polos complexos conjugados, teremos que a frequência natural amortecida ω_d e atenuação σ são:

1. $\omega_d = 0.0353$ rad/s;
2. $\sigma = 0.0518$ s⁻¹.

Além disso, considerando que a função de transferência da malha direta é expressa pela Equação (3.30), levando em conta as constantes já conhecidas, tem-se os polos em -1674.2, -85 e na origem do plano s, como mostra a Figura 4.4.

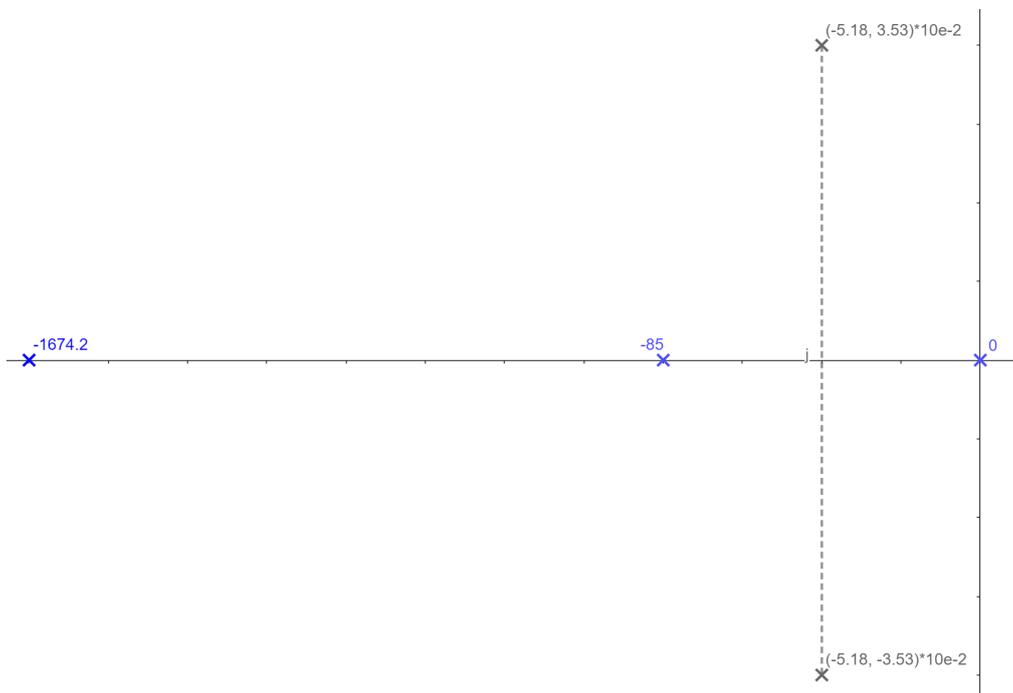


Figura 4.4: Polos da malha direta e os polos dos requisitos.

Em seguida, realiza-se os mesmos procedimentos feitos na Subseção 4.2.1, com

isso, como resultado temos os seguintes valores de K e a para a função de transferência do controlador PD:

$$K = 0.0216; a = 80.8531.$$

Soluciona-se o sistema de equações (4.11) e (4.11), e obtém-se a solução $K_p = 1.0936 \times 10^{-4}$ e $K_d = 1.3458 \times 10^{-6}$.

4.3 Controlador LQR

Para o projeto de controlador LQR para apontamento, considera-se que o problema é um sistema SISO (*Single Input, Single Output*) e é necessário escolher as matrizes Q e R que satisfaçam os requisitos do projeto do controlador. Contudo, determinar tais matrizes Q e R de forma analítica não é uma tarefa simples, sendo assim, as matrizes escolhidas são determinadas iterativamente, até que o sistema tenha uma resposta que satisfaça os requisitos. Primeiramente, inicia-se a matriz Q e R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$R = 1 \quad (4.14)$$

É importante observar que um valor diagonal maior na matriz Q indica uma penalidade mais alta relacionada ao erro no estado correspondente. Portanto, de maneira iterativa, são determinados os pesos dos elementos diagonais para os modos de Apontamento e Estabilização.

4.3.1 Controle LQR para Apontamento de Sistemas

Considerando a Equação 3.24, sabe-se que a componente mais crucial do vetor de estados $\vec{x}(t)$ é a terceira componente, $x_3(t)$ que equivale à $\omega_B^{BI}(t)$. Novamente,

inicia-se a matriz Q e R como identidade

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$R = 1. \quad (4.16)$$

Após algumas iterações, chega-se nas matriz Q e R dadas a seguir:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-4} \end{bmatrix}; \quad (4.17)$$

$$R = 10^{-1}. \quad (4.18)$$

4.3.2 Controle LQR para Estabilização do Sistema

No caso do modo de estabilização, utilizou-se a Equação 3.26. Sabe-se que o ângulo $\theta(t)$ é o estado $x_3(t)$ do vetor de estados $\vec{x}(t)$, então o peso associado a este é maior que os demais, principalmente em relação à corrente $i_a(t) = x_1(t)$. Dessa forma, assim como foi feito no projeto do controlador LQR para o apontamento 4.3.1, aqui também iniciou-se com a matriz Q como uma identidade, e $R = 1$. Após algumas iterações, definiu-se Q e R como

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$R = 1. \quad (4.20)$$

4.4 Elementos da Modelagem

Os elementos a seguir foram desenvolvidos para o modelo de simulação do Simulink. Cada um desses elementos consiste em um diagrama de bloco com uma função específica, melhorando assim a compreensão do fluxo da simulação do sistema de controle. O diagrama de bloco da dinâmica 4.5 está representando a equação da dinâmica do Cubesat dada pela Equação (3.9).

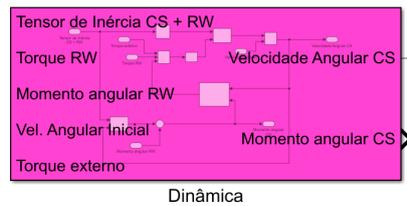


Figura 4.5: Subsistema do Simulink para a dinâmica do CubeSat.

E, ao abrirmos o diagrama da dinâmica, é possível ver a implementação da Equação (3.9) em forma de diagrama conforme ilustra a Figura 4.6.

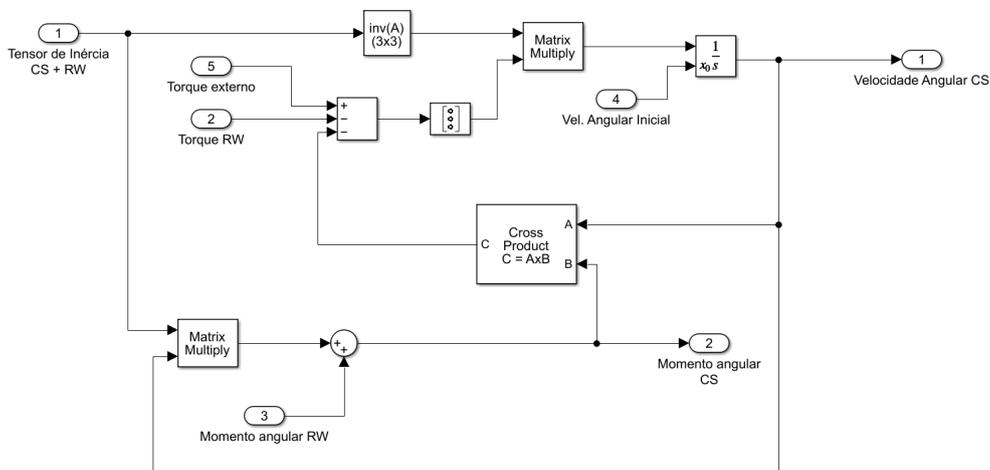


Figura 4.6: Diagrama de blocos da Dinâmica [13]

Além disso, a Seção 3.1.1 apresentou uma dinâmica simplificada que foi utilizada extensivamente para realização do projeto dos controladores. Dessa forma, também foi criado um diagrama de bloco que representa a dinâmica linear, como pode ser visto na Figura 4.7.

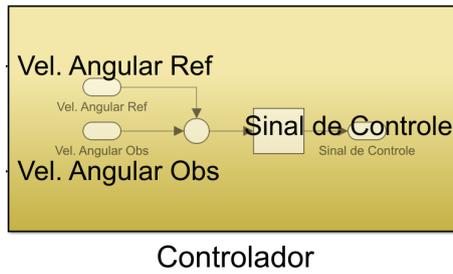


Figura 4.9: Subsistema do Simulink do controlador PD.

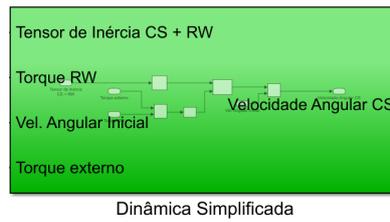


Figura 4.7: Subsistema do Simulink para a dinâmica simplificada.

A implementação da Equação (3.17) em diagrama de blocos pode ser vista na Figura 4.8.

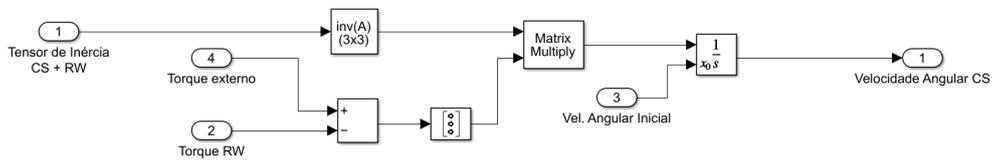


Figura 4.8: Diagrama de blocos da Dinâmica Linear simplificada.

São apresentados em seguida os diagrama de blocos responsáveis pelo controlador PD, conforme a Figura 4.9 e o controlador LQR, segundo a Figura 4.10.

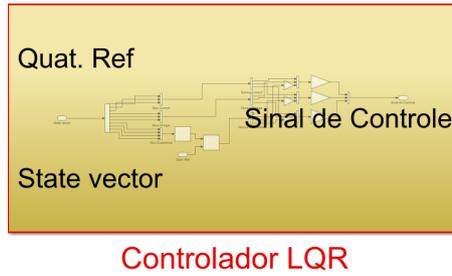


Figura 4.10: Subsistema do Simulink do controlador LQR.

Porém a implementação de cada um varia bastante, inclusive, a realimentação necessária para que cada um deles funcione corretamente é diferente, no caso do controlador PD, na malha de realimentação há apenas um vetor ω_B^{BI} , sendo assim, o erro é simplesmente uma subtração entre ω_B^{REF} e ω_B^{BI} , como pode ser visto na Figura 4.11.

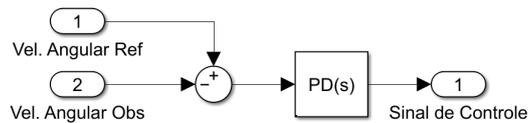


Figura 4.11: Controlador PD: Lei de Realimentação para o modo de estabilização.

Contudo, na realimentação do controlador PD, para o caso de apontamento, é necessário realizar o produto entre o quaternion de referência \mathbf{q}_{Ref} e o inverso do quaternion observado \mathbf{q}_{Obs}^{-1} , pois quando ambos forem iguais, o resultado desse produto é o quaternion identidade, segundo a Equação (2.64), logo, a realimentação é feita como mostra a Figura 4.12.

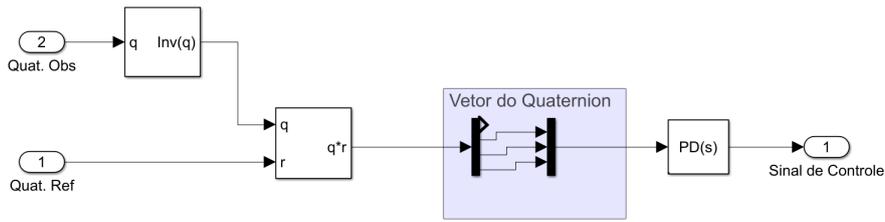


Figura 4.12: Controlador PD: Lei de realimentação para o modo de apontamento.

Já para o controlador LQR, para o modo de estabilização, acabou sendo necessário realimentar-se o vetor de estados $\vec{x}(t)$ como a concatenação dos vetores $\vec{i}_a(t)$, $\vec{\omega}_B^m(t)$ e $\vec{\omega}_B^{BI}(t)$, como mostrado na Figura 4.13.

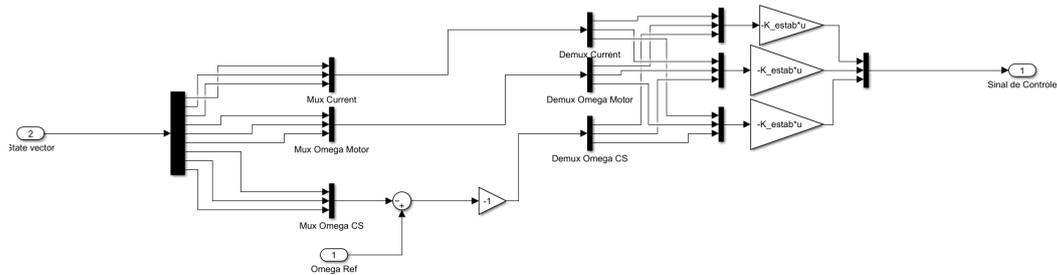


Figura 4.13: Controlador LQR: Lei de realimentação para o modo de estabilização.

Para o modo de apontamento do controlador LQR, o vetor de estados $\vec{x}(t)$ é definido como a concatenação dos vetores $\vec{i}_a(t)$, $\vec{\omega}_B^m(t)$ e o quaternion $\mathbf{q}_{OBS}(t)$.

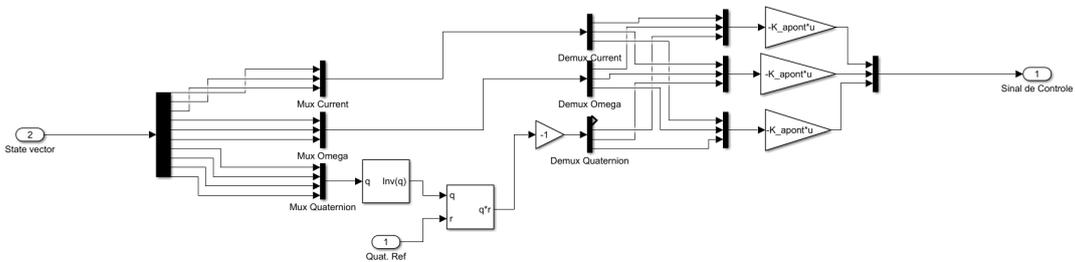


Figura 4.14: Controlador LQR: Lei de realimentação para o modo de apontamento.

Também existe o diagrama de bloco do Atuador, conforme é possível ver na Figura 4.15, o qual consiste em três conjuntos de atuadores, como ilustra a Figura 4.16.

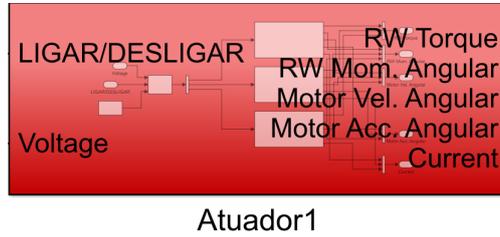


Figura 4.15: Subsistema do Simulink para o atuador.

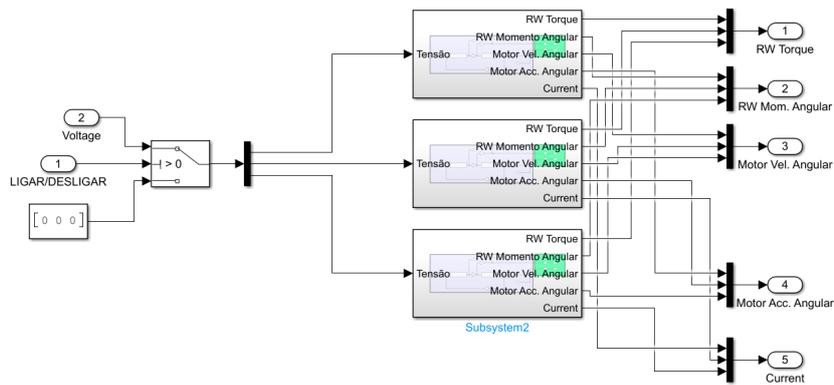


Figura 4.16: Diagrama de bloco do atuador para 3 eixos.

Cada atuador, fisicamente, consiste em um acoplamento sem perdas entre um motor DC e uma roda de reação, como mostra a Figura 4.17.

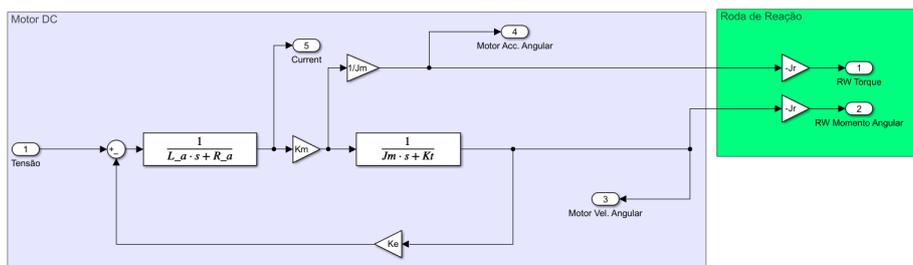


Figura 4.17: Diagrama de bloco do atuador (Motor DC + Roda de Reação).

Para o caso da cinemática, necessário no modo de apontamento do controlador, se faz necessário realizar as operações com quaternions, a qual é feita pelo bloco mostrado na Figura 4.18.

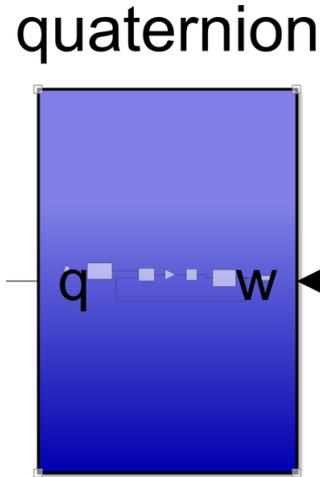


Figura 4.18: Subsistema do Simulink para a cinemática com quaternion.

Também, conforme mostra a Figura 4.19, implementou-se a operação dada pela Equação (2.67), assim como uma multiplicação por uma constante e em seguida uma integração.

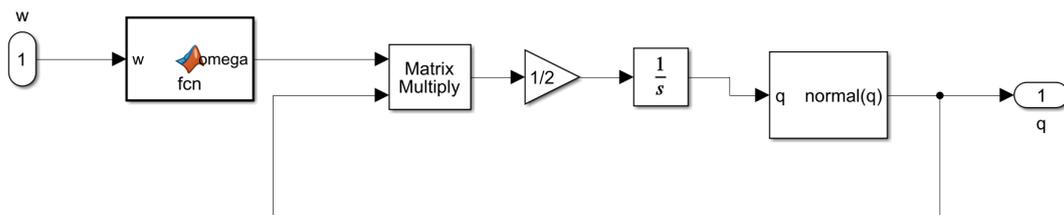


Figura 4.19: Diagrama de bloco da cinemática.

Ainda, nota-se também que a matriz $\Omega(\vec{\omega})$ é calculada segundo o *script MATLAB* mostrado na Figura 4.20.

```

1  function omega = fcn(w)
2      wx = w(1);
3      wy = w(2);
4      wz = w(3);
5      res = [0 -wx -wy -wz;wx 0 wz -wy;wy -wz 0 wx;wz wy -wx 0];
6      omega = res;
7

```

Figura 4.20: *Script MATLAB* para cálculo da matriz $\Omega(\vec{\omega})$.

Para que a simulação possa ser visualizada em forma de animação com o auxílio do programa *Coppelia Sim*, é necessário que os dados capturados no *Simulink* sejam salvos de alguma forma, para isso, o próprio *Simulink* já possui uma ferramenta capaz de fazer isso, denominada *To workspace*. Dessa forma, como é possível ver na Figura 4.21, utilizou-se várias instâncias dessa ferramenta para criar um agrupamento responsável por cada vetor de alguma característica física, seja ela tensão elétrica, corrente, velocidade angular, etc.

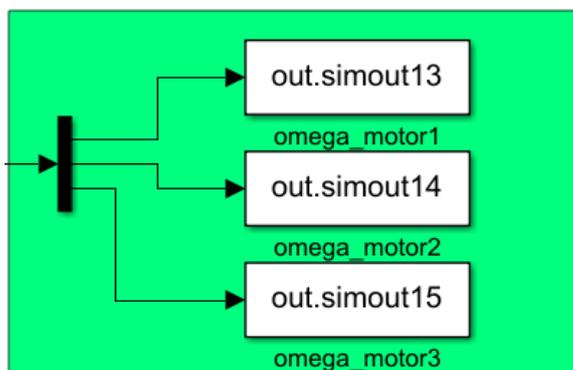


Figura 4.21: Agrupamento de *To workspace*.

4.5 Simulações

Nesta seção, são mostrados diversos experimentos e simulações realizados a fim de validar toda as hipóteses e projeto de controladores criados nas seções anteriores.

Mais especificamente, há dois blocos de dinâmica, o bloco de dinâmica não-linear, conforme ilustra a Figura 4.6 e o bloco de dinâmica linear simplificada, como mostra a Figura 4.8. Durante a simulação, ambos os blocos de dinâmica recebem as mesmas entradas vindas a partir do conjunto controlador e atuador, e então as saídas de cada bloco de dinâmica são analisadas nessa seção.

4.5.1 Controlador PD

A Figura 4.22 mostra o diagrama da simulação criada no *Simulink*, onde a referência, *Setpoint*, está utilizando ângulos de Euler XYZ para representação de atitude.

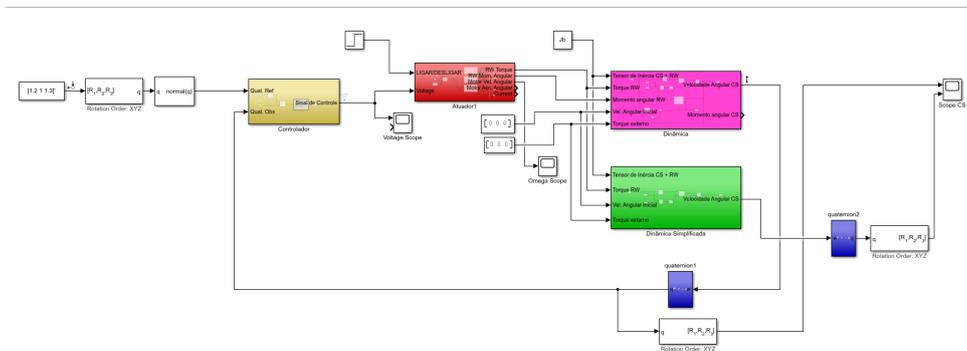


Figura 4.22: Simulação do apontamento com um controlador PD.

Sabendo disso, uma simulação com uma referência em $[1.2, 1, 1.3]$ foi realizada com um *Stop time* de 1000 segundos, e, como mostra a Figura 4.23, o sistema não atingiu a referência desejada, e tampouco ficou estável em algum momento. aumentou-se ambos os ganhos por um fator de 10^5 , como ilustra a Figura 4.24.

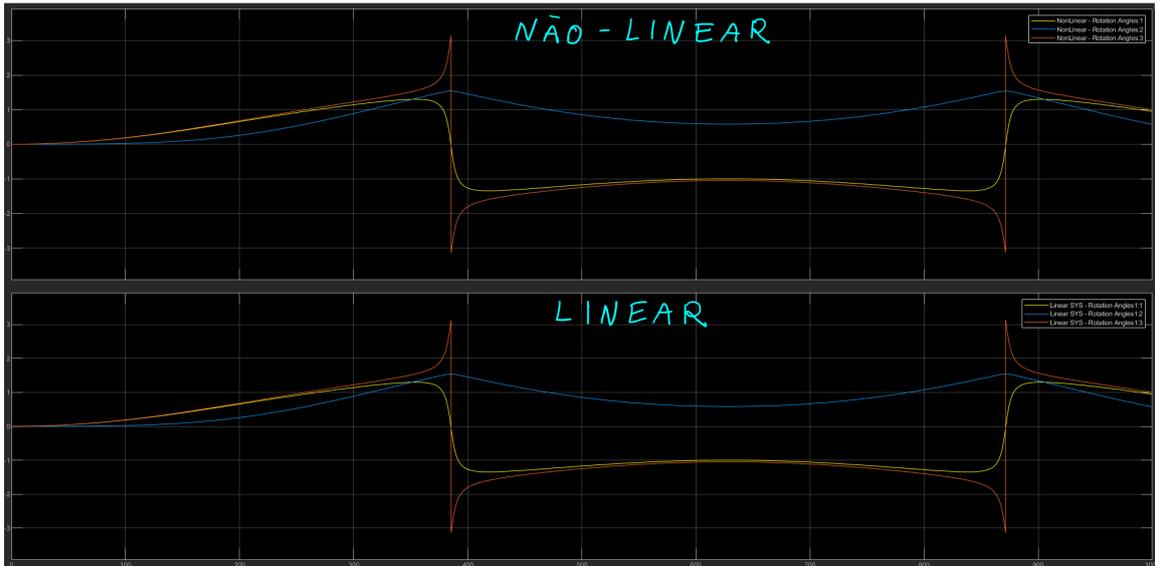


Figura 4.23: Atitude do sistema para um referência [1.2, 1, 1.3].

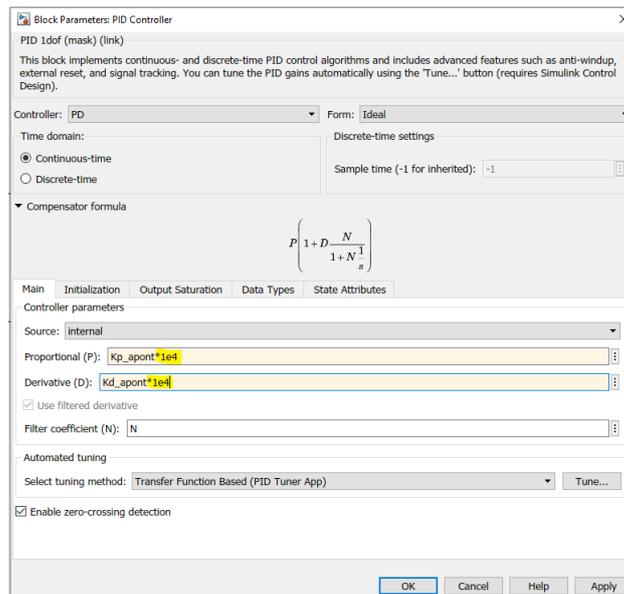


Figura 4.24: Compensação dos ganhos para o apontamento.

Após a aplicação desse fator, rodou-se novamente a simulação e o resultado obtido foi bem satisfatório, um pouco melhor do que esperado em relação aos requisitos definidos na seção de projeto de controladores, assim como pode ser visto na Figura 4.25.



Figura 4.25: Atitude do sistema para um referência $[1.2, 1, 1.3]$ após a compensação.

Para a estabilização, utiliza-se um vetor de velocidades como referência, como mostra a Figura 4.26 abaixo.

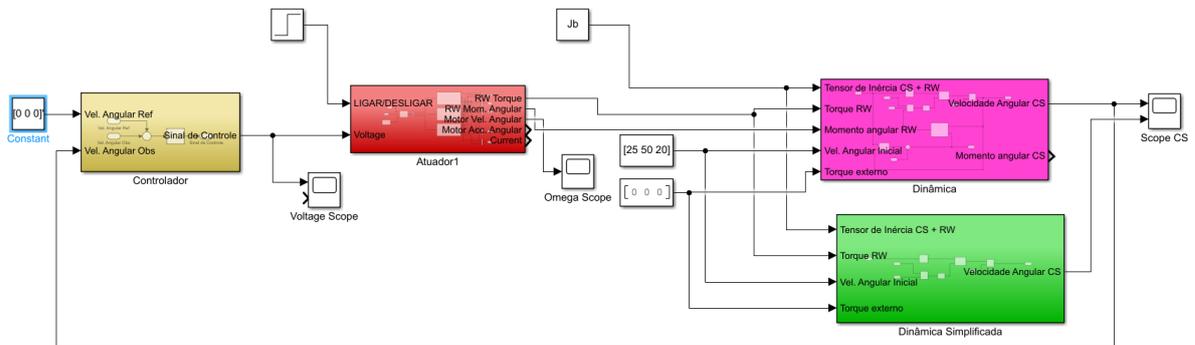


Figura 4.26: Simulação da estabilização com um controlador PD.

Para a simulação da estabilidade, considerou-se que o CubeSat, inicialmente, possui uma velocidade angular $\omega_B^{BI} = [50, 25, 20]$ rad/s, e velocidade angular do CubeSat de referência $\omega_B^{REF} = [0, 0, 0]$, e a simulação foi realizada com um *Stop*

time de 1000 segundos. Segundo o gráfico de simulação da Figura 4.27, o sistema não atingiu a referência dada no tempo de simulação utilizado, porém, ficou estável. Novamente, aumentou-se ambos os ganhos por um fator de J_b/J_r , como mostra a Figura 4.28.

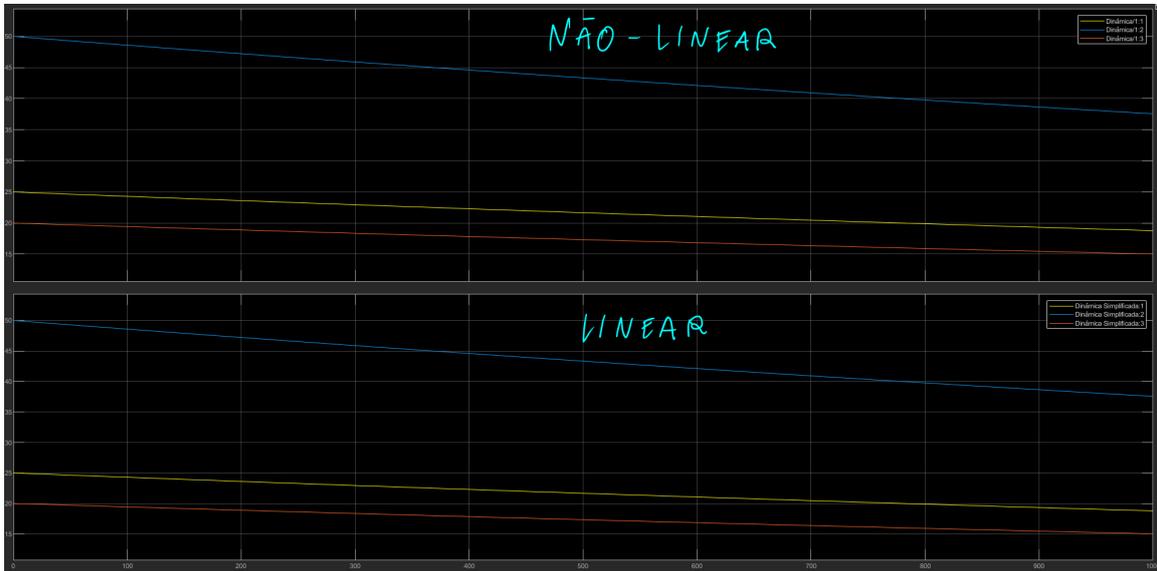


Figura 4.27: Velocidade angular do sistema para uma velocidade angular inicial de $[50, 25, 20]$ rad/s.

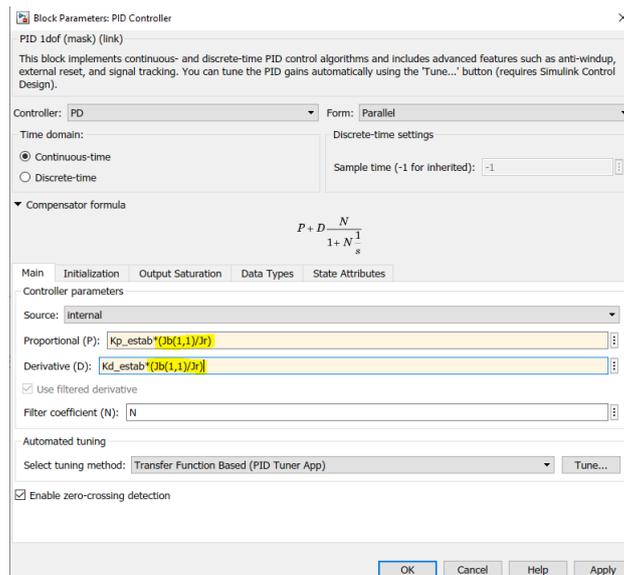


Figura 4.28: Compensação dos ganhos para o estabilização.

A simulação foi executada novamente e o resultado foi satisfatório em comparação aos requisitos definidos na Subsubseção de projeto de controladores PD 4.2.1, como é possível ver na Figura 4.25.

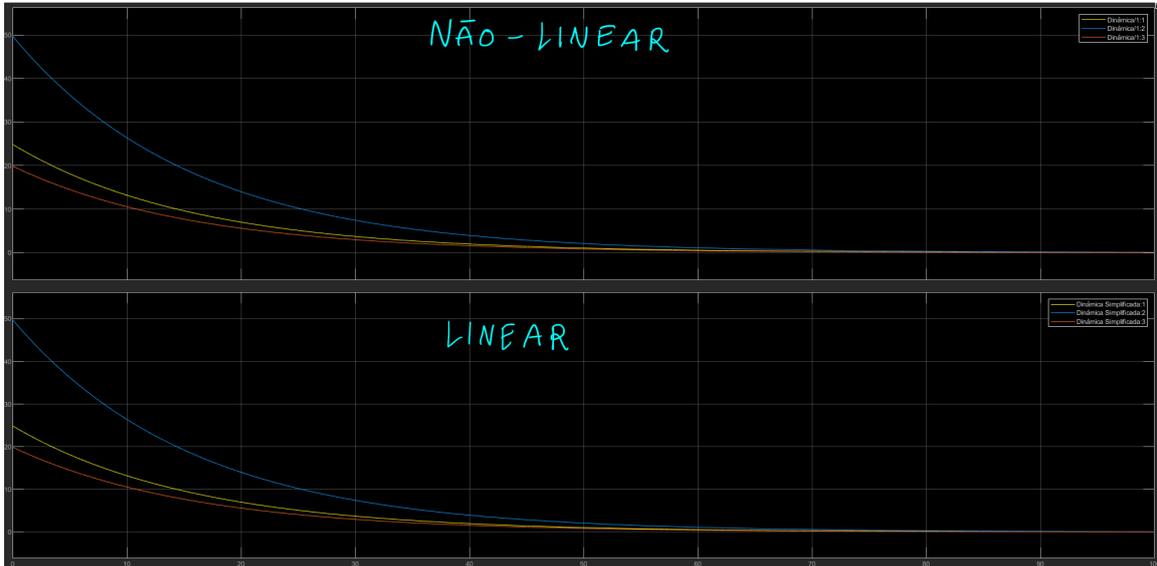


Figura 4.29: Velocidade angular do sistema após a compensação.

4.5.2 Controlador LQR

Para o controlador LQR, a principal distinção em relação ao controlador PD está na realimentação, como demonstrado pelas figuras 4.30 e 4.31, onde há um multiplexador responsável por concatenar os vetores de estado $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$, $\vec{x}_3(t)$.

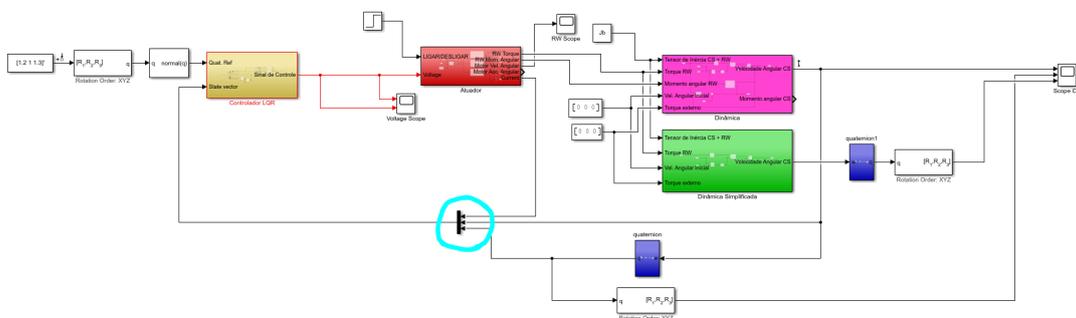


Figura 4.30: Simulação do apontamento com um controlador LQR.

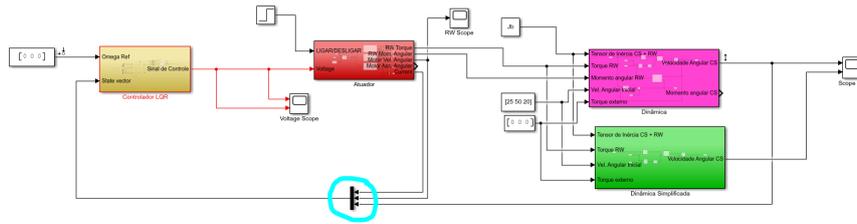


Figura 4.31: Simulação da estabilização com um controlador LQR.

Como dito anteriormente, primeiro inicia-se a matriz Q como uma matriz identidade 3×3 , a resposta do sistema para a referência $[1.2, 1, 1.3]$ está ilustrada na Figura 4.32. Nota-se que o sistema já é estável, porém possui um tempo de acomodação muito menor do que aquele definido nos requisitos de projeto, o que resulta em um sinal de controle muito maior do que o esperado, como consequência há uma maior tensão elétrica e velocidade angular. Dessa forma, reduziu-se os pesos da matriz Q de forma iterativa até chegar em uma resposta satisfatória, como mostra a Figura 4.33, e a matriz Q final é aquela definida na Equação (4.17). Além disso, o R foi modificado para obter uma resposta superamortecida ao invés de uma resposta subamortecida, sendo assim, o R final é aquele definido na Equação (4.18).

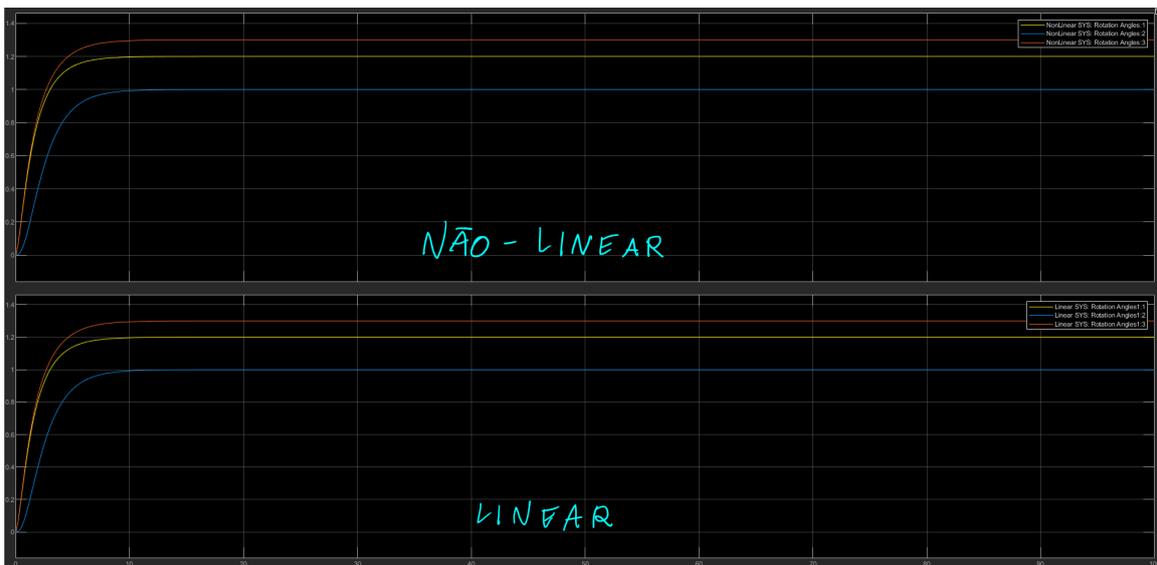


Figura 4.32: Resposta inicial controlador LQR para apontamento.

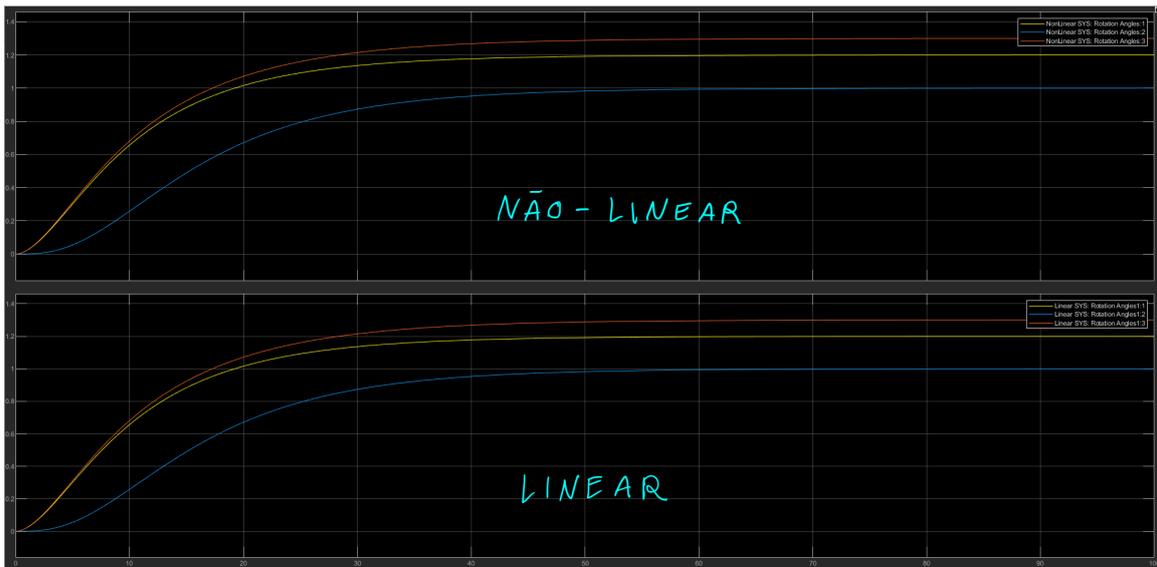


Figura 4.33: Resposta do controlador LQR para apontamento após ajustes.

Da mesma forma, para o modo de estabilização, inicia-se a matriz Q como uma matriz identidade 3×3 , e como é possível ver na Figura 4.34, a resposta do sistema já está bem próxima do esperado de acordo com os requisitos.

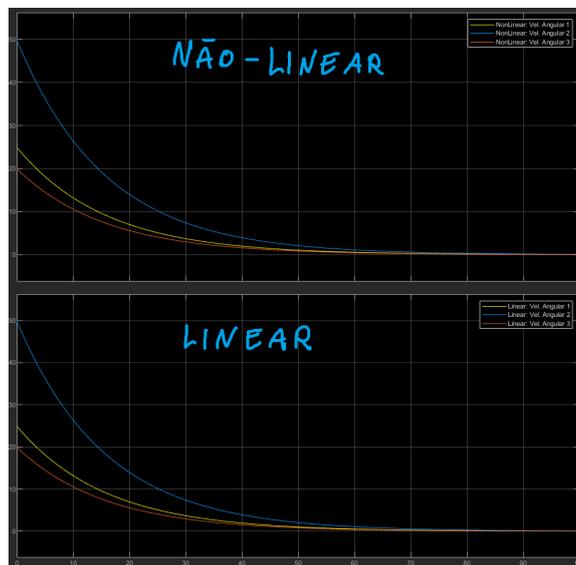


Figura 4.34: Resposta do controlador LQR em modo de estabilização com Q identidade.

Contudo, em seguida diversas simulações foram feitas a fim de obter um desem-

penho ainda mais próximo dos requisitos, mais especificamente, buscou-se reduzir o tempo de acomodação. Após poucas iterações, chegou-se no resultado mostrado na Figura 4.35, e a matriz Q escolhida é aquela dada na Equação (4.19).

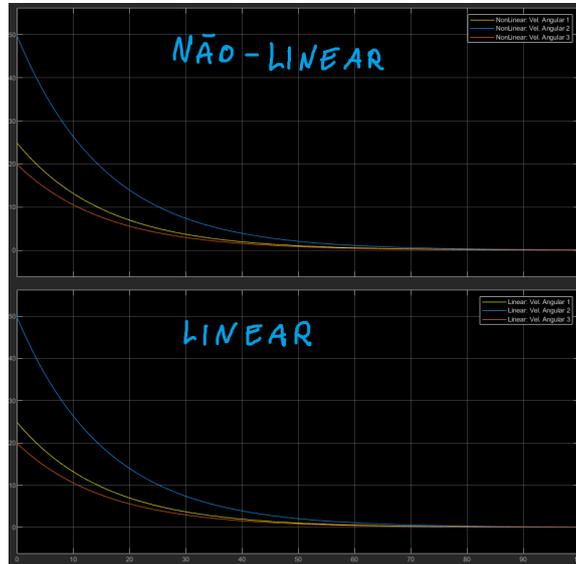


Figura 4.35: Resposta do controlador LQR em modo de estabilização com Q identidade.

4.6 Simulações com Animações

4.6.1 Coppelia Sim

O CoppeliaSim é uma plataforma de simulação robótica avançada que permite a modelagem e simulação de sistemas complexos em um ambiente 3D. Ele é amplamente utilizado em diversas aplicações, incluindo simulações de robôs industriais, veículos autônomos, drones e, neste caso, CubeSats. Sua versatilidade se deve à capacidade de integrar diferentes componentes, como sensores e atuadores, e simular interações em tempo real, o que é essencial para o desenvolvimento e teste de sistemas complexos. Além disso, o CoppeliaSim é frequentemente utilizado em pesquisas acadêmicas e industriais, permitindo a validação de algoritmos de controle e a análise de desempenho em cenários variados.

4.6.2 Modelo do CubeSat 1U

Criou-se um modelo para um CubeSat 1U, respeitando as dimensões determinadas pela CalTech, onde tal modelo foi utilizado apenas para representação gráfica de um CubeSat no CoppeliaSim, que fornece uma representação visual detalhada e interativa das simulações.

Além disso, com a API[14] do CoppeliaSim disponível para MATLAB, foi possível conectar a saída da simulação feita pelo Simulink com o modelo 3D do CoppeliaSim, permitindo uma análise mais rica e dinâmica dos resultados, como mostra a Figura 4.36.

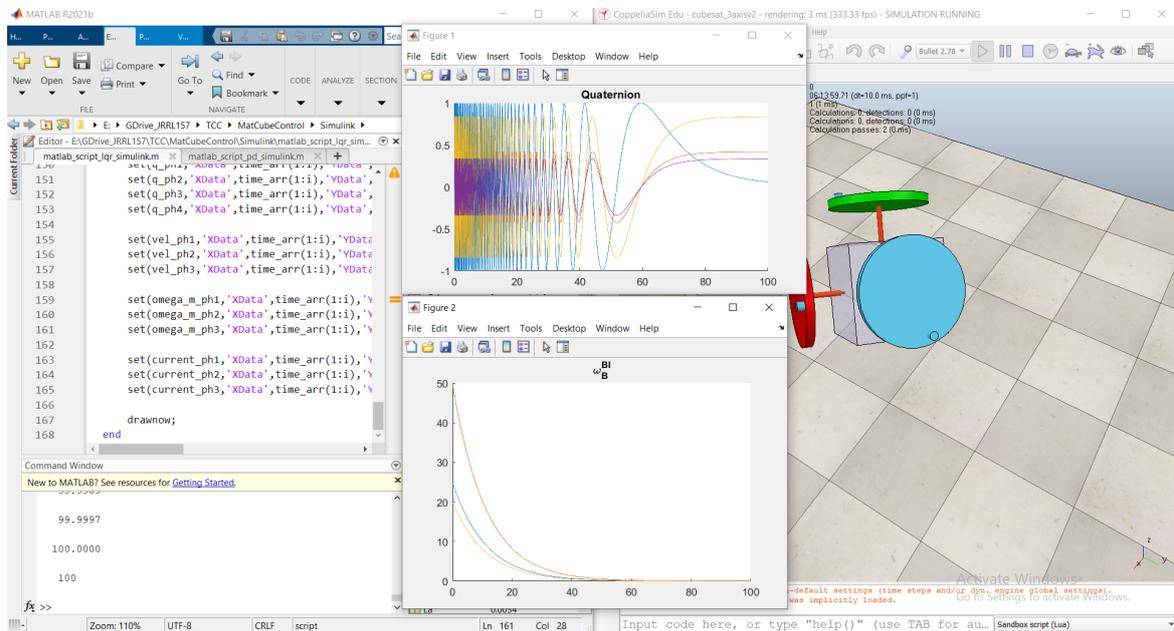


Figura 4.36: Simulação do Coppelia com Simulink.

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Conclusão

Em relação à modelagem matemática do CubeSat, primeiro objetivo específico estabelecido, foi desenvolvido um modelo simplificado da dinâmica do CubeSat 1U, apresentado no Capítulo 3, que capturou adequadamente os efeitos não-lineares e acoplamentos entre eixos. A simplificação proposta na Seção 3.1 mostrou-se eficaz, mantendo a precisão necessária para o projeto dos controladores enquanto reduzia a complexidade matemática.

No que diz respeito ao projeto e implementação dos controladores, foram desenvolvidos com sucesso tanto o controlador PD quanto o LQR. As métricas de desempenho estabelecidas (tempo de acomodação de 100s e sobressinal máximo de 1%) foram alcançadas por ambos os controladores, embora com características distintas em termos de complexidade de implementação e robustez.

E com a validação através de simulações numéricas realizadas no Simulink, confirmou a eficácia dos controladores propostos. O ambiente de simulação desenvolvido permitiu uma análise detalhada do comportamento do sistema em diferentes condições operacionais.

A análise comparativa entre os controladores PD e LQR revelou aspectos importantes sobre suas características operacionais. O controlador PD destacou-se pela maior simplicidade de implementação e ajuste, sendo uma opção viável para missões

com requisitos menos rigorosos de precisão. Por outro lado, o controlador LQR demonstrou melhor desempenho em termos de precisão e robustez, especialmente na presença de perturbações.

Após uma análise detalhada dos resultados das simulações e do projeto dos controladores, torna-se evidente que o controlador LQR demonstrou uma robustez superior em comparação com o Controlador PD. Além disso, o processo de projeto do controlador LQR foi mais facilmente realizável e resultou em um desempenho global melhor. Observou-se ainda que o controlador LQR exibiu um controle de estabilidade realizado durante o controle de atitude, sendo capaz até mesmo de realizar o apontamento quando o momento angular inicial é significativamente maior que zero, por sua vez, o controlador PD só conseguiu realizar o controle de estabilidade durante o controle de atitude quando o momento angular inicial era marginalmente maior que zero.

5.2 Dificuldades Encontradas

Durante o desenvolvimento do projeto, várias dificuldades foram encontradas. Uma delas diz respeito à plataforma utilizada para realizar as simulações. Inicialmente, foram utilizadas linguagens de programação como Python e C++, o que resultou em simulações que não estavam condizentes com a teoria. Além disso, durante o projeto do controlador PD, enfrentou-se uma dificuldade significativa relacionada ao ajuste dos ganhos do controlador, demandando um ajuste adicional para atingir os requisitos de resposta ideais.

5.3 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, em primeiro lugar seria realizada a investigação e implementação de um projeto de controlador compensador com avanço ou atraso de fase, onde possivelmente essa abordagem oferecerá muitos benefícios sobre o desempenho do sistema de controle contribuindo para uma maior robustez e estabilidade

do CubeSat. Além disso, sugere-se a expansão da modelagem para incluir possíveis motores DC que possam ser utilizados em futuras aplicações práticas em CubeSats. Proporcionando uma compreensão mais abrangente das características dinâmicas do sistema e permitiria uma análise mais precisa do desempenho do controle de atitude e estabilização. Por fim, e possivelmente o trabalho futuro mais relevante, seria explorar todo o potencial do ambiente CoppeliaSim em termos de simulação física, para validar os controladores LQR e PD em CubeSats equipados com três rodas de reação, permitindo uma análise mais completa e realista do controle de atitude e estabilidade do sistema. Dessa forma, será possível avaliar o desempenho dos controladores em condições mais próximas da realidade, visto que neste trabalho o CoppeliaSim foi utilizado apenas como uma ferramenta de animação.

Referências Bibliográficas

- [1] SPACE, B., TECHNOLOGY. “Smallsats by the Numbers”. 2020. Disponível em: <https://brycetechnology.com/reports/report-documents/Bryce_Smallsats_2020.pdf>.
- [2] TRÉGOUET, J.-F., ARZELIER, D., PEAUCELLE, D., et al. “Reaction wheels desaturation using magnetorquers and static input allocation”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 23, n. 2, pp. 525–539, 2014.
- [3] AUTORES, V. *Pequenos Satélites: Grandes Possibilidades*. Ed. dos Autores, 2022.
- [4] RICHARD C. DORF, R. H. B. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC, 2018.
- [5] FARID GOLNARAGHI, B. C. K. *Automatic Control Systems*. Wiley, 2010.
- [6] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, 2010.
- [7] MATHWORKS. “Proportional Integral Derivative (PID) Controllers”. 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ug/proportional-integral-derivative-pid-controllers.html>>.
- [8] BHATIA, R. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 2007.
- [9] SERGIO BITTANTI, ALAN J. LAUB, J. C. W. *The Riccati Equation*. Springer Berlin, Heidelberg, 1991.
- [10] ROBERT J. TWISS, E. M. M. *Structural Geology*. W. H. Freeman, 1992.
- [11] F. LANDIS MARKLEY, J. L. C. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. Springer, 2014.
- [12] HAYDON KERK PITTMAN. “Motor DC026C”. <https://www.haydonkerkpittman.com/products/motors/brushed-dc-motors/dc026c>. Acesso em: 01 jan. 2024.

- [13] DE PESQUISAS ESPACIAIS, I. N. “Desafio: Subsistema de Determinação e Controle de Atitude (ADCS)”. https://www.gov.br/inpe/pt-br/eventos/cubedesign-virtual/2022/regulamentos/repositorio-de-arquivos/cubesat-pt-2022-regulamento_adcs_iiicdv_rev0-0.pdf, 2022. Acesso em: 24 Dezembro 2022.
- [14] ROBOTICS, C. “Regular API reference”. <https://manual.coppeliarobotics.com/en/apiFunctions.htm>, 2023. Acesso em: 30 Março 2023.