



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ALICE BUARQUE VIEIRA DE MELLO

**Estudando dependência a partir da família odd log-logística geométrica:
Aplicações a Fenômenos Ambientais**

Recife

2025

ALICE BUARQUE VIEIRA DE MELLO

**Estudando dependência a partir da família odd log-logística geométrica:
Aplicações a Fenômenos Ambientais**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Matemática

Orientadora: Profa. Maria do Carmo Soares de Lima

Coorientador: Prof. Abraão David Costa do Nascimento

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Mello, Alice Buarque Vieira de.

Estudando dependência a partir da família odd log-logística geométrica: Aplicações a Fenômenos Ambientais / Alice Buarque Vieira de Mello. - Recife, 2025.

88f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2025.

Orientação: Maria do Carmo Soares de Lima.

Coorientação: Abraão David Costa do Nascimento.

Inclui referências e apêndices.

1. Análise de Séries Temporais; 2. Novas distribuições; 3. Função quantílica. I. Lima, Maria do Carmo Soares de. II. Nascimento, Abraão David Costa do. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

RESUMO

Nos últimos anos, muitos trabalhos foram desenvolvidos na área da teoria das novas distribuições. As demandas de pesquisa nessa área surgem, dentre outros aspectos, da necessidade de encontrar bons ajustes a conjuntos de dados reais. Nesse contexto, um caminho muito utilizado é desenvolver um gerador de novas de distribuições ou escolher um já proposto na literatura. O próximo passo é escolher uma distribuição de base para ser inserida no gerador, obtendo-se assim, uma nova distribuição de probabilidade. Para além da modelagem de dados reais, os autores normalmente analisam a distribuição taxa de falha; desenvolvem propriedades matemáticas relevantes como: função quantílica, momentos e função geratriz de momentos; realizam o processo de estimação, e realizam estudos de simulação para verificar se a condição de consistência dos estimadores é válida. O objetivo desse trabalho é: desenvolver um novo gerador de distribuições reparametrizado pela função quantílica, a partir dele, gerar uma nova distribuição de probabilidade que será a componente aleatória de novos processos autorregressivos de médias móveis (ARMA). Esse trabalho apresenta diversos casos particulares dos processos ARMA, como: AR(1), MA(1), ARMA(1,1) e AR(2). Todos os casos particulares sendo desenvolvidos para duas funções de ligação. Um estudo gráfico detalhado foi realizado e discutido. Foi feito um estudo de simulação, uma análise preditiva do modelo através de intervalos de predição, e uma aplicação a uma série temporal real, referente a precipitação de chuva. Aplicação esta que foi utilizada como critério de comparação a outros modelos existentes na literatura. Também foi realizada uma generalização para cada caso particular citado, sendo acrescentado ao modelo uma componente de sazonalidade.

Palavras-chaves: Aplicação a dados reais. Gerador de distribuições. Novas distribuições. Processos ARMA. Séries temporais.

ABSTRACT

In recent years, many studies have been developed in the area of new distribution theory. Research demands in this area arise, among other aspects, from the need to find good fits to a real data set. In this context, a widely used path is to develop a new distribution generator or choose one already proposed in the literature. The next step is to choose a base distribution to be inserted into the generator, thus obtaining a new probability distribution. In addition to modeling real data, the authors usually analyze the failure rate distribution; develop relevant mathematical properties such as: quantile function, moments and moment generating function; perform the estimation process; and perform simulation studies to verify whether the consistency condition of the estimators is valid. The objective of this work is: to develop a new distribution generator reparameterized by the quantile function, from which to generate a new probability distribution that will be the random component of new autoregressive moving average (ARMA) processes. This thesis presents several particular cases of ARMA processes, such as: AR(1), MA(1), ARMA(1,1) and AR(2). All particular cases were developed for two link functions. A detailed graphical study was performed and discussed. A simulation study was performed, a predictive analysis of the model through prediction intervals, and an application to a real time series, related to rainfall. This application was used as a criterion for comparison with other models existing in the literature. A generalization was also performed for each particular case cited, adding a seasonality component to the model.

Keywords: Application to real data. Distribution generator. New distributions. ARMA process. Time series.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Formas para função densidade de probabilidade da distribuição OLLGQ-Exp.	24
Figura 2 – Formas para função taxa de falha da distribuição OLLGQ-Exp.	25
Figura 3 – Série gerada, FAC e FACP do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	31
Figura 4 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	32
Figura 5 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	32
Figura 6 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	33
Figura 7 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	34
Figura 8 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	34
Figura 9 – Precipitação da chuva em mm em função do mês, a FAC e a FACP para a cidade de Foz do Iguaçu.	49
Figura 10 – Série predita, FAC e FACP para os resíduos da aplicação do processo AR(2) com função de ligação logarítmica.	55
Figura 11 – Série predita, FAC e FACP para os resíduos da aplicação do processo AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\delta = 0.25$	56
Figura 12 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,8$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,8$ e $\delta = 0,25$	61
Figura 13 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,4$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,4$ e $\delta = 0,25$	61
Figura 14 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (1,1) com função de ligação Box-Cox e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,55$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,55$, $\delta = 0,25$ e $\gamma = 0,25$	62

Figura 15 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1) com função de ligação Box-Cox e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,2$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,2$, $\delta = 0,25$ e $\gamma = 0,25$ 63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $q = 1$, $\lambda = 1,5$, $u = 0,5$ e variando os valores de α	26
Tabela 2 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $q = 1$, $\alpha = 1$, $u = 0,5$ e variando os valores de λ	26
Tabela 3 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $\alpha = 1$, $\lambda = 1,5$, $u = 0,5$ e variando os valores de q	27
Tabela 4 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	37
Tabela 5 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	38
Tabela 6 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	39
Tabela 7 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	40
Tabela 8 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\phi = 0,8$ e $\delta = 0,5$	43
Tabela 9 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$ e $\delta = 0,5$	43
Tabela 10 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\theta = 0,8$ e $\delta = 0,5$	44
Tabela 11 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$	44

Tabela 12 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0, 2$, $\theta = 0, 2$ e $\delta = 0, 5$	44
Tabela 13 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = -0, 2$, $\theta = -0, 2$ e $\delta = 0, 5$	45
Tabela 14 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1, 5$, $\phi = 0, 8$ e $\delta = 0, 5$	45
Tabela 15 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0, 2$ e $\delta = 0, 5$	46
Tabela 16 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1, 5$, $\theta = 0, 8$ e $\delta = 0, 5$	46
Tabela 17 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\theta = 0, 2$ e $\delta = 0, 5$	46
Tabela 18 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0, 2$, $\theta = 0, 2$ e $\delta = 0, 5$	47
Tabela 19 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0, 5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = -0, 2$, $\theta = -0, 2$ e $\delta = 0, 5$	47
Tabela 20 – Valor Estatístico do Teste e Valor Crítico para o teste de Dickey-Fuller	50
Tabela 21 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE dos processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.	50

Tabela 22 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \theta, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.2, 0.8)$	51
Tabela 23 – Valores AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE dos processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$ quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.	52
Tabela 24 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação Box-Cox quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \theta, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.2, 0.8)$	53
Tabela 25 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação logarítmica quando aplicado a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu. . . .	54
Tabela 26 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$ quando aplicado a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.	55
Tabela 27 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.8)$	56
Tabela 28 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) ₁₂ com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$	68
Tabela 29 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) ₁₂ com função de ligação do tipo Box-Cox ($\gamma = 0, 75$)	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	DISCUSSÃO INICIAL E REVISÃO DA LITERATURA	12
1.2	PROPOSTA E OBJETIVOS DA TESE	13
1.3	ORGANIZAÇÃO DA TESE	14
1.4	PLATAFORMA COMPUTACIONAL UTILIZADA	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	NOVAS DISTRIBUIÇÕES	15
2.1.1	Famílias de distribuições	15
2.2	FAMÍLIA OLLG-G	15
2.3	CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE PROCESSOS APLICADOS A SÉRIES REAIS	16
2.4	AIC: CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO DE AKAIKE	17
2.5	BIC: CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO DE BAYESIANO	18
2.6	TESTE DE LJUNG-BOX	18
2.7	MASE: ERRO MÉDIO ABSOLUTO ESCALADO	19
3	A DISTRIBUIÇÃO OLLGQ-EXP E SUAS PROPRIEDADES	20
3.1	A FAMÍLIA DE DISTRIBUIÇÕES OLLGQ-G	20
3.2	DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA GEOMÉTRICA REPARAMETRIZADA PELA QUANTÍLICA EXPONENCIAL	22
4	A CONSTRUÇÃO DE UM NOVO PROCESSO ARMA	29
4.1	PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(p,q) COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO LOGARÍTMICA	30
4.2	PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(p,q) COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO DO TIPO BOX-COX	32
4.3	ESTIMAÇÃO DOS CASOS ESPECIAIS DO PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA	34
4.3.1	Estimação por Máxima Verossimilhança	34
4.3.2	Resultados Numéricos	36
4.4	EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO	40
4.4.1	Intervalos de Previsão	41
5	APLICAÇÃO	48

5.1	INTRODUÇÃO	48
5.2	CONJUNTO DE DADOS	48
5.3	UM NOVO CASO PARTICULAR DO PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(P,Q): O PROCESSO OLLGQ-EXP AR(2)	53
6	A CONSTRUÇÃO DE UM NOVO PROCESSO SARMA	58
6.0.1	Processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1)×(0,0)_S	59
6.0.2	Processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1)×(1,1)₁₂	60
6.0.3	Processo OLLGQ-Exp SARMA(2,0)×(2,0)₁₂	60
6.1	PROCESSOS OLLGQ-EXP SARMA(p, q) × (P, Q) _S COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO LOGARÍTMICA	61
6.1.1	Processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1)₁₂ com função de ligação logarítmica	61
6.2	PROCESSOS OLLGQ-EXP SARMA(p, q) × (P, Q) _S COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO BOX-COX	62
6.2.1	Processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1)₁₂ com função de ligação Box-Cox	62
6.3	ESTIMAÇÃO DOS CASOS ESPECIAIS DO PROCESSO OLLGQ-EXP SARMA	63
6.3.1	Estimação dos parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1)×(1, 1)₁₂	64
6.3.2	Estimação dos parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(p, q)×(P, Q)_S	65
6.3.3	Matriz Informação de Fisher Condicional do processo OLLGQ-Exp (1,1)×(1,1)₁₂	66
6.3.4	Resultados Numéricos	66
7	CONCLUSÃO	71
7.1	TRABALHOS FUTUROS	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – MATRIZ INFORMAÇÃO DE FISHER	79
	APÊNDICE B – CÓDIGOS	85
	APÊNDICE C – ALGORITMOS	87

1 INTRODUÇÃO

1.1 DISCUSSÃO INICIAL E REVISÃO DA LITERATURA

Em sua maioria, trabalhos desenvolvidos na área de novas distribuições tem estrutura bem definida: escolhe-se ou propõe-se um gerador; escolhe-se a distribuição de base (*baseline*) e constrói-se, assim, uma nova distribuição; as propriedades matemáticas são desenvolvidas; faz-se a estimação dos parâmetros; realiza-se um estudo de simulação para verificar os critérios de consistência dos estimadores; um ou mais conjuntos de dados são modelados a partir da nova distribuição para verificar a adequação do modelo a dados reais, comparando-o com outros modelos conhecidos na literatura. Nesse contexto, podemos citar trabalhos como ALZAATREH (2013) que propuseram uma nova família de distribuições, denotada família T-X, em que uma variável aleatória, “o transformador”, é usada para transformar outra variável aleatória, “a transformada”, algumas famílias foram desenvolvidas, como, por exemplo: Gama-X, Beta-Exponencial-X e Weibull-X. LIMA (2015) usou o gerador Gama, proposto por ZOGRAFOS & BALAKRISHNAN (2009) para propor cinco novas distribuições - trazendo expressões para as propriedades de cada nova distribuição em forma de séries de potência.

A fim de trabalhar com algo mais inovador no que diz respeito ao contexto de novas distribuições, voltamos nossa atenção à análise de séries temporais (AST). Trabalhos como TOMÉ e LATORRE (2001), GOÉS *et. al* (2012) e GUEDES *et. al* (2019) estudaram séries temporais nas mais diversas áreas do conhecimento. Modelos em análise de séries temporais podem ser escolhidos apoiados na versatilidade e tratabilidade de suas distribuições marginais. Em trabalhos iniciais na área, uma série temporal era, na maioria das vezes, assumida como uma sequência gaussiana para, assim, ser trabalhada. Porém, em diversas situações, trabalhamos com observações de comportamentos assimétricos e não gaussianos. Diante disso, trabalhos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de introduzir à literatura modelos não gaussianos de séries temporais.

Utilizando probabilidades parciais para estender a metodologia de modelos lineares generalizados para séries temporais, KEDEM & FOKIANOS (2005) propuseram modelos GARMA (autorregressivos de médias móveis generalizados) com distribuições marginais pertencentes à família exponencial. As principais ideias de modelos lineares generalizados podem ser facilmente estendidas quando utilizadas distribuições pertencentes à família exponencial e funções de ligações monótonas. Além disso, é possível parametrizar a família exponencial diretamente

por meio da média. Outro trabalho que utiliza uma distribuição pertencente à família exponencial foi realizado por POPOVIC & BAKOUCH (2016), que trabalharam com processos considerando a distribuição marginal Lindley. ROCHA & CRIBARI-NETO (2008) propuseram um modelo dinâmico autorregressivo de médias móveis para variáveis aleatórias contínuas que assumem valores no intervalo $(0,1)$ baseados na classe de regressões beta (FERRARI & CRIBARI-NETO, 2004). Para modelar dados de problemas climáticos/ambientais modelos de séries temporais autoregressivos não gaussianos baseados na transformação g-e-h de Tukey foram propostos por YAN & GENTON (2019). Tais transformações possuem dois parâmetros, g e h , que controlam assimetria e peso de cauda. Uma nova modelagem de séries temporais associada à formação física de imagens SAR foi proposta por ALMEIDA-JUNIOR & NASCIMENTO (2021): \mathcal{G}_I^0 -ARMA, estendendo VASCONCELOS (2018). MELLO *et. al* (2022) desenvolveram um modelo autorregressivo de primeira ordem (AR(1)) com distribuição marginal Gama-Lindley para estudar valores futuros de dados hídricos.

1.2 PROPOSTA E OBJETIVOS DA TESE

Diante do exposto anteriormente, poucos trabalhos fazem uso de teoria de novas distribuições em combinação com séries temporais. Essa tese tem como objetivo geral propor processos para séries temporais tendo como distribuição marginal uma nova distribuição de probabilidade aqui proposta, ou seja, o objetivo desse trabalho é inovar a abordagem da geração de novas distribuições. Afastando-se da estrutura já bem definida, este trabalho apresentará uma nova família de distribuições, uma nova distribuição de probabilidade e novos modelos de séries temporais. O grande intuito deste trabalho é apresentar propostas multidisciplinares oferecendo ganhos para a literatura de Teoria de Novas Distribuições e Análise de Séries Temporais.

Como objetivos específicos, listamos:

- Propor uma nova família de distribuições a partir da reparametrização da família odd log-logística geométrica, denominada odd log-logística geométrica reparametrizada pela quantílica;
- Verificar a identificabilidade da família proposta;
- Desenvolver uma nova distribuição pertencente a família odd log-logística geométrica reparametrizada pela quantílica a partir da introdução da distribuição exponencial como *baseline*;
- Estudar as propriedades estruturais da nova distribuição, denominada OLLGQ-Exp;
- Definir processos ARMA e SARMA com distribuição marginal OLLGQ-Exp;
- Estudar os casos especiais dos processos propostos para duas funções de ligação (exponencial

e logarítmica);

- Realizar a estimação de máxima verossimilhança dos modelos juntamente com um estudo de simulação;
- Fazer uma análise da capacidade preditiva dos casos especiais dos processos ARMA apresentados;
- Realizar aplicações a séries de fenômenos ambientais com o intuito de comparar os modelos desenvolvidos com outros modelos ARMA existentes na literatura.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

O capítulo 2 apresenta um suporte teórico para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. No capítulo 3, será apresentada a proposta de uma nova família de distribuição e a partir dela, será desenvolvida uma nova distribuição de probabilidade. Suas propriedades estruturais serão apresentadas e discutidas. No capítulo 4, um processo ARMA é definido e seus casos particulares serão estudados para duas diferentes funções de ligação. No capítulo 5, uma aplicação à uma série temporal real é apresentada com o intuito de comparar os modelos trabalhados com modelos existentes na literatura. Uma generalização do processo ARMA proposto, é desenvolvido no capítulo 6, incorporando ao modelo uma estrutura de dinâmica sazonal e seus casos especiais são estudados.

1.4 PLATAFORMA COMPUTACIONAL UTILIZADA

O sistema de tipografia adotado para preparar essa tese foi o LATEX, inicialmente desenvolvido por Leslie Lamport nos anos 80. Muitas informações encontradas em GRÄTZER (2016) foram utilizadas para a elaboração desse trabalho.

Para o desenvolvimento computacional do trabalho, como geração dos processos propostos, estimação dos parâmetros para os modelos discutidos, ajuste a conjuntos de dados reais, estudo da capacidade preditiva e análise gráfica utilizou-se o R, um software livre para computação científica (<https://www.r-project.org/>).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 NOVAS DISTRIBUIÇÕES

Nas últimas décadas, o rápido avanço na obtenção e na geração de dados, impulsionados principalmente pelo desenvolvimento de novas tecnologias, tem transformado a maneira como as informações são coletadas, armazenadas e analisadas. A crescente variedade de dados acrescidos na literatura, juntamente com o objetivo de encontrar um melhor ajuste a essas observações, estimulou o avanço nos trabalhos na área de teoria de novas distribuições.

Para suprir a alta demanda, distribuições cada vez mais flexíveis estão sendo propostas e anexadas à literatura. Na literatura é possível encontrar diversas formas de obter novas distribuições de probabilidade. Cada forma de geração possui suas particularidades. É possível citar alguns métodos: método da adição de parâmetros, proposta por GOMPERTZ (1825); método da composição - utilizado por CORDEIRO *et al.* (2018) na proposta da distribuição odd log-logistic Birnbaum–Saunders–Poisson; mistura de distribuições - consiste em tomar mais de uma variável aleatória, fazer a multiplicação de cada uma das funções densidade por um peso cuja soma dos pesos resulta em 1 e adicioná-las - como por feito por ERISOGLU *et al.* (2011) e MELLO *et al.* (2022).

2.1.1 Famílias de distribuições

Alguns grupos de distribuições possuem certas propriedades estatísticas e estruturais que as colocam inseridas em uma mesma classe - as denominadas famílias de distribuições. A partir de uma família, é possível obter novas distribuições através de distribuições de base - também chamadas de *baselines*. As *baselines* são distribuições de probabilidade já existentes na literatura que serão inseridas na estrutura das famílias, gerando uma nova distribuição.

2.2 FAMÍLIA OLLG-G

LIMA *et al.* (2019) apresentaram uma nova classe de distribuições, denominada família odd log-logística geométrica, que inclui dois parâmetros de forma adicionais aos parâmetros da distribuição *baseline* para expandir suas aplicações. Parâmetros adicionais podem ser relacionados às medidas de assimetria, curtose e pesos das caudas, além de fornecer uma maior

flexibilidade na modelagem e análise de dados reais de diferentes campos aplicados. Essa nova família permite estender diversos modelos de probabilidade conhecidos, como as distribuições Normal e Weibull, ao adicionar dois parâmetros extras. A família proposta é uma extensão do trabalho realizado por GLEATON & LYNCH (2006).

Sejam Y uma variável aleatória que segue uma distribuição *baseline* pré-especificada e $G(y; \boldsymbol{\tau})$ a função de distribuição acumulada (fda) de Y . Diz-se que X segue uma distribuição odd log-logística geométrica G , diga-se $X \sim \text{OLLG-G}$, se tem sua função densidade de probabilidade (fdp) e fda dadas, respectivamente, por:

$$f(x; \alpha, p, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\alpha(1-p)g(x; \boldsymbol{\tau})G^{\alpha-1}(x; \boldsymbol{\tau})[1-G(x; \boldsymbol{\tau})]^{\alpha-1}}{\{G^{\alpha}(x; \boldsymbol{\tau}) + (1-p)[1-G(x; \boldsymbol{\tau})]^{\alpha}\}^2} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) \quad (2.1)$$

e

$$F(x; \alpha, p, \boldsymbol{\tau}) = \frac{G^{\alpha}(x; \boldsymbol{\tau})}{G^{\alpha}(x; \boldsymbol{\tau}) + (1-p)[1-G(x; \boldsymbol{\tau})]^{\alpha}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad (2.2)$$

em que $g(x; \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial G(x; \boldsymbol{\tau})}{\partial x}$ é a fdp de X , $\alpha > 0$, $p \in [0, 1)$ e $\boldsymbol{\tau}$ é o vetor de parâmetros da *baseline*. Note que se o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\tau}$ tem dimensão k , então a família de distribuição OLLG-G tem $k + 2$ parâmetros.

Para $\alpha = 1$, é obtida a família de distribuição geométrica-G. A família OLL-G (estudada em GLEATON & LYNCH (2006), da CRUZ *et al.* (2016), BRAGA *et al.* (2016) e CORDEIRO *et al.* (2017)) é a família limitante, considerando a convergência em distribuição, da classe OLLG-G de distribuição quando $p \rightarrow 0^+$. As distribuições OLLG-Weibull (OLLG-W) e OLLG-Normal (OLLG-N) foram amplamente estudadas em LIMA *et al.* (2019).

A família OLLG-G fornece uma estrutura flexível para análise estatística de dados. Ela sintetiza algumas distribuições previamente conhecidas e fornece uma visão geral dessas distribuições para estudos teóricos. Representa também um mecanismo bastante flexível para ajustar diversos tipos de conjuntos de dados reais.

2.3 CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE PROCESSOS APLICADOS A SÉRIES REAIS

A avaliação do desempenho dos processos quando aplicados a bancos de dados reais é feita através de algumas pontuações que levam em consideração a qualidade de ajuste, a complexidade do modelo, o comportamento dos resíduos e sua capacidade de previsão. Aqui,

entendemos complexidade do modelo como a quantidade de parâmetros presente em sua estrutura, ou seja, um modelo é menos complexo que outro quando apresenta menos parâmetros em sua composição (modelos parcimoniosos). Para realizar essa avaliação, serão calculados dois critérios de informação estatísticos: AIC (Critério de Informação de Akaike) e BIC (Critério de Informação Bayesiano). Além disso, o teste de Ljung-Box será realizado e será calculado o MASE (erro médio absoluto em escala), que serão descritos no que segue.

2.4 AIC: CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO DE AKAIKE

O Critério de Informação de Akaike (AIC), proposto por HIROTUKU AKAIKE (1973), é uma das ferramentas de seleção de modelos mais conhecidas e utilizadas na Estatística. Tal ferramenta é usada para mensurar a performance de um processo aplicado a um banco de dados. Esse critério é dado por

$$AIC = -2 \log L(\hat{\mathbf{B}}) + 2p,$$

em que $L(\cdot)$ é a função de verossimilhança, $\hat{\mathbf{B}}$ é o vetor de parâmetros que maximiza $L(\cdot)$ e p é o número de parâmetros do processo.

Ao analisarmos o valor de AIC, esperamos obter o menor valor possível. O termo $2p$ pode ser entendido como uma penalização para os modelos mais complexos; portanto, dizemos que o AIC é uma medida de qualidade que valoriza modelos parcimoniosos.

Todavia, à medida que p aumenta em comparação com o tamanho amostral n , o AIC torna-se uma estimativa fortemente viesada da informação (HURVICH & TSAI, 1998), tendendo a selecionar modelos que possuem muitos parâmetros. Visando contornar este problema, SUGIURA (1978) propôs o AIC_c : AIC corrigido para pequenas amostras, dado por

$$AIC_c = AIC + \frac{2p^2 + 2p}{n - p - 1},$$

notemos que a medida que n aumenta, AIC_c converge para AIC.

Como bancos de dados reais apresentam, na maioria das vezes, um grande número de informações, a tendência é que o AIC_c convirja cada vez mais para AIC, portanto, torna-se comum o uso direto do AIC para o estudo de aplicabilidade de modelos a dados reais.

2.5 BIC: CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO DE BAYESIANO

Proposto por SCHWARZ (1978), o Critério de Informação de Bayesiano (BIC) é uma ferramenta para avaliar o desempenho de modelos que atua de maneira semelhante ao AIC. O BIC é obtido através de

$$BIC = -2\log L(\hat{\mathbf{B}}) + p\log(n),$$

em que n é o número de observações dos dados a serem ajustados, $L(\cdot)$ é a função de verossimilhança, $\hat{\mathbf{B}}$ é o vetor de parâmetros que maximiza $L(\cdot)$ e p é o número de parâmetros do processo.

Assim como observado no AIC, o BIC penaliza modelos mais complexos, o que significa que há uma ponderação em relação a qualidade de ajuste e quantidade de parâmetros do processo. Em comparação com o AIC, o BIC tende a ter uma maior penalização, dado que $\log(n) > 2$ para a maioria dos casos, visto que n é o número de observações analisadas. Assim como acontece no AIC, menores valores de BIC indicam um melhor desempenho.

2.6 TESTE DE LJUNG-BOX

O teste de Ljung-Box (M.JUNG & P.BOX, 1978) é uma ferramenta de diagnóstico estatístico aplicada aos resíduos de uma série temporal ajustada. O objetivo do teste é avaliar se a série dos resíduos é autocorrelacionada ou não. Em outras palavras, procuramos saber se os resíduos se comportam como ruído branco.

A hipótese nula do teste afirma que o modelo não apresenta falhas no ajuste (resíduos não correlacionados). Com isso, a hipótese alternativa afirma que os resíduos não são distribuídos de maneira independente.

A Estatística de Teste de Ljung-Box é

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{r}_k^2}{n-k},$$

em que n é o tamanho da amostra, \hat{r}_k é a autocorrelação estimada no *lag* k e m é o número total de *lags* testados.

2.7 MASE: ERRO MÉDIO ABSOLUTO ESCALADO

O erro médio absoluto escalado (MASE) (HYNDMAN & KOEHLER, 2006) é uma medida de precisão das previsões, ou seja, descreve a capacidade preditiva do processo para os dados modelados.

O MASE é dado por

$$MASE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |e_t^*|},$$

com e_t sendo os resíduos e $e_t^* = X_t - X_{t-1}$.

3 A DISTRIBUIÇÃO OLLGQ-EXP E SUAS PROPRIEDADES

3.1 A FAMÍLIA DE DISTRIBUIÇÕES OLLGQ-G

A primeira contribuição teórica desta tese é a proposta de uma família de distribuições a partir da reparametrização da família OLLG-G. Isto é feito a partir da função quantílica. Definida como a função inversa de (2.2), a função quantílica calculada por LIMA *et al.* (2019) é dada por

$$q(u) = Q_G \left(\frac{u^{1/\alpha}(1-p)^{1/\alpha}}{(1-u)^{1/\alpha} + u^{1/\alpha}(1-p)^{1/\alpha}} \right), \quad (3.1)$$

em que $Q_G(u) = G^{-1}(u)$ é a função quantílica da distribuição de base e u constante entre 0 e 1.

Reparametrizar uma distribuição (ou uma família de distribuições) através da função quantílica é uma abordagem interessante para dados assimétricos por ser uma modelagem resistente a *outliers* (LAMONE & BAZÁN, 2016). Em distribuições com caudas pesadas, podem ocorrer falhas ao realizar estimações com a média. Como solução, pode-se utilizar os quantis para definir modelos e estimação (BRITO, 2021).

Uma reparametrização pela função quantílica foi desenvolvida em RIBEIRO (2020) para propor um modelo de regressão baseado na distribuição Burr XII unitária. CHAVES (2021) propôs uma nova reparametrização da distribuição exponencial exponencializada a partir da função quantílica associada. BRITO (2021) considerou um modelo de séries temporais pela abordagem de regressão com ligação na função quantílica e distribuição marginal Lomax. A distribuição Gompertz reparametrizada pela quantílica foi desenvolvida em GOMES (2021).

Aplicando a função G em ambos os lados da Equação (3.1), tem-se

$$G(q) = \frac{u^{1/\alpha}(1-p)^{1/\alpha}}{(1-u)^{1/\alpha} + u^{1/\alpha}(1-p)^{1/\alpha}} \Leftrightarrow 1-p = \frac{G^\alpha(q)(1-u)}{u(1-G(q))^\alpha}, \quad (3.2)$$

em que G é a função distribuição acumulada da distribuição de base.

Substituindo (3.2) nas equações (2.1) e (2.2), obtemos, respectivamente, as funções densidade de probabilidade (3.3) e distribuição acumulada (3.4) de uma nova família de distribuições denominada odd log-logística geométrica reparametrizada pela quantílica, denotada de OLLGQ-G.

A escolha por isolar o parâmetro p na Equação (3.1) vem da menor complexidade em que está disposto na equação, se comparado ao parâmetro α .

Definição: Seja $X \sim \text{OLLGQ-G}$, a fdp e fda de X são dadas, respectivamente, por

$$f(x; \alpha, q, \tau) = \frac{\alpha K g(x; \tau) G^{\alpha-1}(x; \tau) [1 - G(x; \tau)]^{\alpha-1}}{\{G^\alpha(x; \tau) + K[1 - G(x; \tau)]^\alpha\}^2} \quad (3.3)$$

e

$$F(x; \alpha, q, \tau) = \frac{G^\alpha(x; \tau)}{G^\alpha(x; \tau) + K[1 - G(x; \tau)]^\alpha}, \quad (3.4)$$

em que $K = K(\alpha, u, q) = \frac{(1-u)G^\alpha(q)}{u[1-G(q)]^\alpha}$.

A função taxa de falha é uma das mais importantes medidas de confiabilidade na área de Análise de Sobrevivência, que é um conjunto de métodos para estudar a quantidade de tempo até que um certo evento ocorra, como, por exemplo, a morte ou falha de um sistema ou componente das engenharias. Trata-se de uma quantidade de risco associada a um determinado evento, portanto, é uma função que se aplica no estudo de diversas áreas de conhecimento. Ela descreve a probabilidade de ocorrência do evento "sobrevivência" até um tempo arbitrário, dado que sobreviveu até aquele tempo.

A função taxa de falha de X é dada por

$$h(x; \alpha, q, \tau) = \frac{u\alpha [1 - G(q)]^\alpha g(x) G(x)^{\alpha-1} \{u [1 - G(q)]^\alpha G(x)^\alpha + (1-u)G(q)^\alpha [1 - G(x)]^\alpha\}}{[1 - G(x)] \{u [1 - G(q)]^\alpha G(x)^\alpha + (1-u)G(q)^\alpha [1 - G(x)]^\alpha\}^2}. \quad (3.5)$$

Como já discutido, novas classes e famílias de distribuições propostas como modificações e/ou generalizações de distribuições e famílias de probabilidade já existentes na literatura, tem sido amplamente trabalhadas com o intuito de obter distribuições de probabilidade mais eficientes na modelagem de dados. Na maioria dos casos, isso acarreta em distribuições com um maior número de parâmetros em suas estruturas.

O aumento da quantidade de parâmetros pode ocasionar problemas como a não identificabilidade paramétrica, isto é, a adição de parâmetros na estrutura de uma distribuição pode acarretar em funções de densidade de probabilidade não injetivas. Na prática, parâmetros podem ser adicionados em uma estrutura de probabilidade causando redundância com o que já se tinha, ou seja, é desenvolvido um modelo com um número maior de parâmetros sem que estes estejam adicionando, de fato, uma nova informação ao modelo.

Tentar estimar os parâmetros de uma função de distribuição, quando a mesma sofre com problemas de identificabilidade, é por muitas vezes (senão todas as vezes) uma tarefa extremamente complicada, pois as estimações não são informações confiáveis para este caso. (RICARDO R. S. GUSMÃO, 2022). Na prática, ao utilizar o método da máxima verossimilhança, por exemplo, em distribuições com problemas de identificabilidade, podem ser encontradas equações escores idênticas, comprometendo a estimação do modelo.

Nesse contexto, o resultado a seguir mostra que não há problemas de identificabilidade na família OLLGQ-G proposta.

Proposição 1 A função densidade de probabilidade (3.3) é injetiva.

Demonstração. Seja $f(x; \alpha_1, q_1, \tau) = f(x; \alpha_2, q_2, \tau)$ dada em (3.3) e $1 - G(x; \tau) = \kappa(x)$, $1 - G(q) = \kappa(q)$ e $1 - u = \mathcal{U}$. Obtemos:

$$\frac{\alpha_1 G^{\alpha_1}(q_1) G^{\alpha_1-1}(x) \kappa^{\alpha_1-1}(x)}{\kappa^{\alpha_1}(q_1) [G^{\alpha_1}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_1}(q_1) \kappa^{\alpha_1}(x)]^2} = \frac{\alpha_2 G^{\alpha_2}(q_2) G^{\alpha_2-1}(x) \kappa^{\alpha_2-1}(x)}{\kappa^{\alpha_2}(q_2) [G^{\alpha_2}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_2}(q_2) \kappa^{\alpha_2}(x)]^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_1 G^{\alpha_1}(q_1)}{\alpha_2 G^{\alpha_2}(q_2)} G^{\alpha_1-\alpha_2}(x) \kappa^{\alpha_1-\alpha_2}(x) = \frac{\kappa^{\alpha_1}(q_1)}{\kappa^{\alpha_2}(q_2)} \left[\frac{G^{\alpha_1}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_1}(q_1) \kappa^{\alpha_1}(x)}{G^{\alpha_2}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_2}(q_2) \kappa^{\alpha_2}(x)} \right]^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_1 [G(q_1)G(x)\kappa(x)]^{\alpha_1} \kappa^{\alpha_2}(q_2)}{\alpha_2 [G(q_2)G(x)\kappa(x)]^{\alpha_2} \kappa^{\alpha_1}(q_1)} \left[\frac{G^{\alpha_2}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_2}(q_2) \kappa^{\alpha_2}(x)}{G^{\alpha_1}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_1}(q_1) \kappa^{\alpha_1}(x)} \right]^2 = 1.$$

Sejam $B(\alpha_1, q_1, x) = [G(q_1)G(x)\kappa(x)\kappa(q_1)^{-1}]^{\alpha_1}$, $B(\alpha_2, q_2, x) = [G(q_2)G(x)\kappa(x)\kappa(q_2)^{-1}]^{\alpha_2}$, $C(x, \alpha_2, q_2) = G^{\alpha_2}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_2}(q_2) \kappa^{\alpha_2}(x)$ e $C(x, \alpha_1, q_1) = G^{\alpha_1}(x) + \mathcal{U} G^{\alpha_1}(q_1) \kappa^{\alpha_1}(x)$.

Logo,

$$\frac{\alpha_1 B(\alpha_1, q_1, x)}{\alpha_2 B(\alpha_2, q_2, x)} \left[\frac{C(x, \alpha_2, q_2)}{C(x, \alpha_1, q_1)} \right]^2 = 1.$$

Como a função G é injetiva, uma potência de G também é injetiva, logo, para a equação acima ser igual a 1, temos que o numerador é igual ao denominador, como consequência $(\alpha_1, q_1) = (\alpha_2, q_2)$. \square

Formalizada a nova família, este capítulo apresenta a seguir uma nova distribuição de probabilidade obtida através da distribuição exponencial como *baseline*. Mesmo apresentando fdp e fda extensas elas não apresentam funções matemáticas complexas, o que torna a família de distribuições tratável. Além disso, a família OLLG-G, que originou a família OLLGQ-G, apresentou resultados relevantes quando aplicada a conjuntos de dados reais, como mostrado em LIMA *et al.* (2019).

3.2 DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA GEOMÉTRICA REPARAMETRIZADA PELA QUANTÍLICA EXPONENCIAL

Para o desenvolvimento de uma nova distribuição de probabilidade pertencente à família OLLGQ-G, foi escolhida como *baseline* a distribuição exponencial. Devido à sua simplicidade,

a distribuição exponencial é amplamente utilizada na literatura como base para novas distribuições de probabilidade.

Alguns trabalhos que usaram a distribuição exponencial como *baseline* são citados a seguir: a distribuição beta generalizada exponencial foi proposta por BARRETO-SOUZA *et al.* (2008). A distribuição exponencial foi utilizada como *baseline* no modelo *cox PH* em PAREKH (2015). A distribuição Weibull-Exponencial foi desenvolvida em OGUNTUNDE (2015). M. MANSOOR *et al.* (2016) propuseram à literatura a distribuição Marshall-Olkin logística - exponencial. OGUNTUNDE *et al.* (2017) desenvolveram uma nova distribuição de probabilidade aplicando a distribuição exponencial à família Burr X. LIMA *et al.* (2018) propuseram a distribuição Nadarajah-Haghighi exponencial. AWODUTIRE (2022) utilizou a distribuição exponencial como base para propor a distribuição Chen Exponencializada Exponencial.

A função densidade e a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X que segue uma distribuição exponencial são dadas, respectivamente, por

$$g(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ e } G(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (3.6)$$

em que $\lambda > 0$ é parâmetro de taxa e $x > 0$.

Substituindo as Equações (3.6) nas Equações (3.3) e (3.4), obtemos a função densidade e a função distribuição acumulada de uma nova distribuição chamada odd log-logística geométrica reparametrizada pela quantílica exponencial (OLLGQ-Exp), respectivamente.

Definição: Seja $X \sim \text{OLLGQ-Exp}(x; \alpha, q, \lambda)$ uma variável aleatória. A fdp e fda de X são dadas, respectivamente, por

$$f(x; \alpha, q, \lambda) = \frac{\alpha \lambda u^{-1} (1-u) (1-e^{-\lambda q})^\alpha (1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda \alpha (x-q)}}{[(1-e^{-\lambda x})^\alpha + u^{-1} (1-u) (1-e^{-\lambda q})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x-q)}]^2} \quad (3.7)$$

e

$$F(x; \alpha, q, \lambda) = \frac{(1-e^{-\lambda x})^\alpha}{(1-e^{-\lambda x})^\alpha + u^{-1} (1-u) (1-e^{-\lambda q})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x-q)}}, \quad (3.8)$$

em que u é o argumento da função quantílica.

De maneira análoga, a função taxa de falha da distribuição OLLGQ-Exp é dada por

$$h(x; \alpha, q, \lambda) = \frac{\alpha \lambda u e^{-\lambda \alpha q} (1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} [u e^{-\lambda \alpha q} (1-e^{-\lambda x})^\alpha + (1-u) (1-e^{-\lambda q})^\alpha e^{-\lambda \alpha x}]}{[u e^{-\lambda \alpha q} (1-e^{-\lambda x})^\alpha + (1-u) (1-e^{-\lambda q})^\alpha e^{-\lambda \alpha x}]^2}. \quad (3.9)$$

Note que (3.7) e (3.8) não apresentam em suas estruturas nenhuma função especial (como a função gama ou beta incompleta), o que torna a distribuição mais fácil de ser trabalhada.

A função quantílica também foi calculada e é dada por

$$Q(x) = -\lambda^{-1} \log \left[\frac{\left(\frac{1}{kx} - \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1 + \left(\frac{1}{kx} - \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \right],$$

em que $k = u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q})^{\alpha} e^{\lambda \alpha q}$.

A mediana da distribuição pode ser calculada usando a equação

$$Q(0.5) = \frac{\log(k^{1/\alpha} + 1)}{\lambda}.$$

Para ilustrar a flexibilidade da distribuição proposta, foram estudadas as formas assumidas por sua densidade para diferentes configurações paramétricas.

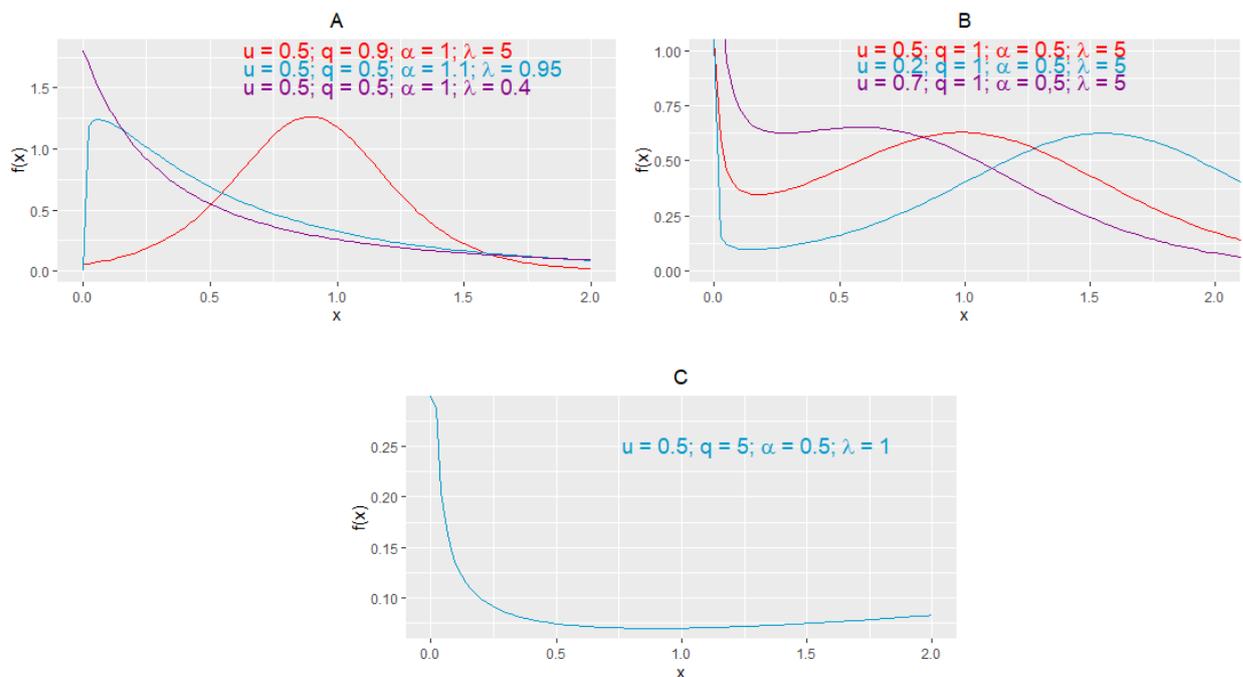


Figura 1 – Formas para função densidade de probabilidade da distribuição OLLGQ-Exp.

Fonte: A autora (2025).

Formas variadas para a densidade indicam distribuições versáteis, isto é, distribuições capazes de se ajustar eficientemente a um maior número e mais variados tipos de bancos de dados.

Na Figura 1 é possível observar que a densidade da nova distribuição apresenta diversas formas: decrescente, unimodal, decrescente-crescente-decrescente e decrescente-crescente. Isso

caracteriza a distribuição proposta como uma distribuição flexível e que pode se adequar a diversos problemas reais.

A função taxa de falha de uma distribuição, também conhecida como função de risco, é a função que modela o tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse. Formas variadas para a função taxa de falha também caracterizam distribuições capazes de se adequar a conjuntos de dados de naturezas distintas. Em outras palavras, indicam distribuições flexíveis.

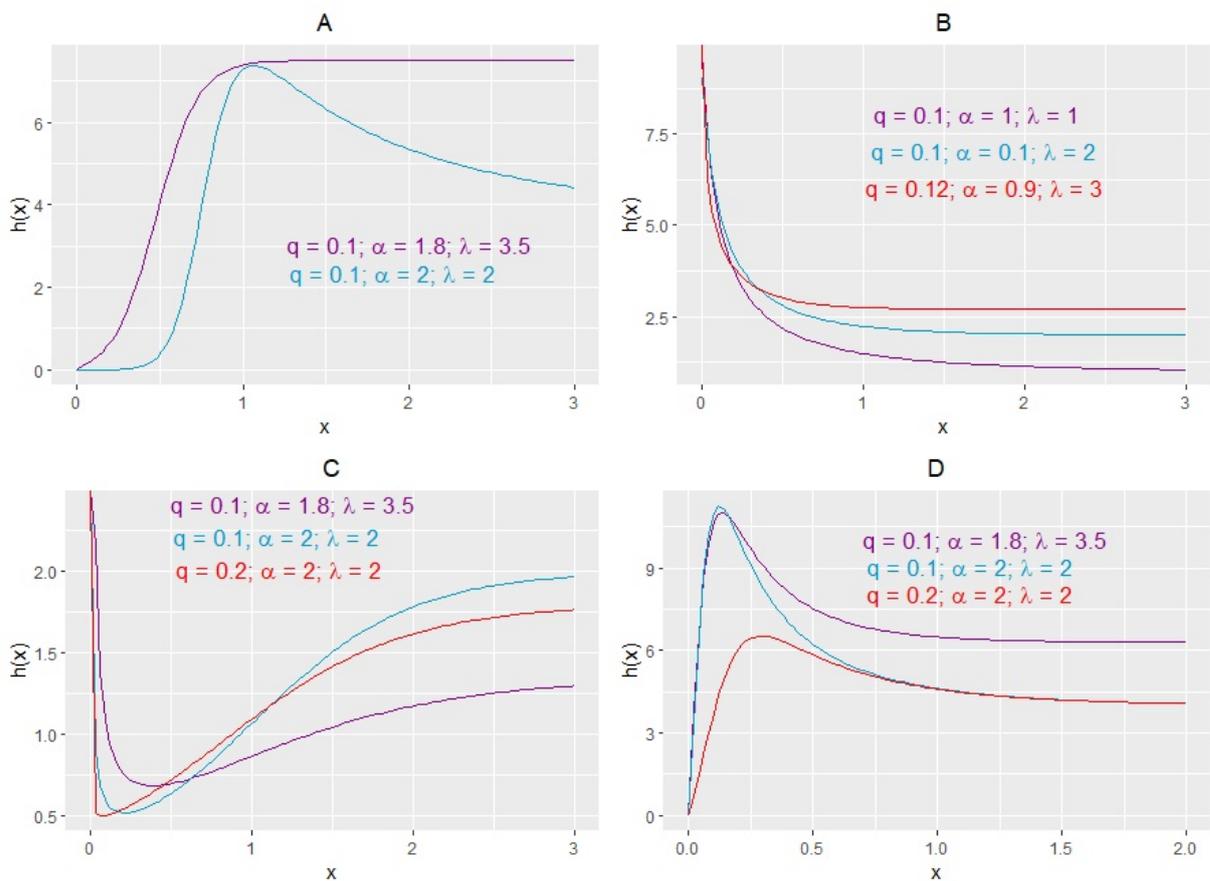


Figura 2 – Formas para função taxa de falha da distribuição OLLQG-Exp.

Fonte: A autora (2022).

A Figura 2 ilustra as diferentes formas que a função taxa de falha da distribuição OLLQG-Exp apresenta. São elas: crescente, decrescente, unimodal e banheiras.

Outra função que é muito utilizada no campo de novas distribuições e na área de análise de sobrevivência é a função de sobrevivência definida como o complementar da função distribuição acumulada para o tempo $t > 0$ até a falha.

Seja $S_T(\cdot)$ a função de sobrevivência, temos que

$$S_T(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

Definida a função $S_T(\cdot)$, a função taxa de falha pode ser calculada através de

$$h(t) = \frac{f(t)}{S_T(t)}.$$

O n -ésimo momento de $X \sim \text{OLLGQ-Exp}(x; \alpha, q, \lambda)$ é dado por

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{\alpha\lambda(1-u)}{u^{-1}} (1 - e^{-\lambda q})^\alpha e^{-\lambda\alpha q} \eta(x; \alpha, q, \lambda, n),$$

em que,

$$\eta(x; \alpha, q, \lambda, n) = \int_0^\infty \frac{x^n (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\alpha\lambda x}}{[(1 - e^{-\lambda q})^\alpha u^{-1} (1 - u) e^{-\alpha\lambda(x-q)} + (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^2} dx.$$

Não foi possível obter os momentos de forma fechada ou expansões através de funções matemáticas conhecidas. Os primeiros quatro momentos (respectivamente, μ'_1 , μ'_2 , μ'_3 e μ'_4), a variância, a assimetria e a curtose da distribuição OLLGQ-Exp foram calculados via integração numérica através do *software* R. Foram avaliados dez cenários: $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $q = 1$, $\lambda = 1, 5$ e $u = 0, 5$ fixos, $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $q = 1$, $\alpha = 1$ e $u = 0, 5$ fixos e $q \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $\alpha = 1$, $\lambda = 1, 5$ e $u = 0, 5$ fixos.

Tabela 1 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $q = 1$, $\lambda = 1.5$, $u = 0.5$ e variando os valores de α .

α	μ'_1	μ'_2	μ'_3	μ'_4	Variância	Assimetria	Curtose
1	1,1668	2,1071	5,008	14,6886	0,7456	0,1347	6,7714
2	1,0461	1,2993	1,8640	3,0551	0,2049	0,0265	5,5382
3	1,0209	1,1364	1,3599	1,7847	0,0941	-0,0206	5,0375
4	1,0118	1,0776	1,2050	1,4146	0,0538	-0,0463	4,9230

Fonte: A autora (2022).

Tabela 2 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $q = 1$, $\alpha = 1$, $u = 0, 5$ e variando os valores de λ .

λ	μ'_1	μ'_2	μ'_3	μ'_4	Variância	Assimetria	Curtose
1	1,1668	2,1071	5,008	14,6886	0,7456	0,1347	6,7714
2	1,0993	1,7106	3,3331	7,7880	0,5021	0,0066	5,6477
3	1,0312	1,3557	2,0781	3,6457	0,2923	-0,4110	4,6173
4	1,0143	1,2072	1,6152	2,3945	0,1783	-0,8931	4,2594

Fonte: A autora (2025).

Tabela 3 – Valores dos quatro primeiros momentos, variância, assimetria e curtose para a distribuição OLLGQ-Exponencial para $\alpha = 1$, $\lambda = 1, 5$, $u = 0, 5$ e variando os valores de q .

q	μ'_1	μ'_2	μ'_3	μ'_4	Variância	Assimetria	Curtose
1	1,1668	2,1071	5,008	14,6886	0,7456	0,1347	6,7714
2	2,0746	5,4230	16,6248	58,3324	1,1190	0,0066	4,6173
3	3,0265	10,4801	40,1627	168,3817	1,3203	-0,0606	4,1898
4	4,00838	17,4768	81,5796	405,2626	1,4103	-0,0945	4,1468

Fonte: A autora (2022).

Nas tabelas 1 e 2, podemos notar que a medida que o valores de α e λ aumentam, os quatro primeiros momentos diminuem se aproximando de 1, enquanto a variância se aproxima de 0. A assimetria e a curtose também diminuem ao passo que α e λ aumentam. As variações de α e λ apresentadas mostram um padrão de comportamento dos momentos, variância, assimetria e curtose quando fixados os demais parâmetros.

Na tabela 3, os quatro primeiros momentos aumentam significativamente conforme q aumenta com o valor esperado se aproximando do valor de q . A medida que q aumenta, o valor da variância também aumenta, porém com uma taxa de crescimento menor se comparado ao crescimento dos momentos. Já a assimetria e a curtose diminuem com o aumento de q , também apresentando uma sensibilidade menor ao valor do parâmetro, quando comparado aos momentos.

A função geradora de momento (fgm) definida como $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$, fornece todos os momentos de uma variável aleatória e, além disso, a fgm determina a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória.

Para $X \sim \text{OLLGQ-Exp}$, é possível obter

$$M_X(t) = \frac{\alpha\lambda(1-u)}{u^{-1}}(1 - e^{-\lambda q})^\alpha e^{\lambda\alpha q} \eta^*(x; \alpha, q, \lambda),$$

em que

$$\eta^*(x; \alpha, q, \lambda) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{x(t-\alpha\lambda)}}{[(1 - e^{-\lambda q})^\alpha u^{-1} (1 - u) e^{-\alpha\lambda(x-q)} + (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^2} dx.$$

Concluída a construção e a apresentação de algumas propriedades estruturais relevantes para a literatura da nova distribuição OLLGQ-Exp, o próximo capítulo apresenta o desenvolvimento de um novo processo ARMA baseado na distribuição proposta.

O capítulo 3 apresentou a construção de uma nova família de distribuições a partir da reparametrização de uma família já existente na literatura. A nova família, agora denominada

OLLGQ-G, foi utilizada como geradora da distribuição OLLGQ-Exp. Propriedades estruturais tanto da família quanto da nova distribuições foram desenvolvidas e discutidas. A flexibilidade da OLLGQ-Exp foi estudada através de uma análise gráfica da sua função densidade e taxa de falha.

4 A CONSTRUÇÃO DE UM NOVO PROCESSO ARMA

Processos autorregressivos de médias móveis (ARMA) podem ser entendidos como processos mistos por terem em suas composições parcelas autorregressivas (AR) e parcelas de médias móveis (MA). A fração autorregressiva do modelo é responsável pela regressão da variável em seus próprios valores defasados. A componente de médias móveis relaciona o erro do processo com uma combinação linear dos erros passados. De maneira geral, um processo ARMA que apresenta p parcelas autorregressivas e q parcelas de médias móveis é denotado por processo ARMA(p, q).

Para propor um processo ARMA(p, q) condicional com distribuição marginal OLLGQ-Exp é preciso definir a componente sistemática do processo, preditor linear com estrutura do modelo ARMA(p, q), e uma função conhecida como função de ligação, que relaciona o preditor linear com a componente aleatória.

Sejam $\{x_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal observada, $q_t = q_t(u) = F^{-1}(u|\mathcal{F}_{t-1})$ o quantil u da distribuição OLLGQ-Exp no instante t e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por informações observadas até o tempo t . A componente sistemática assumida foi desenvolvida em BENJAMIN *et. al* (2003) e é dada por

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\theta}_k r_{t-k}, \quad (4.1)$$

em que $g(\cdot)$ é a função de ligação estritamente monótona e duplamente diferenciável, que associa q_t ao preditor linear η_t , $r_t = g(x_t) - g(q_t)$ é o erro de natureza determinística do processo, δ é o intercepto, $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^k$, $t = 1, \dots, n$, representa k séries temporais que ocorrem de maneira simultânea a x_t , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é o vetor de parâmetros desconhecido correspondente a \mathbf{z}_t , ϕ_i , $i = 1, \dots, p$, é o vetor de parâmetros associado a parcela autorregressiva e $\boldsymbol{\theta}_k$, $k = 1, \dots, q$, é o vetor de parâmetros correspondente a parcela de médias móveis do modelo.

A partir de (4.1) é possível obter os casos particulares do processo ARMA(p, q). O modelo AR(p) é obtido fazendo $\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{0}$, $\forall k$, ou seja, anulando a parcela correspondente às médias móveis do modelo. Dessa maneira, obtém-se o seguinte preditor linear

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}].$$

De maneira análoga, é possível obter o modelo MA(q) através de (4.1), tomando $\phi_i = \mathbf{0}$,

$\forall i,$

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\theta}_k r_{t-k}.$$

Definida uma função de ligação, q_t é calculado a partir da inversa de $g(\cdot)$: $q_t = g^{-1}(\eta_t)$. Algumas funções como a função logarítmica, transformação Box-Cox, identidade, função recíproca e log-log complementar são alguns exemplos de funções de ligação usados na literatura.

A partir dos valores de q_t , $t = 1, \dots, n$, é possível obter uma série gerada pelo processo ARMA(p, q) proposto, como será detalhado adiante. A componente aleatória é definida abaixo.

Definição: Sejam $\{X_t; t = 1, \dots, n\}$ variáveis aleatórias que seguem a distribuição OLLGQ-Exp($x; \alpha, q(u), \lambda$) e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por dados observados ao longo do tempo. Seja \mathcal{F}_{t-1} o conjunto das observações anteriores, temos que $X_t | \mathcal{F}_{t-1}$ segue a distribuição OLLGQ-Exp($x_t; \alpha, q_t(u), \lambda$). Ou seja,

$$f(X_t | \mathcal{F}_{t-1}; \alpha, q_t(u), \lambda) = \frac{\alpha \lambda u^{-1} (1-u) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1} e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)}}{[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1} (1-u) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)}]^2}. \quad (4.2)$$

Estabelecida a componente sistemática (4.1) e a componente aleatória (4.2), obtém-se o processo OLLGQ-Exp ARMA(p, q). Para ilustrar o processo definido, é possível discutir os resultados obtidos pela geração de valores dos casos especiais OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1) e OLLGQ-Exp ARMA(1,1).

Tais resultados são obtidos a partir de (4.1) para os valores de ϕ_i , $\boldsymbol{\theta}_k$, p e q correspondentes a cada processo.

I. OLLGQ-Exp AR(1): $g(q_t) = \delta + \phi g(x_{t-1})$;

II. OLLGQ-Exp MA(1): $g(q_t) = \delta + \theta [g(x_{t-1}) - g(q_{t-1})]$;

III. OLLGQ-Exp ARMA(1,1): $g(q_t) = \delta + \phi g(x_{t-1}) + \theta [g(x_{t-1}) - g(q_{t-1})]$.

Para os casos parculares acima definidos, não serão consideradas nenhuma outra série temporal z_t que ocorra simultaneamente às séries geradas pelas propostas nesse trabalho.

4.1 PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(p, q) COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO LOGARÍTMICA

Nessa seção, serão estudados os casos especiais para o processo OLLGQ-Exp ARMA(p, q) com função de ligação logarítmica: $g(q_t) = \log(q_t)$. A função de ligação logarítmica é muito utilizada para gerar distribuições estritamente positivas por não fornecer valores negativos para $g^{-1}(\cdot)$. Podemos obter os casos especiais reescrevendo as equações I, II e III supracitadas como

- I. OLLGQ-Exp AR(1): $q_t = \exp [\delta + \phi \log(x_{t-1})]$;
 II. OLLGQ-Exp MA(1): $q_t = \exp [\delta + \theta(\log(x_{t-1}) - \log(q_{t-1}))]$;
 III. OLLGQ-Exp ARMA(1,1): $q_t = \exp [\delta + \phi \log(x_{t-1}) + \theta(\log(x_{t-1}) - \log(q_{t-1}))]$.

ZUUR *et al.* (2009) estudaram diversos modelos com função de ligação logarítmica. KLEFER & MAYER (2019) avaliaram os efeitos médios de um tratamento em uma variável de contagem com base em regressões com função de ligação logarítmica. O uso de tal função de ligação foi amplamente estudado em NAIMI & WHITCOMB (2020) na aplicação de modelos lineares generalizados para quantificar os riscos, taxas de riscos e seus erros padrões apropriados. BRITO (2021), CHAVES (2021) e GOMES (2021) utilizaram a função de ligação logarítmica na proposta de novos processos ARMA(p, q).

A Figura 3 apresenta uma série de 200 observações gerada a partir do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação logarítmica, a função de autocorrelação (FAC) e a função de autocorrelação parcial (FACP), respectivamente. A configuração paramétrica utilizada foi: $(\alpha, \lambda, \delta, u, \phi) = (1,5; 1; 0,5; 0,5; \phi)$, em que $\phi = 0,2$ tem os gráficos representados por A, B e C , na ordem supracitada, e $\phi = 0,8$ tem os resultados representados em A^*, B^* e C^* .

Fonte: A autora (2024).

Figura 3 – Série gerada, FAC e FACP do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$.

A FAC descreve como o valor presente se relaciona com as observações anteriores. O comportamento da FAC em um processo AR(1) é de decrescimento exponencial para zero a medida que o atraso ou *lag* aumenta. Isso significa que quanto mais distante uma observação está do valor presente, menor é seu impacto no referido. Analisando a Figura 3, é observado que quanto maior for o valor de ϕ , mais evidente é o comportamento supracitado.

Em contrapartida, a função de autocorrelação parcial (FACP) relaciona o valor presente com o valor k passos à frente removendo as dependências das variáveis intermediárias. Essa função é utilizada na identificação da ordem de modelos autorregressivos, os valores de pico apontam qual *lag* apresenta maior impacto nas demais observações da série. A Figura 3 ilustra o comportamento de processos AR(1), sendo mais evidente para o maior valor de ϕ .

De maneira análoga, foram gerados, respectivamente, os gráficos da Figura 4 para a série geradas a partir do modelo OLLGQ-Exp MA(1), FAC e PACF do processo com seguinte configuração paramétrica: $(\alpha, \lambda, \delta, u, \theta) = (1,5; 1; 0,5; 0,5; \theta)$, em que $\theta = 0,2$ tem os

gráficos representados por A , B e C , na ordem supracitada, e $\theta = 0,8$ tem os resultados representados em A^* , B^* e C^* .

Fonte: A autora (2024).

Figura 4 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$.

O valor acentuado no primeiro atraso para a FAC é característico dos modelos MA(1) juntamente com valores da FACP próximos ou tendendo a zero. Esses comportamentos podem ser observado na Figura 4.

Para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1), são apresentadas, na Figura 5, respectivamente, a série gerada, o ACF e o PACF do processo para os parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, u, \phi, \theta) = (1,5; 1; 0,5; 0,5; \phi; \theta)$, em que $(\phi, \theta) = (0,2; 0,2)$ tem os gráficos representados por A , B e C , na ordem supracitada, e $(\phi; \theta) = (0,8; 0,8)$ tem os resultados representados em A^* , B^* e C^* .

Fonte: A autora (2024).

Figura 5 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$.

A função de autocorrelação de um processo ARMA(1,1), assim como nos processos autorregressivos, apresenta um comportamento de decrescimento para zero, como pode ser observado na Figura 5.

Foi observado que os valores dos parâmetros não afetam a natureza do processo, tendo seu comportamento mantido independente do cenário utilizado. O que ocorre é que para determinadas configurações paramétricas os comportamentos que se desejam ilustrar se tornam mais acentuados. Os cenários escolhidos foram aqueles que forneciam mais claramente tais comportamentos.

4.2 PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(p,q) COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO DO TIPO BOX-COX

A função Box-Cox (BOX & COX, 1964) transforma dados não normais em dados com comportamentos mais próximos do comportamento esperado por observações geradas pela distribuição normal. A função Box-Cox foi usada como função de ligação para o modelo de

teste de vida proposto por FAN *et al.* (2008). A função Box-Cox pode fornecer uma forma flexível adequada para g em (4.1) (BENJAMIN *et. al*, 2003).

Segue a função de ligação baseada na transformação Box-Cox.

$$g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}, \quad (4.3)$$

em que $\gamma \neq 0$ é um parâmetro adicional que pode ser escolhido de maneira automatizada ou por tentativa, como feito neste trabalho.

Assim como foi feito para os processos com função de ligação logarítmica, podemos obter os casos especiais do processo ARMA(p, q) substituindo a Equação (4.3) na Equação (4.1).

Os processos obtidos são

$$\text{I. OLLGQ-Exp AR(1): } q_t = \left\{ \gamma \left[\delta + \phi \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) \right] + 1 \right\}^{\frac{1}{\gamma}};$$

$$\text{II. OLLGQ-Exp MA(1): } q_t = \left\{ \gamma \left[\delta + \theta \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} - \frac{q_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) \right] + 1 \right\}^{\frac{1}{\gamma}};$$

$$\text{III. OLLGQ-Exp ARMA(1,1): } q_t = \left\{ \gamma \left[\delta + \phi \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) + \theta \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} - \frac{q_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) \right] + 1 \right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

De maneira semelhante, as ilustrações feitas para os casos especiais com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$, os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1) e OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação dada por (4.3) foram ilustrados abaixo.

A Figura 6 apresenta uma série de 200 observações gerada a partir do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação Box-Cox ($\gamma = 0,5$), a FAC e a FACP, respectivamente. A configuração paramétrica utilizada foi: $(\alpha; \lambda; \delta, u, \phi) = (1,5; 1; 0,5; 0,5; \phi)$, em que $\phi = 0,2$ tem os gráficos representados por A, B e C , na ordem supracitada, $\phi = 0,8$ tem os resultados representados em A^*, B^* e C^* e $\phi = -0,8$ tem os resultados representados em A^{**}, B^{**} e C^{**} .

Fonte: A autora (2024).

Figura 6 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$.

Da mesma forma como foi observado na Figura (3), o decrescimento exponencial para zero da FAC a medida que o *lag* aumenta fica mais evidente para maiores valores de ϕ , o que é esperado, já que é o parâmetro associado ao comportamento autorregressivo. O mesmo ocorre com a FACP.

Também foi analisado o comportamento do modelo OLLGQ-Exp AR(1) quando ϕ assume valores negativos. O comportamento alternado e afilado da FAC é característico de processos AR(1) com parâmetros negativos e pode ser observado na Figura (6). Da mesma forma, a Figura 7 representa, respectivamente, a série gerada a partir do modelo OLLGQ-Exp MA(1), ACF e PACF do processo.

Fonte: A autora (2024).

Figura 7 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$.

Assim como observado na Figura (4), o comportamento do processo OLLGQ-Exp MA(1) é verificado na Figura (8) para função de ligação Box-Cox.;

Para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1), são apresentadas na Figura 8, respectivamente, as séries geradas, o ACF, o PACF dos processos para as configurações paramétricas: $(\alpha; \lambda; \delta; u; \phi; \theta) = (1,5; 1; 0,5; 0,5; \phi; \theta)$, em que $(\phi; \theta) = (0,2; 0,2)$ tem os gráficos representados por A, B e C , na ordem supracitada, $(\phi; \theta) = (0,8; 0,8)$ tem os resultados representados em A^*, B^* e C^* e $(\phi; \theta) = (-0,8; -0,8)$ tem os resultados representados em A^{**}, B^{**} e C^{**} .

Fonte: A autora (2024).

Figura 8 – Série gerada, ACF e PACF do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1.1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$.

4.3 ESTIMAÇÃO DOS CASOS ESPECIAIS DO PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA

4.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma realização do processo OLLGQ-Exp ARMA(p, q). A função de log-verossimilhança condicional associada à Equação (4.2) é dada por

$$l(\boldsymbol{\pi}, x_t) = \log \left(\prod_{t=m+1}^n f_{X_t | \mathcal{F}_{t-1}}(\boldsymbol{\pi}) \right) = \sum_{t=m+1}^n l_t(\boldsymbol{\pi}; x_t),$$

em que $\boldsymbol{\pi} = (\alpha, \lambda, \boldsymbol{\beta}^\top, \delta, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top)$ é o vetor de parâmetros e l_t é dada por

$$l_t(\boldsymbol{\pi}) = \log(\alpha) + \log(\lambda) - \log(u) + \log(1 - u) + \alpha \log(1 - e^{-\lambda q_t}) + (\alpha - 1) \log(1 - e^{-\lambda x_t}) - \lambda \alpha (x_t - q_t) - 2 \log \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1} (1 - u) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} \right].$$

Os valores que maximizam a função acima, denotados de estimadores de máxima verossimilhança, são obtidos com a resolução do sistema de equações $\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}\right) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Aqui $U(\boldsymbol{\pi}) = \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}\right]$ será denominado de vetor escore.

Proposição: Seja $U(\boldsymbol{\pi})$ o vetor escore correspondente a realização do processo $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Podemos escrever o vetor escore como segue

$$U(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right],$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} + \log(1 - e^{-\lambda q_t}) + \log(1 - e^{-\lambda x_t}) - \lambda(x_t - q_t) \\ &- \frac{2(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}} \\ &+ \frac{2\lambda e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(x_t - q_t)u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{1 - e^{-\lambda q_t}} q_t e^{-\lambda q_t} + \frac{\alpha - 1}{1 - e^{-\lambda x_t}} x_t e^{-\lambda x_t} - \alpha(x_t - q_t) \\ &- \frac{2\alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1}}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}} \\ &- \frac{-2u^{-1}(1 - u)\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [q_t e^{-\lambda q_t} (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + x_t - q_t]}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}; \end{aligned} \text{to}$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(z_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-1}^\top - \sum_{k=1}^q \theta_k \frac{\partial \eta_{t-k}}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right);$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(1 - \sum_{k=1}^q \theta_k \frac{\partial \eta_{t-k}}{\partial \delta} \right);$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}_i} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(g(x_{t-1}) - z_{t-1}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{k=1}^q \theta_k \frac{\partial \eta_{t-k}}{\partial \phi_i} \right)$$

e

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}_l} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(r_{t-l} - \sum_{k=1}^q \theta_k \frac{\partial \eta_{t-k}}{\partial \theta_l} \right).$$

Decorrente da regra da cadeia, note que

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \boldsymbol{\eta}_t} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_t}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top};$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta};$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i}$$

e

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \theta_k} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_k},$$

em que

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} = \frac{\alpha \lambda}{1 - e^{-\lambda q_t}} e^{-\lambda q_t} + \lambda \alpha - \frac{2\lambda \alpha u^{-1}(1-u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \left[(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1 \right]}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1-u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}.$$

Como não foi possível obter os estimadores através de formas fechadas, a estimação dos parâmetros foi realizada através da função *optim* do *software* R. O método utilizado foi o *Nelder-Mead*, cujo custo computacional (tempo de execução), quando comparado a outros métodos, como *BFGS*, foi menor. Os resultados numéricos obtidos serão apresentados no que segue.

4.3.2 Resultados Numéricos

Para analisar a performance e a qualidade dos estimadores de máxima verossimilhança, foi priorizado o aumento gradativo dos tamanhos amostrais para avaliar as propriedades assintóticas dos estimadores. Com o objetivo de trazer maiores tamanhos amostrais em diferentes configurações paramétricas, para essa análise ser viável, com relação ao custo computação, foram realizadas simulações com 1.000 réplicas de uma simulação de Monte Carlo.

Os estimadores foram avaliados em diferentes cenários, com tamanhos amostrais de 50, 100, 200, 400 e 800, Foram calculados valores de média, viés, viés relativo e erro quadrático médio (EQM) dos estimadores.

A Tabela 4 fornece a média e o erro quadrático médio (em parênteses) dos estimadores para os processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ para dois diferentes cenários, onde foi feita uma variação no valor de ϕ .

Tabela 4 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$

Cenários	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\delta}$
(1; 0,5; 0,8 ; 0,5)	50	0,9462 (0,2332)	0,7143 (0,3245)	0,7373 (0,0144)	0,6272 (0,0917)
	100	0,9655 (0,1450)	0,6033 (0,0830)	0,7703 (0,0055)	0,5670 (0,0379)
	200	0,9887 (0,0782)	0,5524 (0,0405)	0,7828 (0,0027)	0,5407 (0,0196)
	400	0,9980 (0,0335)	0,5176 (0,0091)	0,7914 (0,0012)	0,5193 (0,0092)
	800	0,9985 (0,0138)	0,5068 (0,0033)	0,7966 (0,0005)	0,5078 (0,0040)
	50	1,0433 (0,1747)	0,5332 (0,0187)	0,1715 (0,0201)	0,4687 (0,0659)
	100	1,0197 (0,0750)	0,5161 (0,0078)	0,1864 (0,0097)	0,4843 (0,0324)
	200	1,0154 (0,0369)	0,5066 (0,0038)	0,1902 (0,0051)	0,4950 (0,0162)
	400	1,0103 (0,0335)	0,5011 (0,0091)	0,7914 (0,1964)	0,5193 (0,4955)
	800	1,0089 (0,0084)	0,4990 (0,0008)	0,2000 (0,0011)	0,4977 (0,0033)

Fonte: A autora (2024).

A Tabela 5 apresenta a média e o EQM para as estimativas do processo ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$. Foram feitas variações nos valores verdadeiros dos parâmetros α , ϕ e θ .

Tabela 5 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$

Cenários	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\delta}$
(1; 0,5; 0,2; 0,2; 0,5)	50	1,0701 (0,00009)	0,5386 (0,00002)	0,1340 (0,00008)	0,2345 (0,00002)	0,4840 (0,00005)
	100	1,0299 (0,000008)	0,5147 (0,000002)	0,1700 (0,000008)	0,2163 (0,000002)	0,4893 (0,000001)
	200	0,9969 (0,00000004)	0,5116 (0,0000006)	0,1915 (0,0000001)	0,2038 (0,0000003)	0,4945 (0,00000007)
	400	1,0050 (0,000000006)	0,5034 (0,000000003)	0,1933 (0,00000001)	0,2034 (0,000000004)	0,4931 (0,00000001)
	800	1,0021 (0,000000005)	0,5017 (0,000000003)	0,1970 (0,00000001)	0,2009 (0,000000001)	0,5011 (0,000000001)
	50	0,9944 (0,0000006)	2,2286 (0,0106)	0,7742 (0,00001)	0,8563 (0,00006)	0,5578 (0,00006)
	100	0,9461 (0,00002)	2,1389 (0,0040)	0,7886 (0,000001)	0,8153 (0,000002)	0,5343 (0,00001)
	200	0,9225 (0,00002)	2,0141 (0,0013)	0,7903 (0,0000004)	0,8065 (0,0000002)	0,5235 (0,000002)
	400	0,9418 (0,00001)	2,0023 (0,0001)	0,7983 (0,0000001)	0,8055 (0,0000001)	0,5212 (0,0000001)
	800	0,8983 (0,00001)	1,8584 (0,0001)	0,7962 (0,00000001)	0,8011 (0,000000001)	0,5096 (0,00000001)

Fonte: A autora (2024).

Estimadores de parâmetros consistentes são aqueles em que, na medida em que aumentamos o tamanho amostral, as estimativas se aproximam dos valores verdadeiros dos parâmetros, enquanto o erro quadrático médio se aproxima de zero. Portanto, pelos resultados apresentados nas Tabelas 4 e 5, podemos concluir que os estimadores de máxima verossimilhança para os casos especiais dos processos OLLGQ-Exponencial ARMA apresentam o comportamento esperado. Também é observado que os estimadores de máxima verossimilhança para o processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) são os que apresentam os menores valores de EQM quando comparados com os resultados obtidos para o processo OLLGQ-Exp AR(1).

Os estimadores de máxima verossimilhança para os casos especiais do processo OLLGQ-Exp ARMA também foram avaliados quando tais processos apresentam como função de ligação a função dada em (4.3).

Simulações de Monte Carlo com 1.000 réplicas foram realizadas para fornecer a média e o EQM do processo OLLGQ-Exp AR(1) e ARMA(1,1) com função de ligação Box-Cox ($\gamma = 0,5$) para os mesmos cenários estudados para o processo gerado pela função de ligação logarítmica.

A Tabela 6 apresenta as médias e os erros quadráticos médios dos estimadores para o processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação do tipo Box-Cox para cinco tamanhos amostrais.

Tabela 6 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$.

Cenários	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\delta}$
(1; 0,5; 0,8 ; 0,5)	50	1,1215 (0,2830)	0,5430 (0,0674)	0,6421 (0,0397)	0,6280 (0,0649)
	100	1,1085 (0,1239)	0,4906 (0,0153)	0,6889 (0,0189)	0,5692 (0,0278)
	200	1,1105 (0,0741)	0,4726 (0,0088)	0,7073 (0,0122)	0,5444 (0,0144)
	400	1,0998 (0,0379)	0,04643 (0,0048)	0,7192 (0,0081)	0,5253 (0,0066)
	800	1,0939 (0,0216)	0,4613 (0,0031)	0,7245 (0,0065)	0,5180 (0,0033)
	50	1,0640 (0,1917)	0,5218 (0,0186)	0,1062 (0,0278)	0,5109 (0,0636)
	100	1,0285 (0,0786)	0,5129 (0,0079)	0,1160 (0,0168)	0,5303 (0,0327)
	200	1,0199 (0,0385)	0,5044 (0,0039)	0,1175 (0,0120)	0,5434 (0,0176)
	400	1,0135 (0,0173)	0,4991 (0,0016)	0,1223 (0,0086)	0,5459 (0,0100)
	800	1,0115 (0,0087)	0,4970 (0,0008)	0,1251 (0,0068)	0,5492 (0,0057)

Fonte: A autora (2024).

De maneira análoga, foram estudados dois diferentes cenários para avaliar a média das estimativas de máxima verossimilhança e seus respectivos erros quadráticos médios através de 1.000 réplicas de Monte Carlo para o processo ARMA(1,1). Os resultados se encontram na Tabela 7.

Tabela 7 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$.

Cenários	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\delta}$
(1; 0,5; 0,2 ; 0,2 ; 0,5)	50	1,0922 (0,0001)	0,5229 (0,00001)	0,1378 (0,00007)	0,2272 (0,00001)	0,5355 (0,00002)
	100	1,0524 (0,00002)	0,5077 (0,0000005)	0,1724 (0,000007)	0,2028 (0,00000008)	0,5333 (0,00001)
	200	1,0185 (0,000001)	0,5067 (0,0000002)	0,1767 (0,000002)	0,2118 (0,0000007)	0,4932 (0,0000002)
	400	1,0160 (0,0000006)	0,5012 (0,000000003)	0,1778 (0,000001)	0,2138 (0,0000004)	0,5009 (0,000000002)
	800	1,0005 (0,0000004)	0,5001 (0,000000001)	0,1781 (0,0000002)	0,2100 (0,0000003)	0,5001 (0,00000006)
(1; 1,5 ; 0,8 ; 0,8 ; 0,5)	50	0,9944 (0,0000006)	2,2286 (0,0106)	0,7742 (0,00001)	0,8563 (0,00006)	0,5578 (0,00006)
	100	0,9461 (0,00002)	2,1389 (0,0040)	0,7886 (0,000001)	0,8153 (0,00002)	0,5343 (0,00001)
	200	0,9225 (0,00002)	2,0141 (0,0013)	0,7903 (0,0000004)	0,8065 (0,0000002)	0,5235 (0,000002)
	400	0,9418 (0,00001)	2,0023 (0,0001)	0,7983 (0,0000001)	0,8055 (0,0000001)	0,5212 (0,0000001)
	800	0,8983 (0,00001)	1,8584 (0,0001)	0,7962 (0,00000001)	0,8011 (0,00000001)	0,5096 (0,0000001)

Fonte: A autora (2024).

A depender da função de ligação utilizada, para certas configurações paramétricas, pode acontecer de não ser possível a geração de valores do processo (BENJAMIN *et al.*, 2003). Dito isso, não foi possível gerar as estimativas para os parâmetros dos processos OLLGQ-Exp MA(1).

4.4 EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO

Considere o processo OLLGQ-Exp ARMA(p,q) com base na Equação (4.1) obtemos

$$q_t = g^{-1} \left\{ \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{k=1}^q \theta_k r_{t-k} \right\}. \quad (4.5)$$

A partir da estimação por máxima verossimilhança e da Equação (4.5), seja H o horizonte de previsão, assumindo que é conhecido os valores futuros das covariáveis z_t , os valores futuros q_{n+h} , $h = 1, 2, \dots, H$ podem ser estimados a partir de

$$\hat{q}_{n+h} = g^{-1} \left\{ \hat{\delta} + \mathbf{z}_{n+h}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i [g(x_{n+h-i}) - \mathbf{z}_{n+h-i}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}] + \sum_{k=1}^q \hat{\theta}_k r_{n+h-k} \right\}, \quad (4.6)$$

em que $\hat{\delta}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\phi}_i$ e $\hat{\theta}_k$ são os estimadores de máxima verossimilhança.

Para os casos especiais AR(1), MA(1), ARMA(1,1) a Equação (4.6) se resume, respectivamente, a

$$\hat{q}_{n+h} = g^{-1} \left\{ \hat{\delta} + \mathbf{z}_{n+h}^\top \hat{\beta} + \hat{\phi}(g(x_{n+h-1}) - \mathbf{z}_{n+h-1}^\top \hat{\beta}) \right\};$$

$$\hat{q}_{n+h} = g^{-1} \left\{ \hat{\delta} + \mathbf{z}_{n+h}^\top \hat{\beta} + \hat{\theta} r_{n+h-1} \right\}$$

e

$$\hat{q}_{n+h} = g^{-1} \left\{ \hat{\delta} + \mathbf{z}_{n+h}^\top \hat{\beta} + \hat{\phi}(g(x_{n+h-1}) - \mathbf{z}_{n+h-1}^\top \hat{\beta}) + \hat{\theta} r_{n+h-1} \right\}.$$

4.4.1 Intervalos de Previsão

A previsão de valores futuros para uma série temporal é muitas vezes dada via estimações pontuais. Uma outra maneira de prever valores futuros é através de intervalos de predição, que diferentemente das estimações pontuais, fornece uma probabilidade associada a cada valor previsto.

Um intervalo de previsão é definido por

$$[LI_h, LS_h],$$

em que LI_h e LS_h são, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo para q_{n+h} . Os limites do intervalo são os valores de mínimo e de máximo que a previsão pode assumir para ser considerada boa previsão.

Proposto por PALM *et al.* (2021), o intervalo aproximado com base na distribuição normal tem limites dados por

$$LI_h = g^{-1} \left\{ g(\hat{q}_{n+h}) + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{n+h}} \right\}$$

e

$$LS_h = g^{-1} \left\{ g(\hat{q}_{n+h}) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{n+h}} \right\},$$

em que $z_{\alpha/2}$ e $z_{1-\alpha/2}$ são os quantis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ da distribuição normal padrão. V_{n+h} é a variância do erro de predição h passos a frente e sua estimativa, \hat{V}_{n+h} , definida por BOX, JENKINS, and REINSEL (2008), é dada por $\hat{V}_{n+h} = (1 + \hat{\Psi}_1^2 + \hat{\Psi}_2^2 + \dots + \hat{\Psi}_{H-1}^2) \hat{\sigma}_{n+h}^2$, com $\hat{\Psi}_i = \hat{\phi}_1 \hat{\Psi}_{j-1} + \dots + \hat{\phi}_{j-p-q} \hat{\Psi}_{j-1} - \hat{\theta}_j$ e $\hat{\sigma}_{n+h}^2 = [g'(\hat{q}_{n+h})]^2 \text{Var}(\hat{q}_{n+h})$.

Para avaliar a eficiência dos intervalos de predição, as taxas de cobertura (CR_h) são calculadas para cada intervalo, a nível de cobertura $1 - \alpha$, seguindo a equação abaixo

$$CR_h = \frac{\#(LI_h < x_{n+h} < LS_h)}{R}$$

em que R é o número de réplicas e $\#(a < x < b)$ é definido como o número de vezes que x assume valor no intervalo (a, b) . Definimos também

$$CRI_h = \frac{\#(LI_h > x_{n+h})}{R}$$

e

$$CRS_h = \frac{\#(x_{n+h} > LS_h)}{R},$$

em que CRI_h e CRS_h são, respectivamente, os limites inferior e superior da taxa de cobertura. Um bom intervalo de predição é aquele em que o valor de CR_h se aproxima do valor $1 - \alpha$. Da mesma forma, é desejável valores de CRI_h e CRS_h próximos de $\alpha/2$.

Outro critério de avaliação de intervalos de predição é a probabilidade de cobertura (PICR), dada por

$$PICR = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H CR_h.$$

Um bom intervalo de predição é aquele que $PICR \approx 1 - \alpha$.

Para avaliar a performance do intervalo de predição aproximado pela normal, consideramos $R = 1.000$ réplicas de Monte Carlo, $\alpha = 0,10$, $n = 100$ o número de observações e $H = 10$ o horizonte de predição, como realizado por PALM *et al.* (2021).

Para cada caso especial do processo OLLGQ-ARMA(p,q), foram realizadas simulações para dois diferentes cenários. A função de ligação utilizada foi $g(\cdot) = \log(\cdot)$. Os seguintes cenários foram analisados

I. OLLGQ-Exp AR(1): $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\phi = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

II. OLLGQ-Exp AR(1): $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

III. OLLGQ-Exp MA(1): $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\theta = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

VI. OLLGQ-Exp MA(1): $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

V. OLLGQ-Exp ARMA(1,1): $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

VI. OLLGQ-Exp ARMA(1,1): $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = -0,2$, $\theta = -0,2$ e $\delta = 0,5$.

A Tabela 8 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp AR(1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Os resultados indicam que para a maioria dos horizontes de previsão, foram obtidos CR_h com valores ótimos, ou seja, valores acima de 0,90 ($1 - \alpha$). O limite inferior da taxa de cobertura apresentou valor médio de 0,06 - bem próximo do valor ótimo de 0,05 ($\frac{\alpha}{2}$). Já o limite superior da taxa de cobertura teve uma média aproximada de 0,02, valor já mais distante de 0,05.

Tabela 8 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\phi = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,864	0,723	0,930	0,938	0,761	0,850	0,966	0,931	0,956	0,957
CRI_h	0,070	0,027	0,067	0,039	0,236	0,148	0,016	0,015	0,032	0,020
CRS_h	0,066	0,002	0,003	0,023	0,003	0,002	0,018	0,054	0,012	0,023

Fonte: A autora (2022).

Para este cenário foi obtido um valor de $PICP = 0,887$. Ou seja, a probabilidade desse intervalo de confiança conter os valores verdadeiros dos parâmetros de interesse é de 88,7%.

A Tabela 9 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp AR(1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal.

Tabela 9 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,786	0,511	0,840	0,878	0,556	0,702	0,914	0,882	0,897	0,923
CRI_h	0,119	0,486	0,149	0,093	0,440	0,292	0,041	0,035	0,077	0,043
CRS_h	0,095	0,003	0,011	0,029	0,004	0,006	0,045	0,083	0,026	0,034

Fonte: A autora (2022).

De maneira análoga à análise feita no cenário anterior, a Tabela 9 apresenta $PICP = 0,788$ significando que a probabilidade desse intervalo conter os valores verdadeiro dos parâmetros é de 78,8% para o cenário estudado. O valor médio dos CRI_h é de 0,1775, valor distante de 0,05. Já o valor médio de CRS_h é 0,0336.

A Tabela 10 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp MA(1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal.

Tabela 10 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\theta = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,921	0,494	0,825	0,807	0,609	0,657	0,940	0,953	0,881	0,894
CRI_h	0,119	0,486	0,149	0,093	0,440	0,292	0,041	0,035	0,077	0,043
CRS_h	0,095	0,003	0,011	0,029	0,004	0,006	0,045	0,083	0,026	0,034

Fonte: A autora (2022).

Para estes valores, $PICP = 0,798$, o valor médio de CRI_h e CRS_h são, respectivamente, 0,137 e 0,033.

A Tabela 11 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp MA(1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal.

Tabela 11 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,894	0,741	0,818	0,886	0,897	0,860	0,807	0,900	0,884	0,748
CRI_h	0,040	0,248	0,018	0,040	0,055	0,127	0,175	0,058	0,094	0,242
CRS_h	0,066	0,011	0,164	0,074	0,048	0,013	0,018	0,042	0,022	0,010

Fonte: A autora (2022).

Para esse cenário, foi obtido $PICP = 0,843$, e os valores de médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,109 e 0,046.

A Tabela 12 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal.

Tabela 12 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,846	0,735	0,744	0,826	0,852	0,840	0,807	0,852	0,848	0,741
CRI_h	0,045	0,249	0,014	0,044	0,061	0,133	0,165	0,064	0,105	0,241
CRS_h	0,109	0,016	0,242	0,130	0,087	0,027	0,028	0,084	0,047	0,018

Fonte: A autora (2022).

Foi obtido $PICP = 0,809$, e os valores de médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,112 e 0,078.

A Tabela 13 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal.

Tabela 13 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = -0,2$, $\theta = -0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,848	0,446	0,748	0,822	0,536	0,623	0,836	0,855	0,839	0,854
CRI_h	0,082	0,540	0,229	0,132	0,455	0,358	0,085	0,046	0,118	0,077
CRS_h	0,070	0,014	0,023	0,046	0,009	0,019	0,079	0,099	0,043	0,069

Fonte: A autora (2022).

Foi obtido $PICP = 0,740$ e os valores de médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,212 e 0,047.

Considerando todos os casos especiais com função de ligação logarítmicas estudados e seus respectivos cenários, obtivemos todas as probabilidades de cobertura acima de 74%.

Também foram realizados os intervalos de previsão para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1) e OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação dada por (4.3) com $\gamma = 0,5$. Foram realizados os estudos para os mesmos cenários I, II, III, VI, V e VI.

A Tabela 14 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação do tipo Box-Cox considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Para esse cenário, foi obtido $PICP = 0,551$. Ou seja, a probabilidade desde intervalo conter o valor verdadeiro dos parâmetros é de somente 55%. No mesmo cenário, para função de ligação logarítmica, a probabilidade obtida foi de 88,7%. E os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,286 e 0,162.

Tabela 14 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\phi = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,251	0,810	0,597	0,889	0,889	0,375	0,383	0,062	0,655	0,600
CRI_h	0,085	0,061	0,007	0,029	0,046	0,613	0,600	0,935	0,172	0,321
CRS_h	0,664	0,129	0,396	0,082	0,065	0,012	0,017	0,003	0,173	0,079

Fonte: A autora (2022).

A Tabela 15 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação do tipo Box-Cox considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Para esse cenário, foi obtido $PICP = 0,771$, valor muito semelhante ao encontrado com a função de ligação logarítmica. E os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,0867 e 0,142.

Tabela 15 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp AR(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,675	0,638	0,788	0,842	0,824	0,821	0,826	0,773	0,660	0,862
CRI_h	0,117	0,330	0,034	0,080	0,089	0,060	0,053	0,025	0,005	0,074
CRS_h	0,208	0,032	0,178	0,078	0,087	0,119	0,121	0,202	0,335	0,064

Fonte: A autora (2022).

A Tabela 16 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação do tipo Box-Cox e considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Foi obtido $PICP = 0,833$ para esse cenário, superior aos 78,9% encontrados para função de ligação logarítmica. Os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,114 e 0,055.

Tabela 16 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 1$, $\alpha = 1,5$, $\theta = 0,8$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,950	0,726	0,469	0,779	0,989	0,796	0,925	0,943	0,947	0,775
CRI_h	0,001	0,241	0,531	0,005	0	0,107	0,053	0,003	0,015	0,190
CRS_h	0,049	0,033	0	0,216	0,011	0,097	0,022	0,054	0,038	0,035

Fonte: A autora (2022).

A Tabela 17 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação do tipo Box-Cox e considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Foi obtido $PICP = 0,761$ para esse cenário, valor inferior aos 83,4% encontrados para ligação logarítmica. Os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,154 e 0,084.

Tabela 17 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp MA(1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,835	0,558	0,762	0,834	0,848	0,774	0,724	0,852	0,801	0,625
CRI_h	0,039	0,419	0,007	0,036	0,062	0,186	0,239	0,065	0,142	0,352
CRS_h	0,126	0,023	0,231	0,130	0,090	0,040	0,037	0,083	0,057	0,023

Fonte: A autora (2022).

A Tabela 18 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o primeiro cenário do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação do tipo Box-Cox e considerando o

intervalo de previsão aproximado pela normal. Para esse cenário, foi obtido $PICP = 0,712$, valor inferior aos 80,9% encontrados para ligação logarítmica. Os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,172 e 0,111.

Tabela 18 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = 0,2$, $\theta = 0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,751	0,599	0,688	0,779	0,770	0,765	0,773	0,679	0,618	0,742
CRI_h	0,052	0,361	0,259	0,096	0,097	0,027	0,058	0,271	0,327	0,178
CRS_h	0,197	0,040	0,053	0,125	0,133	0,208	0,169	0,050	0,055	0,080

Fonte: A autora (2022).

A Tabela 19 apresenta os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o segundo cenário do modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação do tipo Box-Cox e considerando o intervalo de previsão aproximado pela normal. Para esse cenário, foi obtido $PICP = 0,744$, valor muito semelhante ao encontrado através da função de ligação logarítmica. Os valores médios de CRI_h e CRS_h obtidos foram, respectivamente, 0,078 e 0,177.

Tabela 19 – Valores de CR_h , CRI_h e CRS_h para o modelo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) com função de ligação $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ com $\gamma = 0,5$ e parâmetros $\lambda = 2$, $\alpha = 2$, $\phi = -0,2$, $\theta = -0,2$ e $\delta = 0,5$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CR_h	0,689	0,756	0,756	0,752	0,747	0,700	0,724	0,795	0,753	0,773
CRI_h	0,016	0,172	0,127	0,046	0,034	0,004	0,023	0,109	0,164	0,087
CRS_h	0,295	0,072	0,117	0,202	0,219	0,296	0,253	0,096	0,083	0,140

Fonte: A autora (2022).

É possível observar que, para cada função de ligação, comparando cada cenário com o seu correspondente, apenas dois dos seis cenários tiveram o PICR maior quando o processo foi gerado com função de ligação do tipo Box-Cox. Também foi observado que os valores de CR_h , CRI_h e CRS_h tiveram uma menor variação quando utilizada a função de ligação logarítmica, ao variar o horizonte de previsão, o que implica em intervalos de maior confiabilidade.

O intervalo de previsão aproximado com base na distribuição normal se mostrou eficiente na previsão dos valores dos processos definidos nesse trabalho, principalmente nos processos gerados pela função de ligação logarítmica, cujas probabilidades de cobertura para os seis cenários estudados, que incluem três diferentes modelos, superou, em média, 80%.

5 APLICAÇÃO

5.1 INTRODUÇÃO

Devido às mudanças climáticas cada vez mais recorrentes, a análise do impacto das mudanças nos dados de precipitação é urgentemente necessária para observá-los, entendê-los e prevê-los. Em KOUROGIORGAS *et al.* (2015) foi proposto um sintetizador para séries temporais de precipitação com base na distribuição Gaussiana inversa. GAJBHIYE *et al.* (2016) e ASFAW *et al.* (2018), investigaram as tendências de séries temporais de precipitação na Índia e Etiópia. Modelos de média móvel integrada autorregressiva sazonal (SARIMA) foram desenvolvidos para séries temporais de precipitação de monções em DABRAL *et al.* (2017). Previsões baseadas em temperatura de precipitação de monções foram feitas em DASH *et al.* (2018).

Assim, entender, prever e identificar tendências são algumas das medidas que podem ser alcançadas pelo desenvolvimento de técnicas de análise de séries temporais para dados de precipitação. Este capítulo analisa o desempenho dos processos propostos na modelagem de dados referentes a precipitação de chuva em regiões próximas a reservatórios de águas de usinas hidrelétricas.

Nesse capítulo, aborda-se o desempenho de alguns casos particulares do processo OLLGQ-Exp ARMA quando aplicados a um banco de dados real. Os casos particulares OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1) e OLLGQ-Exp AR(2) tiveram seus desempenhos comparados com outros modelos de séries temporais já existentes na literatura: Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) quando aplicados a um conjunto de observações reais com o objetivo de ilustrar a performance dos processos propostos quando utilizados para estudar dados do cotidiano, de forma que possamos assegurar que o presente trabalho seja relevante para a literatura de modelos em Séries Temporais.

5.2 CONJUNTO DE DADOS

Uma usina hidrelétrica é um parque industrial que produz energia elétrica através do movimento das águas de rios ou represas. As usinas hidrelétrica produzem atualmente cerca de 90% de toda energia elétrica produzida no Brasil.

A maior hidrelétrica que possuímos não está localizada na íntegra em solos brasileiros.

Localizada na cidade de Foz do Iguaçu, no Paraná, na divisa do Brasil com o Paraguai, a usina hidrelétrica de Itaipu é a usina com a maior capacidade de produção de energia elétrica presente no Brasil.

O monitoramento das chuvas nas regiões próximas às hidrelétricas são fundamentais para o controle de seu funcionamento. É preciso que se tenha um volume adequado de água nos reservatórios das usinas para que as mesmas consigam produzir a quantidade de energia pretendida. Além disso, o volume de água presente nos reservatórios pode ser utilizado para diversas outras funções, como: irrigação, processo industrial e consumo. Devido a isso, modelos hidrológicos para prever a vazão afluente do reservatório de Machadinho foram estudados em ANDREOLLI *et al.* (2006). Estimativas para chuvas intensas no entorno do reservatório da usina hidrelétrica de Furnas em Minas Gerais foram estudadas em MACHADO & SILVA (2011). A influência do El Niño Oscilação Sul na geração de energia na usina hidrelétrica de Curuá-Una foi analisada por OLIVEIRA *et al.* (2020). O impacto das secas severas no Nordeste na geração de energia elétrica foi estudado por VILAR *et al.* (2020).

Nesse sentido, aplicaremos os modelos propostos a um banco de dados referentes a precipitação de chuva mensal na cidade de Foz do Iguaçu de janeiro de 2009 até o mês de julho de 2022, o que totaliza 163 observações (<https://www.worldweatheronline.com/foz-do-iguacu-weather-averages/parana/br.aspx>).

A Figura 9 apresenta a precipitação da chuva em milímetros (mm) em função do mês, as FAC e FACP dos dados, respectivamente.

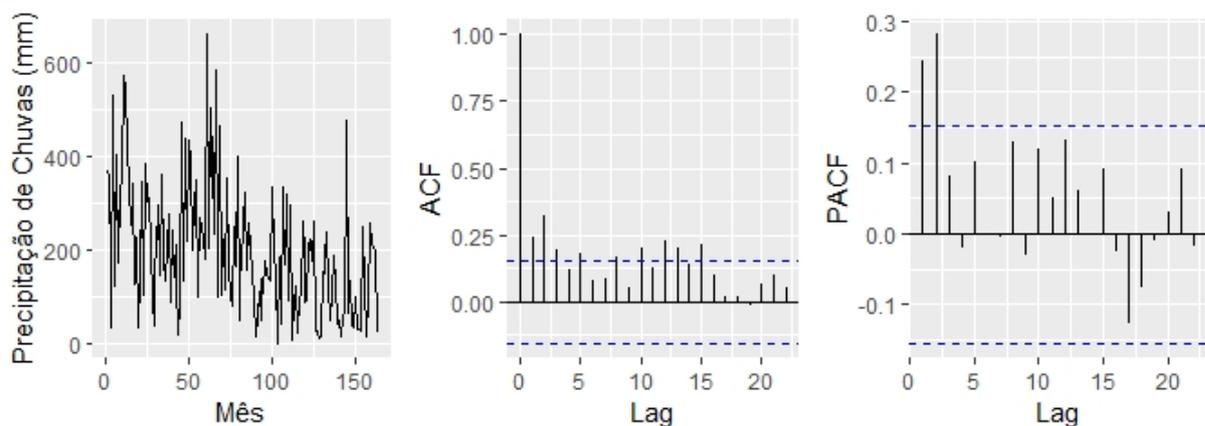


Figura 9 – Precipitação da chuva em mm em função do mês, a FAC e a FACP para a cidade de Foz do Iguaçu.

Fonte: A autora (2022).

O teste de Dickey-Fuller (DICKEY & FULLER, 1979) avalia se há tendências nas séries

temporais observadas. O resultado do teste (Tabela 20) indica que os dados são estacionários com 95% de nível de significância.

Tabela 20 – Valor Estatístico do Teste e Valor Crítico para o teste de Dickey-Fuller

Valor Estatístico do Testes	Valor Crítico		
	1%	5%	10%
- 2.1654	-2.58	-1.95	-1.63

A Tabela 21 apresenta os valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1) e Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica.

Tabela 21 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE dos processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.

Modelos	AIC	BIC	p-valor	MASE
OLLGQ-Exp AR(1)	126.2785	138.6535	0.000001	0.8837
OLLGQ-Exp MA(1)	8108.4760	8120.8510	0.0000001	1.3883
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	198.1176	213.5864	0.00008	0.9419
Gama-ARMA(1,1)	16479.0100	16488.3000	-	-
Exp-ARMA(1,1)	2110.1140	2119.3950	-	-

Fonte: A autora (2024).

A Tabela 22 apresenta os parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.

Tabela 22 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação logarítmica quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \theta, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.2, 0.8)$

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{\phi}_2$
OLLGQ-Exp AR(1)	1.0000	0.2000	4.4000	0.8000	-	-
OLLGQ-Exp MA(1)	1.0000	0.5990	4.0009	-	0.2000	-
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	1.0000	0.2000	4.5302	0.8000	0.2497	-
Gama-ARMA(1,1)	-	-	1.9711	0.6023	-0.3025	-
Exp-ARMA(1,1)	-	-	0.3591	-0.1875	-0.4643	-

Fonte: A autora (2024).

O processo OLLGQ-Exp AR(1) obteve os melhores resultados de AIC e BIC, isto é, ponderando a qualidade do ajuste e a complexidade do modelo, o processo OLLGQ-Exp AR(1) é o mais adequado quando comparado com os outros quatro processos. No contrário, podemos ver que o desempenho do OLLGQ-Exp MA(1) é muito inferior ao desempenho dos demais proposto nesse trabalho, porém superior ao processo Gama-ARMA(1,1). Isso faz sentido, visto que os processos de médias móveis são mais eficientes para prever tendências a longo prazo.

O processo OLLGQ-Exp AR(1) também apresentou o menor erro médio absoluto escalado, enquanto o processo MA(1) apresentou o erro mais elevado. Todavia, apesar dos bons resultados para os casos particulares AR(1) e ARMA(1,1) no que diz respeito ao AIC e BIC, os processos apresentados na Tabela 21 rejeitam a hipótese nula do teste de Ljung-Box.

A Tabela 23 ilustra os resultados de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE obtidos para os mesmos processos estudados na Tabela 21, porém com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$.

Os valores do parâmetro γ foram escolhidos de modo que seja possível avaliar o impacto desse parâmetro nos resultados da aplicação, começando com um valor mais próximo de zero e aumentando de maneira constante até um valor mais próximo de 1.

Tabela 23 – Valores AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE dos processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$ quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.

Models	AIC	BIC	p-value	MASE
$\gamma = 0.25$				
OLLGQ-Exp AR(1)	431.9318	444.3068	0.00001	0.9184
OLLGQ-Exp MA(1)	10322.6300	10335.0100	0.00000005	1.2590
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	1030.0600	1045.5300	0.0001	0.9899
Gama-ARMA(1,1)	16325.1800	16334.4600	-	-
Exp-ARMA(1,1)	3109.4580	3118.7390	-	-
$\gamma = 0.50$				
OLLGQ-Exp AR(1)	1414.1560	1426.5310	0.0000002	0.9077
OLLGQ-Exp MA(1)	10100.6800	10113.0500	0.0000004	1.1619
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	2497.6100	2513.07900	0.0000003	1.0215
Gama-ARMA(1,1)	16214.3500	16223.6400	-	-
Exp-ARMA(1,1)	3826.1020	3835.3830	-	-
$\gamma = 0.75$				
OLLGQ-Exp AR(1)	2367.5200	2379.8950	0.00000001	0.9068
OLLGQ-Exp MA(1)	422.2010	434.5760	0.00000001	1.2021
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	399.8332	415.3012	0.00000001	1.1381
Gama-ARMA(1,1)	16325.1800	16334.4600	-	-
Exp-ARMA(1,1)	31063.0800	31072.3600	-	-

É possível observar um aumento significativo nos valores de AIC e BIC para o processo OLLGQ-Exp AR(1) a medida que γ aumenta. Sendo esse processo o que apresenta o melhor desempenho para o menor valor de γ . Em contrapartida, para o maior valor de γ , o processo OLLGQ-Exp ARMA(1,1) supera os demais.

Tabela 24 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(1), OLLGQ-Exp MA(1), OLLGQ-Exp ARMA(1,1), OLLGQ-Exp AR(2), Gama-ARMA(1,1) e Exp-ARMA(1,1) com função de ligação Box-Cox quando aplicados a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \theta, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.2, 0.8)$

Modelos						
$\gamma = 0.25$						
OLLGQ-Exp AR(1)	1.0000	0.2500	4.0062	1.1375	-	-
OLLGQ-Exp MA(1)	1.0000	0.2000	4.0000	-	0.5999	-
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	1.0000	0.2000	4.0500	1.1000	0.2000	-
Gama-ARMA(1,1)	-	-	3.1005	0.6767	-0.3798	-
Exp-ARMA(1,1)	-	-	0.1784	-0.0939	-0.2307	-
$\gamma = 0.50$						
OLLGQ-Exp AR(1)	1.0000	0.2375	4.0001	1.1624	-	-
OLLGQ-Exp MA(1)	1.0000	0.2000	4.000	-	0.5999	-
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	1.0000	0.3937	4.0000	1.0062	0.20000	-
Gama-ARMA(1,1)	-	-	5.5576	0.72433	-0.4387	-
Exp-ARMA(1,1)	-	-	0.3068	0.9209	-0.9486	-
$\gamma = 0.75$						
OLLGQ-Exp AR(1)	1.0000	.3871	4.0000	1.0128	-	-
OLLGQ-Exp MA(1)	1.0000	0.2000	4.0125	-	0.5875	-
OLLGQ-Exp ARMA(1,1)	1.0000	2.0000	4.2000	0.8000	0.4000	-
Gama-ARMA(1,1)	-	-	11.1075	0.7510	-0.4840	-
Exp-ARMA(1,1)	-	-	0.1030	0.2277	-0.2353	-

Há uma diferença de desempenho dos processos quando alterada a função de ligação mantendo-se fixa as configurações paramétricas. No geral, os resultados obtidos quando utilizamos a função de ligação logarítmica na construção dos processos foram superiores aos resultados encontrados através da função de ligação Box-Cox.

Os processos apresentados na Tabela 23 também rejeitam a hipótese nula do teste de Ljung-Box.

5.3 UM NOVO CASO PARTICULAR DO PROCESSO OLLGQ-EXP ARMA(P,Q): O PROCESSO OLLGQ-EXP AR(2)

Analisando a Figura 9, é observado que estamos trabalhando com dados de comportamento autorregressivo de segunda ordem. O corte no segundo *lag* na função FACP indica esse

comportamento. A seguir, o processo OLLGQ-Exp AR(2) para a modelagem desses dados é definido.

O preditor linear abaixo em conjunto com (4.2) definem o processo OLLGQ-Exp AR(2)

$$g(q_t) = \delta + \phi_1 g(x_{t-1}) + \phi_2 g(x_{t-2}),$$

em que ϕ_1 e ϕ_2 são os parâmetros autorregressivos do modelo.

A aplicação desse modelo construído com $g(q_t) = \log(q_t)$ ao banco de dados referentes a precipitação de chuva em Foz do Iguaçu está ilustrada na Tabela 25.

Tabela 25 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação logarítmica quando aplicado a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.

Model	AIC	BIC	p-value	MASE
OLLGQ-Exp AR(2)	102.1333	114.5083	0.2831	0.8661

Fonte: A autora (2022).

Para os valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \theta, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.8)$ foram obtidas as estimativas $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\phi}_1, \hat{\theta}, \hat{\phi}_2) = (1.0000, 0.2000, 4.4000, 0.8000, 0.8000)$.

Os valores de AIC e BIC obtidos para o modelo autorregressivo de segunda ordem confirmam o comportamento observado na Figura 9. O processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação logarítmica apresenta os melhores resultados ao ser aplicado ao banco de dados estudados, superando os demais processos já apresentados.

Além disso, para este modelo, não rejeitamos a hipótese nula do teste de Ljung-Box. Podemos afirmar que os resíduos se comportam como ruído branco.

A Figura 10 apresenta, respectivamente, a série predita, a FAC e a FACP para os resíduos da aplicação do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função ligação logarítmica. Observamos que não há indicadores de estruturas de dependência.

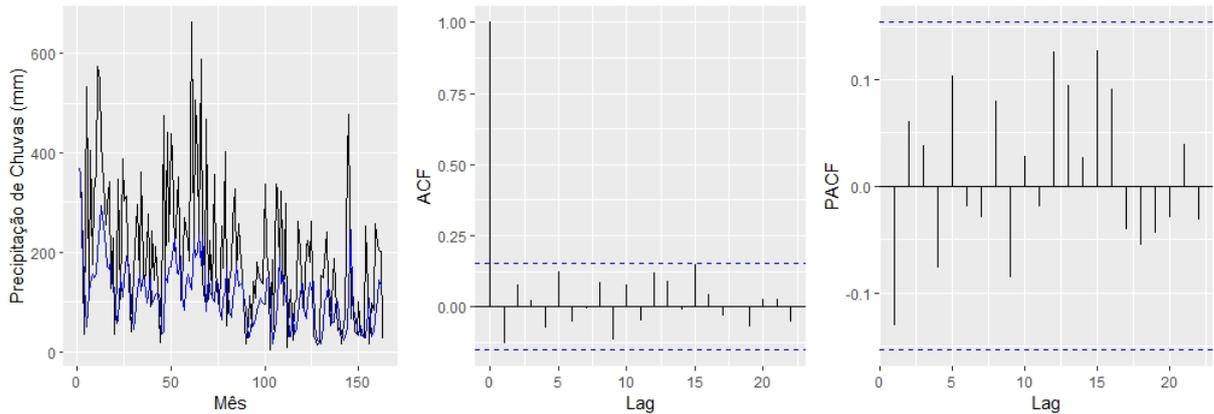


Figura 10 – Série predita, FAC e FACP para os resíduos da aplicação do processo AR(2) com função de ligação logarítmica.

Fonte: A autora (2022).

De maneira análoga, desenvolvemos o processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação do tipo Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$. Os resultados foram apresentados na Tabela 26 e os valores das estimativas dos parâmetros encontram-se na Tabela 27.

Tabela 26 – Valores de AIC, BIC, p-valor para o teste de Box-Ljung e o MASE do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$ quando aplicado a precipitação da chuva em mm na cidade de Foz do Iguaçu.

Models	AIC	BIC	p-value	MASE
$\gamma = 0.25$				
OLLGQ-Exp AR(2)	150.8175	166.2845	0.1803	0.8246
$\gamma = 0.50$				
OLLGQ-Exp AR(2)	322.1302	337.599	0.0808	0.8317
$\gamma = 0.75$				
OLLGQ-Exp AR(2)	610.2146	625.6834	0.0437	0.8525

Fonte: A autora (2022).

Tabela 27 – Parâmetros estimados para os processos OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\gamma \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$. Valores verdadeiros dos parâmetros $(\alpha, \lambda, \delta, \phi_1, \phi_2) = (1, 0.2, 4, 0.8, 0.8)$

$\gamma = 0.25$					
OLLGQ-Exp AR(2)	1.0000	0.20000	4.2000	0.8000	0.8100
$\gamma = 0.50$					
OLLGQ-Exp AR(2)	1.0000	0.3000	4.0002	1.0997	0.8000
$\gamma = 0.75$					
OLLGQ-Exp AR(2)	1.0000	0.8575	4.0001	0.8124	0.8001

Fonte: A autora (2024).

É possível notar que o melhor cenário obtido para a aplicação do modelo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox ocorreu com $\gamma = 0.25$. Além de produzir os menores valores de AIC e BIC, esse cenário foi o único que não apresentou falhas no ajuste, segundo o teste de Ljung-Box.

A Figura 11 apresenta, respectivamente, a série predita, a FAC e a FACP para os resíduos da aplicação do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\delta = 0.25$. Observamos que não há fortes indicadores de estruturas de dependência.

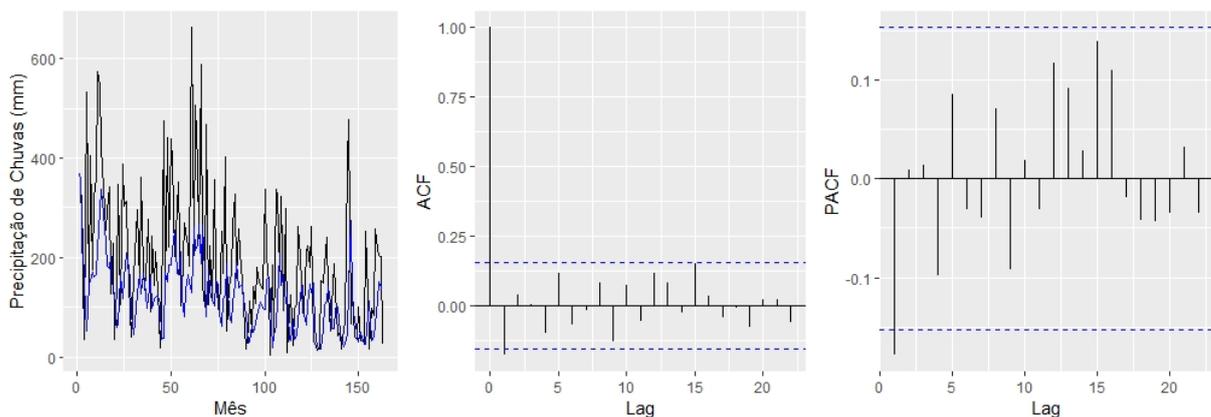


Figura 11 – Série predita, FAC e FACP para os resíduos da aplicação do processo AR(2) com função de ligação Box-Cox com parâmetro $\delta = 0.25$.

Fonte: A autora (2022).

Comparando os valores de AIC e BIC produzidos pela aplicação do processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação Box-Cox ($\gamma = 0.25$) com os resultados obtidos pelo processo OLLGQ-Exp AR(2) com função de ligação logarítmica, concluímos que os menores valores

de AIC e BIC foram obtidos quando $g(q_t) = \log(q_t)$. Em contrapartida, o menor MASE foi encontrado com a função de ligação Box-Cox.

A análise de séries temporais de dados pluviométricos é importante para o controle do nível da água em barragens de usinas hidrelétricas. A precipitação mínima é um marcador importante para o controle do fornecimento de energia. Nesse trabalho, os dados recolhidos referentes a precipitação mensal de chuva seguem o modelo aqui proposto, o que nos permite, por exemplo, fazer uma previsão dos dados, o que poderia auxiliar no planejamento da distribuição de energia nos meses em que a precipitação de chuva esteja baixa, o que pode evitar problemas de geração de energia em boa parte do país. Da mesma forma, o estudo de previsão aplicado de maneira correta, pode evitar diversas catástrofes naturais, nos períodos de alta precipitação.

Além da importância mencionada acima, é importante saber que as usinas hidrelétricas também são responsáveis por armazenar água para irrigação e consumo, bem como para o controle de enchentes. Em 2024 houve no Brasil a maior catástrofe climática da história do estado do Rio Grande do Sul, onde diversas cidades ficaram inundadas, devido as fortes chuvas que atingiram a região.

6 A CONSTRUÇÃO DE UM NOVO PROCESSO SARMA

Esse capítulo apresenta o desenvolvimento de uma generalização do processo OLLGQ-Exp $ARMA(p, q)$ quando incorporada ao modelo uma estrutura de dinâmica sazonal.

Dados observados no tempo podem apresentar flutuações periódicas, isto é, movimentos de médio ou longo prazo que apresentam comportamentos padronizados. Esses comportamentos são chamados de comportamentos sazonais. Dizemos que uma série apresenta comportamento periódico com período S , quando as semelhanças na série ocorrem após S intervalos básicos de tempo (G. BOX *et al.*, 2008).

Comportamentos sazonais são muito frequentes na Análise de Séries Temporais e os modelos ARMA não são os mais adequados para trabalhar com dados que apresentem esse tipo de comportamento. Diversos modelos na literatura foram desenvolvidos para o tratamento de observações que apresentem uma estrutura sazonal.

BASAWA *et al.* (2004) desenvolveram um novo modelo autorregressivo sazonal com parâmetros periódicos. Séries temporais e modelos sazonais são amplamente estudados em G. BOX *et al.* (2008). O número de chegadas ao serviço de emergência hospitalar causadas por doenças que apresentam comportamento sazonal foi estudado em Moriña *et al.* (2011). Modelos sazonais foram usados para o estudo de séries de malária em BRIET *et al.* (2013). A extensão do modelo autorregressivo de valor inteiro não negativo de primeira ordem foi realizada por BOURGUIGNON *et al.* (2015) acrescentado uma estrutura sazonal ao modelo. O mesmo foi feito em BAYER *et al.* (2018) como forma de estender o modelo β ARMA (ROCHA & CRIBARI-NETO, 2008).

A componente sistemática dada na Equação (4.1) poderia ser definida, sem a perda de suas propriedades, através do operador de defasagem B, definido por $B^d g(x_t) = g(x_{t-d})$ e $B^d r_t = r_{t-d}$, para $d \in \mathbb{Z}^+$.

Definição: Sejam $\{x_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal observada, $q_t = q_t(u) = F^{-1}(u | \mathcal{F}_{t-1})$ o quantil u da distribuição OLLGQ-Exp no instante t e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por informações anteriores observadas.

A componente sistemática $g(q_t) = \eta_t$ é dada, a partir do operador B, por

$$\phi(B)(g(x_t) - z_t \beta) = \delta + \theta(B)r_t,$$

em que $g(\cdot)$, η_t , r_t , δ , z_t e β são os mesmos definidos em (4.1), ϕ e θ serão definidos a seguir e B é o operador de defasagem.

Definição: O processo OLLGQ-Exp Sazonal Autorregressivo de Médias Móveis, OLLGQ-Exp SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$, apresenta componente sistemática $g(q_t) = \eta_t$ que satisfaz a equação a seguir

$$\Phi(B^S)\phi(B)g(x_t) = \delta + \Theta(B^S)\theta(B)r_t, \quad (6.1)$$

em que $g(\cdot)$ é a função de ligação estritamente monótona e duplamente diferenciável, $r_t = g(x_t) - g(q_t)$ é o termo de erro, $\delta \in \mathbb{R}$ é o intercepto do processo, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio autorregressivo de ordem p com defasagens, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis defasado de ordem q , $\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS}$ é o polinômio defasado sazonal autorregressivo de ordem P , $\Theta(B) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_Q B^{QS}$ é o polinômio defasado sazonal de médias móveis e ordem Q e S é definida como a frequência de sazonalidade. Comumente usamos $S = 12$ quando trabalhamos com dados mensais.

Assim como feito para o processo ARMA, podemos assumir valores para p, q, P e Q definindo os casos particulares do processo proposto.

O processo definido a partir da Equação (6.1) apresenta uma estrutura mais robusta quando comparado com o processo ARMA definido no capítulo anterior; devido a isso, as próximas subseções serão destinadas ao desenvolvimento de cada caso particular que será estudado. Um problema comumente encontrado em processos SARMA é a escolha por um sistema de parametrização parcimonioso, visto que um processo SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$ apresenta $p + q + P + Q$ parâmetros adicionais. Devido à isso, desconsideramos séries temporais que possam ocorrer de maneira simultânea a série estudada.

6.0.1 Processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (0,0) $_S$

Definido o processo com componente sistemática dada em (6.1), o processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (0,0) $_S$ é determinado pelos valores $p = 1, q = 1, P = 0$ e $Q = 0$. Note que esse caso particular pode ser entendido como um modelo ARMA(1, 1) dado que anula-se a presença de sazonalidade.

Tomando $p = 1, q = 1, P = 0$ e $Q = 0$ em (6.1), tem-se que

$$\phi(B)g(x_t) = \delta + \theta(B)r_t.$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtem-se

$$\begin{aligned}(1 - \phi(B))g(x_t) &= \delta + (1 - \theta B)r_t, \\ g(x_t) - \phi g(x_{t-1}) &= \delta + r_t - \theta r_{t-1}, \\ g(x_t) - \phi g(x_{t-1}) &= \delta + g(x_t) - g(x_{t-1}) - \theta r_{t-1}, \\ g(x_{t-1}) &= \delta + \phi g(x_{t-1}) - \theta [g(x_{t-1}) - g(x_{t-2})],\end{aligned}$$

em que $g(x_t) = \eta_t$ é o preditor linear.

6.0.2 Processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1)×(1,1)₁₂

Tomando em (6.1) $p = 1$, $q = 1$, $P = 1$, $Q = 1$ e $S = 12$, o caso especial OLLGQ-Exp SARMA(1,1)×(1,1)₁₂ é obtido. Segue abaixo o desenvolvimento.

$$\begin{aligned}\Phi(B^{12})\phi(B)g(x_t) &= \delta + \Theta(B^{12})\theta(B)r_t, \\ (1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B)g(x_t) &= \delta + (1 - \Theta_1 B^{12})(1 - \theta_1 B)r_t, \\ g(x_t) - \phi_1 g(x_{t-1}) - \Phi_1 g(x_{t-12}) + \Phi_1 \phi_1 g(x_{t-13}) &= \delta + r_t - \theta_1 r_{t-1} - \Theta_1 r_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 r_{t-13}.\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que o preditor linear é dado por

$$g(x_t) = \delta + \phi_1 g(x_{t-1}) + \Phi_1 g(x_{t-12}) - \Phi_1 \phi_1 g(x_{t-13}) - \theta_1 r_{t-1} - \Theta_1 r_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 r_{t-13}. \quad (6.2)$$

6.0.3 Processo OLLGQ-Exp SARMA(2,0)×(2,0)₁₂

Tomando $p = 2$, $q = 0$, $P = 2$, $Q = 0$ e $S = 12$ em (6.1), o caso particular OLLGQ-Exp SARMA(2,0)×(2,0)₁₂ é obtido.

$$\begin{aligned}\Phi(B^{12})\phi(B)g(x_t) &= \delta + r_t, \\ (1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24})(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)g(x_t) &= \delta + r_t.\end{aligned}$$

Desenvolvendo os polinômios de defasagem, obtem-se o preditor linear

$$\begin{aligned}g(x_t) &= \delta + \phi_1 g(x_{t-1}) + \phi_2 g(x_{t-2}) + \Phi_1 g(x_{t-12}) - \phi_1 \Phi_1 g(x_{t-13}) \\ &\quad - \phi_2 \Phi_1 g(x_{t-14}) + \Phi_2 g(x_{t-24}) - \phi_1 \Phi_2 g(x_{t-25}) - \phi_2 \Phi_2 g(x_{t-26}).\end{aligned}$$

6.1 PROCESSOS OLLGQ-EXP SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$ COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO LOGARÍTMICA

Nessa seção, alguns casos especiais para o processo OLLGQ-Exp SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$ são apresentados. Para o desenvolvimento desses processos particulares, será usada a função $g(q_t) = \log(q_t)$ como função de ligação.

6.1.1 Processo OLLGQ-Exp SARMA($1, 1$) \times ($1, 1$) $_{12}$ com função de ligação logarítmica

Tomando $p = 1, q = 1, P = 1, Q = 1$ e $S = 12$ em (6.1) e $g(q_t) = \log(q_t)$ em (6.2), obtem-se

$$q_t = \exp\{\delta + \phi \log(x_{t-1}) + \Phi \log(x_{t-12}) - \phi\Phi \log(x_{t-13}) - \theta [\log(x_{t-1}) - \log(q_{t-1})] - \Theta [\log(x_{t-12}) - \log(q_{t-12})] + \theta\Theta [\log(x_{t-13}) - \log(q_{t-13})]\}.$$

A Figura 12 apresenta, respectivamente, os gráficos para uma série gerada, a partir Algoritmo 4, do modelo OLLGQ-Exp SARMA($1, 1$) \times ($1, 1$), FAC e FACP do processo com seguinte configuração paramétrica: $u = 0,75, \alpha = 0,2, \theta = 0,5, \Theta = 0,8, \phi = 0,8, \Phi = 0,8$ e $\delta = 0,25$.

Fonte: A autora (2023).

Figura 12 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA($1, 1$) \times ($1, 1$) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e $u = 0,75, \alpha = 0,2, \theta = 0,5, \Theta = 0,8, \phi = 0,8, \Phi = 0,8$ e $\delta = 0,25$

De maneira análoga, e afim de avaliar a sensibilidade do modelo aos parâmetros sazonais, uma nova série foi gerada a partir do modelo OLLGQ-Exp SARMA($1, 1$) \times ($1, 1$), porém para valores de $\Theta = 0,4$ e $\Phi = 0,4$, mantendo fixo os demais parâmetros e chutes iniciais. Os resultados estão ilustrados na Figura 13.

Fonte: A autora (2023).

Figura 13 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA($1, 1$) \times ($1, 1$) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ e $u = 0,75, \alpha = 0,2, \theta = 0,5, \Theta = 0,4, \phi = 0,8, \Phi = 0,4$ e $\delta = 0,25$

É possível observar que, para maiores valores de Θ e Φ , o comportamento sazonal se mostra mais acentuado, o que é coerente com a construção do modelo e a interpretação paramétrica.

Assim como os modelos ARMA, os modelos SARMA possuem estruturas de correlação particulares aos seus casos especiais. Todavia, é comum que as séries temporais sazonais sejam não estacionárias, como visto na Figura 12.

6.2 PROCESSOS OLLGQ-EXP SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$ COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO BOX-COX

Nessa seção, alguns casos especiais para o processo OLLGQ-Exp SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$ são apresentados e foram desenvolvidos com a função $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ como função de ligação.

6.2.1 Processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) $_{12}$ com função de ligação Box-Cox

Tomando $p = 1$, $q = 1$, $P = 1$, $Q = 1$ e $S = 12$ em (6.1) e $g(q_t) = \frac{q_t^\gamma - 1}{\gamma}$ em (6.2), obtemos

$$q_t = \left\{ \gamma \left[\delta + \phi_1 \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) + \Phi_1 \left(\frac{x_{t-2}^\gamma - 1}{\gamma} \right) - \phi_1 \Phi_1 \left(\frac{x_{t-13}^\gamma - 1}{\gamma} \right) - \theta_1 \left(\frac{x_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} - \frac{q_{t-1}^\gamma - 1}{\gamma} \right) - \Theta_1 \left(\frac{x_{t-12}^\gamma - 1}{\gamma} - \frac{q_{t-12}^\gamma - 1}{\gamma} \right) + \theta_1 \Theta_1 \left(\frac{x_{t-13}^\gamma - 1}{\gamma} - \frac{q_{t-13}^\gamma - 1}{\gamma} \right) \right] + 1 \right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

De maneira análoga aos processos gerados pela função de ligação logarítmica, a Figura 14 apresenta, respectivamente, os gráficos para uma série OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) $_{12}$ gerada com função de ligação Box-Cox e suas FAC e FACP para a configuração paramétrica: $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,55$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,55$, $\delta = 0,25$ e $\gamma = 0,25$.

Fonte: A autora (2023).

Figura 14 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) com função de ligação Box-Cox e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,55$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,55$, $\delta = 0,25$ e $\gamma = 0,25$.

Como feito anteriormente, como forma de avaliar a sensibilidade do modelo aos parâmetros sazonais, foi gerada uma nova série a partir do processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) $_{12}$, porém para valores de $\Phi = 0,2$ e $\Theta = 0,2$, mantendo fixo os demais parâmetros e chutes iniciais. Os resultados estão ilustrados na Figura 15

Fonte: A autora (2023).

Figura 15 – Série gerada, FAC e PACF do modelo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1) com função de ligação Box-Cox e $u = 0,75$, $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,5$, $\Theta = 0,2$, $\phi = 0,8$, $\Phi = 0,2$, $\delta = 0,25$ e $\gamma = 0,25$.

É possível observar que maiores valores de Φ e Θ geram séries com comportamentos sazonais mais evidentes.

Séries geradas pelo processos OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1)₁₂ quando desenvolvidos com função de ligação logarítmica apresentam comportamentos sazonais mais acentuados, além de que o processo gerado pela função de ligação do tipo Box-Cox apresentou algumas falhas na geração de valores a depender da configuração paramétrica.

6.3 ESTIMAÇÃO DOS CASOS ESPECIAIS DO PROCESSO OLLGQ-EXP SARMA

A estimação dos parâmetros do modelo OLLGQ-Exp SARMA é realizada por máxima verossimilhança condicional. Seja $\boldsymbol{\pi} = (\alpha, \lambda, \delta, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, \boldsymbol{\Phi}^\top, \boldsymbol{\Theta}^\top)$ o vetor dos parâmetros do processo, em que $\boldsymbol{\phi}^\top = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\boldsymbol{\theta}^\top = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\boldsymbol{\Phi}^\top = (\Phi_1, \dots, \Phi_P)$ e $\boldsymbol{\Theta}^\top = (\Theta_1, \dots, \Theta_Q)$. Notemos que $\boldsymbol{\pi}$ é um vetor com $p + q + P + Q + 3$ parâmetros.

Considere $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma amostra do processo OLLGQ-Exp SARMA. A função de log-verossimilhança condicional do processo está associada a densidade condicional da variável de entrada do modelo, encontrada na Equação (4.2).

A função de log-verossimilhança é dada por

$$l(\boldsymbol{\pi}) = \log \left(\prod_{t=m+1}^n f_{X_t | \mathcal{F}_{t-1}}(\boldsymbol{\pi}) \right) = \sum_{t=m+1}^n l_t(\boldsymbol{\pi}; x_t),$$

em que $m = \max(PS + p, QS + q)$ com l_t dada por

$$\begin{aligned} l_t(\boldsymbol{\pi}) &= \log(\alpha) + \log(\lambda) - \log(u) + \log(1 - u) + \alpha \log(1 - e^{-\lambda q t}) + (\alpha - 1) \log(1 - e^{-\lambda x_t}) \\ &\quad - \lambda \alpha (x_t - q t) - 2 \log \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1} (1 - u) (1 - e^{-\lambda q t})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x_t - q t)} \right]. \end{aligned}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança, valores que maximizam a função $l(\boldsymbol{\pi})$, são obtidos com a resolução do sistema: $\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Theta}^\top} \right) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Proposição: Seja $U(\boldsymbol{\pi}) = \left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Phi}^\top}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Theta}^\top} \right)$ o vetor escore que corresponde a amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$. O vetor escore pode ser calculado a partir de

$$U(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Phi}^\top}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\Theta}^\top} \right].$$

6.3.1 Estimação dos parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1)₁₂

O processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) × (1, 1)₁₂ é obtido tomando $p = 1$, $q = 1$, $P = 1$, $Q = 1$ e $S = 12$ na Equação (6.1). Como demonstrado anteriormente, o preditor linear η_t para esse processo é dado por

$$g(q_t) = \delta + \phi_1 g(x_{t-1}) + \Phi_1 g(x_{t-12}) - \Phi_1 \phi_1 g(x_{t-13}) - \theta_1 r_{t-1} - \Theta_1 r_{t-12} + \Theta_1 \theta_1 r_{t-13}.$$

As componentes $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda}$ do vetor escore são as mesmas encontradas para a estimação do processo OLLGQ-Exp ARMA, dado que essas componentes estão associadas aos parâmetros da distribuição OLLGQ-Exp e não a estrutura do processo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} + \log(1 - e^{-\lambda q_t}) + \log(1 - e^{-\lambda x_t}) - \lambda(x_t - q_t) \\ &- \frac{2(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}} \\ &+ \frac{2\lambda e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(x_t - q_t)u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{1 - e^{-\lambda q_t}} q_t e^{-\lambda q_t} + \frac{\alpha - 1}{1 - e^{-\lambda x_t}} x_t e^{-\lambda x_t} - \alpha(x_t - q_t) \\ &- \frac{2\alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1}}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}} \\ &- \frac{-2u^{-1}(1 - u)\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [q_t e^{-\lambda q_t} (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + x_t - q_t]}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}}. \end{aligned}$$

Decorrente da regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta};$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i};$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \theta_k} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_k};$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi_i}$$

e

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \Theta_k} = \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta_k},$$

em que

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} = \frac{\alpha\lambda}{1 - e^{-\lambda q_t}} e^{-\lambda q_t} + \lambda\alpha - \frac{2\lambda\alpha u^{-1}(1-u)e^{-\lambda\alpha(x_t - q_t)}(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1]}{(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1-u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda\alpha(x_t - q_t)}}$$

$$\text{e } \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} = \frac{1}{g'(q_t)}.$$

Dado $r_t = g(x_t) - g(q_t)$ anteriormente definido, tem-se que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} = 1 + \theta_1 \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \delta} + \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \delta} - \theta_1 \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \delta};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_1} = g(x_{t-1}) - \Phi_1 g(x_{t-13}) + \theta_1 \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \phi_1} + \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \phi_1} - \theta_1 \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \phi_1};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_1} = r_{t-1} + \Theta_1 r_{t-13} + \theta_1 \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta_1} + \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \theta_1} - \theta_1 \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \theta_1};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi_1} = g(x_{t-12}) - \phi_1 g(x_{t-13}) + \theta_1 \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Phi_1} + \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \Phi_1} - \theta_1 \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \Phi_1}$$

e

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta_1} = \theta_1 r_{t-13} - \theta_1 \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Theta_1} - r_{t-12} + \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \Theta_1} - \theta_1 \Theta_1 \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \Theta_1}.$$

6.3.2 Estimação dos parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$

Para desenvolver os estimadores do processo OLLGQ-Exp SARMA(p, q) \times (P, Q) $_S$, seja $\lambda = \{\delta, \phi^\top, \theta^\top, \Phi^\top, \Theta^\top\}$ o vetor de parâmetros associados a estrutura SARMA. Desenvolvidas por BAYER *et al.* (2018), as componentes $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}$, $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \phi^\top}$, $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \theta^\top}$, $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \Phi^\top}$, $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \Theta^\top}$ do vetor escore são obtidas através de

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}.$$

Tomando $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em λ_i , obtem-se

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \delta} + \sum_{J=1}^Q \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-JS}}{\partial \delta} - \sum_{j=1}^q \sum_{J=1}^Q \theta_j \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-(j+JS)}}{\partial \delta};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} = g(x_{t-i}) \Phi(B^S) + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i} + \sum_{J=1}^Q \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-JS}}{\partial \phi_i} - \sum_{j=1}^q \sum_{J=1}^Q \theta_j \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-(j+JS)}}{\partial \phi_i};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi_l} = g(x_{t-lS})\phi(B) + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \Phi_l} + \sum_{J=1}^Q \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-JS}}{\partial \Phi_l} - \sum_{j=1}^q \sum_{J=1}^Q \theta_j \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-(j+JS)}}{\partial \Phi_l};$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j} = -r_{t-j}\Theta(B^S) + \sum_{i=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \theta_j} + \sum_{J=1}^Q \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-JS}}{\partial \theta_j} - \sum_{i=1}^q \sum_{J=1}^Q \theta_j \Theta_J \frac{\partial \eta_{t-(j+JS)}}{\partial \theta_j}$$

e

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta_J} = -r_{t-JS}\theta(B) + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \Theta_J} + \sum_{i=1}^Q \Theta_i \frac{\partial \eta_{t-iS}}{\partial \Theta_J} - \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^Q \theta_j \Theta_i \frac{\partial \eta_{t-(j+iS)}}{\partial \Theta_J}.$$

6.3.3 Matriz Informação de Fisher Condicional do processo OLLGQ-Exp $(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \times (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{12}$

A matriz informação de Fisher condicional é obtida através dos valores esperados condicionais de todas as derivadas de segunda ordem que compõe o vetor escore $U(\boldsymbol{\pi})$.

A matriz informação de Fisher condicional, $I[U(\boldsymbol{\pi})]$ é dada por

$$I[U(\boldsymbol{\pi})] = \begin{bmatrix} -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\alpha,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\lambda,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\delta,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\delta,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\phi,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\phi,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\theta,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\theta,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Phi,\Theta)}] \\ -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\alpha)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\lambda)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\delta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\theta)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\Phi)}] & -\mathbb{E}[K_{(\Theta,\Theta)}] \end{bmatrix}$$

Em que, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz

$$K_{(\zeta_i, \zeta_j)} = K_{(\zeta_j, \zeta_i)} = \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} = \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \zeta_j \partial \zeta_i},$$

para $\zeta = \{\alpha, \lambda, \delta, \phi, \theta, \Phi, \Theta\}$ e $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Os valores de $K_{(\zeta_i, \zeta_j)}$ se encontram no Apêndice A.

6.3.4 Resultados Numéricos

Para analisar a performance e a qualidade dos estimadores de máxima verossimilhança, foram realizadas simulações de Monte Carlo com 10.000 réplicas para diferentes tamanhos amostrais e configurações paramétricas.

Os estimadores foram avaliados em diferentes cenários, com tamanhos amostrais de 20, 50 e 75. Foram calculados valores de média, viés, viés relativo e erro quadrático médio (EQM) dos estimadores. Observemos que os modelos de análise sazonal são mais robustos quando comparados aos outros modelos estudados nesse trabalho. Devido a isso, a demanda computacional é maior para tais modelos e para analisar a performance e a qualidade dos estimadores foram feitos testes com tamanhos amostrais menores que os usados nas demais estimações, porém, devido a escolha de utilizar menores tamanhos amostrais nesse estudo, foi aumentando o número de réplicas para 10.000, Foi observado que mesmo para tamanhos amostrais pequenos, as propriedades assintóticas dos estimadores são satisfeitas, não sendo necessário o teste para maiores amostras.

A Tabela 28 fornece a média e o erro quadrático médio (em parênteses) dos estimadores para os processos OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$ para seis diferentes cenários. Foram feitas variações nos valores do quantil $q \in \{0, 25; 0, 50; 0, 75\}$ e os parâmetros do processo foram fixados em dois cenários:

- $(\alpha, \lambda, \delta, \phi, \theta, \Phi, \Theta) = (1, 0, 2, 0, 5, 0, 9, 0, 3, 0, 8, 0, 5)$
- $(\alpha, \lambda, \delta, \phi, \theta, \Phi, \Theta) = (1, 0, 2, 0, 5, 0, 9, 0, 5, 0, 8, 0, 8)$.

A partir da Tabela 28 podemos concluir que os estimadores de máxima verossimilhança para o processo OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$, nas configurações paramétricas e para os valores de quantil determinados, possuem comportamentos consistentes: os valores médios das estimativas convergem para os valores verdadeiros dos parâmetros a medida que aumentamos o tamanho das amostras, e, da mesma maneira, os erros quadráticos médios tendem a zero quando o valor das amostras aumenta.

Analogamente, a Tabela 29 fornece a média e o erro quadrático médio (em parênteses) dos estimadores para os processos OLLGQ-Exp SARMA(1, 1) \times (1, 1) com função de ligação do tipo Box-Cox com parâmetro $\gamma = 0, 75$ para seis diferentes cenários. Foram feitas variações nos valores do quantil $q \in \{0, 25; 0, 50; 0, 75\}$ e os parâmetros do processo foram fixados em dois cenários: $(\alpha, \lambda, \delta, \phi, \theta, \Phi, \Theta) = (1, 0, 2, 0, 5, 0, 9, 0, 3, 0, 8, 0, 5)$ e $(\alpha, \lambda, \delta, \phi, \theta, \Phi, \Theta) = (1, 0, 2, 0, 5, 0, 9, 0, 5, 0, 8, 0, 8)$.

Tabela 28 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (1,1)₁₂ com função de ligação $g(q_t) = \log(q_t)$

		$\alpha = 1$	$\lambda=0,2$	$\delta = 0,5$	$\phi = 0,9$	$\theta = \mathbf{0,3}$	$\Phi = 0,8$	$\Theta = \mathbf{0,5}$
Quantil	n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\Phi}$	$\hat{\Theta}$
0,25	20	9.0064 (64.1038)	1,6963 (2.2389)	1,6115 (1,2355)	-1,1066 (4.0267)	-0,5357 (0,6985)	-2.3959 (10,2141)	-2.2938 (7.8054)
	50	1,7837 (0,6143)	0,0053 (0,0378)	1,2432 (0,5524)	0,9006 (0,0000)	0,8469 (0,2991)	-0,3365 (1,2917)	-0,02017 (0,0984)
	75	1,1175 (0,0138)	0,0139 (0,0345)	1,0600 (0,3136)	0,8989 (0,0000)	0,4706 (0,0290)	0,3259 (0,2247)	0,4202 (0,0063)
0,50	20	4.9724 (15.7805)	0,0928 (0,0114)	0,4259 (0,8573)	0,5906 (0,0957)	-0,2759 (0,3316)	1,3446 (0,2966)	-0,5745 (1,1545)
	50	1,5644 (0,3186)	0,6848 (0,2350)	0,4751 (0,0006)	0,8054 (0,0089)	0,0712 (0,0523)	0,6369 (0,0265)	0,4590 (0,0016)
	75	0,9739 (0,0006)	0,1224 (0,0060)	0,7120 (0,0449)	0,9207 (0,0004)	0,3046 (0,0000)	1,0035 (0,0414)	0,4761 (0,0005)
0,75	20	1,3344 (0,1118)	0,3959 (0,0384)	0,5991 (0,0098)	0,8153 (0,0071)	-0,1459 (0,1988)	1,0454 (0,0602)	0,2635 (0,0558)
	50	1,3376 (0,1140)	0,2629 (0,0039)	0,8792 (0,1438)	1,0116 (0,0124)	-0,0153 (0,0994)	0,6723 (0,0162)	0,4488 (0,0026)
	75	1,2107 (0,0441)	0,0965 (0,0106)	0,7067 (0,0427)	0,8977 (0,0000)	0,0317 (0,1235)	1,1515 (0,0690)	0,7628 (0,0005)
		$\alpha = 1$	$\lambda=0,2$	$\delta = 0,5$	$\phi = 0,9$	$\theta = \mathbf{0,5}$	$\Phi = 0,8$	$\Theta = \mathbf{0,8}$
0,25	20	1,3783 (0,1431)	1,2667 (1,1380)	-0,7726 (1,6196)	1,7504 (0,7232)	0,3391 (0,0258)	0,3973 (0,1621)	0,7089 (0,0082)
	50	0,8998 (0,0100)	0,0584 (0,0200)	0,5937 (0,0087)	0,9613 (0,0037)	0,7161 (0,0467)	0,7942 (0,0000)	0,7070 (0,0096)
	75	1,0459 (0,0021)	0,0049 (0,0380)	0,5801 (0,0064)	0,9595 (0,0035)	0,5541 (0,0029)	0,8128 (0,0001)	0,8194 (0,0003)
0,50	20	2.2332 (1,5209)	0,0380 (0,0262)	-1,4223 (3.6952)	1,6762 (0,6025)	0,6296 (0,0168)	2.2022 (1,9663)	-0,9461 (3.0491)
	50	1,6660 (0,4436)	0,0024 (0,0390)	0,8426 (0,1174)	0,7338 (0,0276)	0,8766 (0,1418)	0,6113 (0,0355)	0,5638 (0,0557)
	75	1,1256 (0,0157)	0,0037 (0,0157)	0,5682 (0,0046)	0,8340 (0,0043)	0,8587 (0,1287)	0,6043 (0,0382)	0,8210 (0,0004)
0,75	20	2.0884 (1,1847)	0,1160 (0,0070)	-0,3216 (0,6750)	2.4381 (2.3659)	0,8649 (0,1331)	1,2215 (0,1776)	-2.3681 (10,0369)
	50	1,3387 (0,1147)	0,0018 (0,0392)	0,8725 (0,1388)	0,7905 (0,0119)	0,8387 (0,1147)	0,5233 (0,0765)	0,5788 (0,0488)
	75	1,0740 (0,0048)	0,1217 (0,0062)	0,5318 (0,0010)	0,9680 (0,0046)	0,4975 (0,0000)	0,8034 (0,0000)	0,8079 (0,0000)

Tabela 29 – Estimativas e EQM para os parâmetros do processo OLLGQ-Exp SARMA(1,1) \times (1,1)₁₂ com função de ligação do tipo Box-Cox ($\gamma = 0,75$)

		$\alpha = 1$	$\lambda=0,2$	$\delta = 0,5$	$\phi = 0,9$	$\theta = \mathbf{0,3}$	$\Phi = 0,8$	$\Theta = \mathbf{0,5}$
Quantil	n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\Phi}$	$\hat{\Theta}$
0,25	20	0,8637 (0,0009)	0,3200 (0,0007)	0,5193 (0,0000)	0,8052 (0,0004)	0,3861 (0,0003)	0,7623 (0,0000)	0,5877 (0,0003)
	50	0,8613 (0,0003)	0,3097 (0,0002)	0,5080 (0,0000)	0,8177 (0,0001)	0,3723 (0,0001)	0,7816 (0,0000)	0,5887 (0,0001)
	75	0,8550 (0,0002)	0,3200 (0,0001)	0,5145 (0,0000)	0,8190 (0,0000)	0,3848 (0,0000)	0,7841 (0,0000)	0,5811 (0,0000)
0,50	20	1,0747 (0,0002)	0,2441 (0,0000)	0,3532 (0,0010)	0,7316 (0,0010)	0,3937 (0,0004)	0,7597 (0,0000)	0,5414 (0,0000)
	50	1,0690 (0,0000)	0,2063 (0,0000)	0,3610 (0,0003)	0,7957 (0,0002)	0,3778 (0,0001)	0,7853 (0,0000)	0,5420 (0,0000)
	75	1,0685 (0,0000)	0,2060 (0,0000)	0,3677 (0,0002)	0,7922 (0,0001)	0,3784 (0,0000)	0,7917 (0,0000)	0,5381 (0,0000)
0,75	20	0,9931 (0,0000)	0,4890 (0,0034)	0,1563 (0,0059)	0,6077 (0,0042)	0,2937 (0,0000)	0,6326 (0,0014)	0,3896 (0,0006)
	50	0,9813 (0,0000)	0,3157 (0,0002)	0,2715 (0,0010)	0,7588 (0,0003)	0,2976 (0,0000)	0,7481 (0,0000)	0,4690 (0,0000)
	75	0,9829 (0,0000)	0,3059 (0,0001)	0,2721 (0,0006)	0,7614 (0,0002)	0,2819 (0,0000)	0,7567 (0,0000)	0,4616 (0,0000)
		$\alpha = 1$	$\lambda=0,2$	$\delta = 0,5$	$\phi = 0,9$	$\theta = \mathbf{0,5}$	$\Phi = 0,8$	$\Theta = \mathbf{0,8}$
0,25	20	0,8552 (0,0010)	0,3300 (0,0008)	0,5201 (0,0000)	0,7875 (0,0006)	0,5692 (0,0002)	0,7655 (0,0000)	0,8790 (0,0003)
	50	0,8394 (0,0005)	0,3487 (0,0004)	0,5383 (0,0000)	0,7781 (0,0002)	0,5514 (0,0000)	0,7686 (0,0000)	0,8772 (0,0001)
	75	0,8418 (0,0003)	0,3460 (0,0002)	0,5178 (0,0000)	0,7847 (0,0001)	0,5591 (0,0000)	0,7770 (0,0000)	0,8762 (0,0000)
0,50	20	1,0674 (0,0002)	0,2126 (0,0000)	0,3646 (0,0009)	0,7763 (0,0007)	0,5638 (0,0002)	0,7611 (0,0000)	0,8217 (0,0000)
	50	1,0517 (0,0000)	0,2285 (0,0000)	0,3775 (0,0002)	0,7952 (0,0002)	0,5548 (0,0000)	0,7895 (0,0000)	0,8396 (0,0000)
	75	1,0320 (0,0000)	0,1973 (0,0000)	0,3631 (0,0002)	0,7861 (0,0001)	0,5470 (0,0000)	0,7764 (0,0000)	0,8369 (0,0000)
0,75	20	0,9782 (0,0000)	0,4044 (0,0020)	0,1826 (0,0050)	0,7085 (0,0018)	0,4153 (0,0003)	0,6961 (0,0005)	0,6675 (0,0008)
	50	0,9977 (0,0000)	0,2409 (0,0000)	0,3023 (0,0004)	0,8123 (0,0001)	0,4677 (0,0000)	0,7921 (0,0000)	0,7812 (0,0000)
	75	0,9723 (0,0000)	0,2598 (0,0000)	0,3271 (0,0003)	0,8223 (0,0000)	0,4346 (0,0000)	0,7759 (0,0000)	0,7636 (0,0000)

É possível observar que as propriedades assintóticas dos estimadores para os cenários apresentados na Tabela (29) são preservadas. A medida que se aumenta o tamanho amostral, os estimadores se aproximam dos valores verdadeiros dos parâmetros e o EQM se aproxima de zero.

Nas séries temporais sazonais existem comportamentos cíclicos ou periódicos. Em alguns estudos e aplicações, a sazonalidade é de importância secundária e é removida dos dados. Já em trabalhos de previsão, por exemplo, a sazonalidade é tão importante quanto outras características dos dados e, portanto, é mantida para a análise das observações.

7 CONCLUSÃO

Foi apresentado a construção de uma nova família de distribuições reparametrizadas pela função quantílica. A partir desse gerador, foi desenvolvida uma nova distribuição de probabilidade através da introdução da distribuição Exponencial como distribuição de base. Essa nova distribuição foi denominada OLLGQ-Exp. Foram desenvolvidas, apresentadas e discutidas diversas propriedades estruturais como: momentos, assimetria e curtose. Além de um estudo das formas da densidade e função taxa de falha - importantes na área de Análise de Sobrevivência. Subsequentemente, desenvolvemos o processo OLLGQ-Exp ARMA e seus casos particulares. Um estudo gráfico foi feito para ratificar a ordem dos processos. Foi realizada a estimação via método da máxima verossimilhança juntamente com um estudo numérico de simulação, além de um estudo sobre a capacidade preditiva dos modelos propostos através de intervalos de previsão. Todos os estudos feitos para duas funções de ligação distintas.

Foi construída e estudada uma generalização do processo ARMA proposto incorporando ao modelo uma estrutura de sazonalidade, generalização denominada OLLGQ-Exp SARMA. O desenvolvimento de cada caso particular estudado foi realizado. Assim como feito para os processos ARMA, um estudo gráfico foi realizado para ratificar a ordem dos modelos trabalhados. Foi realizada a estimação via método da máxima verossimilhança assim como um estudo numérico de simulação.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

1. Apresentar um estudo da capacidade preditiva dos processos SARMA;
2. Apresentar uma aplicação à dados reais para os processos SARMA;

REFERÊNCIAS

- [1] Lima, Maria do Carmo Soares. "Mathematical properties of some generalized gamma models," Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Estatística, UFPE, Recife, 2015.
- [2] Cordeiro, Gauss M. ; Pratavieira, Fábio ; Do Carmo S. Lima, Maria ; Ortega, Edwin M.M. "The Marshall-Olkin extended flexible Weibull regression model for censored lifetime data," *Model Assisted Statistics and Applications*, v. 14, p. 1-17, 2019.
- [3] Zografos, K.; Balakrishnan, N. "On Families of beta- and Generalized Gamma-generated Distributions and Associated Inference," *Statistical Methodology*, v. 6, p. 344–362, 2009
- [4] E. A. Tomé and M. do Rosário Dias de Oliveira Latorre, "Tendências da mortalidade infantil no município de guarulhos: análise do período de 1971 a 1998," *Revista Brasileira de Epidemiologia*, vol. 4, pp. 153-167, nov 2001
- [5] V. Marães, "Frequência cardíaca e sua variabilidade: análises e aplicações," *Revista andaluza de medicina del deporte*, ISSN 1888-7546, N^o. 1, 2010, pags. 33-42, 2009.
- [7] M. A. de Oliveira Góes, C. M. de Melo, and V. de Lourdes Sierpe Jeraldo, "Série temporal da leishmaniose visceral em Aracaju, estado de sergipe, brasil (1999 a 2008): aspectos humanos e caninos," *Revista Brasileira de Epidemiologia*, vol. 15, pp. 298-307, jun 2012.
- [8] M. A. de Oliveira Góes, C. M. de Melo, and V. de Lourdes Sierpe Jeraldo, "Série temporal da leishmaniose visceral em Aracaju, estado de sergipe, brasil (1999 a 2008): aspectos humanos e caninos," *Revista Brasileira de Epidemiologia*, vol. 15, pp. 298-307, jun 2012.
- [9] F. Kedem, *Time Series Analysis*. John Wiley Sons, 2002.
- [10] H. S. Bakouch and B. V. Popovic, "Lindley first-order autoregressive model with applications," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 45, pp. 4988-5006, jul 2016.

-
- [11] MELLO, Alice BV; LIMA, Maria CS; NASCIMENTO, Abraão DC. A notable Gamma-Lindley first-order autoregressive process: An application to hydrological data. *Environmetrics*, v. 33, n. 4, p. e2724, 2022.
- [12] G. Grätzer, *More Math Into LaTeX*. Springer International Publishing, 2016.
- [13] Lima, Maria C.S.; Cordeiro, Gauss M. ; Ortega, Edwin M.M. ; Nascimento, Abraão D.C. "A new extended normal regression model: simulations and applications," *Journal of Statistical Distributions and Applications*, v. 6, p. 7, 2019.
- [14] GLEATON, James U.; LYNCH, James D. Extended generalized log-logistic families of lifetime distributions with an application. *J. Probab. Stat. Sci*, v. 8, n. 1, p. 1-17, 2010.
- [15] CRUZ, José Nilton da; ORTEGA, Edwin MM; CORDEIRO, Gauss M. The log-odd log-logistic Weibull regression model: modelling, estimation, influence diagnostics and residual analysis. *Journal of statistical computation and simulation*, v. 86, n. 8, p. 1516-1538, 2016.
- [16] DA BRAGA, Altemir Silva et al. The odd log-logistic normal distribution: Theory and applications in analysis of experiments. *Journal of Statistical Theory and Practice*, v. 10, p. 311-335, 2016.
- [17] Cordeiro, Gauss M. ; Lima, Maria do Carmo S. ; Cysneiros, Audrey H.M.A. ; Pascoa, Marcelino A. R. ; Pescim, Rodrigo R. ; Ortega, Edwin M. M. "An extended Birnbaum-Saunders distribution: Theory, estimation, and applications." *Communications in Statistics. Theory and Methods*, v. 45, p. 2268-2297, 2016.
- [18] MARSHALL, Albert W.; OLKIN, Ingram. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, v. 84, n. 3, p. 641-652, 1997.
- [19] Brito, Filipe Almeida de Andrade Lima. "PROCESSO ARMA LOMAX COM ESTRUTURA NA FUNÇÃO QUANTÍLICA", *Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Estatística, UFPE, Recife*, 2021.

-
- [20] RIBEIRO, T. F. Essays on the unit Burr XII distribution: regression and time series models. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2020.
- [21] Chaves, André Medeiros. "PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADO REPARAMETRIZADO E PROPRIEDADES,"Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Estatística, UFPE, Recife, 2021.
- [22] Lima, Ivangillys Gomes. "PROCESSO GOMPERTZ-ARMA E PROPRIEDADES: Uma Aplicação à Precificação do Mercado Financeiro,"Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Estatística, UFPE, Recife, 2021.
- [23] GUSMÃO, Felipe Ricardo Santos. "Um estudo sobre a teoria da identificabilidade paramétrica e suas aplicações em novas distribuições e classes de distribuições de probabilidade,"Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, UFRPE, Recife, 2022.
- [24] BARRETO-SOUZA, Wagner; SANTOS, Alessandro HS; CORDEIRO, Gauss M. The beta generalized exponential distribution. *Journal of statistical Computation and Simulation*, v. 80, n. 2, p. 159-172, 2010..
- [25] PAREKH, S. G.; GHOSH, D. K.; PATEL, S. R. On frailty models for kidney infection data with exponential baseline distribution. *International Journal of Applied Mathematics Statistical Sciences (IJAMSS)*, v. 4, n. 5, p. 31-40, 2015.
- [26] OGUNTUNDE, P. E.; ODETUNMIBI, O. A.; ADEJUMO, A. O. On the exponentiated generalized Weibull distribution: A generalization of the Weibull distribution. *Indian Journal of Science and Technology*, v. 8, n. 35, p. 1-7, 2015.
- [27] MANSOOR, M. et al. The Marshall-Olkin logistic-exponential distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 48, n. 2, p. 220-234, 2019.
- [28] Oguntunde, Pelumi E., et al. "The Burr X-exponential distribution: Theory and applications."World Congress on Engineering, 2017.

-
- [29] AWODUTIRE, Phillip. Statistical Properties and Applications of the Exponentiated Chen-G Family of Distributions: Exponential Distribution as a Baseline Distribution. *Austrian Journal of Statistics*, v. 51, n. 2, p. 57-90, 2022.
- [30] ZUUR, Alain F. et al. GLM and GAM for absence–presence and proportional data. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*, p. 245-259, 2009.
- [31] KIEFER, Christoph; MAYER, Axel. Average effects based on regressions with a logarithmic link function: A new approach with stochastic covariates. *psychometrika*, v. 84, n. 2, p. 422-446, 2019.
- [32] NAIMI, Ashley I.; WHITCOMB, Brian W. Estimating risk ratios and risk differences using regression. *American journal of epidemiology*, v. 189, n. 6, p. 508-510, 2020
- [33] BOX, George EP; COX, David R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, v. 26, n. 2, p. 211-243, 1964.
- [34] FAN, Tsai-Hung; WANG, Wan-Lun; BALAKRISHNAN, N. Exponential progressive step-stress life-testing with link function based on Box–Cox transformation. *Journal of statistical planning and inference*, v. 138, n. 8, p. 2340-2354, 2008.
- [35] PALM, Bruna Gregory; BAYER, Fábio M.; CINTRA, Renato J. Prediction intervals in the beta autoregressive moving average model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, v. 52, n. 8, p. 3635-3656, 2023.
- [36] BOX, George EP; JENKINS, Gwilym M.; REINSEL, Gregory C. Forecasting. *Time Series Analysis*, p. 137-191, 2008.
- [37] AKAIKE, Hirotugu. Block Toeplitz matrix inversion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 24, n. 2, p. 234-241, 1973.
- [37] AKAIKE, Hirotugu. Block Toeplitz matrix inversion. *SIAM Journal on Applied Mathema-*

tics, v. 24, n. 2, p. 234-241, 1973.

[38] HYNDMAN, Rob J.; KOEHLER, Anne B. Another look at measures of forecast accuracy. *International journal of forecasting*, v. 22, n. 4, p. 679-688, 2006.

[39] ANDREOLLI, Ivanildo et al. Previsão de vazão afluente a um reservatório utilizando previsão quantitativa de chuva. *Rbrh: revista brasileira de recursos hídricos*. Porto Alegre, RS: ABRH. Vol. 11, n. 3 (jul./set. 2006), p. 55-69, 2006.

[40] MACHADO, Marco Aurélio de Mello; SILVA, Eder David Borges da. Estimativa de chuvas intensas para o oeste de Minas Gerais e o entorno do reservatório da usina hidrelétrica de Furnas. *Conexão Ciência (Online)*, v. 6, n. 2, p. 01-11, 2011.

[42] DE OLIVEIRA, Leidiane Leão et al. Influência do El Niño Oscilação Sul–ENOS–(2015/2016) no regime hidrológico e geração de energia na usina hidrelétrica de Curuá-Una, Amazônia central. *Revista Ibero-Americana de Ciências Ambientais*, v. 11, n. 4, p. 136-144, 2020.

[43] VILAR, Rafaella de Araújo Aires et al. Avaliação do Impacto de Secas Severas no Nordeste Brasileiro na Geração de Energia Elétrica Através do Modelo Newave: Projeção das Energias Afluentes e Armazenadas. *Revista brasileira de meteorologia*, v. 35, p. 89-98, 2020.

[44] BASAWA, I. V.; LUND, Robert; SHAO, Qin. First-order seasonal autoregressive processes with periodically varying parameters. *Statistics probability letters*, v. 67, n. 4, p. 299-306, 2004.

[45] MORIÑA, David et al. A statistical model for hospital admissions caused by seasonal diseases. *Statistics in medicine*, v. 30, n. 26, p. 3125-3136, 2011.

[46] BRIËT, Olivier JT; AMERASINGHE, Priyanie H.; VOUNATSOU, Penelope. Generalized seasonal autoregressive integrated moving average models for count data with application to malaria time series with low case numbers. *PloS one*, v. 8, n. 6, p. e65761, 2013.

[47] BOURGUIGNON, Marcelo et al. A Poisson INAR (1) process with a seasonal structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 86, n. 2, p. 373-387, 2016.

-
- [48] BOX, George EP et al. Time series analysis: forecasting and control. John Wiley Sons, 2015.
- [49] ROCHA, Andréa V.; CRIBARI-NETO, Francisco. Beta autoregressive moving average models. *Test*, v. 18, p. 529-545, 2009.
- [50] FERRARI, Silvia; CRIBARI-NETO, Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *Journal of Applied Statistics*, 2004, vol. 31, issue 7, 799-815.
- [51] YAN, Y., GENTON, M. G. Non-Gaussian autoregressive processes with Tukey g-and-h transformations. *Environmetrics*, 30, e2503, 2019.
- [51] Almeida-Junior, P. M., Nascimento, A. D. C. (2021). \mathcal{G}_I^0 ARMA process for speckled data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91, 3125–3153.
- [52] VASCONCELOS JM. Essays on new models and the mellin transform: experiments in survival and radar data [Master's thesis]. Universidade Federal de Pernambuco; 2018.
- [53] HURVICH, Clifford M.; TSAI, Chih-Ling. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, v. 76, n. 2, p. 297-307, 1989.
- [54] Kedem, Benjamin Fokianos, Konstantinos. (2005). *Regression Models for Time Series Analysis* / B. Kedem, K. Fokianos.. 10.1002/0471266981.
- [54] Erisoglu, U., Erisoglu, M. and Erol, H. (2011) A Mixture Model of Two Different Distributions Approach to the Analysis of Heterogeneous Survival Data. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 5, 75-79.
- [55] G. M. Ljung; G. E. P. Box (1978). "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*. 65 (2): 297–303. doi:10.1093/biomet/65.2.297.
- [56] Benjamin, M., Rigby, R., and Stasinopoulos, D. (2003). Generalized autoregressive mo-

ving average models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 98:214–223.

APÊNDICE A – MATRIZ INFORMAÇÃO DE FISHER

Através dos resultados obtidos na seção 6.3.1, foram calculadas as componentes da matriz $I[U(\boldsymbol{\pi})]$.

Calculando as derivadas de segunda ordem com respeito a α , obtemos a primeira linha da matriz $I[U(\boldsymbol{\pi})]$:

$$\begin{aligned} \kappa_{(\alpha,\alpha)} = \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha^2} - \left\{ \left[-2(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \left[\log(1 - e^{-\lambda x_t}) + \log(\log(1 - e^{-\lambda x_t})) \right] \right] \right. \\ &- u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \log(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha + \lambda(x_t - q_t) + \log(1 - e^{-\lambda q_t}) \\ &+ \log(\log(1 - e^{-\lambda q_t})) \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \\ &+ \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t}) - u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &\times \left. \left[(\lambda(x_t - q_t)) \log(1 - e^{-\lambda x_t}) \right] \left[2(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \right] \right. \\ &+ \left. u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right\} \\ &\times \left\{ (1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right\}^{-2} \\ &- \left\{ \left[2\lambda(x_t - q_t)u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{\lambda \alpha(x_t - q_t)} \left[\lambda(x_t - q_t) - \log(1 - e^{-\lambda q_t}) \right] \right] \right. \\ &\times \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &- \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t}) - u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &\times \left. \left[\lambda(x_t - q_t) \log(1 - e^{-\lambda x_t}) \right] \right] \left[2\lambda e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(x_t - q_t)u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \right\} \\ &\times \left\{ (1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right\}^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{(\alpha,\lambda)} = \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha \partial \lambda} &= \frac{q_t e^{-\lambda q_t}}{1 - e^{-\lambda q_t}} + \frac{x_t e^{-\lambda q_t}}{1 - e^{-\lambda x_t}} - x_t + q_t - \left\{ 2x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1} \left[1 + \alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t}) \right] \right. \\ &\times \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &- \left. \left[\log(1 - e^{-\lambda x_t})(1 - e^{\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &\times \left. \left(\log(1 - e^{\lambda q_t}) - \lambda(x_t - q_t) \right) \right] \left[2\alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1} \right\} \\ &\times \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right]^\alpha \\ &+ \left\{ u^{-1}(1 - u) \left(e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} - \alpha \lambda(x_t - q_t) e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \right. \\ &\times \left. \left[q_t e^{-\lambda q_t (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1}} + x_t - q_t \right] \left[1 + \log(1 - e^{-\lambda q_t})(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha 2u^{-1}(1 - u)^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &\times \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] - \left[\log(1 - e^{-\lambda x_t})(1 - e^{\lambda x_t})^\alpha \right. \right. \\ &+ \left. \left. u^{-1}(1 - u)(1 - e^{\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \left(\log(1 - e^{\lambda q_t}) - \lambda(x_t - q_t) \right) \right] \right. \\ &\times \left. \left[2\alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1} \right] \right\} \times \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right]^2; \end{aligned}$$

$$K_{(\alpha,\delta)} = \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha \partial \delta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t \partial \alpha} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \delta \partial \alpha} \frac{\partial \lambda_t}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \alpha} &= \frac{\lambda e^{-\lambda q_t}}{1 - e^{-\lambda q_t}} + \lambda - \left\{ 2\lambda u^{-1}(1-u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \left[(1 - \lambda(x_t - q_t))(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [1 + (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1}] \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda q_t}) \right] \times \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1-u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right] \right. \\ &- \left. \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda x_t}) + u^{-1}(1-u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (\log(1 - e^{-\lambda q_t}) - \lambda(x_t - q_t)) \right] \right\} \\ &\times \left[2\lambda \alpha u^{-1}(1-u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \left[(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1 \right] \right] \\ &\times \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1-u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} \right]^{-1}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} = -\frac{1}{g'(q_t)^2} \frac{\partial^2 g(q_t)}{\partial \eta_t \partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \alpha \partial \delta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \delta \partial \alpha} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \delta \partial \alpha} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \delta \partial \alpha}.$$

$$K_{(\alpha, \phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \alpha \partial \phi} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \alpha} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \alpha} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \phi \partial \alpha} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \phi \partial \alpha} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \phi \partial \alpha}$$

$$K_{(\alpha, \theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \theta \partial \alpha} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \alpha} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \alpha} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta \partial \alpha} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \theta \partial \alpha} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \theta \partial \alpha}$$

$$K_{(\alpha, \Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Phi \partial \alpha} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \alpha} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \alpha} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Phi \partial \alpha} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Phi \partial \alpha} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Phi \partial \alpha}$$

$$K_{(\alpha, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Theta \partial \alpha} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \alpha} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \alpha} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \alpha} = -\theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Theta \partial \alpha} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Theta \partial \alpha} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Theta \partial \alpha}$$

Para calcular a segunda linha da matriz $I[U(\pi)]$, foram calculadas as derivadas parciais com relação a λ , observando que $K_{(\lambda,\alpha)}$ já foi calculado na primeira linha, dado que é igual a $K_{(\alpha,\lambda)}$.

$$\begin{aligned}
K_{(\lambda,\lambda)} &= \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\alpha q_t e^{\lambda q_t}}{(e^{\lambda q_t} - 1)^2} - \frac{(\alpha - 1)x_t e^{\lambda x_t}}{(e^{\lambda x_t} - 1)^2} + \left\{ \frac{-2\alpha x_t^2 (1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha (e^{\lambda x_t} - \alpha)}{(e^{\lambda x_t} - 1)^2} \right. \\
&\times [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}] \\
&- [u^{-1}(1 - u)\alpha q_t (1 - e^{-\lambda q_t})^{\alpha-1} e^{-\lambda(\alpha(x_t - q_t) + q_t)} \\
&+ u^{-1}\alpha(x_t - q_t)(u - 1)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha + \alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1}] \\
&\times [2\alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1}] \left. \right\} / [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}]^2 \\
&- \{2\alpha u^{-1}(1 - u)(e^{\lambda q_t} - 1)^{-2} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{\alpha \lambda(q_t - x_t)} [\alpha(e^{\lambda q_t} (q_t^2 - 2q_t x_t + q_t + 2x_t(x_t - 1)) \\
&+ (x_t - 1)e^{2\lambda q_t} (q_t - x_t) + x_t(q_t - x_t + 1)) - q_t^2 e^{\lambda q_t}] \\
&\times [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}] \\
&- [u^{-1}(1 - u)\alpha q_t (1 - e^{-\lambda q_t})^{\alpha-1} e^{-\lambda(\alpha(x_t - q_t) + q_t)} \\
&+ u^{-1}\alpha(x_t - q_t)(u - 1)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha + \alpha x_t e^{-\lambda x_t} (1 - e^{-\lambda x_t})^{\alpha-1}] \\
&\times [-2u^{-1}(1 - u)\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [q_t e^{-\lambda q_t} (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + x_t - q_t]] \left. \right\} \\
&/ [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}]^2;
\end{aligned}$$

$$K_{(\lambda,\delta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \delta \partial \lambda} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \delta \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} &= \alpha \left(\frac{e^{-\lambda q_t} [(1 - q_t \lambda)(1 - e^{-\lambda q_t}) - \lambda^2 e^{-\lambda q_t}]}{(1 - e^{-\lambda q_t})^2} + 1 \right) \\
&- \left\{ [2\alpha u^{-1}(1 - u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - \lambda^2 \alpha(x_t - q_t))(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1] \right. \\
&+ 2\alpha \lambda q_t u^{-1}(1 - u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^{\alpha-1}] \\
&\times [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}] \\
&- \alpha [x_t (1 - e^{-x_t})^{\alpha-1} + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (q_t (1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} - x_t + q_t)] \\
&\times [2\lambda \alpha u^{-1}(1 - u)e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha [(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1]] \left. \right\} \\
&/ [(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1}(1 - u)(1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha(x_t - q_t)}]^2;
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} = -\frac{1}{g'(q_t)^2} \frac{\partial^2 g(q_t)}{\partial \eta_t \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda \partial \delta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \delta \partial \lambda} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \delta \partial \lambda} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \delta \partial \lambda};$$

$$K_{(\lambda,\phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \lambda \partial \phi} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda \partial \phi} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \phi \partial \lambda} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \phi \partial \lambda} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \phi \partial \lambda}.$$

$$K_{(\lambda,\theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \lambda \partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda \partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta \partial \lambda} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \theta \partial \lambda} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \theta \partial \lambda}.$$

$$K_{(\lambda,\Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \lambda \partial \Phi} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \lambda} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Phi \partial \lambda} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Phi \partial \lambda} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Phi \partial \lambda}.$$

$$K_{(\lambda,\Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \lambda \partial \Theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \lambda} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \lambda} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \lambda} = -\theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Theta \partial \lambda} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Theta \partial \lambda} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Theta \partial \lambda}.$$

A terceira linha da matriz $I[U(\boldsymbol{\pi})]$ foi obtida calculando as derivadas parciais com relação a δ .

$$K_{(\delta,\delta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \delta^2} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t(\pi)}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \eta_t(\pi)}{\partial \delta^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}.$$

Em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} &= -\frac{\alpha \lambda^2 e^{\lambda q_t}}{(e^{\lambda q_t} - 1)^2} - \left\{ \left[2\lambda^2 \alpha^2 u^{-1} (1-u) e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} \left[(1 - e^{-\lambda q_t}) - (1 - e^{-\lambda q_t})^{-2} \right] \right. \right. \\ &\times \left[(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1 \right] + 2\lambda \alpha u^{-1} (1-u) e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^{\alpha-2} \\ &\times \left[(1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1} (1-u) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} \right] \\ &- \lambda \alpha u^{-1} (1-u) e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \left[(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1 \right] \\ &\times \left. \left[2\lambda \alpha u^{-1} (1-u) e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha \left[(1 - e^{-\lambda q_t})^{-1} + 1 \right] \right] \right\} \\ &/ \left\{ (1 - e^{-\lambda x_t})^\alpha + u^{-1} (1-u) (1 - e^{-\lambda q_t})^\alpha e^{-\lambda \alpha (x_t - q_t)} \right\}^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} = -\frac{1}{g'(q_t)^2} g''(q_t);$$

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \delta^2} = \theta \frac{\partial^2 \eta_{t-1}}{\partial \delta^2} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \delta^2} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \delta^2}.$$

$$K_{(\delta, \phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \phi \partial \delta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \delta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \delta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial q_t} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \delta \partial q_t} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t};$$

$$\frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \delta} = -\frac{1}{g'(q_t)^2} \frac{\partial^2 g(q_t)}{\partial \eta_t \partial \delta}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \delta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \phi \partial \delta} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \phi \partial \delta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \phi \partial \delta}.$$

$$K_{(\delta, \theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \delta \partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \delta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \delta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta \partial \delta} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \theta \partial \delta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \theta \partial \delta}.$$

$$K_{(\delta, \Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Phi \partial \delta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \delta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \delta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Phi \partial \delta} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Phi \partial \delta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Phi \partial \delta}.$$

$$K_{(\delta, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \delta \partial \Theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \delta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \delta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta \partial \delta} = -\theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \Theta \partial \delta} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Theta \partial \delta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Theta \partial \delta}.$$

A quarta linha da matriz $I[U(\pi)]$ foi obtida calculando as derivadas parciais com relação a ϕ .

$$K_{(\phi, \phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t(\pi)}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t(\pi)}{\partial \phi^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}.$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi^2} = \theta \frac{\partial^2 \eta_{t-1}}{\partial \phi^2} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \phi^2} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \phi^2}.$$

$$K_{(\phi, \theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \phi \partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \theta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta \partial \phi} + \Theta \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \theta \partial \phi} - \theta \Theta \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \theta \partial \phi}.$$

$$K_{(\phi, \Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \phi \partial \Phi} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \Phi} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \Phi} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \phi \partial \Phi} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}.$$

$$K_{(\phi, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Phi \partial \Theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \Theta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}.$$

Analogamente, para a quinta linha da matriz, derivamos parcialmente com relação a θ .

$$K_{(\theta, \theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t(\pi)}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t(\pi)}{\partial \theta^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta^2} = \frac{\partial \eta_{t-1}}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial^2 \eta_{t-1}}{\partial \theta^2} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \theta^2} - \Theta \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \theta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \theta^2};$$

$$K_{(\theta, \Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \theta \partial \Phi} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \Phi} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \Phi} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \Phi} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

$$K_{(\theta, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \theta \partial \Theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \Theta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \theta \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

A sexta linha é obtida através das derivadas de segunda ordem com respeito a Φ .

$$K_{(\Phi, \Phi)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Phi^2} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t(\pi)}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t(\pi)}{\partial \Phi^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

Em que

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi^2} = \theta \frac{\partial^2 \eta_{t-1}}{\partial \Phi^2} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Phi^2} - \theta \Theta \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \Phi}$$

$$K_{(\Phi, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Phi \partial \Theta} = \left(\frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t \partial \Theta} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Phi \partial \Theta} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t}$$

E por fim,

$$K_{(\Theta, \Theta)} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial \Theta^2} = \frac{\partial^2 l_t(\pi)}{\partial q_t^2} \frac{\partial q_t(\pi)}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 q_t}{\partial \eta_t^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \eta_t(\pi)}{\partial \Theta^2} \frac{\partial l_t(\pi)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t},$$

com

$$\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \Theta^2} = -\theta \frac{\partial^2 \eta_{t-1}}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial \eta_{t-12}}{\partial \Theta} + \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-12}}{\partial \Theta^2} - \theta \frac{\partial \eta_{t-13}}{\partial \Theta} - \theta \Theta \frac{\partial^2 \eta_{t-13}}{\partial \Theta^2}.$$

APÊNDICE B – CÓDIGOS

Segue abaixo o código em R para o cálculo dos momentos da distribuição OLLGQ-Exp apresentados na Tabela 3:

```
#Exemplo Integração Numérica - Cálculo dos Momentos
#Cenário
q=1;alpha=1;lambda=1.5;u=0.5

f<-function(x){

  #Exponencial
  g<- lambda*exp(-lambda*x)
  G<-1 - exp(-lambda*x)
  G1<-1 - exp(-lambda*q)

  #Densidade OLLGQ-Exp
  fx<-(1-u)*G1^(alpha)*alpha*g*G^(alpha-1)*(1-G)^(alpha-1)
  aux<-u*(1-G1)^(alpha)*(G^(alpha)+(1-u)*G1^(alpha)*
  (1-G)^(alpha)*(u*(1-G1)^(alpha))^(-1))^2)
  fx<-fx/aux

  #Primeiro momento
  mu1<-x*fx
  #Segundo momento
  mu2<-x^3*fx
  #Terceiro momento
  mu3<- x^3*fx
  #Quarto momento
  mu4<- x^4*fx

  return(mu1) #retornando o Primeiro Momento
}
```

```
momento<-integrate(f,lower = 0, upper = Inf)
```

```
momento
```

APÊNDICE C – ALGORITMOS

Algoritmo 1 Algoritmo de geração dos quatro primeiros momentos e variância da distribuição OLLGQ-Exp.

1. Atribua valores para os parâmetros que deseja fixar.
2. Implemente a integral correspondente a cada um dos momentos que pretende calcular.
3. Calcule os momentos para os valores atribuídos.
4. A variância é obtida através dos valores dos primeiros e dos segundos momentos já calculados nos passos anteriores.

Algoritmo 2

Algoritmo para a geração da assimetria e da curtose para a distribuição OLLGQ-Exp.

1. Para cada cenário pré-estabelecido, gere amostras da distribuição OLLGQ-Exp através da função quantílica (método da inversão).
2. Calcule a média, moda e o desvio padrão dessas amostras.
3. Implemente uma função para a assimetria e calcule-as para os valores obtidos no passo anterior.
4. A curtose é obtida a partir dos valores do quarto momento e do desvio padrão, calculados nos passos anteriores.

Algoritmo 3

Algoritmo de geração de valores para uma série OLLGQ-Exp ARMA (p, q) .

1. Atribua valores aos parâmetros δ , ϕ_i e θ_k correspondentes ao processo pretendido.
2. Defina os valores iniciais da componente aleatória.
3. Calcule de modo recursivo os n valores de q_t através de $q_t = g^{-1}(\eta_t)$, com $g(\cdot)$ definida em (4.1).
4. Gere as observações $X_t \sim OLLGQ - Exp$ a partir de q_t obtido no item anterior.

Algoritmo 4

Algoritmo de geração de valores para uma série OLLGQ-Exp SARMA $(1, 1) \times (1, 1)_{12}$

1. Defina, atribuindo valores, a configuração paramétrica.
2. Defina os valores iniciais para q_t .
3. Para os valores definidos acima, encontre os valores de x_t correspondentes.
4. Calcule de modo recursivo os n valores de q_t através de $q_t = g^{-1}(\eta_t)$, com $g(\cdot)$ definida em (6.1).

5. Gere as observações $X \sim OLLGQ - ExpSARMA(1,1) \times (1,1)_{12}$ a partir da série de q_t obtida no item anterior.
