UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**PEDRO JOSÉ DOS SANTOS**

# ENSINO DO CÁLCULO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: possíveis origens das dificuldades e análise do tema do ENADE

RECIFE – PE
2025

**PEDRO JOSÉ DOS SANTOS**

# ENSINO DO CÁLCULO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: possíveis origens das dificuldades e análise do tema do ENADE

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática – CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de habilitação:
Orientador: Prof. Dr. André Meireles.

**Recife**
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, Pedro José dos.
Ensino do cálculo na licenciatura em matemática: possíveis origens das dificuldades e análise do tema do ENADE / Pedro José dos Santos. - Recife, 2025.
92 p., tab.

Orientador(a): André Luiz Meireles Araújo
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2025.
Inclui referências, apêndices.

1. Educação matemática no Ensino Superior. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes. I. Araújo, André Luiz Meireles. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

**PEDRO JOSÉ DOS SANTOS**

**ENSINO DO CÁLCULO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:**
**Possíveis origens das dificuldades e análise do tema do ENADE**

TCC apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Reitor Joaquim Amazonas, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 25/03/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

(Orientador: Prof. André Meireles)

---

(Examinador 1)

---

(Examinador 2)

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me proporcionar as graças necessárias para chegar ao fim deste processo e por me conceder as virtudes essenciais para a manutenção da minha realidade, como a fortaleza e a esperança.

Sou imensamente grato a toda a minha família, de modo especial à minha mãe, que me proporcionou a vida e me apoiou durante toda a caminhada.

Ao professor orientador André Meireles, expresso minha gratidão pela parceria na construção do conhecimento enquanto seu aluno e orientando de TCC. Suas correções e conselhos foram fundamentais para nortear o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e colegas, que de alguma forma colaboraram não apenas com a construção deste trabalho, mas também com a minha formação pessoal, deixando marcas significativas nesta trajetória.

Por fim, à minha noiva, minha melhor amiga e parceira em todas as circunstâncias, cuja presença foi essencial no desenrolar de todo este processo. Seu apoio e incentivo foram indispensáveis para que eu chegasse até aqui.

A todos, o meu muito obrigado!

*"Compreendi que, sem o amor, todas as obras são nada, mesmo as mais brilhantes."*

— Santa Teresinha do Menino Jesus

# RESUMO

Este trabalho analisa aspectos do ensino e da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática, com base em pesquisas anteriores e nas edições de 2014, 2017 e 2021 do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). O objetivo é identificar os elementos que compõem esse campo de conhecimento no contexto da avaliação externa e evidenciar como esses conteúdos têm sido abordados, a partir das questões específicas e dos relatórios de desempenho. A literatura aponta lacunas na formação básica como um dos fatores que dificultam a aprendizagem do Cálculo, mas destaca-se também a responsabilidade das instituições de ensino superior em promover a superação dessas deficiências durante a formação inicial. Ao analisar os dados do ENADE, observa-se um desempenho significativamente baixo dos estudantes nas questões relacionadas ao Cálculo, especialmente em itens que exigem domínio conceitual e capacidade de interpretação. A partir dessa constatação, o estudo propõe uma reflexão sobre os desafios enfrentados na formação de professores de Matemática e a necessidade de estratégias pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos licenciandos. Não se busca estabelecer relações causais diretas entre o ensino e o desempenho no ENADE, mas compreender de que modo esse campo tem sido mobilizado nas avaliações externas.

**Palavras-chave:** Cálculo, Licenciatura em Matemática, ENADE, Ensino e Aprendizagem, Formação de Docente.

# ABSTRACT

This paper analyzes aspects of the teaching and learning of Differential and Integral Calculus in undergraduate Mathematics teacher education programs, based on previous research and on the 2014, 2017, and 2021 editions of the National Student Performance Exam (ENADE). The objective is to identify the components of this field of knowledge within the context of external evaluation and to highlight how these contents have been addressed, based on the specific questions and performance reports. The literature points to gaps in basic education as one of the factors that hinder the learning of Calculus, but also emphasizes the responsibility of higher education institutions to overcome these deficiencies during initial teacher education. Analysis of ENADE data shows significantly low student performance on Calculus-related questions, especially those requiring conceptual understanding and interpretive skills. Based on this finding, the study proposes a reflection on the challenges faced in the education of future Mathematics teachers and the need for pedagogical strategies that foster critical thinking and student autonomy. This study does not seek to establish direct causal relationships between teaching and performance in ENADE, but rather to understand how this field has been mobilized in external assessments.

**Keywords:** Calculus, Mathematics Teacher Education, ENADE, Teaching and Learning, Teacher Training.

# Sumário

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo na licenciatura em Matemática é um desafio persistente. Essa disciplina fundamental exige dos futuros professores não apenas a compreensão aprofundada dos conceitos, mas também sua aplicação em situações concretas. Entretanto, muitas dificuldades de aprendizagem são frequentemente encontradas nesse percurso, em grande parte devido à falta de articulação entre os níveis de ensino.

O impacto dessa transição entre o ensino básico e o ensino superior é um dos fatores que contribuem para o baixo desempenho dos alunos em diversas disciplinas, dentre elas o Cálculo. Esse salto exige amadurecimento matemático, incluindo o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de argumentação – habilidades, que segundo Masola e Allevato (2016), são frequentemente pouco desenvolvidas nos alunos.

A transição do ensino básico para o ensino superior é um período de adaptações e rupturas, diante de uma nova realidade. A falta de autonomia dos estudantes na organização da rotina de estudos, as diferenças entre as formas de ensino e uma maior responsabilidade para o estudante podem se tornar desafios significativos. Dentre as dificuldades relativas à falta de conhecimento, destacam-se a resolução de problemas, a realização de atividades de forma mecânica sem uma reflexão aprofundada sobre o conteúdo, a ausência de generalização, abstração e argumentação de ideias, além de dificuldades na escrita e representação matemática (Masola e Allevato, 2016).

Sousa et al. (2013) destaca o déficit dos alunos em relação ao conteúdo de funções, apontando que muitos estudantes não sabem calcular o valor de uma função em um ponto dado, traçar um gráfico simples ou manusear uma expressão algébrica. Como a aprendizagem do Cálculo depende de conceitos que deveriam ter sido apreendidos no ensino médio, como relações algébricas e noções geométricas do ensino fundamental, percebe-se a contribuição dessas deficiências para as dificuldades na aprendizagem do Cálculo. Esse cenário pode estar relacionado ao desempenho acadêmico e a avaliações externas, como o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), na medida em que as dificuldades de compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos possivelmente se refletem nos resultados obtidos.

O ENADE integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) e tem a função de aferir o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos programáticos, habilidades e competências exigidas na graduação. Aplicado trienalmente a ingressantes e concluintes, seus resultados possibilitam uma análise mais abrangente da qualidade dos cursos superiores no Brasil, subsidiando a formulação de políticas educacionais.

Diante desse contexto, a relevância deste estudo está diretamente ligada à necessidade de compreender e superar as barreiras educacionais no ensino do Cálculo. A identificação e análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos podem promover o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes, tendo em vista a importância da disciplina que é um alicerce para o entendimento de conceitos mais avançados. Como destacam Santos e Matos (2012):

> "como essa disciplina é um pré-requisito importante para outras disciplinas estudadas no decorrer do curso, as dificuldades apresentadas por muitos alunos interferem no andamento do curso, prejudicando-os na aprendizagem dos demais conteúdos."

Com base nisso, o problema de pesquisa deste estudo pode ser sintetizado na seguinte questão: em que medida as dificuldades de aprendizagem no ensino do Cálculo, nas licenciaturas em Matemática, influenciam diretamente nos resultados obtidos no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), especificamente nas questões relacionadas a essa disciplina? Parte-se da hipótese de que essas dificuldades decorrem de um contexto educacional complexo, envolvendo lacunas no ensino básico, desafios na transição para o ensino superior, a falta de motivação dos estudantes e, também, limitações nas práticas pedagógicas adotadas pelas instituições de ensino superior. Assim, enfrentar essa questão exige soluções construídas a partir da compreensão dessa multiplicidade de fatores.

Nesse sentido, a escolha deste tema justifica-se diante da importância de melhorar o ensino de Cálculo para a formação de professores de Matemática mais capacitados e, consequentemente, para o aprimoramento do ensino de Matemática em níveis mais básicos. Portanto, compreender e analisar essa problemática pode nos levar a reflexões valiosas sobre a implementação de novas estratégias de ensino mais eficazes, contribuindo para a formação de profissionais mais preparados e para a elevação dos indicadores de qualidade educacional.

Com o intuito de investigar as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes de Licenciatura em Matemática no aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral, este estudo propõe-se a analisar questões específicas de Cálculo aplicadas nas edições de 2014, 2017 e 2021 do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), considerando os dados dos relatórios de síntese de área como referência para avaliar o desempenho dos alunos e identificar padrões que possam indicar desafios na aprendizagem da disciplina. A partir dessa análise, são identificados os possíveis desafios enfrentados pelos alunos, como a falta de domínio de conceitos fundamentais e a dificuldade na interpretação de problemas matemáticos. Além disso, são explorados aspectos históricos e teóricos relacionados ao ensino de Cálculo, bem como a estrutura e a evolução do Enade ao longo dos anos.

Para alcançar os objetivos deste trabalho, adota-se uma metodologia baseada em pesquisa documental e quantitativa. A investigação centra-se na análise das questões específicas de cálculo das três últimas edições do ENADE, utilizando os relatórios de síntese de área que fornecem dados detalhados sobre o desempenho dos alunos diante de cada questão. A coleta de dados envolve a extração sistemática das informações contidas nesses relatórios, seguida de uma análise estatística para interpretar os resultados obtidos. Adicionalmente, uma análise qualitativa é conduzida para identificar padrões de dificuldades de aprendizagem, proporcionando uma compreensão aprofundada dos desafios enfrentados pelos estudantes.

# Capítulo 2

# OBJETIVOS

## 2.1 Objetivo Geral

Investigar os resultados dos estudantes da licenciatura em matemática em relação ao cálculo diferencial e integral nas provas mais recentes do ENADE.

## 2.2 Objetivos Específicos

1. Identificar as principais dificuldades no ensino e na aprendizagem do cálculo a partir de pesquisas anteriores sobre o tema.
2. Analisar as questões específicas de cálculo nas provas do ENADE, identificando conhecimentos úteis para resolvê-las.
3. Averiguar os níveis de desempenho dos estudantes da licenciatura nas questões sobre cálculo no ENADE.

# Capítulo 3

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 3.1 Breve Histórico

A palavra "cálculo"origina-se do latim "calculus", que significa "pedrinha". No entanto, para nós, ela designa a área de conhecimento e disciplina do Cálculo. Como nos diz Boyer (2012), o avanço do desenvolvimento dos conceitos matemáticos proporcionou sua criação por Newton e Leibniz, de maneira independente, considerados os grandes criadores do cálculo diferencial e integral.

> “Esse extraordinário instrumento permitiu a resolução de inúmeros problemas matemáticos, astronômicos e físicos, provocando uma verdadeira explosão de investigações e descobertas ao longo do século XVIII, com matemáticos como Bernoulli (Jacques (1654-1705) e Jean (1667-1748)), que desenvolveram métodos sofisticados para resolver problemas de máximos e mínimos, além de Euler (1707-1783), d’Alembert (1717-1783) e muitos outros”. (Boyer, 2012)

Contrariando a ordem na qual estamos habituados a estudar na disciplina de cálculo, começando do diferencial ao integral, o primeiro a surgir foi o cálculo integral. Os primeiros problemas que estão na origem da história do cálculo relacionavam-se com o cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos (Eves, 2004). Embora Newton e Leibniz sejam considerados os criadores do cálculo moderno, não podemos afirmar que criaram tudo do nada, pois, ao longo da história, tivemos várias contribuições de outros grandes matemáticos, que remontam desde a Grécia Antiga.

Matemáticos como Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), com a criação do método de exaustão, e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), que aprimorou esse método e desenvolveu o método do equilíbrio, usado no cálculo de áreas de curvas como espirais e parábolas, foram fundamentais para o desenvolvimento do cálculo. Após as descobertas de Arquimedes, a teoria de integração voltou a ganhar notabilidade nos tempos modernos com o desenvolvimento de ideias relacionadas a infinitésimos por Johann Kepler (Eves, 2004).

Eves (2004) afirma que a diferenciação teve sua origem em problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões de máximos e mínimos de funções, tendo sua primeira manifestação evidente com as ideias de Fermat em 1629. Esse matemático desenvolveu um trabalho notável não só na diferenciação como também na integração.

Durante a corrida pelo desenvolvimento do conhecimento, Isaac Barrow (1630-1677) foi um dos primeiros a perceber a diferenciação e a integração como operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como o teorema fundamental do cálculo. Muito do cálculo já havia sido descoberto, no entanto, era necessária a criação de um cálculo manipulável e proveitoso, do qual Newton e Leibniz foram os grandes criadores (Eves, 2004).

O desenvolvimento do cálculo foi fundamental para o avanço não só da matemática, mas também de outros campos do conhecimento. Eves (2004) chega a afirmar que, "Esses conceitos têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que, sem algum conhecimento deles, dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta."

Em concordância com importância dada a essa área do conhecimento o Stewart (2013), autor comumente utilizado pelos professores e alunos nas disciplinas de cálculo, também diz:

> "O cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerada uma das maiores realizações da inteligência humana. Espero que você descubra não apenas o quanto esta disciplina é útil, mas também o quão intrinsecamente bela ela é."

Além disso, as contribuições do cálculo se estendem a diferentes áreas como física, nos estudos dos movimentos, química para prever resultados de experimentos, ciências econômicas, medicina, engenharia, entre outras, que o utilizam como ferramenta para o desenvolvimento de seu trabalho. Tendo em vista essa importância, podemos observar sua presença dentro da universidade não apenas na grade curricular dos cursos de matemática, mas também nos diversos núcleos do conhecimento que necessitam de suas aplicações em algum momento, como afirma Rezende (2003)

> "Nesse sentido, o Cálculo é uma grande rede que interage com várias outras redes: o próprio conhecimento matemático; a física e as ciências naturais de um modo geral; as ciências sociais e econômicas; o desenvolvimento de novas tecnologias etc. O "ensino de Cálculo", por outro lado, está relacionado a outras variedades de redes, além daquelas que o Cálculo naturalmente está interligado. Acrescentam a estas: as ciências cognitivas, a epistemologia, a educação etc."

Apesar de ser uma matéria fascinante, sua presença nas diversas grades curriculares traz consigo um alto nível de reprovação, evasão e rejeição por parte dos alunos, que apresentam grandes dificuldades no entendimento da disciplina, conforme comentado por Masola e Allevato (2016)

> "como precursora desse sintoma, a Educação Básica, que não prepara o aluno para sua próxima fase de estudo. Os autores declaram que os discentes são condicionados, na Educação Básica, a resolver atividades de forma mecânica, priorizando procedimentos técnicos, sem valorizar a reflexão. Os alunos demonstram não terem sido orientados para se organizar adequadamente para os estudos, comprometendo, assim, seu desenvolvimento na Educação Superior."

O autor destaca um ponto primordial para a nossa discussão, que é a falta de conhecimento prévio dos alunos ao chegarem à disciplina. Essa lacuna, muitas vezes herdada da Educação Básica, é agravada pela continuidade de um ensino com enfoque mecânico também no Ensino Superior, onde ainda predominam metodologias que priorizam a resolução de exercícios padronizados em detrimento da compreensão conceitual. O "fracasso"no ensino do cálculo não é algo atual, mas que esta ligado ao momento em que se iniciou o ensino, pontuando que está também é uma realidade dos países ricos, de acordo com os trabalhos publicados por Rezende (2003). Nesse sentido, vamos nos aprofundar nas causas que levam os alunos a terem um rendimento significativamente baixo e a não assimilarem o conhecimento repassado na disciplina.

## 3.2 Dificuldades de aprendizagem

Estudantes de cálculo enfrentam dificuldades significativas para acompanhar o desenvolvimento da disciplina. Curi e Farias (2007) observaram que a forma como os alunos estudam influencia diretamente seus resultados. Muitos adotam práticas esporádicas, limitando-se à resolução de questões dos livros. Entre os motivos apontados para o baixo rendimento estão a falta de empenho, interesse, atenção dos professores e, principalmente, a carência de uma base sólida.

Rezende (2003), Barbosa (1994), Cavasotto (2010), Cury e Cassol (2004), Sousa et al. (2013) concordam quanto à falta de base dos alunos, que ao entrarem no ensino superior demonstram não terem adquirido e desenvolvido conhecimentos mínimos para o desenvolvimento das disciplinas. Diante disso, algumas universidades optam pelo chamado "pré-cálculo", na esperança de minimizar essas lacunas no conhecimento do aluno, porém, destaca Nasser et al. (2019) que o problema apenas teria mudado de lugar. Essa dificuldade torna evidente as fragilidades da construção do conhecimento na educação básica.

Esse déficit é apontado de maneira geral por professores e alunos, que aliados à falta de uma rotina de estudos, acarretam na reprovação. Em suma, grande parte das dúvidas dos alunos está ligada aos conceitos de fatoração, resolução de equações, funções, limites, derivadas, integrais e geometria analítica (Cavasotto, 2010). De maneira geral, a maior dificuldade dos estudantes não é diretamente aplicar os conceitos de derivada ou de integral, e sim na representação geométrica e o reconhecimento de relações entre os elementos da figura, conforme apontado por Nasser et al. (2019).

Os alunos saem do ensino médio sem o entendimento mínimo de funções, como traçado de um gráfico, a formulação do problema, conforme aponta Nasser et al. (2019):

> "De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças, tão úteis na representação de problemas reais."

Na continuidade desse apontamento, é colocado como as principais dificuldades coisas elementares, como a leitura e interpretação dos enunciados, a própria modelagem do problema, a conversão da representação verbal para a analítica, relacionadas à função afim, e a outras sentenças. São pontos que se confirmam também na análise de resolução de problemas de cálculo feita por Cavasotto (2010).

Toda essa problemática levanta a necessidade de mudança da posição do professor em sala de aula, tanto na educação básica como também na superior. Visto que o aluno é muitas vezes condicionado a

> "utilizar fórmulas, regras, não sendo, portanto, levado a pensar e a raciocinar, aceitando e reproduzindo passivamente o que o professor transmite, não sendo estimulado a raciocinar, a refletir etc. Valoriza-se, com isso, o aprendizado de técnicas desligado da compreensão da maneira de como esse tipo de conhecimento é construído"(Barbosa, 1994).

Em concordância, Rezende (2003) argumenta que, no ensino, a técnica tem prevalecido sobre o significado, promovendo uma ruptura entre o conhecimento e a sua importância para a vida do aluno. O papel do professor surge como destaque em Santos e Matos (2012), que evidenciam desafios de natureza didática e/ou epistemológica.

Os desafios epistemológicos, que Rezende (2003) define como dificuldades ligadas à natureza do assunto e que dependem diretamente do seu desenvolvimento histórico, são, portanto, aspectos inerentes ao saber. Complementando, Santos e Matos (2012) deixam claro que nem sempre essas questões devem ser evitadas, visto que fazem parte do processo de aprendizagem. Logo, embora haja o reconhecimento de certas dificuldades relacionadas ao próprio conteúdo, ele não deve ser excluído dos planos de aula; pelo contrário, faz-se necessário refletir sobre como ensiná-lo.

Por sua vez, os desafios didáticos decorrem das escolhas pedagógicas feitas pelo professor no processo de ensino-aprendizagem. Assim, a adoção de metodologias que não atendem às necessidades dos discentes pode representar uma limitação de natureza didática (Santos e Matos, 2012).

Dessa forma, o papel do professor se apresenta como um ponto fundamental para a mitigação dos déficits apresentados pelos alunos, onde os autores destacam a necessidade da contextualização do cálculo, como afirma Barufi (1999).

> "Nesse sentido, podemos perceber o quão fundamental é o papel do professor, pois é essencialmente ele quem realiza a mediação entre o saber matemático cultural, descontextualizado e despersonalizado, e os estudantes que querem construir esse conhecimento, enquanto pessoas enfrentando problemas desafiadores, cada uma com suas características pessoais."

A autora fala que a construção do conhecimento não é algo simples, mas que é sumamente necessário gerar a curiosidade e, por vezes, o surgimento de um desconforto e insatisfação, de modo que promova o envolvimento do aluno na busca por solução. O que não é uma tarefa fácil quando os mesmos não despertam interesse pela matéria.

No entanto, à medida que o professor busca contextualizar o conteúdo, ele acaba por recorrer a situações significativas para o aluno, de forma que ele possa ser envolvido no processo (Santos e Matos, 2012). A posição do aluno também deve ser levada em consideração diante dos resultados obtidos, não deixando a responsabilidade apenas nas mãos dos professores, pois, como já comentado por Curi e Farias (2007), o empenho dos alunos na disciplina, por muitas vezes, é ineficiente, seja pela desmotivação diante das notas e falta de entendimento, seja pela própria falta de interesse.

A procura por monitorias, revisões e retirada de dúvidas surgem em geral com a proximidade de provas, onde os alunos esperam aprender tudo. Assim, os próprios professores apontam não apenas a falta de conhecimentos prévios, mas também a falta do hábito de estudar a disciplina (Cavasatto, 2010).

Todos os pontos apresentados são fatores que influenciam diretamente e são geradores de dificuldades na aprendizagem do cálculo, que longe de acharmos uma solução eficaz demandam a reflexão de como podemos amenizar a situação e possibilitar a aprendizagem, visto que as dificuldades apresentadas pelos alunos os acompanham desde as séries iniciais (Cavasatto, 2010). As dificuldades no aprendizado do cálculo não apenas impactam a formação acadêmica, mas também afetam o desempenho em avaliações externas, como o ENADE, cuja relevância será analisada a seguir.

## 3.3 Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

Segundo portal do MEC, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (Sinaes), que foi instituído pela Lei nº 10.861, em 14 de abril de 2004, tem como função avaliar as instituições, os cursos e o desempenho dos estudantes. Usando do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade) para reunir informações que serão utilizadas na criação de políticas públicas voltadas ao ensino superior. O Enade passou a substituir o Exame Nacional de Cursos (ENC), amplamente conhecido como Provão que foi aplicado de 1996 a 2003. A partir dessa implementação temos que

> "O ENADE aferirá o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares do respectivo curso de graduação, suas habilidades para ajustamento às exigências decorrentes da evolução do conhecimento e suas competências para compreender temas exteriores ao âmbito específico de sua profissão, ligados à realidade brasileira e mundial e a outras áreas do conhecimento. " BRASIL(2004)

O ENADE é considerado como um dos pilares do SINAES, já que os resultados obtidos pela avaliação e o questionário respondido pelos estudantes dão a conhecer com profundidade a realidade e a qualidade dos cursos oferecidos na Educação Superior em todo Brasil. Waideman et al (2017, p.3) explica como ocorre a aplicação da avaliação, que é direcionada aos alunos ingressantes e concluintes dos cursos da graduação, sendo realizada no máximo num prazo de três anos, ou seja, trienal, diretamente para cada área do conhecimento. Nos aponta também o objetivo, "...melhorar a qualidade da educação superior, pela sua expansão e pelo acompanhamento da oferta dos cursos de graduação do sistema federal."

### 3.3.1 Estrutura da prova

A prova, em sua aplicação de 2021, foi estruturada em duas partes, a de Formação Geral comum a todos os cursos, que tem 10 questões, sendo 2 (duas) discursivas e 8 (oito) de múltipla escolha. A segunda, é a do Componente Específico da área que conta com 30 (trinta) questões, sendo 3 (três) delas discursivas e as 27 (vinte e sete) restantes de múltipla escolha. Essa estrutura e distribuição de questões nem sempre foi a mesma, elas evoluíram junto ao modelo da prova e seus objetivos de avaliação. A última aplicação de 2024 demonstra esse caráter adaptativo do modelo da prova, trazendo para a Formação Geral um total de 27 (vinte e sete) questões de múltipla escolha, e no Componente Específico temos 37 (trinta e sete) questões, sendo 1 (uma) discursiva e as restantes de múltipla escolha, segundo consta na portaria que regulamenta a aplicação. Waideman et al (2017, p.3) diz acreditar que se a realização desta avaliação for levada a sério, ela poderá indicar o nível de conhecimento e realizar um diagnóstico da realidade do ensino, permitindo dessa forma a tomada de novas e diferentes estratégias para minimização dos possíveis erros cometidos, de modo que se possa garantir a qualidade de ensino.

Até a edição de 2021, o bloco de Formação Geral era comum a todas as áreas do Enade. A partir da edição de 2024, esse bloco foi substituído pela Formação Geral Docente, que será comum a todas as licenciaturas. Enquanto a Formação Geral tinha como foco avaliar competências gerais aplicáveis a todos os estudantes, independentemente da área de formação, a Formação Geral Docente adota uma abordagem mais específica, voltada para os concluintes das licenciaturas. O foco agora está em competências e habilidades relacionadas à prática docente e à educação básica.

Apesar dessa mudança, ambos os formatos compartilham o mesmo objetivo de promover a formação integral dos estudantes, valorizando o pensamento crítico, a análise de problemas e a incorporação de valores éticos e sociais. Assim, a Formação Geral busca verificar se o estudante desenvolveu competências e habilidades que transcendem os conhecimentos específicos de sua área, avaliando sua capacidade de aplicar o que aprendeu para compreender, analisar e intervir criticamente em situações complexas da sociedade.

O referencial teórico utilizado até 2021 abordava temas amplos e interdisciplinares, aplicáveis a qualquer área de formação. Em contrapartida, o novo referencial adota um foco mais específico, voltado às particularidades da prática docente e aos desafios da educação básica. Essa especificidade traz benefícios significativos no contexto da formação de professores, permitindo uma abordagem mais alinhada às demandas reais da prática pedagógica e aos problemas enfrentados no ambiente educacional.

A área específica de Matemática, nas edições do ENADE de 2005 a 2021, apresenta objetivos avaliativos que convergem em sua essência, mas mostram uma evolução gradual ao longo do tempo. As portarias destacam a importância de o estudante formular conjecturas e realizar generalizações, envolvendo argumentação lógica e validação matemática. Há também a expectativa de que o aluno seja capaz de resolver problemas, utilizando diferentes representações — gráficas, simbólicas e numéricas —, e de elaborar modelos matemáticos.

As portarias mais recentes enfatizam competências específicas voltadas para a Educação Básica, como a análise de propostas curriculares, a avaliação de processos de ensino-aprendizagem e a seleção e criação de materiais didáticos. Por outro lado, as edições mais antigas colocavam maior ênfase no domínio da linguagem matemática e nos conteúdos relacionados à Matemática pura, com destaque para o rigor matemático, que, embora ainda presente nas edições atuais, aparece de forma implícita. Ao comparar o perfil do aluno esperado em diferentes períodos, percebe-se que, nas edições anteriores, priorizava-se um estudante com competências sólidas em conteúdo matemático e abstração formal, enquanto as competências pedagógicas eram abordadas de forma mais indireta. Isso se explica, em parte, pelo fato de que o bacharelado e a licenciatura compartilhavam uma base de conteúdos comuns, com uma separação mais clara entre os aspectos específicos de cada área.

Após a cisão das áreas na edição de 2017, nota-se um foco maior na formação de um professor de Matemática com capacidade crítica em relação às estruturas e metodologias de ensino, adaptado às demandas da Educação Básica e ao contexto escolar. Essa mudança reflete um movimento de alinhamento entre o domínio técnico da Matemática e as necessidades pedagógicas contemporâneas, promovendo uma formação mais integrada. Em destaque, temos as mudanças no referencial teórico que, de 2005 até a edição de 2014, apresentava conteúdos compartilhados entre licenciatura e bacharelado. Esses conteúdos incluíam tópicos da Educação Básica, como funções, geometria plana e espacial, probabilidade, estatística e progressões, além de conteúdos do Ensino Superior, como números reais, geometria analítica, cálculo diferencial e integral, teoria dos números, álgebra linear e estruturas algébricas. O conteúdo específico da licenciatura, por sua vez, abordava temas ligados à Educação Matemática, com foco na transposição didática, uso de tecnologias e análise de erros dos alunos.

Com o avanço das edições, as portarias começaram a destrinchar de forma mais detalhada o que seria cobrado em cada área. Até 2014, o referencial teórico trazia uma abordagem ampla e técnica, consolidando a Matemática formal como base tanto para bacharelandos quanto para licenciandos. A partir de 2017, no entanto, há uma mudança perceptível, com uma exposição mais genérica dos conteúdos, especialmente nas edições de 2021 e 2024.

A análise dessas portarias sugere uma transição de um foco puramente técnico e formal para uma abordagem mais prática e pedagógica, especialmente para a licenciatura. Isso se reflete na maior ênfase em tendências da Educação Matemática, uso de recursos didáticos, inclusão, e adaptação de conteúdos e métodos ao contexto escolar. A edição de 2024, por exemplo, destaca temas como educação matemática inclusiva, análise de processos avaliativos, planejamento de aulas e o uso de tecnologias emergentes, como a gamificação.

Esse movimento denota uma preocupação crescente em formar professores que sejam não apenas especialistas em Matemática, mas também mediadores eficazes do conhecimento, capazes de integrar teoria e prática, respeitando as demandas culturais, sociais e pedagógicas da Educação Básica atual.

### 3.3.2 Sistema de pontuação

Até a edição de 2021, o relatório de síntese de área refletia um modelo de avaliação que buscava equilibrar diferentes aspectos do desempenho acadêmico por meio de uma composição ponderada de notas. A nota final do estudante na prova era calculada a partir de uma média ponderada, em que a Formação Geral (FG) correspondia a 25,0% e o Componente Específico (CE) a 75,0%.

A nota de Formação Geral era obtida pela média ponderada das questões objetivas e discursivas, com pesos de 60,0% e 40,0%, respectivamente. De forma semelhante, o cálculo do Componente Específico seguia uma média ponderada, atribuindo pesos de 85,0% às questões objetivas e 15,0% às discursivas. Ambas as notas, de FG e CE, eram arredondadas à primeira casa decimal. A partir do cômputo dessas notas individuais, calculava-se o Conceito ENADE do curso com base no desempenho médio dos concluintes, refletindo a qualidade da formação acadêmica e as competências desenvolvidas ao longo da graduação.

O relatório de 2024, no entanto, deve apresentar modificações significativas no cálculo das notas, devido às mudanças na estrutura da prova. Na Formação Geral Docente, por exemplo, não há mais questões abertas, enquanto o Componente Específico conta com apenas uma questão aberta.

Essas alterações indicam um aumento no peso relativo das questões objetivas na composição das notas. Na Formação Geral, as notas serão calculadas exclusivamente com base na proporção de acertos das questões objetivas. Já no Componente Específico, a única questão aberta terá um peso menor, ajustado para refletir a predominância das questões objetivas, garantindo equilíbrio na avaliação. O impacto dessas mudanças será incorporado na metodologia de cálculo do Conceito ENADE, que continuará a representar o desempenho médio dos estudantes, avaliando a qualidade dos cursos e instituições de forma contextualizada.

O Conceito ENADE indica a qualidade dos cursos de graduação por intermédio dos resultados alcançados pelos estudantes na prova. A classificação vai de 1 (pior situação) a 5 (melhor situação). Esse indicador reflete diretamente o desempenho dos concluintes nas áreas de Formação Geral e Conhecimento Específico, com especial atenção ao segundo componente, que abrange os conteúdos diretamente relacionados à área de formação do curso. Portanto, a boa preparação dos estudantes em formação é de suma importância para a instituição nesse processo de avaliação externa, uma vez que o desempenho dos alunos impacta significativamente na classificação do curso.

Ademais, embora o Conceito ENADE também influencie políticas educacionais e decisões no mercado de trabalho, é necessário cautela quanto à forma como as instituições respondem a essa avaliação. Em vez de promover apenas ações voltadas ao treinamento para a prova, é mais proveitoso refletir sobre a baixa familiaridade dos estudantes com o modelo do exame e as possíveis lacunas pedagógicas envolvidas. Observar, por exemplo, o enfoque adotado nas últimas edições do ENADE pode contribuir para uma preparação mais alinhada com a realidade dos cursos de licenciatura em Matemática, respeitando suas especificidades formativas e favorecendo um desenvolvimento mais significativo e consistente dos futuros docentes.

Dois conceitos fundamentais em relação às questões aplicadas no ENADE são o Índice de Facilidade e o Ponto-Bisserial. O Índice de Facilidade é calculado com base no percentual de acertos das questões, classificando-as em níveis de dificuldade. Questões com 86,0% de acerto ou mais são consideradas muito fáceis, enquanto aquelas com percentual de acerto igual ou inferior a 15,0% são consideradas muito difíceis.

Tabela 3.1: Classificação de questões segundo Índice de Facilidade

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** |
|---|---|
| $\geq 0,86$ | Muito fácil |
| $0,61$ a $0,85$ | Fácil |
| $0,41$ a $0,60$ | Médio |
| $0,16$ a $0,40$ | Difícil |
| $\leq 0,15$ | Muito difícil |

O índice Ponto-Bisserial, também conhecido como índice de discriminação, desempenha um papel crucial na seleção das questões consideradas para o cálculo da nota final. Sua importância reside no fato de que as questões objetivas devem apresentar um nível mínimo de poder discriminativo, ou seja, devem ser capazes de diferenciar entre alunos com bom desempenho e aqueles com desempenho insatisfatório.

Para que uma questão seja considerada adequada, ela deve ser mais frequentemente acertada por alunos com desempenho geral elevado e menos acertada por aqueles com desempenho inferior. Caso uma questão seja frequentemente errada por alunos que geralmente obtêm bons resultados, isso indica um baixo índice de discriminação. Por outro lado, quando esses mesmos alunos tendem a acertá-la, o índice de discriminação será satisfatório, evidenciando que a questão contribui efetivamente para avaliar o conhecimento dos estudantes.

O índice Ponto-Bisserial ($r_{pb}$) é calculado conforme a seguinte fórmula:

$$r_{pb} = \frac{\overline{C_A} - \overline{C_T}}{S_T} \sqrt{\frac{p}{q}} \tag{3.1}$$

onde $\overline{C_A}$ representa a média das notas obtidas na parte objetiva da Formação Geral da prova pelos estudantes que acertaram a questão, enquanto $\overline{C_T}$ é a média das notas de todos os alunos da área. O denominador $S_T$ corresponde ao desvio padrão das notas da prova de todos os alunos da área. Além disso, $p$ indica a proporção de estudantes que acertaram a questão, enquanto $q = 1 - p$ representa a proporção dos que erraram.

Questões com índice de discriminação considerado fraco, ou seja, com valores de Ponto-Bisserial iguais ou inferiores a 0,19, são eliminadas do cômputo das notas. Esse processo impacta diretamente a pontuação final, pois a exclusão de questões altera a relação entre os acertos individuais e o desempenho geral, garantindo maior precisão na avaliação.

Tabela 3.2: Classificação de questões segundo Índice de Discriminação

| **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|
| $\geq 0,40$ | Muito Bom |
| $0,30$ a $0,39$ | Bom |
| $0,20$ a $0,29$ | Médio |
| $\leq 0,19$ | Fraco |

Vale ressaltar que as provas do ENADE podem apresentar diversos níveis de dificuldade de um ano para outro. Isso ocorre porque é utilizada a Teoria Clássica dos Testes (TCT), uma metodologia empregada para avaliar o domínio do aluno nos assuntos abordados. No entanto, essa abordagem não garante a comparabilidade entre as edições do exame.

Todas as informações apresentadas até este ponto, relacionadas a aspectos específicos da prova e à computação das notas, estão disponíveis nos relatórios de síntese de área, que analisam o desempenho dos estudantes em cada edição e área do conhecimento. Com base nisso, este trabalho se limita às informações divulgadas até o momento da realização desta pesquisa.

# Capítulo 4

# PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Dada a relevância das dificuldades no ensino de cálculo e sua repercussão no desempenho acadêmico, o próximo passo é detalhar os métodos de coleta e análise dos dados utilizados neste estudo.

Esta pesquisa tem caráter documental, pois se baseia na análise de documentos oficiais fornecidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Texeira (INEP), e quantitativo, uma vez que envolve a análise de dados numéricos extraídos dos relatórios de síntese de área do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

As fases de investigação da pesquisa foram estruturadas de forma sistemática para garantir uma análise abrangente e rigorosa. Incialmente, com a seleção das questões e posteriormente a realização das resoluções, por fim a análise dos dados relativos a cada questão nos relatórios de síntese de área.

## 4.1 Identificação, seleção e resolução das questões de cálculo

O primeiro passo envolveu a identificação e seleção das questões de cálculo das aplicações de 2005 a 2021 do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes. Essa etapa foi realizada através da análise dos cadernos de provas disponíveis no portal do INEP. Foram selecionadas todas as questões que abordam conteúdos de cálculo diferencial e integral nas três últimas edições, com o intuito de contemplar uma amostra dos tópicos mais recorrentes e desafiadores. Por fim, após a catalogação das questões, todas receberam a respectiva resolução passo a passo.

## 4.2 Coleta de dados dos relatórios de síntese de área

A coleta de dados foi realizada a partir dos relatórios de síntese de área fornecidos pelo INEP. Esses relatórios contêm informações detalhadas sobre a eficácia de cada questão, incluindo a porcentagem de acertos. Os dados foram extraídos e organizados para facilitar a análise posteriormente.

## 4.3 Análise dos dados

Com os dados organizados, foi realizada uma análise individual de cada questão para interpretar os resultados obtidos. Buscando compreender o grau de dificuldade da questão e o seu potencial como avaliadora do conhecimento, o domínio do aluno sobre o conteúdo e o seu desenvolvimento. Para concluir uma análise geral dos resultados verificados e obtidos.

## 4.4 Limitações da Pesquisa e Justificativas Metodológicas

Embora esta pesquisa tenha fornecido insights valiosos sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em questões de cálculo no ENADE, algumas limitações precisam ser consideradas para interpretar os resultados com precisão:

1. **Amostragem restrita às edições recentes do ENADE**

   A análise se concentrou nas três últimas edições do exame (2014, 2017 e 2021), priorizando questões de cálculo diferencial e integral I. Essa escolha foi feita para garantir a relevância dos dados, visto que estas edições refletem as mudanças mais recentes nas diretrizes curriculares e no perfil esperado dos estudantes de licenciatura.

2. **Mudanças na estrutura da prova do ENADE**

As alterações na composição e no foco das provas ao longo dos anos dificultam a comparação direta entre edições. Por exemplo, mudanças na proporção de questões objetivas e discursivas e a introdução de novas categorias, como a Formação Geral Docente em 2024, podem influenciar os resultados. Essas mudanças exigem cautela na interpretação dos dados, pois diferenças no desempenho podem estar mais relacionadas ao formato do exame do que às competências dos alunos.

3. **Dados secundários**

   A análise baseou-se nos relatórios de síntese de área fornecidos pelo INEP, que apresentam informações limitadas sobre o contexto das respostas dos alunos e suas condições de realização da prova. Esses dados não capturam aspectos subjetivos, como a motivação dos estudantes ou a influência de fatores externos, como a pandemia de COVID-19 na edição de 2021.

4. **Dependência de índices estatísticos**

   Os índices de facilidade e discriminação foram utilizados como critérios principais para avaliar as questões. Embora úteis, esses indicadores não fornecem uma visão completa do desempenho acadêmico e podem ser influenciados por características específicas das questões, como a clareza do enunciado ou o grau de interdisciplinaridade.

Apesar dessas limitações, as escolhas metodológicas foram guiadas pela busca de um equilíbrio entre profundidade analítica e viabilidade prática. O foco em edições recentes e em questões específicas de cálculo permitiu identificar padrões de dificuldade e propor intervenções direcionadas, contribuindo para a melhoria do ensino de cálculo nos cursos de licenciatura em matemática.

# Capítulo 5

# ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÃO

Tendo como evidente a importância da aplicação do ENADE para as instituições e para a presente pesquisa, realizamos um mapeamento das questões de cálculo aplicadas à licenciatura em Matemática no período de 2005 a 2021. A tabela a seguir apresenta os resultados:

Tabela 5.1: Questões de cálculo aplicadas no ENADE (2005-2021)

| **Ano de aplicação** | **Questões** | **Quantidade** |
|---|---|---|
| 2005 | 25, 26, 27, 28, 30 | 5 |
| 2008 | 16, 19, 26, 31, 40* | 5 |
| 2011 | 5*, 10, 14, 17, 21, 22, 25 | 7 |
| 2014 | 10, 12, 15, 16, 21, 22 | 6 |
| 2017 | 9, 12, 23 | 3 |
| 2021 | 9, 13 | 2 |

**Questões discursivas.*

No total, foram identificadas 28 questões relacionadas aos conhecimentos específicos de cálculo aplicadas ao longo de seis edições da avaliação. A tabela abaixo detalha os conteúdos abordados, o índice de facilidade e o índice de discriminação de cada questão:

Tabela 5.2: Tabela de Questões: Conteúdo, Dificuldade e Discriminação

| **Ano** | **Questão** | **Conteúdo(s) abordado(s)** | **Índice de facilidade** | **Índice de discriminação** |
|---|---|---|---|---|
| 2005 | 25 | Comportamento de função polinomial, derivada e zero da função. | Difícil | Médio |

| Ano | Questão | Conteúdo(s) abordado(s) | Índice de facilidade | Índice de discriminação |
|---|---|---|---|---|
| | 26 | Teorema fundamental do cálculo, interpretação geométrica da integral. | Difícil | Fraco |
| | 27 | Máximo e mínimo de funções, gradiente e derivadas parciais. | Difícil | Bom |
| | 28 | Funções de várias variáveis e integral dupla. | Difícil | Fraco |
| | 30 | Derivada: interpretação geométrica, limites, máximo e mínimo, representação gráfica. | Médio | Questão discursiva |
| 2008 | 16 | Derivadas e análise de intervalos. | Difícil | Muito bom |
| | 19 | Derivada e integral. | Difícil | Médio |
| | 26 | Derivada parcial, máximo e mínimo, ponto crítico. | Difícil | Médio |
| | 31 | Crescimento e decrescimento de funções, análise gráfica. | Difícil | Muito bom |
| | 40 | Função de uma variável, gráfico, máximo e mínimo. | Difícil | Questão discursiva |
| 2011 | 10 | Limite, teorema do confronto. | Muito difícil | Médio |
| | 14 | Integral de linha e teorema de Green. | Muito difícil | Fraco |
| | 17 | Integral definida: cálculo de área. | Difícil | Fraco |
| | 21 | Derivada, crescimento e decrescimento, ponto de inflexão. | Difícil | Bom |
| | 22 | Derivadas parciais. | Muito difícil | Fraco |

| Ano | Questão | Conteúdo(s) abordado(s) | Índice de facilidade | Índice de discriminação |
|---|---|---|---|---|
| | 25 | Derivadas parciais, diferenciação implícita. | Difícil | Fraco |
| | 5* | Continuidade e teorema do valor intermediário. | Muito difícil | Questão discursiva |
| 2014 | 10 | Integral definida. | Difícil | Médio |
| | 12 | Equação de superfícies e integral dupla. | Difícil | Médio |
| | 15 | Derivada e integral, equação diferencial. | Difícil | Médio |
| | 16 | Teorema do valor médio. | Muito difícil | Fraco |
| | 21 | Função de duas variáveis: continuidade e diferenciabilidade. | Difícil | Fraco |
| | 22 | Derivada, máximos e mínimos, ponto de inflexão. | Difícil | Fraco |
| 2017 | 9 | Integral: interpretação geométrica. | Difícil | Médio |
| | 12 | Limite, teorema do confronto. | Difícil | Bom |
| | 23 | Integral imprópria. | Difícil | Fraco |
| 2021 | 9 | Função exponencial e derivada. | Difícil | Fraco |
| | 13 | Teorema do valor médio, reta tangente e reta secante. | Difícil | Fraco |

Pode-se concluir que a maioria das questões ao longo das edições foi considerada de nível difícil ou muito difícil, com índices de discriminação em sua maioria pouco satisfatórios. Muitas questões foram descartadas por apresentarem um índice de discriminação classificado como fraco. Esse padrão sugere que, independentemente da edição, os alunos de licenciatura enfrentaram dificuldades significativas ao lidar com questões relacionadas a cálculo diferencial e integral.

Diante desse cenário, concentramo-nos na análise das questões das três últimas aplicações relacionadas aos conceitos de cálculo diferencial e integral I. O objetivo é realizar uma interpretação detalhada do desempenho dos estudantes em relação a essas questões, considerando as seguintes edições:

Tabela 5.3: Questões analisadas nas três últimas edições

| **Ano** | **2014** | **2017** | **2021** |
|---|---|---|---|
| Questões | 10, 16, 22 | 9, 12, 23 | 9, 13 |

## 5.1 Prova 2014

# Questão 10

No contexto de investimento e formação de capital, se $M(t)$ representa o montante do capital de uma empresa existente em cada instante $t$ e $I(t)$ representa a taxa de investimento líquido por um período de tempo, então

$$M = \int_a^b I(t)\,dt$$

fornece o montante acumulado no período $a \leq t \leq b$. Considere que a função $I(t) = t\ln(t)$, definida para $t \geq 1$, representa a taxa de investimento líquido, em milhares de reais, de uma empresa de cosméticos. Nesse caso, utilizando $\ln(3) \approx 1,1$, o valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ é igual a:

(a) R$ 1.100,00

(b) R$ 2.100,00

(c) R$ 2.950,00

(d) R$ 3.750,00

(e) R$ 4.950,00

**Gabarito:** Letra C.

Segundo as informações fornecidas, podemos calcular o montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ pelo cálculo da seguinte integral:

$$\int_1^3 t\ln(t)\,dt$$

Para calcular, vamos usar a técnica de integração por partes:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Seja $u = \ln(t)$ e $dv = t\,dt$, logo:

$$du = \frac{1}{t}\,dt \quad \text{e} \quad v = \frac{t^2}{2}$$

Substituindo:

$$\int_1^3 t\ln(t)\,dt = \left[\ln(t) \cdot \frac{t^2}{2}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[\ln(t) \cdot \frac{t^2}{2}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{t}{2}\,dt$$

Calculando a primeira parte:

$$\left[\ln(t) \cdot \frac{t^2}{2}\right]_1^3 = \ln(3) \cdot \frac{3^2}{2} - \ln(1) \cdot \frac{1^2}{2}$$

Sabendo que $\ln(3) \approx 1,1$ e $\ln(1) = 0$, temos:

$$1,1 \cdot \frac{9}{2} - 0 = 1,1 \cdot 4,5 = 4,95$$

Agora, para a segunda parte:

$$\int_1^3 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2} = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto:

$$\int_1^3 t\ln(t)\,dt = 4,95 - 2 = 2,95$$

Como está em milhares de reais, temos que equivale a R$ 2.950,00.

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados na tabela abaixo:

| Índice de Facilidade | Classificação | Índice de Discriminação | Classificação |
|---|---|---|---|
| 0,26 | Difícil | 0,22 | Médio |

Tabela 5.4: Classificação da questão com base nos índices.

A questão foi considerada difícil pelo índice de facilidade, tendo o valor 0,26, o que significa que poucas pessoas conseguiram realizá-la. No índice de discriminação, foi classificada como mediana, logo, alunos que tiveram um melhor desempenho na prova conseguiram resolvê-la. Para a resolução, foram mobilizados conhecimentos considerados básicos em cálculo, como a determinação da função primitiva de uma função polinomial por meio das técnicas de integração. De acordo com os dados do relatório de síntese de área, observou-se que os alunos que não responderam corretamente a essa questão também apresentaram dificuldades em outras, o que levou à sua classificação como difícil no índice de facilidade e mediana no índice de discriminação.

Dessa forma, é possível concluir que a questão possibilita verificar o domínio do conteúdo pelo aluno. Sendo assim, o gráfico abaixo permite inferir o que foi analisado:

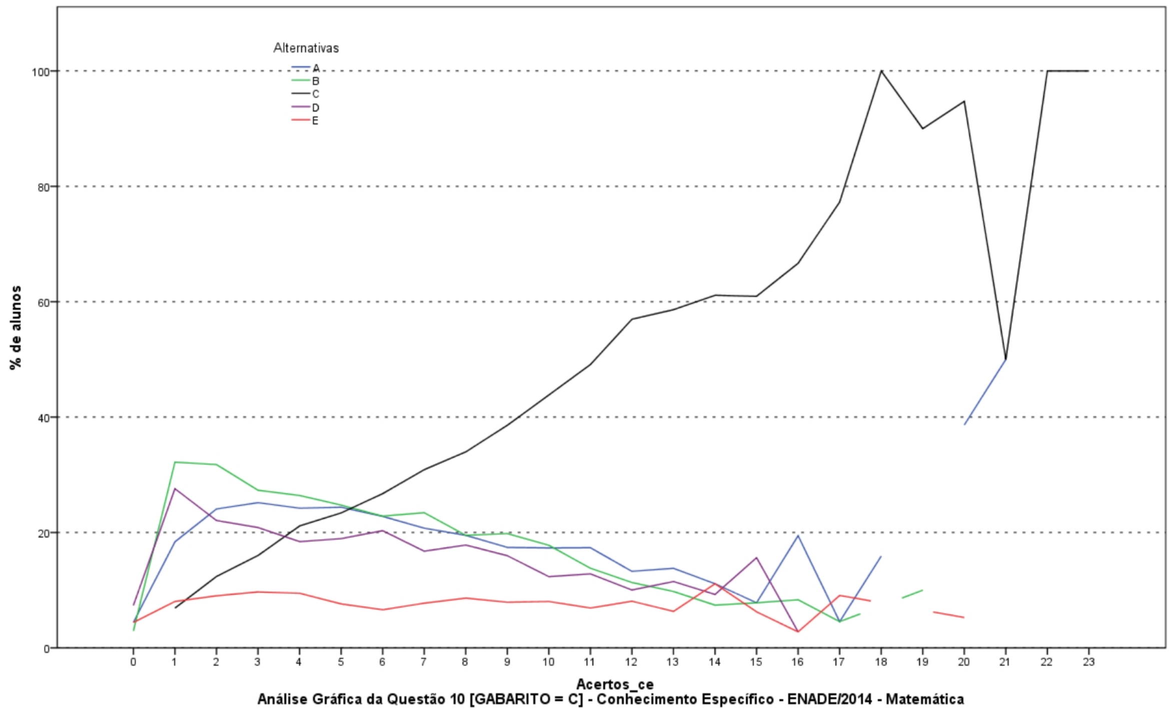



Figura 5.1: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2014.

O gráfico indica a distribuição das respostas dos alunos em relação ao número de questões que eles acertaram no bloco de Conhecimentos Específicos. No eixo horizontal, tem-se a quantidade de acertos dos estudantes nesse bloco de questões. Quanto mais à direita no gráfico, maior o número de acertos totais no conjunto de questões de Conhecimentos Específicos, sendo que o último valor representa os alunos com maior desempenho. O eixo vertical representa a porcentagem de estudantes que escolheram cada uma das alternativas da Questão 10, considerando a quantidade total de acertos que tiveram no bloco de Conhecimentos Específicos. Perceba que cada linha colorida corresponde a uma alternativa da questão, sendo que a alternativa correta (gabarito) está destacada no gráfico.

Ao analisar os dados, percebemos que o crescimento do percentual de acertos ocorre conforme o número de acertos do estudante aumenta. A partir dos alunos que acertaram sete questões, observa-se um crescimento na taxa de acertos da Questão 10. Esse aumento continua até que, entre os estudantes que acertaram 18 ou mais questões no bloco de Conhecimentos Específicos, praticamente não há erros nessa questão. Isso demonstra que os alunos com melhor desempenho geral tendem a resolver essa questão corretamente, evidenciando que desenvolveram o conhecimento necessário para encontrar a resposta correta.

# Questão 16

Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo o seu domínio, com $f'(x) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $f(1) = 1$, então pelo Teorema do Valor Médio, o valor máximo de $f(3)$ é igual a:

(a) 3

(b) 5

(c) 7

(d) 9

(e) 11

**Gabarito:** Letra (c).

O Teorema do Valor Médio é válido para a função $f$ que satisfaça as seguintes condições:

- $f$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
- $f$ é derivável no intervalo aberto $(a, b)$.

Então, existe um número $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Considerando as hipóteses do enunciado e aplicando o teorema do valor médio ao intervalo $[1, 3]$, pode-se afirmar que existe $c \in \mathbb{R}$, $1 < c < 3$, tal que:

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = f'(c)$$

Como temos da hipótese $f'(c) \leq c$, isso implica que:

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} \leq c$$

Sendo $f(1) = 1$ e $c < 3$, temos que:

$$\frac{f(3) - 1}{2} \leq 3 \implies f(3) \leq 3 \cdot 2 + 1 \implies f(3) \leq 7$$

Portanto, o valor máximo de $f(3)$ é 7.

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados na tabela abaixo:

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** | **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|---|---|
| 0,09 | Muito difícil | 0,14 | Fraco |

Tabela 5.5: Classificação da questão com base nos índices.

A questão mais difícil da prova foi identificada com um índice de facilidade extremamente baixo, valendo 0,09, o que indica que ela foi considerada muito difícil pelos estudantes. Além disso, o índice de discriminação da questão foi igualmente baixo, com um valor de 0,14, classificando-a como fraca. Devido a esses baixos índices, a questão não foi incluída no cálculo da nota final dos alunos.

A dificuldade elevada dessa questão pode ser atribuída ao fato de que os alunos provavelmente não conseguiram lembrar do teorema necessário para resolvê-la no momento da prova. Embora a aplicação do teorema em si envolvesse cálculos relativamente simples, a falha em recuperar o conhecimento teórico essencial impediu a maioria dos alunos de chegar à solução correta.

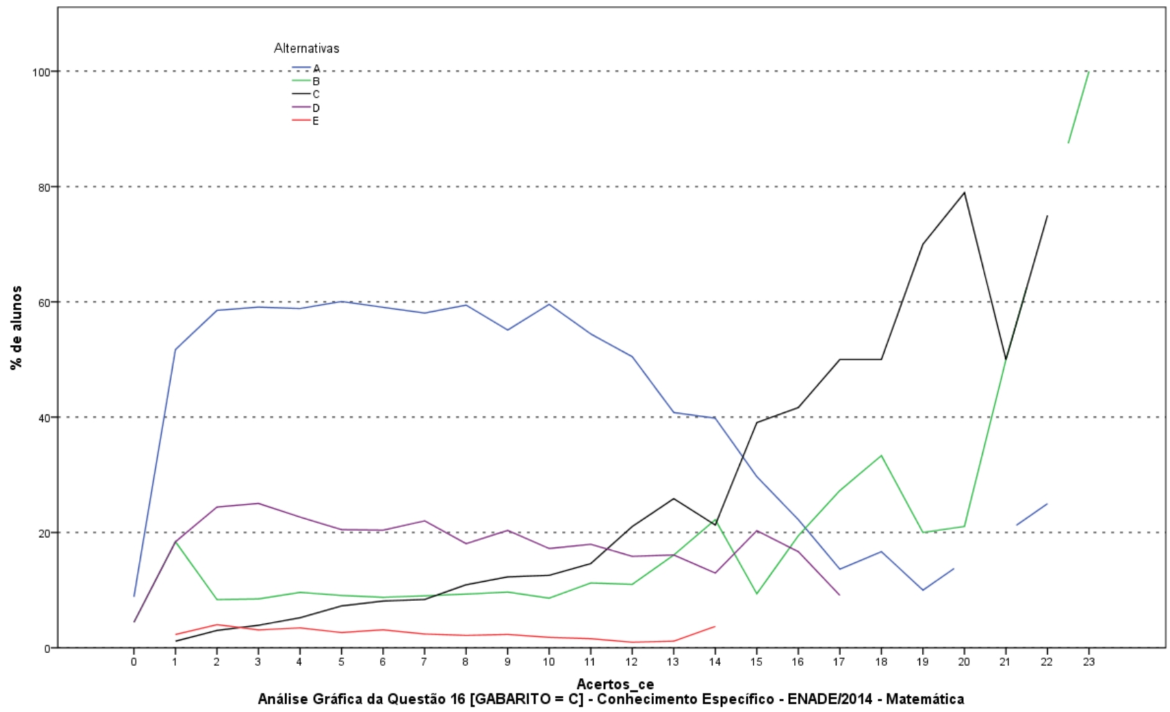



Figura 5.2: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2014.

O gráfico fornecido no relatório ilustra a dificuldade enfrentada pelos alunos, evidenciando que a grande maioria optou pela alternativa (a). Essa escolha pode ter resultado de confusão ou de uma associação incorreta que levou os estudantes a acreditar que, como em uma função $f(1) = 1$, $f(3)$ também deveria ser igual a 3. Esse raciocínio errôneo pode ter induzido ao erro, demonstrando uma compreensão inadequada da teoria envolvida.

Adicionalmente, a análise revela que os poucos alunos que conseguiram responder corretamente à questão enfrentaram dificuldades ao diferenciar entre as alternativas (c) e (b), o que sugere que mesmo entre aqueles com conhecimento adequado, houve incertezas significativas. A complexidade do problema pode ter contribuído para essa dificuldade adicional.

## Questão 22

Um dos problemas mais importantes estudados pelo cálculo diferencial e integral diz respeito à maximização e minimização de funções. Um desses problemas está relacionado à função cúbica definida por

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

em que $a$, $b$, $c$ e $d$ são constantes reais, com $a \neq 0$.
Acerca dessa cúbica, avalie as afirmações a seguir:

1. A função $f$ possui apenas um ponto de inflexão, independentemente dos valores de $a$, $b$, $c$ e $d$.

2. Se $b^2 - 3ac > 0$, então $f$ possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local.

3. Se $f$ possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, então a média aritmética das abscissas desses dois pontos extremos corresponde à abscissa do ponto de inflexão.

É correto o que se afirma em:

(a) I, apenas.

(b) II, apenas.

(c) I e III, apenas.

(d) II e III, apenas.

(e) I, II e III.

**Gabarito:**
Letra E.

Precisamos analisar as três afirmativas, para isso vamos precisar das derivadas da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

**Afirmativa I:**

Vamos verificar a sua veracidade e, para isso, igualamos a zero a segunda derivada, pois o resultado irá indicar o possível ponto de inflexão.

$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$6ax + 2b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Como $a \neq 0$, temos $-\frac{b}{3a}$ como único ponto de inflexão, logo a afirmativa **é verdadeira**.

**Afirmativa II:**

Para verificar a afirmação, vamos aplicar o teste da derivada primeira, pois a função $f(x)$ tem extremos locais (máximo ou mínimo) onde sua derivada primeira se anula, ou seja:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Para que a função tenha dois pontos críticos, a equação quadrática acima deve ter duas soluções reais distintas. Isso ocorre quando o discriminante da equação quadrática é positivo:

$$\Delta = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 4 \cdot 3a \cdot c\Delta = 4(b^2 - 3ac).$$

Logo, se $b^2 - 3ac > 0$, temos duas soluções reais e diferentes para a equação. Assim, existem dois pontos críticos, e como a função cúbica muda de concavidade ao passar por esses pontos, um será um ponto de máximo local e o outro um ponto de mínimo local.

**Afirmativa III:**

Usando o $\Delta$ encontrado, temos as raízes:

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3ac)}}{6a}.$$

Simplificando as raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

Para essa última verificação, precisamos fazer a média das raízes encontradas:

$$M_A = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right).$$

Simplificando:

$$M_A = \frac{1}{2}\left(\frac{-b - b}{3a}\right) = \frac{-2b}{2(3a)} = -\frac{b}{3a}.$$

Obtivemos o ponto de inflexão igual ao que foi encontrado na afirmativa I, logo a afirmação **é verda-**

**deira**.

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados na tabela abaixo:

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** | **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|---|---|
| 0,17 | Difícil | 0,17 | Fraco |

Tabela 5.6: Classificação da questão com base nos índices.

A questão foi classificada como difícil devido ao seu baixo índice de facilidade e ao índice de discriminação igualmente reduzido, o que levou à sua exclusão do cálculo da nota final dos alunos. A dificuldade dessa questão pode não estar apenas na necessidade de relembrar os conceitos teóricos envolvidos, mas também no trabalho algébrico exigido para sua resolução.

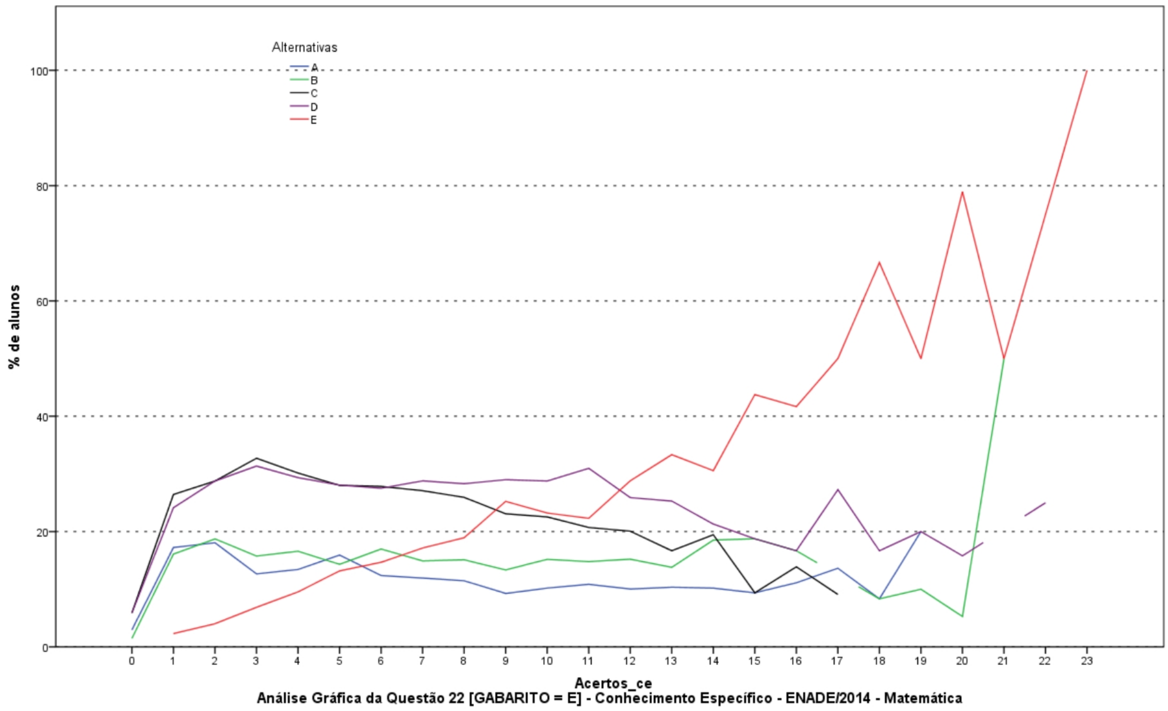



Figura 5.3: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2014.

As dificuldades enfrentadas pelos alunos são evidentes na distribuição das respostas. A maior parte dos estudantes ficou entre as alternativas (c) e (d), com a alternativa correta, a letra (e), recebendo um número muito pequeno de escolhas inicialmente. Essa distribuição sugere que os alunos identificaram a terceira afirmativa como verdadeira, mas não verificaram a veracidade das demais.

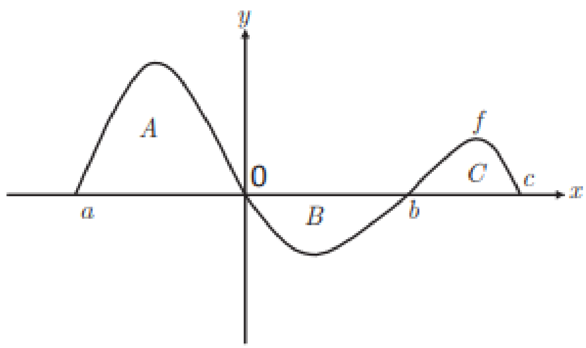
Observa-se que a alternativa (e), que foi a correta, teve um aumento na escolha entre os alunos que acertaram um maior número de questões, indicando que aqueles com maior domínio do assunto e desempenho geral melhor na prova foram mais propensos a escolher a alternativa certa.

## 5.2 Prova 2017

# Questão 9

Considere $f : \{a, b\} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $b \in (a, c)$, conforme ilustra o gráfico abaixo. Represente por:

- $A$: a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [a, 0]\}$;
- $B$: a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [0, b]\}$;
- $C$: a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [b, c]\}$.




Sabendo que $A = 5$, $B = 3$ e $C = 2$, avalie as afirmações a seguir:

1. $\int_a^0 f(x)dx = 5$.
2. $\int_0^b f(x)dx = 3$.
3. $\int_a^c f(x)dx = 4$.

É correto o que se afirma em:

(a) I, apenas.

(b) II, apenas.

(c) I e III, apenas.

(d) II e III, apenas.

(e) I, II e III.

**Gabarito:** Letra (c).

Sabemos que podemos calcular a área resultante com o cálculo da integral. Assim, a afirmativa I está correta, pois temos a área positiva:

$$A = 5 \implies \int_a^0 f(x)dx = 5.$$

Enquanto isso, a afirmativa II é falsa, já que, por estar abaixo de $y = 0$, a área seria negativa. O cálculo correto seria dado por:

$$-\int_0^b f(x)dx = 3 \quad \text{ou} \quad \int_0^b f(x)dx = -3.$$

Por fim, a afirmativa III está correta, visto que a integral no intervalo $[a, c]$ é a soma das áreas $A$, $B$ e $C$. Assim:

$$5 + (-3) + 2 = 4.$$

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados na tabela abaixo:

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** | **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|---|---|
| 0,25 | Difícil | 0,22 | Médio |

Tabela 5.7: Classificação da questão com base nos índices.

A questão foi considerada difícil devido ao índice de facilidade de 0,25. Entretanto, seu índice de discriminação médio sugere que os alunos com melhor desempenho geral na prova conseguiram resolvê-la.

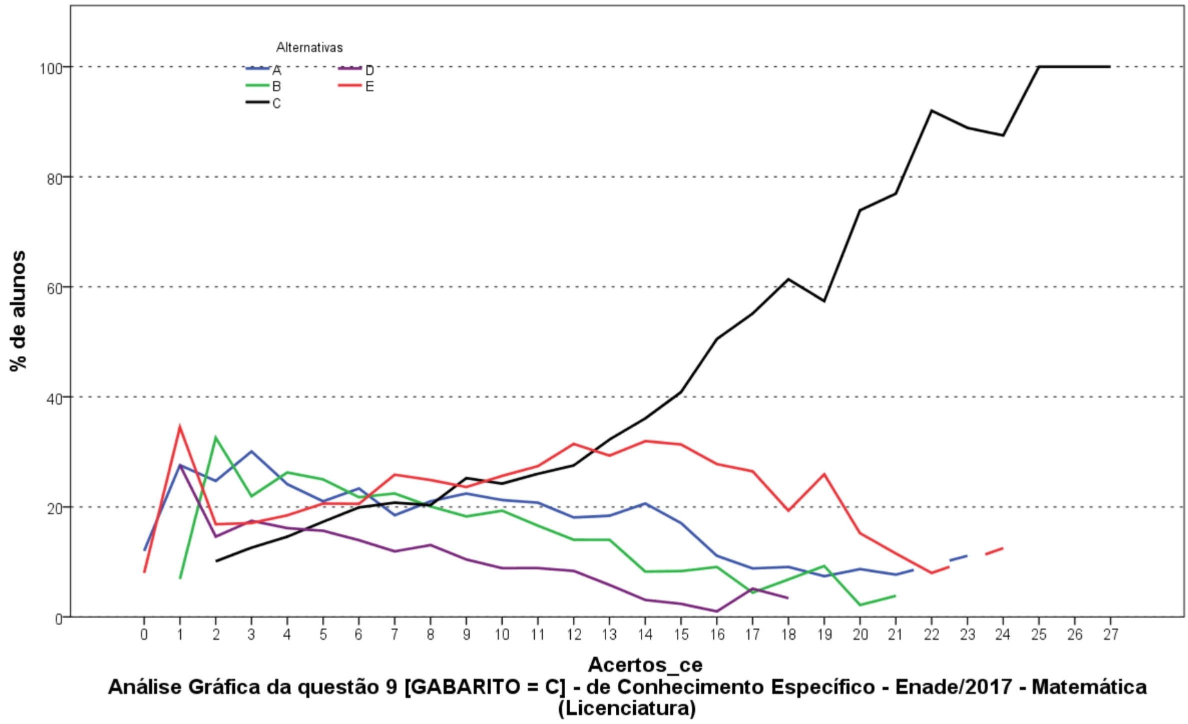



Figura 5.4: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2017.

A análise gráfica mostra que, conforme o aluno teve maior desempenho na prova, acertando mais questões, ele conseguiu resolver esta questão corretamente, marcando a alternativa (c). Isso indica que alunos com melhor desempenho apresentaram maior domínio do conteúdo abordado. Em contrapartida, alunos com menor desempenho marcaram preferencialmente outras alternativas.

# Questão 12

Para calcular o limite:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sin x}{x},$$

os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades:

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x},$$

válidas para todo $x > 0$. A partir desses argumentos, conclui-se que $L$ é igual a:

(a) $-1$.

(b) $0$.

(c) $1$.

(d) $\infty$.

(e) $-\infty$.

**Gabarito:** Letra (b).

Aplicando a desigualdade:

$$\lim_{x\to+\infty} 0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.$$

Sabemos que o limite da constante $0$ quando $x$ tende ao infinito é $0$, e o limite de $\frac{1}{x}$ também tende a $0$. Logo, pelo teorema do confronto:

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0 \implies L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados na tabela abaixo:

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** | **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|---|---|
| 0,32 | Difícil | 0,38 | Bom |

Tabela 5.8: Classificação da questão com base nos índices.

A questão foi considerada difícil, mas boa, pois os alunos conseguiram desenvolvê-la utilizando o teorema do confronto, sugerido pela desigualdade proposta na questão. A resolução se dá de maneira simples ao aplicar o conceito corretamente.

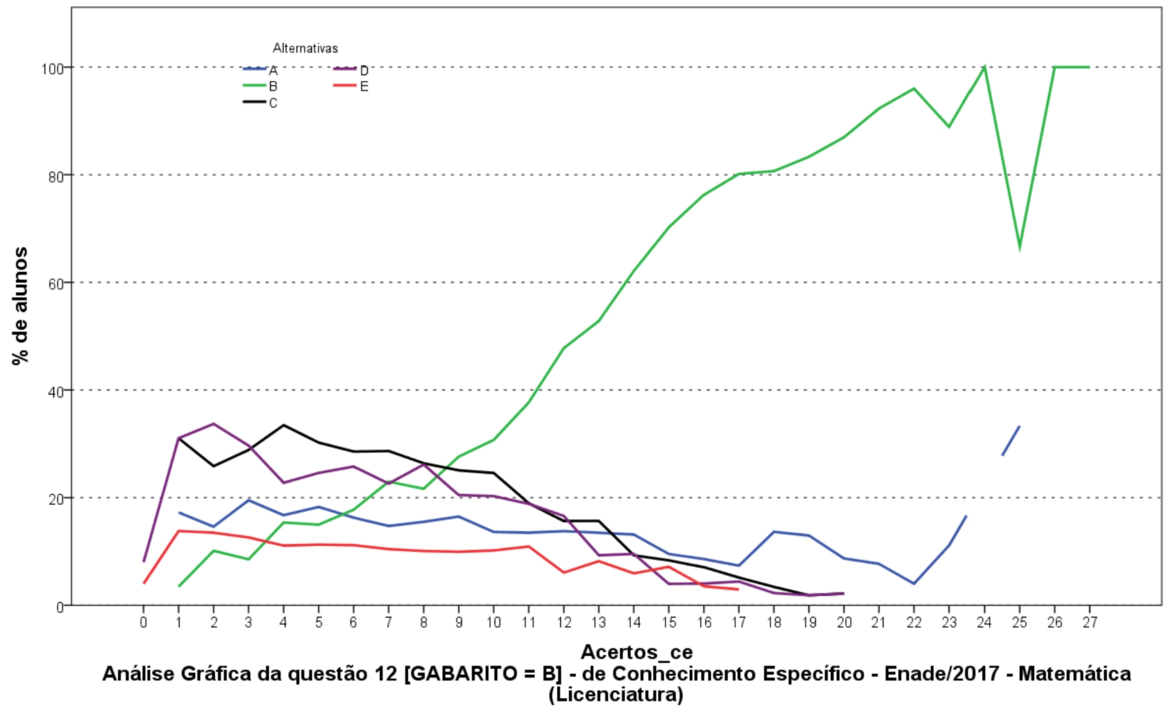



Figura 5.5: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2017.

Estudantes com baixo desempenho concentraram-se nas alternativas (c) e (d). A porcentagem de alunos que escolheram essas opções caiu conforme aumentou o número de acertos na prova. Isso revela que, à medida que alunos com melhor desempenho acertaram mais questões, eles também desenvolveram a questão corretamente, identificando a resposta correta (letra b).

# Questão 23

Considerando que um estudante esteja testando um *software* para calcular o valor da integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx$, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I. O resultado $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx = -\frac{33}{2}$, apresentado pelo *software*, está correto.

II. A primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$ é a função $F(x) = -\frac{1}{x} - 5x$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, conclui-se que

$$\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx = \left[-\frac{1}{x}-5x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{1}-5\cdot 1\right) - \left(-\frac{1}{-2}-5\cdot(-2)\right) = -\frac{33}{2}.$$

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

(a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

(b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

(c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

(d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

(e) As asserções I e II são proposições falsas.

**Gabarito:** Letra (e).

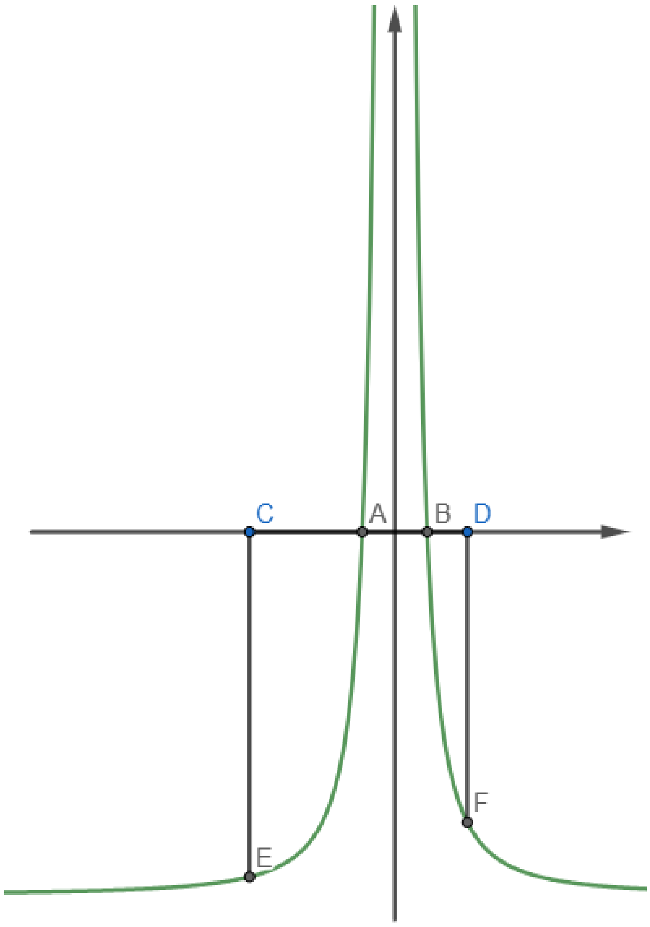
**Resolução**

A função $f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$ não é contínua no intervalo $[-2, 1]$, e portanto calcular uma integral nesse intervalo nos gera uma integral imprópria, pois veja que

$$\int_{-2}^{1} \left( \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx =$$

$$\int_{-2}^{-1/\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx + \int_{-1/\sqrt{5}}^{0} \left( \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx + \int_{0}^{1/\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx + \int_{1/\sqrt{5}}^{1} \left( \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx$$

Pela figura abaixo contendo o gráfico da função $f$




os pontos $C = (-2, 0)$, $A = (-1/\sqrt{5}, 0)$, $B = (1/\sqrt{5}, 0)$ e $D = (1, 0)$, é fácil ver que a integral entre $C$ e $A$ e entre $B$ e $D$ convergem, mas será que entre $A$ e $B$ converge? Pela simetria, a área abaixo do gráfico (geometricamente igual a integral) entre $A$ e $B$ é igual a duas vezes a área abaixo do gráfico entre a origem e o ponto $B$. Ou seja, a integral converge se e somente se a integral abaixo convergir:

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x^2} - 5\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - 5x\right]_0^{1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5} - \sqrt{5} + \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{x} + \sqrt{5} \cdot 0.$$

Mas a integral não converge porque $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Portanto a resposta é a letra (e).

# Análise

A seguir são apresentados os índices de facilidade e discriminação para a questão:

| Índice de Facilidade | Classificação | Índice de Discriminação | Classificação |
|---|---|---|---|
| 0,22 | Difícil | 0,14 | Fraco |

Tabela 5.9: Classificação da questão com base nos índices.

A questão apresentou um alto grau de dificuldade, o que indica que a maioria dos estudantes não percebeu a impropriedade da integral e acabou aplicando de forma incorreta o Teorema Fundamental do Cálculo. O índice de discriminação fraco sugere que tanto os alunos com melhor desempenho quanto os com pior desempenho cometeram erros na questão, muito provavelmente de natureza conceitual. Com o índice de facilidade sendo considerado baixo, a questão foi desconsiderada na computação das notas.

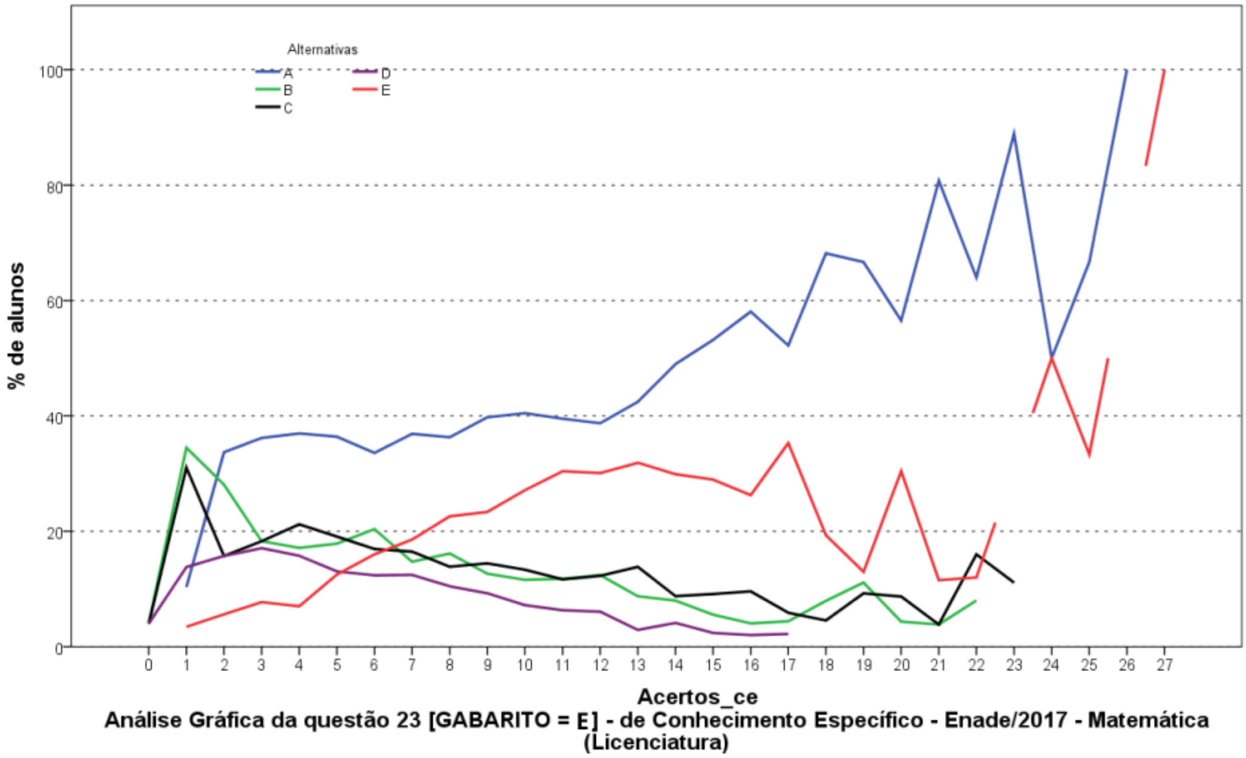



Figura 5.6: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2017.

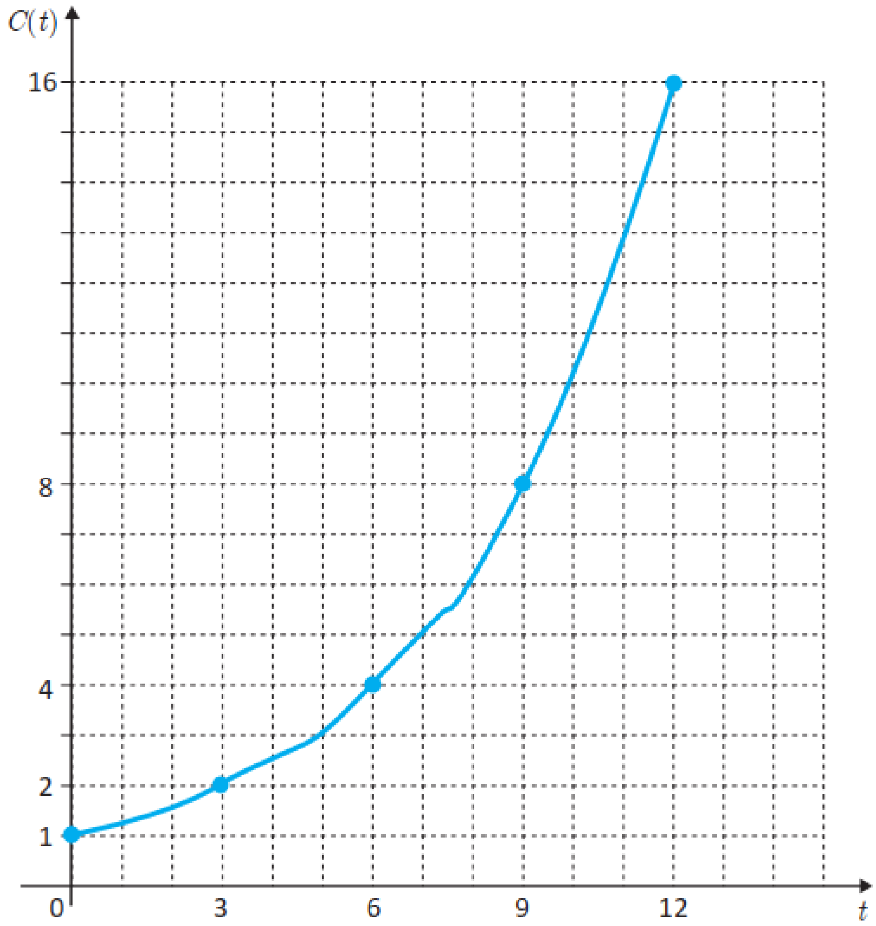
O gráfico confirma a hipótese do erro conceitual, visto que a alternativa A foi a mais escolhida. Essa alternativa considera ambas as afirmações como verdadeiras, com a proposição II servindo de justificativa para a proposição I, o que demonstra que os alunos realmente não consideraram a possibilidade de a integral ser imprópria. Mesmo a alternativa E, correta, foi pouco selecionada, o que reflete a dificuldade geral da questão.

A questão exigia uma análise crítica e minuciosa da integral, mas a maioria dos alunos provavelmente aplicou mecanicamente o Teorema Fundamental do Cálculo, sem se atentar às condições para sua aplicação, o que os levou ao erro. A dificuldade enfrentada na resolução destaca a necessidade de reforçar o estudo sobre integrais impróprias nos cursos de Cálculo.

## 5.3 Prova 2021

## Questão 09

Com o agravamento da pandemia do novo Coronavírus (*Sars-CoV-2*), alguns termos tornaram-se mais conhecidos, dentre eles o de crescimento exponencial. O gráfico da função exponencial a seguir representa a evolução do crescimento do número de pessoas contaminadas por uma doença ao longo do tempo, medido em dias. Observe que o número de pessoas contaminadas dobra a cada três dias.




Supondo que a tendência de crescimento do número de pessoas contaminadas apresentada no gráfico se mantenha ao longo do tempo e seja exponencial, avalie as afirmações a seguir.

1. Se $C(t)$ representa o número de pessoas contaminadas no tempo $t$, então $C(t) = 2^{t/3}$.

2. A velocidade de crescimento da contaminação no nono dia é $\frac{8}{3} \ln 2$ pessoas/dia.

3. Com um mês de epidemia, o número de contaminados ultrapassa o de 1 000 pessoas.

É correto o que se afirma em:

(a) I, apenas.

(b) II, apenas.

(c) I e III, apenas.

(d) II e III, apenas.

(e) I, II e III.

**Gabarito:** Letra E (I, II e III).

**Resolução**

**Afirmativa I: Correta.**

A questão informa que o crescimento ocorre de maneira exponencial, logo $f(x) = a^x$. O problema indica que o número de contaminados dobra a cada 3 dias, ou seja, $a = 2$. Assim, $f(x) = 2^x$. Como o aumento ocorre a cada 3 dias, temos $x = t/3$. Portanto, $f(t) = 2^{t/3}$.

**Afirmativa II: Correta.**

Para calcular a derivada de uma função exponencial, usamos:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

Aqui, $f(t) = 2^{t/3}$, então:

$$f'(t) = \frac{1}{3} \cdot 2^{t/3} \ln 2.$$

Avaliado no nono dia ($t = 9$):

$$f'(9) = \frac{1}{3} \cdot 2^{9/3} \ln 2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 \ln 2 = \frac{8}{3} \ln 2.$$

**Afirmativa III: Correta.**

Considerando um mês como 30 dias, aplicamos $t = 30$ na função:

$$f(30) = 2^{30/3} = 2^{10} = 1024.$$

Portanto, o número de contaminados ultrapassa 1 000.

## Análise

A seguir são apresentados os índices de facilidade e discriminação para a questão:

| Índice de Facilidade | Classificação | Índice de Discriminação | Classificação |
|---|---|---|---|
| 0,18 | Difícil | 0,03 | Fraco |

Tabela 5.10: Classificação da questão com base nos índices.

A questão foi classificada como difícil e apresentou um índice de discriminação extremamente baixo de 0,03, sendo considerada fraca para a avaliação do conhecimento. Por esse motivo, foi retirada da computação das notas.

Diante do que foi exigido, esse resultado é no mínimo preocupante, especialmente considerando que esta foi a última edição do ENADE. As afirmativas I e III demandavam apenas aplicações elementares, como:

- Identificar a função representada no gráfico;
- Realizar uma derivada simples da função;
- Determinar o valor de $C(x)$ a partir de um ponto dado.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes nesta questão indicam falhas no aprendizado desde o nível médio, pois as afirmativas I e III poderiam ser verificadas com conhecimentos mais básicos. Já a afirmativa II exigia apenas um conhecimento introdutório do curso de Cálculo Integral e Diferencial I.

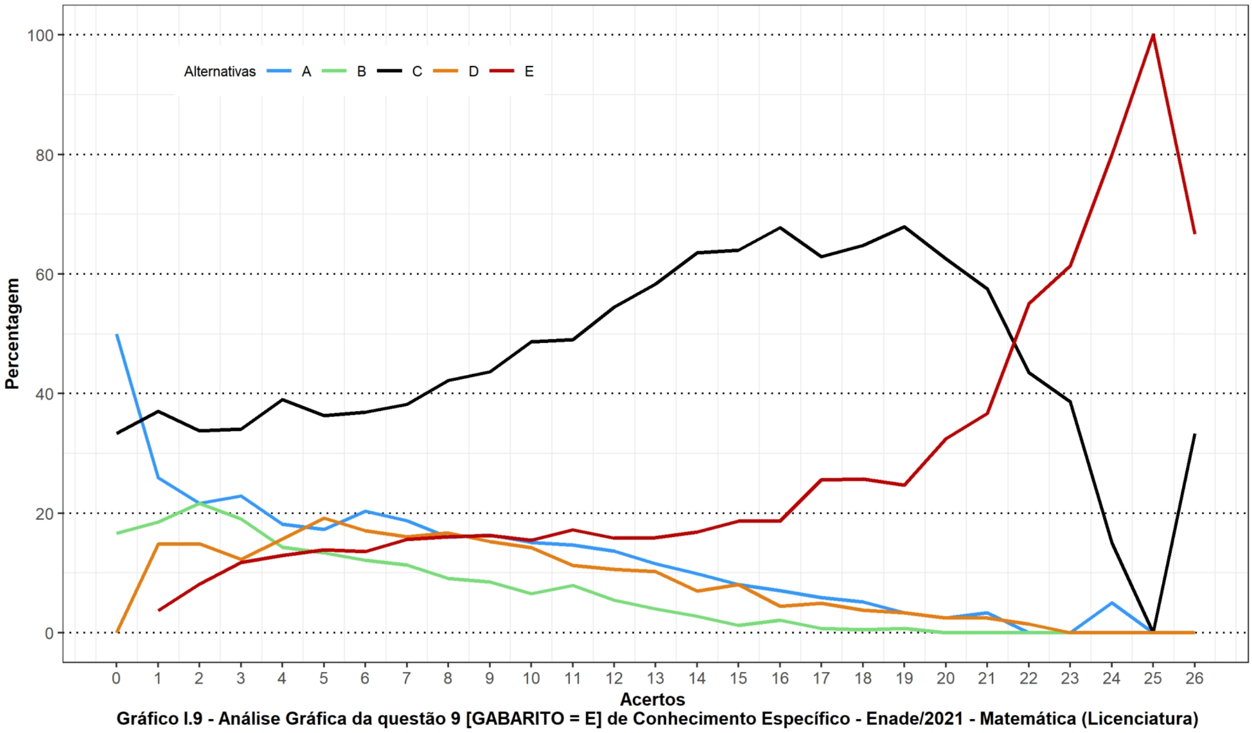



Figura 5.7: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2021.

Conforme apontado no Relatório de Síntese de Área de Matemática (Licenciatura), ENADE 2021, a análise detalhada mostra a confusão dos alunos. A maioria marcou a alternativa C. Mesmo os alunos de bom desempenho apresentaram dificuldades, sendo que apenas aqueles que acertaram mais de 22 questões conseguiram desenvolver a questão de forma mais clara.

O fato de os alunos terem ficado entre as alternativas C e E pode sugerir que:

- O enunciado não estava claro;
- Os alunos tinham dificuldade em aplicar o conhecimento necessário para diferenciar essas duas alternativas.

Embora o enunciado da afirmativa II fosse claro, os alunos podem ter encontrado dificuldades para entender o contexto. Resolver a questão exigia derivar a função encontrada, um conceito comumente abordado em Cálculo Integral e Diferencial I, especialmente na relação entre derivada e cálculo de velocidade na Física.

# Questão 13

O teorema do valor médio afirma que, se uma função $f$ é definida e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, sendo derivável no intervalo aberto $(a, b)$, existe um ponto $c$ em $(a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Considerando esse contexto, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

1. Existe um ponto $c$ no intervalo aberto $(a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de $f$ neste ponto é paralela à reta secante que passa pelos extremos do gráfico de $f$ restrita ao intervalo fechado $[a, b]$.

2. Se uma função é derivável em um certo ponto, a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto pode ser obtida como o limite de uma sequência de retas secantes.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

E) As asserções I e II são proposições falsas.

**Gabarito:** Letra B.

**Resolução**

**Afirmativa I: Correta.**

A equação da reta secante que passa pelos pontos $a$ e $b$ é:

$$e = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A reta tangente no ponto $c$ é dada por:

$$y = f(a) + f'(c)(x - a) \quad \text{onde} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto, a reta tangente é paralela à reta secante.

**Afirmativa II: Correta.**

A definição da derivada considera a reta tangente como o limite de uma sequência de retas secantes. No entanto, essa afirmação não justifica a paralelismo descrito na Afirmativa I.

# Análise

Os índices de facilidade e discriminação da questão são apresentados a seguir:

| **Índice de Facilidade** | **Classificação** | **Índice de Discriminação** | **Classificação** |
|---|---|---|---|
| 0,24 | Difícil | -0,04 | Fraco |

Tabela 5.11: Classificação da questão com base nos índices.

Essa questão apresentou o pior índice de discriminação entre as analisadas até aqui, com um valor de -0,04. Como resultado, foi desconsiderada da computação das notas.

Embora o Teorema do Valor Médio tenha sido apresentado no enunciado, os alunos não conseguiram aplicá-lo na resolução da questão. Isso pode estar relacionado à dificuldade em associar o conceito de reta tangente com o processo de derivação. Consequentemente, não foram capazes de verificar a veracidade da segunda afirmativa nem compreender sua relação com a justificativa da primeira.

Esse tipo de questão exige um alto nível de habilidade, pois demanda:

- Conhecimento específico sobre o conteúdo;
- Capacidade de fazer associações entre tópicos distintos;
- Habilidade de verificar a veracidade das afirmações a partir de justificativas teóricas.

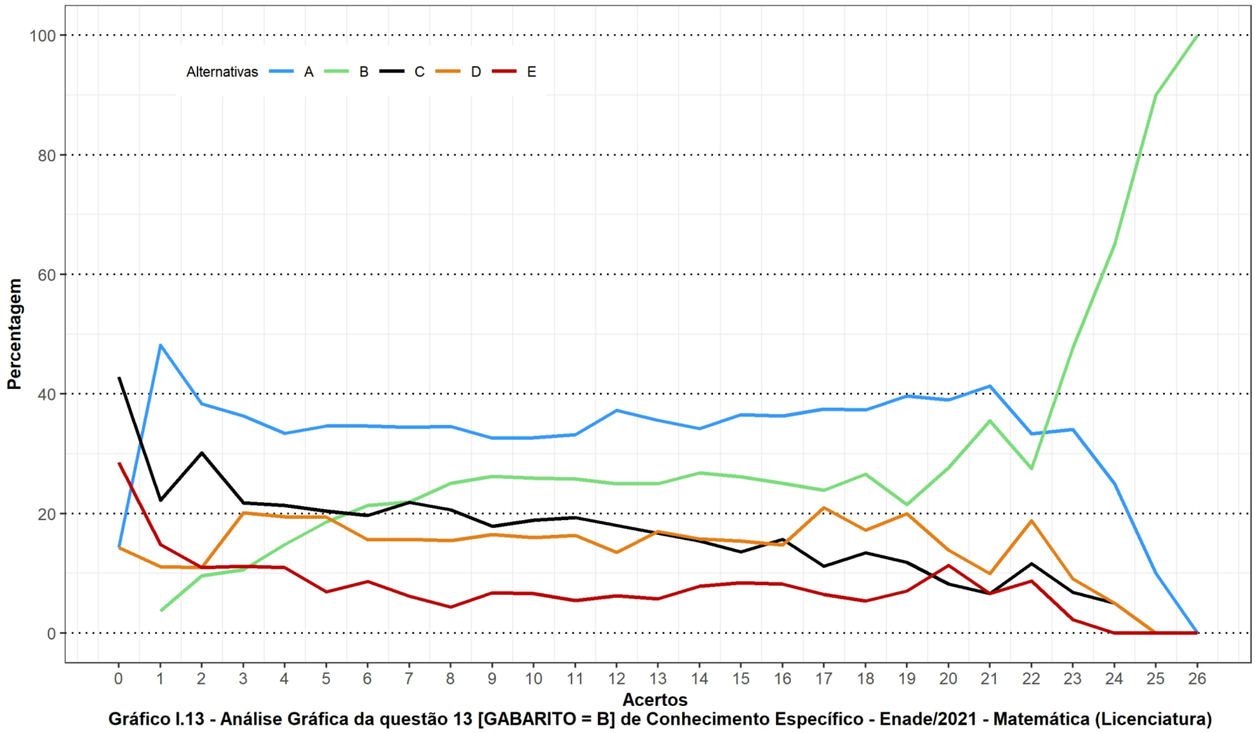



Figura 5.8: Fonte: Relatório de Síntese de Área de Matemática (Bacharelado/Licenciatura), ENADE 2021.

A distribuição das respostas incorretas foi bastante dispersa, com uma predominância da escolha pela alternativa A em diversas faixas de classificação. Esse padrão sugere que:

- Os alunos tiveram dificuldade em distinguir a alternativa correta;
- O nível de sutileza da questão dificultou a avaliação clara do conhecimento específico exigido.

A escolha frequente pela alternativa incorreta ao longo de todas as faixas de acertos reflete a complexidade e a falta de clareza da questão. Isso reforça a ideia de que itens desse tipo podem não ser os mais adequados para medir com precisão o conhecimento dos alunos, especialmente em avaliações que visam captar diferentes níveis de aprendizado.

## 5.4 Análise Geral dos Dados

É importante salientar que os resultados dos alunos em cada questão não refletem diretamente seu desempenho geral na prova. Pode ser mais relevante compreender como certos déficits na aprendizagem podem ter impactado a resolução de questões específicas. De acordo com Nasser et al. (2019), muitos alunos enfrentam dificuldades na interpretação das questões, especialmente na identificação de quando aplicar uma integral ou uma derivada, o que sugere desafios na transposição entre diferentes formas de representação matemática. Além disso, conforme apontado por Cavasotto (2010), o baixo índice de acertos em algumas questões de cálculo pode estar associado a lacunas no domínio de conceitos fundamentais, comprometendo a capacidade dos estudantes de resolver problemas mais complexos.

O relatório de síntese de 2021 ressalta que as edições do exame não devem ser comparadas diretamente, uma vez que mudanças estruturais ao longo do tempo impactaram sua configuração. No entanto, é possível refletir sobre os fatores que influenciaram a edição de 2021 da prova de Matemática, na qual as duas questões analisadas apresentaram resultados insatisfatórios.

As falhas no conhecimento básico ficam evidentes, especialmente na questão 9. Muitos alunos não conseguiram identificar a função do gráfico nem calcular f(x) em um ponto. Esses resultados corroboram estudos prévios de Rezende (2003), Cavasotto (2010) e Nasser et al. (2019).

Os conceitos fundamentais do cálculo integral e diferencial I são frequentemente a causa de erros em muitas questões. Nasser et al. (2015) aponta que a dificuldade dos alunos na transposição da representação verbal para uma representação analítica vem desde o ensino médio. Ou seja, desde etapas anteriores da formação, muitos estudantes já demonstram limitações para transformar o contexto de um problema em uma linguagem matemática formal, o que se revela como um desafio adicional.

Esse problema acaba se perpetuando no ensino superior, pois as aulas tradicionais, muitas vezes focadas em algoritmos, continuam sendo ministradas, considerando os alunos como um grupo homogêneo. Dessa forma, acabam por repetir processos mecânicos para encontrar uma resposta sem compreender o que estão fazendo (Bueno e Viali; 2021).

Os autores propõem a necessidade de buscar a construção de diferentes situações capazes de gerar várias ideias relacionadas aos conceitos, para que cada aluno possa construir seu entendimento dentro do assunto abordado. Além disso, essa proposta visa levar os estudantes a perceberem as diferentes aplicações daquele conteúdo, compreendendo que ele não se limita a um algoritmo, mas pode ser usado para solucionar problemas reais e modelar diferentes questões a partir desses conceitos.

> “Outro ponto a observar é que os exemplos trabalhados na disciplina de Cálculo devem refletir situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais. Essa estratégia possibilita a exploração de situações do cotidiano, como a variação dos valores cobrados

> de Imposto de Renda, em função do salário mensal recebido" (Nasser et al., 2019).

Das questões analisadas, todas foram classificadas como difíceis ou muito difíceis. Como essa classificação surge a partir do número de acertos dos participantes, percebemos a grande dificuldade dos alunos perante as questões relacionadas ao cálculo, sendo que aqueles com melhor desempenho nessas questões foram os alunos com melhor desenvolvimento geral. Assim, o baixo desempenho não se reflete apenas no cálculo, mas também nas outras áreas do conhecimento matemático.

Ao longo da análise, algumas questões foram desclassificadas da computação das notas, justamente pelo desempenho insatisfatório. Isso nos leva a refletir se o motivo deste resultado se deve a uma falha na elaboração da questão ou à falta de conhecimento do aluno. Concluímos que ambas as possibilidades são viáveis, conforme observado na questão 16 da prova do ENADE de 2014 já analisada. Nessa questão, exigir que o aluno recorde um teorema específico para a resolução é problemático, pois depende exclusivamente da memória do aluno, o que pode não ocorrer se a informação não tiver sido devidamente memorizada. Contudo, na questão 13 de 2021, isso não se repete, já que o teorema do valor médio vem explícito para que o aluno possa aplicá-lo. Ambas as questões foram desconsideradas, tanto por falhas na elaboração da questão, que dificultavam a interpretação, quanto pela incapacidade do aluno de desenvolver o conhecimento necessário.

Diante da identificação dessa problemática e da importância dos resultados obtidos no ENADE para os cursos de cada instituição, precisamos refletir sobre as formas de minimizar os déficits encontrados ao longo da nossa análise.

Como destacado anteriormente, tornar as aulas mais dinâmicas e capazes de despertar novas formas de ver cada conceito pode auxiliar os alunos a encontrar diferentes formas de aplicar cada conceito, que podem estar relacionados a outros tópicos do conhecimento.

Outro aspecto importante a ser considerado é o grau de seriedade com que os acadêmicos realizam a prova do ENADE. Waideman et al. (2017) apontam que:

> "Crê-se que, se levada a sério pelos acadêmicos, as avaliações externas permitem avaliar o nível de conhecimento e diagnosticar possíveis 'erros' no ensino, o que permitiria ao corpo docente, alunos e demais constituintes da escola, sugerir possíveis encaminhamentos para minimizar os problemas encontrados ou planejar como manter um ensino de qualidade."

Somente com um comprometimento efetivo é possível extrair informações mais confiáveis desse processo avaliativo. Por exemplo, os relatórios de síntese das áreas mostram que, em 2014, o maior percentual de questões abertas deixadas em branco foi registrado entre os estudantes de licenciatura, o que levanta questionamentos sobre o engajamento desses alunos na realização da prova. Além disso, mesmo nas questões com maior índice de respostas, o número de acertos foi baixo, sugerindo tanto uma falta de domínio do conteúdo quanto possíveis deficiências na qualidade dos cursos de licenciatura. Uma questão de cálculo de 2005 ilustra essa realidade, "Observou-se, ainda, que a maioria dos candidatos não tem familiaridade com a notação e o conceito de limite de função nem com o conceito de pontos de inflexão."

O relatório de 2011 reforça essa problemática ao indicar que os estudantes egressos dos cursos de Licenciatura em Matemática enfrentam dificuldades para relacionar os conhecimentos específicos adquiridos às abordagens pedagógicas apresentadas na universidade.

A plena eficácia do ENADE como instrumento de avaliação depende de uma participação comprometida por parte dos estudantes, que precisam compreender o impacto desse diagnóstico para seus cursos. Isso evitaria que a avaliação fosse tratada como uma formalidade e possibilitaria resultados que refletissem a realidade. Os indicadores gerados permitem que as instituições desenvolvam novas ações e estratégias para superar fragilidades e aprimorar a qualidade dos cursos de licenciatura.

Ademais, é importante destacar que essa problemática é complexa e está longe de ser resolvida, já que diversos fatores influenciam o desempenho. O avanço nesse cenário requer uma parceria sólida entre instituições e professores, aliada ao engajamento ativo dos alunos no aprendizado. Apenas com aulas mais significativas e efetivas será possível promover uma construção do conhecimento que impacte de forma concreta o futuro da educação.

Por fim, a análise evidencia um panorama complexo do ensino de cálculo, onde as dificuldades enfrentadas refletem deficiências estruturais. Nas considerações finais, discutimos as contribuições do trabalho e sugerimos caminhos para superar esses desafios.

# Capítulo 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo investigar os resultados dos estudantes da licenciatura em Matemática em relação ao Cálculo Diferencial e Integral nas provas mais recentes do ENADE, buscando compreender os principais desafios enfrentados por esses alunos, tanto do ponto de vista do ensino e da aprendizagem, quanto no desempenho demonstrado nas questões específicas da prova. Para isso, foram analisadas pesquisas que tratam das dificuldades recorrentes no ensino de Cálculo, as competências exigidas pelas questões do ENADE, bem como os índices de acerto obtidos pelos concluintes da licenciatura em Matemática.

Com base nesses dados e nas análises realizadas, em consonância com os estudos de Santos Mevs, Dynnikov e Pires (2023), observou-se que as dificuldades ao longo da disciplina de Cálculo podem impactar significativamente os resultados obtidos pelos alunos, tanto no ENADE quanto em seu desenvolvimento acadêmico ao longo do curso. Esses desafios podem estar relacionados a lacunas na compreensão de conceitos fundamentais, possivelmente adquiridas desde a educação básica, e que tendem a impactar o aprendizado em níveis mais avançados.

Os dados analisados evidenciam que as questões de Cálculo no ENADE exigem não apenas um conhecimento técnico dos conteúdos, mas também habilidades de interpretação e aplicação em diferentes contextos. Ademais, a falta de compreensão de conceitos básicos e a dificuldade na análise de problemas, conforme apontado por Griboski (2012), são fatores críticos que contribuem para um desempenho aquém do esperado. Dessa forma, torna-se evidente que o aprimoramento do ensino de Cálculo nas licenciaturas em Matemática deve ser uma prioridade para melhorar tanto o rendimento acadêmico dos alunos quanto seus resultados em exames externos, como o ENADE. Estar habituado a novos contextos é extremamente importante para se destacar na resolução de qualquer problema, para que o estudante não esteja limitado à simplória ideia algorítmica do conhecimento. Essa diferenciação pode ocorrer com a proposição de exercícios contextualizados, podendo ser questões do próprio

ENADE ou de outras fontes que proponham novos desafios e pensamentos complexos que incentivem a criatividade do aluno. Tornar a disciplina mais atrativa é uma barreira diante do estigma que já foi criado. Portanto, a tentativa de tornar a aula mais criativa não deve ser vista como uma depreciação da formalidade do curso, que é necessária em certa medida para o claro entendimento dos 'porquês' que surgem diante de cada novo conceito. Assim, Nasser et al. (2019) aponta uma iniciativa que tem surtido efeito: a realização de trabalhos e provas em períodos mais curtos, para uma melhor assimilação dos conteúdos, considerando uma carga menor de conceitos a serem cobrados em cada prova. É claro que é preciso considerar o esforço individual diante disso, para que haja bons resultados, pois seria injusto atribuir a raiz de toda a problemática aos profissionais responsáveis por ministrar as aulas, já que os alunos devem assumir suas responsabilidades no papel que desempenham em cada disciplina.

É imperativo que as instituições de ensino adotem estratégias pedagógicas que minimizem as dificuldades identificadas, incluindo a implementação de metodologias inovadoras, o uso de tecnologias educacionais para facilitar a aprendizagem e o fortalecimento de práticas que incentivem o pensamento crítico e a resolução de problemas. Plataformas como GeoGebra, Excel e Winplot, entre outras, têm o potencial de tornar as aulas mais dinâmicas, proporcionando uma visualização mais clara dos conceitos matemáticos (Nasser et al., 2015). Essas ferramentas podem ser especialmente úteis para alunos que têm dificuldade em traduzir informações gráficas para a linguagem algébrica e vice-versa, funcionando como um apoio valioso para o desenvolvimento individual. Nesse contexto, destaca-se o trabalho de Hellmann et al. (2016), que propõe a utilização do software Geogebra como um recurso eficaz para superar os desafios no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. O estudo descreve o desenvolvimento e a aplicação da ferramenta como um suporte ao processo de ensino-aprendizagem, permitindo uma melhor compreensão de conceitos como funções, limites, derivadas e integrais por meio de representações gráficas e algébricas. Ao adotar um ambiente digital interativo, a proposta contribui não apenas para diversificar os métodos de ensino, mas também para estimular a autonomia dos estudantes na construção do conhecimento.

Ademais, Souza e Fonseca (2017) exploram a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) como uma abordagem inovadora para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Essa metodologia ativa insere problemas reais ou contextualizados no centro do processo de aprendizagem, conectando o conteúdo matemático às práticas profissionais dos estudantes. Ao priorizar a resolução de situações-problema como ponto de partida, o PBL favorece o desenvolvimento de competências transdisciplinares, estimula o pensamento analítico e incentiva a autonomia dos alunos em sua formação acadêmica. Essa estrutura metodológica promove a integração entre teoria e prática, contribuindo para que os estudantes compreendam conceitos complexos, como limites e derivadas, de forma significativa e contextualizada.

Além disso, é fundamental que haja um esforço conjunto entre professores, coordenadores de curso e gestores educacionais para revisar e adaptar o currículo, garantindo que ele atenda às necessidades dos alunos e os prepare adequadamente para os desafios do ENADE e do mercado de trabalho. Como Waideman et al. (2017), apontam que o uso dessas questões em uma prática pedagógica formativa pode potencializar e facilitar não apenas o aprendizado, mas também a percepção dos alunos em relação à prova, podendo, como efeito, despertar maior interesse na participação na avaliação.

> "Enfim, acreditamos que, se exploradas as questões do ENADE posteriormente em sala de aula, pode-se contribuir para a regulação da aprendizagem de cada aluno, em particular para alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, tornando-o construtor de seu conhecimento..." Waideman et al. (2017).

> "Conceber o Enade e suas questões como recurso para regular a aprendizagem tem suas potencialidades, pois é um momento no qual o aluno pode retomar conceitos, sanar dúvidas e entender os conceitos, que anteriormente podem não ter sido entendidos. Além disso, as questões das provas tornam-se recursos de ensino." Waideman et al. (2017).

Por conseguinte, que a evolução na estruturação de um curso que considere e busque mitigar cada uma das dificuldades destacadas poderá, sem dúvida, melhorar o desempenho dos estudantes, refletindo-se em melhores resultados no ENADE e contribuindo para a formação de profissionais mais qualificados. Por fim, esse progresso requer um esforço colaborativo, envolvendo toda a comunidade acadêmica, para garantir que as mudanças necessárias sejam implementadas de maneira eficaz e sustentável.

# Referências Bibliográficas


1 BARBOSA, G. O. *Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial e integral: O caso da Universidade Federal do Ceará*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 1994.

2 BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

3 BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. 3. ed. norte-americana. São Paulo: Blucher, 2012. ISBN 978-85-212-0641-5.

4 BRASIL. Casa Civil. Lei nº 10.861, de 14 de abril de 2004. *Institui o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior – Sinaes e dá outras providências*. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/lei/l10.861.htm> Acesso em: 18 dez. 2024

5 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). (2016). *Relatório Síntese de Área Matemática (Licenciatura) Enade 2014* [Relatório]. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2014/2014_rel_matematica.pdf>. Acesso em: 17 de março de 2024.

6 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). (2018). *Relatório Síntese de Área Matemática (Bacharelado/Licenciatura) Enade 2017* [Relatório]. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2017/Matematica.pdf>. Acesso em: 17 de março de 2024.

7 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). (2018). *Relatório de Curso (Bacharelado/Licenciatura) Enade 2017* [Relatório]. Disponível em: <https://enade.inep.gov.br/enade/#!/relatorioCursos> Acesso em: 17 de março de 2024.

8 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). (2022). *Relatório de Curso* [Relatório]. Disponível em: <https://enade.inep.gov.br/enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 17 de março de 2024.

9 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP nº 176, de 24 de agosto de 2005. Diário Oficial da União, seção 1, Brasília, DF, p. 63, 26 ago. 2005. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enade/PORTARIAS_ENADE_2005/Matematica.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2024.

10 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP nº 132, de 7 de agosto de 2008. Diário Oficial da União, seção 1, Brasília, DF, p. 13, 11 ago. 2008. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/superior/enade/Diretrizes%20Enade/Diretrizes_Matematica_%20n_132.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2024.

11 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP nº 223, de 26 de julho de 2011. Diário Oficial da União, seção 1, Brasília, DF, p. 19, 27 jul. 2011. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/legislacao/2011/diretrizes/diretrizes_matematica_n_223.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2024.

12 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP nº 261, de 2 de junho de 2014. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 4 jun. 2014. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/legislacao/2014/diretrizes_cursos_diplomas_bacharel/diretrizes_bacharel_matematica.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2024.

13 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP nº 508, de 6 de junho de 2017. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 40, 8 jun. 2017. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/legislacao/2017/matematica_licenciatura_-_portaria_n_508_de_6_de_junho_de_2017.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2024.

14 BBASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). (2022). Relatório Síntese de Área Matemática (Licenciatura) Enade 2021 [Relatório]. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2021/Enade_2021_Relatorios_Sintese_Area_Matematica.pdf>. Acesso em: 17 de março de 2024.

15 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria nº 377, de 23 de agosto de 2021. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 46, 24 ago. 2021. Disponível em: <https://in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-377-de-23-de-agosto-de-2021-340132621>. Acesso em: 12 dez. 2024.

16 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria nº 270, de 28 de junho de 2024. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 160, 1 jul. 2024. Disponível em: <https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-270-de-28-de-junho-de-2024-569030639>. Acesso em: 12 dez. 2024.

17 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014): Matemática Licenciatura*. SINAES. Brasília: 2014. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2014/34_matematica_licenciatura.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2024.

18 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2017): Matemática Licenciatura*. SINAES. Brasília: 2017. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2017/35_MATEMATICA_LICENCIATURA_BAIXA.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2024.

19 BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2021): Matemática Licenciatura*. SINAES. Brasília: 2021. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enade/provas_e_gabaritos/2021_PV_licenciatura_matematica.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2024.

20 BUENO, R. W. da S.; VIALI, L. *Ensino e aprendizagem de cálculo: explorando os três mundos da Matemática. Olhar de Professor*, [S. l.], v. 24, p. 1–20, 2021. DOI: 10.5212/OlharProfr.v.24.16896.068. Disponível em: <https://revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/16896>. Acesso em: 12 dez. 2024.

21 CABRAL, Tânia C. B.; STORMOWSKI, Vandoir (org.). *ENADE comentado 2014* [recurso eletrônico]: matemática. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2017. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/>. ISBN 978-85-397-1010-2.

22 CASTILHOS, Maria Beatriz Menezes; MÜLLER, Thaísa Jacintho (org.). *ENADE comentado: matemática 2011* [recurso eletrônico]. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2014. 143 p. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs>. ISBN 978-85-397-0465-1.

23 CAVASOTTO, M. *Dificuldades de aprendizagem de cálculo: O que os erros cometidos pelos alunos podem informar*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)

– Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Porto Alegre.

24 CURI, R. C.; FARIAS, R. M. S. Métodos de estudo e sua influência no desempenho dos alunos em disciplinas de cálculo diferencial e integral. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2007.

25 CURY, H. N.; CASSOL, M. *Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças*. Cta Scientiae, v. 6, n. 1, p. 27–36, jan./jun. 2004.

26 EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, [2004].

27 GRIBOSKI, Claudia Maffini. *O Enade como indutor da qualidade da educação superior*. Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo, v. 23, n. 53, p. 178-195, set./dez. 2012.

28 HELLMANN, Liliane; SANDMANN, André; HALLAL, Renato; CARVALHO, Andriele de Prá; GASPARIN, Priscila Pigatto; GAFFURI, Stefane Layana. *Geogebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia*, v. 7, n. 16, 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/recit/article/view/4313>. Acesso em: 12 dez. 2024.

29 MARINHOS, Alzir Fourny; NEVES, Rodrigo. *ENADE 2005 Matemática Licenciatura – Questões Resolvidas*. Rio de Janeiro: FEUC, 2005. Disponível em: <www.feuc.br>, <www.sites.google.com/site/FEUCmat>.

30 MASOLA, Wilson de Jesus; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior*. Revista Brasileira de Ensino Superior, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 64-74, jan.-mar. 2016. ISSN 2447-3944. Disponível em: <https://seer.atitus.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267/854>. Acesso em: 22 mar. 2025.

31 NASSER, Lilian. *Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação*. In: XIV CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIAEM), 2015, Chiapas, México. Anais [...]. Chiapas: CIAEM, 2015. Disponível em: <https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/654/291>. Acesso em: 2 abr. 2025.

32 NASSER, Lilian; BIAZUTTI, Angela; TORRACA, Marcelo; BARROS, Jeanne. *Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I*. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIAEM), 15., 2019, Medellín, Colômbia. Anais [...].

Medellín: CIAEM, 2019. Disponível em: <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/230/377>. Acesso em: 31 mar. 2025.

33 REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, Nílson José; CUNHA, Marisa Ortegosa da (Org.). *Linguagem, Conhecimento, Ação: ensaios de epistemologia e didática*. São Paulo: Escrituras, 2003. p. 313-336.

34 SANTOS, S. P. dos; MATOS, M. G. de O. O ensino de Cálculo I no curso de licenciatura em Matemática: Obstáculos na aprendizagem. *Revista Eventos Pedagógicos*, v. 3, n. 3, p. 458-473, 2012.

35 SANTOS MEVS, Andreza Cardoso; DYNNIKOV, Circe Mary Silva da Silva; PIRES, Eliezer de Souza. *Avaliação do Cálculo Diferencial e Integral pelo Enade no curso de Licenciatura em Matemática da UFPel*. EMR-RS - Educação Matemática em Revista, v. 24, n. 24, p. 43-54, 2023.

36 SOUSA, Geneci A. de; NASSER, Lilian; TORRACA, Marcelo de A. A.; ASSEMANY, Daniella; AZEVEDO, Cecilia A. M. de. *A transição do Ensino Médio para o Superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 11., 2013, Curitiba, PR. Anais [...]. Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1421_814_ID.pdf>. Acesso em: 31 mar. 2025.

37 SOUZA, D. V. de; FONSECA, R. F. da. *Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral*. <br> Reflections on the problem based learning in the approach of notions of differential calculation and integral. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 19, n. 1, 2017. DOI: 10.23925/1983-3156.2017v19i1p197-221. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26575>. Acesso em: 12 dez. 2024.

38 STEWART, James. *Cálculo, volume I*. Tradução de EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Título original: *Calculus: early transcendentals*. 7. ed. americana. ISBN 978-85-221-1461-0.

39 WAIDEMAN, Adriele Carolini; COUTINHO, Dayane Moara; MENDES, Marcele Tavares; CARGNIN, Claudete. *Avaliação externa Enade como recurso para a regulação da aprendizagem de alunos de cursos de licenciatura e bacharelado em matemática*. In: VII CONGRESSO

INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2017, Canoas/RS. Anais [...]. Canoas: ULBRA, 2017.

# Apêndice A

# Anexo: Resolução de questões de cálculo do ENADE

1. (ENADE 2005 questão 25) A respeito da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 16$, é correto afirmar que:

   (a) existe um número real $M$ tal que $f(x) \geq M$ para todo número real $x$.

   (b) existe um número real $N$ tal que $f(x) \leq N$ para todo número real $x$.

   (c) existe um número real $x_0 < 0$ tal que $f(x_0) = 0$.

   (d) existe um número real $y$ tal que $f(x) \neq y$ para todo número real $x$.

   (e) existem 3 números reais $x$ para os quais $f(-x) = f(x)$.

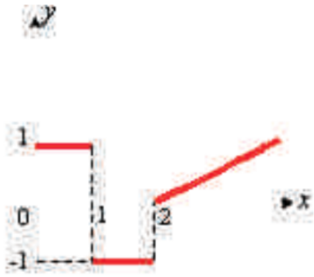
   $\boxed{\text{Solução}}$:
   É fácil ver que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, afinal o polinômio é de grau ímpar e é ilimitado. Então nem a alternativa (a) e nem a (b) estão corretas.
   Como a $Im(f) = \mathbb{R}$ então existe algum número real $y$ tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a alternativa (d) esta incorreta.
   Existir números reais $x$ tal que $f(x) = f(-x)$, é encontrar os pontos de interseção entre a reta $y = -x$ com a função $f$, e de fato existe pelo menos um ponto em que ocorre a interseção (já que a função é sobrejetora), e a unicidade é provada se provarmos que $f$ é monótona, vejamos:

   $$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = 0 \to \Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -44 < 0.$$

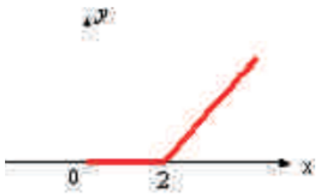
   Então $f'(x) > 0$ para todo $x$ real, então a função $f$ só intersecta $y = -x$ em um único ponto e o eixo $x$ em único ponto.

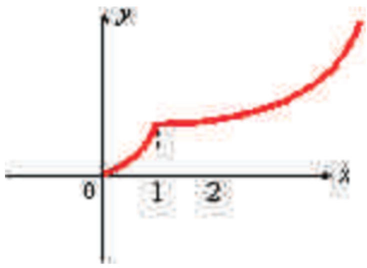
Como $f(0) = 16$ e $f(x_0) = 0$ para algum $c$ real, segue que como $f$ é crescente segue que $x_0 < 0$, alternativa (c) é a resposta correta.

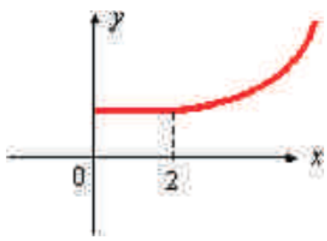
2. (ENADE 2005 problema 26) Considere $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está representado na figura a seguir.

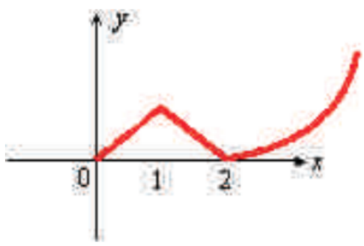


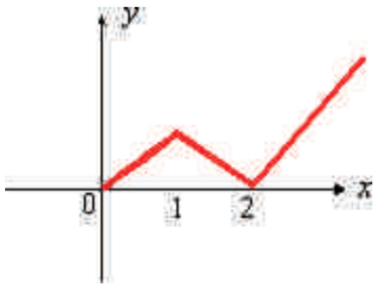

Assinale a opção que melhor representa o gráfico da função $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) 


(b) 


(c) 


(d) 

(e) 

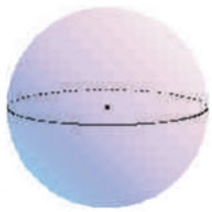

$\boxed{\text{Solução}}$:

É fácil ver que $f(x) = 1$ para $0 \leq x < 1$, $f(x) = -1$ para $1 \leq x < 2$ e $f(x) = a\,(x-2)$ para $x \geq 2$, e $a \in \mathbb{R}^*$.

Então $F(x) = x$ para $0 \leq x < 1$, $F(x) = \int_1^x -1\,dt = -x+1$ para $1 \leq x < 2$, e por fim $F(x) = \int_2^x a(t-2)\,dt = \frac{ax^2}{2} - 2ax - 2a + 4$. Portanto, a alternativa correta é a (d).

3. (ENADE 2005 questão 27) Considere em $\mathbb{R}^3$ uma bola de centro na origem e raio 4. Em cada ponto $(x, y, z)$ dessa bola, a temperatura $T$ é uma função do ponto, expressa por $T(x, y, z)$.

$$T(x,y,z) = \frac{50}{x^2+y^2+z^2+1}$$



Nessa situação, partindo-se de um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ da fronteira da bola e caminhando-se em linha reta na direção do ponto $(-x_0, -y_0, -z_0)$, observa-se que a temperatura:

(a) será máxima nos pontos da fronteira da bola.

(b) estará sempre aumentando durante todo o percurso.

(c) estará sempre diminuindo durante todo o percurso.

(d) atingirá o seu maior valor no centro da bola.

(e) assumirá o seu maior valor em 4 pontos distintos.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Note que a temperatura é dada por

$$T(x,y,z) = \frac{50}{x^2+y^2+z^2+1}$$

Como desejamos encontrar o ponto de maior temperatura e $T$ é dada por uma fração com numerador constante, devemos encontrar o menor valor para o denominador $x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

Usando o gradiente:

$$\nabla T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Calculamos:

$$\nabla T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$$

O mínimo do denominador ocorre quando:

$$\nabla T(x,y,z) = (0,0,0)$$

Ou seja,

$$(2x, 2y, 2z) = (0,0,0)$$

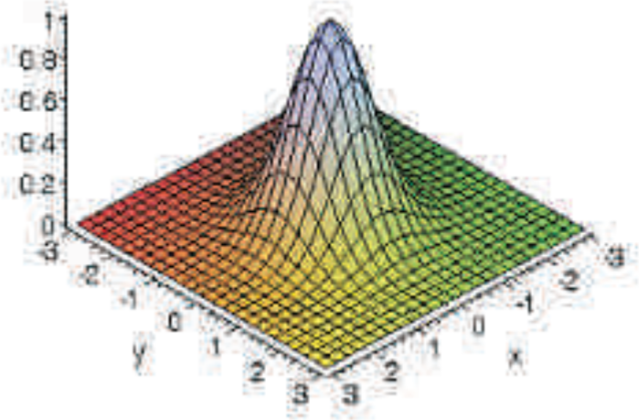
$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Ou seja, no centro da esfera $(0,0,0)$. Assim, a temperatura atinge seu maior valor no centro da bola.

**Resposta:** (D) Atingirá o seu maior valor no centro da bola.

Baseado em [29, p. 28].

4. (ENADE 2005 problema 28)




A figura acima ilustra parte do gráfico da função

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

definida para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sabendo que, se $a > 0$, então:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi(1 - e^{-a^2}),$$

julgue os itens a seguir:

I. Os conjuntos

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k, 0 < k < 1\}$$

que representam curvas de nível da função $f$, são circunferências de centro na origem.

II.

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0.$$

III. A função $f$ é limitada superiormente, mas não é limitada inferiormente.

IV.

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi.$$

Estão certos apenas os itens:

(a) I e III.

(b) II e IV.

(c) III e IV.

(d) I, II e III.

(e) I, II e IV.

$\boxed{\text{Solução}}$: Análise dos itens: **I)** Certo pois as curvas de nível de uma superfície são dadas pelas interseções da mesma por planos horizontais.

**II)** Certo pois

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-x^2-y^2} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{a\to\infty} e^{-a} = 0$$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{e^a} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

**III)** Errado pois ela é ilimitada inferiormente pelo plano $xy$. Quanto mais nos afastarmos da origem mais a altura da superfície tende a zero, mas não o ultrapassa. Consequência direta do item II.

**IV)**

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{x^2+y^2\to\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{a^2\to\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

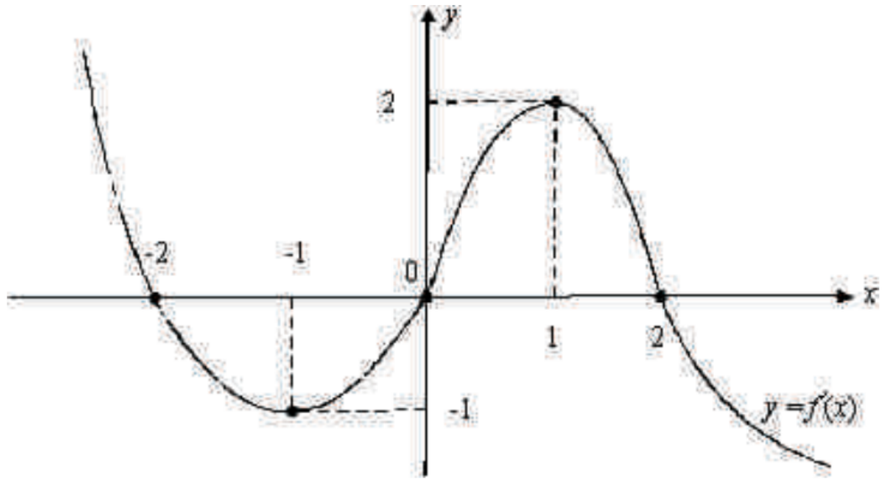
$$= \lim_{a^2\to\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi(1-e^{-\infty}) = \pi(1-0) = \pi$$

Está correto.

Resposta: (e) I, II e IV.

Baseado em [29, p. 30].

5. (ENADE 2005 problema 30) Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável até a ordem 2, pelo menos, tal que $f(-2)=0$, $f(-1)=-1$, $f(0)=-2$, $f(1)=1$ e $f(2)=2$. O gráfico da derivada de primeira ordem, $f'$, tem o aspecto apresentado abaixo.




Com base nos valores dados para a função $f$ e no gráfico de sua derivada $f'$, faça o que se pede nos itens a seguir.

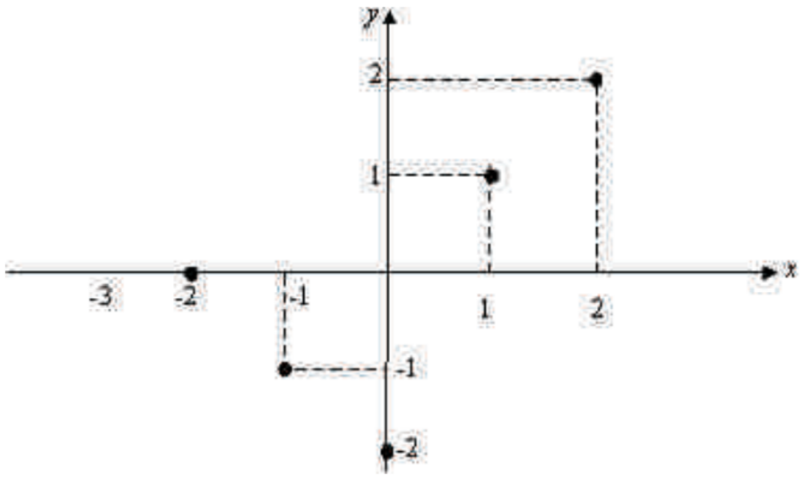
a) Na reta abaixo, represente com setas $\nearrow$ ou $\searrow$ os intervalos em que a função $f$ é crescente ou decrescente, respectivamente. (valor: 2,0 pontos)


b) Calcule: $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ (valor: 1,0 ponto)

c) Quais são os pontos de máximo e de mínimo relativos (locais) de $f$? (valor: 2,0 pontos)

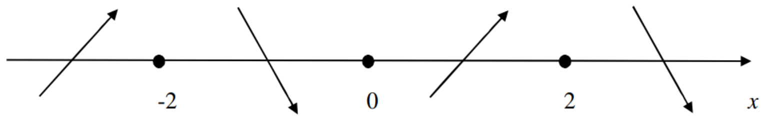
d) Quais são os pontos de inflexão de $f$? (valor: 1,0 ponto)

e) No sistema de eixos coordenados abaixo, faça um esboço do gráfico da função $f$. (valor: 4,0 pontos)




$\boxed{\text{Solução}}$:

(a) Da observação do gráfico da derivada acrescentar os pontos $-2$ e $2$ no eixo $x$, e através do sinal da derivada assinalar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f$.



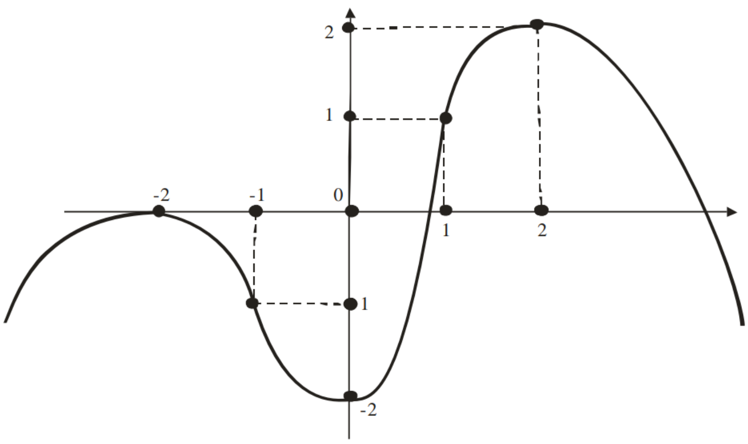

b) É fácil ver que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

c) A partir do item (a) e o gráfico de $f'$, identificar pontos de máximo e mínimo relativos: $x = -2$ é ponto de máximo local; $x = 0$ é ponto de mínimo local; $x = 2$ é ponto de máximo local.

d) A partir do item (a) e o gráfico de $f'$, identificar pontos de inflexão de $f$: $x = 1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão de $f$.

e) Esboçar o gráfico da função, respeitando os pontos indicados:




6. (ENADE 2008 questão 16) A concentração de certo fármaco no sangue, $t$ horas após sua administração, é dada pela fórmula:

$$y(t) = \frac{10t}{(1+t)^2}, \quad t \geq 0$$

Em qual intervalo essa função é crescente?

(a) $t \geq 0$

(b) $t > 10$

(c) $t > 1$

(d) $0 \leq t < 1$

(e) $\frac{1}{2} < t < 10$

$\boxed{\text{Solução}}$:

Basta descobrir os valores de $t$ tais que $y'(t) = 0$, e esses serão os possíveis candidatos a serem máximos ou mínimos locais da função $y$:

$$y'(t) = 10 \cdot (1+t)^{-2} + 10t \cdot (-2)(1+t)^{-3} = \frac{10 \cdot (1+t) - 20t}{(1+t)^3} = \frac{-10t+10}{(1+t)^3}$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Para verificar se $t = 1$ é ponto de máximo ou de mínimo, basta fazer o teste da segunda derivada ou analisar o sinal da função $y'(t)$, vamos para a segunda opção:
Veja que $1 + t > 0$ para $t \geq 0$ e claramente $-10t + 10 < 0$ para $t > 1$, logo $y'(t) < 0$ para $t > 1$ e de modo totalmente análogo se conclui que $y'(t) > 0$ para $0 \leq t < 1$, logo $t$ é ponto de mínimo e além disso, $y$ é crescente quando $y'$ é negativo, ou seja, a nossa resposta é a letra (d).

7. (Enade 2008 Questão 19) Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada $\dfrac{dg}{dt}$ contínua e $f$ a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Nessas condições, avalie as afirmações que se seguem.

   I. A função $f$ é integrável em todo intervalo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

   II. A função $f$ é derivável e sua derivada é a função $g$.

   III. A função diferença $f - g$ é uma função constante.

É correto o que se afirma em:

   A. I, apenas.

   B. II, apenas.

   C. I e III, apenas.

   D. II e III, apenas.

   E. I, II e III.

$\boxed{\text{Solução}}$:

É fácil ver que pelo Teorema Fundamental do Cálculo $f(x) = \int_0^x \frac{dg}{dt}(t)\,dt = g(x) - g(0)$. E como $g$ é derivável segue que ela é contínua e consequentemente $f$ é contínua e portanto integrável (I está correto). Mas a derivada de $f$ não é a função $g$, mas sim a função $\frac{dg}{dt}$(t) (II está incorreto). E por fim, é fácil ver que $f - g = g(0)$ que é uma constante. Alternativa (D) é a resposta correta.

8. (Enade 2008 Questão 26) Analisando a função

$$f(x, y) = x^2(x - 1) + y(2x - y),$$

definida no domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

um estudante de cálculo diferencial escreveu o seguinte:

*A função $f$ tem um ponto de mínimo global em $D$ **porque** o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico de $f$.*

A respeito da afirmação feita pelo estudante, assinale a opção correta:

(a) As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

(b) As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

(c) A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.

(d) A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.

(e) Ambas as asserções são proposições falsas.

$\boxed{\text{Solução}}$: Alternativa (b).

**Justificativa:** O ponto $(0, 0)$ é de fato um ponto crítico da função $f$, pois anula suas derivadas parciais de primeira ordem. No entanto, ser um ponto crítico não garante que seja um ponto de mínimo global. Para determinar a natureza do ponto crítico, seria necessário analisar o critério da segunda derivada ou avaliar os valores da função nos limites do domínio $D$. Portanto, a justificativa apresentada pelo estudante é insuficiente para concluir que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global.

9. (Enade 2008 Questão 31) Na discussão relativa a funções exponenciais, um professor propôs a seguinte questão:

   Para que valores não-nulos de $k$ e $m$ a função $f(x) = me^{kx}$ é uma função crescente?

   Como estratégia de trabalho para que os alunos respondam à questão proposta, é adequado e suficiente o professor sugerir que os alunos:

   (a) considerem $m = 1$ e $k = 1$, utilizem uma planilha eletrônica para calcular valores da função $f$ em muitos pontos e comparem os valores obtidos.

   (b) considerem $m = 1$ e $k = 1$, $m = -1$ e $k = 1$, esbocem os gráficos da função $f$ e, em seguida, comparem esses dois gráficos.

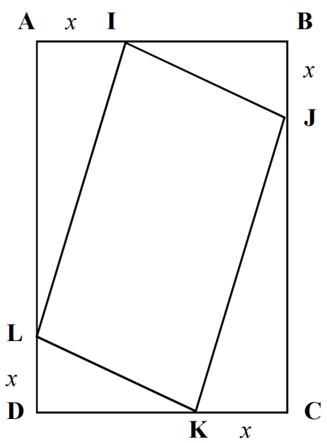
   (c) formem pequenos grupos, sendo que cada grupo deve esboçar o gráfico de uma das funções $y = me^x$, para $m = 1, 2, 3, 4$ ou $5$, e comparem, em seguida, os gráficos encontrados.

   (d) esbocem os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e analisem o que acontece com esses gráficos quando a variável e a função forem multiplicadas por constantes positivas ou negativas.

   (e) construam uma tabela com os valores de $f$ para $x$ número inteiro variando de $-5$ a $5$, fixando $m = 1$ e $k = 1$ e, em seguida, comparem os valores encontrados.

$\boxed{Gabarito}$: Alternativa (d)

10. (ENADE 2008 questão 40 - discursiva) No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

(a) Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

(b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de $x$ e determine, caso existam, seus pontos de máximo e de mínimo.

(c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio?

$\boxed{\text{Solução}}$:

(a) Para demonstrar que IJKL é um paralelogramo o estudante pode mostrar que os triângulos IBJ e KDL são congruentes (ALA); da mesma forma o triângulo IAL é congruente ao triângulo KCJ (ALA). Em seguida, usa-se a propriedade dos paralelogramos: um quadrilátero com lados postos congruentes é um paralelogramo.

(b) Como $IBJ$ e $KDL$ são congruentes e retângulos, da mesma forma que os triângulos $JCK$ e $LAI$, então a área do paralelogramo $A(x)$ é a área do retângulo subtraída das área desses triângulos, que nos oferece

$$A(x) = 7 \cdot 9 - 2\left(\frac{(9-x)x}{2} + \frac{(7-x)x}{2}\right) = 2x^2 - 16x + 63.$$

Para descobrir o ponto de máximo ou de mínimo ou utilizamos derivada ou utilizamos uma propriedade da função quadrática, vamos para essa segunda opção, descobrir o $x_V$ ($x$ do vértice):

$$x_V = \frac{-(-16)}{2 \cdot 2} = 4.$$

Esse é o ponto crítico e como a função $A$ possui um gráfico cuja parábola tem concavidade para cima, este é um ponto de mínimo, ou seja, $A(x)$ tem valor mínimo (Área mínima para o paralelogramo) quando $x = 4$.

(c) Para o Ensino Fundamental no item (a) pode-se explorar Congruência de triângulo, propriedades do paralelogramo, e para o 9° ano do ensino fundamental e ensino médio, no item (b), explorar estudo do gráfico da função do segundo grau.

11. (Enade 2011 Questão 10) Sabe-se que, para todo número inteiro $n > 1$, tem-se:

$$\frac{n \cdot \sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n \cdot \sqrt[n]{ne}}{e}.$$

Nesse caso, se $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = a$, então:

(a) $a = 0$;

(b) $a = \frac{1}{e}$;

(c) $a = 1$;

(d) $a = e$;

(e) $a = +\infty$.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Para resolver o problema, consideramos a desigualdade inicial:

$$\frac{n \cdot \sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n \cdot \sqrt[n]{ne}}{e}.$$

Agora, dividimos cada termo da desigualdade por $n$, conforme o limite proposto no enunciado:

$$\frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{ne}}{e}.$$

Vamos calcular os limites dos extremos separadamente.

## Cálculo do limite inferior

O termo inferior é dado por:

$$\frac{\sqrt[n]{e}}{e}.$$

Sabemos que $\sqrt[n]{e} = e^{1/n}$, e quando $n \to +\infty$, temos $e^{1/n} \to 1$. Assim:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e} = \frac{1}{e}.$$

## Cálculo do limite superior

O termo superior é dado por:

$$\frac{\sqrt[n]{ne}}{e}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{1/n}}_{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}}{e} = \frac{1}{e}.$$

Isto porque $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln n^{1/n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$ (na antepenúltima igualdade utilizamos a regra de L'Hopital).

## Teorema do Confronto

Obtemos então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} \iff \frac{1}{e} < \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}.$$

Pelo **Teorema do Confronto**, sabemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = a = \frac{1}{e}.$$

Portanto, a alternativa correta é: (b)

12. (ENADE 2011 questão 14) Em um plano de coordenadas cartesianas $xOy$, representa-se uma praça de área $P$, que possui em seu interior um lago de área $L$, limitado por uma curva $C$ fechada, suave, orientada no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

    Considere que, sobre o lago, atua um campo de forças:

    $$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

    Supondo que $T$ representa o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ para mover uma partícula uma vez ao longo da curva $C$ e que, comparando-se apenas os valores numéricos das grandezas, a área não ocupada pelo lago é igual a $\frac{T}{2}$, conclui-se que:

    (a) $P = T$.

(b) $T = L$.

(c) $P = 2T$.

(d) $T = 4L$.

(e) $P = 4L$.

$\boxed{\text{Solução}}$:

A resolução da questão requer conhecimento de integral curvilínea de função vetorial, integral dupla, derivadas parciais e Teorema de Green. Como não se tem a equação da curva, vamos usar o Teorema de Green, que expressa uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada no plano como uma integral dupla sobre a região limitada pela curva.

**Teorema de Green:** Sejam $C$ uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e $R$ a região fechada delimitada por $C$. Se $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio que contém $R$, então:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA.$$

Como a curva e o campo vetorial dados satisfazem as condições do teorema, vamos utilizá-lo:

$$T = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_R \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dA = \iint_R 2dA = 2L \quad (1)$$

De (1) tem-se a área do lago dada por $L - \frac{T}{2}$. Como a área não ocupada pelo lago é $\frac{T}{2}$, conclui-se que a área da praça, que é igual à área ocupada pelo lago mais a não ocupada pelo lago, é igual a $T$, o que leva à alternativa A como sendo a correta.

Esta questão tem um nível de dificuldade fácil, pois, se o respondente conhecer o Teorema de Green, a questão é uma aplicação simples desse teorema.

**Gabarito:** alternativa **A**

Baseado em [22, p. 32].

13. (ENADE 2011 questão 17) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$y = f(x) = x^4 - 5x^2 + 4,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. A área da região limitada pelo gráfico da função $y = f(x)$, o eixo $Ox$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$ é igual a:

(a) $\frac{16}{15}$ unidades de área.

(b) $\frac{38}{15}$ unidades de área.

(c) $\frac{44}{15}$ unidades de área.

(d) $\frac{60}{15}$ unidades de área.

(e) $\frac{76}{15}$ unidades de área.

$\boxed{\text{Solução}}$:

De modo resumido, queremos o valor da integral:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^4 - 5x^2 + 4\,dx &= \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\Big|_0^2 = \frac{32}{5} - \frac{5\cdot 8}{3} + 4\cdot 2\\ &= \frac{96-200+120}{15} = \frac{16}{15}\end{aligned}$$

Alternativa (a) é a resposta correta.

14. (ENADE 2011 questão 21) Os analistas financeiros de uma empresa chegaram a um modelo matemático que permite calcular a arrecadação mensal da empresa ao longo de 24 meses, por meio da função:

$$A(x) = \frac{x^3}{3} - 11x^2 + 117x + 124,$$

em que $0 \leq x \leq 24$ é o tempo, em meses, e a arrecadação $A(x)$ é dada em milhões de reais.

A arrecadação da empresa começou a decrescer e, depois, retomou o crescimento, respectivamente, a partir dos meses:

(a) $x = 0$ e $x = 11$.

(b) $x = 4$ e $x = 7$.

(c) $x = 8$ e $x = 16$.

(d) $x = 9$ e $x = 13$.

(e) $x = 11$ e $x = 22$.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Na bibliografia de Cálculo Diferencial e Integral, encontra-se a definição de ponto crítico: "Um ponto $c$ do domínio de uma função $f$ é chamado de ponto crítico se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe". Além disso, o crescimento e o decrescimento de uma função podem ser verificados através do sinal de sua derivada, conforme o teorema:

Seja $f$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto $(a, b)$.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo valor de $x$ em $(a, b)$, então $f$ é crescente em $[a, b]$.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo valor de $x$ em $(a, b)$, então $f$ é decrescente em $[a, b]$.

(c) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de $x$ em $(a, b)$, então $f$ é constante em $[a, b]$.

A função dada é polinomial contínua e derivável, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo satisfaz as condições do teorema.

A derivada é $A(x) = x^2 - 22x + 117$ .

Por outro lado, $A'(x) = 0$ quando $x^2 - 22x + 117 = 0$, isto é, quando $x = 13$ ou $x = 9$. Encontrados os pontos críticos da função, estuda-se o seu crescimento ou decrescimento nos intervalos $[0, 9]$, $[9, 13]$ e $[13, 15]$.

Vale lembrar que se $f'$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, então $f'$ tem sinal constante neste intervalo.

Analizando o sinal da derivada no intervalo $(0, 9)$ através de um valor de teste, escolhido dentro do intervalo, por exemplo $x = 1$, como $A'(1) > 0$, conclui-se que $f$ é crescente em $[0, 9]$.

Analizando o sinal no intervalo $(9, 13)$, como $A'(10) < 0$, $f$ é decrescente no intervalo $[9, 13]$.

Analizando o sinal no intervalo $(13, 15)$, como $A'(14) > 0$, $f$ é crescente no intervalo $[13, 15]$.

Então a arrecadação da empresa começou a decrescer a partir 9º do mês, e retornou o crescimento a partir do mês 13, o que leva à resposta D, eliminando as demais alternativas.

15. (ENADE 2011 questão 22) Considere $u(x, y) = f(x - 4y) + g(x + 4y)$, em que $f$ e $g$ são funções reais quaisquer, deriváveis até a segunda ordem, com $u_{xx} \neq 0$ para todo $x$ e $y$. Nesse caso, $\frac{u_{yy}}{u_{xx}}$ é igual a:

    (a) $-16$

    (b) $8$

    (c) $0$

    (d) $8$

(e) $16$

$\boxed{\text{Solução}}$:

Sejam $r = x - 4y$ e $s = x + 4y$. Então

$$u(x, y) = f(r(x, y)) + g(s(x, y)),$$

onde $f$ e $g$ são funções reais deriváveis até segunda ordem. Uma vez que $f$ e $g$ são funções de uma variável, usamos a notação $f'$ para denotar a derivada de primeira ordem de $f$.

Calculando as derivadas parciais de $u$ em relação a $x$, de primeira e segunda ordem, obtem-se:

$$u_x(x, y) = f'(r)r_x + g'(s)s_x = f'(r) + g'(s),$$

$$u_{xx}(x, y) = f''(r)r_x + g''(s)s_x = f''(r) + g''(s),$$

pois $r_x = s_x = 1$.

Analogamente, calculando as derivadas parciais de $u$, de primeira e segunda ordem, em relação a $y$, obtem-se:

$$u_y(x, y) = f'(r)r_y + g'(s)s_y = (-4)f'(r) + 4g'(s),$$

pois $r_y = -4$ e $s_y = 4$.

$$u_{yy}(x, y) = (-4)f''(r)r_y + 4g''(s)s_y = 16\,(f''(r) + g''(s)) = 16u_{xx}.$$

Assim, o cálculo direto mostra que

$$\frac{u_{yy}}{u_{xx}} = 16.$$

**Gabarito:** alternativa (e)

Baseado em [22, p. 50].

16. (ENADE 2011 questão 25) Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente funções não nulas e diferenciáveis $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ e $x = h(y, z)$.

Nessa situação, analise as afirmações abaixo.

I.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

II. Se $F_x(x, y, z) \neq 0$, então
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

III.
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = 1.$$

É correto o que se afirma em:

(a) I, apenas.

(b) III, apenas.

(c) I e II, apenas.

(d) I e III, apenas.

(e) I, II e III.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Analisando a veracidade das proposições I, II e III:

A proposição I é verdadeira, pois sendo z definida como função diferenciável das variáveis x e y, sua derivada parcial com relação à variável x é definida por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

A proposição II também é verdadeira, pois, usando o Teorema da Diferenciação Implícita conforme apresentado em Thomas (2012, p. 242), aplicado à função diferenciável $F$ com $F(x, y, z) = 0$, e considerando a variável $z = f(x, y)$ definida implicitamente como função de $x$ e $y$, tem-se que, para todo par $(x, y)$ no domínio de $f$:

$$F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Assumindo que $F$ e $f$ sejam funções diferenciáveis e usando a Regra da Cadeia apresentada em Thomas (2012, p. 239) para diferenciar a equação $F(x, y, z) = 0$ com relação à variável independente $x$, tem-se:

$$0 = F_x(x, y, z) = F_x(x, y, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= F_x(x, y, z) \cdot 1 + F_y(x, y, z) \cdot 0 + F_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

Portanto,

$$F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Obs.: $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, pois y é considerado constante ao diferenciar em relação a x.

Supondo $F_z(x, y, z) \neq 0$, é possível resolver a equação para a derivada parcial de z em relação a x, obtendo-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

A proposição III é falsa, pois, pelo Teorema da Diferenciação Implícita aplicado às demais funções y = g(x, z) e x = h(y, z), tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z(x, y, z)}{F_y(x, y, z)}$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \left(-\frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}\right) \cdot \left(-\frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}\right) \cdot \left(-\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}\right) = -1$$

**Gabarito:** alternativa (c)

Baseado em [22, p. 60].

17. (ENADE 2011 questão 5 - discrusiva) O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma

demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano [1781 – 1848].

Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir:

(a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real;

(b) Resolva a seguinte situação-problema.

O vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo.

(c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua $f$, definida em um intervalo $[a, b]$, relacionando duas grandezas $x$ e $y$, tal que existe $k \in (a, b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a, b)$, $x \neq k$. Justifique sua resposta.

$\boxed{\text{Solução}}$:

a) Teorema do Valor Intermediário: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então, para todo $f(a) < k < f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

b) O tempo, em segundos, do corredor foi igual a $44 \times 60 + 7 = 2647$ segundos. A velocidade média desse corredor foi de $15000/2647 = 5,67$ metros por segundo. Admitindo-se que a função que modela a velocidade do corredor está definida no intervalo $[0, 2647]$, é contínua nesse intervalo e que $v(0) = v(2647) = 0$, existirá (pelo Teorema do Valor Médio), pelo menos, um momento $t_0$ da prova em que a velocidade foi de 5,67 metros por segundo. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem, pelo menos dois instantes, $t_1$ e $t_2$, tal que $v(t_1) = v(t_2) = 5$, e veja que $t_1 \in (0, t_0)$ e $t_2 \in (t_0, 2647)$.

c) Qualquer situação modelada por uma função definida em $[a, b]$ monótona ou uma função cujo $f(a) \neq f(b)$ funciona.

18. (ENADE 2014 Questão 12) Deseja-se pintar a superfície externa e lateral de um monumento em forma de um paraboloide, que pode ser descrita pela equação $z = x^2 + y^2$, situada na região do espaço de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ dada pela condição $z \leq 9$. Os eixos coordenados estão dimensionados em metros e gasta-se um litro e meio de tinta a cada metro quadrado de área da superfície a ser pintada.

A quantidade de tinta, em litros, necessária para se pintar a superfície lateral do monumento é dada pela integral dupla

(A) $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

(B) $6\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

(C) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$

(D) $6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$

(E) $6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-3}^{3} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$

Solução :

Essa resolução é obtida com conhecimentos de Integral de Superfície, mais especificamente de área de uma superfície com todos os seus elementos: equação vetorial de superfície, vetores tangentes e ortogonais, integral dupla, módulo de um vetor.

Observa-se que a quantidade de litros de tinta, necessária, corresponde a uma vez e meia a medida da área da superfície, em metros quadrados.

Para determinar a área de uma superfície resolve-se uma Integral de Superfície de função escalar que é da forma $\iint_S f(x,y,z)\,dS$, em que os elementos utilizados, para obter-se a área, são dados por:

- $f(x,y)=1$;
- $dS = |\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y| dA$, com $\mathbf{R}(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$, equação vetorial da superfície e $dA = dx\,dy$;
- $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y$, vetor ortogonal à superfície, formado pelo produto vetorial entre os dois vetores que são tangentes, obtidos pelas derivadas parciais $\mathbf{R}_x = (1,0,2x)$ e $\mathbf{R}_y = (0,1,2y)$, e que pode ser calculado segundo a forma mnemônica de determinante:

$$\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, -1) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

- $|\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|$, módulo do vetor acima que é obtido pela raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes:

$$\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1^2} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

Assim, a integral anterior fica:

$$\iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dx\, dy$$

- $D$, região de integração que será obtida pela projeção da superfície no plano $xy$, uma vez que trabalha-se com uma superfície dada por uma função de variáveis independentes $x$ e $y$.

  Assim, como $z \leq 9$, a região de integração é obtida com $z = x^2 + y^2 \leq 9$, ou seja, um círculo de centro na origem e raio $3$.

  Essa região facilita a integração se for feita uma mudança para coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$0 \leq r \leq 3$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Realizando a troca de variáveis e efetuando os cálculos algébricos, tem-se:

$$\iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

Essa integral vai fornecer o valor da área procurada.

Cabe agora analisar as alternativas sabendo que em litros deve ser considerado:

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

**Alternativas (A) e (B)**

A integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}$ apresenta uma inversão nos limites de integração. Os limites não correspondem à ordem de integração dada por $dx\, dy$. Esse fato mostra que as alternativas (A) e (B) não são verdadeiras.

Nas alternativas (C), (D) e (E), pode ser observado o uso de coordenadas polares, citado antes, fato que levou ao desenvolvimento realizado.

**Alternativa (C)**

A solução

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

indica 4 vezes a área de $\frac{1}{4}$ da superfície. Observa-se que, como

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

foi considerada apenas $\frac{1}{4}$ da região $D$. A alternativa não corresponde ao solicitado pelo exercício, pois fornece apenas a área da superfície e não $\frac{3}{2}$ do valor dessa área.

**Alternativa (D)**

Observa-se que na alternativa (D)

$$6\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

tem-se $\frac{1}{4}$ (da área), ou seja,

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

litros, o que corresponde a uma vez e meia a área da superfície. Desta forma, a alternativa (D) é verdadeira.

**Alternativa (E)**

A alternativa

$$6\int_0^{2\pi}\int_{-3}^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

é falsa, pois o raio do disco (região $D$), varia de $0$ a $3$, não assumindo valores negativos.

**Observação**

A resolução do exercício que apresenta a superfície como a representação de uma função de $z = f(x, y)$, pode ser feita de forma abreviada, usando essa superfície como de nível de uma função $w$ em que $w = z - f(x, y)$. Tem-se então o gradiente como ortogonal à Superfície de Nível e pode-se pensar em seu módulo como:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

**Gabarito:** alternativa (d)

Baseado em [21, p. 26].

19. (ENADE 2014 Questão 15) Uma função diferenciável $f$, crescente a partir da origem e situada no primeiro quadrante, é tal que a área da região sob seu gráfico e acima do eixo das abscissas, de $0$ até $x$, vale um quinto da área do triângulo com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(x, y)$ e $(x, 0)$, em que $y = f(x)$.

    A equação diferencial que descreve essa situação é:

    (a) $xy' - 9y = x$

    (b) $xy' - 9y = 0$

    (c) $x^2y' - 9y = 0$

    (d) $y' - 9xy = 0$

    (e) $y' - 9x^2y = 0$

Comentários:

O enunciado nos dá que a função $f$ é diferenciável, ou seja, derivável. Também informa que a área sob o gráfico de $f$ e acima do eixo das abscissas, de $0$ até $x$, é um quinto da área de um triângulo com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(x, y)$ e $(x, 0)$, onde $y = f(x)$.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Primeiro, determinamos a área do triângulo:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$$

A área sob o gráfico de $f$, de $0$ até $x$, é dada pela integral:

$$\int_0^x f(t)\,dt$$

Relacionando as duas áreas segundo a condição da questão, temos:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x)\right) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{10}\cdot x\cdot f(x)$$

Para encontrar a equação diferencial, diferenciamos ambos os lados em relação a $x$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x) \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x\cdot f(x)}{10}\right) = \frac{1}{10}\left(f(x) + x\cdot f'(x)\right)$$

Portanto, a equação diferencial, considerando $y = f(x)$, é:

$$y = \frac{1}{10}\left(y + x\cdot y'\right) \Leftrightarrow 10y = y + x\cdot y'$$

$$\Leftrightarrow xy' - 9y = 0$$

Por fim, a equação diferencial que descreve a situação é:

$$xy' - 9y = 0.$$

**Gabarito:** alternativa (b)

20. (ENADE 2014 Questão 21) No estudo de funções de várias variáveis reais, buscam-se informações sobre continuidade, diferenciabilidade, entre outras. Considere uma função de duas variáveis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A respeito dessa função, avalie as afirmações a seguir.

I. Ao longo das retas $y = cx$, o valor da função $f$ é constante.

II. A função $f$ é descontínua em $(0,0)$.

III. A função $f$ satisfaz $|f(x,y)| < \frac{1}{2}$, quaisquer que sejam $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq y$.

É correto o que se afirma em

(a) II, apenas.

(b) III, apenas.

(c) I e II, apenas.

(d) I e III, apenas.

(e) I, II e III.

$\boxed{\text{Solução}}$:

Analisando as três afirmações, observa-se o exposto a seguir.

# Afirmação I

Fazendo $y = cx$, pode-se afirmar que

$$f(x, cx) = \frac{x^2(c^2)}{x^4 + (cx)^4} = \frac{c^2}{x^2 + c^4},$$

isto é, a imagem da função vai depender do valor de $c$ e, por essa razão, **não** se mantém constante. Dessa forma, a alternativa é falsa.

# Afirmação II

Deixa claro que a Afirmação II é verdadeira. Sabe-se que para a função ser contínua no ponto $(0,0)$ deve-se ter

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^4} = f(0,0) = 0.$$

Tratando-se de uma função de duas variáveis, para que o limite exista, deverá ser o mesmo através de qualquer caminho que chegue ao ponto $(0,0)$. Logo, se for utilizado o caminho $y = cx$, tem-se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(cx)^2}{x^4+(cx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3c^2}{x^4+c^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{c^2}{x+c^4}.$$

O resultado obtido mostra que o limite vai ser diferente para cada valor de $c$ e, portanto, não existe, o que torna a função descontínua em $(0,0)$.

# Afirmação III

Ao determinar $f(-a,a)$, obtém-se:

$$f(-a,a) = \frac{(-a)a^2}{(-a)^4+a^4} = \frac{-a^3}{2a^4} = \frac{a}{2}.$$

Assim, para cada valor de $a \neq 0$, $f(-a,a) = \frac{1}{2}$, o que mostra que a afirmação é falsa.

**Gabarito:** alternativa (a)

Baseado em [21, p.47].