



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**TRANSPORTE EM NANOESTRUTURAS: MÉTODOS DE  
MOVIMENTO BROWNIANO E TEORIA DE CIRCUITOS**

por

**Ailton Fernandes de Macedo Junior**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Antônio Murilo S. Macêdo (Orientador-UFPE)  
Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (DF - UFPE)  
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF-UFPE)  
Prof. Maurício Porto Pato (IF-USP)  
Prof. Francisco Castilho Alcaraz (IFSC - USP)

Recife - PE, Brasil  
Dezembro – 2006

**Macedo Junior, Ailton Fernandes de**  
**Transporte em nanoestruturas : métodos de**  
**movimento browniano e teoria de circuitos / Ailton**  
**Fernandes de Macedo Junior. – Recife : O Autor,**  
**2006.**

X, 233 folhas ; il., fig., tab., gráf.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Departamento de Física, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Física matemática. 2. Teoria de matrizes  
aleatórias. 3. Equação de Fokker-Plank . 4. Modelo de  
Calogero-Sutherland. 5. Polinômios de Jack. 6. Física  
mesoscópica. 7. Regime semiclássico 8. Teoria de  
circuitos. I. Título.

530.15

CDD (22.ed.)

UFPE  
FQ 2007-002



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

---

**Ailton Fernandes de Macêdo Júnior**

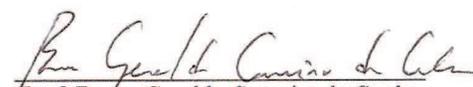
### MÉTODOS DE MOVIMENTO BROWNIANO E TEORIA DE CIRCUITOS

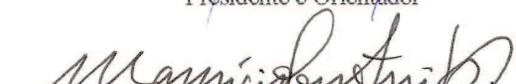
A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, Maurício Domingues Coutinho Filho, todos da Universidade Federal de Pernambuco, Maurício Porto Pato e Francisco Castilho Alcaraz, ambos da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

( ) Aprovado com Distinção      (X) Aprovado      ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos dezanove dias do mês de dezembro de 2006.

  
Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo  
Presidente e Orientador

  
Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha

  
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho

  
Prof. Maurício Porto Pato

  
Prof. Francisco Castilho Alcaraz

## Agradecimentos

Com este trabalho finalizo uma caminhada que durou pouco mais de 10 anos na qual foram vencidos vários obstáculos com a ajuda de muitas pessoas. Gostaria de agradecer especialmente a Daniela, minha namorada no início desta caminhada e, hoje, minha esposa amada, por sua paciência e apoio nos momentos difíceis. Aos meus pais que, embora ainda achem estranho o fato de eu precisar ir à faculdade nos finais de semana, sempre me apoiaram e se orgulharam do filho “estudioso”. Aos meus irmãos Marcos e Suely pelo apoio e confiança.

Também gostaria de agradecer aos amigos do DF: Paulo Peixoto, Laércio Dias, Wilton Araújo, José Ferraz, Helinando Pequeno, Cássia Cristina, Fernando Parísio e Renê Montenegro e José Barba. E aos companheiros do grupo de física mesoscópica: Anderson Barbosa e Gerson Cortês. Faço um agradecimento especial ao meu amigo e padrinho Pedro Hugo que, desde a nossa primeira conversa depois de uma certa aula de eletromagnetismo, se mostrou uma pessoa muito paciente e disponível. Guardarei boas lembranças desse pessoal.

Aos eficientes funcionários DF: Joaquim (limpeza), Paulo Pinto (segurança), Ivo (Xerox), Ana e Joana (biblioteca). Ao meu primeiro orientador e padrinho de casamento Marco Gameiro, pela amizade adquirida nos tempos da iniciação científica. Gostaria de agradecer particularmente ao professor Antônio Murilo pela orientação nos últimos seis anos, sempre me transmitindo confiança e incentivo para a realização de pesquisa em física teórica.

Por fim, agradeço ao CNPQ e à Facepe pelo apoio financeiro.

## Resumo

Os resultados apresentados nesta tese podem ser divididos em duas partes. Na primeira estudamos uma classe de ensembles de movimento browniano (EMB) da teoria de matrizes aleatórias, gerados a partir da teoria matricial de processos estocásticos markovianos. Os ensembles são caracterizados por uma equação de Fokker-Planck e estão intimamente relacionados a hamiltonianos de sistemas quânticos do tipo Calogero-Sutherland. Esta conexão leva a um esquema geral de classificação baseada numa recente generalização multidimensional dos polinômios ortogonais clássicos. Mostramos que, sob certas condições, os EMB englobam os ensembles de matrizes de transferência. Desta forma, desenvolvemos um tratamento unificado dos ensembles de polinômios e de matrizes de transferência que, além de servir como um esquema de classificação das diversas classes de simetria, fornece técnicas eficientes de cálculo. Desenvolvemos métodos de Fokker-Planck para o cálculo de médias de observáveis representados por estatísticas lineares, assim como para o cálculo de funções de correlação. Neste contexto, desenvolvemos um método de transformada integral e uma generalização do método das funções biortogonais para o cálculo da função de correlação de  $n$ -pontos. Os resultados deduzidos neste contexto geral são aplicados a pontos e fios quânticos. Em particular, apresentamos um estudo numérico de propriedades de transporte em pontos quânticos com simetria quiral. Na segunda parte, estudamos uma cavidade caótica balística acoplada, via barreiras de transparência arbitrária, a dois guias semi-infinitos usando as duas abordagens de teoria de circuito disponíveis na literatura: a escalar e a matricial. Mostramos a equivalência destas teorias através do cálculo dos cumulantes da estatística de contagem. Para isso, determinamos as funções geratrizes fornecidas pelas duas teorias e verificamos a concordância dos 18 primeiros cumulantes usando um programa de computação algébrica. Também estudamos distribuições exatas de corrente de alguns sistemas simples de dois terminais, como um ponto quântico com barreiras simétricas. Estes resultados são importantes, pois fornecem uma grandeza diretamente mensurável em experimentos.

**Palavras-chave:** teoria de matrizes aleatórias, equação de Fokker-Planck, modelo de Calogero-Sutherland, polinômios de Jack, física mesoscópica, regime semiclássico, teoria de circuitos.

## Abstract

The results presented in this thesis can be divided into two parts. In the first one we study a class of Brownian motion ensembles (BME) obtained from the general theory of matricial Markovian stochastic processes of random matrix theory. The ensembles are characterized by a Fokker-Planck equation and are closely related to Hamiltonians of Calogero-Sutherland type quantum systems. This connection allows a general classification scheme based on a recent multivariate generalization of classical orthogonal polynomials. We show that, under certain conditions, the BME can be applied to transfer matrix ensembles. Therefore, we developed a unified treatment of polynomial and transfer matrix ensembles that, apart from being used as a classification scheme of diverse symmetry classes, allows efficient calculation techniques. We developed Fokker-Planck methods to calculate ensemble averages of observables represented by linear statistics, and to obtain correlation functions. In this case, we developed an integral transform method and a biorthogonal polynomial method to calculate the  $n$ -point correlation function. The results obtained at this general context are applied to quantum dots and quantum wires. In particular, we present a numerical study of transport properties in quantum dots with chiral symmetry. At the second part, we study an open ballistic chaotic cavity coupled, via barriers of arbitrary transparency, to two semi-infinite waveguides by using both the known circuit theory available in the literature: the scalar and the matricial theories. We show the equivalence between them by obtaining the cumulants of charge counting statistics via the generating function from both approaches and by verifying the agreement of the first 18 cumulants via algebraic computation softwares. We also studied exact distributions of electrical current for some two terminals simple systems, such as a quantum dot with symmetric barriers. These results are important, since they supply a measurable quantity in experiments.

**Keywords:** random matrix theory, Fokker-Planck equation, Calogero-Sutherland model, Jack polynomials, mesoscopic physics, semiclassical regime, circuit theory.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Capítulo 2. Teoria de matrizes aleatórias . . . . .	1
1.2	Capítulo 3. Transporte em pontos quânticos quirais . . . . .	3
1.3	Capítulo 4. Ensembles de movimento browniano . . . . .	3
1.4	Capítulo 5. Método da transformada integral . . . . .	5
1.5	Capítulo 6. Método das funções biortogonais . . . . .	5
1.6	Capítulo 7. Teoria de circuitos . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teoria de matrizes aleatórias</b>	<b>7</b>
2.1	Ensembles gaussianos . . . . .	8
2.2	Funções de correlação . . . . .	11
2.2.1	Método dos polinômios ortogonais . . . . .	12
2.2.2	Estatística linear . . . . .	20
2.3	Problemas de espalhamento . . . . .	21
2.3.1	Matrizes de espalhamento . . . . .	22
2.3.2	Teoria de Landauer-Büttiker . . . . .	24
2.3.3	Matrizes aleatórias em problemas de espalhamento . . . . .	26
2.3.4	Média sobre o grupo unitário . . . . .	28
2.3.5	Representação Polar . . . . .	30
2.4	Ensembles de matrizes de transferência . . . . .	32
2.4.1	Equação DMPK . . . . .	36
2.5	Novas classes de simetria . . . . .	37
2.6	Classificação por espaços simétricos . . . . .	39

---

2.6.1	Classificação dos ensembles de matrizes aleatórias . . . . .	43
2.7	O modelo de Calogero-Sutherland . . . . .	45
2.7.1	Estado fundamental . . . . .	46
2.7.2	Estados excitados . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Transporte em pontos quânticos quirais</b>	<b>50</b>
3.1	Simetria quirial . . . . .	52
3.1.1	Matriz de espalhamento quirial . . . . .	54
3.2	Princípio de máxima entropia . . . . .	56
3.3	Cálculo de médias e de distribuições . . . . .	57
3.3.1	Sistema com um modo propagante . . . . .	58
3.3.2	Sistema com dois modos propagantes . . . . .	61
3.4	Solução numérica . . . . .	64
3.4.1	Hamiltoniano quirial . . . . .	64
3.4.2	Matriz de espalhamento . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Ensembles de movimento browniano</b>	<b>73</b>
4.1	Ensembles de movimento browniano . . . . .	74
4.2	Conexão com o problema de Calogero-Sutherland . . . . .	78
4.3	Ensembles de Matrizes de Transferência . . . . .	83
4.3.1	Equação de movimento para as funções de correlação . . . . .	86
4.4	Aplicações dos ensembles de movimento browniano . . . . .	89
4.4.1	Médias no ensemble de observáveis de transporte em pontos quânticos . . . . .	90
4.4.2	Expansão semiclássica . . . . .	95
4.4.3	Fórmula para flutuações universais . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Método da transformada integral</b>	<b>104</b>
5.1	Transformada integral . . . . .	105
5.2	Modelo gaussiano quirial . . . . .	110
5.3	O mapa de Sutherland no espaço imagem . . . . .	113
5.3.1	Mapa de Sutherland . . . . .	114

---

5.3.2	Aplicação: Função de 1-ponto para equação DMPK . . . . .	116
5.4	Polinômios de Jack deformados . . . . .	121
5.4.1	Conexão com a construção do Sergeev: polinômios de Jack no espaço imagem . . . . .	122
5.4.2	Construção dos polinômios . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Método das funções biortogonais</b>	<b>131</b>
6.1	Ensembles de movimento browniano de polinômios ortogonais . . . . .	133
6.2	Solução exata para $\beta = 2$ . . . . .	136
6.3	Funções de Correlação: Método das Funções Biortogonais . . . . .	138
6.3.1	Sistema biortogonal . . . . .	139
6.3.2	Construção do núcleo . . . . .	141
6.4	Aplicações . . . . .	145
6.4.1	Ensemble de Hermite . . . . .	145
6.4.2	Ensemble de Laguerre . . . . .	148
6.4.3	Ensemble de Jacobi . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Teoria de circuitos</b>	<b>153</b>
7.1	Estatística de contagem de carga . . . . .	155
7.2	Teoria matricial . . . . .	156
7.2.1	Representação Vetorial . . . . .	158
7.2.2	Circuitos de dois terminais . . . . .	160
7.2.3	Duas junções de tunelamento . . . . .	161
7.2.4	Contatos pontuais . . . . .	164
7.3	Teoria escalar . . . . .	167
7.3.1	Densidade de autovalores de transmissão . . . . .	169
7.3.2	A pseudocorrente $K(x)$ . . . . .	170
7.4	Aplicações do formalismo . . . . .	170
7.4.1	Teoria escalar . . . . .	171
7.4.2	Teoria matricial . . . . .	172
7.4.3	Distribuição de corrente na presença de barreiras . . . . .	175
<b>8</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>177</b>

---

<b>A Ensemble gaussiano unitário</b>	<b>181</b>
A.1 Definição . . . . .	181
A.2 Equação da difusão . . . . .	184
<b>B Funções simétricas e polinômios de Jack</b>	<b>188</b>
B.1 Funções simétricas . . . . .	188
B.1.1 Partições . . . . .	191
B.1.2 Funções simétricas monomiais . . . . .	192
B.1.3 Funções simétricas elementares . . . . .	194
B.1.4 Funções simétricas completas . . . . .	195
B.1.5 Soma de potências . . . . .	195
B.1.6 Polinômios de Jack . . . . .	196
<b>C O método de Gurappa</b>	<b>201</b>
C.1 O mapa . . . . .	201
C.2 Exemplos . . . . .	204
C.3 Generalização para mais de uma variável . . . . .	207
<b>D Mudança de variáveis na equação de Fokker-Planck</b>	<b>213</b>
<b>E Equação de movimento para a função de correlação de <math>n</math>-pontos</b>	<b>215</b>
<b>F Construção do operador de Fokker-Planck no espaço imagem</b>	<b>217</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>221</b>

# Lista de Figuras

2.1	Lei do semicírculo. A figura da esquerda mostra a convergência para o semicírculo (2.38) da densidade dada pela equação (2.34) para valores crescentes de $N$ . A figura da direita mostra um histograma obtido pela diagonalização de uma matriz aleatória hermitiana $500 \times 500$ . Para esta dimensão já temos boa concordância com a lei do semicírculo (linha vermelha).	18
2.2	Cavidade 2D com 2 guias semi-infinitos.	22
2.3	Exemplo de um sistema de dois terminais.	24
2.4	Duas amostras mesoscópicas em série, conectadas por um guia ideal.	33
2.5	Embebimento de uma fatia de comprimento $\delta L$ num fio desordenado de comprimento $L$ .	37
2.6	Modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico	46
3.1	Modelo de <i>hopping</i> aleatório	52
3.2	Problema do fluxo aleatório	53
3.3	Modelo de <i>hopping</i> aleatório descrito pela Eq. (3.6), para $N = 3$ . A região desordenada tem comprimento $L = 4a$ . As diferentes cadeias são acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais.	54
3.4	Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso $N = 1$ e $\beta = 1, 2$ e 4. Os resultados para pontos quânticos com simetria quiral são mostrados em vermelho e os dos pontos de Wigner-Dyson, em azul.	60

3.5	Distribuição da condutância para os casos $\beta = 1, 2$ e $4$ . Os resultados para pontos quirais estão mostrados em vermelho e para pontos de Wigner-Dyson em azul. . . . .	63
3.6	Densidade de autovalores de uma matriz quiral unitária $1000 \times 1000$ com 50 autovalores nulos (omitidos no histograma). A curva azul representa a densidade (3.45). . . . .	65
3.7	Condutâncias obtidas para um ponto quântico quiral no ensemble unitário ligado à guias com dois canais abertos. . . . .	67
3.8	Distribuição da condutância . . . . .	68
3.9	Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso $N = 1$ e $\beta = 1, 2$ e $4$ . As curvas azuis são os resultados analíticos obtidos pelo princípio da máxima entropia . . . . .	69
3.10	Distribuição da condutância para dois canais abertos. Estão mostrados os casos $\beta = 1$ (parte superior esquerda), $\beta = 2$ (parte superior direita) e $\beta = 4$ (parte inferior). . . . .	70
3.11	Condutância (parte superior) e potência do ruído de disparo (parte inferior) para um sistema com $N = 10$ . Os gráficos da direita mostram os primeiros 500 valores dessas grandezas obtidos numericamente. As linhas horizontais representam as médias calculadas na ref. [56]. À direita mostramos as respectivas distribuições. . . . .	71
5.1	Esquema do método da transformada integral aplicado aos ensembles de movimento browniano. . . . .	114
7.1	Circuito de dois terminais . . . . .	160
7.2	Distribuição da corrente para $M = 1000$ . A linha contínua é o gráfico da função (7.54) e os pontos são soluções numéricas da integral (7.53). . . . .	164
7.3	Distribuição da corrente para para uma cavidade caótica acoplada a dois terminais. A linha contínua representa a função (7.71) com $MN = 100$ e os pontos são soluções numéricas da integral (7.70). . . . .	166
7.4	Teoria escalar para um circuito de dois terminais. . . . .	168

---

7.5	Distribuição da corrente para $MN = 100$ e $\Gamma = 0,6$ . A linha contínua é o gráfico da função (7.128) e os pontos são soluções numéricas da integral (7.127). . . . .	176
8.1	Ramificações do problema de movimento browniano no espaço de matrizes. . . . .	179
B.1	Tabelas de Young para a partição $\lambda = (7, 6, 4, 4, 3, 1, 1)$ e sua conjugada $\lambda' = (8, 5, 5, 4, 2, 2, 1)$ . . . . .	192
B.2	Braços e pernas associados ao diagrama de Young. . . . .	193

# Lista de Tabelas

2.1	Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana $H$ e a matriz dos autovetores $U$ são classificadas pelo índice $\beta$ dependendo da presença ou da ausência das simetrias de reversão temporal ( $SRT$ ) e de rotação de spin ( $SRS$ ). . . . .	9
2.2	Polinômios ortogonais clássicos. . . . .	13
2.3	Classificação das dez classes de simetria da teoria de matrizes aleatórias de acordo com os espaços simétricos de Cartan. A tabela mostra os três conjuntos de classes dos ensembles de matrizes aleatórias: Wigner-Dyson (WD), quiral e Bogoliubov-de-Gennes (BdG). Os índices $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ são as multiplicidades das raízes longas, ordinárias e curtas da álgebra de Lie subjacente e indicam a presença ou a ausência de simetrias de rotação de spin (RS) e de reversão temporal (RT) . . . .	44
3.1	Médias da condutância e da potência do ruído de disparo para dois modos propagantes ( $N = 2$ ). . . . .	61
3.2	Valores médios da condutância para os casos de um, $N = 1$ , e dois, $N = 2$ , canais abertos. . . . .	67
3.3	Comparação entre os resultados numéricos e exatos para a média potência do ruído de disparo, $\langle p \rangle$ . . . . .	68

4.1	Classificação dos ensembles de movimento browniano baseada nas propriedades das funções $w(x)$ e $s(x)$ , e suas condições de contorno. Neste esquema unificado, que cobre ensembles de polinômios e matrizes de transferência (MT), cada classe de simetria é descrita por sua equação de Fokker-Planck correspondente. . . . .	86
4.2	Classificação das teorias de matrizes aleatórias para pontos quânticos das classes de Wigner-Dyson e quirais. A tabela mostra explicitamente os coeficientes de $s(x)$ e $r(x)$ . . . . .	90
4.3	Estatística linear, $F = \sum_n f(x_n)$ , para a condutância, $g$ , e a potência do ruído de disparo, $p$ , nas classes de Wigner-Dyson e quirais dadas em termos de $X_q = \sum_n x_n^q$ . . . . .	91
4.4	Fórmulas assintóticas para a média e a variância de uma estatística linear arbitrária dos autovalores de transmissão, $A = \sum_n a(\tau_n)$ , para pontos quânticos das classes Wigner-Dyson e quiral. Os coeficientes da expansão são dados por $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(\sin^2 \theta)$ e $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi a(\sin^2 \theta) \cos(n\theta)$ , além disso definimos $\gamma = (2 - \beta)/(2\beta)$ . . . . .	103
6.1	Classificação dos ensembles de movimento browniano de polinômios ortogonais. . . . .	134
B.1	Funções monomiais simétricas com peso $ \lambda  \leq 3$ e $N = 4$ variáveis. . . . .	194
B.2	Polinômios de Jack como peso $ \lambda  \leq 4$ . . . . .	198
C.1	Soluções de Gurappa para os polinômios ortogonais clássicos. Na ordem de cima para baixo estão listados os polinômios de Hermite, Laguerre, Legendre, Chebyshev tipo I, Chebyshev tipo II e Gegenbauer. Não é possível encontrar uma forma exponencial para os polinômios de Jacobi. . . . .	206

# Capítulo 1

## Introdução

O título desta tese revela as duas linhas de investigação adotadas. Na primeira, desenvolvemos novos métodos para o estudo dos ensembles fora do equilíbrio da teoria de matrizes aleatórias, também chamados de ensembles de movimento browniano (EMB). Esta linha é mais matemática ligando a teoria de matrizes aleatórias a áreas como teoria de processos estocásticos, espaços simétricos e polinômios simétricos de Jack. A segunda parte, seguimos uma linha mais física, estudando propriedades de transporte em sistemas mesoscópicos. Em particular, no regime semiclássico, estudamos teorias de circuitos para associações de dispositivos mesoscópicos. A seguir apresentamos um resumo do conteúdo dos próximos capítulos.

### 1.1 Capítulo 2. Teoria de matrizes aleatórias

Neste capítulo fazemos uma introdução elementar aos tópicos discutidos na tese. Apresentamos uma rápida revisão da teoria de matrizes aleatórias (TMA) aplicada a sistemas fechados e abertos. Iniciamos com os ensembles gaussianos onde apresentamos a distribuição conjunta de níveis e, em particular para o ensemble unitário, apresentamos o cálculo das funções de correlação através do método dos polinômios ortogonais. Também discutimos sistemas abertos. Em particular, estamos interessados nas aplicações em pontos e fios quânticos. Nestes casos, propriedades de transporte como condutância e potência do ruído de disparo são calculadas

através do formalismo de Landauer-Büttiker, que trata a condução elétrica como um problema de espalhamento, sendo a condutância do sistema proporcional ao coeficiente de transmissão. Para o caso de pontos quânticos aplicamos o método de máxima entropia informacional na construção de ensembles de matrizes de espalhamento. Também apresentamos os ensembles de matrizes de transferência usados na descrição das propriedades de transporte em fios quânticos. De acordo com a presença de simetrias básicas como reversão temporal e rotação de spin, estes ensembles de matrizes aleatórias são divididos em três classes: ortogonal, unitária e simplética.

Recentemente percebeu-se que este esquema de classificação não é exaustivo e surgiram novas classes de simetria em diversos problemas de interesse teórico e experimental. Também surgiu um novo esquema de classificação das teorias de matrizes aleatórias, baseado numa relação um a um com a tabela de espaços simétricos de Cartan onde os ensembles são classificados em termos dos mesmos diagramas de Dynkin e redes de raízes usados na classificação das álgebras de Lie destes espaços. De acordo com a nova classificação existem dez classes de universalidade na TMA, divididas em três categorias: (i) Wigner-Dyson (3 classes); (ii) Bogoliubov-de Gennes (4 classes); (iii) quirais (3 classes). A subdivisão em cada categoria depende da presença ou da ausência de simetria de reversão temporal e de rotação de spin. Em física mesoscópica as classes Wigner-Dyson são apropriadas para condutores desordenados convencionais, as Bogoliubov-de Gennes aparecem na descrição de quase partículas em supercondutores fracamente desordenados e as classes quirais são relevantes em problemas de transporte com desordem fora da diagonal, como nos modelos de *hopping* aleatório. Devido a sua importância, apresentamos um breve resumo da teoria de espaços simétricos e sua relação com a teoria de matrizes aleatórias.

A teoria de espaços simétricos também está intimamente relacionada à sistemas quânticos com hamiltonianos integráveis tipo Calogero-Sutherland, dos quais destacamos o modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico cujas autofunções dos estados excitados estão relacionadas aos polinômios simétricos de Jack. Os polinômios de Jack são funções simétricas homogêneas que servem como base para as demais funções simétricas e, em particular, para generalizações multidimensionais dos polinômios ortogonais clássicos. O modelo de Calogero Sutherland é apresentado

na última seção capítulo 2 e as propriedades dos polinômios de Jack são mostrados nos apêndices B e C.

## 1.2 Capítulo 3. Transporte em pontos quânticos quirais

Estudamos propriedades de transporte em pontos quânticos com simetria de sub-rede (quiral) acoplados a reservatórios de elétrons através de contatos pontuais. A teoria de matrizes aleatórias para este problema pode ser formulada de duas maneiras. Na primeira, constrói-se um ensemble de matrizes de espalhamento a partir de um princípio de máxima entropia informacional. Este método fornece a distribuição conjunta de autovalores de transmissão usada diretamente no cálculo de observáveis como a condutância e a potência do ruído de disparo. Na segunda abordagem, a TMA é construída modelando-se o hamiltoniano da cavidade fechada por um membro dos ensembles gaussianos quirais. A matriz de espalhamento é obtida a partir do hamiltoniano e das matrizes que descrevem o acoplamento cavidade-guias através da fórmula de Mahaux-Weidenmüller. As propriedades de transporte são calculadas diretamente a partir da matriz de espalhamento usando-se o formalismo de Landauer-Büttiker. Implementamos esta formulação hamiltoniana numericamente e calculamos os valores médios e as distribuições da condutância e da potência do ruído de disparo. Observamos que, para um sistema com número pequeno de canais abertos, as distribuições são bastante largas e, à medida que este número de canais aumenta, tornam-se mais estreitas tendendo a gaussianas, que corresponde ao resultado do limite semiclássico. Os resultados numéricos e analíticos estão em ótima concordância, demonstrando a equivalência das duas abordagens.

## 1.3 Capítulo 4. Ensembles de movimento browniano

Apresentamos uma nova formulação para ensembles fora do equilíbrio da te-

oria de matrizes aleatórias baseada na teoria geral de processos estocásticos. Construimos um processo estocástico markoviano para os autovalores de uma matriz aleatória e obtivemos a equação Chapman-Kolmogorov que descreve a evolução da distribuição conjunta dos autovalores. Retringindo-nos ao caso de trajetórias amostrais contínuas no espaço de matrizes obtemos uma equação de Fokker-Planck para o processo. Também mostramos que o processo estocástico matricial pode ser mapeado num problema de muitos corpos descrito por um hamiltoniano do tipo Calogero-Sutherland. Este mapa mostra uma conexão entre os EMB e a teoria de polinômios simétricos de Jack, usados no cálculo das funções de correlação do modelo de Calogero-Sutherland. Sob determinadas condições matemáticas esta equação de Fokker-Planck descreve o decaimento da distribuição conjunta de níveis para a solução característica dos ensembles de polinômios ortogonais da TMA. Os ensembles de matrizes de transferência, embora não possuam solução de equilíbrio, também podem ser incluídos na formulação. Desta forma construímos uma formulação unificada de ensembles de movimento browniano que engloba os ensembles de polinômios ortogonais e os de matrizes de transferência. Esta descrição unificada pode ser usada como esquema de classificação alternativo à classificação geométrica, baseada nas tabelas de Cartan, cobrindo certos casos de interesse onde a última não se aplica. Nosso esquema de classificação não depende de uma realização matricial específica para os ensembles, cada um deles é definido por uma equação de Fokker-Planck. Além disso, o índice de Dyson  $\beta$  da teoria de matrizes aleatórias aparece apenas como um parâmetro podendo assumir, em princípio, valores distintos dos valores clássicos  $\beta \in \{1, 2, 4\}$  usados na TMA. Além do atrativo estético, este esquema de classificação também fornece métodos unificados para abordar problemas práticos, como o cálculo de funções de correlação e propriedades estatísticas de observáveis físicos para qualquer classe de simetria. Utilizamos métodos de Fokker-Planck para determinar a evolução temporal de médias de observáveis. Em particular, mostramos que a equação de movimento para função de  $n$ -pontos segue uma complicada hierarquia (tipo BBGKY) de equações integro-diferenciais singulares, revelando a complexidade do problema do cálculo de funções de correlação para ensembles fora do equilíbrio. Métodos de Fokker-Planck também podem ser usados no estudo de propriedades estatísticas de interesse em ensembles de equilíbrio, em particular en-

contramos um esquema útil para o cálculo de assintóticos da média e da variância de observáveis de transporte em pontos quânticos nas classes de Wigner-Dyson e quiral.

## 1.4 Capítulo 5. Método da transformada integral

Neste capítulo apresentamos um método de transformada integral, alternativo ao método da supersimetria, para desacoplar a hierarquia BBGKY das funções de correlação dos ensembles de movimento browniano, válido para valores racionais de  $\beta$ . O método é uma generalização multidimensional da técnica de transformada integral usada para resolver equações diferenciais ordinárias como uma integral de contorno no plano complexo, e consiste em mapear a equação de Fokker-Planck para a distribuição conjunta de níveis, numa outra equação de Fokker-Planck que evolui num espaço imagem de dimensão menor. A dimensão do espaço auxiliar é independente da dimensão do espaço original e depende apenas da ordem da função de correlação desejada. Uma vez construída a equação de Fokker-Planck neste novo espaço, usamos uma transformação de Sutherland e construímos o hamiltoniano associado. As autofunções do hamiltoniano são usadas na solução do problema original. Em particular no ensemble unitário, encontramos o hamiltoniano de um sistema de partículas livres. Como aplicação deste método apresentamos o cálculo da função de um ponto para a equação DMPK para o ensemble unitário da classe Wigner-Dyson. No caso geral, mostramos que as autofunções do hamiltoniano são determinadas pelos polinômios de Jack deformados, recentemente introduzidos na literatura por Sergeev.

## 1.5 Capítulo 6. Método das funções biortogonais

Neste capítulo apresentamos um método de cálculo das funções de correlação para os EMB específico para o ensemble unitário ( $\beta = 2$ ). Resolvemos a equação de Fokker-Planck para uma condição inicial tipo delta explorando a conexão com um hamiltoniano de um sistema de  $N$  férmions não interagentes. Construímos um

método de funções biortogonais para escrever a probabilidade de transição numa forma determinantal. Desta maneira, para uma certa classe de condições iniciais, as funções de correção podem ser escritas numa forma determinantal fatorada similar a obtida em ensembles de equilíbrio através do método dos polinômios ortogonais. A função de correlação de  $n$ -pontos é escrita em termos de um núcleo que depende apenas de dois níveis. Conseguimos escrever uma representação integral para o núcleo em termos das funções de Green de uma partícula. Este método foi usado no cálculo das amplitudes de transição para os ensembles de Hermite, Laguerre e Jacobi. Nossos resultados concordam com os obtidos por Baker e Forrester usando métodos de polinômios de Jack.

## 1.6 Capítulo 7. Teoria de circuitos

Neste capítulo estudamos transporte quântico em dispositivos mesoscópicos acoplados a reservatórios de elétrons através de guias de onda com um número muito grande de canais propagantes (regime semiclássico). Utilizamos métodos de elemento finito conhecidos na literatura como teorias de circuitos. Nesta formulação o sistema é representado por um grafo cujas arestas representam conectores e cujos vértices representam nós ou terminais, analogamente à teoria de circuitos clássica usada em engenharia elétrica. Um nó representa uma cavidade quântica, um conector pode ser de diferentes tipos: junção de tunelamento, contato balístico ou um fio difusivo. Generalizações das leis de Kirchhoff permitem o cálculo da densidade de autovalores de transmissão do sistema. Existem duas versões da teoria de circuitos: (i) a teoria matricial e (ii) a escalar. Estudamos uma cavidade caótica balística acoplada, via barreiras de transparência arbitrária, a dois guias semi-infinitos. Na descrição usual da teoria de matrizes aleatórias, a matriz de espalhamento da cavidade é distribuída de acordo com o núcleo de Poisson e as propriedades de transporte, como a condutância e a potência do ruído de disparo, são obtidas com o formalismo de Landauer-Büttiker. Usamos (i) e (ii) na formulação deste problema e mostramos a equivalência destes métodos no cálculo dos cumulantes da estatística de contagem. Também determinamos as distribuições exatas de corrente de alguns sistemas simples de dois terminais, como um ponto quântico com barreiras simétricas.

## Capítulo 2

# Teoria de matrizes aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias (TMA) [1] foi desenvolvida a partir da década de 50 com o objetivo de descrever estatisticamente os padrões observados no espalhamento de nêutrons lentos por núcleos pesados. Devido ao grande número de graus de liberdade e à complexidade do processo de espalhamento, não é possível nem desejável construir o hamiltoniano do sistema a partir de primeiros princípios. Uma alternativa viável consiste em modelar-se o hamiltoniano do núcleo por uma matriz aleatória pertencente a um ensemble caracterizado apenas por certas propriedades de simetria. Um resultado central deste estudo foi a famosa lei de Wigner-Dyson para a distribuição de espaçamentos de ressonâncias consecutivas. Após normalização pelo espaçamento médio, todos os dados experimentais colapsam numa mesma curva universal. O primeiro grande triunfo da TMA foi a demonstração de que esta lei universal resulta da perda de relevância estatística de grande parte das informações microscópicas com exceção de certas simetrias básicas, como a invariância à reversão temporal e a invariância de rotação de spin. O comportamento universal da TMA depende da validade de uma hipótese ergódica, de acordo com a qual médias sobre certos intervalos contendo um número estatisticamente significativo de níveis é equivalente a uma média sobre ensembles. A partir da década de 80 a TMA passou por uma explosão de atividade, adquirindo status multidisciplinar através da associação com o fenômeno de caos quântico. Atualmente ela é aplicada a uma grande variedade de sistemas físicos cobrindo diversas ordens de magnitude, desde núcleos

complexos [2], a nanodispositivos [3] e cavidades macroscópicas de microondas [4]. Uma perspectiva histórica sobre o avanço da TMA pode ser encontrada nas refs. [5, 6]. Além de gerar uma profunda intuição física e uma enormidade de aplicações em problemas de valor prático, esta formulação também possui um grande poder de unificação do ponto de vista de estruturas matemáticas, inter-relacionando áreas como a teoria de números, sistemas hamiltonianos integráveis, análise harmônica em espaços simétricos clássicos, teoria de campo supersimétrica, teoria de campo conforme, polinômios de Jack, gás ideal de anyons, gravitação bidimensional e muito mais.

Nas próximas seções, a fim de estabelecer a notação usada na tese, apresentaremos uma breve revisão da TMA aplicada a sistemas fechados e abertos. Iniciamos com os ensembles gaussianos e usaremos o método de polinômios ortogonais para o cálculo de funções de correlação. A seguir, apresentamos teorias de matrizes aleatórias úteis em problemas de espalhamento, usadas em pontos e fios quânticos. Finalizamos apresentando a classificação dos ensembles da TMA através de espaços simétricos.

## 2.1 Ensembles gaussianos

Considere um conjunto de matrizes hermitianas  $H$ ,  $N \times N$ , com densidade de probabilidade

$$P(H) = C \exp[-\beta \text{Tr}V(H)], \quad (2.1)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e  $\beta$  é um parâmetro de simetria que indica o número de graus de liberdade dos elementos de  $H$ , e é usado para especificar os ensembles. O índice de Dyson, como também é chamado, pode assumir os valores  $\beta = 1$  para elementos reais,  $\beta = 2$  para complexos e  $\beta = 4$  para quaternions reais<sup>1</sup>. A probabilidade de encontrarmos um membro do ensemble no elemento de volume  $dH$  é dada por

$$P(H)dH \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Um quaternion real é expresso em termos das matrizes de Pauli  $q = a_0 + i \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k$ , com coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$  reais.

onde  $dH$  é o produto das diferenciais de todos os elementos independentes de  $H$ .

Os ensembles de matrizes aleatórias com distribuição (2.1) são invariantes sob o automorfismo

$$H \rightarrow UHU^{-1}, \quad (2.3)$$

onde  $U$  é uma matriz ortogonal ( $\beta = 1$ ), unitária ( $\beta = 2$ ) ou simplética ( $\beta = 4$ ). Por esta razão eles são denominados ensembles ortogonal, unitário e simplético, respectivamente.

Fisicamente o ensemble ortogonal aplica-se a dois tipos de sistemas com simetria de reversão temporal: os de spin inteiro e os de spin semi-inteiro com invariância de rotação. Neste caso, o hamiltoniano pode ser representado por uma matriz real e simétrica. O ensemble unitário aplica-se a sistemas com simetria de reversão temporal quebrada, por exemplo pela ação de um campo magnético externo. Finalmente, o ensemble simplético aplica-se a sistemas com spin semi-inteiro, invariantes sob reversão temporal mas com invariância de rotação quebrada, por exemplo por uma forte interação spin-órbita. Tal classificação, devida a Dyson, é resumida na tabela abaixo:

$\beta$	SRT	SRS	$H$	$U$
1	sim	sim	real	ortogonal
2	não	irrelevante	complexo	unitária
4	sim	não	quatérnion real	simplética

Tabela 2.1: Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana  $H$  e a matriz dos autovetores  $U$  são classificadas pelo índice  $\beta$  dependendo da presença ou da ausência das simetrias de reversão temporal ( $SRT$ ) e de rotação de spin ( $SRS$ ).

Se o potencial é do tipo  $V(H) \propto H^2$ , o ensemble é dito gaussiano. A praticidade dos ensembles gaussianos resulta do fato de que os elementos de matriz são variáveis aleatórias independentes, visto que

$$\text{Tr}V(H) = \text{Tr}H^2 = \sum_{i,j} |H_{ij}|^2 \quad (2.4)$$

e a distribuição fatora, simplificando os cálculos. A escolha do potencial  $V$  afeta

características globais do espectro, mas não características locais como flutuações na escala do espaçamento médio, que têm comportamento universal.

Ensembles de matrizes aleatórias podem ser deduzidos via teoria de informação, associando-se uma entropia de Shannon à densidade de probabilidade

$$\mathcal{S}[P(H)] = - \int dH P(H) \ln P(H). \quad (2.5)$$

Os ensembles gaussianos são obtidos pela maximização da entropia, sujeita aos vínculos de normalização e de existência de um segundo momento para  $H$  [7]. Métodos de máxima entropia também são aplicados para ensembles de matrizes  $S$  [8], usados na descrição estatística de propriedades de transporte em pontos quânticos.

Uma vez especificada a densidade de probabilidade  $P(H)$  podemos investigar as propriedades estatísticas dos autovalores de  $H$ . A fim de determinar correlações entre os autovalores, diagonalizamos a matriz aleatória

$$H = UXU^{-1}, \quad (2.6)$$

onde  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$  é uma matriz diagonal que contém os autovalores<sup>2</sup> e a matriz unitária  $U$  contém os autovetores. Como  $\text{Tr}V(H) = \sum_i V(x_i)$  depende apenas dos autovalores, a distribuição (2.1) não depende dos autovetores. Isto significa que  $U$  é uniformemente distribuído no grupo unitário, para  $\beta = 2$ , e nos grupos ortogonal e simplético para  $\beta = 1$  e 4, respectivamente. O elemento de volume em termos das coordenadas radiais e angulares fica (a menos de uma constante)

$$dH = J_\beta(\{x\}) d\mu(U) \prod_{i=1}^N dx_i, \quad (2.7)$$

onde  $d\mu(U)$  é a medida de Haar dos grupos ortogonal,  $O(N)$ , unitário,  $U(N)$ , ou simplético,  $Sp(2N)$ . O fator  $J_\beta$  é o jacobiano da transformação de similaridade (2.6) e pode ser escrito em termos do determinante de Vandermonde  $\Delta_N(\{x\}) =$

---

<sup>2</sup>Para  $\beta = 4$  cada autovalor é duplamente degenerado, fato decorrente da degenerescência de Kramers.

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad J_\beta(\{x\}) = |\Delta_N(\{x\})|^\beta = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta. \quad (2.8)$$

Apresentamos no apêndice A o cálculo do jacobiano para o ensemble unitário. A extensão para os demais ensembles é imediata. Combinando tudo, obtemos a seguinte distribuição conjunta de autovalores

$$P(\{x\}) = C_\beta \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_k e^{-\beta \sum_k V(x_k)}. \quad (2.9)$$

Esta densidade de probabilidade pode ser interpretada como o fator de Boltzmann

$$P(\{x\}) = C_\beta e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = - \sum_{i < j} \ln |x_i - x_j| + \sum_k V(x_k) \quad (2.10)$$

de um gás clássico de  $N$  partículas, nas posições  $x_1, \dots, x_N$ , interagindo logaritmicamente e confinadas pelo potencial  $V$ . Este sistema de cargas pontuais em equilíbrio térmico, com índice de Dyson fazendo o papel de inverso da temperatura, é conhecido como o modelo do gás de Coulomb [9].

## 2.2 Funções de correlação

Propriedades estatísticas na seqüência de níveis  $\{x_1, \dots, x_N\}$  são caracterizadas pela função de correlação de  $n$ -pontos, definida como

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P(x_1, \dots, x_N) dx_{n+1} \dots dx_N, \quad (2.11)$$

que representa a densidade de probabilidade de que  $n$  níveis se encontrem em torno das posições  $x_1, \dots, x_n$ , independente dos demais. A integral (2.11) pode ser calculada de forma fechada. O caso  $\beta = 2$  é matematicamente mais simples e, com o auxílio do método dos polinômios ortogonais, obtém-se a estrutura determinantal

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n}. \quad (2.12)$$

As entradas do determinante são expressas em termos do *núcleo*  $K_N(x, y)$  que depende apenas de dois níveis. Para  $\beta = 1$  e  $\beta = 4$ , também existe um método sistemático, embora menos intuitivo, de calcular  $R_n$  explicitamente em termos dos polinômios anti-ortogonais clássicos [1, 10]. A seguir apresentaremos detalhadamente o método dos polinômios ortogonais usado no caso unitário. Alguns resultados desta seção serão utilizados no capítulo 6, no qual desenvolveremos um método de polinômios biortogonais.

### 2.2.1 Método dos polinômios ortogonais

Na teoria de matrizes aleatórias, os ensembles de polinômios ortogonais são introduzidos via integrais de Selberg [1]. Neste contexto, a distribuição de variáveis aleatórias ou níveis,  $a \leq x_i \leq b$  ( $i = 1, \dots, N$ ), é dada por

$$P(\{x\}) = C_N J_\beta(\{x\}) w_N(\{x\}), \quad (2.13)$$

onde  $J_\beta(\{x\})$  é o jacobiano (2.8) e  $w(\{x\})$  é definida pelo produto

$$w_N(\{x\}) = \prod_{i=1}^N w(x_i). \quad (2.14)$$

A função peso  $w(x) = e^{-\beta V(x)}$  é real, positiva e integrável no intervalo  $[a, b]$  e  $C_N$  é uma constante de normalização, cujo valor é obtido da integral de Selberg associada. Além disso, impomos os vínculos usuais da teoria de polinômios ortogonais clássicos [11], para os quais consideramos a seqüência de funções

$$p_n(x) \equiv \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x) s^n(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

que satisfazem às condições

(i)  $p_1(x)$  é um polinômio de primeira ordem

$$p_1(x) = r(x) = r_0 + r_1 x, \quad (2.16)$$

(ii)  $s(x)$  é um polinômio com raízes reais, de grau não maior que 2

$$s(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 = s_2(x - s^+)(x - s^-), \quad (2.17)$$

(iii) o peso  $w(x)$  satisfaz à condição de contorno

$$w(a)s(a) = 0 = w(b)s(b). \quad (2.18)$$

Nas eqs. (2.16) e (2.17)  $r_0, r_1, s_0, s_1, s_2, s^+$  e  $s^-$  são constantes reais. Os polinômios assim construídos satisfazem as condições de ortogonalidade e completeza

$$\int_a^b w(x)p_n(x)p_m(x) = h_n\delta_{n,m} \quad (2.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{h_n} = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}, \quad (2.20)$$

onde  $h_n$  é uma constante de normalização. A tabela 2.2 mostra o intervalo de definição, função peso, função auxiliar  $s(x)$  e normalização para os polinômios ortogonais clássicos. O método dos polinômios ortogonais consiste em reescrever a

Intervalo	função peso $w(x)$	$s(x)$	$h_n$	polinômio
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	1	$2^n n! \sqrt{\pi}$	Hermite
$[0, \infty)$	$x^\nu e^{-x}$ ( $\nu > -1$ )	$x$	$\Gamma(n + \nu + 1)/n!$	Laguerre
$[-1, 1]$	$(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ ( $\nu, \mu > -1$ )	$1 - x^2$	$\frac{2^{\nu+\mu+1}\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(n+\mu+1)}{(2n+\nu+\mu+1)n!\Gamma(n+\nu+\mu+1)}$	Jacobi

Tabela 2.2: Polinômios ortogonais clássicos.

densidade de probabilidade  $P(\{x\})$  do ensemble unitário em termos dos polinômios  $p_n$ . O ponto de partida é o determinante de Vandermonde

$$\Delta_N(\{x\}) = (-1)^{N(N-1)/2} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Como o determinante não muda ao fazermos combinações lineares em suas linhas, a entrada  $x_i^{k-1}$  da  $k$ -ésima linha pode ser trocada pelo polinômio  $p_{k-1}(x_i) = a_{k-1}x_i^{k-1} + \dots + a_1x_i + a_0$ . As operações são realizadas de modo a gerar polinômios ortogonais em relação ao peso  $w(x)$ . Desta forma, o determinante de Vandermonde é reescrito como

$$\Delta_N(\{x\}) = \frac{(-1)^{N(N-1)/2}}{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \det \begin{pmatrix} p_0(x_1) & \dots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & \dots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N-1}(x_1) & \dots & p_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Portanto, a densidade de probabilidade para  $\beta = 2$  é reescrita, a menos de uma constante multiplicativa, na forma

$$P(\{x\}) \propto \prod_i w(x_i) \left( \det[\tilde{p}_{i-1}(x_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \right)^2, \quad (2.23)$$

onde introduzimos os polinômios normalizados  $\tilde{p}_k(x) = p_k(x)/\sqrt{h_k}$ . Seja  $A$  a matriz cujas entradas são  $A_{ij} = \tilde{p}_{i-1}(x_j)$  então

$$(\det A)^2 = \det A^T \det A = \det \left( \sum_{k=0}^{N-1} A_{ki} A_{kj} \right). \quad (2.24)$$

Além disso, eliminamos o fator  $\prod_i w(x_i)$  multiplicando a  $j$ -ésima coluna de  $A$  por  $w(x_j)$ . Desta forma, a densidade é escrita na forma compacta

$$P(\{x\}) = C_N \det[K_N(x_i, x_j)]_{i, j=1, \dots, N}, \quad (2.25)$$

onde  $C_N$  é uma constante e a função  $K_N(x, y)$ , conhecida na literatura como núcleo, é definida por

$$K_N(x, y) = w(x) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{h_k}. \quad (2.26)$$

É fácil ver que o núcleo satisfaz as propriedades

$$\int_a^b K_N(x, x) dx = N, \quad (2.27)$$

$$\int_a^b K_N(x, z) K_N(z, y) dz = K_N(x, y). \quad (2.28)$$

A constante  $C_N$  é determinada com o auxílio do seguinte teorema [1]

**Teorema 2.1** *Seja  $J_n = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  uma matriz  $n \times n$  cujas entradas dependem do vetor real  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e têm a forma  $J_{ij} = f(x_i, x_j)$  onde  $f$  é uma função que satisfaz a propriedade*

$$\int f(x, y) f(y, z) dy = f(x, z). \quad (2.29)$$

Então

$$\int \det J_n(\mathbf{x}) dx_n = [q - (n - 1)] \det J_{n-1}, \quad (2.30)$$

onde  $q = \int f(x, x) dx$ , e a matriz  $J_{n-1} = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$  tem a mesma estrutura de  $J_n$  com  $\mathbf{x}$  substituído por  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

No nosso caso  $q = N$ , então

$$\begin{aligned} 1 = \int P(\{x\}) dx_1 \dots dx_N &= C_N \int \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,N} dx_1 \dots dx_N \\ &= 1 \times C_N \int \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,N-1} dx_1 \dots dx_{N-1} \\ &= 1 \times 2 \times C_N \int \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,N-2} dx_1 \dots dx_{N-2} \\ &\quad \vdots \\ &= 1 \times 2 \times \dots \times (N - 1) \times C_N \int K_N(x, x) dx \\ &= N! C_N \end{aligned}$$

Portanto  $C_N = 1/N!$ . A função de correlação é obtida da mesma forma:

$$\begin{aligned} R_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{N!}{(N-n)!} \int P(\{x\}) dx_{n+1} \dots dx_N \\ &= \frac{1}{(N-n)!} \int \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1, \dots, N} dx_{n+1} \dots dx_N \\ &= \det[K_N(x_i, x_j)]_{i,j=1, \dots, n}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Portanto, toda a informação sobre as correlações espectrais está contida no núcleo, que depende apenas de dois níveis. No capítulo 6 vamos generalizar esta equação para ensembles fora de equilíbrio. Consideremos agora alguns casos particulares de (2.11).

### • Função de 1-ponto

A função de 1-ponto  $R_1(x) = K_N(x, x)$  é a densidade média de níveis

$$R_1(x) \equiv \rho(x) = \langle \hat{\rho}(x) \rangle, \quad (2.32)$$

onde a densidade “microscópica” de níveis é definida por

$$\hat{\rho}(x) = \sum_i \delta(x - x_i). \quad (2.33)$$

A densidade de níveis não é uma função universal pois depende da escolha do potencial  $V(H)$  do modelo de matriz aleatória. Por exemplo, nos ensemble gaussianos escolhemos  $V(H) = NH^2/4\lambda^2$ . A densidade de níveis para o ensemble gaussiano unitário é dada por

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{N}{2\pi\lambda^2}} \exp\left(-\frac{Nx^2}{4\lambda^2}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k k!} H_k^2\left(\sqrt{\frac{N}{2\lambda^2}} x\right). \quad (2.34)$$

No limite de  $N$  grande podemos obter uma relação entre a densidade,  $\rho$ , e o potencial confinador,  $V$ , através do modelo do gás de Coulomb, eq. (2.10). Neste limite temos um fluido clássico com densidade macroscópica contínua [1, 9] cuja energia pode ser

aproximada pelo funcional

$$\mathcal{H}[\rho(x)] = \int dx V(x)\rho(x) - \frac{1}{2} \int dx dy \rho(x)\rho(y) \ln|x-y|. \quad (2.35)$$

A densidade é escolhida de modo a minimizar  $\mathcal{H}[\rho(x)]$ , satisfazendo o vínculo  $\int dx \rho(x) = N$ , portanto

$$\frac{\delta}{\delta \rho(x)} \int dx \rho(x) \left( V(x) - \int dy \rho(y) \ln|x-y| - C \right) = 0, \quad (2.36)$$

onde  $C$  é um multiplicador de Lagrange. Da condição de extremo resulta a equação de campo médio

$$V(x) = \int dy \rho(y) \ln|x-y| + C, \quad (2.37)$$

cuja solução para os ensembles gaussianos,  $V(x) = Nx^2/4\lambda^2$ , resulta na lei do semicírculo de Wigner

$$\rho(x) = \frac{N}{2\pi\lambda^2} \sqrt{4\lambda^2 - x^2}. \quad (2.38)$$

O parâmetro  $\lambda$  controla a escala de energia e o espaçamento médio na origem,  $x = 0$ , que é dado por  $\Delta = \pi\lambda/N$ . A lei do semicírculo é uma propriedade dos ensembles gaussianos e não tem relevância física direta já que densidades diferentes são obtidas para outros potenciais. A figura 2.1 mostra como a densidade (2.34) converge para o semicírculo (2.38) com valores crescentes de  $N$ .

A densidade de níveis também pode ser obtida numericamente. Para isso construímos uma matriz aleatória hermitiana cujas entradas têm distribuição gaussiana de média zero e variâncias dadas por

$$\langle H_{ii}^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{N} \quad (2.39)$$

$$\langle (\text{Re}H_{ij})^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{2N} = \langle (\text{Im}H_{ij})^2 \rangle, \quad (2.40)$$

calculamos seus autovalores e fazemos um histograma. Escolhendo  $\lambda = 1/2$ , os autovalores ficam distribuídos no intervalo  $[-1, 1]$  e o limite  $N \rightarrow \infty$  é atingido elevando-se a dimensão da matriz. A figura 2.1 mostra a densidade de autovalores

obtida numericamente para uma matriz  $500 \times 500$ .

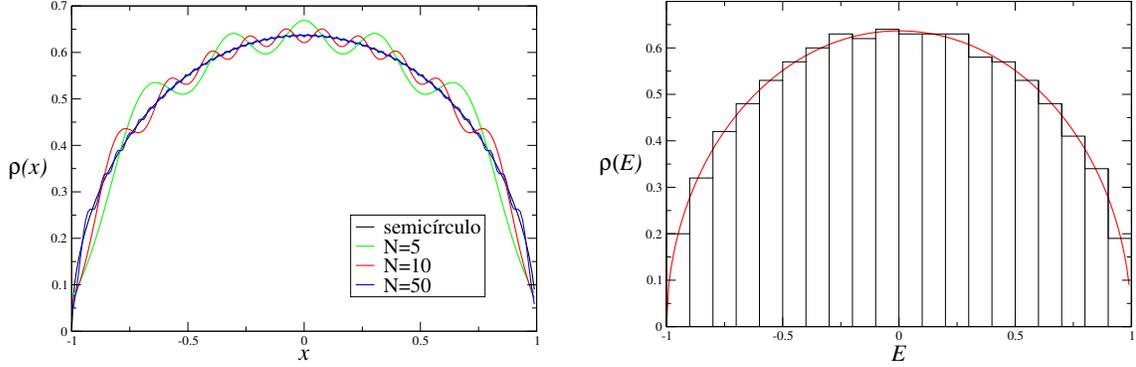


Figura 2.1: Lei do semicírculo. A figura da esquerda mostra a convergência para o semicírculo (2.38) da densidade dada pela equação (2.34) para valores crescentes de  $N$ . A figura da direita mostra um histograma obtido pela diagonalização de uma matriz aleatória hermitiana  $500 \times 500$ . Para esta dimensão já temos boa concordância com a lei do semicírculo (linha vermelha).

### • Função de 2-pontos

Assim como  $R_1$ , a função de dois pontos  $R_2(x, y)$  também pode ser escrita da forma

$$R_2(x, y) = \sum_{i \neq j} \langle \delta(x - x_i) \delta(y - x_j) \rangle = N(N-1) \int P(x, y, x_3, \dots, x_N) dx_3 \dots x_N. \quad (2.41)$$

Outra função de dois pontos que será utilizada nesta tese é o correlator densidade-densidade, definido por

$$C(x, y) = \langle \hat{\rho}(x) \hat{\rho}(y) \rangle - \langle \hat{\rho}(x) \rangle \langle \hat{\rho}(y) \rangle, \quad (2.42)$$

que será usado mais adiante no cálculo da variância de estatísticas lineares. Usando a definição da densidade microscópica de níveis, eq.(2.33), e separando a contribuição

diagonal ( $i = j$ ) da não-diagonal ( $i \neq j$ ), podemos escrever

$$C(x, y) = T_2(x, y) + R_1(x, x)\delta(x - y), \quad (2.43)$$

onde introduzimos a função de *cluster* de dois níveis

$$T_2(x, y) \equiv R_2(x, y) - R_1(x)R_1(y), \quad (2.44)$$

que pode ser escrita em termos do núcleo  $K_N(x, y)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= \det \begin{pmatrix} K_N(x, x) & K_N(x, y) \\ K_N(y, x) & K_N(y, y) \end{pmatrix} - K_N(x, x)K_N(y, y) \\ &= -[K_N(x, y)]^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Vimos que potenciais  $V$  diferentes geram densidades diferentes. Estas propriedades não-universais do espectro são eliminadas reescalando os níveis de modo que o espaçamento entre níveis vizinhos seja medido em unidades do espaçamento médio local. Para isso definimos as variáveis adimensionais

$$\xi_i(x) = \int_{-\infty}^{x_i} dx R_1(x), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.46)$$

A função de correlação reescalada,  $X_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , é obtida igualando-se as probabilidades diferenciais

$$X_n(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = R_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Desta forma  $X_1(\xi) = 1$  e temos as mesmas propriedades de flutuação em diferentes partes do espectro. As flutuações no espectro reescalado são independentes de  $V$ , portanto são universais. Para os ensembles gaussianos, com densidade de níveis (2.38), podemos introduzir  $\xi_i = x_i/D$  onde  $D$  é o espaçamento médio na origem  $D = 1/R_1(0) = \pi\lambda/N$ . As função de correlação tornam-se universais no limite de Dyson

$$X_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} D^n R_n(D\xi_1, \dots, D\xi_n). \quad (2.48)$$

No limite de Dyson as funções tornam-se invariantes de translação, ou seja, dependem apenas das diferenças  $\xi_i - \xi_j$ . Em particular, a função de cluster de dois pontos (2.44) é dada por

$$T_2(\xi_1, \xi_2) = - \left( \frac{\sin \pi(\xi_1 - \xi_2)}{\pi(\xi_1 - \xi_2)} \right)^2. \quad (2.49)$$

### 2.2.2 Estatística linear

Em alguns sistemas físicos os observáveis da teoria não são os níveis propriamente ditos, mas certas combinações de funções dos mesmos. Por exemplo, em transporte mesoscópico através de pontos quânticos, a condutância adimensional é dada pela fórmula de Landauer,  $g = \sum_i x_i$ , na qual os níveis,  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ), representam os autovalores de  $tt^\dagger$ , com  $t$  representando a matriz de transmissão do sistema. Para o mesmo sistema a potência do ruído de disparo, que caracteriza a natureza discreta da carga dos portadores, é representada pela fórmula  $p = \sum_i x_i(1 - x_i)$ . Nestes casos, dizemos que os observáveis são estatísticas lineares dos níveis, desde que a soma não envolva produtos de autovalores diferentes. Uma estatística linear geral é definida por

$$F = \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (2.50)$$

e onde  $f(x)$  é uma função arbitrária integrável no intervalo  $[a, b]$ . O conhecimento das funções de correlação permite o cálculo dos cumulantes de observáveis. Por exemplo, para a estatística linear (2.50), a média e a variância são dadas por

$$\langle F \rangle = \int_a^b dx f(x) \rho_1(x) \quad (2.51)$$

$$\text{var}(F) = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2 = \int_a^b \int_a^b dx dy f(x) f(y) C(x, y). \quad (2.52)$$

Se  $f(x)$  é um polinômio as integrais podem ser calculadas usando-se as relações de recorrência dos polinômios ortogonais. Para cumulantes de ordem maior, todavia, tanto as integrais quanto as somas são de difícil execução e o método de polinômios

ortogonais perde a utilidade prática. O mesmo ocorre para  $f(x)$  não polinomial, como no caso da condutância de um sistema em contato com reservatórios normal e supercondutor [12].

## 2.3 Problemas de espalhamento

A maior parte da informação sobre sistemas quânticos é obtida via experimentos de espalhamento. A TMA, que teve sua motivação inicial em problemas de espalhamento de neutrons por núcleos pesados, também encontrou aplicações em outros problemas, tais como na transmissão de ondas eletromagnéticas em meios desordenados [13] e no transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos como pontos e fios quânticos [14]. A condução eletrônica nestes sistemas é tratada como um problema de espalhamento [15], no qual a condutância do sistema é expressa em termos da probabilidade de transmissão dos elétrons através da amostra.

Enquanto um sistema fechado é caracterizado pelos níveis de energia e funções de onda, um sistema aberto conectado a guias é descrito pela matriz de espalhamento  $S$ . A matriz  $S$  relaciona as ondas espalhadas com as incidentes e desempenha um papel central na teoria de transporte de Landauer-Buttiker [16]. Em sistemas balísticos com geometria não-integrável, a matriz  $S$  comporta-se de forma irregular quando parâmetros das ondas incidentes (energia, por exemplo) ou da região de espalhamento (forma da cavidade, intensidade de um campo magnético aplicado, etc.) variam suavemente. Desta forma, uma descrição estatística baseada em distribuições e funções de correlação torna-se mais apropriada.

Pode-se construir a matriz  $S$  via TMA de duas maneiras. A primeira usa a fórmula de Mahaux-Weidenmüller, a qual expressa a matriz  $S$  em termos do hamiltoniano do sistema fechado, modelado como um membro dos ensembles gaussianos da TMA, e de uma matriz fenomenológica que descreve o acoplamento da cavidade aos guias. Esta abordagem hamiltoniana será discutida com mais detalhes no próximo capítulo. O segundo método consiste em construir a TMA diretamente para a matriz  $S$  através de um princípio de máxima entropia, sem nenhuma referência ao hamiltoniano. A equivalência entre esses dois métodos foi demonstrada nas referências [17] e [18]. O princípio de máxima entropia informacional também

é utilizado localmente na construção dos ensembles de matrizes de transferência usados em fios desordenados.

### 2.3.1 Matrizes de espalhamento

Vamos considerar o problema de espalhamento de elétrons num sistema de dois terminais como mostrado na figura 2.2. Uma cavidade  $2D$  é conectada a reservatórios de elétrons por guias ideais. O confinamento transversal nos guias produz modos discretos, ou canais, de propagação. Por simplicidade, vamos considerar guias de mesma largura, portanto com o mesmo número  $N$  de modos. A função de onda

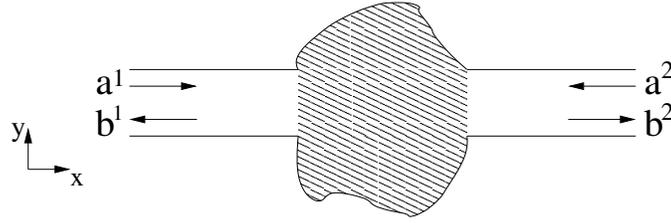


Figura 2.2: Cavidade 2D com 2 guias semi-infinitos.

nos guias pode ser escrita como o vetor  $N$  dimensional

$$\Psi^j(x) = [\psi_1^j(x), \dots, \psi_N^j(x)]^T, \quad (2.53)$$

onde índice  $j$  indica os guias da direita,  $j = 1$ , e esquerda,  $j = 2$ . As entradas deste vetor são combinações lineares de ondas planas com normalização de fluxo unitário

$$\psi_n^1 = a_n^1 \frac{e^{ik_n x}}{(hk_n/m)^{1/2}} + b_n^1 \frac{e^{-ik_n x}}{(hk_n/m)^{1/2}}, \quad (2.54)$$

$$\psi_n^2 = a_n^2 \frac{e^{-ik_n x}}{(hk_n/m)^{1/2}} + b_n^2 \frac{e^{ik_n x}}{(hk_n/m)^{1/2}}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.55)$$

Para  $N$  modos propagantes no nível de Fermi estas amplitudes podem ser agrupadas

nos vetores  $2N$  dimensionais  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}$  definidos por

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

A matriz de espalhamento conecta as amplitudes das ondas que saem na cavidade com as que entram, sendo definida pela equação

$$\mathbf{b} = S\mathbf{a}. \quad (2.57)$$

O elemento de matriz  $S_{kl}^{ij}$  conecta o  $l$ -ésimo modo propagante do guia  $j$  ao  $k$ -ésimo modo do guia  $i$ . A condição de conservação de fluxo,  $\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ , implica a unitariedade da matriz  $S$ , ou seja

$$S^\dagger S = 1. \quad (2.58)$$

Na ausência de outras simetrias este é o único vínculo imposto à matriz  $S$ . A presença de simetria de reversão temporal impõe um novo vínculo: para sistemas com simetria de rotação de spin a matriz  $S$  fica simétrica,  $S = S^T$ . Para partículas de spin  $1/2$  com simetria de rotação de spin quebrada, a matriz  $S$  fica autodual<sup>3</sup>,  $S = S^R$ . Em sistemas de dois terminais, como o da figura 2.2, a matriz  $S$  tem a seguinte estrutura de blocos

$$S = \begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

onde  $r, r', t$  e  $t'$  são matrizes  $N \times N$  de reflexão e transmissão. A unitariedade de  $S$  implica as seguintes relações entre os blocos [14]

$$r^\dagger r + t^\dagger t = 1, \quad (2.60)$$

$$r'^\dagger r' + t'^\dagger t' = 1, \quad (2.61)$$

$$r^\dagger t' + t^\dagger r' = 0, \quad (2.62)$$

$$r'^\dagger t + t'^\dagger r = 0. \quad (2.63)$$

Consequentemente,  $t^\dagger t$ ,  $t'^\dagger t'$ ,  $1 - rr^\dagger$  e  $1 - r'r'^\dagger$  têm os mesmos autovalores  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$ .

---

<sup>3</sup>O dual  $q^R$  do quatérnion  $q = a_0 + i \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k$  é definido por  $q = a_0 - i \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k$

Cada um desses “autovalores de transmissão” é um número real compreendido entre 0 e 1.

### 2.3.2 Teoria de Landauer-Büttiker

O formalismo de Landauer-Büttiker [19, 20] relaciona propriedades de transporte do sistema às propriedades do problema de espalhamento subjacente. Desta forma, corrente elétrica passa a ser entendida como o resultado da injeção de cargas no contato e da probabilidade das mesmas atravessarem a amostra. Ao contrário das teorias clássicas de transporte em sistemas macroscópicos, o formalismo de Landauer-Buttiker leva em conta aspectos do processo de medição e tem sido amplamente usado na interpretação de experimentos em física mesoscópica [16, 3, 15]. O condutor é modelado por uma região desordenada, ou uma cavidade balística, conectada à reservatórios de elétrons por meio de guias ideais. A figura 2.3 mostra uma geometria de dois terminais. Os reservatórios são considerados suficientemente

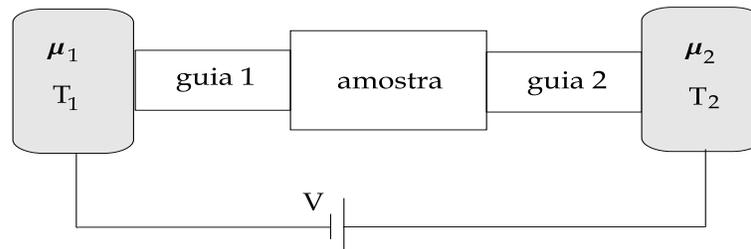


Figura 2.3: Exemplo de um sistema de dois terminais.

grandes para estarem em equilíbrio termodinâmico. Desta forma, eles podem ser caracterizados por temperaturas  $T_\alpha$  e potenciais químicos  $\mu_\alpha$  bem definidos, com  $\alpha = 1, 2$  indicando esquerda e direita, respectivamente. Portanto, os elétrons nos reservatórios obedecem à função de distribuição de Fermi-Dirac

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - \mu_\alpha)/k_B T_\alpha}}. \quad (2.64)$$

Os reservatórios, além de funcionarem como fonte de elétrons, também funcionam

como sumidouros perfeitos, ou seja, os elétrons passam dos guias para os reservatórios com probabilidade de reflexão nula. Os guias ideais funcionam como “guias de onda eletrônicos” introduzidos para a definição de uma base de espalhamento, construção da matriz  $S$  e do operador corrente [21]. Seguindo as referências [21, 22], pode-se mostrar que o valor esperado do operador corrente é dado por

$$\langle I \rangle = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE [f_1(E) - f_2(E)] \text{Tr } t^\dagger(E)t(E) \quad (2.65)$$

onde  $f_\alpha$  são as distribuições de Fermi-Dirac dos reservatórios e  $t$  é a matriz de transmissão. Aplicando-se uma diferença de potencial  $V$  entre os reservatórios tal que  $\mu_1 - \mu_2 = eV$  temos que, no regime de resposta linear, a condutância  $G = \lim_{V \rightarrow 0} \langle I \rangle / V$ , é dada por

$$G = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \left( -\frac{\partial f}{\partial E} \right) \text{Tr } t^\dagger(E)t(E). \quad (2.66)$$

Em particular, para  $T = 0$ , apenas elétrons no nível de Fermi contribuem para a condutância, e a eq. (2.66) reduz-se à formula de Landauer

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr } t^\dagger t. \quad (2.67)$$

O formalismo também permite o estudo de flutuações temporais na corrente causada pela discreteza da carga dos portadores. Essas flutuações são denominadas ruído de disparo. O ruído é apropriadamente caracterizado pela densidade espectral, que é a transformada de Fourier,  $P(\omega)$ , da função de correlação corrente-corrente [21]. Usando o formalismo de Landauer-Büttiker pode-se mostrar que a componente de frequência nula da densidade espectral, denominada potência do ruído de disparo, é dada por

$$P = \frac{2e^2}{h} \int dE \{ [f_1(1-f_2) + f_2(1-f_1)] \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger) + [f_1(1-f_1) + f_2(1-f_2)] \text{Tr}(tt^\dagger tt^\dagger) \}. \quad (2.68)$$

Em temperatura nula e no regime de resposta linear, a eq. (2.68) fornece a relação

$$P = \frac{2e^3|V|}{h} \text{Tr}[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)]. \quad (2.69)$$

Definindo  $P_0 = \frac{2e^3|V|}{h}$ , a potência do ruído de disparo adimensional é dada por

$$p = \frac{P}{P_0} = \text{Tr}[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)] = \sum_n \tau_n(1 - \tau_n), \quad (2.70)$$

onde usamos os autovalores de transmissão.

### 2.3.3 Matrizes aleatórias em problemas de espalhamento

Conforme descrevemos anteriormente existem duas abordagens para descrever o transporte de elétrons em cavidades caóticas usando TMA: a do Hamiltoniano e a da matriz de espalhamento. Na primeira, modelamos o Hamiltoniano,  $H$ , da cavidade por uma matriz aleatória  $N_c \times N_c$  pertencente a um dos ensembles gaussianos. O acoplamento da cavidade aos guias é descrito pela matriz não aleatória  $W$ . A matriz de espalhamento  $S(E)$  é obtida de  $H$  através da fórmula de Mahaux-Weidenmüller

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger \frac{1}{E - H + i\pi W W^\dagger} W. \quad (2.71)$$

O limite  $N_c \rightarrow \infty$  é tomado no fim dos cálculos de modo que a estatística da matriz  $S$  não dependa da matriz aleatória  $H$ , sendo desta forma universal.

O segundo método consiste em aplicar a TMA diretamente à matriz de espalhamento, sem nenhuma referência ao Hamiltoniano. Nesta abordagem, estamos interessados nas propriedades estatísticas de um conjunto de sistemas representados por um ensemble de matrizes  $S$ . Para cálculos neste ensemble precisamos definir a medida invariante  $d\mu(S)$  do espaço das matrizes  $S$ . Por definição a medida permanece invariante sob um automorfismo de uma dada classe de simetria nela mesma, isto é,

$$d\mu^\beta(S) = d\mu^\beta(S'), \quad (2.72)$$

para  $\beta = 2$  temos  $S' = U_0 S V_0$ , onde  $U_0$  e  $V_0$  são matrizes unitárias fixas. Esta relação

define um automorfismo sobre o conjunto das matrizes unitárias. Para  $\beta = 1$  temos  $V_0 = U_0^T$  e para  $\beta = 4$ ,  $V_0 = \bar{U}_0$ . O cálculo da medida invariante, embora longo, segue o algoritmo:

1. Definimos o elemento diferencial de arco

$$ds^2 = \text{Tr}[dS^\dagger dS].$$

2. Identificamos o tensor métrico do espaço através da relação

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu}(x) \delta x_\mu \delta x_\nu.$$

3. Obtemos o elemento de volume a partir da relação

$$dV = |\det g(x)|^{1/2} \prod_{\mu} dx_{\mu}.$$

A densidade de probabilidade  $\mathcal{P}(S)$  de encontrarmos a matriz  $S$  no volume  $d\mu(S)$  pode ser obtida pelo o método de máxima entropia, no qual associamos uma entropia de informação à probabilidade  $P(S)$  dada pela fórmula de Shannon

$$\mathcal{S} = - \int d\mu(S) \mathcal{P}(S) \ln \mathcal{P}(S). \quad (2.73)$$

Note que toda a informação de simetria já está contida na parametrização da matriz  $S$ . Ao maximizar a entropia, sujeita ao vínculo de normalização

$$\int \mathcal{P}(S) d\mu(S) = 1, \quad (2.74)$$

encontramos

$$\mathcal{P}(S) = \text{constante}, \quad (2.75)$$

ou seja, devido às flutuações, a matriz de espalhamento cobre a variedade com distribuição uniforme. Isto significa que a matriz  $S$  é uniformemente distribuída no grupo

unitário, sujeita apenas, se for o caso, a possíveis vínculos devido às simetrias de reversão temporal e/ou rotação de spin. A característica fundamental do método da máxima entropia é a possibilidade de acessar diretamente propriedades estocásticas universais da matriz de espalhamento, eliminando a necessidade da especificação de detalhes microscópicos do hamiltoniano subjacente. Médias de observáveis físicos são calculadas realizando-se integrais sobre o grupo unitário, como mostrado na próxima subseção.

### 2.3.4 Média sobre o grupo unitário

De acordo com a fórmula de Landauer, a condutância de um sistema de dois terminais é dada por

$$g(S) = \text{Tr} (t't'^{\dagger}) = \sum_{i,j} |S_{ij}^{12}|^2. \quad (2.76)$$

Portanto, o valor médio da condutância pode ser calculado pela integral sobre o grupo unitário das matrizes  $S$

$$\langle g \rangle = \int d\mu(S) g(S) = \sum_{i,j} \int d\mu(S) S_{ij}^{12} (S_{ij}^{12})^*. \quad (2.77)$$

Em geral, para uma função arbitrária  $f(S)$ , a média é definida por

$$\langle f(S) \rangle = \int d\mu(S) f(S), \quad (2.78)$$

onde a medida invariante é normalizada tal que  $\int d\mu(S) = 1$ . Integrais deste tipo são freqüentemente encontradas na literatura e podem ser resolvidas com o método desenvolvido na ref. [23]. Este método direto, no entanto, apresenta algumas dificuldades de natureza prática. Este fato será ilustrado através da análise apresentada na ref. [24] para a função polinomial

$$f(S) = S_{a_1 b_1} \dots S_{a_n b_n} S_{\alpha_1 \beta_1}^* \dots S_{\alpha_m \beta_m}^*. \quad (2.79)$$

Usando argumentos de simetria pode-se mostrar que a média  $\langle f(S) \rangle$  é nula a menos que  $n = m$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  seja uma permutação  $P$  de  $a_1, \dots, a_n$  e  $\beta_1, \dots, \beta_m$  seja uma permutação  $P'$  de  $b_1, \dots, b_m$ . A estrutura geral da média é então

$$\langle S_{a_1 b_1} \dots S_{a_n b_n} S_{\alpha_1 \beta_1}^* \dots S_{\alpha_m \beta_m}^* \rangle = \delta_{nm} \sum_{P, P'} V_{P, P'} \prod_{j=1}^n \delta_{a_j \alpha_{P(j)}} \delta_{b_j \beta_{P'(j)}}, \quad (2.80)$$

onde a soma é sobre todas as permutações  $P$  e  $P'$  dos números  $1, \dots, n$ . Os coeficientes  $V_{P, P'}$  dependem apenas da estrutura de ciclos da permutação  $P^{-1}P'$ . Como qualquer permutação tem uma fatoração única em ciclos disjuntos de comprimentos  $c_1, \dots, c_k$  ( $n = \sum_{j=1}^k c_j$ ),  $V_{P, P'}$  depende apenas da estrutura de ciclos de  $P^{-1}P'$  e podemos escrever  $V_{c_1, \dots, c_k}$  em vez de  $V_{P, P'}$ . Os coeficientes  $V$  são determinados pela relação de recorrência [25]

$$NV_{c_1, \dots, c_k} + \sum_{p+q=c_1} V_{p, q, c_2, \dots, c_k} + \sum_{j=2}^k c_j V_{c_1+c_j, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k} = \delta_{c_1 1} V_{c_2, \dots, c_k}, \quad (2.81)$$

com  $V_0 \equiv 1$ . Em princípio estas relações permitem o cálculo exato da média de qualquer função polinomial de  $S$ . Resultados para  $V$  até  $n = 5$  são dados no apêndice A da ref. [24]. Obviamente, quando o número de  $S$ 's e  $S^*$ 's aumenta, o método torna-se inconveniente.

Para um exemplo concreto do método, voltaremos à integral (2.77) que é resolvida com uma aplicação direta das fórmulas (2.80) e (2.81). Como há apenas a permutação identidade temos  $V_1 = 1/N$ , onde  $N$  é a dimensão da matriz. Portanto, a média da condutância é simplesmente

$$\langle g \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{1}{2N} = \frac{N}{2}. \quad (2.82)$$

Extensões deste método para as outras classes de simetria podem ser encontradas nas referências [8, 14].

### 2.3.5 Representação Polar

O problema da integração direta sobre o grupo unitário pode ser evitado através da decomposição polar da matriz  $S$  [8]

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

onde  $\tau$  representa uma matriz diagonal  $N$ -dimensional com os autovalores de transmissão  $\tau_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ). Os  $v_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) são matrizes unitárias  $N \times N$  arbitrárias para o caso  $\beta = 2$ . No caso ortogonal,  $\beta = 1$ , temos as restrições  $v_3 = v_1^T$  e  $v_4 = v_2^T$ . No caso simplético<sup>4</sup>,  $\beta = 4$ , as matrizes  $v_i$  são quatérnions auto-duais  $N \times N$  com as restrições  $v_3 = \bar{v}_1$  e  $v_4 = \bar{v}_2$ . Esta representação é natural para o estudo da condutância pois separa os autovalores de transmissão de fatores irrelevantes de fase (as matrizes  $v_i$ ). Neste caso, a medida de Haar fatora numa parte radial e outra angular, e pode ser escrita na forma [8]

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_c \tau_c^{-1+\beta/2} \prod_c d\tau_c \prod_i d\mu(v^{(i)}). \quad (2.84)$$

Com uma integração sobre os graus de liberdade angulares obtemos a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão

$$P(\{\tau\}) = C_\beta \prod_{a < b} |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_c \tau_c^{-1+\beta/2}, \quad (2.85)$$

onde  $C_\beta$  é uma constante de normalização. Desta forma, médias de observáveis podem ser calculadas com o auxílio do método dos polinômios ortogonais para  $\beta = 2$  ou anti-ortogonais para  $\beta = 1, 4$ . Discutiremos aqui, a interpretação da equação (2.85) como uma distribuição de Gibbs para um gás de Coulomb, que nas variáveis  $\lambda_i = (1 - \tau_i)/\tau_i$  tem a forma

$$P(\{\lambda\}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = - \sum_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| + \sum_i V(\lambda_i), \quad (2.86)$$

---

<sup>4</sup>os autovalores de transmissão são duplamente degenerados,  $\tau = \text{diag}(\tau_1 1, \tau_2 1, \dots, \tau_N 1)$

onde  $V(\lambda) = N \ln(1 + \lambda)$  é o potencial de confinamento. A densidade de níveis, definida por

$$\nu(\lambda) = \sum_i \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle, \quad (2.87)$$

pode ser calculada no limite  $N \gg 1$  usando a aproximação de contínuo

$$\mathcal{H}[\nu(\lambda)] = \int d\lambda V(\lambda) \nu(\lambda) - \frac{1}{2} \int \int d\lambda d\lambda' \nu(\lambda) \nu(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'|. \quad (2.88)$$

Adotando o mesmo princípio variacional usado na eq.(2.36), obtemos a seguinte equação integral para a densidade de níveis

$$V(\lambda) = \int d\lambda' \nu(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| + C, \quad (2.89)$$

que é equivalente a

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\nu(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N}{1 + \lambda}. \quad (2.90)$$

A solução desta equação foi obtida na ref. [14] e tem a forma

$$\nu(\lambda) = \frac{N}{\pi \sqrt{\lambda}(1 + \lambda)}, \quad (2.91)$$

que, voltando para as variáveis originais  $\tau = 1/(1 + \lambda)$ , pode ser reescrita como

$$\rho(\tau) = \frac{N}{\pi \sqrt{\tau(1 - \tau)}}. \quad (2.92)$$

Observáveis de transporte geralmente podem ser representados como uma estatística linear,  $A = A(\{\tau\}) = \sum_n a(\tau_n)$ , dos autovalores de transmissão. De posse da distribuição conjunta de autovalores de transmissão, podemos obter valores médios desses observáveis por meio da integral

$$\langle A \rangle = \int a(\{\tau\}) P(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a, \quad (2.93)$$

que também pode ser escrita em termos da densidade de autovalores de transmissão

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_n \langle a(\tau_n) \rangle \\
 &= \sum_n \int_0^1 d\tau \langle \delta(\tau - \tau_n) \rangle a(\tau) \\
 &= \int_0^1 d\tau \rho(\tau) a(\tau).
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Para a condutância, por exemplo, temos  $a(\tau) = \tau$ . No regime semiclássico  $N \gg 1$ , usando a densidade de autovalores (2.92), obtemos  $\langle g \rangle = N/2$ . Este valor é consequência da exploração ergódica da cavidade de modo que, em média, apenas metade dos elétrons que entram no ponto quântico são transmitidos, resultando numa transmissão média de  $1/2$  por modo. Para a potência do ruído de disparo temos  $a(\tau) = \tau(1 - \tau)$ , desta forma no regime semiclássico obtemos  $\langle p \rangle = N/8$ . Observe que este valor é quatro vezes menor que a potência do ruído de disparo de um processo Poisson. O comportamento sub-poissônico reflete a presença de correlação entre os elétrons devido ao princípio de exclusão de Pauli. Uma medida destas correlações é o fator  $F$  de Fano, definido como a razão entre a potência do ruído investigado e a potência do ruído poissônico. Portanto, para um ponto quântico com contatos pontuais simétricos temos  $F = 1/4$ .

## 2.4 Ensembles de matrizes de transferência

Na seção anterior descrevemos o transporte numa cavidade caótica a partir de sua matriz de espalhamento. Agora estamos interessados em conectar várias cavidades em série, formando uma estrutura de fio. As propriedades de transporte deste fio são determinadas a partir da matriz de espalhamento total do sistema. Como exemplo, vamos considerar o problema de duas cavidades em série mostrado na figura 2.4. As cavidades estão ligadas por um fio ideal de modo que as matrizes de espalhamento  $S_1$  e  $S_2$  sejam bem definidas.

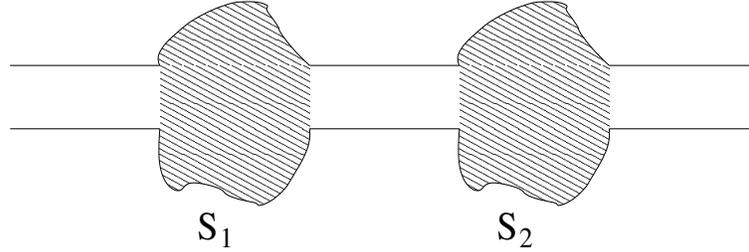


Figura 2.4: Duas amostras mesoscópicas em série, conectadas por um guia ideal.

As matrizes de reflexão e transmissão do sistema composto são dadas por [16]

$$\begin{aligned}
 r &= r_1 + t'_1(1 - r'_1 r_2)^{-1} r_2 t_1, \\
 t &= t_2(1 - r'_1 r_2)^{-1} t_1, \\
 t' &= t'_1(1 - r_2 r'_1)^{-1} t_2, \\
 r' &= r'_2 + t_2(1 - r_2 r'_1)^{-1} r'_1 t'_2.
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Vemos que a regra de composição de matrizes de espalhamento é complicada e envolve inversões matriciais. Portanto, uma formulação via matrizes de espalhamento parece inadequada para este problema. Uma regra de composição mais simples é obtida com o auxílio da matriz de transferência  $M$ . A fim de definir a matrix  $M$  para uma cavidade voltaremos à figura 2.2. Agrupando as amplitudes das ondas planas à esquerda e à direita da cavidade nos vetores  $2N$  dimensionais

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a^1 \\ b^1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix}, \tag{2.96}$$

definimos a matriz de transferência pela equação

$$\mathbf{c}_2 = M \mathbf{c}_1. \tag{2.97}$$

A regra de composição para a matriz de transferência é simplesmente o produto das matrizes de transferência dos componentes. Então, a matriz de transferência do

sistema da figura 2.4 é

$$M = M_2 M_1, \quad (2.98)$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são as matrizes das cavidades individuais. A matriz de transferência também pode ser decomposta em quatro blocos

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

a partir dos quais podemos reconstruir a matriz de espalhamento do sistema

$$S = \begin{pmatrix} -m_{22}^{-1} m_{21} & m_{22}^{-1} \\ (m_{11}^\dagger)^{-1} & m_{12} m_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

A simplicidade da regra de composição torna a matriz de transferência mais conveniente para o estudo de transporte quântico em fios. Além disso, as simetrias físicas impõem vínculos à matriz de transferência:

### 1. Conservação de corrente

$$M^\dagger \Sigma_z M = \Sigma_z \quad \text{ou} \quad M \Sigma_z M^\dagger = \Sigma_z \quad (2.101)$$

onde

$$\Sigma_z = \sigma_z \otimes \mathbf{1}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_N & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_N \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

é uma generalização  $2N$  dimensional da matriz de Pauli  $\sigma_z$ .

### 2. Reversão temporal

$$M^* = \Sigma_x M \Sigma_x \quad (2.103)$$

onde

$$\Sigma_x = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_N = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_N \\ \mathbf{1}_N & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

## 3. Reversão temporal (spin 1/2)

$$M^* = \Sigma M \Sigma^T, \quad (2.105)$$

onde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & \phi & \\ & & \ddots & \\ \phi & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2N \times 2N}. \quad (2.106)$$

Um estudo detalhado desses vínculos é feito nas referências [26] e [27], onde também é mostrado que uma matriz de transferência pode ser parametrizada na forma

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} = U \Gamma V \quad (2.107)$$

onde  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são matrizes unitárias e  $\lambda$  é uma matriz diagonal com elementos reais  $0 \leq \lambda_i < \infty$ ,  $i = 1, \dots, N$ , que são os autovalores da matriz

$$Q = \frac{1}{4}(M^\dagger M + (M^\dagger M)^{-1} - 2), \quad (2.108)$$

e se relacionam com os autovalores de transmissão de acordo com

$$\lambda_i = \frac{1 - \tau_i}{\tau_i}. \quad (2.109)$$

A parametrização (2.107) vale para o caso unitário. Nos casos ortogonal e simplético temos os vínculos<sup>5</sup>  $u_2 = u_1^*$  e  $v_2 = v_1^*$ .

---

<sup>5</sup>No caso simplético as matrizes  $u_i$  são quaternions unitárias e, neste caso, o símbolo \* indica conjugação complexa quaterniônica.

### 2.4.1 Equação DMPK

Devido à simplicidade da regra de combinação, adota-se uma abordagem via matrizes de transferência na descrição estatística de transporte em fios quânticos. Tais sistemas são condutores desordenados quase unidimensionais, ou seja, de comprimento muito maior que a largura ( $L \gg W$ ). Na abordagem estatística, um ensemble de condutores macroscópicos de comprimento  $L \gg \ell$ , todos com mesma desordem macroscópica, caracterizada pelo caminho livre médio  $\ell$ , mas diferentes realizações microscópicas de desordem, é descrito por um ensemble de matrizes aleatórias cuja probabilidade diferencial depende parametricamente de  $L$  e pode ser escrita como

$$dp_L(M) = p_L(M)d\mu(M). \quad (2.110)$$

Onde  $d\mu$  é a medida de Haar do grupo, que pode ser escrita em termos dos parâmetros da eq. (2.107) como

$$d\mu(M) = J(\lambda) \prod_i \lambda_i d\mu(U)d\mu(V); \quad J(\lambda) = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta. \quad (2.111)$$

O índice  $\beta$  desempenha o mesmo papel do índice de Dyson dos ensembles gaussianos, podendo assumir os valores 1, 2 e 4 para os ensembles ortogonal, unitário e simplético, respectivamente.

A propriedade multiplicativa das matrizes de transferência fornece uma abordagem local do problema: o sistema é dividido em fatias de comprimento  $\delta L$ , macroscopicamente pequenas, mas suficientemente grandes para conter muitas impurezas. Desta forma, pode-se adicionar uma fatia de comprimento  $\delta L$  a um fio de comprimento  $L$  para formar um fio de comprimento  $L + \delta L$ , como mostra a figura 2.5.

Sendo  $M'$ ,  $M''$  e  $M = M''M'$  as respectivas matrizes de transferência, as densidades de probabilidade  $p_{\delta L}(M')$ ,  $p_L(M'' = MM'^{-1})$  e  $p_{L+\delta L}(M)$  relacionam-se pela convolução [28]

$$p_{L+\delta L}(M) = \int p_L(MM'^{-1})p_{\delta L}(M')d\mu(M'). \quad (2.112)$$

A equação (2.112) tem a estrutura da equação de Chapman-Kolmogorov para um

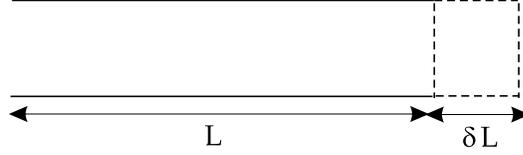


Figura 2.5: Embebimento de uma fatia de comprimento  $\delta L$  num fio desordenado de comprimento  $L$ .

processo Markoviano, em que a probabilidade no “instante”  $L + \delta L$  é dada em termos da distribuição no “instante”  $L$  e de uma probabilidade de transição  $p_{\delta L}$ . Esta, por sua vez, pode ser obtida a partir do critério de máxima entropia informacional [28], resultando em  $p_{\delta L}(M) \propto \exp -\text{Tr}(M^\dagger M)$ . Portanto, a probabilidade de transição é isotrópica, ou seja, depende apenas dos autovalores  $\{\lambda\}$ . A propriedade de isotropia é preservada pela convolução, portanto a distribuição  $p_L(M)$  também é isotrópica:  $p_L(M) = p(\{\lambda\}; L)$ .

A equação de Chapman-Kolmogorov pode ser escrita como uma equação de Fokker-Planck para a distribuição de autovalores em função de  $L$ ,

$$l \frac{\partial p}{\partial L} = \frac{2}{\beta N + 2 - \beta} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \lambda_n (1 + \lambda_n) J_\beta \frac{\partial p}{\partial \lambda_n} \frac{1}{J_\beta}, \quad (2.113)$$

que descreve o movimento browniano executado pelos autovalores de transmissão a medida que o comprimento do fio aumenta. Esta equação de Fokker-Planck é conhecida na literatura como equação Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar (DMPK) [14].

## 2.5 Novas classes de simetria

Nas seções anteriores apresentamos os ensembles clássicos de matrizes aleatórias nas suas três versões: hamiltoniana, matriz de espalhamento e matriz de transferência. Cada um destes ensembles pode ser classificado, de acordo com as simetrias básicas, em três classes de universalidade: ortogonal, unitária e simplética. Apesar da enormidade de aplicações em diversos sistemas físicos, este esquema não é exaus-

tivo. Existem sistemas com comportamento universal distinto destas três categorias, hoje denominadas classes de Wigner-Dyson. Estas novas classes de universalidade surgem quando simetrias adicionais ou novos vínculos são impostos às matrizes. Por exemplo, durante a década de 90 foram introduzidos os três ensembles gaussianos quirais no estudo de propriedades universais do espectro do operador de Dirac em QCD [29, 30]. Nestes modelos o operador de Dirac é representado por uma matriz aleatória com blocos nulos na diagonal e submatrizes retangulares aleatórias fora da diagonal. Hamiltonianos com esta mesma estrutura também aparecem na teoria de transporte de elétrons em redes bipartidas, como em modelos de *hopping* aleatório e de fluxo aleatório. Também foram introduzidas mais quatro classes de universalidade na descrição de propriedades universais em sistemas com interfaces metal normal-supercondutor [31]. Estes sistemas  $NS$  são descritos por hamiltonianos de Bogoliubov-deGennes (BdG) que são modelados por matrizes aleatórias com características similares às quirais. Neste novo cenário, pesquisadores passaram a investigar os efeitos das simetrias adicionais em propriedades já estudadas nas classes Wigner-Dyson. Por exemplo, o estudo de propriedades de transporte de elétrons em fios quânticos das classes quiral e BdG [32] [33] revelou propriedades anômalas no comprimento de localização.

A inclusão dessas classes de universalidade tornou a teoria de matrizes aleatórias ainda mais geral e surgiu a necessidade de um novo esquema de classificação para os ensembles. Este esquema emergiu em consequência do trabalho pioneiro de Zirnbauer [34], que demonstrou a existência de 10 classes de universalidade que seguem uma relação direta, biunívoca, com a tabela de Cartan das grandes famílias de espaços simétricos [35]. As dez classes de universalidade dividem-se em três categorias: (i) Wigner-Dyson (3 classes), introduzidos por Dyson nos anos 60, são apropriadas para condutores desordenados convencionais; (ii) Bogoliubov-de Gennes (4 classes), relevantes na descrição de quasepartículas em supercondutores não convencionais (tipo onda-d) fracamente desordenados; (iii) quiral (3 classes), que aparecem em problemas em que a desordem é puramente fora da diagonal, como em modelos de *hopping* aleatório ou na descrição de uma partícula quântica na presença de um fluxo magnético aleatório. A simetria quiral também é chamada de simetria de subrede.

Devido a sua importância no esquema de classificação da teoria de matrizes aleatórias, apresentaremos na próxima seção um resumo da teoria de espaços simétricos. Finalizaremos esta discussão com a tabela classificação das teorias de matrizes aleatórias formuladas em termos do hamiltoniano, matriz de espalhamento e matriz de transferência baseadas nas características geométricas destes espaços.

## 2.6 Classificação por espaços simétricos

As variedades de integração das teorias de matrizes aleatórias com aplicações na física podem ser identificadas com espaços simétricos irredutíveis. Um espaço simétrico  $X$  pode ser realizado como um conjunto de cosets<sup>6</sup>  $G/K$  de um grupo de Lie conexo  $G$  sobre seu subgrupo  $K$ . Os espaços simétricos são homogêneos, ou seja, o grupo  $G$  atua transitivamente sobre o espaço. Isto significa que qualquer ponto  $x$  pode ser obtido a partir de um ponto fixo  $x_0$  por uma transformação do grupo  $G$ :  $x = gx_0$ ,  $g \in G$ . O subgrupo  $K$  é definido pela condição  $kx_0 = x_0$ ,  $k \in K$ , portanto é o subgrupo de isotropia no ponto  $x_0$ . A seguir vamos considerar três exemplos importantes desses espaços, identificando os grupos  $G$  e  $K$  em cada caso.

### 1. O espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$ .

Considere o plano euclidiano  $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2)\}$ . O grupo de simetria é  $G = E_2 = \{g\}$ , o grupo das transformações lineares no espaço euclidiano bidimensional que preservam o comprimento dos vetores. A ação do grupo é definida por:  $gx = kx + a$ , onde  $a \in \mathbb{R}^2$  e  $k \in K = SO(2)$  é o grupo de rotações no plano.

### 2. A esfera $S^2$ .

A esfera bidimensional unitária é definida por  $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . O grupo de simetria é  $G = SO(3)$ , o grupo de rotações no espaço euclidiano tridimensional. O subgrupo de isotropia  $K = SO(2)$  deixa o pólo norte  $x_3 = (0, 0, 1)$

---

<sup>6</sup>Um coset  $G/K$  é um conjunto de subconjuntos de  $G$  na forma  $gK$ , onde  $K$  é subgrupo de  $G$  e  $g \in G$ .

fixo.

### 3. O plano de Lobachevsky $\mathbb{H}^2$ .

Considere o hiperboloide  $\mathbb{H}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_3 > 0\}$ . Neste caso o grupo de simetria é  $G = SO(2, 1)$ . O subgrupo de simetria permanece  $K = SO(2)$ .

A classificação dos espaços simétricos é realizada localmente em relação à álgebra de Lie  $\mathbf{G}$  do grupo de simetria  $G$ , através de um automorfismo involutivo<sup>7</sup> sobre  $\mathbf{G}$ . A involução  $\sigma$  tem autovalores  $\pm 1$ , o que permite decompor  $\mathbf{G}$  em dois subespaços  $\mathbf{K}$ , de autovalor  $+1$ , e  $\mathbf{L}$ , de autovalor  $-1$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{L},$$

tais que

$$[\mathbf{K}, \mathbf{K}] \subset \mathbf{K}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{L}] \subset \mathbf{L}, \quad \text{e} \quad [\mathbf{L}, \mathbf{L}] \subset \mathbf{K}. \quad (2.114)$$

A notação  $[A, B]$  denota o subespaço gerado pelo produto de Lie entre os elementos de  $A$  e  $B$ . A subálgebra  $\mathbf{K}$  é denominada simétrica e corresponde à álgebra de Lie do grupo  $K$ . O subespaço  $\mathbf{L}$  pode ser interpretado como o espaço tangente à  $X$  no ponto  $X_0$ . O mapa exponencial da álgebra no grupo  $\mathbf{G} \xrightarrow{\exp} G$  leva, em particular, o subespaço  $\mathbf{L}$  no espaço simétrico  $X \simeq G/K$ . Existem três possibilidades:

1.  $\mathbf{G}$  é semisimples<sup>8</sup> e compacto<sup>9</sup>, então  $X$  tem curvatura positiva
2.  $\mathbf{G}$  é semisimples e não-compacto, então  $X$  tem curvatura negativa
3.  $\mathbf{G}$  é não-semisimples e  $\mathbf{L}$  é um ideal abeliano,  $[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = 0$ . O espaço  $X$  tem curvatura zero.

<sup>7</sup>Um automorfismo involutivo é o mapa  $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  tal que  $\sigma^2 = 1$

<sup>8</sup>Uma álgebra de Lie é semisimples se não possui ideais não triviais e se  $[L, L] \neq 0$ . Um ideal é uma subálgebra que contém todos os produtos entre seus elementos e os elementos da álgebra.

<sup>9</sup>Um grupo  $G$  é compacto se toda seqüência infinita de elementos de  $G$  tem um ponto de acumulação em  $G$ .

Propriedades das álgebras de Lie e de espaços simétricos podem ser encontrados em livros como [36], [37], [38] e [39]. Também existe a excelente revisão [40] contendo um apanhado de definições e muitos exemplos de interesse físico, em particular aplicações à teoria de matrizes aleatórias. A seguir apresentaremos um resumo das principais propriedades da teoria de espaços simétricos relevantes na teoria de matrizes aleatórias seguindo a ref. [41].

### 1. Triplicidade

Cada espaço simétrico ocorre em triplas  $X^+, X^-, X^0$  de curvatura positiva, negativa e zero, com mesmo subgrupo  $K$ . Se  $\mathbf{L}$  gera  $X^+$  então  $X^-$  é gerado por  $i\mathbf{L}$

### 2. Coordenadas esféricas

Cada espaço simétrico admite um sistema de coordenadas esféricas, cujas componentes radiais, denotadas por  $q_i$ , são obtidas pelo mapa exponencial da subálgebra de Cartan de  $\mathbf{L}$

### 3. Classificação completa

Espaços simétricos irredutíveis podem ser classificados com técnicas similares às aquelas utilizadas na classificação das álgebras de Lie. Eles são classificados pela rede de raízes e por um conjunto de inteiros positivos  $m_\alpha$  chamados multiplicidades. Uma rede de raiz é gerada por um conjunto  $\mathcal{R} \equiv \{\alpha\} \subset \mathcal{V}$ , onde  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional. Estes vetores são chamados vetores raízes e satisfazem certas regras [37], que permitem a classificação completa das redes. Existem cinco classes denotadas por  $A_n, B_n, C_n, D_n$  e  $BC_n$ . O índice  $n$  é o posto da rede que coincide com a dimensão de  $\mathcal{V}$ . Também existem redes associadas às álgebras de Lie excepcionais, mas essas não são relevantes nesta análise. As cinco grandes classes são definidas a seguir:

1.  $A_{n-1}$ : Seja  $\mathcal{V}$  o hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por  $v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1} = 0$ . Seja

$e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A rede de raízes contém os vetores  $\{e_i - e_j, i \neq j\}$

2.  $B_n$ : Neste caso  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  as raízes são  $\mathcal{R} = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, i \neq j\}$
3.  $C_n$ : Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  as raízes são  $\mathcal{R} = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j, i \neq j\}$
4.  $D_n$ : Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  as raízes são  $\mathcal{R} = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j\}$
5.  $BC_n$ : Seja  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  as raízes são  $\mathcal{R} = \{\pm e_i, \pm 2e_i, \pm e_j, i \neq j\}$

As raízes de módulos 1,  $\sqrt{2}$  e 2 são chamadas raízes curtas, ordinárias e longas, respectivamente. As multiplicidades destas raízes são representadas por  $m_s, m_o$  e  $m_l$ . Para cada classe de redes de raízes existem apenas alguns valores de  $m_\alpha$  compatíveis com os vínculos que definem os espaços simétricos. Juntos, eles geram 11 séries de triplas que, exceto pelas soluções excepcionais, “exaurem” o conjunto dos possíveis espaços simétricos.

#### 4. Operador de Laplace Beltrami

As informações sobre as redes de raízes permitem a construção, para cada espaço simétrico, de uma forma explícita para a parte radial do operador de Laplace-Beltrami  $\mathcal{B}$  em termos das coordenadas radiais  $q_i$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{J_s(q)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} J_s(q) \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad (2.115)$$

onde  $n$  é o posto da rede de raízes,  $s \in \{0, +, -\}$  e  $J_s(q)$  é o jacobiano da transformação para coordenadas polares definido por

$$J_s(q) = \prod_{\alpha \in R^+} [F_s(q_\alpha)]^{m_\alpha} \quad (2.116)$$

onde a função  $F_s(q)$  é dada por,  $F_0(q) = q$ , para espaços planos,  $F_+(q) = \sin(q)$  para os espaços de curvatura positiva e  $F_-(q) = \sinh(q)$  para os espaços de curvatura negativa. Denotamos por  $R^+$  o subconjunto de raízes positivas da rede,  $m_\alpha$  é a

multiplicidade da raiz  $\alpha$  e  $q_\alpha$  indica a projeção em  $\{q\}$  da raiz  $\alpha$ , por exemplo, se  $\alpha = e_i - e_j$  então  $q_\alpha = q_i - q_j$ .

### 2.6.1 Classificação dos ensembles de matrizes aleatórias

Vimos que na TMA a distribuição conjunta de níveis,  $q_i$ , representam as coordenadas físicas relevantes, tais como os níveis de energia de sistemas caóticos fechados, as autofases ou os autovalores de transmissão em problemas de espalhamento, e assim por diante. Esta distribuição pode ser obtida a partir do princípio de máxima entropia informacional ou usando a estrutura de espaços simétricos subjacente, mapeando as coordenadas radiais do espaço simétrico nos níveis descritos pela TMA. Em particular, as correlações entre os autovalores da TMA tem origem geométrica associada aos sistemas de raízes que caracterizam os espaços simétricos. Ambos os procedimentos resultam em

$$P(\{q\}) = C_N J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)}(\{q\}) \prod_{i=1}^N e^{-V(q_i)} \quad (2.117)$$

onde  $C_N$  é uma constante de normalização,  $V(q)$  é um potencial confinador dos níveis e

$$J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)}(\{q\}) = \prod_{i=1}^N |F_s(2q_i)|^\alpha \prod_{1 \leq i < j \leq N} |F_s(q_i - q_j)|^\beta |F_s(q_i + q_j)|^\gamma \quad (2.118)$$

é o jacobiano (2.116). Os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão listados na tabela 2.3 e  $s = \{0, +, -\}$ . O método de máxima entropia aplica-se aos espaços planos dos ensembles de matrizes  $H$  hermitianas e também aos espaços compactos associados às matrizes de espalhamento unitárias. Espaços não compactos hiperbólicos não aparecem na TMA clássica, i.e. ensembles ergódicos satisfazendo o princípio de máxima entropia. No entanto, eles aparecem em ensembles não ergódicos de matrizes de transferência,  $M$ . Estes ensembles não satisfazem o princípio de máxima entropia de informação e não podem ser representados como na eq.(2.117). Em vez disto eles são definidos

Classe	RT	RS	H, S	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	M	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
WD	Sim	Não	AI	0	1	0	CI	1	1	1
	Não	Sim/Não	A	0	2	0	AIII	1	2	2
	Sim	Não	AII	0	4	0	DIII	1	4	4
Quiral	Sim	Sim	BDI	0	1	1	AI	0	1	0
	Não	Sim/Não	AIII	1	2	2	A	0	2	0
	Sim	Não	CII	3	4	4	AII	0	4	0
BdG	Sim	Sim	CI	1	1	1	C	2	2	2
	Não	Sim	C	2	2	2	CII	3	4	4
	Não	Não	D	0	2	2	BDI	0	1	1
	Sim	Não	DIII	1	4	4	D	0	2	2

Tabela 2.3: Classificação das dez classes de simetria da teoria de matrizes aleatórias de acordo com os espaços simétricos de Cartan. A tabela mostra os três conjuntos de classes dos ensembles de matrizes aleatórias: Wigner-Dyson (WD), quiral e Bogoliubov-de-Gennes (BdG). Os índices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as multiplicidades das raízes longas, ordinárias e curtas da álgebra de Lie subjacente e indicam a presença ou a ausência de simetrias de rotação de spin (RS) e de reversão temporal (RT)

por equações de difusão da forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{P}{J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)}} \quad (2.119)$$

onde  $t$  é um parâmetro adimensional. A eq. (2.119) também pode ser escrita como

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\partial}{\partial q_i} D_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} D_i^{(2)} \right) P = \mathcal{L}_{FP} P, \quad (2.120)$$

onde os coeficientes de deriva e de difusão são dados por

$$D_i^{(1)} = \frac{\partial \ln J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)}}{\partial q_i}, \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = 1. \quad (2.121)$$

Também é possível escrever equações de Fokker-Planck para os ensembles

gaussiano e circular que descrevem o decaimento para a configuração de equilíbrio caracterizada pela distribuição (2.117). Este procedimento será adotado no capítulo 4 na definição de ensembles de movimento browniano.

O operador diferencial que aparece na equação de Fokker-Planck da TMA está relacionado ao operador de Laplace Beltrami do espaço simétrico através da equação

$$\mathcal{L}_{FP} = J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)} \mathcal{B}(J_{\alpha\beta\gamma}^{(s)})^{-1}, \quad (2.122)$$

de modo que o problema pode ser interpretado como uma difusão isotrópica neste espaço. Esta conexão é usada na ref.[42] para a solução da equação DMPK no ensemble unitário da classe Wigner-Dyson.

## 2.7 O modelo de Calogero-Sutherland

O modelo de Calogero-Sutherland (MCS) descreve um sistema unidimensional de  $N$  partículas quânticas não relativísticas com interação que decai com o inverso do quadrado da distância. O hamiltoniano deste sistema, considerando  $\hbar/2m = 1$ , é dado por

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{d^2(x_i - x_j)}, \quad (2.123)$$

onde  $d(x_i - x_j)$  é a distância entre as partículas  $i$  e  $j$ , e  $\alpha$  é uma constante adimensional que controla a interação. Para os valores especiais  $\alpha = 1, 1/2$  e  $2$  o modelo pode ser relacionado aos ensembles ortogonal, unitário e simplético da teoria de matrizes aleatórias, respectivamente. Uma variante deste hamiltoniano, o chamado modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico (MCSt), consiste em considerar as partículas localizadas num anel de comprimento  $L$ , como mostrado na figura 2.6.

Neste caso a distância entre as partículas passa a ser a corda

$$d_{ij} = \frac{L}{\pi} |\sin \frac{\pi}{L}(x_i - x_j)|, \quad (2.124)$$

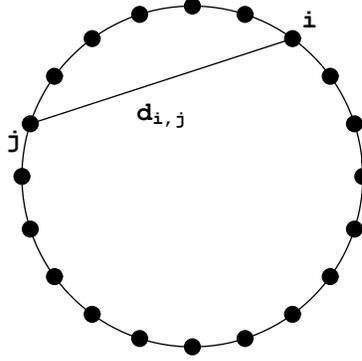


Figura 2.6: Modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico

e o hamiltoniano (2.123) fica

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i<j} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2 \frac{\pi}{L}(x_i - x_j)}. \quad (2.125)$$

É importante notar que os resultados do MCS na reta são facilmente obtidos tomando-se o limite  $L \rightarrow \infty$ . A distância entre as partículas fica  $|x_i - x_j|$  e o hamiltoniano torna-se

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(x_i - x_j)^2}. \quad (2.126)$$

### 2.7.1 Estado fundamental

O MCS<sub>t</sub> pode ser resolvido algebricamente com a introdução dos operadores de criação e aniquilação [43]

$$A_i = p_i + i \sum_{j(\neq i)} f(x_i, x_j) \quad (2.127)$$

$$A_i^\dagger = p_i - i \sum_{j(\neq i)} f(x_i, x_j), \quad (2.128)$$

onde  $x_i$  e  $p_i \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_i}$  são os operadores posição e momento, e

$$f(x_i, x_j) \equiv \frac{\pi\lambda}{L} \cot\left(\frac{\pi(x_i - x_j)}{L}\right). \quad (2.129)$$

Com o auxílio das relações de comutação

$$[x_i, p_j] = i\delta_{i,j}, \quad (2.130)$$

$$[x_i, f(x_i, x_j)] = -i\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (2.131)$$

podemos reescrever o hamiltoniano (2.125) como

$$H = \sum_i A_i^\dagger A_i + E_0, \quad (2.132)$$

onde

$$E_0 = \left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)^2 \frac{N(N^2 - 1)}{3} \quad (2.133)$$

é a energia do estado fundamental  $|\Psi_0\rangle$ . A função de onda correspondente é obtida a partir da identidade  $A_i|\Psi_0\rangle = 0$ . Na representação de coordenadas obtemos

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x_i} + i\sum_{j \neq (i)} f(x_i, x_j)\right) \Psi_0 = 0, \quad (2.134)$$

que, ao ser resolvida, fornece a função de onda

$$\Psi_0 \sim \exp\left(\sum_{i < j} \int dx_i f(x_i, x_j)\right) \sim \prod_{i < j} \sin^\alpha \frac{\pi}{L}(x_i - x_j) \quad (2.135)$$

## 2.7.2 Estados excitados

As funções de onda dos estados excitados podem ser escritas na forma  $\Psi(\{x\}) = \Phi(\{x\})\Psi_0(\{x\})$ , onde  $\Phi$  deve ser uma função simétrica para que  $\Psi$  e  $\Psi_0$  tenham o mesmo comportamento sob troca de partículas. É útil realizar a mudança de

variáveis

$$z_j = e^{2\pi i x_j / L}. \quad (2.136)$$

A variável  $z_i$  representa a posição da  $i$ -ésima partícula ao longo da circunferência de comprimento  $L$  no plano complexo. Nas novas variáveis, o hamiltoniano (2.125) e a função de onda do estado fundamental ficam

$$H_{CS} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[ \sum_i \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \sum_{i<j} \frac{z_i z_j}{(z_i - z_j)^2} \right]. \quad (2.137)$$

$$\Psi_0 \sim \prod_{i<j} |z_i - z_j|^\alpha \prod_i z_i^{-\alpha(N-1)/2} \quad (2.138)$$

Desta forma, temos as equações de autovalor

$$H_{CS}\Psi_0 = E_0\Psi_0 \quad (2.139)$$

$$H_{CS}\Psi = E\Psi; \quad \Psi \equiv \Phi\Psi_0. \quad (2.140)$$

Podemos obter uma equação de autovalor apenas para  $\Phi$  efetuando a seguinte transformação de similaridade

$$H = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Psi_0^{-1}(H_{CS} - E_0)\Psi_0, \quad (2.141)$$

obtemos então a equação de autovalor

$$H\Phi = \varepsilon\Phi, \quad (2.142)$$

onde o hamiltoniano e a autoenergia são dados por

$$H = \sum_{i=1}^N \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 + \alpha \sum_{i<j} \left( \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j} \right) \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \quad (2.143)$$

e

$$\varepsilon = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 (E - E_0). \quad (2.144)$$

Como discutido no apêndice B as autofunções de  $H$  são os polinômios simétricos de Jack

$$\Phi = J_{\lambda}^{1/\alpha}(\{z\}) \quad (2.145)$$

com autoenergias dadas por

$$\varepsilon = \sum_i [\lambda_i^2 + \alpha(N + 1 - 2i)\lambda_i] \quad (2.146)$$

Embora exista uma fórmula de rodrigues para estes polinômios, obtida com auxílio dos operadores de Dunkl, uma maneira bastante instrutiva de obtê-los é através do método de Gurappa, como mostrado no apêndice C. Os polinômios de Jack possuem duas relações de ortogonalidade: uma definida diretamente no anel polinomial [44] (ver apêndice B) e outra no espaço de funções com função peso dada pelo fator de Jastrow [45]

$$\langle J_{\lambda}^{1/\alpha} | J_{\lambda'}^{1/\alpha} \rangle = A_N^2 \prod_{j=1}^N \int_0^L dx_j \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2\alpha} \overline{J_{\lambda}^{1/\alpha}(\{z\})} J_{\lambda'}^{1/\alpha}(\{z\}) = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad (2.147)$$

onde  $z_j = \exp(i2\pi x_j/L)$ , a barra indica conjugação complexa e a constante é dada por

$$A_N^2 = \frac{\Gamma^N(1 + \alpha)}{L^N \Gamma(1 + \alpha N)}. \quad (2.148)$$

Por essas propriedades os polinômios de Jack são usados com sucesso no cálculo de funções de correlação do modelo de Calogero-Sutherland [45, 46, 47]. Eles também formam uma base do espaço de funções simétricas e são fundamentais para a construção de generalizações multidimensionais dos polinômios ortogonais clássicos, como veremos nos capítulos 4 e 5. No próximo capítulo, ainda no contexto das novas classes de simetria na teoria de matrizes aleatórias, estudaremos propriedades universais de transporte em pontos quânticos nas três classes quirais.

## Capítulo 3

# Transporte em pontos quânticos quirais

Desde a introdução da teoria de escala para o problema da localização de Anderson [48], sabe-se que propriedades de transporte são universais, desde que a desordem seja suficientemente fraca, as temperaturas baixas e a coerência seja mantida por grandes distâncias. O modelo usual de Anderson considera um elétron movendo-se com amplitude de *hopping* constante numa rede com potencial aleatório nos sítios (desordem diagonal). Neste contexto surgem as classes de Wigner-Dyson. A desordem afeta diretamente as propriedades de transporte, e pode transformar um condutor, com função de onda estendida, num isolante, com função de onda localizada. Uma variação do modelo de Anderson consiste em considerar um elétron movendo-se numa rede com amplitudes de *hopping* aleatórias. Sabe-se, desde o trabalho de Dyson [49], que tais sistemas com desordem não-diagonal têm comportamento dramaticamente diferente dos sistemas com desordem puramente diagonal.

O hamiltoniano do modelo de hopping aleatório possui espectro simétrico, i.e. invariantes à transformação  $E \rightarrow -E$ , onde  $E$  denota a energia. Fora do centro da banda,  $E = 0$ , as propriedades de localização são as mesmas obtidas para o modelo de Anderson usual. Exatamente no centro da banda, uma simetria adicional do hamiltoniano, denominada simetria de sub-rede ou simetria quiral, que reflete a invariância com respeito à permutação das subredes, afeta dramaticamente

as propriedades de transporte, resultando em comportamentos bastantes diferentes dos observados no caso usual. Estes resultados, incompatíveis com as classes de Wigner-Dyson, são característicos das classes quirais.

Sistemas desordenados unidimensionais com simetria quiral foram estudados por vários métodos e em diferentes contextos, e suas propriedades de localização são bem entendidas. No caso bidimensional a situação é diferente, os tratamentos analítico e numérico são bastante complicados e os resultados não estão bem estabelecidos. Este fato levou a um grande esforço em busca do entendimento das propriedades de fios quânticos “quase-unidimensionais”. Os fios quânticos quirais, assim como nas classes Wigner-Dyson, foram estudados analiticamente através do modelo  $\sigma$  não-linear supersimétrico [50, 51] e pela teoria de matrizes aleatórias, formulada em termos da matriz de transferência [32, 33, 52]. Os resultados mais interessantes obtidos nestes trabalhos são a dependência do comprimento de localização com a paridade do número de canais abertos e o comportamento anômalo da densidade de estados no centro da banda. Pontos quânticos quirais, definidos como o limite zero dimensional de fios com simetria de subrede, apresentam efeitos similares: as propriedades de transporte dependem do número de sítios [51] e dos tipos de sítios envolvidos no acoplamento com os guias [52].

Pontos quânticos quirais foram estudados sob uma perspectiva diferente na ref [53, 56], na qual o ensemble de matrizes de espalhamento foi construído a partir de um princípio de máxima entropia informacional. Foram calculadas médias de observáveis como a condutância e a potência do ruído de disparo, em particular, para o caso de apenas um modo propagante, foram obtidas as distribuições completas destes observáveis para todas as classes de simetria. Neste capítulo complementamos os resultados da ref. [56], através da formulação hamiltoniana, ou seja, modelando a cavidade por uma matriz aleatória quiral e encontrando a matriz  $S$  usando métodos da teoria quântica de espalhamento. Encontramos numericamente a matriz  $S$  e calculamos as propriedades estatísticas dos observáveis através do formalismo de Landauer-Büttiker.

### 3.1 Simetria quirial

Considere uma partícula quântica movendo-se numa rede bipartida, formada pelas subredes  $A$  e  $B$  com  $N_A$  e  $N_B$  sítios, respectivamente. A figura 3.1 representa um rede bipartida, onde sítios da subrede  $A$  são representados por bolas pretas e os da subrede  $B$  por bolas brancas.

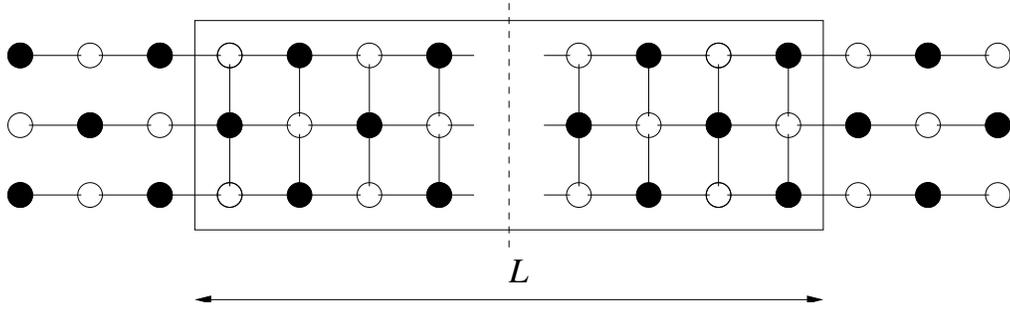


Figura 3.1: Modelo de *hopping* aleatório

O hamiltoniano para este problema é

$$\mathcal{H} = \sum_{\substack{i \in A \\ j \in B}} t_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad (3.1)$$

onde  $i$  e  $j$  representam os sítios da rede,  $c_j^\dagger$  e  $c_j$  são operadores de criação e aniquilação de elétrons no sítio  $j$ , e os elementos de matriz de *hopping*  $t_{ij}$  são não nulos apenas para primeiros vizinhos, portanto, conectam sítios de subredes diferentes. A equação (3.1) com  $t_{ij}$  aleatório é conhecida na literatura com *modelo de hopping aleatório*. O caso especial onde apenas a fase da amplitude de *hopping*  $t_{ij} = e^{i\phi_{ij}}$  é aleatória, é conhecido como *problema do fluxo aleatório*, e se aplica a uma rede submetida a um campo magnético aleatório perpendicular, figura 3.2. Num salto de um sítio para outro o elétron adquire uma fase dependente do campo que se torna completamente aleatória para campos intensos.

Como as amplitudes de *hopping* conectam sítios de subredes diferentes, é possível ordenar convenientemente os vetores da base para escrever o hamiltoniano

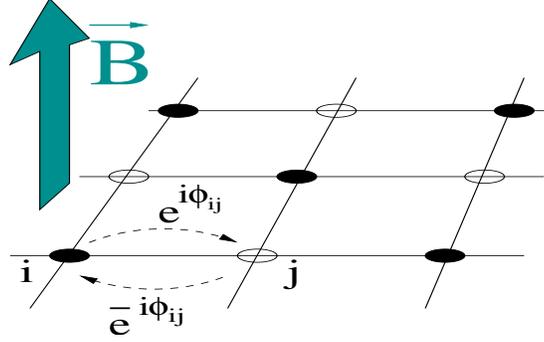


Figura 3.2: Problema do fluxo aleatório

na seguinte representação matricial puramente não diagonal

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & t_{AB} \\ t_{AB}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde  $t_{AB}$  é uma matriz  $N_A \times N_B$ . A existência de blocos apenas fora da diagonal no hamiltoniano pode ser indicada pela condição

$$\Sigma_z \mathcal{H} \Sigma_z = -\mathcal{H}, \quad (3.3)$$

onde

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1_{N_B} & 0 \\ 0 & -1_{N_A} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

é uma generalização da matriz  $\sigma_z$  de Pauli. Seguindo a nomenclatura adotada em *QCD*, simetrias com vínculos da forma (3.3) são chamadas de simetrias quirais. O problema de autovalor  $\mathcal{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$  pode ser escrito nesta base como

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{AB} \\ t_{AB}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde  $\psi_A$  e  $\psi_B$  denotam as funções de onda nos sítios das sub-redes  $A$  e  $B$ , respectivamente. Assumindo, sem perda de generalidade, que  $N_A > N_B$  pode-se mostrar

que existem  $N_A - N_B$  autovalores de energia nula,  $\varepsilon = 0$ , com as respectivas auto-funções na sub-rede  $A$  [54]. As demais energias são simétricas em relação ao centro da banda,  $\pm\varepsilon$ .

### 3.1.1 Matriz de espalhamento quiral

O problema de espalhamento num sistema com simetria quiral pode ser construído com o auxílio de um modelo de hopping num sistema constituído por  $N$  cadeias acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais, como mostra a figura 3.3.

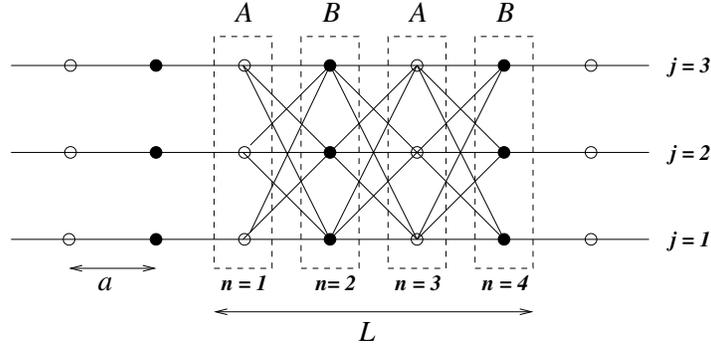


Figura 3.3: Modelo de *hopping* aleatório descrito pela Eq. (3.6), para  $N = 3$ . A região desordenada tem comprimento  $L = 4a$ . As diferentes cadeias são acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais.

A equação de Schrödinger para as  $N$ -cadeias com *hopping* aleatório entre as subredes e sem potencial no sítio pode ser escrita na forma matricial [33]

$$-\varepsilon\Psi_n = T_n\Psi_{n+1} + T_{n-1}^\dagger\Psi_{n-1}, \quad (3.6)$$

onde  $\Psi_n$  é um vetor coluna contendo as funções de onda da sub-rede indexada por  $n$ ,  $T_n$  é uma matriz de *hopping*  $N \times N$ . Para partículas de spin-1/2,  $\Psi_n$  é composta de  $N$  spinores e a matriz de *hopping*  $N \times N$  consiste de quatérnions. Nos guias, as cadeias são independentes  $t_{n,ij} = t\delta_{i,j}$ , a matriz de *hopping* fica  $T_n = t1_n$  e as

componentes de  $\Psi_n$  ficam desacopladas, resultando em

$$-\varepsilon\psi_n = t(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}), \quad (3.7)$$

para cada cadeia. Esta equação tem solução tipo onda plana  $\psi \propto e^{inka}$  e relação de dispersão  $\varepsilon_k = -2t \cos(ka)$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede (ver figura 3.3), portanto, as soluções para os guias são dadas por superposições de ondas planas entrando e saindo da região desordenada

$$\Psi_n^1(\varepsilon) = \mathbf{a}_\varepsilon^1 e^{-ikna} + \mathbf{b}_\varepsilon^1 e^{ikna}, \quad (3.8)$$

$$\Psi_n^2(\varepsilon) = \mathbf{a}_\varepsilon^2 e^{-ikna} + \mathbf{b}_\varepsilon^2 e^{ikna}. \quad (3.9)$$

Seguindo a notação introduzida no capítulo 2,  $\mathbf{a}^i$  e  $\mathbf{b}^i$  ( $i=1,2$ ) são vetores coluna contendo as amplitudes dessas ondas planas. Desta forma, a matriz de espalhamento é definida por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{b}_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = S(\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{a}_\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Na equação de Schödinger (3.6) a energia muda de sinal ao trocarmos o sinal da função de onda em apenas uma subrede  $\Psi_n \rightarrow (-1)^n \Psi_n$ . Esta transformação troca ondas incidentes com energia  $\varepsilon$  por ondas saindo da região desordenada com energia  $-\varepsilon$  e vice-versa. Para visualizar esta troca de sentido de propagação, devemos notar que a mudança no sinal da energia acarreta uma translação de  $\pi/a$  na rede recíproca [55], ou seja,

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon \implies k \rightarrow k + \frac{\pi}{a}. \quad (3.11)$$

Como o intervalo relevante de  $k$  é a primeira zona de Brillouin,  $k \in [-\pi/a, \pi/a]$ , esta mudança leva  $k$  negativo num  $k$  positivo e leva um  $k$  positivo para segunda zona, que então é rebatido da faixa negativa da primeira zona.

Se as propriedades de espalhamento não mudam com essa troca de sentido,

a matriz que conecta os estados de espalhamento é a mesma, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{a}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix} = S(\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{b}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Usando as equações (3.10) e (3.12), juntamente com a condição de unitariedade da matriz  $S$ , concluímos que a simetria quiral implica o vínculo extra

$$S(\varepsilon) = S^\dagger(-\varepsilon). \quad (3.13)$$

## 3.2 Princípio de máxima entropia

Uma vez caracterizada a simetria quiral na matriz de espalhamento, podemos verificar como ela se manifesta nas propriedades de transporte. Na ref. [56] estudamos propriedades de transporte num ponto quântico quiral. O sistema consiste de uma cavidade com simetria de sub-rede acoplado a reservatórios de elétrons por dois guias ideais. A propagação nos guias é genérica, sem simetria de sub-rede. O transporte no ponto quiral,  $\varepsilon = 0$ , é estudado assumindo-se uma densidade finita de estados de energia nula, que o acoplamento do ponto com os guias seja ideal e que esta conexão envolva sítios das duas sub-redes, o que garante a existência de corrente não-nula atravessando o ponto quântico [52].

Na abordagem de teoria de matrizes aleatórias um ensemble de sistemas é representado por um ensemble de matrizes  $S$ . A probabilidade  $\mathcal{P}(S)$  é introduzida através da medida invariante do espaço das matrizes unitárias. De acordo com a eq. (3.13), a matriz de espalhamento no centro da banda,  $\varepsilon = 0$ , fica hermitiana

$$S = S^\dagger, \quad (3.14)$$

e pode ser escrita na representação polar como

$$S = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos 2\Phi & \text{sen}2\Phi \\ \text{sen}2\Phi & \cos 2\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde  $u$  e  $v$  são matrizes  $N \times N$  ortogonais, unitárias ou quatérnions reais, usadas nos casos ortogonal ( $\beta = 1$ ), unitário ( $\beta = 2$ ) ou simplético ( $\beta = 4$ ), respectivamente. A matriz  $\Phi$  é diagonal e contém  $N$  autovalores  $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$ , que se relacionam com os autovalores de transmissão por  $\tau_i = \text{sen}^2(2\phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Nesta parametrização [53], as partes radial e angular fatoram e a medida pode ser escrita na forma

$$d\mu(S) \propto \prod_{i < j} \prod_{\sigma = \pm} |\text{sen}(\phi_i + \sigma\phi_j)|^\beta \prod_{i=1}^N \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_i) \prod_{i=1}^N d\phi_i d\mu(u) d\mu(v), \quad (3.16)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro de Dyson que caracteriza os ensembles. A distribuição de autovalores de transmissão é encontrada através do princípio de máxima entropia e, após uma integração sobre a parte angular, resulta em

$$P(\{\phi\}) = C_N \prod_{i < j} \prod_{\sigma = \pm} |\text{sen}(\phi_i + \sigma\phi_j)|^\beta \prod_{i=1}^N \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_i). \quad (3.17)$$

onde  $C_N$  é uma constante de normalização. A grande virtude do princípio de máxima entropia é que ele não leva em consideração detalhes microscópicos irrelevantes do modelo, por exemplo, quantos sítios são usados para definir o acoplamento da cavidade com os guias. O único aspecto importante, além da existência do acoplamento, é o fato do mesmo usar sítios de sub-redes diferentes, garantindo a presença de corrente.

### 3.3 Cálculo de médias e de distribuições

A eq. (3.17) é fundamental pois permite o cálculo de propriedades de transporte como a condutância e a potência de ruído de disparo, que na parametrização

(3.15) são definidos, em unidades adimensionais, por

$$g = \sum_{i=1}^N \sin^2(2\phi_i), \quad (3.18)$$

$$p = \sum_{i=1}^N \sin^2(\phi_i) \cos^2(2\phi_i). \quad (3.19)$$

A ref. [56] apresenta cálculos das médias e variâncias desses observáveis em diversos casos, desde um modo propagante  $N = 1$  até o regime semiclássico,  $N \gg 1$ . Nesta seção vamos listar os resultados obtidos no caso  $N = 1$  e mostrar novos resultados obtidos para o caso  $N = 2$ . Estes resultados servirão de base para comparação com os resultados numéricos obtidos na próxima seção.

### 3.3.1 Sistema com um modo propagante

Para o sistema com um modo propagante,  $N = 1$ , a distribuição (3.17) tem a forma simplificada

$$P(\phi) = 2 \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta/2)} \sin^{\beta-1}(2\phi). \quad (3.20)$$

Em termos da variável  $\phi$ , a condutância e a potência do ruído de disparo são dados por

$$g = \sin^2(2\phi), \quad (3.21)$$

$$p = \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi). \quad (3.22)$$

As médias destes observáveis resultam em

$$\langle g \rangle = 2 \int_0^{\pi/2} P(\phi) \sin^2(2\phi) d\phi = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (3.23)$$

$$\langle p \rangle = 2 \int_0^{\pi/2} P(\phi) \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi) d\phi = \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 3)}. \quad (3.24)$$

As distribuições são definidas por

$$P(g) = 2 \int_0^{\pi/2} \delta(g - \sin^2(2\phi)) P(\phi) d\phi, \quad (3.25)$$

$$W(p) = 2 \int_0^{\pi/2} \delta(p - \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi)) P(\phi) d\phi. \quad (3.26)$$

No caso da condutância temos uma distribuição beta

$$P(g) = \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta/2)} \frac{g^{\beta/2-1}}{\sqrt{1-g}}, \quad (3.27)$$

bastante diferente da lei de potência

$$P(g) = (\beta/2)g^{\beta/2-1}$$

encontrada para as classes de Wigner-Dyson [57, 58]. Para a potência do ruído de disparo, temos

$$W(p) = \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\Gamma(\beta/2)\sqrt{(1-4p)\pi}} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\lambda_{\sigma}^{\beta/2-1}}{\sqrt{1-\lambda_{\sigma}}}, \quad (3.28)$$

onde

$$\lambda_{\sigma} \equiv \frac{1 + \sigma\sqrt{1-4p}}{2}, \quad (3.29)$$

que difere significativamente da distribuição obtida para pontos quânticos de Wigner-Dyson [59]

$$W(p) = \frac{\beta}{2\sqrt{1-4p}} \sum_{\sigma=\pm} \left( \frac{1 + \sigma\sqrt{1-4p}}{2} \right)^{-1+\beta/2} \quad (3.30)$$

Mostramos na figura 3.4 os gráficos destas distribuições para todos os valores de  $\beta$ . Também comparamos estes resultados com os das classes de Wigner-Dyson.

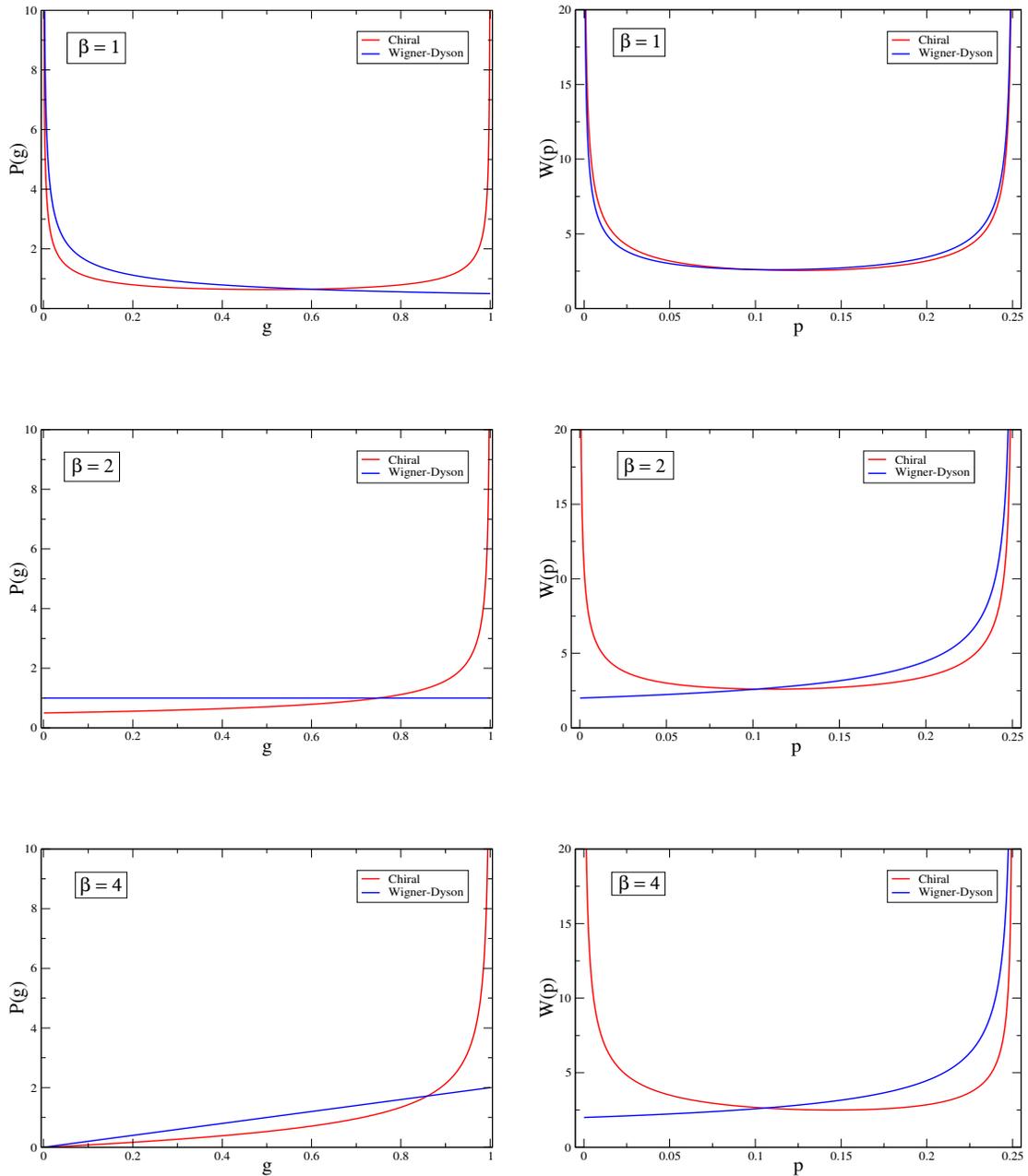


Figura 3.4: Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso  $N = 1$  e  $\beta = 1, 2$  e  $4$ . Os resultados para pontos quânticos com simetria quiral são mostrados em vermelho e os dos pontos de Wigner-Dyson, em azul.

### 3.3.2 Sistema com dois modos propagantes

Para  $N = 2$  temos que levar em conta o fator de correlação entre os autovalores, neste caso a distribuição (3.17) torna-se

$$P(\phi_1, \phi_2) = C_\beta |\sin(\phi_1 + \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2)|^\beta \sin^{\beta-1}(2\phi_1) \sin^{\beta-1}(2\phi_2), \quad (3.31)$$

onde a constante de normalização, dependente de  $\beta$ , assume os valores  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 6$  e  $C_4 = 175/2$ . As médias da condutância e da potência do ruído de disparo são dadas por

$$\langle g \rangle = 2C_\beta I(\beta, \beta + 1, \beta - 1), \quad (3.32)$$

$$\langle p \rangle = \langle g \rangle - 2C_\beta I(\beta, \beta + 3, \beta - 1), \quad (3.33)$$

onde definimos

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dy |\sin(x + y) \sin(x - y)|^\alpha \sin^\beta(2x) \sin^\gamma(2y). \quad (3.34)$$

Resolvendo as integrais para os casos de interesse,  $\beta = 1, 2, 4$ , encontramos os resultados mostrados na tabela 3.1

	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 4$
$\langle g \rangle$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{32}{27}$
$\langle p \rangle$	$\frac{56}{225}$	$\frac{32}{105}$	$\frac{736}{2079}$

Tabela 3.1: Médias da condutância e da potência do ruído de disparo para dois modos propagantes ( $N = 2$ ).

O cálculo de distribuições é mais complexo e envolve as integrais

$$P_\beta(g) = \int_0^{\pi/2} d\phi_1 \int_0^{\pi/2} d\phi_2 \delta(g - \sin^2(2\phi_1) - \sin^2(2\phi_2)) P(\phi_1, \phi_2), \quad (3.35)$$

$$W_\beta(p) = \int_0^{\pi/2} d\phi_1 \int_0^{\pi/2} d\phi_2 \delta(p - \sin^2(2\phi_1) \cos^2(2\phi_1) - \sin^2(2\phi_2) \sin^2(2\phi_2)) \\ \times P(\phi_1, \phi_2). \quad (3.36)$$

Resolvemos analiticamente a primeira integral para os casos  $\beta = 1, 2, 4$ . As respectivas distribuições de condutância são dadas por

$$P_1(g) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2(2-g)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx)}}, & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{2-g}{2\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-n^2x^2)(1-x)}}, & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$P_2(g) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2-g) \arcsin\left(\frac{g}{2-g}\right) & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{3\pi}{8}(2-g) & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$P_4(g) = \begin{cases} \frac{175}{2048} \left( 2g\sqrt{1-g}(20 - 20g + 7g^2) \right. \\ \quad \left. + (g-2)(40 - 60g + 6g^2 + 7g^3) \arcsin\left(\frac{g}{2-g}\right) \right), & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{175}{4096} (7g^2 + 20g - 20)(g-2)^2, & 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

onde definimos  $m = g/(2-g)$  e  $n = (2-g)/g$ . As distribuições equivalentes no caso Wigner-Dyson podem ser facilmente obtidas, resultando em

$$P_1(g) = \begin{cases} \frac{3}{2}g, & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}), & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$P_2(g) = 2(1 - |1 - g|)^3, \quad (3.41)$$

$$P_4(g) = \begin{cases} \frac{12}{7}g^7, & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{12}{7}(2-g)^5(g^2 + 10g - 10), & 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (3.42)$$

As distribuições para os casos ortogonal e unitário foram obtidas na ref. [8]. Na

figura 3.5 comparamos as distribuições de condutância para os casos Wigner-Dyson e quirais.

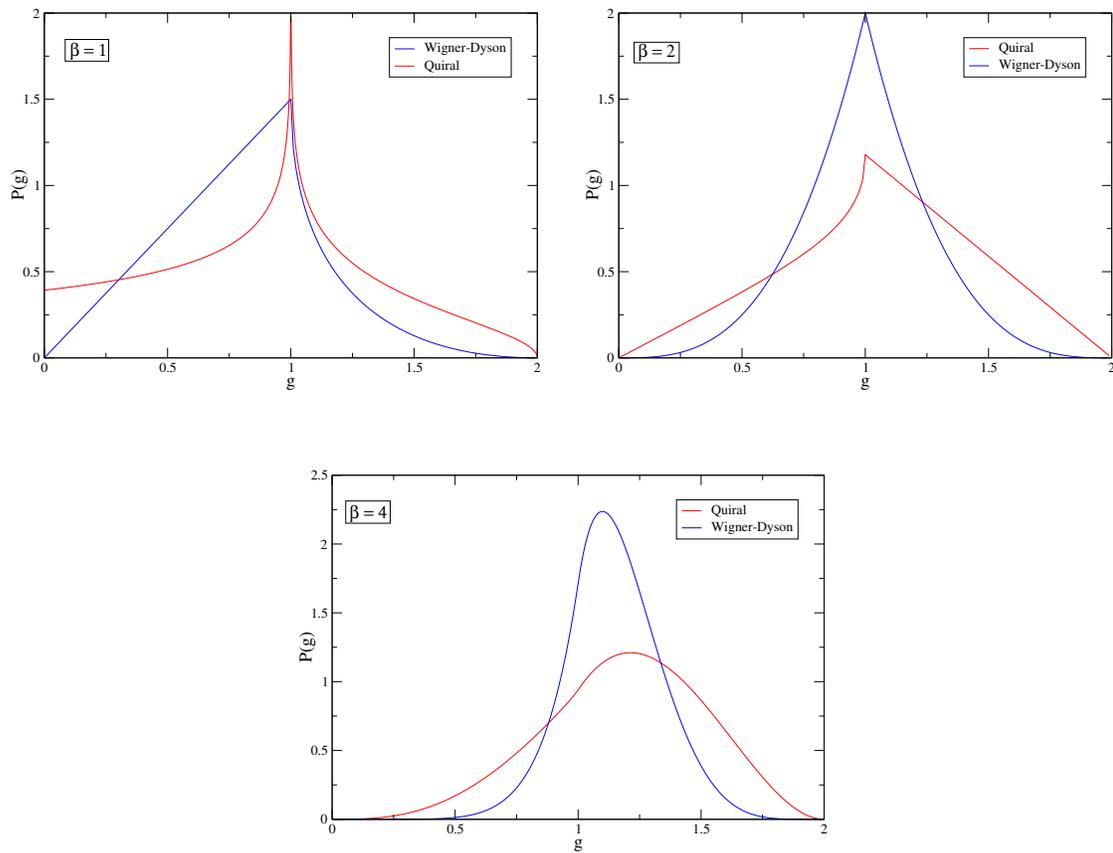


Figura 3.5: Distribuição da condutância para os casos  $\beta = 1, 2$  e  $4$ . Os resultados para pontos quirais estão mostrados em vermelho e para pontos de Wigner-Dyson em azul.

## 3.4 Solução numérica

As propriedades de transporte em um ponto quântico quiral também podem ser obtidas pela formulação hamiltoniana. Nesta, modelamos diretamente o hamiltoniano da cavidade fechada por uma matriz aleatória. A matriz  $S$  é obtida em função do hamiltoniano e das matrizes que descrevem o acoplamento da cavidade aos guias.

### 3.4.1 Hamiltoniano quiral

Modelamos o hamiltoniano da cavidade como uma matriz aleatória quiral  $M \times M$  na forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

onde  $H$  é uma matriz aleatória retangular  $L_1 \times L_2$  ( $L_1 > L_2$ ) com distribuição gaussiana

$$P(H) = C \exp\left(-\frac{\beta N}{2\lambda^2} \text{Tr} H^\dagger H\right). \quad (3.44)$$

Dos  $M$  autovalores de  $\mathcal{H}$ , temos  $N_z = L_1 - L_2$  autovalores nulos e os autovalores restantes são simétricos em relação à origem  $\varepsilon = 0$ . A parte positiva do espectro pode ser obtida extraindo-se a raiz quadrada positiva dos autovalores de  $H^\dagger H$  [9]. A distribuição conjunta dos autovalores positivos dos ensembles gaussianos quirais [30] é dada por

$$P(\{\varepsilon\}) = C \prod_{i < j} |\varepsilon_i^2 - \varepsilon_j^2|^\beta \prod_i \varepsilon_i^{\beta n + \beta - 1} e^{-\frac{\beta N}{2\lambda^2} \varepsilon_i^2}. \quad (3.45)$$

Em particular, a densidade de autovalores no caso unitário pode ser calculada com o auxílio do método dos polinômios ortogonais [60], resultando em

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \left(\frac{N}{\lambda^2} \varepsilon^2\right)^n \exp\left(-\frac{N}{\lambda^2} \varepsilon^2\right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k!}{(k+n)!} L_k^n\left(\frac{N}{\lambda^2} \varepsilon^2\right) L_k^n\left(\frac{N}{\lambda^2} \varepsilon^2\right), \quad (3.46)$$

onde os  $L_n^k$ 's são os polinômios de Laguerre associados. Esta densidade pode ser obtida numericamente. A figura 3.6 mostra a densidade de autovalores para uma matriz com  $1000 \times 1000$  com 50 autovalores nulos, que não estão mostrados no

histograma.

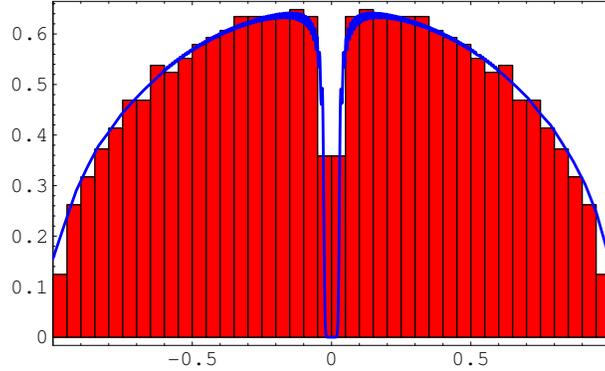


Figura 3.6: Densidade de autovalores de uma matriz quirál unitária  $1000 \times 1000$  com 50 autovalores nulos (omitidos no histograma). A curva azul representa a densidade (3.45).

### 3.4.2 Matriz de espalhamento

A matriz de espalhamento é obtida a partir do hamiltoniano com o auxílio da fórmula de Mahaux-Weidenmüller [14]

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger \frac{1}{E - \mathcal{H} - i\pi W W^\dagger} W, \quad (3.47)$$

onde  $W$  é uma matriz não aleatória que descreve o acoplamento dos estados da cavidade com os modos propagantes dos guias. Para um sistema de dois terminais pode-se escrever a matriz  $W$  explicitamente em termos de matrizes  $W_1$  e  $W_2$ , que descrevem os acoplamento individuais entre a cavidade e os guias. Desta forma a matriz  $S$  tem a estrutura de blocos

$$S(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2i\pi W_1^\dagger D^{-1} W_1 & 2i\pi W_1^\dagger D^{-1} W_2 \\ -2i\pi W_2^\dagger D^{-1} W_1 & 1 - 2i\pi W_2^\dagger D^{-1} W_2 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

onde

$$D = E - H + i\pi(W_1W_1^\dagger + W_2W_2^\dagger). \quad (3.49)$$

A universalidade dos resultados no caso Wigner-Dyson é garantida se as matrizes de acoplamento satisfizerem o vínculo de ortogonalidade [61]

$$W_p^\dagger W_q = \frac{1}{\pi} \delta_{p,q}. \quad (3.50)$$

Esta condição é necessária mas não suficiente para o caso quiral. Os vínculos impostos pela simetria quiral no hamiltoniano e na matriz de espalhamento

$$\Sigma_z \mathcal{H} \Sigma_z = \mathcal{H} \quad \text{e} \quad S(E) = S^\dagger(-E), \quad (3.51)$$

são compatíveis com a fórmula de Mahaux-Weidenmüller apenas se as matrizes de acoplamento também satisfizerem a condição

$$\Sigma_z W_j = W_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.52)$$

Fizemos um programa para implementar a fórmula de Mahaux-Weidenmüller para um ponto quântico quiral. Uma vez determinados o hamiltoniano quiral e as matrizes de acoplamento, respeitando os vínculos (3.50) e (3.52), obtemos a matriz  $D$ , dada pela eq. (3.49). Os observáveis de transporte são calculados através do formalismo de Landauer-Büttiker. A condutância e a potência do ruído de disparo adimensionais são obtidos através dos blocos de transmissão  $t$  e reflexão da matriz  $r$  da matriz de espalhamento de acordo com as fórmulas

$$g = \text{Tr}(tt^\dagger) \quad (3.53)$$

$$p = \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger). \quad (3.54)$$

Este procedimento gera apenas uma realização dos valores da condutância e da potência do ruído de disparo. Novos valores de  $g$  e  $p$  são obtidos repetindo-se o procedimento para diferentes realizações do hamiltoniano, gerando, desta forma, uma

quantidade suficiente de dados para uma análise estatística. Vale salientar que as funções de correlação são calculadas analiticamente no limite  $M \rightarrow \infty$ . Numericamente, considerar  $M$  grande, por exemplo de ordem 1000, gera dificuldades nos processos de inversão matricial usados no cálculo de  $D$ . Gasta-se muito tempo na obtenção de poucos valores de  $g$  e  $p$ . Este problema pode ser resolvido simplesmente adotando-se matrizes pequenas, digamos  $10 \times 10$  e fazendo um número muito grande de realizações. A figura 3.7 mostra um caso típico desta análise, com 10000 valores da condutância obtidos de hamiltonianos  $40 \times 40$ .

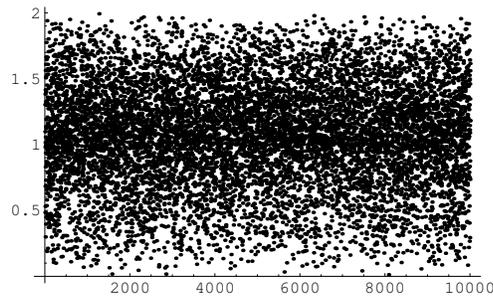


Figura 3.7: Condutâncias obtidas para um ponto quântico quirral no ensemble unitário ligado à guias com dois canais abertos.

A partir destes resultados pode-se calcular as médias dos observáveis em questão. A tabela mostra as médias da condutância para os casos  $N = 1$  e  $N = 2$ .

$\langle g \rangle$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 4$
$N = 1$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{3} \approx 0,6667$	$\frac{4}{5} = 0,8$
	0,5032	0,6737	0,8035
$N = 2$	$\frac{8}{9} \approx 0,8889$	$\frac{16}{15} \approx 1,0667$	$\frac{32}{27} \approx 1,1852$
	0,8889	1,0679	1,1851

Tabela 3.2: Valores médios da condutância para os casos de um,  $N = 1$ , e dois,  $N = 2$ , canais abertos.

Os resultados numéricos foram obtidos a partir de hamiltonianos quirais  $10 \times 10$  com 10000 realizações. Note que os resultados numéricos estão em boa

concordância com os obtidos analiticamente, a partir do método de máxima entropia. Os resultados análogos para a potência do ruído de disparo estão mostrados na tabela 3.3

$\langle p \rangle$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 4$
$N = 1$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{2}{15} \approx 0,1333$	$\frac{4}{35} \approx 0,1143$
	0,1251	0,1335	0,1131
$N = 2$	$\frac{56}{225} \approx 0,2489$	$\frac{32}{105} \approx 0,3048$	$\frac{736}{2079} \approx 0,3540$
	0,2482	0,3051	0,3536

Tabela 3.3: Comparação entre os resultados numéricos e exatos para a média potência do ruído de disparo,  $\langle p \rangle$ .

A partir dos dados da figura 3.7 é possível construir um histograma determinando a distribuição da condutância, como mostra a figura 3.8.

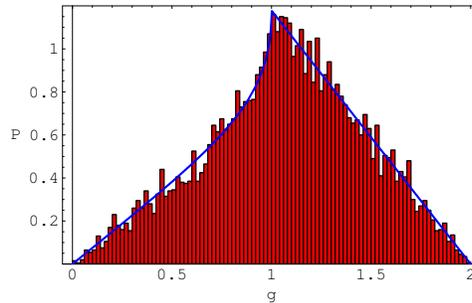


Figura 3.8: Distribuição da condutância

O estudo de propriedades estatísticas no limite quântico extremo ( $N$  pequeno) é muito importante pois revela informação sobre transporte quântico no regime não perturbativo, que é facilmente realizável experimentalmente [62]. As distribuições são largas demonstrando claramente o caráter não autopromediante dos observáveis de transporte em física mesoscópica. As distribuições da condutância e da potência do ruído de disparo para o caso de apenas um canal aberto são mostradas na figura 3.9. Esta figura também mostra comparações com os resultados analíticos da seção 3.3.

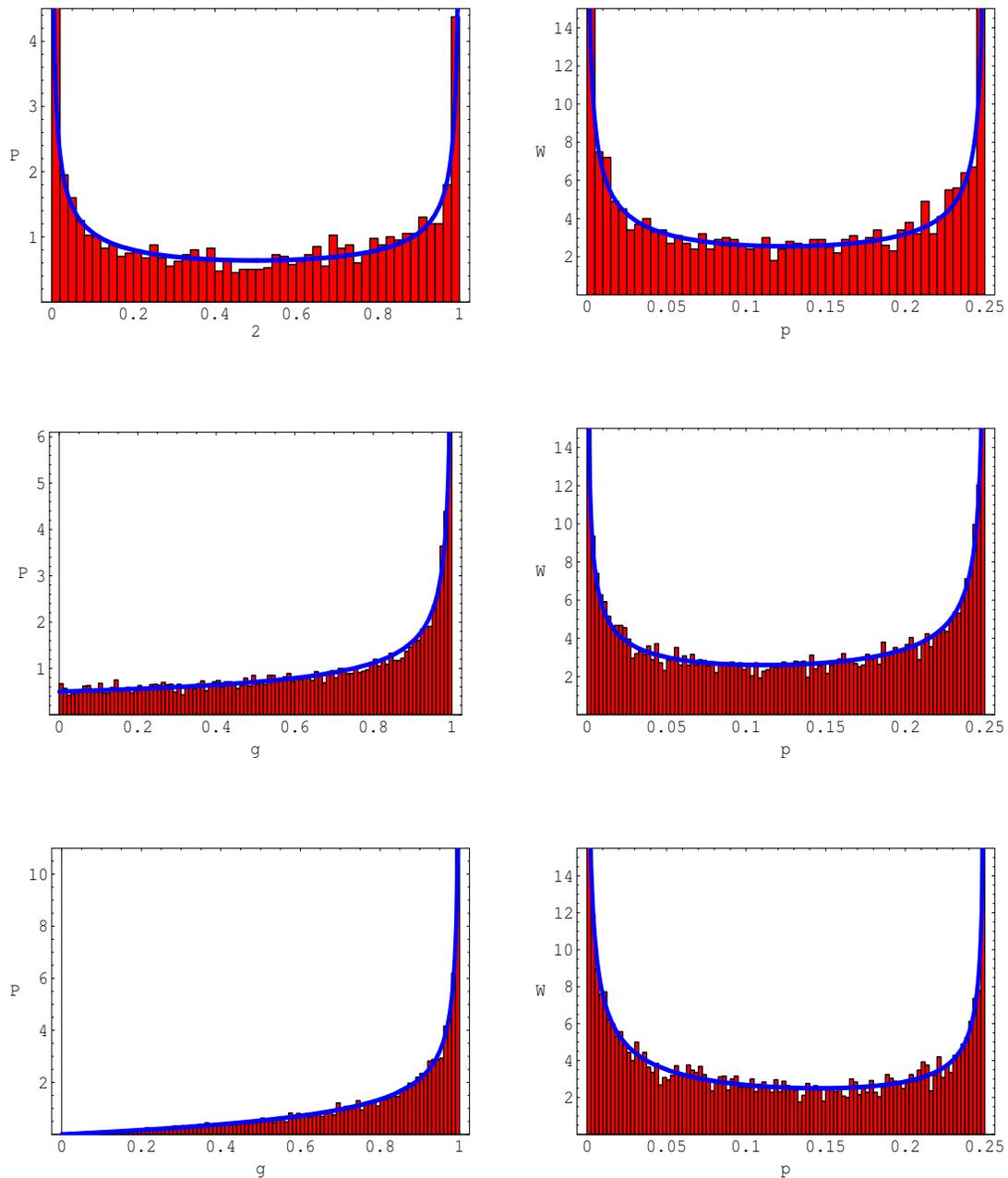


Figura 3.9: Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso  $N = 1$  e  $\beta = 1, 2$  e  $4$ . As curvas azuis são os resultados analíticos obtidos pelo princípio da máxima entropia

Estas figuras mostram uma excelente concordância entre os resultados obtidos pela formulação da matriz  $S$  com princípio de máxima entropia e a formulação hamiltoniana com uso da fórmula de Mahaux-Weidemüller. O que também é constatado na figura 3.10 com as distribuições da condutância para um sistema com dois canais abertos.

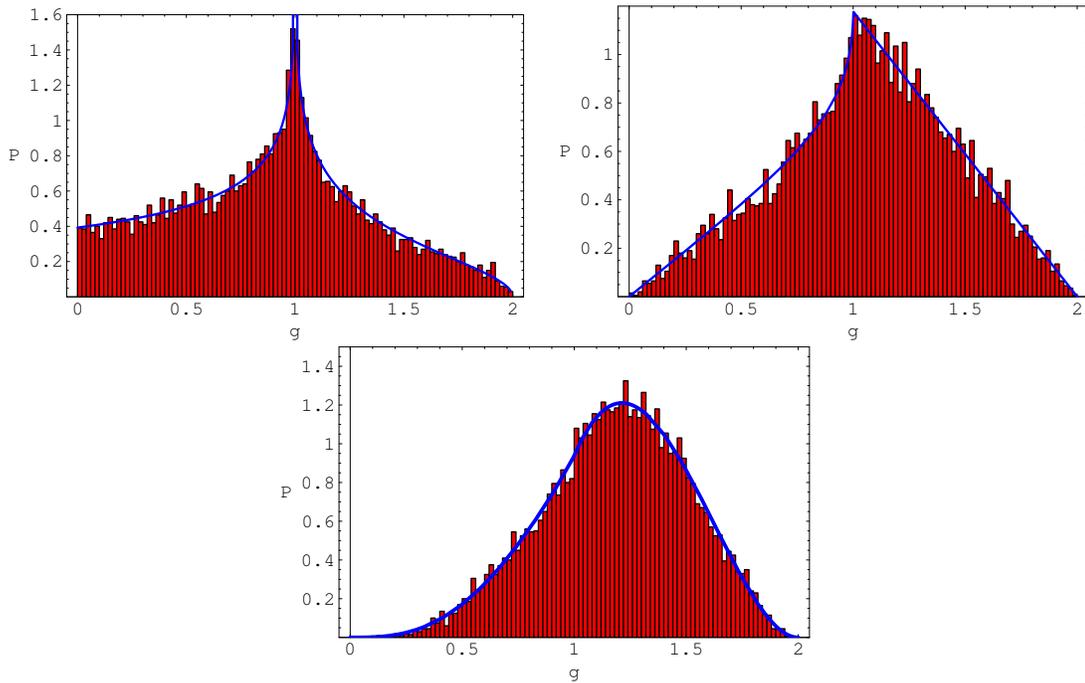


Figura 3.10: Distribuição da condutância para dois canais abertos. Estão mostrados os casos  $\beta = 1$  (parte superior esquerda),  $\beta = 2$  (parte superior direita) e  $\beta = 4$  (parte inferior).

As figuras 3.4, 3.5, 3.9 e 3.10 mostram distribuições bastante largas características do limite quântico extremo. Em contraste, no limite semiclássico,  $N \gg 1$ , todas as distribuições são gaussianas. A figura 3.11 ilustra este comportamento no ensemble quiral ortogonal para o caso  $N = 10$ . Usamos hamiltonianos quirais de dimensão  $M = 30$  com  $N_z = 10$  autovalores nulos.

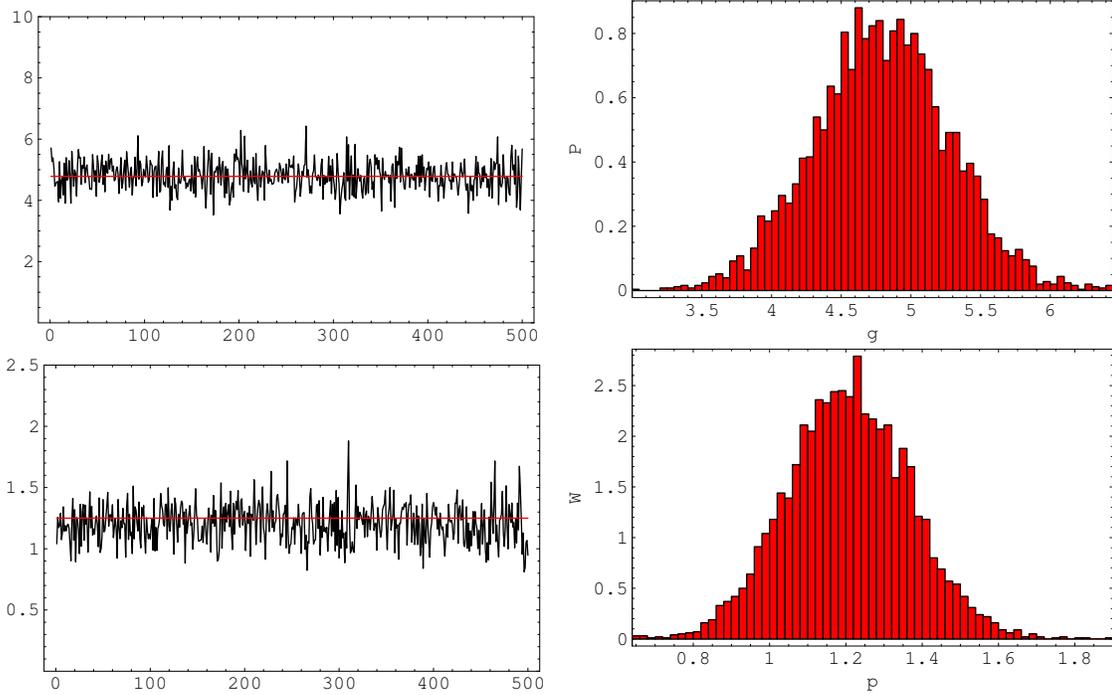


Figura 3.11: Condutância (parte superior) e potência do ruído de disparo (parte inferior) para um sistema com  $N = 10$ . Os gráficos da direita mostram os primeiros 500 valores dessas grandezas obtidos numericamente. As linhas horizontais representam as médias calculadas na ref. [56]. À direita mostramos as respectivas distribuições.

O valores médios da condutância e da potência do ruído de disparo obtidos para 5000 realizações foram  $\langle g \rangle = 4,7923$  e  $\langle p \rangle = 1,2064$ , que concordam razoavelmente com as expressões obtidas na ref.[56]

$$\langle g \rangle = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (3.55)$$

$$\langle p \rangle = \frac{N}{8} + \frac{\beta - 2}{16\beta} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (3.56)$$

para o caso particular de  $\beta = 1$  e  $N = 10$ .

No próximo capítulo desenvolveremos um método de movimento browniano para o cálculo de observáveis de transporte em qualquer classe de simetria. Em particular mostraremos uma dedução das equações (3.55) e (3.56).

# Capítulo 4

## Ensembles de movimento browniano

Os ensembles de movimento browniano (EMB) foram introduzidos por Dyson [63], no contexto da teoria de matrizes aleatórias, como um modelo matemático para um gás de Coulomb dependente do tempo, usado na descrição de propriedades estatísticas de níveis de energia de sistemas complexos (tais como o núcleo atômico) na presença de um parâmetro externo que quebra parcialmente a simetria. O modelo descreveria, por exemplo, o processo da quebra contínua da simetria de reversão temporal em uma cavidade caótica pela aplicação de um campo magnético externo. A variação do parâmetro externo provoca uma caminhada aleatória da matriz hamiltoniana em sua variedade, processo que é descrito por uma equação de Fokker-Planck similar à equação (2.120). Este método foi usado para descrever transições graduais entre classes de universalidade em sistemas caóticos fechados, tais como pontos quânticos e bilhares caóticos, causados pela variação de algum parâmetro externo [64]. Para sistemas abertos, tais como pontos quânticos acoplados via guias a reservatórios de elétrons, o formalismo oferece métodos poderosos para calcular funções de correlação de autovalores de transmissão e as propriedades estatísticas dos observáveis de transporte através da solução estacionária de um processo markoviano fictício [65, 66]. Além disso, no caso de fios quânticos, EMB podem ser usados na descrição exata de equações de escala em função do comprimento da

amostra, como por exemplo a distribuição conjunta de autovalores de transmissão, resultando em expressões fechadas para as propriedades estatísticas de observáveis de transporte tais como a condutância e a potência do ruído de disparo, cobrindo vários regimes físicos de interesses: balístico, metálico e insolante [14, 67].

A ref. [68] apresenta um esquema de classificação dos EMB da teoria de matrizes aleatórias baseado nas propriedades da equação de Fokker-Planck destes ensembles. O esquema inclui os ensembles de polinômios ortogonais e o ensemble da matriz de transferência para a classe Wigner-Dyson. Neste capítulo, introduzimos os ensembles de movimento browniano a partir da teoria de processos estocásticos markovianos. Com a imposição de certas condições matemáticas, encontramos os EMB de polinômios ortogonais estudados na referência [68] e os ensembles de matrizes de transferência para as três classes: Wigner-Dyson, quiral e BdG. Desta forma, apresentamos um esquema de classificação mais amplo que o apresentado na ref. [68] e que serve como alternativa à classificação geométrica baseada na tabela de Cartan. Além disso, apresentaremos em métodos unificados para abordar problemas práticos como o cálculo de funções de correlação e propriedades estatísticas de observáveis físicos para qualquer classe de simetria. Os resultados deste capítulo foram publicados em [69].

## 4.1 Ensembles de movimento browniano

Seja  $\Xi(t) = \text{diag}(\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$  uma variável estocástica matricial executando um processo markoviano, onde  $a \leq \xi_i(t) \leq b$ . A densidade de probabilidade de encontrarmos  $\Xi(t)$  em torno de um valor fixo  $X$  é dada pela seguinte média no ensemble de trajetórias possíveis

$$P(X, t) = \langle \delta(X - \Xi(t)) \rangle = \int dX_0 P(X, t | X_0, t_0) P(X_0, t_0), \quad (4.1)$$

onde  $dX_0 = \prod_{i=1}^N dx_{0i}$ ,  $a \leq x_{0i} \leq b$ , e  $P(X, t | X_0, t_0)$  é a probabilidade de transição. Como o processo é markoviano, vale a equação de Chapman-Kolmogorov para a

probabilidade de transição

$$P(X, t|X_0, t_0) = \int dY P(X, t|Y, \tau) P(Y, \tau|X_0, t_0). \quad (4.2)$$

É conveniente decompor o processo markoviano matricial geral em seus sub-processos, consistindo de uma parte discreta descrevendo saltos e uma parte contínua contendo os processos de difusão e de deriva. Encontramos a seguinte versão diferencial da equação de Chapman-Kolmogorov [70]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{FP} \right) P(X, t|X_0, t_0) &= \int dY W(X|Y, t) P(Y, t|X_0, t_0) \\ &\quad - \int dY W(Y|X, t) P(X, t|X_0, t_0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$\mathcal{L}_{FP} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(X, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(X, t)$$

é o operador de Fokker-Planck, com  $D^{(1)}(X, t)$  e  $D^{(2)}(X, t)$  sendo os coeficientes de deriva e de difusão respectivamente. A função

$$W(X|Y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} P(X, t + \tau|Y, t)/\tau \quad (4.4)$$

descreve a parte descontínua das trajetórias amostrais no espaço matricial. Note que a variável temporal  $t$  não tem significado físico no nosso modelo, sendo apenas um parâmetro fictício. O modelo de movimento browniano de ensembles de polinômios ortogonais é definido impondo-se as seguintes condições ao processo markoviano:

- (i) Continuidade das trajetórias:  $W(X|Y, t) = 0 = W(Y|X, t)$
- (ii) Homogeneidade:  $D^{(i)}(X, t) = D^{(i)}(X)$  para  $i = 1, 2$  e todo  $t$ .
- (iii) Distribuição de equilíbrio dada pela função de distribuição conjunta de um dos ensembles de polinômios ortogonais da TMA

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X, t) = P_{eq}(X) = C_N J_\beta(X) w_N(X), \quad (4.5)$$

onde

$$J_\beta = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \quad \text{e} \quad w_N = \prod_i w(x_i), \quad (4.6)$$

com corrente de probabilidade nula

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_i(X, t) = 0, \quad (4.7)$$

onde

$$\mathcal{J}_i(X, t) = (J_\beta w_N)^{-1} \left( P \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta w_N - J_\beta w_N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) P \right). \quad (4.8)$$

(iv) Conjunto completo de autofunções polinomiais generalizadas para o operador auto-adjunto  $\mathcal{H}$  definido por:

$$\mathcal{H} = -(w_N J_\beta^{1/2})^{-1} \mathcal{L}_{FP} (w_N J_\beta^{1/2}) = \mathcal{H}^\dagger. \quad (4.9)$$

O único processo markoviano que satisfaz às condições acima é descrito pela equação de Fokker-Planck

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{FP} \right) P(X, t | X_0, t_0) = 0, \quad (4.10)$$

onde

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta w_N \frac{\partial}{\partial x_i} (J_\beta w_N)^{-1}. \quad (4.11)$$

Antes de discutir em mais detalhes o significado das condições acima, vamos introduzir algumas definições úteis. O operador de Fokker-Planck também pode ser escrito na forma convencional

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_i^{(2)} \right], \quad (4.12)$$

onde os coeficientes de difusão e de deriva são dados respectivamente por

$$D_i^{(1)} = r(x_i) + \beta \sum_{j(\neq i)}^N \frac{s(x_i)}{x_i - x_j} \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = s(x_i), \quad (4.13)$$

onde fizemos uso da equação (2.16). Introduzimos o operador adjunto,  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$ , pela relação

$$\int d^N x P_1(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P_2(\{x\}) = \int d^N x P_2(\{x\}) \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_1(\{x\}). \quad (4.14)$$

Inserindo (4.11) na esquerda de (4.14) temos

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N (J_\beta w_N)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta w_N \frac{\partial}{\partial x_i} = (J_\beta w_N)^{-1} \mathcal{L}_{FP} (J_\beta w_N), \quad (4.15)$$

que, na forma padrão, torna-se

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left[ D_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} + D_i^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right]. \quad (4.16)$$

A distribuição de probabilidade,  $P(X, t)$ , também satisfaz à eq. (4.10) e pode ser escrita na forma de uma equação da continuidade

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.17)$$

na qual a corrente de probabilidade é dada pela eq. (4.8).

Neste ponto estamos em condições de discutir os detalhes das condições (i)-(iv) usadas na definição dos ensembles de movimento browniano. A condição (i) corresponde fisicamente a eliminar os processos de salto e implica eliminação do lado direito da eq. (4.3). Se a condição (ii) for satisfeita, o processo é dito homogêneo, o que fisicamente significa que a variável estocástica,  $\Xi(t)$ , evolui, com o passar do tempo, para uma distribuição estacionária. Na condição (iii), exigimos que a solução estacionária do processo estocástico deva coincidir com os ensembles de polinômios ortogonais da teoria de matrizes aleatórias e que a corrente de probabilidade deva anular-se no equilíbrio. De (2.13), (4.11) e (4.8) é fácil verificar que

$$P_{eq}(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X, t) \quad \text{visto que} \quad \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_{eq} = C_N \mathcal{L}_{FP}^\dagger (J_\beta w_N) = 0, \quad (4.18)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_i(X, t) = (J_\beta w_N)^{-1} \left( J_\beta w_N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta w_N - J_\beta w_N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta w_N \right) = 0 \quad (4.19)$$

como exigido. A condição (iv) foi motivada pelos resultados das refs. [71] e [72], e sua verificação é menos imediata. Vamos tratar esta questão na seção seguinte.

## 4.2 Conexão com o problema de Calogero-Sutherland

Como vimos na seção anterior, a quarta condição dos EMB considera a existência de autofunções polinomiais associadas ao operador autoadjunto  $\mathcal{H}$ . A construção deste operador consiste em mapear o processo estocástico, descrito pela equação de Fokker-Planck, num sistema quântico interagente do tipo Calogero-Sutherland.

A distribuição de probabilidade  $P(\{x\}, t)$  relaciona-se com a “função de onda”  $\Psi(\{x\}, t)$  através da seguinte transformação de similaridade

$$P(\{x\}, t) = w_N J_\beta^{1/2} \Psi(\{x\}, t), \quad (4.20)$$

que mapeia a equação de Fokker-Planck na equação de Schrödinger com tempo imaginário,  $\tau = -it$ ,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \mathcal{H} \Psi, \quad (4.21)$$

onde o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = -J_\beta^{1/2} \mathcal{L}_{FP}^\dagger J_\beta^{-1/2} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{w(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w(x_i) s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + V, \quad (4.22)$$

e  $V$ , o potencial de muitos corpos, é dado por

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{w(x_i)} \frac{d}{dx_i} (w(x_i)s(x_i)) \frac{\partial \ln J_\beta}{\partial x_i} + s(x_i) \left[ \frac{\partial^2 \ln J_\beta}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln J_\beta}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.23)$$

Para operadores de Fokker-Planck gerais o hamiltoniano associado é uma soma de um operador hermitiano e um anti-hermitiano [71]. No nosso caso na parte anti-hermitiana se anula, como pode ser visto da definição de operador adjunto

$$\int d^N x w_N(\{x\}) \Psi_1(\{x\}, t) \mathcal{H} \Psi_2(\{x\}, t) = \int d^N x w_N(\{x\}) \Psi_2(\{x\}, t) \mathcal{H}^\dagger \Psi_1(\{x\}, t). \quad (4.24)$$

Inserindo (4.22) no lado esquerdo de (4.24) e usando a definição de adjunto, eq. (4.15), encontramos

$$\mathcal{H}^\dagger = -(w_N J_\beta^{1/2})^{-1} \mathcal{L}_{FP} (w_N J_\beta^{1/2}) = \mathcal{H}. \quad (4.25)$$

O potencial,  $V$ , pode ser simplificado com o auxílio da condição (2.16) e explorando a estrutura algébrica do jacobiano  $J_\beta$ . Da eq. (4.6) temos

$$\frac{\partial \ln J_\beta}{\partial x_i} = \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad (4.26)$$

que, após inserida na eq. (4.23), leva a

$$V = \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{r_0 + r_1 x_i}{x_i - x_j} - \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{s(x_i)}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\beta^2}{4} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \sum_{k(\neq i)} \frac{s(x_i)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)}. \quad (4.27)$$

Usando as seguintes identidades

$$\sum_{i \neq j} \frac{r_0 + r_1 x_i}{x_i - x_j} = \frac{N(N-1)}{2} r_1, \quad (4.28)$$

$$\sum_i \sum_{j(\neq i)} \sum_{k(\neq i)} \frac{s_0 + s_1 x_i + s_2 x_i^2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} = \frac{N(N-1)(N-2)}{3} s_2 + \sum_{i \neq j} \frac{s(x_i)}{(x_i - x_j)^2}, \quad (4.29)$$

podemos reescrever o hamiltoniano na forma

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{w(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w(x_i) s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{\beta(\beta-2)}{4} \sum_{i \neq j} \frac{s(x_i)}{(x_i - x_j)^2} + V_0, \quad (4.30)$$

onde

$$V_0 = \frac{\beta N(N-1)}{12} (s_2 \beta(N-2) + 3r_1). \quad (4.31)$$

Mapeamos o operador de Fokker-Planck,  $\mathcal{L}_{FP}$ , em um hamiltoniano do tipo Calogero-Sutherland, que descreve  $N$  partículas não-relativísticas numa linha, com interação do tipo inverso do quadrado. Este modelo tem sido extensivamente estudado no contexto de estatística fracionária [73] e técnicas matemáticas poderosas foram desenvolvidas para o cálculo de funções de correlação estáticas e dinâmicas usando a teoria de polinômios simétricos de Jack [45, 46, 47]. O estado fundamental, em particular, é definido pela equação de autovalor

$$\mathcal{H}\Psi_0 = E_0\Psi_0, \quad (4.32)$$

com  $\Psi_0 = J_\beta^{1/2}$  e  $E_0 = 0$ . A função de onda para os estados excitados pode ser construída pela multiplicação de um polinômio simétrico à função de onda do estado fundamental,  $\Psi = \Phi\Psi_0$ , de tal forma que  $\Psi$  e  $\Psi_0$  tenham o mesmo comportamento sob troca de partículas. A equação de Schrödinger,  $\mathcal{H}\Psi = E\Psi$ , para os estados excitados resulta na seguinte equação de autovalor para a função  $\Phi$

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger \Phi = -E\Phi, \quad (4.33)$$

onde usamos a eq. (4.16) para escrever  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$  como

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left( s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (r_0 + r_1 x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{s(x_i)}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (4.34)$$

As autofunções,  $\Phi$ , coincidem com a definição usual de polinômios ortogonais multivariados [72], estabelecendo portanto a validade da condição (iv).

Como um exemplo concreto, considere o ensemble de Hermite (ou gaussiano), para o qual  $s(x) = 1$ ,  $w(x) = e^{-x^2}$ ,  $r_0 = 0$  e  $r_1 = -2$ , levando ao operador diferencial

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (4.35)$$

Neste caso as soluções da eq. (4.33), conhecidas como polinômios de Hermite generalizados [74] ou polinômios Hi-Jack, podem ser gerados sistematicamente usando-se o método das refs. [75, 76, 77, 78], que consiste de um operador exponencial atuando nos polinômios de Jack[44], de tal forma que

$$\Phi_H \equiv H_\kappa(\{x\}; 2/\beta) = \frac{2^{|\kappa|}}{C_\kappa^{(2/\beta)}(1^N)} e^{-\hat{A}_H/4} C_\kappa^{(2/\beta)}(\{x\}); \quad E_H = 2|\kappa|, \quad (4.36)$$

onde

$$\hat{A}_H = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.37)$$

A eq. (4.36) é conhecida como fórmula de Lassalle [72]. O rótulo  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$  designa um diagrama de Young descrevendo os números quânticos  $\kappa_i$ . Adotamos a convenção usual, de modo que  $|\kappa| = \sum_i \kappa_i$  denota o grau da partição  $\kappa$ , e o seguinte ordenamento,  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_N \geq 0$ , é assumido.

Para os ensembles de Laguerre temos  $s(x) = x$ ,  $w(x) = x^\nu e^{-x}$ ,  $r_0 = 1 + \nu$  e  $r_1 = -1$ , o que implica

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left( x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (\nu + 1 - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{x_i}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (4.38)$$

As autofunções da eq.(4.38) são os polinômios de Laguerre generalizados [79], que também podem ser escritos numa forma tipo Lassalle

$$\Phi_L \equiv L_\kappa^\nu(\{x\}; 2/\beta) = \frac{(-1)^{|\kappa|}}{|\kappa|! C_\kappa^{(2/\beta)}(1^N)} \exp\left(-\hat{A}_L - (\nu + 1)\hat{B}_L\right) C_\kappa^{(2/\beta)}(\{x\}) \quad (4.39)$$

$$E_L = |\kappa|, \quad (4.40)$$

onde

$$\hat{A}_L = \sum_i x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{e} \quad \hat{B}_L = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.41)$$

Uma análise similar para a escolha  $s(x) = 1 - x^2$ ,  $w(x) = (1 - x)^\nu (1 + x)^\mu$ ,  $r_0 = \mu - \nu$  e  $r_1 = -(2 + \mu + \nu)$  leva aos polinômios de Jacobi generalizados  $P_\kappa^{\mu, \nu}(\{x\}; 2/\beta)$  [80], definidos pela equação diferencial

$$\sum_{i=1}^N \left( (1 - x_i^2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (\mu - \nu - (2 + \mu + \nu)x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{1 - x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + E_J \right) P_\kappa^{\mu, \nu}(\{x\}; 2/\beta) = 0, \quad (4.42)$$

onde

$$E_J = (\mu + \nu)|\kappa| + \sum_i \kappa_i(\kappa_i + 1) + \beta \sum_i (N - i)\kappa_i. \quad (4.43)$$

Muitas propriedades dos polinômios de Hermite e Laguerre generalizados foram estudados em detalhe na ref. [72] e os polinômios de Legendre generalizados, um caso particular dos polinômios de Jacobi para  $\mu = \nu = 0$ , aparece na ref. [81].

É interessante notar que a eq. (4.34) contém, como caso particular, o operador diferencial que define os polinômios de Jack. Para isso consideramos

$$s(x) = x^2, \quad w(x) = x^{-2}, \quad r(x) = 0 \quad (4.44)$$

Desta forma, obtemos o operador

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger \equiv \hat{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \quad (4.45)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{J_\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( J_\beta \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

Os polinômios de Jack,  $J_\lambda^\beta$  satisfazem à equação de autovalor [44]

$$\hat{\mathcal{D}}J_\lambda^\beta = e_\lambda(\beta)J_\lambda^\beta \quad (4.47)$$

onde

$$e_\lambda(\beta) = \sum_{i=1}^N \lambda_i[\lambda_i - 1 + \beta(N - i)]. \quad (4.48)$$

### 4.3 Ensembles de Matrizes de Transferência

Nesta seção, vamos estender nossa descrição dos EMB para incluir os ensembles de matrizes de transferência. Estes ensembles são usados na descrição de transporte de elétrons em fios quânticos. Em tais sistemas a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão evolui, com o comprimento da amostra, de acordo com uma equação de Fokker-Planck conhecida como DMPK, ver seção 2.4.1. Para cada classe de simetria a equação DMPK pode ser interpretada como uma equação de difusão em cada membro da família de espaços simétricos de Cartan [82, 83] dada por

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} J_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{P}{J_{\alpha\beta\gamma}} \quad (4.49)$$

$$J_{\alpha\beta\gamma} = \prod_i \sinh^\alpha(2q_i) \prod_{i < j} |\sinh^\beta(q_i - q_j) \sinh^\gamma(q_i + q_j)|. \quad (4.50)$$

A informação geométrica dos espaços simétricos está contida no Jacobiano  $J_{\alpha\beta\gamma}$ . Os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão relacionados às multiplicidades das raízes da álgebra de Lie subjacente, ver tabela 2.3. A equação (4.49) pode ser escrita como uma equação de Fokker-Plack

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_i -\frac{\partial}{\partial q_i} D_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} D_i^{(2)}, \quad (4.51)$$

com coeficientes de deriva e de difusão dados por

$$D_i^{(1)} = \frac{\partial J_{\alpha\beta\gamma}}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = 1. \quad (4.52)$$

É possível, contudo, introduzir coordenadas “normais” nas quais a eq. (4.49) possa ser reescrita numa forma similar à eq. (4.11)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) w_N J_\beta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{P}{w_N J_\beta}, \quad (4.53)$$

ou na forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( r(x_i) + \beta \sum_{j(\neq i)}^N \frac{s(x_i)}{x_i - x_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} s(x_i) \right] P, \quad (4.54)$$

o que permite sua inclusão no nosso esquema de classificação. Vamos apresentar agora, para cada classe, as mudanças de variáveis necessárias e exibir as funções  $w(x)$ ,  $s(x)$  e  $r(x)$ .

- **Classes WD e BdG**

De acordo com a tabela 2.3 temos  $\gamma = \beta$  para as duas classes. Neste caso o jacobiano é dado por

$$J = \prod_{i=1}^N \sinh^\alpha(2q_i) \prod_{i<j} |\sinh(q_i - q_j) \sinh(q_i + q_j)|^\beta, \quad (4.55)$$

onde  $0 \leq q_i < \infty$ . Em particular  $\alpha = 1$  para a classe WD. A equação de Fokker-Planck correspondente, eq. (4.51), possui coeficientes de deriva e de difusão dados respectivamente por

$$D_i^{(1)} = 2\alpha \coth(2q_i) + 2\beta \sum_{j(\neq i)} \frac{\sinh(2q_i)}{\cosh(2q_i) - \cosh(2q_j)}, \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = 1. \quad (4.56)$$

As coordenadas normais são obtidas pela mudança de variáveis  $x_i = \cosh(2q_i)$  e fazendo  $t \rightarrow t/4$ . Os novos coeficientes de deriva e de difusão, ver apêndice

D, são dados por

$$\tilde{D}_i^{(1)} = (\alpha + 1)x_i + \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{x_i^2 - 1}{x_i - x_j}, \quad \text{e} \quad \tilde{D}_i^{(2)} = (x_i^2 - 1). \quad (4.57)$$

Comparando (4.57) com (4.13) temos

$$w(x) = (x^2 - 1)^{(\alpha-1)/2}, \quad s(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad r(x) = (1 + \alpha)x. \quad (4.58)$$

#### • Classe Quiral

Neste caso, de acordo com a tabela 2.3, temos  $\alpha = 0 = \gamma$ . Portanto, o jacobiano é dado por

$$J = \prod_{i < j} |\sinh(q_i - q_j)|^\beta, \quad (4.59)$$

onde  $-\infty < q_i < \infty$ . A equação de Fokker-Planck correspondente tem coeficientes de deriva e difusão dados respectivamente por

$$D_i^{(1)} = 2\beta \sum_{j(\neq i)} \frac{e^{2q_i}}{e^{2q_i} - e^{2q_j}} - \beta(N - 1), \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = 1. \quad (4.60)$$

As coordenadas normais são obtidas fazendo-se  $x_i = e^{2q_i}$  e  $t \rightarrow t/4$ , de modo que os coeficientes de deriva e de difusão ficam

$$\tilde{D}_i^{(1)} = \frac{2 - \beta(N - 1)}{2} x_i + \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}, \quad \text{e} \quad \tilde{D}_i^{(2)} = x_i^2. \quad (4.61)$$

Comparando (4.61) com (4.13) obtemos

$$w(x) = x^{[(1-N)\beta-2]/2}, \quad s(x) = x^2 \quad \text{e} \quad r(x) = [1 - \beta(N - 1)/2]x. \quad (4.62)$$

Note que as funções  $s(x)$  e  $w(x)$  satisfazem às condições (2.16) e (2.17) mas não a (2.18), permitindo soluções não polinomiais e implicando que  $w(x)$  não se relaciona com as funções peso dos polinômios ortogonais. Apesar dos ensembles

de matrizes de transferência, ao contrário dos EMB de polinômios ortogonais, não possuem solução estacionária, a equação de Fokker-Planck associada tem a mesma estrutura matemática e pode ser resolvida usando métodos similares.

Deve-se enfatizar que a nossa descrição unificada de ensembles de movimento browniano na TMA não exige um conhecimento da estrutura matricial do problema. Os ensembles são introduzidos por uma subclasse de processos estocásticos descritos genericamente pela eq.(4.53). O problema está completamente determinado especificando-se as funções  $w(x)$  e  $s(x)$  ou, de forma equivalente, pelas funções  $r(x)$  e  $s(x)$ . Estas funções encontram-se listadas na tabela 4.1. Este é o conceito novo mais importante do nosso esquema de classificação e é a origem dos métodos unificados que serão descritos a seguir. Para uma comparação com a classificação através de espaços simétricos, observe que os ensembles de Hermite e Lagerre aplicam-se aos espaços planos, os ensembles de Jacobi aparecem em espaços compactos e os ensembles de matrizes de transferência ocorrem em espaços hiperbólicos.

Intervalo	$w(x)$	$s(x)$	$r(x)$	Ensemble
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	1	$-2x$	Hermite
$[0, \infty)$	$x^\nu e^{-x} \ (\nu > -1)$	$x$	$1 + \nu - x$	Laguerre
$[-1, 1]$	$(1-x)^\nu(1+x)^\mu \ (\nu, \mu > -1)$	$1-x^2$	$\mu - \nu - (2 + \mu + \nu)x$	Jacobi
$[1, \infty)$	1	$x^2 - 1$	$2x$	MT-WD
$[1, \infty)$	$x^{[(1-N)\beta-2]/2}$	$x^2$	$[1 - \beta(N-1)/2]x$	MT-quiral
$[1, \infty)$	$(x^2 - 1)^{(\alpha-1)/2}$	$x^2 - 1$	$(1 + \alpha)x$	MT-BdG

Tabela 4.1: Classificação dos ensembles de movimento browniano baseada nas propriedades das funções  $w(x)$  e  $s(x)$ , e suas condições de contorno. Neste esquema unificado, que cobre ensembles de polinômios e matrizes de transferência (MT), cada classe de simetria é descrita por sua equação de Fokker-Planck correspondente.

### 4.3.1 Equação de movimento para as funções de correlação

Assim como nos ensembles de matrizes aleatórias convencionais, o principal objetivo nos EMB é a obtenção da função de correlação de  $n$ -pontos definida como

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) \equiv \frac{N!}{(N-n)!} \int dx_{n+1} \dots dx_N P(x_1, \dots, x_N; t). \quad (4.63)$$

Nesta seção vamos deduzir uma equação geral para a evolução com o tempo fictício,  $t$ , do movimento browniano descrito pela distribuição conjunta de probabilidade  $P(x_1, \dots, x_N; t)$ . Como ponto de partida considere o observável,  $F = F(x_1, \dots, x_N)$ , cuja média no ensemble evolui no tempo de acordo com a seguinte equação

$$\langle F \rangle = \int d^N x F(\{x\}) P(\{x\}, t). \quad (4.64)$$

Tomando a derivada de  $\langle F \rangle$  em relação ao tempo e usando eq. (4.14) temos

$$\frac{d\langle F \rangle}{dt} = \int d^N x P(\{x\}, t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger F(\{x\}). \quad (4.65)$$

Inserindo a definição de  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$ , eq. (4.16), e as expressões para os coeficientes de deriva e de difusão dadas pela eq. (4.13), obtemos a seguinte equação de evolução

$$\frac{d\langle F \rangle}{dt} = \left\langle \sum_i \left[ r(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} + s(x_i) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \right] + \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left[ s(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} - s(x_j) \frac{\partial F}{\partial x_j} \right] \right\rangle. \quad (4.66)$$

Escolhemos

$$F = \sum'_{\{l\}} \prod_{i=1}^n \delta(x_i - y_{l_i}), \quad (4.67)$$

onde  $\{l\} = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ , com  $l_i = 1, \dots, N$ , e a linha no somatório indica que a soma é sobre índices distintos. Como demonstraremos a seguir, a função de  $n$ -pontos é a média no ensemble de  $F$

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = \langle F \rangle = \sum'_{\{l\}} \left\langle \prod_{i=1}^n \delta(x_i - y_{l_i}) \right\rangle \quad (4.68)$$

$$= \sum'_{\{l\}} \int \prod_{i=1}^n \delta(x_i - y_{l_i}) P(y_1, \dots, y_N; t) dy_1 \dots dy_N \quad (4.69)$$

$$= \frac{N!}{(N-n)!} \int dx_{n+1} \dots dx_N P(x_1, \dots, x_N; t). \quad (4.70)$$

Substituindo (6.53) em (4.66) e após algumas manipulações, ver apêndice E para mais detalhes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = & \sum_{p=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_p} \left( s(x_p) w_N J_\beta \frac{\partial}{\partial x_p} (w_N J_\beta)^{-1} \right) \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) \right. \\ & \left. - \beta \frac{\partial}{\partial x_p} s(x_p) \mathcal{P} \int \frac{\rho_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; t)}{x_p - x_{n+1}} dx_{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Com isso mostramos que as funções de correlação dos EMB satisfazem a uma complicada hierarquia de equações integro-diferenciais singulares. Um resultado similar foi obtido na ref.[84] para os ensembles gaussianos e na ref. [85] para os ensembles circulares. Em algumas circunstâncias é útil introduzir o limite de Dyson, no qual a parte universal local da repulsão de níveis é destacada pela supressão das contribuições globais não-universais. Do ponto de vista técnico, introduzimos novas variáveis  $r_n$  na vizinhança de um ponto arbitrário  $x$  no corpo do espectro, tais que  $x_n = x + r_n \Delta$ , onde  $\Delta \equiv 1/\rho_1(x, t)$  é o espaçamento médio de níveis. Introduzindo a variável temporal reescalada  $\tau \equiv t/\Delta^2$ , podemos definir o limite universal de Dyson para a função de  $n$ -pontos como

$$R_n(r_1, \dots, r_n; \tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta^n \rho_n(x + r_1 \Delta, \dots, x + r_n \Delta; \tau \Delta^2) \quad (4.72)$$

Das eqs.(4.71) e (4.72) recuperamos as relações hierárquicas universais obtidas na ref. [84]

$$\frac{\partial R_n}{\partial \tau} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial}{\partial r_p} \left\{ I_\beta \frac{\partial}{\partial r_p} \left( \frac{R_n}{I_\beta} \right) - \beta \mathcal{P} \int dr_{n+1} \frac{R_{n+1}}{r_p - r_{n+1}} \right\}, \quad (4.73)$$

onde  $I_\beta = \prod_{i < j} |r_i - r_j|^\beta$ . Ao contrário dos ensembles de matrizes aleatórias estacionários convencionais, onde métodos poderosos baseados em polinômios ortogonais e anti-ortogonais estão disponíveis na literatura [1], não há esquema analítico eficiente para o cálculo de  $\rho_n(x_1, \dots, x_n; t)$  ou  $R_n(r_1, \dots, r_n; \tau)$  para  $n$  e  $\beta$  arbitrários. Para valores racionais de  $\beta$ , i.e.  $\beta = p/q$  onde  $p$  e  $q$  são primos entre si, expressões exatas para  $R_2(r_1, r_2; \tau)$  foram obtidas usando-se o método de polinômios simétricos de Jack [45, 47]. Para  $\beta = 2$  e  $n$  arbitrário, cálculos exatos são possíveis pois o

termo de interação do hamiltoniano associado, eq. (4.30), anula-se resultando em um sistema de férmions não interagentes [86]. Soluções aproximadas da eq. (4.73) podem ser encontradas na ref.[85].

## 4.4 Aplicações dos ensembles de movimento browniano

Pontos quânticos são cavidades caóticas balísticas acopladas via guias condutores ideais a reservatórios de elétrons. Como discutido no capítulo 2, numa descrição de matrizes aleatórias, o ensemble da matriz  $S$  é construído por meio de um princípio de máxima entropia, no qual associamos uma entropia de informação  $\mathcal{S} = - \int d\mu(S) P(S) \ln P(S)$  à distribuição de probabilidade  $P(S)$ . A medida  $d\mu(S)$ , conhecida como medida de Haar, é invariante sob automorfismos numa dada classe de simetria das matrizes. A maximização da entropia, sujeita aos vínculos de simetria de  $S$  e condição de normalização de  $P(S)$ , resulta em uma densidade de probabilidade constante, de modo que elementos de volume iguais  $d\mu(S)$  são igualmente prováveis [7]. Isto significa que a matriz  $S$  está uniformemente distribuída sobre o grupo unitário, sujeita apenas aos possíveis vínculos impostos pelas simetrias reversão temporal e/ou rotação de spin. Estes são os ensembles circulares de Dyson [1].

Desta forma, médias de observáveis físicos podem ser calculadas realizando-se integrais sobre o grupo unitário. Este método foi aplicado com sucesso às classes Wigner-Dyson nas referências [57, 8]. Extensões para as classes Bogoliubov-de-Gennes podem ser encontradas na referência [31]. Uma característica deste método é a forte dependência da classe de simetria do ensemble de matrizes  $S$  em questão, além disso, ele pode se tornar muito inconveniente em aplicações práticas, como por exemplo regime semiclassico [24]. Uma alternativa à integração direta no grupo unitário é a utilização do método dos polinômios ortogonais, ou anti-ortogonais, para o cálculo de cumulantes de estatísticas lineares dos autovalores de transmissão,  $A = \sum_i a(\tau)$ . No entanto, além da dependência da classe de simetria, expressões exatas para os primeiros cumulantes de  $A$  podem ser calculadas apenas se  $a(\tau)$  for um polinômio.

Um exemplo de  $a(\tau)$  não polinomial aparece na ref. [12] para a condutância de um sistema em contato com um reservatório normal e outro supercondutor.

Nesta seção vamos demonstrar como nosso esquema de classificação pode ser usado na construção de métodos eficientes de cálculo dos cumulantes de estatísticas lineares em todas as classes de simetria.

#### 4.4.1 Médias no ensemble de observáveis de transporte em pontos quânticos

Propriedades universais de transporte em pontos quânticos de dois terminais para as classes Wigner-Dyson e quirais foram estudadas nas referências [58, 57, 56] a partir da distribuição conjunta dos autovalores de transmissão. Nestas aplicações estamos interessados em características estatísticas (momentos, cumulantes e a distribuição completa) dos observáveis de transporte tais como condutância e potência do ruído de disparo adimensionais, que podem ser escritas respectivamente como

$$g = \text{Tr} [tt^\dagger] = \sum_{i=1}^N f_g(x_i) \quad \text{e} \quad p = \text{Tr} [tt^\dagger(1 - tt^\dagger)] = \sum_{i=1}^N f_p(x_i), \quad (4.74)$$

onde  $f_g(x) = x$  e  $f_p(x) = x(1 - x)$  para a classe WD, enquanto  $f_g(x) = 1 - x^2$  e  $f_p(x) = x^2(1 - x^2)$  para classe quirais. Na tabela 4.2 mostramos como os ensembles de matrizes aleatórias destes sistemas podem ser classificados de acordo com nosso esquema dando as funções  $w(x)$ ,  $s(x)$ ,  $r(x)$  apropriadas e o intervalo  $[a, b]$ .

Classe	$w(x)$	$s(x)$	$r(x)$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$r_0$	$r_1$	$a$	$b$
WD	$x^{\beta/2-1}$	$x(1 - x)$	$\beta/2 - (\beta + 2)x/2$	0	1	-1	$\beta/2$	$-(\beta + 2)/2$	0	1
quiral	$(1 - x^2)^{\beta/2-1}$	$1 - x^2$	$-\beta x$	1	0	-1	0	$-\beta$	-1	1

Tabela 4.2: Classificação das teorias de matrizes aleatórias para pontos quânticos das classes de Wigner-Dyson e quirais. A tabela mostra explicitamente os coeficientes de  $s(x)$  e  $r(x)$ .

Para ilustrar o poder de unificação da nossa abordagem, vamos calcular os cumulantes da condutância e da potência do ruído de disparo nas seis classes de

simetria (Wigner-Dyson e quirais com  $\beta = 1, 2$  e  $4$ ) usando a família de estatísticas lineares definida por

$$X_q = \sum_{i=1}^N x_i^q, \quad (4.75)$$

onde  $q$  é um inteiro positivo. A condutância e a potência do ruído de disparo adimensionais podem ser reescritos em termos dos  $X_q$ , como mostra a tabela 4.3.

	Observável	$F$	$f(x)$
Wigner-Dyson	$g$	$X_1$	$x$
	$p$	$X_1 - X_2$	$x(1 - x)$
Quiral	$g$	$N - X_2$	$1 - x^2$
	$p$	$X_2 - X_4$	$x^2(1 - x^2)$

Tabela 4.3: Estatística linear,  $F = \sum_n f(x_n)$ , para a condutância,  $g$ , e a potência do ruído de disparo,  $p$ , nas classes de Wigner-Dyson e quirais dadas em termos de  $X_q = \sum_n x_n^q$ .

Embora a equação de Fokker-Planck tenha sido originalmente apresentada como um modelo para sistemas com simetrias parcialmente quebradas, ela pode ser usada como uma ferramenta eficiente para calcular médias no ensemble em diferentes classes de simetria. Para isso, precisamos simplesmente tomar o limite  $t \rightarrow \infty$ , no qual a função de distribuição tende a sua forma estacionária. Usando a eq. (4.66) com  $F = X_q$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , obtemos uma hierarquia de equações de evolução acopladas para os momentos de  $X_q$ , que podem ser resolvidas como uma expansão assintótica, para  $N \gg 1$ , usando o método dos momentos [87]. No entanto, em alguns casos especiais este conjunto de equações pode ser resolvido exatamente para  $N$  finito. Por exemplo, tomando  $F = X_1$ ,  $X_2$  e  $X_1^2$  obtemos o seguinte conjunto de equações de movimento

$$\frac{d\langle X_1 \rangle}{dt} = Nr_0 + \frac{\beta s_1}{2} N(N-1) + (\beta s_2(N-1) + r_1)\langle X_1 \rangle \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X_2 \rangle}{dt} &= N s_0 (\beta N + 2 - \beta) + 2 (r_0 + s_1 (\beta N + 1 - \beta)) \langle X_1 \rangle \\ &\quad + (2r_1 + s_2 (2\beta N + 2 - 3\beta)) \langle X_2 \rangle + \beta s_2 \langle X_1^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X_1^2 \rangle}{dt} &= 2N s_0 + (2N r_0 + s_1 (\beta N^2 - \beta N + 2)) \langle X_1 \rangle + 2s_2 \langle X_2 \rangle \\ &\quad + 2 (r_1 + \beta (N - 1) s_2) \langle X_1^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.78)$$

A solução estacionária é obtida impondo-se a condição  $d\langle X_q^r \rangle / dt = 0$ , resultando em um sistema linear para as incógnitas  $\langle X_1 \rangle$ ,  $\langle X_2 \rangle$  e  $\langle X_1^2 \rangle$ . A solução exata deste sistema é dada por

$$\langle X_1 \rangle = \frac{\beta s_1 N (1 - N) - 2r_0 N}{2[\beta s_2 (N - 1) + r_1]}, \quad (4.79)$$

$$\langle X_2 \rangle = \frac{A}{D}, \quad (4.80)$$

$$\langle X_1^2 \rangle = \frac{B}{D}, \quad (4.81)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 8 N r_0^2 r_1 - 8 N r_1^2 s_0 + 4 N \beta r_1^2 s_0 - 4 N^2 \beta r_1^2 s_0 + 8 N r_0 r_1 s_1 \\ &\quad - 12 N \beta r_0 r_1 s_1 + 12 N^2 \beta r_0 r_1 s_1 - 4 N \beta r_1 s_1^2 + 4 N^2 \beta r_1 s_1^2 \\ &\quad + 4 N \beta^2 r_1 s_1^2 - 8 N^2 \beta^2 r_1 s_1^2 + 4 N^3 \beta^2 r_1 s_1^2 - 8 N \beta r_0^2 s_2 + 4 N^2 \beta r_0^2 s_2 \\ &\quad + 20 N \beta r_1 s_0 s_2 - 16 N^2 \beta r_1 s_0 s_2 - 8 N \beta^2 r_1 s_0 s_2 + 16 N^2 \beta^2 r_1 s_0 s_2 \\ &\quad - 8 N^3 \beta^2 r_1 s_0 s_2 - 12 N \beta r_0 s_1 s_2 + 8 N^2 \beta r_0 s_1 s_2 + 12 N \beta^2 r_0 s_1 s_2 \\ &\quad - 20 N^2 \beta^2 r_0 s_1 s_2 + 8 N^3 \beta^2 r_0 s_1 s_2 + 6 N \beta^2 s_1^2 s_2 - 10 N^2 \beta^2 s_1^2 s_2 \\ &\quad + 4 N^3 \beta^2 s_1^2 s_2 - 4 N \beta^3 s_1^2 s_2 + 11 N^2 \beta^3 s_1^2 s_2 - 10 N^3 \beta^3 s_1^2 s_2 \\ &\quad + 3 N^4 \beta^3 s_1^2 s_2 - 12 N \beta^2 s_0 s_2^2 + 20 N^2 \beta^2 s_0 s_2^2 - 8 N^3 \beta^2 s_0 s_2^2 \\ &\quad + 4 N \beta^3 s_0 s_2^2 - 12 N^2 \beta^3 s_0 s_2^2 + 12 N^3 \beta^3 s_0 s_2^2 - 4 N^4 \beta^3 s_0 s_2^2, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned}
B = & 8 N^2 r_0^2 r_1 - 8 N r_1^2 s_0 + 8 N r_0 r_1 s_1 - 8 N^2 \beta r_0 r_1 s_1 + 8 N^3 \beta r_0 r_1 s_1 \\
& - 4 N \beta r_1 s_1^2 + 4 N^2 \beta r_1 s_1^2 + 2 N^2 \beta^2 r_1 s_1^2 - 4 N^3 \beta^2 r_1 s_1^2 + 2 N^4 \beta^2 r_1 s_1^2 \\
& - 8 N r_0^2 s_2 + 8 N^2 r_0^2 s_2 - 12 N^2 \beta r_0^2 s_2 + 8 N^3 \beta r_0^2 s_2 + 16 N \beta r_1 s_0 s_2 \\
& - 12 N^2 \beta r_1 s_0 s_2 - 12 N^2 \beta r_0 s_1 s_2 + 8 N^3 \beta r_0 s_1 s_2 + 12 N^2 \beta^2 r_0 s_1 s_2 \\
& - 20 N^3 \beta^2 r_0 s_1 s_2 + 8 N^4 \beta^2 r_0 s_1 s_2 + 2 N \beta^2 s_1^2 s_2 - 4 N^3 \beta^2 s_1^2 s_2 \\
& + 2 N^4 \beta^2 s_1^2 s_2 - 3 N^2 \beta^3 s_1^2 s_2 + 8 N^3 \beta^3 s_1^2 s_2 - 7 N^4 \beta^3 s_1^2 s_2 \\
& + 2 N^5 \beta^3 s_1^2 s_2 - 8 N \beta^2 s_0 s_2^2 + 12 N^2 \beta^2 s_0 s_2^2 - 4 N^3 \beta^2 s_0 s_2^2, \tag{4.83}
\end{aligned}$$

$$D = 4 (r_1 - \beta s_2 + N \beta s_2) (r_1 + s_2 - \beta s_2 + N \beta s_2) (2 r_1 - 3 \beta s_2 + 2 N \beta s_2). \tag{4.84}$$

A variância de um observável  $F$  é definida por  $\text{var}(F) = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$ . Com as equações (4.79) e (4.81) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{var}(X_1) = & N \frac{(2r_1 + s_2\beta(N-2)) [4(r_1(r_0s_1 - s_0) - r_1s_0) + \beta(s_1^2 - 4s_0s_2)(N-1)(2 + \beta s_2(N-1))]}{4(r_1 + (N-1)\beta s_2)^2 (2r_1 + (2N-3)\beta s_2) (r_1 + (1 + \beta(N-1)) s_2)}. \tag{4.85}
\end{aligned}$$

Também podemos calcular expansões assintóticas para  $N \gg 1$ , que resultam em

$$\langle X_1 \rangle = -\frac{s_1}{2s_2}N + \frac{r_1s_1 - 2r_0s_2}{2\beta s_2^2} + \mathcal{O}(1/N), \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_2 \rangle = & \frac{3s_1^2 - 4s_0s_2}{8s_2^2}N + \frac{8r_1s_0s_2 + 16r_0s_1s_2 - 10r_1s_1^2 + (\beta+2)(s_1^2s_2 - 4s_0s_2^2)}{16\beta s_2^3} \\
& + \mathcal{O}(1/N), \tag{4.87}
\end{aligned}$$

$$\text{var}(X_1) = \frac{s_1^2 - 4s_0s_2}{8\beta s_2^2} + \mathcal{O}(1/N). \tag{4.88}$$

A simplicidade do método empregado na obtenção destes resultados deve ser

contrastada com a complexidade das regras diagramáticas da ref. [24] para cálculos similares. É importante enfatizar que os resultados acima são válidos para todas as seis classes de simetria. Apenas devemos escolher os coeficientes apropriados das funções mostradas na tabela 4.2. Como um exemplo concreto vamos considerar a condutância. Com uma escolha apropriada dos coeficientes  $s_0, s_1, s_2, r_0$  e  $r_1$  na tabela 4.2, encontramos as seguintes expressões para  $N$  finito e as expansões assintóticas correspondentes

$$\langle g \rangle_{WD} = \frac{\beta N^2}{2\beta N + 2 - \beta} = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \mathcal{O}(1/N), \quad (4.89)$$

$$\langle g \rangle_{Qui} = \frac{\beta N^3}{2\beta N^2 + (2 - \beta)N - 1} = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \mathcal{O}(1/N). \quad (4.90)$$

O resultado para as classes WD foi obtido na ref. [57] usando um método de integração no grupo unitário, enquanto a fórmula para as classes quirais foi deduzida na ref. [56] usando o método da equação de Fokker-Planck. Fisicamente, o termo dominante na expansão de  $N$  grande é interpretado como a condutância clássica de Boltzmann, obtida pela adição de probabilidades, em vez de amplitudes de probabilidade. O segundo termo é uma correção devido a efeitos de interferência quântica, conhecida como localização fraca para  $\beta = 1$  e anti-localização fraca para  $\beta = 4$ . Voltaremos a discutir essas correções na seção 4.4.2.

Também podemos obter uma expressão exata para a variância da condutância para as três classes de Wigner-Dyson. Encontramos

$$\text{var}(g)_{WD} = \frac{N^2 \beta (2 + (N - 1) \beta)^2}{(1 + (N - 1) \beta)(4 + (2N - 1) \beta)(2 + (2N - 1) \beta)^2} \quad (4.91)$$

$$= \frac{1}{8\beta} + \frac{\beta - 2}{16\beta^2 N} + \mathcal{O}(1/N^2), \quad (4.92)$$

em concordância com a ref.[14], onde foram usados métodos de integração sobre o grupo unitário. O termo dominante na expressão assintótica representa o fenômeno conhecido como flutuação universal da condutância [16], que foi objeto de muitas investigações nos primeiros estágios do desenvolvimento da física mesoscópica.

Uma fórmula geral para o termo universal dominante da variância de um observável arbitrário de transporte será deduzida, pelos métodos de Fokker-Planck, na seção 4.4.2.

Concluimos essa seção apresentando uma expressão exata para a média da potência do ruído de disparo para as classes Wigner-Dyson

$$\langle p \rangle_{WD} = \frac{N^2 \beta (2 + \beta(N - 1))^2}{2 (1 + \beta(N - 1)) (2 + \beta(2N - 1)) (4 + \beta(2N - 1))} \quad (4.93)$$

$$= \frac{N}{8} + \mathcal{O}(1/N). \quad (4.94)$$

A fórmula para  $N$  finito, eq. (4.93), coincide com o resultado obtido recentemente nas refs. [88] e [89] usando métodos diferentes. O termo dominante na expansão assintótica é quatro vezes menor que a potência de ruído de disparo de um processo Poisson associado a elétrons descorrelacionados [21]. Este ruído sub-poissonico indica a presença de correlações quânticas entre os elétrons devido ao princípio de exclusão de Pauli. A ausência de correção de localização fraca também é uma característica notável de sistemas com contatos simétricos. Uma discussão física detalhada destes resultados pode ser encontrada no artigo de revisão de Beenakker [14].

Em resumo, nosso método permite um tratamento unificado de todas as classes de simetria dos ensembles de matrizes aleatórias para transporte quântico e pode ser facilmente adaptado para a extração de assintóticos por métodos simples e sistemáticos. Neste ponto ele é uma boa alternativa aos métodos baseados em integração no grupo unitário [23, 24]

#### 4.4.2 Expansão semiclássica

A expansão assintótica, para  $N \gg 1$ , discutida na seção anterior é fisicamente equivalente à expansão semiclássica. O termo dominante (de ordem  $N$ ) corresponde à contribuição clássica, onde efeitos de interferência são desprezados, e o termo de ordem  $N^0$  corresponde à correção quântica, conhecida como localização fraca. Métodos diagramáticos muito elaborados podem ser empregados para deduzir tais

expansões para sistemas desordenados e caóticos. Nesta seção, apresentamos um método simples e sistemático para obter uma expansão semiclássica diretamente da equação de Fokker-Planck.

Como ponto de partida introduzimos a seguinte mudança de variáveis

$$x_i = \frac{a\lambda_i + b}{\lambda_i + 1}, \quad 0 \leq \lambda_i < \infty. \quad (4.95)$$

A equação de Fokker-Planck neste novo conjunto de variáveis fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\{\lambda\}, t) = \sum_i \left( -\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \tilde{D}_i^{(1)}(\lambda) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \tilde{D}_i^{(2)}(\lambda) \right) \tilde{P}(\{\lambda\}, t), \quad (4.96)$$

onde os coeficientes de deriva e de difusão são dados respectivamente por

$$\tilde{D}_i^{(1)} = (\tilde{J}_\beta \tilde{w}(\lambda_i))^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (\tilde{s}(\lambda_i) \tilde{J}_\beta \tilde{w}(\lambda_i)) \quad \text{e} \quad \tilde{D}_i^{(2)} = \tilde{s}(\lambda_i), \quad (4.97)$$

onde definimos

$$\tilde{J}_\beta = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad (4.98)$$

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2}{(b - a)^2} (1 + \lambda)^2, \quad (4.99)$$

e  $\tilde{w}(\lambda)$  é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial \ln \tilde{w}}{\partial \lambda} = \frac{\beta(1 - N)}{1 + \lambda} - \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda + (b - a)r_0}{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2} - \frac{(b - a)(b + a\lambda)r_1}{(1 + \lambda)(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)}. \quad (4.100)$$

Os coeficientes  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são definidos por

$$\alpha_0 = s(b), \quad (4.101)$$

$$\alpha_1 = s(a) + s(b) - (b - a)^2 s_2, \quad (4.102)$$

$$\alpha_2 = s(a). \quad (4.103)$$

Desejamos estender a análise da seção anterior para uma estatística linear arbitrária, portanto, precisamos deduzir uma expansão assintótica para a densidade média de níveis  $\tilde{\rho}_1(\lambda, t)$ . Fazendo  $n = 1$  na equação de movimento geral para a função  $n$ -pontos, eq. (4.71), obtemos

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_1(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ -\tilde{s}(\lambda) \frac{\partial \ln \tilde{w}}{\partial \lambda} \tilde{\rho}_1(\lambda, t) + \tilde{s}(\lambda) \frac{\partial \tilde{\rho}_1(\lambda, t)}{\partial \lambda} - \beta \tilde{s}(\lambda) \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_2(\lambda, \lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \right]. \quad (4.104)$$

Esta equação é exata e válida para  $N$  finito. No regime  $N \gg 1$  usamos a aproximação de Dyson para a transformada de Cauchy da função de dois pontos [90]

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_2(\lambda, \lambda'; t)}{\lambda - \lambda'} \simeq \tilde{\rho}_1(\lambda, t) \left[ \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_1(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}_1(\lambda, t) \right]. \quad (4.105)$$

Inserindo a eq. (4.105) na (4.104) obtemos uma equação de evolução não-linear para a função de um ponto

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{s}(\lambda) \tilde{\rho}(\lambda, t) \left[ -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \lambda} + (1 + \beta/2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda, t) - \beta \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda'; t)}{\lambda - \lambda'} \right], \quad (4.106)$$

onde o subscrito 1 foi omitido por simplicidade. A solução estacionária é obtida anulando o termo entre colchetes, o que resulta na equação integral

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{2 - \beta}{2\beta} \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial \lambda} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \tilde{w}}{\partial \lambda}. \quad (4.107)$$

Decompomos a densidade em uma contribuição  $\tilde{\rho}_0$  de ordem  $N$  e uma correção  $\delta\tilde{\rho}$  de ordem 1, tal que  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 + \delta\tilde{\rho}$ . O termo dominante,  $\tilde{\rho}_0$ , satisfaz

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N}{1 + \lambda}, \quad (4.108)$$

juntamente como a condição de normalização

$$\int_0^\infty d\lambda \tilde{\rho}_0(\lambda) = N. \quad (4.109)$$

A solução é dada por

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = \frac{N}{\pi(1+\lambda)\sqrt{\lambda}}. \quad (4.110)$$

A correção  $\delta\tilde{\rho}$ , por outro lado, satisfaz à equação integral

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} &= \frac{\beta - 2}{4\beta} \frac{1}{\lambda} - \frac{\beta + 2}{2\beta} \frac{1}{1 + \lambda} + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda + (b - a)r_0}{\beta(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)} \\ &+ \frac{(b - a)(b + a\lambda)r_1}{\beta(1 + \lambda)(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

com o seguinte vínculo

$$\int_0^\infty d\lambda \delta\tilde{\rho}_0(\lambda) = 0. \quad (4.112)$$

A equação (4.111) pode em princípio ser resolvida numa forma fechada usando métodos de equações integrais singulares [91]. Aqui, vamos nos concentrar em dois casos particulares de interesse físico: as classes de Wigner-Dyson e quirais. A aproximação semiclássica para a média da densidade, em termos da variável normal  $x = \frac{a\lambda+b}{\lambda+1}$ , é mostrada abaixo.

- Wigner-Dyson ( $a = 0, b = 1$ )

$$\rho(x) = \frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} + \frac{2-\beta}{4\beta} [\delta(x) - \delta(x-1)]. \quad (4.113)$$

- Chiral ( $a = -1, b = 1$ )

$$\rho(x) = \frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2-\beta}{4\beta} \left[ \delta(x+1) + \delta(x-1) - \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \right]. \quad (4.114)$$

A partir da forma explícita da densidade média é possível deduzir fórmulas úteis para o cálculo das expansões semiclássicas de uma estatística linear arbitrária,  $F = \sum_n f(x_n)$ , onde  $a \leq x_n \leq b$ . Com este propósito introduzimos a variável angular  $\theta$  definida por

$$x = b - (b - a) \sin^2(\theta/2), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (4.115)$$

A média da estatística linear  $F$  é dada por

$$\langle F \rangle = \int_a^b dx f(x) \rho(x) = \int_0^\pi d\theta \tilde{f}^{(a,b)}(\theta) \sigma(\theta), \quad (4.116)$$

onde

$$\tilde{f}^{(a,b)}(\theta) = f(b - (b - a) \sin^2(\theta/2)) \quad (4.117)$$

e  $\sigma(\theta)$ , a densidade média na nova variável, é dada por

$$\sigma(\theta)_{WD} = \frac{N}{\pi} - \frac{\gamma}{2} [\delta(\theta) - \delta(\theta - \pi)] \quad (4.118)$$

$$\sigma(\theta)_{\text{qui}} = \frac{N}{\pi} + \frac{\gamma}{2} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi) - \frac{2}{\pi}], \quad (4.119)$$

onde  $\gamma = (2 - \beta)/(2\beta)$ . Inserindo a identidade

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta) \quad (4.120)$$

em (4.118) e (4.119), reescrevemos o valor médio do observável  $F$ , eq. (4.116), na forma

$$\langle F \rangle_{WD} = N \tilde{f}_0^{(0,1)} - \frac{2 - \beta}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1}^{(0,1)}, \quad (4.121)$$

para a classe WD e

$$\langle F \rangle_{\text{qui}} = N \tilde{f}_0^{(-1,1)} + \frac{2 - \beta}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n}^{(-1,1)}, \quad (4.122)$$

para as classes quirais, onde

$$\tilde{f}_0^{(a,b)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \tilde{f}^{(a,b)}(\theta) \quad \text{e} \quad \tilde{f}_n^{(a,b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \tilde{f}^{(a,b)}(\theta) \cos(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.123)$$

são os coeficientes de Fourier da série de cossenos de  $\tilde{f}^{(a,b)}(\theta)$ . Concluimos que, no limite semiclássico, a diferença entre as classes de Wigner-Dyson e quiral aparece apenas nos termos sensíveis à coerência de fase. Os termos dominantes correspondem

à soma de probabilidades clássicas, desprezando os efeitos de interferência quântica. Aplicando estas fórmulas para a condutância e a potência do ruído de disparo, veja tabela 4.3, obtemos

$$\langle g \rangle_{WD} = \frac{N}{2} - \frac{2 - \beta}{4\beta} + O(1/N), \quad (4.124)$$

e

$$\langle p \rangle_{WD} = \frac{N}{8} + O(1/N), \quad (4.125)$$

respectivamente para a classe de Wigner-Dyson e

$$\langle g \rangle_{\text{qui}} = \frac{N}{2} - \frac{2 - \beta}{4\beta} + O(1/N), \quad (4.126)$$

e

$$\langle p \rangle_{\text{qui}} = \frac{N}{8} - \frac{2 - \beta}{16\beta} + O(1/N), \quad (4.127)$$

para a classe quirial. Estas expressões concordam com os resultados obtidos na seção 4.4.1.

### 4.4.3 Fórmula para flutuações universais

Uma aplicação importante da teoria de matrizes aleatórias é o cálculo do limite  $N \gg 1$  da variância de uma estatística linear geral. Em física mesoscópica este limite é usado, por exemplo, na descrição do fenômeno da flutuação universal da condutância, que consiste em flutuações da ordem de  $e^2/h$  na condutância, de amostra para amostra, à baixas temperaturas, independente de seu tamanho ou de seu grau de desordem.

Seja  $F = \sum_{i=1}^N f(x_i)$  uma estatística linear geral. Sua variância pode ser calculada no limite  $N \gg 1$  pelo método da derivada funcional [92], resultando em

$$\text{var}(F) = \frac{1}{\beta\pi^2} \mathcal{P} \int_a^b dx \int_a^b dy \left[ \frac{(y-a)(b-y)}{(x-a)(b-x)} \right]^{1/2} \frac{f(x)}{x-y} \frac{d}{dy} f(y), \quad (4.128)$$

onde  $\mathcal{P}$  indica o valor principal da integral. Vimos, na seção 2.2.2, que a variância de uma estatística linear geral é dada em termos do correlator densidade-densidade,

$C(x, y)$ , de acordo com

$$\text{var}(F) = \int_a^b dx \int_a^b dy C(x, y) dx dy. \quad (4.129)$$

Comparando (4.129) com (4.128), e após uma integração por partes obtemos a função de correlação de dois pontos

$$C(x, y) = -\frac{1}{\beta\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \sqrt{(y-a)(b-y)} \ln |x-y| \right), \quad (4.130)$$

que pode convenientemente ser reescrita na forma

$$C(x, y) = \frac{1}{2\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \left( \frac{(a+b)(x+y) - 2ab - 2xy + 2\sqrt{(x-a)(b-x)(y-a)(b-y)}}{(a+b)(x+y) - 2ab - 2xy - 2\sqrt{(x-a)(b-x)(y-a)(b-y)}} \right). \quad (4.131)$$

Introduzindo variáveis angulares através das relações

$$x = b - (b-a) \sin^2(\theta/2) \quad \text{e} \quad y = b - (b-a) \sin^2(\phi/2), \quad (4.132)$$

onde  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ , podemos escrever a variância como

$$\text{var}(F) = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \tilde{f}^{(a,b)}(\theta) \tilde{f}^{(a,b)}(\phi) \tilde{C}(\theta, \phi), \quad (4.133)$$

onde  $\tilde{f}^{(a,b)}(\theta)$  foi definida na eq. (4.117) e a função correlação fica

$$\tilde{C}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \ln \left| \frac{1 - \cos(\theta + \phi)}{1 - \cos(\theta - \phi)} \right|. \quad (4.134)$$

Definindo

$$B(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cos(n\theta),$$

podemos escrever eq. (4.134) como

$$\tilde{C}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\beta\pi^2}(B(\theta + \phi) + B(\theta - \phi)) \quad (4.135)$$

$$= \frac{2}{\beta\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(n\theta) \cos(n\phi). \quad (4.136)$$

Substituindo eq. (4.136) na eq. (4.133) obtemos a fórmula compacta

$$\text{var}(F) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n (\tilde{f}_n^{(a,b)})^2, \quad (4.137)$$

onde os coeficientes de Fourier  $\tilde{f}_n^{(a,b)}$  foram definidos na eq. (4.123). A fim de ilustrar a utilidade da eq. (4.137) vamos considerar alguns exemplos de estatísticas lineares. Usando a notação da seção 4.4.2, veja eq. (4.75), escolhemos  $F = X_1$ . Neste caso  $f(x) = x$  e

$$\tilde{f}^{(a,b)}(\theta) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta. \quad (4.138)$$

Note que apenas o coeficiente  $\tilde{f}_1^{(a,b)} = (b-a)/2$  contribui para variância, portanto

$$\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{8\beta}, \quad (4.139)$$

em concordância com a eq. (4.88), pois neste caso  $s_0 = -ab$ ,  $s_1 = a+b$  e  $s_2 = -1$ . Para  $F = X_2$  temos  $f(x) = x^2$ , então

$$\tilde{f}^{(a,b)}(\theta) = \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{8} + \frac{b^2 - a^2}{2} \cos \theta + \frac{(b-a)^2}{8} \cos 2\theta. \quad (4.140)$$

Coletando os coeficientes de Fourier  $\tilde{f}_1^{(a,b)}$  e  $\tilde{f}_2^{(a,b)}$  e inserindo na eq. (4.137) obtemos

$$\text{var}(X_2) = \frac{(b-a)^2 (9b^2 + 14ab + 9a^2)}{64\beta}, \quad (4.141)$$

que generaliza os resultados apresentados da seção 4.4.2. Neste ponto estamos prontos para calcular o limite  $N \rightarrow \infty$  da variância da condutância para pontos quânticos

das classes Wigner-Dyson ( $a = 0, b = 1$ ) e quiral ( $a = -1, b = 1$ ). Obtemos

$$\text{var}(g)_{WD} = \text{var}(X) = \frac{1}{8\beta}, \quad (4.142)$$

e

$$\text{var}(g)_{\text{qui}} = \text{var}(X_2) = \frac{1}{4\beta} = 2\text{var}(g)_{WD}. \quad (4.143)$$

Portanto a variância da condutância do ponto quântico quiral é o dobro da obtida para a classe Wigner-Dyson. De fato, usando a eq. (4.137), é fácil mostrar que este resultado estende para uma estatística linear arbitrária dos autovalores de transmissão,  $A = \sum_n a(\tau_n)$ , resultando em [56]

$$\text{var}(A)_{\text{qui}} = 2 \text{var}(A)_{WD}. \quad (4.144)$$

Note, no entanto, que  $\tau = x$  para a classe Wigner-Dyson e  $\tau = 1 - x^2$  para a quiral. Um fator 2 similar foi obtido na ref. [83] para fios quânticos desordenados nas classes BdG e quiral. Para encerrar esta seção resumimos na tabela 4.4 as fórmulas semiclássicas deduzidas para pontos quânticos nas classes Wigner-Dyson e quiral.

	quiral	Wigner-Dyson
Média	$\langle A \rangle = Na_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$	$\langle A \rangle = Na_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-2}$
Variância	$\text{var}(F) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} na_n^2$	$\text{var}(F) = \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^{\infty} na_n^2$

Tabela 4.4: Fórmulas assintóticas para a média e a variância de uma estatística linear arbitrária dos autovalores de transmissão,  $A = \sum_n a(\tau_n)$ , para pontos quânticos das classes Wigner-Dyson e quiral. Os coeficientes da expansão são dados por  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(\sin^2 \theta)$  e  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi a(\sin^2 \theta) \cos(n\theta)$ , além disso definimos  $\gamma = (2 - \beta)/(2\beta)$ .

Vimos que os ensembles de movimento browniano fornecem métodos eficientes de cálculo de observáveis no regime estacionário. No próximo capítulo apresentaremos um método de cálculo de funções de correlação para os ensembles fora de equilíbrio.

## Capítulo 5

# Método da transformada integral

Recentemente o foco da pesquisa em teoria de matrizes aleatórias mudou da função de correlação de  $n$ -pontos para objetos mais gerais contendo produtos e/ou razões de polinômios característicos de matrizes aleatórias, denominados determinantes espectrais [93, 94, 95]. Espera-se que estes novos tipos de função de correlação possam trazer avanços nas aplicações de determinantes espectrais em diversas áreas tais como teoria de números [96], caos quântico [97] e cromodinâmica quântica [29]. Muitas propriedades notáveis das funções de correlação de determinantes espectrais têm origem em certas classes de integrais multidimensionais tipo Selberg. Estas integrais, conhecidas como integrais de correlação de Selberg, têm sido usadas na construção de generalizações multidimensionais das funções hipergeométricas [98] e dos polinômios ortogonais clássicos [72], através de expansões em séries de polinômios simétricos de Jack. Mais recentemente, foram encontradas relações entre funções de correlação de determinantes espectrais e o problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais [99] e certas aplicações do princípio de localização de Duistermaat-Heckman em espaços simpléticos não-compactos [100]. Outro resultado interessante foi obtido por T. Guhr [101, 102], que introduziu classes de funções de correlação definidas como superdeterminantes espectrais, i.e. razões entre produtos de determinantes espectrais, no estudo da classe gaussiana (ou Hermite) dos EMB através do método da supersimetria. A equação de Fokker-Planck para o processo de Wiener matricial foi mapeada num conjunto de equações de di-

fusão desacopladas descrevendo processos de Wiener independentes no setor radial de certos superespaços. Como as funções de correlação introduzidas por Guhr podem ser usadas, em princípio, para deduzir as funções de correlação de  $n$ -pontos reescaladas,  $R_n(r_1, \dots, r_n; \tau)$ , o mapa no superespaço pode ser interpretado como uma ferramenta poderosa para desacoplar as relações hierárquicas da eq. (4.73) para  $\beta = 1, 2$  e  $4$ . Uma técnica similar foi usada na ref. [103] para mostrar a equivalência entre a equação DMPK do transporte em condutores desordenados quase-unidimensionais e certas equações de difusão no espaço quociente de Efetov [104].

Neste capítulo apresentaremos uma extensão das funções de correlação introduzidas por Guhr que generaliza seus resultados com as seguintes características adicionais:

1. O método aplica-se a todos EMB da tabela 4.1 para valores racionais arbitrários de  $\beta$ , ou seja,  $\beta = p/q$  com  $p$  e  $q$  primos entre si.
2. Não há necessidade da introdução da geometria de superespaço para desacoplar as relações hierárquicas.
3. O método pode ser interpretado como uma generalização multivariada da técnica de transformada integral [11] usada na solução de equações diferenciais ordinárias através de uma integral de contorno no plano complexo.

## 5.1 Transformada integral

No capítulo 4 apresentamos os ensembles de movimento browniano nos quais a distribuição conjunta de níveis  $P(\{x\}, t)$  evolui no tempo de acordo com a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}P, \quad \mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) w_N J_\beta \frac{1}{w_N J_\beta}. \quad (5.1)$$

Cada ensemble é caracterizado pelas funções  $w(x)$  e  $s(x)$ , assim como pelo domínio das variáveis, como mostrado na tabela 4.1. Também mostramos que a função de

correlação de  $n$ -pontos

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_a^b dx_{n+1} \dots dx_N P(\{x\}, t) \quad (5.2)$$

evolui no tempo de acordo com uma hierarquia tipo BBGKY

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = & \sum_{p=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_p} \left( s(x_p) w_N J_\beta \frac{\partial}{\partial x_p} (w_N J_\beta)^{-1} \right) \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) \right. \\ & \left. - \beta \frac{\partial}{\partial x_p} s(x_p) \mathcal{P} \int \frac{\rho_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; t)}{x_p - x_{n+1}} dx_{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

O cálculo da função de correlação de  $n$ -pontos para os EMB corresponde formalmente a resolver a equação (5.3), o que, em princípio, é uma tarefa não trivial. No entanto, as relações hierárquicas podem ser desacopladas efetuando-se a seguinte transformada integral multidimensional sobre a função de distribuição conjunta

$$W(\{\nu\}, t) = \langle \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) \rangle = \int d^N x \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) P(\{x\}, t), \quad (5.4)$$

onde o núcleo é escolhido como uma razão de produtos de determinantes espectrais na forma

$$\Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) = \frac{\prod_{k=1}^{n_0} \det(X - \nu_{0k} 1_N)}{\prod_{l=1}^{n_1} \det^{\beta/2}(X - \nu_{1l} 1_N)} = \prod_{i=1}^N \frac{\prod_{k=1}^{n_0} (x_i - \nu_{0k})}{\prod_{l=1}^{n_1} (x_i - \nu_{1l})^{\beta/2}}, \quad (5.5)$$

onde  $n_0$  e  $n_1$  são inteiros positivos que satisfazem o vínculo  $\beta n_1 = 2n_0$ . Esta escolha para o núcleo contém toda a informação da função de correlação de  $n$ -pontos para valores racionais arbitrários de  $\beta$ . De fato, para  $\beta = p/q$  temos

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{p}{2q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$$

onde  $\tilde{p}$  e  $\tilde{q}$  são primos entre si. Se tomarmos  $n_0 = \tilde{p}n$  e  $n_1 = \tilde{q}n$ , e definirmos o operador  $D_k \equiv \text{Im} \partial / \partial \nu_{0k}$ , onde Im indica a parte imaginária, obtemos a função de

$n$ -pontos,  $\rho_n(x_1, \dots, x_n; t)$ , para  $x_i \neq x_j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), através da fórmula

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{k=1}^n D_k W(\{\nu\}; t) \Big|_{\mathcal{C}}, \quad (5.6)$$

onde  $\mathcal{C}$  indica condição

$$\nu_{0,k} = \nu_{0,k+n} = \dots = \nu_{0,k+(p-1)n} = x_k - i\eta = \nu_{1,k} = \nu_{1,k+n} = \dots = \nu_{1,k+(2q-1)n}. \quad (5.7)$$

Na seqüência vamos demonstrar que  $W(\{\nu\}; t)$  satisfaz uma equação de Fokker-Planck que pode ser classificada através de uma correspondência um a um com as classes mostradas na tabela 4.1. A transformada integral, eq. (5.4), pode ser interpretada como um mapa da função de distribuição conjunta,  $P(\{x\}, t)$ , do espaço  $x$  para o espaço  $\nu$ . Nosso objetivo é determinar a equação de evolução da imagem,  $W(\{\nu\}, t)$ , neste novo espaço. Tomando a derivada temporal da eq. (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(\{\nu\}, t) &= \int d^N x \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) \frac{\partial}{\partial t} P(\{x\}, t) \\ &= \int d^N x \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) \mathcal{L}_x P(\{x\}, t) \\ &= \int d^N x P(\{x\}, t) \mathcal{L}_x^\dagger \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde usamos  $\mathcal{L}_x$  para o operador de Fokker-Planck em vez de  $\mathcal{L}_{FP}$  para enfatizar que este operador atua no espaço  $x$ , também usamos a definição do operador adjunto, eq. (4.14), na última linha. O ingrediente principal do método é a existência de um operador atuando no espaço  $\nu$ ,  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$ , que satisfaz a relação

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}) = \mathcal{L}_x^\dagger \Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\}). \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) em (5.8) obtemos uma equação de Fokker-Planck que descreve a evolução temporal de  $W(\{\nu\}, t)$  no espaço  $\nu$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{M}_\nu^\dagger \right) W(\{\nu\}, t) = 0. \quad (5.10)$$

O próximo passo é a construção do operador de Fokker-Planck  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$ , que pode ser escrito na forma geral

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger = \sum_{k=1}^{n_0} \left( D_{0,k}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \nu_{0,k}} + D_{0,k}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \nu_{0,k}^2} \right) + \sum_{l=1}^{n_1} \left( D_{1,l}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \nu_{1,l}} + D_{1,l}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \nu_{1,l}^2} \right). \quad (5.11)$$

Para determinar os coeficientes de deriva e de difusão comparamos a ação dos operadores  $\mathcal{L}_x^\dagger$  e  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$  sobre o núcleo  $\Omega_\beta(\{x\}, \{\nu\})$ . Deixando os detalhes para o apêndice F, escrevemos o resultado final:

$$D_{0k}^{(1)} = -\frac{\beta}{2} \frac{1}{VB} \frac{\partial (s(\nu_{0k})VB)}{\partial \nu_{0k}}, \quad (5.12)$$

$$D_{1l}^{(1)} = \frac{1}{VB} \frac{\partial (s(\nu_{1l})VB)}{\partial \nu_{1l}}, \quad (5.13)$$

e

$$D_{0k}^{(2)} = -\frac{\beta}{2} s(\nu_{0k}), \quad (5.14)$$

$$D_{1l}^{(2)} = s(\nu_{1l}). \quad (5.15)$$

De posse destes coeficientes, podemos reagrupar os termos da equação de modo a escrevê-la numa forma compacta similar à eq. (4.15)

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger = \frac{1}{VB} \left[ \sum_{l=1}^{n_1} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \left( s(\nu_{1l})VB \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right) - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \left( s(\nu_{0k})VB \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right) \right], \quad (5.16)$$

onde introduzimos as funções

$$V \equiv \prod_{k=1}^{n_0} w_0(\nu_{0k}) \prod_{l=1}^{n_1} w_1(\nu_{1l}), \quad (5.17)$$

e

$$B \equiv \prod_{k < k'} |\nu_{0k} - \nu_{0k'}|^{4/\beta} \prod_{l < l'} |\nu_{1l} - \nu_{1l'}|^\beta \prod_{k,l} |\nu_{0k} - \nu_{1l}|^{-2}, \quad (5.18)$$

que desempenham papéis similares aos de  $w_N$  e  $J_\beta$  na eq. (4.15), respectivamente. Além disso, as funções  $w_0(\nu)$  e  $w_1(\nu)$  relacionam-se com  $w(\nu)$  e  $s(\nu)$  da tabela 4.1 através de

$$w_0(\nu) = w^{2/\beta}(\nu)s^{2/\beta-1}(\nu), \quad (5.19)$$

$$w_1(\nu) = \frac{s^{\beta/2-1}(\nu)}{w(\nu)}. \quad (5.20)$$

Para as classes de Dyson da equação DMPK temos que  $w(\nu) = 1$ , portanto,  $w_0(\nu) = s^{2/\beta-1}(\nu)$  e  $w_1(\nu) = s^{\beta/2-1}(\nu)$ , que está de acordo com [103], onde uma transformação similar foi usada para estabelecer a equivalência entre o modelo sigma não-linear supersimétrico unidimensional e a equação DMPK na descrição de um condutor desordenado quase unidimensional.

Expressões similares a  $B$ , eq. (5.18), aparecem em muitos outros contextos. Ela aparece, por exemplo, nas refs. [101, 102] como parte do bereziniano, ou seja, o jacobiano associado à transformação do elemento de volume cartesiano de uma supermatriz hermitiana para coordenadas tipo autovalor-ângulo, e corresponde aos valores particulares  $\beta \in \{1, 2, 4\}$ . Também aparece como parte do fator de forma da função de correlação densidade-densidade do modelo de Calogero-Sutherland [73, 47], que está relacionada à função de correlação de muitos pontos do modelo gaussiano quiral [105]. Este último exemplo será desenvolvido na próxima seção.

Do ponto de vista computacional a vantagem da equação de Fokker-Planck no espaço  $\nu$  em relação a do espaço  $x$  vem do fato de que, na teoria de matrizes aleatórias, geralmente estamos interessados no limite de números muito grandes,  $N \gg 1$ , de graus de liberdade no espaço  $x$ . Por outro lado, o número de graus de liberdade no espaço  $\nu$  é independente de  $N$ , sendo um número fixo dado por  $M = (\tilde{p} + \tilde{q})n$ , onde  $n$  é a ordem da função de correlação desejada. Ilustraremos este ponto na seção 5.3.2, onde obteremos a função de correlação de um ponto para a equação DMPK no ensemble unitário da classe Wigner-Dyson.

## 5.2 Modelo gaussiano quirial

A ref. [105] mostra uma relação entre a função de correlação densidade-densidade do modelo de Calogero-Sutherland e as funções de correlação do modelo gaussiano quirial, definido pela ação

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d\tau dx (\partial_x \Phi)(\partial_\tau \Phi - i\partial_x \Phi), \quad (5.21)$$

onde as integrais cobrem o plano bidimensional  $x\tau$ . Modelos quirais aparecem na descrição de estados de borda de portadores de corrente do fluido quântico incompressível de Hall [106]. A quiralidade maximal dos estados de borda é responsável pela ausência de retroespalhamento no efeito Hall quântico inteiro e, portanto, pela sua estabilidade [107]. A média de uma função arbitrária de  $\Phi$  é definida pela integral funcional

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]} F[\Phi], \quad (5.22)$$

onde a função de partição é definida por

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]}. \quad (5.23)$$

A maneira usual de construir funções de correlação é através da introdução de uma fonte externa na função de partição, de modo que

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[ -S[\Phi] + \int d\vec{\xi} \eta(\vec{\xi}) \Phi(\vec{\xi}) \right], \quad (5.24)$$

onde introduzimos o vetor  $\vec{\xi} = (\tau, x)$  e  $\eta$  é um campo escalar. Note que  $\mathcal{Z}[0]$  corresponde à função de partição (5.23). Calculando-se a integral funcional [108] observamos que  $\mathcal{Z}[\eta]$  pode ser escrito como o produto da função de partição não perturbada,  $\mathcal{Z}[0]$ , e um fator de perturbação que é a exponencial de um termo quadrático em  $\eta$

$$\mathcal{Z}[\eta] = \mathcal{Z}[0] \exp \left[ \frac{1}{2} \int d\vec{\xi} \int d\vec{\xi}' \eta(\vec{\xi}) G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') \eta(\vec{\xi}') \right], \quad (5.25)$$

onde  $G(\vec{\xi}, \vec{\xi}')$  é a função de Green, que satisfaz a equação

$$-i\partial_x(\partial_\tau + i\partial_x)G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = 4\pi\delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}'), \quad (5.26)$$

cuja solução é dada por

$$G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = -2\ln[(\tau - \tau') + i(x - x')] = -2\ln(z - z'), \quad (5.27)$$

onde introduzimos a coordenada complexa  $z = \tau + ix$ . Escolhendo a fonte externa como uma “densidade de cargas” da forma

$$\eta(\vec{\xi}) = i \sum_{j=1}^N \beta_j \delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}_j) \quad (5.28)$$

e substituindo na eq. (5.24), temos

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]} \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j\Phi(\vec{\eta}_j)} = \mathcal{Z}[0] \left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j\Phi(\vec{\eta}_j)} \right\rangle. \quad (5.29)$$

Por outro lado, substituindo (5.28) em (5.25) obtemos

$$\mathcal{Z}[\eta] = \mathcal{Z}[0] \exp \left[ - \sum_{i<j} \beta_i\beta_j G(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) - \frac{1}{2} \sum_i \beta_i^2 G(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i) \right]. \quad (5.30)$$

Portanto, comparando (5.29) com (5.30), obtemos a relação entre a função de correlação e a função de Green

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j\Phi(\vec{\eta}_j)} \right\rangle = \exp \left[ - \sum_{i<j} \beta_i\beta_j G(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) - \frac{1}{2} \sum_i \beta_i^2 G(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i) \right]. \quad (5.31)$$

Nesta expressão, a função de Green do segundo somatório está avaliada nos mesmos pontos, sendo portanto divergente. Eliminamos esta divergência com a seguinte

regularização

$$G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \ln \left( \frac{R^2}{(z - z')^2 + a^2} \right), \quad (5.32)$$

onde  $R$  é o raio de um grande disco e  $a$  é um espaçamento de rede. Desta forma obtemos

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j \Phi(\vec{\xi}_j)} \right\rangle = \prod_{i < j} \left( \frac{|\vec{\xi}_i - \vec{\xi}_j|}{a} \right)^{2\beta_i \beta_j} \left( \frac{a}{R} \right)^{(\sum_i \beta_i)^2}. \quad (5.33)$$

Este resultado é não nulo no limite  $R \rightarrow \infty$  apenas se impusermos a condição de “neutralidade da carga”

$$\sum_{j=1}^N \beta_j = 0. \quad (5.34)$$

Então

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j \Phi(\vec{\xi}_j)} \right\rangle = \prod_{i < j} \left( \frac{z_{ij}}{a} \right)^{2\beta_i \beta_j} \delta_{\sum_j \beta_j, 0}. \quad (5.35)$$

Vamos considerar um sistema constituído de duas classes de “cargas”

$$\beta_j = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2}, & j = 1, \dots, n_1 \\ -\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}, & j = 1, \dots, n_0 \end{cases} \quad (5.36)$$

tais que  $N = n_0 + n_1$ . A condição (5.34) resulta em

$$-\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} n_0 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2} n_1 = 0, \quad (5.37)$$

que é equivalente a  $\beta n_1 = 2n_0$ . Desta forma, a função de correlação (5.33) torna-se

$$\left\langle \prod_{k=1}^{n_0} e^{-i\sqrt{\frac{2}{\beta}}\Phi(\nu_{0k})} \prod_{l=1}^{n_1} e^{i\sqrt{\frac{\beta}{2}}\Phi(\nu_{1l})} \right\rangle = B, \quad (5.38)$$

onde  $B$  é a função definida pela eq. (5.18).

Em contraste, para o modelo gaussiano usual, que representa bósons livres

sem massa em  $2D$ , temos a ação

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d\tau dx (\partial_\tau - i\partial_x)\Phi(\partial_\tau + i\partial_x)\Phi \quad (5.39)$$

e portanto

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j \Phi(z_j)} \right\rangle = \prod_{i < j} \left( \frac{z_{ij} \bar{z}_{ij}}{a} \right)^{2\beta_i \beta_j} \delta_{\sum_j \beta_j, 0}. \quad (5.40)$$

Note que a natureza quirial do modelo da eq. (5.21) se reflete no holomorfismo, i.e. a dependência apenas na variável  $z = \tau + ix$  das funções de correlação. Salientamos também que o espaço imagem da transformada integral fornece um promissor ponto de partida para a bozonização completa do sistema Calogero-Sutherland sem a necessidade do limite termodinâmico [109].

### 5.3 O mapa de Sutherland no espaço imagem

No capítulo 4 apresentamos uma formulação estocástica para os ensembles fora de equilíbrio da teoria de matrizes aleatórias. O ponto forte da nossa formulação para os ensembles de movimento browniano é a existência do mapa de Sutherland, ver coluna da esquerda na figura 5.1. Este mapa leva a equação de Fokker-Planck numa equação de Schrödinger, mapeando o processo estocástico original num problema de muitos corpos descrito por um hamiltoniano do tipo Calogero-Sutherland. Através desta conexão, fizemos contato com os polinômios simétricos de Jack e com os polinômios ortogonais generalizados. Neste capítulo introduziremos o método da transformada integral como ferramenta para o cálculo de funções de correlação dos EMB, ver figura 5.1. O método consiste em mapear o processo estocástico dos níveis num outro processo, também descrito por uma equação de Fokker-Planck. O número de graus de liberdade do espaço imagem é associado à ordem da função de correlação desejada, sendo, em geral, muito menor que o número de graus de liberdade do espaço original.

Uma vez construído o operador de Fokker-Planck no espaço imagem, a seqüência natural seria adaptar os procedimentos usados no espaço original. Por exemplo,

usar uma transformação de Sutherland e construir o hamiltoniano associado, como mostra a coluna da direita na figura 5.1. Isto possibilitaria, por exemplo, a construção de extensões dos polinômios de Jack para o espaço imagem.

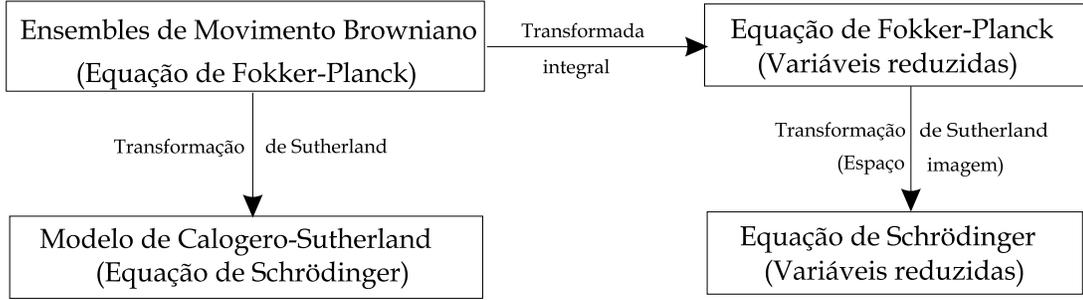


Figura 5.1: Esquema do método da transformada integral aplicado aos ensembles de movimento browniano.

Nesta seção vamos construir um hamiltoniano do tipo Calogero-Sutherland para o espaço imagem. As funções de onda e a base de polinômios de Jack, denominados polinômios de Jack deformados, serão desenvolvidas posteriormente.

### 5.3.1 Mapa de Sutherland

Seguindo os mesmos passos adotados na seção 4.2 definimos a transformação de Sutherland no espaço imagem através de

$$W(\{\nu\}, t) = B^{-1/2} \Psi(\{\nu\}, t), \quad (5.41)$$

que mapeia a equação de Fokker-Planck na equação de Schrödinger com tempo imaginário

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\mathcal{H}_\nu \Psi, \quad (5.42)$$

onde o hamiltoniano é definido por

$$\mathcal{H}_\nu = B^{1/2} \mathcal{M}_\nu^\dagger B^{-1/2}. \quad (5.43)$$

O efeito da transformação de similaridade sobre o operador de Fokker-Planck  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$  é a adição de uma correção dependente de  $B$  ao mesmo, ou seja,

$$\mathcal{H}_\nu = \mathcal{M}_\nu^\dagger + \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^{n_\alpha} \left\{ -\frac{1}{2} D_{\alpha,j}^{(1)} \frac{\partial \ln B}{\partial \nu_{\alpha,j}} + D_{\alpha,j}^{(2)} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \ln B}{\partial \nu_{\alpha,j}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln B}{\partial \nu_{\alpha,j}^2} - \frac{\partial \ln B}{\partial \nu_{\alpha,j}} \frac{\partial}{\nu_{\alpha,j}} \right] \right\}. \quad (5.44)$$

Calculando as derivadas de

$$\ln B = \frac{4}{\beta} \sum_{k < k'} \ln |\nu_{0k} - \nu_{0k'}| + \beta \sum_{l < l'} \ln |\nu_{1l} - \nu_{1l'}| - 2 \sum_{k,l} \ln |\nu_{0k} - \nu_{1l}| \quad (5.45)$$

e agrupando os termos, usando truques similares aos usados na seção 4.2, chegamos à forma final do hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\nu = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}, \quad (5.46)$$

onde o primeiro termo, a parte não interagente, é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \sum_{l=1}^{n_1} \left[ s(\nu_{1l}) \frac{\partial^2}{\partial \nu_{1l}^2} + \left( \frac{\beta+2}{2} s'(\nu_{1l}) - r(\nu_{1l}) \right) \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right] \\ & - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \left[ s(\nu_{0k}) \frac{\partial^2}{\partial \nu_{0k}^2} + \frac{2}{\beta} r(\nu_{0k}) \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Esta equação pode ser escrita num formato similar ao seu correspondente no espaço de níveis  $\{x\}$ . Com o auxílio das funções  $w_0(\nu)$  e  $w_1(\nu)$  definidas em (5.19) e (5.20) podemos escrever

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{l=1}^{n_1} \frac{1}{w_1(\nu_{1l})} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \left( w_1(\nu_{1l}) s(\nu_{1l}) \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right) - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{w_0(\nu_{0k})} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \left( w_0(\nu_{0k}) s(\nu_{0k}) \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right). \quad (5.48)$$

O termo de interação do hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{V} = \frac{2-\beta}{\beta} \sum_{k \neq k'} \frac{s(\nu_{0k})}{(\nu_{0k} - \nu_{0k'})^2} + \frac{\beta(2-\beta)}{4} \sum_{l \neq l'} \frac{s(\nu_{1l})}{(\nu_{1l} - \nu_{1l'})^2} + \frac{\beta-2}{2} \sum_{k,l} \frac{s(\nu_{0k}) + s(\nu_{1l})}{(\nu_{0k} - \nu_{1l'})^2} + \mathcal{V}_0, \quad (5.49)$$

onde

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{12}(\beta+2)((\beta+4)s_2 - 3r_1)n_1. \quad (5.50)$$

Portanto o hamiltoniano representa um sistema com dois tipos de partículas localizadas em  $\nu_{0,1}, \dots, \nu_{0,n_0}$  e  $\nu_{1,1}, \dots, \nu_{1,n_1}$ , com interações entre partículas de uma mesma classe e entre partículas de classes diferentes. Um resultado similar foi encontrado por Guhr e Kohler [110] num modelo em que  $s(x) = 1 = w(x)$ . Estes autores apresentam uma interpretação em termos de um modelo de semiconductor quase-unidimensional. Como esperado, o caso unitário ( $\beta = 2$ ) corresponde ao caso não interagente, com hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{l=1}^n w(\nu_{1l}) \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \left( \frac{s(\nu_{1l})}{w(\nu_{1l})} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w(\nu_{0k})} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \left( w(\nu_{0k}) s(\nu_{0k}) \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right), \quad (5.51)$$

onde usamos o fato de que  $n_0 = n_1 = n$ ,  $w_1(\nu) = 1/w(\nu)$  e  $w_0(\nu) = w(\nu)$ . A seguir, mostraremos como o mapa estudado nesta seção pode ser usado no cálculo da função de correlação de 1-ponto para a equação DMPK.

### 5.3.2 Aplicação: Função de 1-ponto para equação DMPK

A solução exata da equação DMPK no ensemble unitário ( $\beta = 2$ ) foi obtida por Beenakker e Rejæi [86] através de um mapa da equação de Fokker-Planck num modelo de férmions livres. A partir desta solução, Frahm [65, 111] obteve a função de correlação de  $n$ -pontos usando o método das funções biortogonais. Nesta seção, aplicaremos o método da transformada integral para obter expressões exatas para a densidade média de autovalores transmissão (função de correlação de um ponto). Este método é mais direto que os utilizados nas referências [86] e [65, 111], pois não precisamos resolver a equação DMPK para obter a função de 1-ponto.

Como vimos na seção 4.3, a equação DMPK na classe Wigner-Dyson pode

se escrita em coordenadas normais usando as funções

$$w(x) = 1, \quad \text{e} \quad s(x) = x^2 - 1, \quad (5.52)$$

que podem ser lidas da tabela 4.1. Na ref. [86] os autores resolvem a equação DMPK com condição inicial balística, ou seja, com todos os autovalores de transmissão  $\tau$  iguais a 1 quando o comprimento do fio tende a zero. Os autovalores de transmissão relacionam-se com as coordenadas normais de acordo com a equação

$$\tau = \frac{2}{1+x}, \quad (5.53)$$

portanto, a condição inicial balística pode ser escrita como

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(\{x\}, t) = \prod_{i=1}^N \delta(x_i - 1). \quad (5.54)$$

Neste modelo o tempo  $t$  é proporcional ao comprimento do fio. No que diz respeito ao núcleo,  $\Omega(\{x\}, \{\nu\})$ , o caso  $\beta = 2$  requer o mesmo número de variáveis auxiliares  $\{\nu_0\}$  e  $\{\nu_1\}$ . Além disso, como estamos interessados na função de 1-ponto, basta escolher uma variável de cada tipo ( $n_0 = n_1 = 1$ ). Portanto, o núcleo da transformada (5.4) adquire a forma simples

$$\Omega(x; \nu_0, \nu_1) = \prod_{i=1}^N \frac{x_i + \nu_0}{x_i + \nu_1}, \quad (5.55)$$

onde definimos  $\nu_{0,1} = -\nu_0$  e  $\nu_{1,1} = -\nu_1$ . Aplicando o método da transformada integral obtemos a seguinte equação de evolução no espaço imagem

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{M}_\nu^\dagger \right) W(\{\nu\}, t) = 0, \quad (5.56)$$

com operador de Fokker-Planck dado por

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger = (\nu_0 - \nu_1)^2 \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \nu_\alpha} \left( \frac{(\nu_\alpha^2 - 1)}{(\nu_0 - \nu_1)^2} \frac{\partial}{\partial \nu_\alpha} \right) \quad (5.57)$$

A condição inicial, necessária para a solução desta equação, é obtida inserindo as eqs. (5.54) e (5.55) na eq. (5.4), resultando em

$$W(\nu_0, \nu_1; 0) = \left( \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_1} \right)^N = 1 + \frac{\nu_0 - \nu_1}{1 + \nu_1} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_1} \right)^l. \quad (5.58)$$

As eqs. (5.54) e (5.58) mostram a simplicidade da implementação da condição inicial. Esta é outra conveniência do método de transformada integral, em contraste com o método usado nas refs. [86, 111], que envolve um processo sutil de eliminação de divergências numa razão de determinantes. Para resolver a eq. (5.56) mapeamos a equação de Fokker-Planck numa equação de Schrödinger através da seguinte transformação de Sutherland

$$W = 1 + (\nu_0 - \nu_1)\Psi. \quad (5.59)$$

Note que a presença do 1 na eq. (5.59) não afeta a forma final do hamiltoniano obtido na seção anterior. Em particular, fazendo  $n = 1$ ,  $w(\nu) = 1$  e  $s(\nu) = \nu^2 - 1$  no hamiltonino (5.51) chegamos a

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \nu_\alpha} (\nu_\alpha^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \nu_\alpha}. \quad (5.60)$$

Nesta etapa, devemos especificar o domínio das variáveis auxiliares  $\nu_0$  e  $\nu_1$ . Este problema é formalmente similar à especificação de um contorno apropriado para a construção de representações integrais para soluções de equações diferenciais ordinárias. Evitamos uma análise matemática complicada para esta escolha buscando inspiração na formulação supersimétrica deste problema, que resulta em dois graus de liberdade na representação integral final: um compacto e outro não-compacto. Desta forma, escolhemos  $-1 \leq \nu_0 \leq 1$  e  $1 \leq \nu_1 < \infty$ . Com esta escolha os autovetores de  $\mathcal{H}$  ficam

$$\varphi_{nk}(\nu_0, \nu_1) = \sqrt{(n+1/2)k \tanh(k\pi)} P_n(\nu_0) P_{-\frac{1}{2}+ik}(\nu_1), \quad (5.61)$$

onde  $P_n(x)$  é o polinômio de Legendre e  $P_{1/2+ik}(x)$  é a função cônica [112]. Estas autofunções satisfazem às condições de ortogonalidade e completeza dadas respectivamente por

$$\int_{-1}^1 d\nu_0 \int_1^\infty d\nu_1 \varphi_{nk}(\nu_0, \nu_1) \varphi_{n'k'}(\nu_0, \nu_1) = \delta_{n,n'} \delta(k - k') \quad (5.62)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dk \varphi_{nk}(\nu_0, \nu_1) \varphi_{nk}(\nu'_0, \nu'_1) = \delta(\nu_0 - \nu'_0) \delta(\nu_1 - \nu'_1). \quad (5.63)$$

Os autovalores são

$$\varepsilon_{nk} = n(n+1) + k^2 + \frac{1}{4}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad k \geq 0. \quad (5.64)$$

A função de Green associada a esta equação de Schödinger satisfaz

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H}\right) \mathcal{G}(\{\nu\}, \{\nu'\}; t) = 0 \quad (5.65)$$

com condição inicial

$$\mathcal{G}(\{\nu\}, \{\nu'\}; 0) = \delta(\{\nu\} - \{\nu'\}) = \delta(\nu_0 - \nu'_0) \delta(\nu_1 - \nu'_1). \quad (5.66)$$

A função de onda  $\Psi(\{\nu\}; t)$  pode ser obtida a partir da função de Green pela relação geral

$$\Psi(\{\nu\}; t) = \int_{-1}^1 d\nu'_0 \int_1^\infty d\nu'_1 G(\{\nu\}, \{\nu'\}; t) \Psi(\{\nu'\}; 0), \quad (5.67)$$

onde a condição inicial

$$\Psi(\{\nu\}, 0) = \frac{1}{1 + \nu_1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_1}\right)^l \quad (5.68)$$

é obtida a partir das eqs. (5.58) e (5.59). Usando a resolução espectral da função de Green

$$G(\{\nu\}, \{\nu'\}; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dk \varphi_{nk}(\nu_0, \nu_1) \varphi_{nk}(\nu'_0, \nu'_1) e^{-\varepsilon_{nk} t} \quad (5.69)$$

obtemos a solução da equação de Fokker-Planck no espaço imagem

$$W(\{\nu\}, t) = 1 + (\nu_0 - \nu_1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) \int_0^{\infty} dk k \tanh(k\pi) e^{-\epsilon_{nk}t} P_n(\nu_0) P_{-1/2+ik}(\nu_1) a(N, n, k), \quad (5.70)$$

onde

$$a(N, n, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-1}^1 d\nu_0 (1 + \nu_0)^l P_n(\nu_0) \int_1^{\infty} d\nu_1 \frac{P_{-1/2+ik}(\nu_1)}{(1 + \nu_1)^{l+1}}. \quad (5.71)$$

Usando os resultados das integrais abaixo

$$\int_{-1}^1 dx (x+1)^l P_n(x) = \frac{2^l (l!)^2}{(l-n)! (l+n+1)!} \theta(l-n) \quad (5.72)$$

e

$$\int_1^{\infty} dx \frac{P_{-1/2+ik}(x)}{(x+1)^{l+1}} = \frac{1}{2^l l!} |\Gamma(l+1/2+ik)|^2, \quad (5.73)$$

a soma (5.71) pode ser executada explicitamente, resultando em

$$a(N, n, k) = 2 \frac{C(N, n, k)}{\epsilon_{nk}} \theta(N-1-n); \quad C(N, n, k) \equiv \frac{|\Gamma(N+1/2+ik)|^2}{(N-1-n)! (N+n)!}. \quad (5.74)$$

onde  $\theta(x)$  é a função degrau de Heaviside. Portanto, a solução final pode ser escrita como

$$W(\{\nu\}, t) = 1 + (\nu_0 - \nu_1) \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) \int_0^{\infty} dk k \tanh(k\pi) e^{-\epsilon_{nk}t} \frac{C(N, n, k)}{\epsilon_{nk}} P_n(\nu_0) P_{-1/2+ik}(\nu_1). \quad (5.75)$$

A função de correlação de 1-ponto é obtida através da relação

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left. \frac{\partial W(\nu_0, \nu_1, t)}{\partial \nu_0} \right|_{\nu_0 = -x + i\eta = \nu_1} \quad (5.76)$$

Inserindo a eq. (5.75) na eq. (5.76) e usando as identidades

$$P_n(-x + i\eta) = (-1)^n P_n(x) \quad (5.77)$$

$$\text{Im } P_{-1/2+ik}(-x + i\eta) = -\cosh(k\pi) P_{-1/2+ik}(x), \quad \eta \rightarrow 0^+ \quad (5.78)$$

obtemos nossa expressão final

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk k \sinh(k\pi) P_{-1/2+ik}(x) e^{-(k^2+1/4)t} f_{Nk}(x, t) \quad (5.79)$$

onde

$$f_{Nk}(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (2n+1) P_n(x) C(N, n, k) e^{-n(n+1)t}}{n(n+1) + k^2 + 1/4}. \quad (5.80)$$

Este resultado está em perfeita concordância com a fórmula exata obtida por Frahm [65, 111]. Este método da transformada integral estende-se facilmente para as outras classes da equação DMPK.

## 5.4 Polinômios de Jack deformados

Nas seções anteriores apresentamos várias conexões entre o método da transformada integral e outros problemas. Acreditamos que estas conexões possam ser úteis para desenvolvimentos posteriores do modelo de movimento browniano no espaço  $\nu$ . Em particular, acreditamos que a construção explícita de uma base polinomial de funções simétricas, similar aos polinômios de Jack para o espaço  $x$ , será fundamental para colocar as duas formulações em pé de igualdade. Existem duas destas extensões dos polinômios de Jack disponíveis na literatura. A primeira, abordada nas referências [113, 114], generaliza o modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico usando mecânica quântica supersimétrica. As autofunções, denominadas superpolinômios de Jack, são polinômios simétricos com variáveis comutantes e anti-comutantes. A segunda abordagem [115, 116, 117] também estuda um análogo supersimétrico do modelo de Calogero-Sutherland, mas, em vez de introduzir variáveis de grassmann, constrói o operador diretamente a partir da estrutura das redes de raízes associadas às superálgebras de Lie  $\mathfrak{gl}(n|m)$ .

A estrutura final da construção de Sergeev é matematicamente equivalente à encontrada pelo método da transformada integral. Nesta seção mostraremos como a nossa construção se relaciona com a de Sergeev e exploraremos este fato para construir os polinômios de Jack deformados.

### 5.4.1 Conexão com a construção do Sergeev: polinômios de Jack no espaço imagem

Usando as formas abertas dos coeficientes de difusão e de deriva, ver apêndice F, o operador de Fokker-Planck no espaço imagem pode ser escrito na forma explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\nu^\dagger = & \sum_{l=1}^{n_1} s(\nu_{1l}) \frac{\partial^2}{\partial \nu_{1l}^2} + \left[ \frac{\beta+2}{2} s'(\nu_{1l}) - r(\nu_{1l}) \right] \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} + \beta \sum_{l \neq l'} \frac{s(\nu_{1l})}{\nu_{1l} - \nu_{1l'}} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \\ & - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \left( s(\nu_{0k}) \frac{\partial^2}{\partial \nu_{0k}^2} + \frac{2}{\beta} r(\nu_{0k}) \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right) - 2 \sum_{k \neq k'} \frac{s(\nu_{0k})}{\nu_{0k} - \nu_{0k'}} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \\ & + 2 \sum_{k,l} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{1l}} \left( s(\nu_{1l}) \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} + \frac{\beta}{2} s(\nu_{0k}) \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right), \end{aligned} \quad (5.81)$$

que depende das funções  $s(x)$ ,  $r(x)$  e do parâmetro  $\beta$ . Este operador é equivalente ao  $\mathcal{L}_x^\dagger$ , que atua no espaço de níveis  $\{x\}$ . Vimos que os polinômios de Jack usuais são autofunções do operador  $\mathcal{L}_x^\dagger$  com as seguintes restrições

$$s(x) = x^2 \quad \text{e} \quad r(x) = 0. \quad (5.82)$$

Por analogia, podemos esperar que os polinômios de Jack do espaço imagem sejam autofunções do operador  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$  com estas mesmas restrições, i.e. que sejam auto-

funções de

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\nu^\dagger = & \sum_{l=1}^{n_1} \nu_{1l}^2 \frac{\partial^2}{\partial \nu_{1l}^2} + (\beta + 2) \sum_{l=1}^{n_1} \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} + \beta \sum_{l \neq l'} \frac{\nu_{1l}^2}{\nu_{1l} - \nu_{1l'}} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \\
& - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \nu_{0k}^2 \frac{\partial^2}{\partial \nu_{0k}^2} - 2 \sum_{k \neq k'} \frac{\nu_{0k}^2}{\nu_{0k} - \nu_{0k'}} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \\
& + 2 \sum_{k,l} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{1l}} \left( \nu_{1l}^2 \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} + \frac{\beta}{2} \nu_{0k}^2 \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right), \tag{5.83}
\end{aligned}$$

que também pode ser escrito na forma compacta

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger = \sum_{l=1}^{n_1} \frac{\nu_{1l}^2}{B} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \left( B \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right) - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\nu_{0k}^2}{B} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \left( B \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right) + (\beta + 2) \sum_{l=1}^{n_1} \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}}. \tag{5.84}$$

No entanto, segundo Sergeev, os polinômios de Jack deformados são autofunções do operador

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\nu = & \sum_{l=1}^{n_1} \left( \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} \right)^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{l < l'} \frac{\nu_{1l} + \nu_{1l'}}{\nu_{1l} - \nu_{1l'}} \left( \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} - \nu_{1l'} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l'}} \right) \\
& - \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \left( \nu_{0k} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right)^2 - \sum_{k < k'} \frac{\nu_{0k} + \nu_{0k'}}{\nu_{0k} - \nu_{0k'}} \left( \nu_{0k} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} - \nu_{0k'} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k'}} \right) \\
& + \sum_{k,l} \frac{\nu_{1l} + \nu_{0k}}{\nu_{1l} - \nu_{0k}} \left( \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} - \frac{\beta}{2} \nu_{0k} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right). \tag{5.85}
\end{aligned}$$

De fato, isto não constitui um problema pois os polinômios de Jack são homogêneos e podemos relacionar os operadores  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$  e  $\mathcal{M}_\nu$  com auxílio de operadores de Euler nas variáveis  $\nu_{0k}$  e  $\nu_{1l}$ . Portanto, é fácil mostrar que

$$\mathcal{M}_\nu \equiv \mathcal{M}_\nu^\dagger - \frac{\beta + 2}{2} \left( \sum_{l=1}^{n_1} \nu_{1l} \frac{\partial}{\partial \nu_{1l}} + \sum_{k=1}^{n_0} \nu_{0k} \frac{\partial}{\partial \nu_{0k}} \right). \tag{5.86}$$

A equação (5.86) estabelece a conexão entre o método da transformada integral e a construção de Sergeev. Note que esta ambiguidade na definição também

ocorre com os polinômios de Jack usuais. Como mostra o apêndice B, na literatura são adotados dois operadores. O primeiro é obtido a partir do operador de Fokker-Planck adjunto com as restrições da eq. (5.82), resultando em

$$\mathcal{L}_x^\dagger = \sum_i x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}. \quad (5.87)$$

O segundo operador, por sua vez, é definido por

$$\mathcal{L}_x = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{i < j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (5.88)$$

Estes dois operadores relacionam-se pela adição de um certo múltiplo do operador de Euler no espaço  $x$

$$\mathcal{L}_x \equiv \mathcal{L}_x^\dagger + \left( \frac{\beta + 2}{2} - N \frac{\beta}{2} \right) \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (5.89)$$

o que completa a analogia entre os operadores definidos no espaço original,  $\{x\}$ , e no espaço imagem,  $\{\nu\}$ . Também é interessante notar que Sergeev [117] introduz, como consequência de outros fatos, uma relação similar à nossa relação fundamental

$$\mathcal{L}_x^\dagger \Omega(\{x\}, \{\nu\}) = \mathcal{M}_\nu^\dagger \Omega(\{x\}, \{\nu\}), \quad (5.90)$$

em termos dos operadores  $\mathcal{L}_x^\dagger$  e  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$ . Usando as relações (5.85) e (5.88) na equação (5.90) obtemos

$$\mathcal{L}_x^\dagger \Omega(\{x\}, \{\nu\}) = \mathcal{M}_\nu^\dagger \Omega(\{x\}, \{\nu\}) - N \frac{\beta}{2} \left( \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Omega(\{x\}, \{\nu\}). \quad (5.91)$$

Sergeev usa uma forma diferente para o núcleo, obtido pela mudança de variáveis

$x_i \rightarrow 1/y_i$ . Desta forma

$$\Omega(\{x\}, \{\nu\}) \rightarrow \varphi(\{y\}, \{\nu\}) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{n_0} (1 - y_i \nu_{0k}) \prod_{l=1}^{n_1} (1 - y_i \nu_{1l})^{-\beta/2} \quad (5.92)$$

$$\mathcal{L}_x^\dagger \rightarrow \mathcal{L}_y^\dagger \quad (5.93)$$

$$\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow - \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (5.94)$$

e a condição (5.91) é levada em

$$\mathcal{L}_y \varphi(\{y\}, \{\nu\}) = \mathcal{M}_\nu \varphi(\{y\}, \{\nu\}) + N \frac{\beta}{2} \left( \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \varphi(\{y\}, \{\nu\}), \quad (5.95)$$

que corresponde à equação (4.4) da referência [117]. Introduzindo o operador

$$\mathcal{L}_y^* = \mathcal{L}_y - \frac{N\beta}{2} \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (5.96)$$

podemos reescrever a relação (5.96) numa forma mais compacta

$$\mathcal{L}_y^* \varphi(\{y\}, \{\nu\}) = \mathcal{M}_\nu \varphi(\{y\}, \{\nu\}). \quad (5.97)$$

Esta relação é usada na construção dos polinômios de Jack deformados. Note que os polinômios de Jack  $J_\lambda(x, \beta)$  também são autofunções do operador  $\mathcal{L}_x^*$ , mas com autovalores

$$b_\lambda^* = \sum_i [\lambda_i^2 + \frac{\beta}{2}(1 - 2i)\lambda_i], \quad (5.98)$$

## 5.4.2 Construção dos polinômios

Nesta seção, seguindo a referência [117], vamos definir os polinômios de Jack deformados e mostrar que eles são autofunções do operador  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$ . Para isto, introduzimos a álgebra  $\Lambda$  dos polinômios nas variáveis  $\nu_{1,1}, \nu_{1,2}, \dots, \nu_{0,n_0}$  e  $\nu_{1,1}, \nu_{1,2}, \dots, \nu_{1,n_1}$ .

A soma de Newton é definida em  $\Lambda$  por

$$p_r(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}) = \sum_l \nu_{1l}^r + \sum_k \nu_{0k}^r. \quad (5.99)$$

Os polinômios de Jack em  $\Lambda$  são definidos por

$$J_\lambda(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}; \beta) \equiv J_\lambda^{(2/\beta)}(\{\nu\}), \quad (5.100)$$

onde  $\{\nu\} = \{\nu_{1,1}, \nu_{1,2}, \dots, \nu_{0,n_0}, \nu_{1,1}, \nu_{1,2}, \dots, \nu_{1,n_1}\}$ . Considere o automorfismo  $\omega_\beta : \Lambda \rightarrow \Lambda$ , cuja ação sobre as somas de Newton é definida como

$$\omega_\beta[p_r(\{\nu_0\}, \{\nu_1\})] = \sum_l \nu_{1l}^r - \frac{2}{\beta} \sum_k \nu_{0k}^r. \quad (5.101)$$

Esta equação define as somas de Newton deformadas. Analogamente os polinômios de Jack deformados [117] são definidos por

$$\mathcal{J}_\lambda(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}; \beta) \equiv \omega_\beta[J_\lambda(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}; \beta)]. \quad (5.102)$$

Para mostrar que estes polinômios são autofunções do operador de Fokker-Planck no espaço imagem introduzimos a função auxiliar

$$\Pi(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}, \{x\}) \equiv \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{n_0} \prod_{l=1}^{n_1} (1 - x_i \nu_{0k})^{-\beta/2} (1 - x_i \nu_{1l})^{-\beta/2}. \quad (5.103)$$

**Lema 5.1** *A ação do automorfismo  $\omega_\beta$  sobre a função auxiliar é dada por*

$$\omega_\beta \Pi(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}, \{x\}) = \varphi(\{x\}, \{\nu\}). \quad (5.104)$$

**Prova.** Como  $\omega_\beta$  é um homomorfismo basta considerar  $N = 1$ , que corresponde a apenas uma variável  $x$ . Além disso, como  $\omega_\beta$  atua apenas nas variáveis  $\{\nu_0\}$ ,

podemos escrever

$$\omega_\beta \Pi(\{\nu_0\}, \{\nu_1, x\}) = \prod_{l=1}^{n_1} (1 - x\nu_{1l})^{-\beta/2} \omega_\beta \prod_{k=1}^{n_0} (1 - x\nu_{0k})^{-\beta/2}. \quad (5.105)$$

A ação de  $\omega_\beta$  sobre  $\prod_{k=1}^{n_0} (1 - x\nu_{0k})^{-\beta/2}$  é calculada a seguir:

$$\omega_\beta \prod_{k=1}^{n_0} (1 - x\nu_{0k})^{-\beta/2} = \omega_\beta \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_k \ln(1 - x\nu_{0k})\right) \quad (5.106)$$

$$= \omega_\beta \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_k \sum_{j \geq 1} \frac{x^j \nu_{0k}^j}{j}\right) \quad (5.107)$$

$$= \omega_\beta \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_{j \geq 1} \frac{p_j(\nu_0) x^j}{j}\right) \quad (5.108)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j \geq 1} \frac{p_j(\nu_0) x^j}{j}\right) \quad (5.109)$$

$$= \prod_k (1 - x\nu_{0k}), \quad (5.110)$$

onde, nas quatro primeiras linhas, expandimos a função  $\ln(1 - x\nu_{0k})$ , usamos a definição das somas de Newton e aplicamos  $\omega_\beta$  sobre elas. Na última passagem usamos a eq. (B.24), obtida a partir da função geratriz das somas de Newton. Desta forma

$$\omega_\beta \Pi(\{\nu_0\}, \{\nu_1, \{x\}\}) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{n_0} (1 - x_i \nu_{0k}) \prod_{l=1}^{n_1} (1 - x_i \nu_{1l})^{-\beta/2} = \varphi(\{x\}, \{\nu\}). \quad (5.111)$$

O que completa a prova.

**Lema 5.2** *O núcleo  $\varphi(\{x\}, \{\nu\})$  pode ser expandido em termos dos polinômios de Jack usuais e deformados de acordo com a equação*

$$\varphi(\{x\}, \{\nu\}) = \sum_\lambda \frac{1}{j_\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\nu_0, \nu_1; \beta) J_\lambda(x; \beta). \quad (5.112)$$

**Prova.** A função auxiliar pode ser expandida em termos de polinômios de Jack com o auxílio da identidade de Cauchy [44]

$$\Pi(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}, \{x\}) = \sum_{\lambda} j_{\lambda}^{-1} J_{\lambda}(\{\nu_0\}, \{\nu_1\}; \beta) J_{\lambda}(\{x\}; \beta). \quad (5.113)$$

Completamos a prova aplicando o automorfismo  $\omega_{\beta}$  sobre os dois lados de (5.113), usando o lema 1 e a definição de  $\mathcal{J}_{\lambda}(\nu_0, \nu_1; \beta)$ .

**Teorema 5.1** *Os polinômios de Jack deformados satisfazem à equação de autovalor*

$$\mathcal{M}_{\nu} \mathcal{J}_{\lambda}(\nu_0, \nu_1; \beta) = b_{\lambda}^* \mathcal{J}_{\lambda}(\nu_0, \nu_1; \beta), \quad (5.114)$$

onde

$$b_{\lambda}^* = \sum_i [\lambda_i^2 + \frac{\beta}{2}(1 - 2i)\lambda_i]. \quad (5.115)$$

**Prova.** Partindo da identidade (5.97)

$$\mathcal{L}_y^* \varphi(\{y\}, \{\nu\}) = \mathcal{M}_{\nu} \varphi(\{y\}, \{\nu\}) \quad (5.116)$$

e expandindo  $\varphi$  de acordo com o lema 5.2 temos

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{j_{\lambda}} \mathcal{J}_{\lambda}(\nu_0, \nu_1; \beta) \mathcal{L}_y^* J_{\lambda}(x, \beta) = \sum_{\lambda} \frac{1}{j_{\lambda}} (\mathcal{M}_{\nu} \mathcal{J}_{\lambda}(\nu_0, \nu_1; \beta)) J_{\lambda}(x, \beta). \quad (5.117)$$

Completamos a prova notando que os polinômios de Jack satisfazem a equação de autovalor

$$\mathcal{L}_y^* J_{\lambda}(x, \beta) = b_{\lambda}^* J_{\lambda}(x, \beta). \quad (5.118)$$

Para finalizar vamos construir explicitamente alguns polinômios de Jack deformados. Para isso seguimos a prescrição abaixo

1. Escreva o polinômio de Jack  $J_{\lambda}(\{\nu\}, \beta)$  na base de somas de Newton.
2. Separe nas somas de Newton os dois tipos de variáveis  $\nu_0$  e  $\nu_1$
3. Aplique o automorfismo  $\omega_{\beta}$

Como exemplo vamos considerar as partições de 2

1.  $\lambda = (1, 1)$

$$P_{(1,1)}(\{\nu\}, \beta) = m_{(1,1)} \quad (5.119)$$

$$= \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2 \quad (5.120)$$

$$= \frac{1}{2}[p_1(\nu_0) + p_1(\nu_1)]^2 - \frac{1}{2}[p_2(\nu_0) + p_2(\nu_1)], \quad (5.121)$$

onde  $p_k(\nu_0) = \nu_0^k$  e  $p_k(\nu_1) = \nu_1^k$ .

2.  $\lambda = (2)$

$$P_{(2)}(\{\nu\}, \beta) = m_{(2)} + \frac{2\beta}{2+\beta}m_{(1,1)} \quad (5.122)$$

$$= \frac{\beta}{2+\beta}p_1^2 + \frac{2}{2+\beta}p_2 \quad (5.123)$$

$$= \frac{\beta}{2+\beta}[p_1(\nu_0) + p_1(\nu_1)]^2 + \frac{2}{2+\beta}[p_2(\nu_0) + p_2(\nu_1)] \quad (5.124)$$

Aplicando o automorfismo  $\omega_\beta$  temos

$$\mathcal{J}_{(1,1)}(\nu_0, \nu_1; \beta) = \frac{1}{2} \left( p_1(\nu_0) - \frac{2}{\beta}p_1(\nu_1) \right)^2 - \frac{1}{2} \left( p_2(\nu_0) - \frac{2}{\beta}p_2(\nu_1) \right) \quad (5.125)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \nu_0 - \frac{2}{\beta}\nu_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \nu_0^2 - \frac{2}{\beta}\nu_1^2 \right), \quad (5.126)$$

$$(5.127)$$

$$\mathcal{J}_{(2)}(\nu_0, \nu_1; \beta) = \frac{\beta}{2+\beta} \left( p_1(\nu_0) - \frac{2}{\beta}p_1(\nu_1) \right)^2 + \frac{2}{2+\beta} \left( p_2(\nu_0) - \frac{2}{\beta}p_2(\nu_1) \right) \quad (5.128)$$

$$= \frac{\beta}{2+\beta} \left( \nu_0 - \frac{2}{\beta}\nu_1 \right)^2 + \frac{2}{2+\beta} \left( \nu_0^2 - \frac{2}{\beta}\nu_1^2 \right). \quad (5.129)$$

Os polinômios deformados de Jack podem ser usados para construir deformações dos polinômios generalizados clássicos através de fórmulas do tipo Lassale. Isto fornecerá uma ferramenta analítica poderosa para o cálculo de funções de correlação em ensembles de movimento browniano. No próximo capítulo introduzimos um método específico para as classes unitárias ( $\beta = 2$ ).

# Capítulo 6

## Método das funções biortogonais

Introduzimos no capítulo 4 uma formulação para ensembles de matrizes aleatórias fora do equilíbrio baseada na teoria geral de processos estocásticos. Apresentamos um modelo em que  $N$  níveis, os autovalores de uma matriz aleatória,  $\{x\} = (x_1, \dots, x_N)$  evoluem no tempo segundo um processo markoviano. Em particular, para uma certa classe de processos com trajetórias amostrais contínuas, construímos a equação de Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da distribuição conjunta de níveis. Esta construção não depende de uma realização matricial específica para o problema, desta forma os ensembles podem ser classificados de acordo com a equação de Fokker-Planck resultante. Além disso o índice de simetria  $\beta$  das teorias de matrizes aleatórias aparece na formulação apenas como um parâmetro, podendo assumir valores diferentes dos clássicos  $\beta = 1, 2$  e  $4$ . Generalizações dos valores de  $\beta$  fazem parte de tópicos recentes de pesquisa em TMA, como por exemplo as conexões com modelos de Calogero-Sutherland com acoplamentos racionais [47], novos métodos numéricos para ensembles com  $\beta$  arbitrário [118] e na teoria de comunicação sem fio [119, 120].

Os ensembles de movimento browniano introduzidos nesta tese unificam e generalizam os ensembles de TMA fora do equilíbrio usados na literatura. Em particular apresentamos uma descrição unificada dos ensembles de movimento browniano e ensembles de matrizes de transferência. Como subproduto desta construção obtivemos vários métodos unificados de cálculo de médias de observáveis e de funções

de correlação. Vimos, por exemplo, no capítulo 2 que a função de correlação de  $n$ -pontos é escrita numa forma fatorada que depende apenas de combinações de funções de dois pontos. Tal fatoração é fundamental para o cálculo de observáveis e desempenha papel similar ao do teorema de Wick em física de muitos corpos. Esta estrutura é construída, no caso unitário, com o auxílio do método dos polinômios ortogonais [1]. Para as demais classes de simetria uma fatorização similar é obtida com a álgebra de quatérnions, através do método de polinômios anti-ortogonais [1, 10]. Por outro lado, o cálculo de funções de correlação para ensembles fora do equilíbrio tem se mostrado uma tarefa não-trivial. Soluções exatas foram obtidas apenas no caso da transição gradual entre os ensembles circulares unitário e ortogonal [121] e em problemas de equações DMPK para os ensembles unitários das classes Wigner-Dyson [86, 14] e quiral [32]. Em contraste, soluções exatas para a classe BdG foram encontradas para sistemas com simetria de reversão temporal (classes DIII e CI) [122]. A dificuldade intrínseca da obtenção de fórmulas explícitas para as funções de correlação nas demais classes de simetria está intimamente relacionada ao problema de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, cujas soluções são conhecidas apenas para grupos conexos e compactos, que é o caso do grupo unitário [123]. Em alguns casos a integral de Itzykson-Zuber para o grupo unitário é utilizada no cálculo de funções de correlação, como, por exemplo, no problema de uma matriz aleatória hermitiana acoplada a uma fonte externa matricial [124, 125, 126]. Recentemente Baker e Forrester [72], usando métodos de polinômios de Jack, apresentaram uma solução para a equação de Fokker-Planck com condição inicial tipo delta, válida para todas classes de simetria dos ensembles de Hermite e de Laguerre. Vale ressaltar que, apesar da importância deste resultado, o problema do cálculo de funções de correlação continua em aberto, uma vez que não é óbvio como obter a função de  $n$ -pontos a partir da solução apresentada por estes autores.

Neste capítulo calcularemos funções de correlação, no caso unitário, para os ensembles de movimento browniano de polinômios ortogonais. Apresentamos uma generalização do método das funções biortogonais usado na ref. [32] que será utilizada para escrever as funções de correlação numa estrutura matricial fatorada, similar à encontrada nos ensembles de equilíbrio. Conseguimos representar o núcleo em termos das funções de Green associadas aos polinômios ortogonais clássicos. Em

particular, para os ensembles de Hermite e Laguerre nossos resultados são equivalentes aos de Baker e Forrester.

## 6.1 Ensembles de movimento browniano de polinômios ortogonais

No capítulo 4 apresentamos os ensembles de matrizes aleatórias fora do equilíbrio nos quais os níveis  $\{x\} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  executam um movimento browniano com distribuição conjunta  $P(\{x\}, t)$  evoluindo no tempo de acordo com a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}P; \quad \mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( J_\beta w_N s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{J_\beta w_N} \right), \quad (6.1)$$

onde

$$J_\beta = |\Delta_N(\{x\})|^\beta, \quad \Delta_N(\{x\}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad \text{e} \quad w_N = \prod_{i=1}^N w(x_i). \quad (6.2)$$

Esta formulação é adequada para tratar ensembles de polinômios ortogonais clássicos com função peso  $w(x)$ . Em particular, para  $t \rightarrow \infty$  a equação de Fokker-Planck possui uma solução estacionária dada por

$$P_{eq}(\{x\}) = C_N J_\beta(\{x\}) w_N(\{x\}), \quad (6.3)$$

que corresponde à distribuição conjunta que caracteriza os ensembles de polinômios ortogonais da teoria de matrizes aleatórias [1]. A tabela 6.1 mostra a classificação dos ensembles dada em termos das funções  $w(x)$  e  $s(x)$ , assim como do domínio de definição dos níveis.

Métodos gerais de solução da equação de Fokker-Planck envolvem um mapa que leva o operador  $\mathcal{L}_{FP}$  (não hermitiano) num operador hermitiano [71]. Na nossa

Intervalo	$w(x)$	$s(x)$	Ensemble
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	1	Hermite
$[0, \infty)$	$x^\nu e^{-x} \ (\nu > -1)$	$x$	Laguerre
$[-1, 1]$	$(1-x)^\nu(1+x)^\mu \ (\nu, \mu > -1)$	$1-x^2$	Jacobi

Tabela 6.1: Classificação dos ensembles de movimento browniano de polinômios ortogonais.

construção este mapa é escrito como

$$P(\{x\}, t) = w_N J_\beta^{1/2} e^{-E_0 t} \Psi(\{x\}, t), \quad (6.4)$$

com  $E_0$  definido por

$$E_0 = \beta N(N-1)(s_2 \beta(N-2) + 3r_1)/12. \quad (6.5)$$

Desta forma, a equação de Fokker-Planck (6.1) é levada numa equação de Schrödinger em tempo imaginário para  $N$  férmions interagentes num espaço unidimensional, dada por

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi \quad (6.6)$$

com operador hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = -(w_N J_\beta^{1/2})^{-1} \mathcal{L}_{FP} w_N J_\beta^{1/2} - E_0 \quad (6.7)$$

$$= -\sum_{i=1}^N \frac{1}{w(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w(x_i) s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{\beta(\beta-2)}{4} \sum_{i \neq j} \frac{s(x_i)}{(x_i - x_j)^2}. \quad (6.8)$$

A antisimetria da função de onda fermiônica sob troca de partículas é garantida pela transformação

$$J_\beta^{1/2} \rightarrow J_\beta^{1/2} \text{sign}(\Delta_N(\{x\})) \quad (6.9)$$

onde  $\text{sign}(x)$  é a função sinal e  $\Delta_N(\{x\})$ , definida em (6.2), é uma função anti-

simétrica. A solução geral da equação de Fokker-Planck (6.1) pode ser escrita como

$$P(\{x\}, t) = \int d^N x' \mathcal{P}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) P(\{x'\}, 0), \quad (6.10)$$

onde a probabilidade de transição satisfaz

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{FP} \right) \mathcal{P}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) = 0 \quad (6.11)$$

com condição inicial tipo delta simetrizada

$$\mathcal{P}(\{x\}, 0 | \{x'\}, 0) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \prod_{j=1}^N \delta(x_j - x'_{P(j)}), \quad (6.12)$$

onde a soma é sobre o grupo de permutação  $S_N$ . Por outro lado, a solução geral da equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$\Psi(\{x, t\}) = \int d^N x' w_N(\{x'\}) \mathcal{G}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) \Psi(\{x'\}, 0), \quad (6.13)$$

onde a função de  $\mathcal{G}(\{x\}, t | \{x'\}, t')$  é definida por

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} \right) \mathcal{G}(\{x\}, t | \{x'\}, t') = 0, \quad (6.14)$$

com condição inicial antisimétrica

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\{x\}, 0 | \{x'\}, 0) &= \frac{1}{N! w_N(\{x\})} \sum_{P \in S_N} (-1)^P \prod_{i=1}^N \delta(x_i - x'_{P(i)}) \\ &= \frac{1}{N! w_N(\{x\})} \det[\delta(x_i - x'_j)]_{i,j=1,\dots,N} \\ &= \frac{1}{N!} \det \left[ \frac{\delta(x_i - x'_j)}{\sqrt{w(x_i)w(x'_j)}} \right]_{i,j=1,\dots,N}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Comparando (6.10) com (6.13) e usando a transformação (6.4), obtemos a seguinte

relação entre a probabilidade de transição e a função de Green

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = e^{-E_0 t} w_N(\{x\}) \left( \frac{J_\beta(\{x\})}{J_\beta(\{x'\})} \right)^{1/2} \text{sign} \left( \frac{\Delta_N(\{x\})}{\Delta_N(\{x'\})} \right) \mathcal{G}(\{x\}, \{x'\}; t). \quad (6.16)$$

O problema estará completamente resolvido se encontrarmos a função de Green de  $N$  férmions. Este cálculo pode ser feito exatamente para o caso particular  $\beta = 2$ , como demonstraremos na próxima seção. Vale salientar que outras atribuições para a estatística das partículas interagentes tem sido usadas na literatura. Em particular para valores racionais,  $\beta = p/q$ , é possível atribuir estatísticas fracionárias (anyons) de modo que o sistema forme um gás livre [45].

## 6.2 Solução exata para $\beta = 2$

Para o ensemble unitário ( $\beta = 2$ ) o termo de interação de dois corpos anula-se, reduzindo o sistema a um gás de férmions livres e  $\mathcal{H}$  a uma soma de hamiltonianos de uma partícula  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N H_{x_i}$ , onde

$$H_x = -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left( w(x) s(x) \frac{d}{dx} \right). \quad (6.17)$$

O hamiltoniano de uma partícula satisfaz a equação de autovalor

$$H_x \varphi_n(x) = \epsilon_n \varphi_n. \quad (6.18)$$

As funções de onda são os polinômios ortogonais, devidamente normalizados, associados ao peso  $w(x)$ , e satisfazem as condições de ortogonalidade e completeza

$$\int_a^b dx w(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) = \delta_{n,m}, \quad (6.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}. \quad (6.20)$$

As respectivas autoenergias são dadas por

$$\epsilon_n = s_2 n^2 + (r_1 - s_2)n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.21)$$

A função de Green de uma partícula  $g(x, t|y, t')$ , definida pelo problema de valor inicial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\right)g(x, t|y, t') = 0; \quad g(x, t|y, t) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}, \quad (6.22)$$

tem decomposição espectral

$$g(x, t|y, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(y)e^{-\epsilon_n(t-t')}. \quad (6.23)$$

De (6.15) e (6.22), a função de Green de  $N$ -férmions  $\mathcal{G}$  torna-se um determinante de Slater com funções de uma partícula  $g(x_i, t|x_j, 0)$  nas entradas

$$\mathcal{G}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = \frac{1}{N!} \det[g(x_i, t|x'_j, 0)]_{i,j=1,\dots,N}. \quad (6.24)$$

Obtemos portanto uma forma fatorada simples para a probabilidade de transição

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = \frac{e^{-E_0 t}}{N!} \frac{\Delta(\{x\})}{\Delta(\{x'\})} w_N(\{x\}) \det[g(x_i, t|x'_j, 0)]_{i,j}, \quad (6.25)$$

onde

$$E_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_n. \quad (6.26)$$

A equação (6.25) é formalmente equivalente à solução da integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, que aparece naturalmente como a amplitude de propagação para a equação de difusão associada aos autovalores de uma matriz hermitiana [123, 5].

### 6.3 Funções de Correlação: Método das Funções Biortogonais

O objeto de interesse central na TMA é a função de correlação de  $n$ -pontos

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_a^b dx_{n+1} \dots \int_a^b dx_N P(\{x\}, t), \quad (6.27)$$

que está relacionada a médias de observáveis em vários modelos de matrizes aleatórias. Para os ensembles de equilíbrio, estas funções de correlação estão disponíveis na literatura [1], sendo obtidas pelo o método dos polinômios ortogonais no caso unitário e, nos casos ortogonal e simplético, pelo método de polinômios anti-ortogonais. No entanto, para os ensembles fora do equilíbrio estudados nesta tese, o cálculo destas funções de correlação torna-se um problema não trivial. Um exemplo desta complexidade é a equação de movimento obtida na seção 4.3.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = & \sum_{p=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_p} \left( s(x_p) w_N J_\beta \frac{\partial}{\partial x_p} (w_N J_\beta)^{-1} \right) \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) \right. \\ & \left. - \beta \frac{\partial}{\partial x_p} s(x_p) \mathcal{P} \int \frac{\rho_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; t)}{x_p - x_{n+1}} dx_{n+1} \right\}, \quad (6.28) \end{aligned}$$

que mostra uma complicada relação hierárquica entre as funções de correlação, onde a equação de movimento de  $\rho_1(x; t)$  depende de  $\rho_2(x_1, x_2; t)$ , a equação de movimento de  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  depende de  $\rho_3(x_1, x_2, x_3; t)$ , e assim por diante. Soluções aproximadas podem ser obtidas quebrando-se a hierarquia. Por exemplo, escrevendo  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  em função de  $\rho_1(x_1; t)$  e  $\rho_1(x_2; t)$ , como na aproximação de Dyson [90].

Expressões exatas para funções de correlação de ensembles fora de equilíbrio foram obtidas na ref. [121] no estudo de transições graduais entre os ensembles circulares ortogonal e unitário. Também foram obtidas no contexto dos ensembles unitários da equação DMPK [111, 65] com o auxílio do método das funções biortogonais desenvolvido na ref. [127]. A idéia do método das funções biortogonais é explorar a estrutura determinantal para uma certa classe de condições iniciais da

solução da equação de Fokker-Planck, tentando escrevê-la na forma

$$P(\{x\}, t) = C_N \det[K(x_i, x_j; t)]_{i,j=1,\dots,N}, \quad (6.29)$$

de modo que o núcleo  $K(x, y; t)$  satisfaça as condições

$$\int_a^b dx K(x, x; t) = N \quad (6.30)$$

$$\int_a^b dz K(x, z; t) K(z, y; t) = K(x, y; t), \quad (6.31)$$

e  $C_N$  é uma constante. Note que estas condições são as mesmas requeridas pelo teorema 2.1, portanto, se tal função existir, então a constante será  $C_N = 1/N!$  e a função de correlação poderá se escrita como

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n; t) = \det[K(x_i, x_j; t)]_{i,j=1,\dots,n}. \quad (6.32)$$

Nesta seção faremos a construção deste núcleo usando uma generalização do método das funções biortogonais usado na ref.[32] no contexto da equação DMPK do ensemble quiral unitário.

### 6.3.1 Sistema biortogonal

Considere a equação diferencial

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - H_x \right) \chi(x, t) = 0, \quad (6.33)$$

onde  $H_x$  é definido em (6.17), e possui um conjunto completo de autofunções integráveis em  $[a, b]$  com peso  $w(x)$ . A solução geral de (6.33) pode ser escrita como

$$\chi(x, t) = \int_a^b dy w(y) g(x, t|y, 0) \chi(y, 0), \quad (6.34)$$

onde  $g(x, t|y, t')$  é a função de Green com decomposição espectral (6.23). Considere

a equação diferencial obtida de (6.33) pela transformação  $t \rightarrow -t$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\right)\psi(x, t) = 0, \quad (6.35)$$

que corresponde a uma reversão temporal. Sua função de Green,  $\tilde{g}$ , relaciona-se com a função  $g$  através de  $\tilde{g}(x, t|x', t') = g(x', t'|x, t)$ . Impondo as condições iniciais

$$\chi_m(x, 0) = \frac{\delta(x - x'_{m+1})}{w(x)}, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.36)$$

$$\psi_n(x, 0) = f_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (6.37)$$

encontramos as respectivas soluções

$$\chi_m(x, t) = g(x, t|x'_{m+1}, 0), \quad (6.38)$$

$$\psi_n(x, t) = \int_a^b dy w(y) g(y, 0|x, t) f_n(y, 0). \quad (6.39)$$

Definimos a matriz de “produto escalar” destas soluções por

$$F_{n,m}(t) = \int_a^b dx w(x) \psi_n(x, t) \chi_m(x, t). \quad (6.40)$$

Usando as definições das funções  $\psi_n(x, t)$  e  $\chi_m(x, t)$  encontramos

$$F_{n,m}(t) = \int_a^b dy w(y) f_n(y) \int_a^b dx w(x) g(y, 0|x, t) g(x, t|x'_{m+1}, 0). \quad (6.41)$$

A integral em  $x$  mostra uma composição de funções de Green (propagadores) que leva o sistema de  $t = 0$  para um tempo arbitrário  $t$  e depois de volta para  $t = 0$ . Usando a regra de composição de propagadores [128] temos

$$\int_a^b dx w(x) g(y, 0|x, t) g(x, t|x'_{m+1}, 0) = g(y, 0|x'_{m+1}, 0) = \frac{\delta(y - x'_{m+1})}{w(y)}. \quad (6.42)$$

Portanto, a matriz de superposição é independente do tempo e depende apenas da

escolha da função  $f_n(x)$

$$F_{n,m}(t) = F_{n,m} = f_n(x'_{m+1}). \quad (6.43)$$

Escolhendo convenientemente  $f_n(x)$  como o polinômio interpolador de Lagrange

$$f_n(x) = L_{n+1}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{N-1} \frac{x - x'_{l+1}}{x'_{n+1} - x'_{l+1}}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (6.44)$$

obtemos uma matriz diagonalizada

$$F_{n,m} = \delta_{n,m}. \quad (6.45)$$

Portanto o conjunto de funções  $\psi_n(x, t)$  e  $\chi_m(x, t)$  forma um sistema biortogonal

$$\int_a^b dx w(x) \psi_n(x, t) \chi_m(x, t) = \delta_{n,m}. \quad (6.46)$$

### 6.3.2 Construção do núcleo

O ponto de partida é a solução (6.25). Escrevendo  $\Delta_N(\{x\})$  como um determinante de Vandermonde

$$\Delta(\{x\}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) = \det(x_i^{j-1})_{i,j=1,\dots,N} \quad (6.47)$$

podemos reescrever a equação (6.25) na forma

$$\mathcal{P}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) = \frac{1}{N!} w_N(\{x\}) \frac{\det[\phi_{j-1}(x_k, t)]_{jk} \det[\chi_{j-1}(x_k, t)]_{jk}}{\det[\phi_{j-1}(x'_k, 0)]_{jk}}, \quad (6.48)$$

onde definimos as funções

$$\phi_n(x, t) = x^n e^{-\varepsilon_n t}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (6.49)$$

$$\chi_m(x, t) = g(x, t | x'_{m+1}, 0), \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (6.50)$$

Note que os fatores  $e^{-E_0 t} = \prod_{n=0}^{N-1} e^{-\varepsilon_n t}$  foram incorporados na matriz  $\phi_{i-1}(x_j, t)$ . Além disso, com auxílio das identidades

$$\begin{aligned}\phi_{j-1}(x'_k) &= \int_a^b dx \phi_{j-1}(x) \delta(x - x'_k) \\ &= \int_a^b dx w(x) \phi_{j-1}(x) g(x, 0|x'_k, 0) \\ &= \int_a^b dx w(x) \phi_{j-1}(x) \chi_{k-1}(x, 0),\end{aligned}\quad (6.51)$$

podemos reescrever a eq. (6.48) na forma

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = \frac{1}{N!} w_N(\{x\}) \frac{\det[\phi_{j-1}(x_k, t)]_{jk} \det[\chi_{j-1}(x_k, t)]_{jk}}{\det \left[ \int_a^b dx w(x) \phi_{j-1}(x, 0) \chi_{k-1}(x, 0) \right]_{jk}}. \quad (6.52)$$

Esta decomposição não é única. Como o determinante não se altera, a menos de uma constante de normalização, quando efetuamos operações elementares sobre as linhas, temos liberdade para trocar as funções  $\phi_j$  por certas combinações lineares. Com esta liberdade podemos escolher o novo conjunto de funções

$$\phi_n(x, t) \rightarrow \psi_n(x, t) = \int_a^b dy w(y) L_{n+1}(y) g(y, 0|x, t), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.53)$$

e escrever a probabilidade de transição em termos do conjunto biortogonal construído na seção anterior.

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = C_N w_N(\{x\}) \frac{\det[\psi_{j-1}(x_k, t)]_{jk} \det[\chi_{j-1}(x_k, t)]_{jk}}{\det \left[ \int_a^b dx w(x) \psi_{j-1}(x, 0) \chi_{k-1}(x, 0) \right]_{jk}}. \quad (6.54)$$

Note que a integral resultante no denominador é exatamente a integral (6.46), portanto o denominador reduz-se ao determinante da matriz identidade:  $\det[\delta_{jk}] = 1$ . Desta forma, a probabilidade de transição é escrita como o produto de dois determinantes

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x'\}, 0) = C_N w_N(\{x\}) \det[\psi_{j-1}(x_k, t)]_{j,k} \det[\chi_{j-1}(x_k, t)]_{k,j}. \quad (6.55)$$

Finalmente, assim como o fator  $e^{-E_0 t}$ , o peso  $w_N(\{x\}) = \prod_{i=1}^N w(x_i)$  também pode ser inserido no primeiro determinante multiplicando-se a  $k$ -ésima coluna da matriz pela função  $w(x_k)$ . Desta forma

$$\mathcal{P}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) = C_N \det[\psi_{j-1}(x_k, t) w(x_k)]_{j,k=1,\dots,N} \det[\chi_{j-1}(x_k, t)]_{k,j=1,\dots,N}. \quad (6.56)$$

Como a transposição de uma matriz não altera o seu determinante e o produto de dois determinantes é igual ao determinante do produto das respectivas matrizes, podemos reescrever a eq. (6.56) na forma

$$\mathcal{P}(\{x\}, t | \{x'\}, 0) = C_N \det[K(x_i, x_j; t)]_{i,j=1,\dots,N}, \quad (6.57)$$

onde o núcleo é dado por

$$K(x, y; t) = w(x) \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(x, t) \chi_n(y, t). \quad (6.58)$$

O fato das funções  $\psi_n(x, t)$  e  $\chi_n(x, t)$  formarem um sistema biortogonal garante a validade das propriedades (6.30) e (6.31). Usando as definições destas funções podemos escrever o núcleo em termos das funções de Green de uma partícula

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= w(x) \sum_{n=0}^{N-1} g(x, t | x'_{n+1}, 0) \int_a^b d\xi w(\xi) L_{n+1}(\xi) g(\xi, 0 | y, t). \\ &= w(x) \int_a^b d\xi w(\xi) g(\xi, 0 | y, t) \sum_{n=1}^N L_n(\xi) g(x, t | x'_n, 0). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Usando a fórmula integral de Cauchy podemos reescrever (6.59) na forma

$$K(x, y; t) = w(x) \int_a^b d\xi w(\xi) g(\xi, 0 | y, t) \sum_{n=1}^N \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{L_n(\xi) g(x, t | z, 0)}{z - x'_n}, \quad (6.60)$$

onde a integral engloba o ponto  $x'_n$  no plano complexo. O núcleo obtido na ref.[32] também envolve o polinômio interpolador de Lagrange, o que não é muito eficiente na

realização de cálculos explícitos. Nós eliminamos esta dependência com o auxílio da identidade

$$\Omega(x, z) \equiv \prod_{l=1}^N \frac{x - x'_l}{z - x'_l} = 1 - (z - x) \sum_{n=1}^N \frac{L_n(x)}{z - x'_n}, \quad (6.61)$$

o que permite escrever o núcleo em termos de duas integrais acopladas envolvendo apenas as funções de Green de uma partícula

$$K(x, y; t) = w(x) \int_a^b d\xi w(\xi) \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{g(x, t|z, 0) g(\xi, 0|y, t)}{z - \xi} (1 - \Omega(\xi, z)). \quad (6.62)$$

Este é o resultado principal deste capítulo. Em particular, para condições iniciais homogêneas, i.e.,  $x'_n = x_0, \forall n$ , podemos usar a identidade

$$\Omega(\xi, z) = \left( \frac{\xi - x_0}{z - x_0} \right)^N = 1 - (z - \xi) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\xi - x_0)^l}{(z - x_0)^{l+1}}. \quad (6.63)$$

Desta forma, as integrais fatoram e o núcleo (6.62) simplifica para

$$K(x, y; t) = w(x) \sum_{l=0}^{N-1} I_l J_l, \quad (6.64)$$

onde

$$I_l = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{g(x, t|z, 0)}{(z - x_0)^{l+1}} \quad (6.65)$$

$$J_l = \int_a^b d\xi w(\xi) (\xi - x_0)^l g(\xi, 0|y, t). \quad (6.66)$$

Se o cálculo das integrais sobre as funções de Green não for conveniente, pode-se usar a decomposição espectral (6.23) diretamente nas integrais (6.65) e (6.66) e escrever

o núcleo na forma

$$K(x, y; t) = w(x) \sum_{l=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} b_{ln} \psi_n(x) \psi_n(y) + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} a_{nl} b_{lm} \psi_n(x) \psi_m(y) e^{-(\epsilon_n - \epsilon_m)t} \right) \quad (6.67)$$

onde os novos coeficientes  $a_{nl}$  e  $b_{ln}$  são dados por

$$a_{nl} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\psi_n(z)}{(z - x_0)^{l+1}} \quad (6.68)$$

$$b_{ln} = \int_a^b d\xi w(\xi) (\xi - x_0)^l \psi_n(\xi), \quad (6.69)$$

que são as mesmas integrais, mas com os polinômios clássicos em vez das funções de Green. Na próxima seção apresentamos aplicações das fórmulas acima para os ensembles de Hermite, Laguerre e Jacobi.

## 6.4 Aplicações

### 6.4.1 Ensemble de Hermite

Da tabela 6.1 vemos que  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ,  $s(x) = 1$  e  $w(x) = e^{-x^2}$ . O hamiltoniano de uma partícula é dado por

$$H_x = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}, \quad (6.70)$$

cujas autofunções são polinômios de Hermite normalizados

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad (6.71)$$

com autoenergias  $\epsilon_n = 2n$ . Portanto, a função de Green de uma partícula fica

$$g(x, t|y, t') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) e^{-2n(t-t')}. \quad (6.72)$$

Esta soma pode ser executada explicitamente [112], resultado em

$$g(x, t|y, t') = \frac{e^{x^2} \alpha_1(\tau)}{\sqrt{\pi}} \exp[-\alpha_1^2(\tau)(x - \alpha_0(\tau)y)^2], \quad (6.73)$$

onde  $\tau = t - t'$  e as funções  $\alpha_0(t)$  e  $\alpha_1(t)$  são dadas por

$$\alpha_0(t) = e^{-2t}, \quad (6.74)$$

$$\alpha_1(t) = 1/\sqrt{1 - e^{-4t}}. \quad (6.75)$$

É conveniente trabalhar com a forma fechada da função de Green. Neste caso o núcleo é dado pela eq. (6.64) com coeficientes dados pelas integrais simples

$$I_l = \frac{e^{x^2} \alpha_1(t)}{\sqrt{\pi}} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{-\alpha_1^2(t)(x - \alpha_0(t)z)^2}}{(z - x_0)^{l+1}} \quad (6.76)$$

$$J_l = \frac{\alpha_1(-t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (\xi - x_0)^l e^{-\alpha_1^2(-t)(\xi - \alpha_0(-t)y)^2}. \quad (6.77)$$

A primeira integral é resolvida usando a transformação  $z \rightarrow x_0 + \frac{z}{\alpha_0(t)\alpha_1(t)}$  e fazendo uso da representação integral do polinômio de Hermite

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{l!}{z^{l+1}} e^{-(z-x)^2} = e^{-x^2} H_l(x),$$

resultando em

$$I_l = \frac{e^{x^2} \alpha_0^l(t) \alpha_1^{l+1}(t)}{l! \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha_1^2(t)(x - \alpha_0(t)x_0)^2) H_l(\alpha_1(t)(x - \alpha_0(t)x_0)). \quad (6.78)$$

A segunda integral é resolvida de modo similar. Primeiro, aplicamos a transformação de escala  $\xi \rightarrow x_0 + \frac{\xi}{\alpha_1(-t)}$ , depois eliminamos o argumento negativo em  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  usando as identidades

$$\alpha_0(-t) = 1/\alpha_0(t) \quad (6.79)$$

$$\alpha_1(-t) = -i\alpha_0(t)\alpha_1(t) \quad (6.80)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ . Finalmente usamos a representação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi}} (2i\xi)^l e^{-(\xi+ix)^2} = H_l(x) \quad (6.81)$$

para obter o resultado

$$J_l = \frac{1}{(2\alpha_0(t)\alpha_1(t))^l} H_l(\alpha_1(t)(y - \alpha_0(t)x_0)). \quad (6.82)$$

Substituindo as eqs. (6.78) e (6.82) na eq. (6.64) obtemos

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= \frac{\alpha_1(t)}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha_1^2(t)(x - \alpha_0(t)x_0)^2) \\ &\times \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{2^l l!} H_l(\alpha_1(t)(x - \alpha_0(t)x_0)) H_l(\alpha_1(t)(y - \alpha_0(t)x_0)). \end{aligned} \quad (6.83)$$

A soma sobre os polinômios de Hermite pode ser realizada usando-se a fórmula de Christoffel-Darboux [112]. Desta forma, obtemos a expressão final para o núcleo

$$K(x, y; t) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi} 2^N (N-1)!} \frac{H_N(\xi)H_{N-1}(\eta) - H_{N-1}(\xi)H_N(\eta)}{x - y} \quad (6.84)$$

onde definimos  $\xi = \alpha_1(t)(x - \alpha_0(t)x_0)$  e  $\eta = \alpha_1(t)(y - \alpha_0(t)x_0)$ .

Este resultado é equivalente ao obtido por Baker-Forrester [72]. Para o ensemble de Hermite no caso  $\beta = 2$  esses autores encontraram, na notação desta seção, o seguinte resultado para a amplitude de propagação com condições iniciais homogêneas

$$\mathcal{P}(\{x\}, t|\{x_0\}, 0) = A_N [\alpha_1(t)]^{N^2} (\Delta_N(\{x\}))^2 \exp\left(-\alpha_1^2(t) \sum_{j=1}^N (x_j - \alpha_0(t)x_0)^2\right), \quad (6.85)$$

onde  $A_N$  é uma constante. Esta expressão pode facilmente ser colocada na forma (6.84) com uma adaptação do método de polinômios ortogonais.

### 6.4.2 Ensemble de Laguerre

Da tabela 6.1 temos  $a = 0$ ,  $b = \infty$ ,  $s(x) = x$  e a função peso é  $w(x) = x^\nu e^{-x}$ , com  $\nu > -1$ . O hamiltoniano fica

$$H_x = -x \frac{d^2}{dx^2} - (1 + \nu - x) \frac{d}{dx}, \quad (6.86)$$

cujas funções de onda são polinômios de Laguerre normalizados

$$\psi_n(x) = \left( \frac{n!}{\Gamma(n + \nu + 1)} \right)^{1/2} L_n^\nu(x) \quad (6.87)$$

com autoenergias  $\epsilon_n = n$ . Portanto a função de Green de uma partícula fica

$$g(x, t|y, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(1 + \nu)} L_n^\nu(x) L_n^\nu(y) e^{-n(t-t')}. \quad (6.88)$$

Como no caso Hermite, esta soma pode ser realizada [112] resultando em

$$g(x, t|y, t') = \frac{\alpha^{-(1+\nu)}(\tau)}{\Gamma(1 + \nu)} \exp[(1 - \alpha(\tau))(x + y)] {}_0F_1(1 + \nu; \alpha(\tau)(\alpha(\tau) - 1)xy), \quad (6.89)$$

onde  $\alpha(t) = \frac{1}{1 - e^{-t}}$  e  $\tau = t - t'$ . Como no caso anterior podemos escolher trabalhar com a forma fechada (6.89) em vez da expansão (6.88). Neste caso o núcleo é dado pela soma (6.64) com coeficientes dados por

$$I_l = \frac{\alpha^{-(1+\nu)}(\tau)}{\Gamma(1 + \nu)} e^{[1 - \alpha(\tau)]x} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{(1 - \alpha(\tau))z} {}_0F_1(1 + \nu; \alpha(\tau)(\alpha(\tau) - 1)xz)}{z^{l+1}} \quad (6.90)$$

$$J_l = \frac{\alpha^{-(1+\nu)}(-\tau)}{\Gamma(1 + \nu)} e^{[1 - \alpha(-\tau)]y} \int_0^\infty d\xi \xi^{\nu+l} e^{-\alpha(-\tau)\xi} {}_0F_1(1 + \nu; \alpha(-\tau)(\alpha(-\tau) - 1)\xi y). \quad (6.91)$$

Para resolver a primeira integral realizamos a transformação de escala  $z \rightarrow z/(1 - \alpha(\tau))$ . Em seguida usamos a representação integral dos polinômios

de Laguerre

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^z {}_0F_1(1 + \nu; -xz)}{z^{l+1}} = \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(l + \nu + 1)} L_l^\nu(x), \quad (6.92)$$

levando a

$$I_l = \frac{\alpha^{1+\nu}(t)(1 - \alpha(t))^l}{\Gamma(l + \nu + 1)} e^{(1-\alpha(t))x} L_l^\nu(\alpha(t)x). \quad (6.93)$$

A segunda integral é resolvida através da transformação de escala  $\xi \rightarrow \xi/\alpha(-t)$  seguida da substituição  $\alpha(-t) = 1 - \alpha(t)$ . Finalmente, usando a representação integral

$$\int_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^{\nu+l} {}_0F_1(1 + \nu; -\xi x) = l! \Gamma(\nu + 1) e^{-x} L_l^\nu(x), \quad (6.94)$$

obtemos

$$J_l = \frac{l!}{(1 - \alpha(t))^l} L_l^\nu(\alpha(t)y). \quad (6.95)$$

Substituindo a eq. (6.93) e a eq. (6.95) na eq. (6.64) obtemos

$$K(x, y; t) = \alpha(t)(\alpha(t)x)^\nu e^{-\alpha(t)x} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{l!}{\Gamma(l + \nu + 1)} L_l^\nu(\alpha(t)x) L_l^\nu(\alpha(t)y). \quad (6.96)$$

Esta soma também pode ser realizada através da identidade de Christoffel-Darboux, resultando em

$$K(x, y; t) = \frac{N! e^{-\alpha(t)x}}{\Gamma(N + \nu)} (\alpha(t)x)^\nu \frac{L_{N-1}^\nu(\alpha(t)x) L_N^\nu(\alpha(t)y) - L_N^\nu(\alpha(t)x) L_{N-1}^\nu(\alpha(t)y)}{x - y}. \quad (6.97)$$

Este resultado é equivalente ao obtido por Baker-Forrester [72]. Para o ensemble de Laguerre no caso  $\beta = 2$  e condições iniciais homogêneas  $x'_n = 0, \forall n$ , o resultado deles pode ser escrito, na notação desta seção, na forma

$$\mathcal{P}(\{x\}, t | \{x_0\}, 0) = B_N [\alpha(t)]^N [\Delta_N(\{\alpha(t)x\})]^2 \prod_{i=1}^N [\alpha(t)x_i]^\nu e^{-\alpha(t)x_i}, \quad (6.98)$$

onde  $B_N$  é uma constante. Esta expressão pode facilmente ser colocada na forma

(6.97) com uma adaptação do método de polinômios ortogonais.

### 6.4.3 Ensemble de Jacobi

Da tabela 6.1 temos que  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $s(x) = 1 - x^2$  e  $w(x) = (1 - x)^\nu(1 + x)^\mu$ . O hamiltoniano de uma partícula é dado por

$$H_x = -(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} + (\nu - \mu + (\nu + \mu + 2)x) \frac{d}{dx}, \quad (6.99)$$

cujas autofunções são polinômios de Jacobi normalizados

$$p_n(x) = c(n, \nu, \mu) P_n^{(\nu, \mu)}(x), \quad (6.100)$$

onde

$$c(n, \nu, \mu) = \left( \frac{(2n + \nu + \mu + 1) n! \Gamma(n + \nu + \mu + 1)}{2^{\nu + \mu + 1} \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(n + \mu + 1)} \right)^{1/2}, \quad (6.101)$$

com autoenergias  $\epsilon_n = n(n + \nu + \mu + 1)$ . A função de Green de uma partícula fica

$$\begin{aligned} g(x, t|y, t') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + \nu + \mu + 1) n! \Gamma(n + \nu + \mu + 1)}{2^{\nu + \mu + 1} \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(n + \mu + 1)} \\ &\times P_n^{(\nu, \mu)}(x) P_n^{(\nu, \mu)}(y) e^{-n(n + \nu + \mu + 1)(t - t')} \end{aligned} \quad (6.102)$$

Diferentemente dos casos Hermite e Laguerre, não há uma fórmula de soma para os polinômios de Jacobi e a função de Green (6.102) não pode ser escrita numa forma fechada. Neste caso usamos a fórmula (6.67)

$$\begin{aligned} k(x, y; t) &= (1 - x)^\nu(1 + x)^\mu \\ &\times \left( \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{nn} c^2(n, \nu, \mu) P_n^{(\nu, \mu)}(x) P_n^{(\nu, \mu)}(y) \right. \\ &\left. + \sum_{m \neq n} \kappa_{nm} c(n, \nu, \mu) c(m, \nu, \mu) P_n^{(\nu, \mu)}(x) P_m^{(\nu, \mu)}(y) e^{-(\epsilon_n - \epsilon_m)t} \right) \end{aligned} \quad (6.103)$$

onde

$$\kappa_{nm} = \sum_{l=0}^{N-1} a_{nl} b_{lm}$$

com coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_{nl} &= c(n, \nu, \mu) \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{P_n^{(\nu, \mu)}(x)}{(z)^{l+1}} \\ &= \frac{c(n, \nu, \mu)}{2^n l!} \frac{\Gamma(l+n+\nu+\mu+1)\Gamma(1+n+\nu)}{\Gamma(n+\nu+\mu+1)\Gamma(1+n-l)\Gamma(1+\nu+l)} \\ &\times {}_2F_1(-n+l, -n-\mu; 1+\nu+l; -1)\theta(n-l) \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\begin{aligned} b_{ln} &= c(n, \nu, \mu) \int_1^1 dx (1-x)^\nu (1+x)^\mu x^l P_n^{(\nu, \mu)}(x) \\ b_{ln} &= \frac{c(n, \nu, \mu)\Gamma(1+l)}{2^n} \theta(l-n) \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k \binom{\nu+k}{n-k} \binom{\mu+k}{k} \right. \\ &\times \left[ \frac{\Gamma(1+\nu+k)}{\Gamma(2+l+\nu+k)} {}_2F_1(-\nu-n+k, 1+l; 2+l+\nu+k; -1) \right. \\ &\left. \left. + \frac{(-1)^l \Gamma(1+\nu+n-k)}{\Gamma(2+l+\mu+n-k)} {}_2F_1(-\nu-k, 1+l; 2+l+\mu+n-k; -1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Onde  $\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y-x+1)}$  é o coeficiente binomial e  $\theta(x)$  a função degrau de Heaviside.

Vale ressaltar que o método de funções biortogonais aqui desenvolvido também pode ser aplicado no cálculo das funções de correlação para a equação DMPK nos ensembles unitários das classes Wigner-Dyson, quiral e DMPK. O grande desafio passa a ser a generalização dos métodos aqui desenvolvidos para os demais ensembles com  $\beta \neq 2$ . Esta é uma tarefa não trivial pois corresponde a resolver o problema de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber para classes diferentes da unitária. Uma ferramenta promissora para estas extensões são os polinômios de Jack deformados, ainda em desenvolvimento. Propriedades destes polinômios poderiam ser obtidas através de uma extensão do método de Gurappa. Também serviriam como base para construção de deformações dos polinômios clássicos generalizados. Uma formulação in-

dependente para o problema pode ser obtida com uso do método da supersimetria. Cálculo dos superdeterminantes e das superintegrais resultantes desta formulação podem ser implementados em softwares de computação algébrica. Atualmente estamos criando num pacote Maple com esses recursos. Acreditamos que a formulação do problema de, pelo menos, duas maneiras diferentes produzirá avanços no seu entendimento.

# Capítulo 7

## Teoria de circuitos

Vimos que a teoria de transporte em física mesoscópica é baseada no formalismo da matriz de espalhamento de Landauer-Büttiker, que na ausência de interação, fornece uma descrição completa da dinâmica eletrônica em condutores coerentes que inclui a condutância elétrica e a potência do ruído de disparo. Este por sua vez, está associado à discreteza da carga do elétron e contém importantes informações sobre correlações eletrônicas que não são acessíveis por medidas de condutância. Conhecendo todos os cumulantes da corrente que passa pelo sistema podemos determinar a estatística de contagem de carga transmitida, ou seja podemos calcular a probabilidade de que  $N$  elétrons sejam transmitidos num dado tempo  $t_0$ . A teoria microscópica para a obtenção da estatística de contagem de carga foi formulada por Levitov e Lesovik [129, 130]. Estes autores introduzem uma variável de spin acoplada ao campo magnético gerado pela corrente de modo que o ângulo de precessão do spin seja proporcional ao número de cargas que passam pelo sistema no tempo de observação  $t_0$ . O modelo de galvanômetro de spin tem dois avanços conceituais: A primeira é a introdução de um mecanismo de medição no formalismo. A segunda é que o processo de medição é estendido no tempo, contrastando com a prescrição usual de colapso instantâneo da função de onda num auto estado do observável.

A prescrição de Levitov-Lesovik permitiu o aparecimento de predições teóricas para a estatística de contagem de carga em nanodispositivos reais. Em particular,

destacamos as contribuições de Nazarov que incorporou a informação sobre o processo de medição na linguagem de funções de Green de Keldysh. Na aproximação semiclássica, i.e. desprezando contribuições devido à interferência quântica, o formalismo de Keldysh leva a uma equação de difusão matricial com condições de contorno não triviais. Nazarov propôs uma discretização do suporte espacial desta equação, preservando certas leis de conservação, que levaram a uma teoria de circuitos com regras de Kirchhoff generalizadas muito similares à teoria clássica de circuitos da engenharia elétrica [131, 132, 133].

A teoria circuitos consiste em dividir o sistema em elementos finitos consistindo de terminais, nós e conectores. Os nós são especificados por funções de Green matriciais e os conectores por correntes matriciais. O cálculo exato das correntes matriciais nos conectores apresenta dificuldades relacionadas à perda de validade das equações de transporte semiclássicas na proximidade de fronteiras e de interfaces, onde os efeitos quânticos tornam-se dominantes. Desta forma, a aplicação da teoria torna-se injustificável em algumas situações. Uma solução para este problema foi dada por Macêdo [134] através da formulação de uma teoria de circuitos escalar onde a corrente para um conector geral é calculada diretamente a partir do modelo sigma não-linear supersimétrico, descrevendo completamente os efeitos quânticos sem a necessidade de hipóteses adicionais para o cálculo de médias sobre a dinâmica caótica subjacente. As duas teorias foram aplicadas com sucesso em várias situações conduzindo aos mesmos resultados [135, 136].

Neste capítulo resumiremos as leis de Kirchhoff que caracterizam as teorias matricial e escalar e as aplicaremos em alguns sistemas de interesse. Em particular estudaremos uma cavidade caótica com contatos assimétricos de transparência arbitrária. Mostraremos que as duas formulações são equivalentes para este problema. Também apresentaremos um cálculo detalhado das distribuições de corrente para este dispositivo.

## 7.1 Estatística de contagem de carga

Na determinação da estatística de contagem de carga estamos interessados na probabilidade  $P_{t_0}(n)$  de que  $n$  cargas sejam transmitidas num intervalo de tempo  $t_0$ . A carga total transmitida no tempo de observação é dada por  $Q = ne = It_0$ , onde  $e$  é carga elementar e  $I$  é a corrente elétrica. É conveniente introduzir a função característica  $\chi(\lambda)$  dada pela série de Fourier

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{t_0}(n) e^{i\lambda n}. \quad (7.1)$$

A função  $\chi(\lambda)$  é  $2\pi$ -periódica no *campo de contagem*  $\lambda$  e deve satisfazer à condição de normalização  $\chi(0) = 1$ . Como veremos a seguir, a função característica pode ser calculada microscopicamente, portanto a probabilidade  $P(n)$  pode ser obtida pelo coeficiente de Fourier

$$P_{t_0}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda) e^{-in\lambda}. \quad (7.2)$$

Em geral estamos interessados nos cumulantes da estatística de contagem. Eles são dados por

$$C_n = -(-i)^n \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} S(\lambda) \right|_{\lambda=0}, \quad (7.3)$$

onde a função geratriz dos cumulantes é obtida a partir da função característica de acordo com

$$S(\lambda) = -\ln \chi(\lambda). \quad (7.4)$$

Na ref. [129] Levitov e Lesovick deduziram a seguinte expressão para um condutor multicanal arbitrário a temperatura nula

$$\chi(\lambda) = \prod_{n=1}^M [1 + \tau_n (e^{i\lambda} - 1)]^M, \quad (7.5)$$

onde  $\tau_n$  são os autovalores de transmissão,  $M = eVt_0/h$  é o número de tentativas de transmissão no tempo de observação  $t_0$ ,  $V$  é tensão aplicada e  $N$  é o número de canais abertos. Fisicamente isto significa que cada canal transmite carga indepen-

dentemente segundo um processo binomial. Os cumulantes podem ser calculados a partir de [137]

$$q_k = \frac{C_k}{M} = \sum_j \left( \tau(1-\tau) \frac{d}{d\tau} \right)^k \tau \Big|_{\tau=\tau_j} \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Desta forma, o primeiro cumulante é a condutância adimensional dada por

$$q_1 = \sum_j \tau_j = g. \quad (7.7)$$

O segundo cumulante é a potência do ruído de disparo adimensional

$$q_2 = \sum_j \tau_j(1-\tau_j) = p. \quad (7.8)$$

Os terceiro e quarto cumulantes são dados respectivamente por

$$q_3 = \sum_j \tau_j(1-\tau_j)(1-2\tau_j) \quad (7.9)$$

$$q_4 = \sum_j \tau_j(1-\tau_j)(1-6\tau_j+6\tau_j^2) \quad (7.10)$$

## 7.2 Teoria matricial

Nesta seção apresentaremos os elementos para o uso prático da teoria de circuitos matricial de Nazarov. Nesta teoria o sistema é dividido em terminais, nós e conectores. Os terminais são as conexões do sistema a um circuito externo e especificam condições de contorno como, por exemplo, a voltagem aplicada. O circuito propriamente dito é representado por nós e conectores. A seguir listaremos as leis de Kirchhoff para este circuito bem como as regras para a construção da função geratriz de cumulantes:

- (i) Separe o sistema em terminais, nós e conectores

(ii) A função de Green  $\check{G}_k$  em cada terminal é fixada por

$$\check{G}_k(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - 2f_k(\epsilon) & -2f_k(\epsilon) \\ -2(1 - f_k(\epsilon)) & 2f_k(\epsilon) - 1 \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

onde

$$f_k(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - eV_k)/k_B T} + 1} \quad (7.12)$$

é a distribuição de Fermi nos terminais. A presença do campo de contagem,  $\lambda$ , modifica  $\check{G}_k(\epsilon)$  de acordo com

$$\check{G}_k(\epsilon, \lambda_k) = e^{i\lambda_k \check{\sigma}_3/2} \check{G}_k(\epsilon) e^{-i\lambda_k \check{\sigma}_3/2}, \quad (7.13)$$

onde

$$\check{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad e^{i\lambda \check{\sigma}_3/2} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda/2} \end{pmatrix}.$$

Note que as funções de Green dos terminais incorporam as condições de contorno fornecendo informações sobre voltagem, temperatura e campo de contagem.

(iii) O conector  $(i, j)$ , elemento do circuito que liga os nós  $i$  e  $j$ , é caracterizado pelo conjunto de autovalores de transmissão  $\tau_n^{(i,j)}$ . As propriedades de transporte estão contidas na corrente matricial

$$\check{I}_{ij} = \sum_n \frac{\tau_n^{(i,j)} [\check{G}_i, \check{G}_j]}{4 + \tau_n^{(i,j)} (\{\check{G}_i, \check{G}_j\} - 2)}. \quad (7.14)$$

A corrente matricial em cada nó é conservada

$$\sum_i \check{I}_{ik} = 0. \quad (7.15)$$

(iv) A solução das equações resultantes com a condição  $\check{G}_k^2 = 1$  fixa a função de Green  $\check{G}_k$  para cada nó.

(v) A função geratriz de cumulantes  $S(\vec{\lambda})$  é obtida pela soma das contribuições de cada conector  $S(\vec{\lambda}) = \sum_{ij} S_{ij}(\lambda)$ , onde

$$S_{ij}(\lambda) = -\frac{t_0}{2h} \sum_n \int d\epsilon \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{4} T_n^{(i,j)} (\{G_i, G_j\} - 2) \right) \right]. \quad (7.16)$$

(vi) A estatística da transferência de elétrons é dada por

$$P(\vec{n}) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_i \frac{\lambda_i}{2\pi} e^{-S(\vec{\lambda}) - i\vec{n} \cdot \vec{\lambda}}, \quad (7.17)$$

que é uma generalização multidimensional da equação (7.2).

## 7.2.1 Representação Vetorial

As funções de Green matriciais têm traço nulo e podem ser parametrizadas na forma de um produto escalar

$$\check{G}_j = \vec{g}_j \cdot \vec{\sigma} \quad (7.18)$$

onde  $\vec{g}_j = g_{j,1}\hat{e}_1 + g_{j,2}\hat{e}_2 + g_{j,3}\hat{e}_3$  é um vetor 3D com o vínculo  $\vec{g}_j \cdot \vec{g}_j = 1$  e  $\vec{\sigma} = \check{\sigma}_1\hat{e}_1 + \check{\sigma}_2\hat{e}_2 + \check{\sigma}_3\hat{e}_3$  é um vetor com componentes dadas pelas matrizes de Pauli

$$\check{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \check{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

As componentes do vetor  $\vec{g}_j$  são dadas por

$$g_{j,1} = -(e^{i\lambda_j} f_j + e^{-i\lambda_j} (1 - f_j)), \quad (7.20)$$

$$g_{j,2} = -i(e^{i\lambda_j} f_j - e^{-i\lambda_j} (1 - f_j)), \quad (7.21)$$

$$g_{j,3} = 1 - 2f_j. \quad (7.22)$$

Nesta parametrização o anticomutador e o comutador que aparecem na definição da corrente matricial (7.14) são dados por

$$\{\check{G}_i, \check{G}_j\} = 2\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \quad (7.23)$$

$$[\check{G}_i, \check{G}_j] = 2i\vec{\sigma} \cdot (\vec{g}_i \times \vec{g}_j), \quad (7.24)$$

onde o produto

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \equiv r_{ij} = 1 + 2J_{ij}, \quad (7.25)$$

$$J_{ij} = f_i(1 - f_j)(e^{i(\lambda_i - \lambda_j)} - 1) + f_j(1 - f_i)(e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)} - 1). \quad (7.26)$$

Portanto, a corrente matricial pode ser escrita na forma

$$\check{I}_{ij} = \frac{1}{2}Z_{ij}(r_{ij}) [\check{G}_i, \check{G}_j] = i\vec{I}_{ij} \cdot \vec{\sigma}, \quad (7.27)$$

onde introduzimos a corrente vetorial

$$\vec{I}_{ij} = Z_{ij}(r_{ij}) \vec{g}_i \times \vec{g}_j. \quad (7.28)$$

A função  $Z_{ij}(x)$  incorpora toda a informação sobre os autovalores de transmissão do conector  $(i, j)$ , e é definida por

$$Z_{ij}(x) = \sum_n \frac{\tau_n^{(i,j)}}{2 + \tau_n^{(i,j)}(x - 1)}. \quad (7.29)$$

Analogamente, substituindo (7.23) em (7.16) obtemos a função geratriz de cumulantes

$$S(\vec{\lambda}) = -\frac{t_0}{h} \sum_{ij} \int d\epsilon S_{ij}(r_{ij}) \quad (7.30)$$

onde

$$S_{ij}(x) = - \sum_n \ln [1 + \tau_n^{(i,j)}(x - 1)/2]. \quad (7.31)$$

Note que  $\frac{dS_{ij}}{dx} = -Z_{ij}(x)$ . Portanto, a função  $Z_{ij}(x)$  especifica completamente o problema. Concluiremos a seção considerando dois tipos de conectores estudados por Nazarov:

1. Barreira de Tunelamento: Os autovalores de transmissão são tais que  $\tau_n^{(i,j)} \ll 1$ ,  $\forall n$ . Neste caso temos

$$S_{ij}(x) = -\frac{1}{2} \left( \sum_n \tau_n^{(i,j)} \right) = -\frac{1}{2} g(x-1) \quad (7.32)$$

$$Z_{ij}(x) = \frac{g}{2}, \quad (7.33)$$

onde  $g$  é a condutância adimensional do sistema.

2. Contato pontual: Os autovalores de transmissão são tais que  $\tau_n^{(i,j)} = 1$ , para  $n = 1, \dots, N$  e  $\tau_n^{(i,j)} = 0$ , caso contrário. Neste caso temos

$$S_{ij}(x) = -N \ln \left( \frac{1+x}{2} \right), \quad (7.34)$$

$$Z_{ij}(x) = \frac{N}{1+x}. \quad (7.35)$$

A seguir daremos alguns exemplos de aplicação da teoria em circuitos de dois terminais.

## 7.2.2 Circuitos de dois terminais

Consideraremos circuitos de dois terminais como o mostrado na figura 7.1, que representa uma cavidade caótica ligada por dois conectores aos terminais. As funções de Green da cavidade e dos terminais são respectivamente  $\check{G}_c$ ,  $\check{G}_1$  e  $\check{G}_2$ .

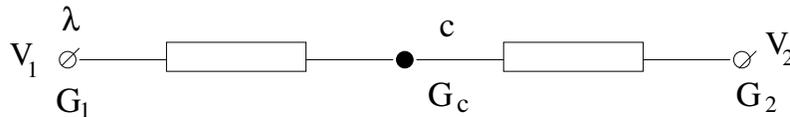


Figura 7.1: Circuito de dois terminais

Neste caso de dois terminais, devido à conservação de corrente, precisamos de apenas um campo de contagem e podemos fazer  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 0$ . A conservação de corrente  $\check{I}_1 + \check{I}_2 = 0$  pode ser escrita como

$$p_1 [\check{G}_1, \check{G}_c] + p_2 [\check{G}_2, \check{G}_c] = 0 \quad (7.36)$$

onde  $p_j = Z_j(\vec{r}_j \cdot \vec{r}_c)$ ,  $j = 1, 2$ . A solução desta equação pode ser escrita como  $\check{G}_c = \vec{r}_c \cdot \vec{\sigma}$  onde

$$\vec{g}_c = R^{-1}(p_1 \vec{r}_1 + p_2 \vec{r}_2), \quad (7.37)$$

onde  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são os vetores associados às funções de Green nos terminais e o fator  $R$  é determinado pela condição da normalização  $\vec{r}_c \cdot \vec{r}_c = 1$ . Desta forma  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$  são determinados pelo sistema

$$p_1 = Z_1(R^{-1}(p_1 + r_{12}p_2)) \quad (7.38)$$

$$p_2 = Z_2(R^{-1}(p_2 + r_{12}p_1)) \quad (7.39)$$

$$R^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2r_{12}p_1p_2, \quad (7.40)$$

que, para  $Z_j(x)$  geral, constitui um sistema de equações não lineares e pode ser resolvido numericamente [132, 138]. A seguir daremos exemplos em que este sistema pode ser resolvido analiticamente.

### 7.2.3 Duas junções de tunelamento

Este é o caso mais simples pois a função  $Z_i = g_i/2$  é uma constante. Desta forma, o vetor normalizado que caracteriza a cavidade é dado por

$$\vec{r}_c = \frac{g_1 \vec{r}_1 + g_2 \vec{r}_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + 2g_1g_2r_{12}}} \quad (7.41)$$

Além disso,  $S_i(x) = -g_i(x-1)/2$ , portanto a função geratriz é dada por

$$S(\lambda) = -\frac{t_0}{2h} \sum_{i=1}^2 g_i \int d\varepsilon (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_c - 1) \quad (7.42)$$

Efetuando o produto escalar obtemos

$$S(\vec{\lambda}) = -\frac{t_0}{2h} \int d\varepsilon (\sqrt{(g_1 + g_2)^2 - 4g_1g_2J_{12}} - (g_1 + g_2)) \quad (7.43)$$

Neste ponto é importante notar que a função geratriz satisfaz a condição  $S(0) = 1$ . No caso particular de temperatura nula as funções de Fermi nos reservatórios ficam  $f_1(\varepsilon) = \theta(\varepsilon - eV)$  e  $f_2(\varepsilon) = \theta(\varepsilon)$ , onde  $V$  é a diferença de potencial aplicada nos terminais. Efetuando a integral na energia encontramos a expressão fechada

$$S(\vec{\lambda}) = -\frac{t_0eV}{2h} (\sqrt{(g_1 + g_2)^2 + 4g_1g_2(e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)} - 1)} - (g_1 + g_2)). \quad (7.44)$$

Como discutido anteriormente, precisamos apenas de um campo de contagem, desta forma podemos fazer  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 0$ . No caso particular de barreiras simétricas  $g_1 = g_2 = g$  a equação (7.44) é escrita como

$$S(\lambda) = -\frac{t_0eVg}{h} (e^{i\lambda/2} - 1). \quad (7.45)$$

Esta expressão permite o cálculo dos cumulantes através da fórmula (7.3). A distribuição de contagem de carga é obtida pela fórmula

$$P(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-S(\lambda)} e^{-i\lambda n} \quad (7.46)$$

Note que

$$-S(\lambda) - i\lambda n = \frac{t_0eVg}{h} (e^{\lambda/2} - 1) - i\lambda n \quad (7.47)$$

$$= \frac{t_0}{e} \left( \frac{e^2Vg}{h} (e^{\lambda/2} - 1) - i\lambda I \right) \quad (7.48)$$

$$= M (e^{\lambda/2} - 1 - i\lambda \mathcal{I}), \quad (7.49)$$

onde definimos

$$M = \frac{t_0 e V g}{h} = \frac{t_0 g G_0 V}{e h}, \quad (7.50)$$

$$\mathcal{I} = \frac{I}{g G_0 V} = \frac{n}{M}, \quad (7.51)$$

onde  $G_0 = e^2/h$  é o quantum de condutância e  $I$  é a corrente elétrica no sistema. O problema pode ser resolvido em termos do número de cargas  $n$  ou da corrente adimensional  $\mathcal{I}$ . As respectivas distribuições relacionam-se de acordo com

$$P(n)dn = W(\mathcal{I})d\mathcal{I}. \quad (7.52)$$

Desta forma, a distribuição de corrente é dada pela integral

$$W(\mathcal{I}) = M e^{-M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp [M(e^{i\lambda/2} - i\lambda \mathcal{I})]. \quad (7.53)$$

Estamos interessados na situação em que número de cargas transmitidas  $n = It_0/e \gg 1$ . Neste caso, a integral (7.53) pode ser resolvida através do método da fase estacionária resultando em

$$W(\mathcal{I}) = \sqrt{\frac{M}{\pi \mathcal{I}}} e^{M(2\mathcal{I}-1)} (2\mathcal{I})^{2M\mathcal{I}}. \quad (7.54)$$

Esta equação permite o cálculo direto dos momentos da corrente

$$m_k = \int_0^{\infty} d\mathcal{I} \mathcal{I}^k W(\mathcal{I}). \quad (7.55)$$

Os cumulantes de corrente são obtidos a partir dos momentos. Os quatro primeiros cumulantes são dados por [139]

$$C_1 = m_1 \quad (7.56)$$

$$C_2 = m_2 - m_1^2 \quad (7.57)$$

$$C_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \quad (7.58)$$

$$C_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4 \quad (7.59)$$

A figura 7.5 mostra um gráfico da distribuição de corrente comparando a solução aproximada em (7.54) com o resultado obtido pela integração numérica da equação (7.53). A concordância é excelente, indicando a validade da aproximação neste regime. Note que, apesar da aparência, a distribuição não é gaussiana.

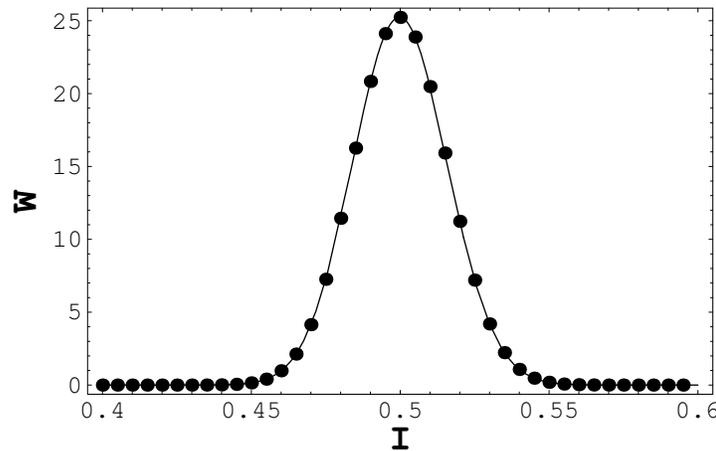


Figura 7.2: Distribuição da corrente para  $M = 1000$ . A linha contínua é o gráfico da função (7.54) e os pontos são soluções numéricas da integral (7.53).

## 7.2.4 Contatos pontuais

Nesta seção consideraremos uma cavidade com contatos pontuais. Este caso não é tão simples quanto o anterior pois  $Z_i$  não é constante, mas uma função dada por

$$Z_i(x) = \frac{N_i}{1 + x_i}. \quad (7.60)$$

O caso geral de contatos assimétricos foi tratado na referência [140] através da teoria de circuitos de Nazarov. Neste trabalho o autor obtém a função geratriz de cumulantes e estuda efeitos de temperatura na estatística de contagem. Nós estamos interessados em determinar a distribuição da corrente e para isso consideramos

inicialmente o caso mais simples de contatos simétricos  $N_1 = N_2 = N$ . Na representação vetorial da função de Green a cavidade é representada pelo vetor

$$\vec{r}_c = R^{-1}(p_1\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad (7.61)$$

onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$  satisfazem às equações

$$p_1 = \frac{N}{1 + R^{-1}(p_1 + r_{12}p_2)}, \quad (7.62)$$

$$p_2 = \frac{N}{1 + R^{-1}(p_2 + r_{12}p_1)}, \quad (7.63)$$

$$R^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2r_{12}. \quad (7.64)$$

A partir das duas primeiras equações conclui-se que  $p_1 = p_2 = N - R/2$ . Substituindo este resultado na terceira equação encontramos

$$R = 2N \frac{\sqrt{1+J}}{1 + \sqrt{1+J}}. \quad (7.65)$$

A função geratriz de cumulantes é dada por

$$S(\lambda) = -\frac{t_0g}{h} \sum_{i=1}^2 \int \varepsilon \ln \left( \frac{1 + \vec{r}_i \cdot \vec{r}_c}{2} \right). \quad (7.66)$$

Efetando os produtos escalares

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c = \sqrt{1+J}, \quad (7.67)$$

encontramos

$$S(\lambda) = -\frac{2t_0g}{h} \int d\varepsilon \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1+J(\varepsilon)}}{2} \right). \quad (7.68)$$

Como vimos na seção anterior a função geratriz à temperatura nula é encontrada com uso da regra  $\int d\varepsilon \rightarrow eV$  e  $J \rightarrow e^{i\lambda} - 1$ , desta forma encontramos

$$S(\lambda) = -2MN \ln \left( \frac{1 + e^{i\lambda/2}}{2} \right), \quad (7.69)$$

onde definimos  $M = eVt_0/h$ . Este resultado também foi obtido por Borba [135] através da teoria de circuitos escalar. A distribuição de carga  $P(n)$  é dada pelo coeficiente da série de Fourier de  $e^{-S(\lambda)}$ . Como discutido na seção anterior, podemos trabalhar diretamente com a distribuição de corrente  $W(\mathcal{I})$ , dada por

$$W(\mathcal{I}) = MN \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp \left\{ MN \left[ 2 \ln \left( \frac{e^{i\lambda/2} + 1}{2} \right) - i\lambda \mathcal{I} \right] \right\}. \quad (7.70)$$

Esta integral é resolvida no caso  $MN \gg 1$  pelo método da fase estacionária, resultando na distribuição não-gaussiana

$$W(\mathcal{I}) = \sqrt{\frac{MN}{\pi \mathcal{I} (1 - \mathcal{I})}} \left( \frac{(1 - \mathcal{I})^{(\mathcal{I}-1)}}{2 \mathcal{I}^{\mathcal{I}}} \right)^{2MN}, \quad (7.71)$$

cujo gráfico é mostrado na figura abaixo para o caso particular  $MN = 100$ . Mais uma vez comparamos o resultado obtido com uma integração numérica da equação (7.70).

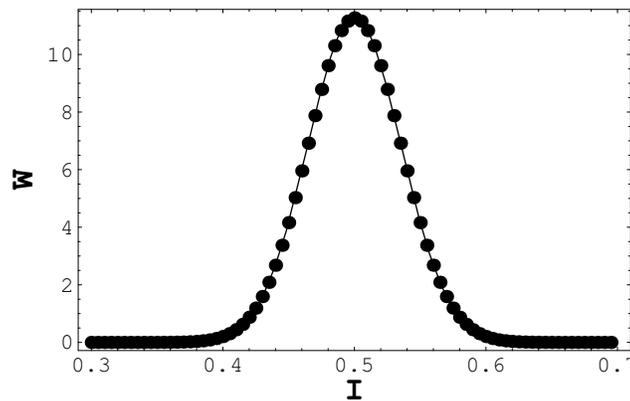


Figura 7.3: Distribuição da corrente para para uma cavidade caótica acoplada a dois terminais. A linha contínua representa a função (7.71) com  $MN = 100$  e os pontos são soluções numéricas da integral (7.70).

### 7.3 Teoria escalar

Na teoria de circuitos escalar também particionamos o sistema em elementos finitos denominados terminais, nós e conectores, representando, desta forma, os caminhos de condução de carga por uma rede interligada na qual podem ser implementadas leis de conservação. A teoria é formulada em termos de um potencial complexo especificado nos terminais,  $\Phi_1 = \phi$  e  $\Phi_2 = 0$ , e desconhecido nos nós. Cada conector  $(i, j)$  é sujeito a uma diferença de pseudo-potencial  $\Delta\Phi_{ij}$ , que gera uma pseudo-corrente  $I_{ij}(\Delta\Phi_{ij})$  definida por

$$I_{ij}(\Delta\Phi_{ij}) = \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{\tau_n \sin(\Delta\Phi_{ij})}{1 - \tau_n \sin^2(\Delta\Phi_{ij}/2)} \right\rangle, \quad (7.72)$$

onde  $\tau_n$  são os autovalores de transmissão que caracterizam o conector. A corrente espectral, como também é conhecida, pode ser reescrita da seguinte maneira

$$I_{ij}(\Delta\Phi_{ij}) = \sin(\Delta\Phi_{ij}) F(\Delta\Phi_{ij}), \quad (7.73)$$

com  $F$  dado por

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{\tau_n}{1 - \tau_n \sin^2(\phi/2)} \right\rangle = \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - \tau \sin^2(\phi/2)}. \quad (7.74)$$

onde introduzimos a densidade de autovalores de transmissão,

$$\rho(\tau) = \sum_{n=1}^N \langle \delta(\tau - \tau_n) \rangle, \quad (7.75)$$

Existe uma lei de conservação da pseudocorrente que atravessa cada nó, o que fornece um número suficiente de equações para determinar o pseudopotencial em cada nó do circuito. A seguir listaremos as regras para o uso prático da teoria escalar

- (i) Represente o sistema como um grafo, identificando nós, conectores e terminais. Os conectores devem ter relação corrente-tensão conhecida.

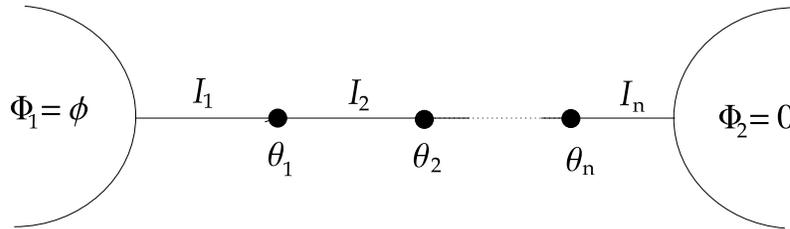


Figura 7.4: Teoria escalar para um circuito de dois terminais.

(ii) Resolva as equações para a conservação da pseudocorrente em cada nó

$$I_1(\phi - \theta_1) = I_2(\theta_1 - \theta_2) = \dots = I_n(\theta_n), \quad (7.76)$$

e determine o potencial em cada nó.

(iii) Obtenha a relação corrente-voltagem para todo o circuito  $I(\phi) = \sin(\phi)F(\phi)$ . A partir da função  $F(\phi)$  pode-se encontrar a densidade de autovalores e calcular os cumulantes da estatística de contagem de carga.

Um aspecto importante da teoria é o conhecimento prévio da relação corrente-tensão dos conectores usados no circuito. Estas relações devem ser deduzidas a partir de modelos microscópicos. Na ref. [134] Macêdo, usando o modelo  $\sigma$  não-linear supersimétrico, determinou a corrente espectral para um conector arbitrário

$$I(\phi) = \sum_{i=1}^N \frac{\sin(\phi)\Gamma_n}{1 - \Gamma_n \sin^2(\phi/2)}. \quad (7.77)$$

Este resultado generaliza os casos estudados por Nazarov nas referências [141] e [131] para contatos pontuais e barreiras de tunelamento. Num contato pontual temos  $\Gamma_n = 1$ , para  $n = 1, \dots, N$  e  $\Gamma_n = 0$ , caso contrário. Nestas condições a eq. (7.77) é reescrita como

$$I(\phi) = 2N \tan(\phi/2). \quad (7.78)$$

Por outro lado, para uma junção de tunelamento temos  $\tau_n \ll 1; \forall n$ , e a eq. (7.77) é reescrita como

$$I(\phi) = \sin \phi \sum_{n=1}^N \Gamma_n. \quad (7.79)$$

### 7.3.1 Densidade de autovalores de transmissão

Uma vez encontrada a corrente espectral de todo o circuito pode-se determinar a densidade de autovalores de transmissão e calcular médias de observáveis como condutância e potência de ruído de disparo. Neste ponto é conveniente introduzir a função auxiliar

$$h(z) = \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - z\tau}, \quad (7.80)$$

de modo que

$$F(\phi) = \frac{I(\phi)}{\sin \phi} = h(\sin^2 \phi/2). \quad (7.81)$$

Usando a propriedade

$$\frac{1}{x \pm i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad \eta \rightarrow 0^+, \quad (7.82)$$

pode-se inverter a equação (7.80) e escrever a densidade de autovalores de transmissão na forma

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi i \tau^2} \left[ h\left(\frac{1}{\tau - i0^+}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i0^+}\right) \right]. \quad (7.83)$$

Além disso os momentos dos autovalores de transmissão, definidos por

$$g_m = \int_0^1 d\tau \tau^m \rho(\tau), \quad (7.84)$$

podem ser obtidos diretamente da função  $F(\phi)$ . Em particular, temos

$$g_0 = N, \quad g_1 = \lim_{\phi \rightarrow 0} F(\phi) \quad \text{e} \quad g_2 = \frac{2}{\sin \phi} \frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0}$$

### 7.3.2 A pseudocorrente $K(x)$

Na referência [142] a teoria é formulada em termos de uma pseudocorrente  $K(x)$  definida por

$$K(x) = \frac{i}{2}I(-2ix) = \sum_j \left\langle \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2x_j} \right\rangle, \quad (7.85)$$

onde as variáveis  $x_j$  estão relacionadas aos autovalores de transmissão de acordo com  $\tau_j = \text{sech}^2 x_j$ . Neste caso podemos introduzir a densidade média

$$\nu(x) = \sum_j \langle \delta(x - x_j) \rangle \quad (7.86)$$

e reescrever a pseudo-corrente como uma transformada integral

$$K(x) = \int_0^\infty dy \frac{\nu(y) \sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2y}, \quad (7.87)$$

que pode ser invertida fornecendo

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im}[K(x + i\pi/2 - i0^+)]. \quad (7.88)$$

A equação (7.77) também pode ser escrita em termos das variáveis  $x$ . Neste caso é conveniente escrever as transparências na forma

$$\Gamma_n = \text{sech}^2(\alpha_n/2), \quad (7.89)$$

de modo que a relação corrente-tensão para um conector arbitrário fica dada por

$$K(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh \alpha_n}. \quad (7.90)$$

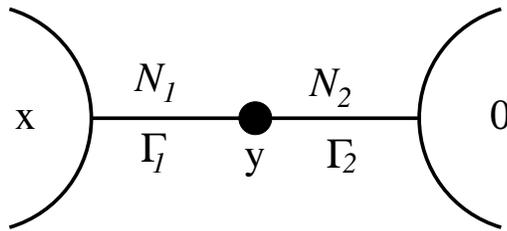
## 7.4 Aplicações do formalismo

Nesta seção vamos usar as duas formulações de teoria de circuitos para descrever uma cavidade caótica acoplada a guias assimétricos por barreiras de trans-

parência arbitrária.

### 7.4.1 Teoria escalar

O circuito está esquematizado na figura abaixo. A lei de conservação para a



pseudo-corrente é dada por

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y). \quad (7.91)$$

Para canais equivalentes podemos escrever a pseudocorrente na forma

$$K_p(x) = N_p \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh \alpha_p} \quad (7.92)$$

$$= \frac{N_p}{2} [\tanh(x + \alpha_p/2) + \tanh(x - \alpha_p/2)]. \quad (7.93)$$

Usando a equação (7.93) a conservação da pseudocorrente fica

$$N_1 [\tanh(x - y + \alpha_1/2) + \tanh(x - y - \alpha_1/2)] = N_2 [\tanh(x + \alpha_2/2) + \tanh(x - \alpha_2/2)]. \quad (7.94)$$

Com o auxílio da identidade

$$\tanh(x - y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}, \quad (7.95)$$

a equação (7.94) pode ser reescrita como

$$N_1 \left[ \frac{\tanh(x + \alpha_1/2) - \tanh y}{1 - \tanh(x + \alpha_1/2) \tanh y} + \frac{\tanh(x - \alpha_1/2) - \tanh y}{1 - \tanh(x - \alpha_1/2) \tanh y} \right] = \quad (7.96)$$

$$N_2 \left[ \frac{\tanh y + \tanh(\alpha_2/2)}{1 + \tanh y \tanh(\alpha_2/2)} + \frac{\tanh y - \tanh(\alpha_2/2)}{1 - \tanh y \tanh(\alpha_2/2)} \right]. \quad (7.97)$$

Usando mais uma vez a identidade (7.95) para  $\tanh(x \pm \alpha_1/2)$ , agrupando os termos e usando  $\tanh^2 \alpha_j/2 = 1 - \Gamma_j$ , encontramos a seguinte equação quártica para a variável  $\xi = \tanh y$

$$\begin{aligned} & N_1 \Gamma_1 (1 - \Gamma_2) \tanh x \xi^4 \\ & + ((N_1 \Gamma_1 (\Gamma_2 - 1) + N_2 \Gamma_2) \tanh^2 x + N_1 \Gamma_1 (\Gamma_2 - 1) + N_2 \Gamma_2 (\Gamma_1 - 1)) \xi^3 \\ & \quad - (N_1 + 2N_2) \Gamma_1 \Gamma_2 \tanh x \xi^2 \\ & \quad ((N_2 \Gamma_2 (\Gamma_1 - 1) + N_1 \Gamma_1) \tanh^2 x + N_1 \Gamma_1 + N_2 \Gamma_2) \xi \\ & \quad - N_1 \Gamma_1 \tanh x = 0. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Escolhendo a raiz física determinamos a pseudo-corrente através da relação

$$K(x) = \frac{N_2 \Gamma_2 \xi}{1 - (1 - \Gamma_2) \xi^2}. \quad (7.99)$$

## 7.4.2 Teoria matricial

Neste caso podemos usar a fórmula

$$Z_j(x) = \sum_n \frac{\Gamma_{j,n}}{2 + \Gamma_{j,n}(x - 1)}. \quad (7.100)$$

A corrente matricial nos conectores é dada por

$$\check{I}_k = i \vec{I}_k \cdot \vec{\sigma}, \quad (7.101)$$

onde

$$\vec{I}_k = \sum_n \frac{\Gamma_{k,n} \vec{r}_k \times \vec{r}_c}{2 + \Gamma_{k,n}(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_c - 1)}. \quad (7.102)$$

Para canais equivalentes a corrente vetorial pode ser escrita como

$$\vec{I}_k = \frac{N_k \Gamma_k \vec{r}_k \times \vec{r}_c}{2 + \Gamma_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_c - 1)}, \quad k = 1, 2. \quad (7.103)$$

Em temperatura nula a representação vetorial é ainda mais simples. Os vetores que representam os terminais são dados por

$$\vec{r}_1 = -\cosh^2 x (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) - \hat{e}_3 \quad (7.104)$$

$$\vec{r}_2 = -\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 - \hat{e}_3, \quad (7.105)$$

onde fizemos  $e^{i\lambda} = \cosh^2 x$ . Nesta parametrização os vetores satisfazem as relações

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = 1 \quad (7.106)$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cosh 2x \quad (7.107)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -i \sinh^2 x \hat{e}_1 + (1 + \cosh^2 x) \hat{e}_2 - 2i \cosh^2 x \hat{e}_3. \quad (7.108)$$

A conservação da corrente vetorial  $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$  resulta na equação

$$\frac{N_1 \Gamma_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_c}{2 + \Gamma_1 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c - 1)} + \frac{N_2 \Gamma_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_c}{2 + \Gamma_2 (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c - 1)} = 0 \quad (7.109)$$

Esta equação pode ser resolvida com o seguinte *ansatz*

$$\vec{r}_c = A_1 \vec{r}_1 + A_2 \vec{r}_2. \quad (7.110)$$

A condição de normalização  $\vec{r}_c \cdot \vec{r}_c = 1$  implica o vínculo

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cosh(2x) = 1 \quad (7.111)$$

Além disso, os produtos escalares que aparecem em (7.109) são dados por

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c = A_1 + A_2 \cosh(2x) \quad (7.112)$$

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c = A_2 + A_1 \cosh(2x). \quad (7.113)$$

Portanto, a partir da conservação da corrente vetorial encontramos a seguinte equação

$$\frac{N_1 \Gamma_1 A_2}{2 + \Gamma_1 (A_1 + A_2 \cosh 2x - 1)} = \frac{N_2 \Gamma_2 A_1}{2 + \Gamma_2 (A_2 + A_1 \cosh 2x - 1)}. \quad (7.114)$$

A solução das equações (7.111) e (7.114) fornece  $A_1$  e  $A_2$ . A partir da corrente vetorial encontramos a pseudo-corrente através da relação

$$K(x) = -i \tanh(x) \vec{I}_2 \cdot \hat{e}_3. \quad (7.115)$$

Efetuada o produto misto

$$(\vec{r}_2 \times \vec{r}_c) \cdot \hat{e}_3 = 2i A_1 \cosh^2 x, \quad (7.116)$$

obtemos  $\vec{I}_2 \cdot \hat{e}_3$  e portanto a teoria de circuitos matricial produz a seguinte expressão para a pseudo-corrente

$$K(x) = \frac{N_2 \Gamma_2 A_1 \sinh 2x}{2 + \Gamma_2 (A_2 + A_1 \cosh 2x - 1)}, \quad (7.117)$$

onde os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são dados pelo sistema de equações

$$\begin{cases} A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cosh 2x = 1, \\ \Gamma_1 \Gamma_2 [(N_1 - N_2) A_1 A_2 \cosh 2x + N_1 A_2 (A_2 - 1) - N_2 A_1 (A_1 - 1)] \\ + 2(N_1 \Gamma_1 A_2 - N_2 \Gamma_2 A_1) = 0. \end{cases} \quad (7.118)$$

Os dois métodos fornecem esquemas completamente diferentes para se obter a pseudo-corrente  $K(x)$  de todo o sistema. No entanto, podemos comparar os dois resultados expandindo as expressões para  $K(x)$  fornecidas por cada um deles em série de potências de  $x$  e comparando termo a termo. Fizemos um programa no Mathematica para executar tal tarefa e checamos a concordância dos termos até a ordem  $x^{18}$ , o que é um forte indício da equivalência das duas teorias para o problema em questão.

### 7.4.3 Distribuição de corrente na presença de barreiras

Finalmente vamos estudar a distribuição de corrente para o sistema na presença de barreiras. Devido às dificuldades encontradas na solução do problema geral vamos considerar aqui a versão simplificada de conectores simétricos, ou seja,  $N_1 = N_2 = N$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ . Neste caso podemos usar

$$Z_1(x) = Z_2(x) = \frac{N\Gamma}{2 + \Gamma(x - 1)} \quad (7.119)$$

O vetor que representa a cavidade é  $\vec{r}_c = R^{-1}(p_1\vec{r}_1 + p_2\vec{r}_2)$ , onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$  são obtidos a partir do sistema

$$p_1 = \frac{N\Gamma}{1 + \Gamma R^{-1}(p_1 + r_{12}p_2)} \quad (7.120)$$

$$p_2 = \frac{N\Gamma}{1 + R^{-1}\Gamma(p_2 + r_{12}p_1)} \quad (7.121)$$

$$R^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2r_{12}p_1p_2. \quad (7.122)$$

As duas primeiras equações permitem-nos concluir que  $p_1 = p_2 = \alpha(N - R/2)$ , onde  $\alpha = \Gamma/(2 - \Gamma)$ . Substituindo este resultado na terceira equação encontramos

$$R = 2N \frac{\alpha\sqrt{1+J}}{1 + \alpha\sqrt{1+J}}. \quad (7.123)$$

A função geratriz de cumulantes é dada por

$$S(\lambda) = -\frac{t_0}{h} N \sum_{i=1}^2 \int d\varepsilon \ln \left( \frac{2 + \Gamma(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_c - 1)}{2} \right). \quad (7.124)$$

Usando os produtos escalares  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_c = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_c = \sqrt{1+J}$  encontramos

$$S(\lambda) = -\frac{2t_0}{h} N \int d\varepsilon \ln \left( \frac{2 + \Gamma(\sqrt{1+J(\varepsilon)} - 1)}{2} \right). \quad (7.125)$$

Esta expressão, para temperatura nula, resulta em

$$S(\lambda) = -2MN \ln \left( \frac{\Gamma}{2}(e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right), \quad (7.126)$$

onde  $M = t_0 eV/h = t_0 G_0 V/e$ . Esta função geratriz foi obtida na referência [135] através da teoria de circuitos escalar. Neste caso a distribuição de corrente é dada pela integral

$$W(\mathcal{I}) = MN \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp \left\{ MN \left[ 2 \ln \left( \frac{\Gamma}{2}(e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right) - i\lambda \mathcal{I} \right] \right\}, \quad (7.127)$$

que mais uma vez pode ser resolvida pelo método da fase estacionária, resultando em

$$W(\mathcal{I}) = \sqrt{\frac{MN}{\pi \mathcal{I}(1-\mathcal{I})}} \left( \frac{2-\Gamma}{2(1-\mathcal{I})} \right)^{2MN} \left( \frac{\Gamma(1-\mathcal{I})}{(2-\Gamma)\mathcal{I}} \right)^{2MN\mathcal{I}}. \quad (7.128)$$

A figura abaixo mostra um exemplo da distribuição da corrente para um ponto quântico com barreiras simétricas de transparência  $\Gamma = 0,6$ . Este é um resultado

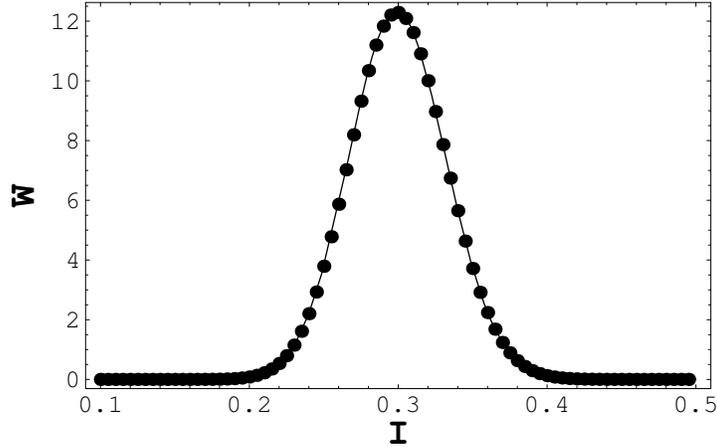


Figura 7.5: Distribuição da corrente para  $MN = 100$  e  $\Gamma = 0,6$ . A linha contínua é o gráfico da função (7.128) e os pontos são soluções numéricas da integral (7.127).

importante já que fornece uma grandeza facilmente mensurável em experimentos.

# Capítulo 8

## Conclusões e perspectivas

Nesta tese apresentamos uma classe especial de ensembles de movimento browniano introduzida a partir da teoria geral de processos estocásticos markovianos matriciais. Determinamos a equação de Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da distribuição conjunta dos autovalores. Sob determinadas condições matemáticas esta equação de Fokker-Planck descreve o decaimento da distribuição conjunta de níveis para as distribuições características dos ensembles de polinômios ortogonais da teoria de matrizes aleatórias. Por outro lado, mostramos que a equação de Fokker-Planck também está relacionada a hamiltonianos do tipo Calogero-Sutherland, o que permite conectar o problema original com a teoria de polinômios simétricos de Jack e com as generalizações multidimensionais dos polinômios ortogonais clássicos. Nossa formulação fornece um ponto de partida natural para a introdução desses polinômios, unificando vários resultados dispersos na literatura. Além disso, estendemos o método para os ensembles de matrizes de transferência. Desta forma, pudemos fazer uma descrição unificada de ensembles de polinômios e de matrizes de transferência que serve como um esquema de classificação alternativo à classificação geométrica baseada em espaços simétricos. Do ponto de vista prático, esta formulação unificada foi usada para o desenvolvimento de novos métodos aplicáveis em qualquer classe de simetria. Por exemplo, usamos métodos de Fokker-Planck para o cálculo de valores médios e de assintóticos de estatísticas lineares de interesse. Em particular, obtivemos fórmulas assintóticas úteis para a média e a variância de ob-

serváveis de transporte em pontos quânticos para as classes Wigner-Dyson e quiral. Comparamos os resultados exatos obtidos a partir do método do movimento browniano com resultados numéricos, obtidos através da implementação da fórmula de Mahaux-Weidenmüller em pontos quânticos com simetria quiral. Verificamos, neste problema específico, a equivalência entre a abordagem hamiltoniana e a de matriz  $S$  para a descrição de sistemas abertos.

Também usamos métodos de Fokker-Planck para o cálculo de funções de correlação. Mostramos que a evolução temporal da função de correlação de  $n$ -pontos segue uma complicada hierarquia (tipo BBGKY) de equações integro-diferenciais singulares, revelando a complexidade do problema do cálculo de funções de correlação em ensembles de não-equilíbrio em geral. Apresentamos uma alternativa para desacoplar esta hierarquia através do método de transformada integral, que consiste em mapear a equação de Fokker-Planck para a distribuição conjunta de níveis, numa outra equação de Fokker-Planck que evolui num espaço imagem de dimensão menor, que depende da ordem da função de correlação desejada. Construímos o operador de Fokker-Planck para o espaço imagem e mostramos sua relação com a teoria de polinômios de Jack deformados. Vale salientar que em nossa formulação o “índice de Dyson”  $\beta$  aparece como um parâmetro e pode em princípio assumir qualquer valor racional. Em particular para  $\beta = 2$  usamos o método da transformada integral para o cálculo da função um ponto da equação DMPK na classe Wigner-Dyson. Ainda para o caso unitário, desenvolvemos um método de funções biortogonais para o cálculo da função de correlação de  $n$ -pontos. Com este método pudemos escrever a probabilidade de transição numa forma determinantal similar à encontrada em ensembles de equilíbrio através método de polinômios ortogonais.

Vimos que os ensembles de movimento browniano têm muitas ramificações, como sugere a figura 8.1, revelando um grande potencial para futuras aplicações.

Um aspecto importante ainda em aberto é o cálculo das funções de correlação para ensembles de movimento browniano com  $\beta \neq 2$ . Esta é uma tarefa não-trivial que corresponde a resolver o renomado problema de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber para classes diferentes da unitária. Nossa formulação fornece perspectivas interessantes para este problema, que descreveremos sucintamente a seguir.

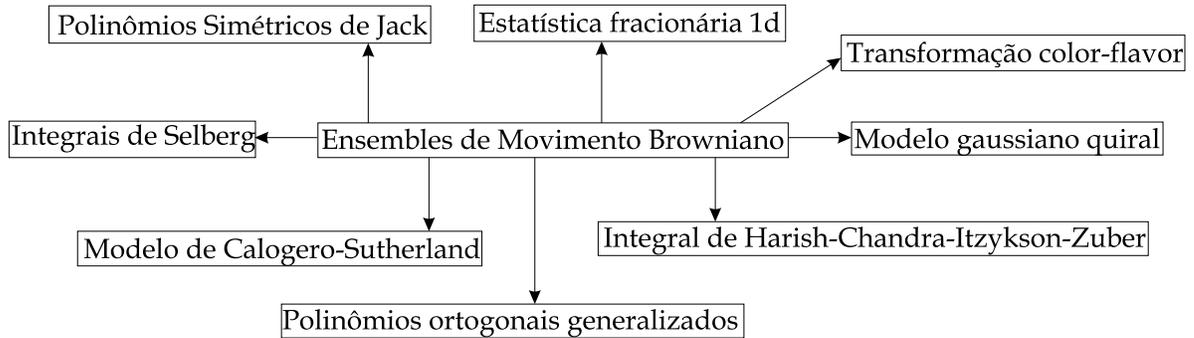


Figura 8.1: Ramificações do problema de movimento browniano no espaço de matrizes.

Uma vez estabelecida a conexão com os polinômios de Jack deformados poderíamos usá-los na construção dos polinômios generalizados para o espaço imagem através de uma generalização de método de Gurappa. As propriedades destes polinômios, assim como no caso convencional, poderiam ser usadas na construção da solução da equação de Fokker-Planck no espaço imagem. Também poderíamos estender o método das funções biortogonais para a álgebra de quatérnions, que é usada no cálculo de funções de correlação nos casos  $\beta = 1$  e  $\beta = 4$  para os ensembles de equilíbrio. Finalmente, como terceira alternativa, temos a formulação do problema usando supersimetria, que tem sido usada em cálculos de funções de correlação de objetos gerais como razões de polinômios característicos de matrizes aleatórias. Como os cálculos em supersimetria podem se tornar muito extensos, envolvendo variáveis comutantes e anticomutantes, recursos computacionais tornam-se indispensáveis. Estamos desenvolvendo um pacote Maple para manipulações algébricas, cálculo de superdeterminantes e superintegrais que será bastante útil nesta etapa do problema.

Nesta tese também estudamos teorias de circuitos usadas em dispositivos mesoscópicos no regime semiclássico, ou seja, com número grande de canais abertos ou propagantes. Aplicamos as “leis de Kirhhof” das duas teorias usadas na literatura no caso específico de uma cavidade caótica balística acoplada, via barreiras de transparência arbitrária, a dois guias semi-infinitos e mostramos que estas teorias

são equivalentes comparando os resultados fornecidos para a pseudo-corrente nas duas formulações. Também determinamos as distribuições exatas de corrente de alguns sistemas simples de dois terminais, como um ponto quântico com barreiras simétricas. Como objetivo de curto prazo neste tema podemos considerar o estudo da distribuição de corrente para o caso geral de barreiras arbitrárias e a extensão da teoria escalar para dispositivos de três ou mais terminais.

# Apêndice A

## Ensemble gaussiano unitário

Neste apêndice apresentamos o ensemble gaussiano unitário em detalhes. Na seção A.1 apresentamos um cálculo sistemático do Jacobiano associado à diagonalização que decompõe a matriz hermitiana na sua representação polar (autovalor-autovetor). Também escrevemos a densidade conjunta de autovalores que caracteriza o ensemble de Hermite unitário. Na seção A.2 apresentamos um cálculo da integral de Itzykson-Zuber baseado no método da equação de difusão.

### A.1 Definição

Seja  $GL(N)$  o grupo de matrizes complexas  $N \times N$ . Um elemento de  $GL(N)$  possui  $2N^2$  parâmetros reais independentes. Seja  $H$  uma matriz auto-adjunta (hermitiana). O vínculo  $H = H^\dagger$  reduz o número de graus de liberdade a  $N^2$  parâmetros reais. Uma matriz hermitiana pode ser escrita como

$$H = H^{(0)} + i H^{(1)} \tag{A.1}$$

onde  $H^{(0)}$  e  $H^{(1)}$  são matrizes reais simétrica e anti-simétrica, respectivamente. O ensemble gaussiano unitário é definido pela distribuição de probabilidade

$$P(H) = C_N e^{-a^2 \text{Tr} H^2}, \tag{A.2}$$

onde  $C_N$  é uma constante de normalização. O traço é facilmente calculado, resultando em

$$\text{Tr}H^2 = \sum_{ij} |H_{ij}|^2 = \sum_i (H_{ii}^{(0)})^2 + 2 \sum_{i<j} \left[ (H_{ij}^{(0)})^2 + (H_{ij}^{(1)})^2 \right]. \quad (\text{A.3})$$

O elemento de arco

$$ds^2 \equiv \text{Tr}(dH^2) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (\text{A.4})$$

permite identificar o tensor métrico do espaço  $g_{\mu\nu}$  nas coordenadas definidas pelas  $N^2$  variáveis independentes  $\xi = (H_{ii}^{(0)}, H_{ij}^{(0)}, H_{ij}^{(1)})$ . Podemos escrever

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & & \phi \\ & 2 \times \mathbb{1}_{N(N-1)/2} & \\ \phi & & 2 \times \mathbb{1}_{N(N-1)/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

O elemento de volume é definido a partir do tensor métrico através da fórmula

$$dV = \sqrt{|g|} \prod_{\mu} d\xi^\mu, \quad (\text{A.6})$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Portanto

$$dV_H = 2^{N(N-1)/2} \prod_{i=1}^N dH_{ii}^{(0)} \prod_{\alpha=0,1} \prod_{i<j} dH_{ij}^{(\alpha)} \equiv 2^{N(N-1)/2} dH. \quad (\text{A.7})$$

Definimos  $dH$ , o elemento de volume cartesiano, como o produto das diferenciais de todos os elementos independentes de  $H$ . A condição de normalização,  $\int dHP(H) = 1$ , é satisfeita escolhendo-se

$$C_N = 2^{N(N-1)/2} \left( \frac{a^2}{\pi} \right)^{N^2/2}. \quad (\text{A.8})$$

Portanto o EGU é constituído por matrizes hermitianas aleatórias cujos elementos são estatisticamente independentes, com distribuição gaussiana de média zero e

variância

$$H_{ii}^{(0)} = \frac{1}{2a^2} \quad (\text{A.9})$$

$$H_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{4a^2}, \quad \alpha = 0, 1. \quad (\text{A.10})$$

Um objeto de interesse na TMA é a distribuição de autovalores da matriz  $H$ . Como uma matriz hermitiana pode ser diagonalizada por uma matriz unitária, podemos escrever

$$H = UXU^\dagger. \quad (\text{A.11})$$

Neste ponto é fundamental encontrar o jacobiano associado à transformação das variáveis de integração dos elementos de matriz  $H_{ij}^{(\alpha)}$  para os autovalores  $X_i$  e autovetores  $U_{ij}$ . Diferenciando (A.11) temos

$$dH = U(dX + [\delta U, X])U^\dagger, \quad (\text{A.12})$$

onde introduzimos a matriz anti unitária  $\delta U \equiv U^\dagger dU$ . Desta forma o elemento de arco (A.4) fica

$$\text{Tr}dH^2 = \text{Tr}[dX^2 + 2X\delta UX\delta U - 2X^2(\delta U)^2]. \quad (\text{A.13})$$

A matriz anti-hermitiana  $\delta U$  pode ser escrita como

$$\delta U = \delta a + i \delta s, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\delta s$  é uma matriz real simétrica e  $\delta a$ , real e anti-simétrica. Calculando os traços em (A.13) temos

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N (dx_i)^2 + 2 \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 [(\delta a_{ij})^2 + (\delta s_{ij})^2], \quad (\text{A.15})$$

o que permite identificar o tensor métrico nas variáveis  $\xi = (x_i, \delta a_{ij}, \delta s_{ij})$  e, consequentemente, o elemento de volume

$$dV = 2^{N(N-1)/2} |\Delta_N(X)|^2 \prod_i dx_i \prod_{i<j} \delta a_{ij} \delta s_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $\Delta_N = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$  é o determinante de Vandermonde. Portanto, diagonalizando  $H$ , o elemento de volume  $dH$  se transforma como

$$dH = C \Delta_N^2(X) dX dU, \quad (\text{A.17})$$

onde  $dU$  é a medida de Haar do grupo unitário, normalizada para  $\int dU = 1$ , e  $dX = \prod_i dx_i$ . A constante  $C$  é determinada pela condição de normalização

$$1 = C_N \int dH e^{-a \text{Tr} H^2} = C_N C \int dU \int dX e^{-a^2 \text{Tr} X^2} |\Delta_N(X)|^2. \quad (\text{A.18})$$

A parte radial é resolvida com o auxílio da integral de Selberg [1], levando a

$$C = \frac{\pi^{N(N-1)/2}}{\prod_{k=1}^N k!}. \quad (\text{A.19})$$

Desta forma, encontramos a densidade conjunta de autovalores

$$P(X) = \frac{2^{N(N-1)/2} a^{N^2}}{\pi^{N/2} \prod_{k=1}^N k!} \prod_{i=1}^N e^{-a^2 x_i^2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2, \quad (\text{A.20})$$

que define o ensemble de Hermite unitário, caracterizado pelo peso gaussiano.

## A.2 Equação da difusão

De posse do tensor métrico pode-se construir o operador de Laplace-Beltrami

$$\nabla^2 = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Usando o tensor métrico (A.5) em (A.21) obtemos o laplaciano no espaço de matrizes

$$\nabla_H^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial(H_{ii}^{(0)})^2} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial(H_{ij}^{(\alpha)})^2}. \quad (\text{A.22})$$

Em coordenadas polares

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{\Delta_N^2(X)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_N^2(X) \frac{\partial}{\partial x_i} + \nabla_U^2 \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{1}{\Delta_N(X)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Delta_N(X) + \nabla_U^2. \quad (\text{A.24})$$

Os graus de liberdade angulares estão contidos em  $\nabla_U^2$ . A última igualdade deve-se ao fato de que  $\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_N(x) = 0$ . Considere a equação da difusão

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla_H^2 \right) F(H, t) = 0, \quad (\text{A.25})$$

com condição inicial  $F(H, 0) = f(H)$ , onde  $f(H)$  é uma função invariante. Um processo de Wiener multidimensional, descrito pela equação da difusão

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_j D_j \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \right) F(\xi, t) = 0, \quad (\text{A.26})$$

com condição inicial  $F(\xi, 0) = f(\xi)$ , tem solução dada por

$$F(\xi, t) = \int K(\xi, \eta; t) f(\eta) d\eta, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$K(\xi, \eta; t) = \prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi D_j t}} \exp \left( - \sum_i \frac{(\xi_i - \eta_i)^2}{2D_i t} \right) \quad (\text{A.28})$$

desempenha o papel da função de Green. Portanto o núcleo de difusão associado ao problema (A.25) é dado por

$$K(H, H_0; t) \equiv \frac{1}{2^{N/2}(\pi t)^{N^2/2}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}(H - H_0)^2}{2t}\right), \quad (\text{A.29})$$

e então

$$F(H, t) = \int dH_0 K(H, H_0; t) f(H_0). \quad (\text{A.30})$$

As matrizes  $H$  e  $H_0$  podem ser diagonalizadas por transformações unitárias

$$H = UXU^\dagger \quad H_0 = VYV^\dagger. \quad (\text{A.31})$$

Para uma função invariante  $f(VYV^\dagger) = f(Y)$ , a função  $F(H, t)$  depende apenas dos autovalores de  $X$  e satisfaz

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) \Delta_N(X) F(X, t) = 0. \quad (\text{A.32})$$

A solução de (A.25) com condição inicial  $\Delta_N(X) F(X, 0) = \Delta_N(X) f(X)$  é dada por

$$\Delta_N(X) F(X, t) = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \int dY K(X, Y; t) \Delta_N(Y) f(Y) \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \int dY \exp\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2\right) \Delta_N(Y) f(Y) \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{N/2} N!} \sum_{P \in S_N} (-1)^P \int dY \exp\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^N (x_i - y_{P_i})^2\right) \Delta_N(Y) f(Y).$$

A última igualdade explora o fato de que  $\Delta_N(Y)$  é uma função antisimétrica, o que permite escrever o núcleo numa forma determinantal. Portanto

$$F(X, t) = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2} N!} \int d^N Y \det \left[ \exp\left(\frac{1}{t} (x_i - y_j)^2\right) \right] \frac{\Delta_N(Y)}{\Delta_N(X)} f(Y). \quad (\text{A.35})$$

Por outro lado, a diagonalização (A.31) transforma o núcleo de difusão de acordo com

$$K(H, H_0; t) = K(X, U^\dagger V Y V^\dagger U), \quad (\text{A.36})$$

portanto a equação (A.30) pode ser escrita como

$$F(X, t) = C \int dV d^N Y \Delta_N^2(Y) K(X, U^\dagger V Y V^\dagger U) f(Y). \quad (\text{A.37})$$

Efetuada a transformação  $U \rightarrow UV$ , temos

$$F(X, t) = C \int dU d^N Y \Delta_N^2(Y) K(X, U Y U^\dagger) f(Y) \quad (\text{A.38})$$

Comparando (A.35) com (A.38) temos

$$\int dU K(X, U Y U^\dagger; t) = \frac{1}{C N! (2\pi t)^{N/2}} \frac{1}{\Delta_N(X) \Delta_N(Y)} \det \left[ \exp \left( \frac{1}{2t} (x_i - y_j)^2 \right) \right]. \quad (\text{A.39})$$

Usando a definição da constante  $C$ , eq. (A.19), chegamos ao resultado da integral de Itzykson-Zuber

$$\int dU \exp \left( \frac{1}{t} \text{Tra} U b U^\dagger \right) = t^{N(N-1)/2} \prod_{k=1}^{N-1} k! \frac{\det(e^{\frac{1}{t} a_i b_j})}{\Delta_N(a) \Delta_N(b)}. \quad (\text{A.40})$$

# Apêndice B

## Funções simétricas e polinômios de Jack

Nesta tese referimo-nos diversas vezes a polinômios simétricos de Jack e definimos certos números quânticos como partições. Apresentamos aqui o material necessário para o entendimento desses conceitos. Devido à carência de material acessível em português, apresentamos neste apêndice um resumo da teoria de polinômios simétricos baseado principalmente na ref. [143] e em outros artigos citados no texto da tese.

### B.1 Funções simétricas

Seja  $A$  um conjunto não vazio dotado de duas operações binárias denotadas por “+” e “ $\cdot$ ”, denominadas soma e produto, respectivamente. Denominamos  $(A, +, \cdot)$  um *anel* se as seguintes 6 propriedades são verificadas para quaisquer que sejam  $a, b$  e  $c \in A$ .

1. *Associatividade da soma:*  $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. *Existência de elemento neutro para a soma:* Existe um (único) elemento  $0 \in A$ , denominado elemento neutro, tal que  $a + 0 = 0 + a = a$ , para todo  $a \in A$

3. *Existência de inverso aditivo*: Para todo  $a \in A$  existe um único  $b \in A$ , denotado por  $b = -a$ , tal que  $a + b = b + a = 0$
4. *Comutatividade da soma*:  $a + b = b + a$  para quaisquer  $a, b \in A$
5. *Associatividade do produto*:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. *Distributividade do produto em relação à soma*:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  ;  
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Portanto, um anel é um grupo abeliano em relação à operação de soma e um semi-grupo em relação à operação de produto. Sendo a operação de produto distributiva em relação a soma. Além disso, se um anel  $(A, +, \cdot)$  satisfaz às propriedades

- Existe o elemento  $1 \in A$ , chamado unidade, tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  para todo  $a \in A$ , dizemos que  $A, +, \cdot$  é um *anel com unidade*
- Se  $a \cdot b = b \cdot a$ , dizemos que  $A$  é um *anel comutativo*
- Se  $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$ , dizemos que  $A$  é um *anel sem divisores de zero*

Um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero é denominado *anel de integridade* ou *domínio de integridade*. Um domínio de integridade  $(A, +, \cdot)$  que satisfaz a propriedade

- Para qualquer  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ , existe  $b \in A$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = 1$

é denominado *corpo*<sup>1</sup>. Corpos são grupos comutativos em relação à operação de adição e monóides comutativos em relação à operação de produto. Os conjuntos  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são exemplos de corpos em relação às operações usuais de soma e de produto. Seja  $K$  um corpo qualquer. Chamamos de polinômio sobre  $K$  em uma indeterminada  $x$  a expressão formal

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + \dots, \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>1</sup>Em inglês usa-se a palavra *field*.

com  $a_j \in K, \forall i \in \mathbb{N}$  e  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_j = 0, \forall j \geq n$ . Vamos denotar  $K[x]$  o conjunto de todos os polinômios, sobre  $K$ , em uma indeterminada  $x$ . Considere também as operações usuais de adição de polinômios, em que o polinômio nulo  $p(x) = 0$  é o elemento neutro, e de produto de polinômios, em que polinômio constante  $p(x) = 1$  desempenha o papel de identidade. Pode-se mostrar que  $(K[x], +, \cdot)$  é um domínio de integridade.

Se  $D$  é um domínio de integridade, então de modo inteiramente análogo à construção de  $K[x]$ , onde  $K$  é um corpo, pode-se construir um domínio de integridade  $D[x]$  em que todos os polinômios na indeterminada  $x$  têm coeficientes em  $D$ . Um exemplo importante dessa construção é o domínio  $K[x, y]$  dos polinômios em duas indeterminadas  $x$  e  $y$  com coeficientes em um corpo  $K$ . Isto é equivalente a construir o domínio  $D[y]$  em uma indeterminada  $y$  onde  $D = K[x]$ , o domínio dos polinômios na indeterminada  $x$  com coeficientes em  $K$ . Desta construção  $x \cdot y = y \cdot x$  em  $D[y] = K[x, y]$ . De modo análogo pode-se estender essa construção para os domínios  $K[x_1, \dots, x_n]$  dos polinômios em  $n$  indeterminadas  $x_1, \dots, x_n$  com coeficientes em um corpo  $K$ .

Funções simétricas são invariantes sob a ação do grupo simétrico (ou permutações)  $S_N$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_N)$  representa um conjunto de variáveis, uma função  $\mathcal{F}(x)$  é dita simétrica se for invariante sob troca de suas variáveis, ou seja

$$K_{ij}\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x), \quad \forall i, j$$

onde  $K_{ij}$  é o operador de transposição (ou *exchange*), cuja ação é definida por

$$K_{i,j}f(x_i, x_j) = f(x_j, x_i)K_{i,j}, \quad (\text{B.2})$$

em que  $f(x_i, x_j)$  representa uma função ou operador.

O grupo simétrico  $S_n$  atua no anel polinomial  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  permutando os  $x$ 's. Seja

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$$

o subanel dos polinômios simétricos em  $x_1, \dots, x_n$ . Existe uma inclusão natural de  $\Lambda_n$  em  $\Lambda_{n+1}$  que consiste em fazer a indeterminada  $x_{n+1} = 0$ . Também é conveni-

ente considerar o limite formal  $\Lambda$  de  $\Lambda_n$  quando  $n$  tende a infinito. Neste caso, os elementos de  $\Lambda$  não são mais polinômios, sendo tradicionalmente chamados funções simétricas.

Nas próximas seções listaremos várias bases para o anel de polinômios simétricos, que serão indexadas por *partições*.

### B.1.1 Partições

Uma partição é uma seqüência decrescente de inteiros não negativos

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell), \quad (\text{B.3})$$

onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_\ell \geq 1$ . Os inteiros  $\lambda_i$  são chamados partes de  $\lambda$ . O comprimento da partição,  $\ell = \ell(\lambda)$ , é o número de partes de  $\lambda$ . O peso, ou ordem, da partição é dado pela soma das partes

$$|\lambda| = \sum_{j=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_j. \quad (\text{B.4})$$

Seja  $\mathcal{P}_n$  o conjunto de todas as partições de  $n$ , ou seja, partições tais que  $|\lambda| = n$ . O número de elementos de  $\mathcal{P}_n$  pode ser obtido pela função geratriz

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n. \quad (\text{B.5})$$

Os primeiros  $p_n$ 's são  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 3$  e  $p_4 = 5$ . Por exemplo, existem 5 partições de  $n = 4$ , são elas: (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1) e (1, 1, 1, 1).

Cada partição  $\lambda$  pode ser representada graficamente por um diagrama de Young

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; 1 \leq i \leq \ell(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}. \quad (\text{B.6})$$

Assim como ocorre nas matrizes, a posição  $(i, j)$  refere-se à  $i$ -ésima linha e à  $j$ -ésima coluna. Além disso, os pontos  $(i, j)$  da rede são representados por quadrados. Portanto, o diagrama de Young associado à partição  $\lambda$  consiste em  $\lambda_1$  caixas na linha do topo,  $\lambda_2$  caixas na segunda linha, e assim sucessivamente, todas alinhadas

à esquerda. O conjugado da partição  $\lambda$ , representado por  $\lambda'$ , é a partição cujo diagrama é o transposto de  $\lambda$ . A figura B.1 mostra um exemplo destes diagramas.

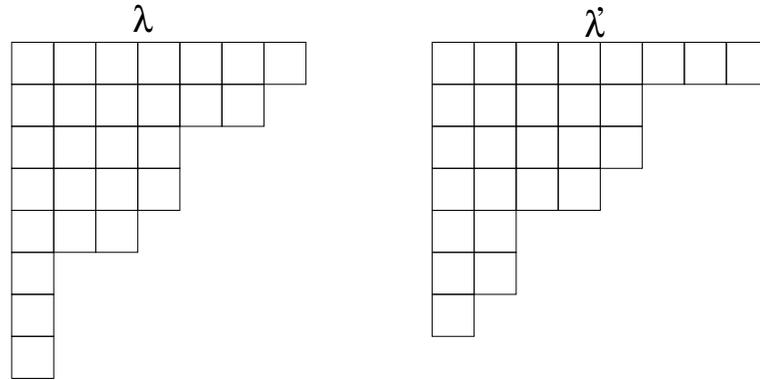


Figura B.1: Tabelas de Young para a partição  $\lambda = (7, 6, 4, 4, 3, 1, 1)$  e sua conjugada  $\lambda' = (8, 5, 5, 4, 2, 2, 1)$

Para cada quadrado  $s = (i, j)$  do diagrama  $\mathcal{D}(\lambda)$ , definimos  $l(s)$ ,  $l'(s)$ ,  $a(s)$  e  $a'(s)$  por

$$a(s) = \lambda_i - j, \quad a'(s) = j - 1 \quad (\text{B.7})$$

$$l(s) = \lambda'_i - i, \quad l'(s) = i - 1, \quad (\text{B.8})$$

que representam o número de quadrados acima, abaixo, à direita e à esquerda do quadrado  $s$ , veja figura B.2. Também definimos função

$$h(s) = l(s) + a(s) + 1, \quad (\text{B.9})$$

que representa o comprimento do “anzol” formado pelo quadrado  $s$  juntamente com os quadrados abaixo e à direita de  $s$ .

### B.1.2 Funções simétricas monomiais

Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  uma partição. Associado a essa partição definimos o monômio

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots \quad (\text{B.10})$$

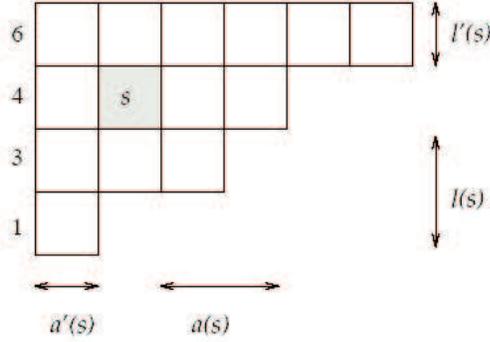


Figura B.2: Braços e pernas associados ao diagrama de Young.

A função monomial simétrica é a soma de todos os monômios distintos obtidos a partir de  $x^\lambda$  pela permutação dos  $x$ 's.

$$m_\lambda = \sum_{P \in S_N} P(x^\lambda) = \sum_{P \in S_N} x_{P(1)}^{\lambda_1} x_{P(2)}^{\lambda_2} \cdots x_{P(n)}^{\lambda_n}. \quad (\text{B.11})$$

A linha no somatório indica que cada termo aparece apenas uma vez. Por exemplo, as funções monomiais simétricas associadas às partições de ordem  $|\lambda| \leq 3$  são dadas por

$$m_{(1)} = \sum_i x_i, \quad (\text{B.12})$$

$$m_{(2)} = \sum_i x_i^2, \quad (\text{B.13})$$

$$m_{(1,1)} = \sum_{i < j} x_i x_j, \quad (\text{B.14})$$

$$m_{(3)} = \sum_i x_i^3, \quad (\text{B.15})$$

$$m_{(2,1)} = \sum_{i < j} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2), \quad (\text{B.16})$$

$$m_{(1,1,1)} = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k. \quad (\text{B.17})$$

A tabela B.1 mostra estas funções monomiais simétricas para o caso específico de quatro variáveis.

Ordem $ \lambda $	Partição $\lambda$	Função monomial $m_\lambda(z)$
0	(0)	1
1	(1)	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
2	(1 <sup>2</sup> )	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
	(2)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$
3	(1 <sup>3</sup> )	$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$
	(21)	$x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_2^2x_4$ $+ x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_3^2x_4 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2$
	(3)	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$

Tabela B.1: Funções monomiais simétricas com peso  $|\lambda| \leq 3$  e  $N = 4$  variáveis.

Se o número de variáveis é menor que o comprimento da partição, a função  $m_\lambda$  correspondente é nula. Para  $\lambda$  percorrendo as partições de comprimento  $\ell(\lambda) \leq n$ , os  $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  formam uma base de  $\Lambda_n$ . Se  $\lambda$  percorre todas as partições,  $m_\lambda$  forma uma base de  $\Lambda$ .

### B.1.3 Funções simétricas elementares

Quando  $\lambda = (1^r)$ ,  $m_\lambda$  é a  $r$ -ésima função simétrica elementar  $e_r$ :

$$e_r = m_{1^r} = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}. \quad (\text{B.18})$$

Para  $r = 0$  define-se  $e_0 = 1$ . Os  $e_r$  podem ser obtidos a partir da função geratriz

$$E(t) = \sum_{r \geq 1} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \quad (\text{B.19})$$

Para cada partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  definimos  $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$ .

### B.1.4 Funções simétricas completas

Para cada  $r \geq 1$ , a  $r$ -ésima função simétrica completa  $h_r$  é definida por

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda, \quad (\text{B.20})$$

a soma é realizada sobre todos os monômios de ordem  $r$ . Para  $r = 0$  definimos  $h_0 = 1$ . A função geratriz para  $h_r$  é

$$H(t) = \sum_{r \geq 1} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} \quad (\text{B.21})$$

### B.1.5 Soma de potências

Para cada  $r \geq 1$ , a  $r$ -ésima soma de potências  $p_r$ , também conhecida como soma de Newton, é definida por

$$p_r = m_{(r)} = \sum_i x_i^r. \quad (\text{B.22})$$

Para  $r = 0$  temos  $p_0 = 1$ . A função geratriz para os  $p_r$ 's é

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{(1 - x_i t)}. \quad (\text{B.23})$$

Integrando os dois lados da equação (B.23) em relação a  $t$ , encontramos

$$\sum_{r \geq 1} \frac{p_r t^r}{r} = -\ln \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t). \quad (\text{B.24})$$

O argumento do logaritmo é a função geratriz das funções simétricas elementares,  $E(t)$ , portanto encontramos uma relação entre as duas funções geratrizes

$$\int^t P(t') dt' = -\ln E(-t), \quad (\text{B.25})$$

que, após ser derivada em relação a  $t$ , pode ser escrita na forma

$$E'(t) = E(t)P(t). \quad (\text{B.26})$$

Em geral, relações entre funções geratrizes possibilitam relacionar diretamente os polinômios e efetuar mudanças de base. Por exemplo, usando as definições de  $E(t)$  e  $P(t)$  podemos escrever

$$ne_n = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}, \quad (\text{B.27})$$

que pode ser resolvida iterativamente. Escrevendo as funções simétricas elementares em função das somas de potências, temos

$$e_0 = p_0 = 1, \quad (\text{B.28})$$

$$e_1 = p_1, \quad (\text{B.29})$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2), \quad (\text{B.30})$$

$$e_3 = \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{2}p_3, \quad (\text{B.31})$$

$$e_4 = \frac{1}{24}p_1^4 - \frac{1}{4}p_1^2p_2 + \frac{1}{3}p_1p_3 + \frac{1}{8}p_2^2 - \frac{1}{4}p_4. \quad (\text{B.32})$$

### B.1.6 Polinômios de Jack

Os polinômios de Jack,  $J_\lambda(x_1, \dots, x_n; \alpha)$ , constituem uma família de polinômios simétricos que dependem de um parâmetro  $\alpha$ . Pertencem ao anel  $\mathbb{Q}(\alpha)[z_1, \dots, z_N]_{S_N}$  dos polinômios simétricos com coeficientes racionais em  $\alpha$ . Eles são unicamente caracterizados pelas condições [44]

1. Ortogonalidade:  $\langle J_\lambda, J_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} j_\lambda$
2. Triangularidade:  $J_\lambda(z; \alpha) = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} v_{\lambda, \mu}(\alpha) m_\mu$
3. Normalização: Se  $|\lambda| = n$  o coeficiente  $v_{\lambda, 1^n}$  de  $x_1 x_2 \cdots x_n$  é  $n!$

onde o produto escalar é definido em termos de somas de Newton

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \alpha^{l(\lambda)} \quad (\text{B.33})$$

onde  $z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$ ,  $m_i$  é o número de partes de  $\lambda$  iguais a  $i$ . Portanto, os polinômios podem ser construídos pelo processo de Gram-Schmidt no anel polinomial. A constante de normalização é dada por

$$j_\lambda = \prod_{s \in \lambda} h_\lambda^*(s) h_\star^\lambda(s). \quad (\text{B.34})$$

Além dos polinômios “J”, existem outras padronizações adotadas na literatura. A padronização “P” é caracterizada por polinômios mônicos, ou seja, com coeficiente do maior monômio igual a 1

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_N) = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} + \dots \quad (\text{B.35})$$

A padronização “C” é especificada pela condição

$$(x_1 + \dots + x_N)^n = \sum_{|\lambda|=n} C_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N), \quad (\text{B.36})$$

sendo úteis na definição de funções hipergeométricas de argumentos matriciais [98]. Os polinômios  $P_\lambda^{(\alpha)}$  e  $C_\lambda^{(\alpha)}$  relacionam-se com  $J_\lambda^{(\alpha)}$  através de

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\alpha^{|\lambda|} k!}{j_\lambda} J_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{B.37})$$

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{H_\lambda^\star} J_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{B.38})$$

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{H_\star^\lambda} P_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{B.39})$$

onde definimos

$$H_\lambda^\star = \prod_{s \in \lambda} h_\lambda^*(s) \quad \text{e} \quad H_\star^\lambda = \prod_{s \in \lambda} h_\star^\lambda(s). \quad (\text{B.40})$$

Alguns exemplos de polinômios de Jack expandidos na base de funções monomiais simétricas são mostrados na tabela B.2

Ordem $ \lambda $	Partição $\lambda$	Polinômio de Jack $P_\lambda^{(\alpha)}$
0	(0)	$m_{(0)}$
1	(1)	$m_{(1)}$
2	(1 <sup>2</sup> )	$m_{(1^2)}$
	(2)	$m_{(2)} + \frac{2}{1+\alpha}m_{(1^2)}$
3	(1 <sup>3</sup> )	$m_{(1^3)}$
	(21)	$m_{(21)} + \frac{6}{2+\alpha}m_{(1^3)}$
	(3)	$m_{(3)} + \frac{3}{1+2\alpha}m_{(21)} + \frac{6}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}m_{(1^3)}$
4	(1 <sup>4</sup> )	$m_{(1^4)}$
	(21 <sup>2</sup> )	$m_{(21^2)} + \frac{12}{3+\alpha}m_{(1^4)}$
	(2 <sup>2</sup> )	$m_{(2^2)} + \frac{2}{1+\alpha}m_{(21^2)} + \frac{12}{(1+\alpha)(2+\alpha)}m_{(1^4)}$
	(31)	$m_{(31)} + \frac{2}{1+\alpha}m_{(31)} + \frac{5+3\alpha}{(1+\alpha)^2}m_{(21^2)} + \frac{12}{(1+\alpha)^2}m_{(1^3)}$
	(4)	$m_{(4)} + \frac{4}{1+3\alpha}m_{(31)} + \frac{6(1+\alpha)}{(1+2\alpha)(1+3\alpha)}m_{(2^2)}$ $+ \frac{12}{(1+2\alpha)(1+3\alpha)}m_{(21^2)} + \frac{24}{(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}m_{(1^4)}$

Tabela B.2: Polinômios de Jack como peso  $|\lambda| \leq 4$

Os polinômios de Jack generalizam vários tipos de polinômios simétricos

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow \begin{cases} s_\lambda(x_1, \dots, x_N) & \text{(Funções de Schur)} & , \quad \alpha \rightarrow 1 \\ m_\lambda(x_1, \dots, x_N) & \text{(Funções monomiais)} & , \quad \alpha \rightarrow \infty \\ Z_\lambda(x_1, \dots, x_N) & \text{(Funções zonais)} & , \quad \alpha \rightarrow 2 \\ e_{\lambda'}(x_1, \dots, x_N) & \text{(Funções elementares)} & , \quad \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

onde  $\lambda'$  é a partição conjugada. Os polinômios de Jack  $P_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N)$ , com  $\ell(\lambda) \leq N$ , também podem ser definidos como funções que satisfazem à equação de autovalor

$$\hat{D}(\alpha)J_\lambda^{(\alpha)} = d_\lambda J_\lambda^{(\alpha)}, \quad (\text{B.42})$$

onde  $\hat{\mathcal{D}}(\alpha)$  é o operador diferencial

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2}{\alpha} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (\text{B.43})$$

com autovalor

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[ \lambda_i - 1 - \frac{2}{\alpha}(i-1) \right] + |\lambda|(N-1) \quad (\text{B.44})$$

$$= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[ \lambda_i - 1 + \frac{2}{\alpha}(N-i) \right]. \quad (\text{B.45})$$

Esta definição é mais útil para os nossos propósitos e será usada nos próximos capítulos. Além disso, os polinômios de Jack são funções simétricas de grau  $|\lambda|$ , ou seja

$$J_\lambda^{(\alpha)}(tx_1, \dots, tx_N) = t^{|\lambda|} J_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N). \quad (\text{B.46})$$

Portanto, satisfazem à equação de autovalor

$$\hat{\mathcal{E}} J_\lambda^{(\alpha)} = |\lambda| J_\lambda^{(\alpha)}, \quad (\text{B.47})$$

onde  $\hat{\mathcal{E}}$  é o operador de Euler

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{B.48})$$

Neste ponto enfatizamos que o operador (B.43) não é o único usado na literatura para definir os polinômios de Jack, o que pode causar uma certa confusão. Explorando o fato de que  $J_\lambda^{(\alpha)}$  é autovalor do operador de Euler podemos introduzir novos operadores que tem os polinômios de Jack como autofunções. Considere, por exemplo, o seguinte operador

$$\hat{\mathcal{G}}(\alpha) = \hat{\mathcal{D}}(\alpha) + [1 - (N-1)/\alpha] \hat{\mathcal{E}}. \quad (\text{B.49})$$

usando as identidades

$$(N-1) \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i<j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.50})$$

$$\sum_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i<j} \left( \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{x_j^2}{x_j - x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (\text{B.51})$$

chegamos a

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (\text{B.52})$$

Este operador aparece na ref. [114] como definição dos polinômios de Jack através da equação de autovalor

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha) J_\lambda^{(\alpha)} = b_\lambda J_\lambda^{(\alpha)}, \quad (\text{B.53})$$

com

$$b_\lambda = \sum_{i=1}^N [\lambda_i^2 + (N+1-2i)/\alpha]. \quad (\text{B.54})$$

Também aparece na ref. [45] no contexto do modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico. Finalizamos esta seção listando algumas propriedades que serão usadas nos próximos capítulos. Frequentemente precisa-se dos polinômios de Jack avaliados em  $1^N = (x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_N = 1)$ . Diferentes padronizações assumem valores diferentes. Em particular temos

$$C_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{j_\lambda} \prod_{(i,j) \in \lambda} (N - (i-1) + \alpha(j-1)). \quad (\text{B.55})$$

Um resultado importante que permite trabalhar com duas classes de indeterminadas  $x = (x_1, x_2, \dots)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots)$  é a identidade de Cauchy

$$\sum_\lambda \frac{1}{j_\lambda} J_\lambda^{(\alpha)}(x) J_\lambda^{(\alpha)}(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1/\alpha}. \quad (\text{B.56})$$

# Apêndice C

## O método de Gurappa

Recentemente Gurappa e colaboradores [75, 76, 77] publicaram um novo método de solução de equações diferenciais lineares baseado num mapa entre o espaço de soluções e o espaço de monômios. Além de produzir novas expressões para as soluções, o método permite deduzir várias propriedades dos polinômios ortogonais de uma maneira unificada. A idéia do método é baseada no fato de que o operador de Euler é diagonal no espaço de monômios, ou seja,  $\hat{E}x^\lambda = \lambda x^\lambda$  e que qualquer operador diferencial ou monômio,  $\hat{O}^\alpha$ , tem grau  $\alpha$  em relação ao operador de Euler, i.e.  $[\hat{E}, \hat{O}^\alpha] = \alpha \hat{O}^\alpha$ . Além disso o método é facilmente estendido para o caso de muitas variáveis. Neste apêndice, apresentaremos a solução de Gurappa para algumas equações diferenciais ordinárias e parciais. Além disso, mostraremos como o método pode ser usado na construção dos polinômios de Jack.

### C.1 O mapa

Uma equação diferencial ordinária pode ser escrita na forma

$$[F(\hat{E}) + P(x, \hat{D})]y(x) = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\hat{E} = x \frac{d}{dx}$  é o operador de Euler,  $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ ,  $F(\hat{E}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \hat{E}^n$  e  $P(x, \hat{D})$  é uma função polinomial arbitrária. A solução de Gurappa é especificada no seguinte

teorema:

**Teorema C.1** *A equação (C.1) tem uma solução dada por*

$$y(x) = C_\lambda \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{F(\hat{E})} P(x, \hat{D}) \right]^m \right\} x^\lambda, \quad (\text{C.2})$$

desde que  $F(\hat{E})x^\lambda = 0$  e  $C_\lambda$  seja uma constante.

A equação (C.1) conecta uma solução da equação diferencial com o espaço de monômios. Deve-se notar que  $F(\hat{E})$  é diagonal neste espaço, portanto, sua inversa é bem definida. A prova de (C.1) é simples e segue por substituição direta.

$$\begin{aligned} & [F(\hat{E}) + P(x, \hat{D})] \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{F(\hat{E})} P(x, \hat{D}) \right]^m \right\} x^\lambda \\ &= F(\hat{E}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{F(\hat{E})} P(x, \hat{D}) \right]^m x^\lambda + F(\hat{E}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{F(\hat{E})} P(x, \hat{D}) \right]^{m+1} x^\lambda \\ &= F(\hat{E})x^\lambda \\ &= 0. \end{aligned}$$

Este resultado é geral e serve como alternativa aos métodos de expansão em série de potências de Fuchs-Frobenius. Além disso, o método revela de forma natural a estrutura algébrica das soluções, fornecendo um algoritmo para a construção das mesmas. Outra representação bastante útil pode ser obtida com o auxílio do seguinte teorema:

**Teorema C.2** *Se os operadores  $\hat{F} \equiv F(\hat{E})$  e  $\hat{P} \equiv P(x, \hat{D})$  satisfazem às condições*

$$[\hat{F}, \hat{P}] = \alpha \hat{P} \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{F}f(x) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{P}f(x) \neq 0, \quad (\text{C.5})$$

onde  $\alpha$  é uma constante e  $f(x)$  é uma função bem comportada de modo que todas as derivadas façam sentido, então a série pode ser somada formalmente, resultando

em

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\hat{F}^{-1} \hat{P})^m f(x) = \exp\left(-\hat{P}/\alpha\right) f(x) \quad (\text{C.6})$$

**Prova:** Vamos inicialmente mostrar que

$$(\hat{F}^{-1} \hat{P})^m f(x) = \frac{1}{m! \alpha^m} \hat{P}^m f(x), \quad (\text{C.7})$$

que poder ser provado por indução.

*i)*  $m = 1$

$$\begin{aligned} \hat{F}^{-1} \hat{P} f(x) &= \frac{1}{\alpha} \hat{F}^{-1} [\hat{F}, \hat{P}] f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha} \hat{F}^{-1} (\hat{F} \hat{P} - \hat{P} \hat{F}) f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha} \hat{P} f(x) \end{aligned}$$

*ii)* Vamos supor que a relação é verdadeira para  $m$  e checar a validade para o sucessor  $m + 1$

$$(\hat{F}^{-1} \hat{P})^{m+1} f(x) = \hat{F}^{-1} \hat{P} (\hat{F}^{-1} \hat{P})^m f(x) = \frac{1}{m! \alpha^m} \hat{F}^{-1} \hat{P}^{m+1} f(x)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \hat{F} \hat{P}^{m+1} f(x) &= ([\hat{F}, \hat{P}^{m+1}] + \hat{P}^{m+1} \hat{F}) f(x) \\ &= \sum_{k=0}^m \hat{P}^k [\hat{F}, \hat{P}] \hat{P}^{m-k} f(x) \\ &= (m+1) \alpha \hat{P}^{m+1} f(x), \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\hat{F}^{-1} \hat{P}^{m+1} f(x) = \frac{1}{(m+1) \alpha} \hat{P}^{m+1} f(x). \quad (\text{C.8})$$

Portanto

$$(\hat{F}^{-1} \hat{P})^{m+1} f(x) = \frac{1}{(m+1)! \alpha^{m+1}} \hat{F}^{-1} \hat{P}^{m+1} f(x), \quad (\text{C.9})$$

o que completa a prova de (C.7). Portanto,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\hat{F}^{-1} \hat{P})^m f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \alpha^m} \hat{P}^m f(x) = \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \hat{P}\right) f(x), \quad (\text{C.10})$$

o que completa a prova do teorema.

Em alguns casos  $F(\hat{E})$  pode ser fatorado  $F(\hat{E}) = F_1(\hat{E})F_2(\hat{E})$  e o seguinte teorema torna-se necessário.

**Teorema C.3** *Se os operadores  $\hat{F}_1$ ,  $\hat{F}_2$  e  $\hat{P}$  satisfazem às condições*

$$[\hat{F}_1, \hat{P}] = \alpha \hat{P}, \quad [\hat{F}_1, \hat{F}_2] = 0, \quad \hat{F}_2 f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{P} f(x) \neq 0, \quad (\text{C.11})$$

então

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (F_1 \hat{F}_2^{-1} \hat{P})^m f(x) = \exp\left(-\hat{F}_2^{-1} \hat{P} / \alpha\right) f(x). \quad (\text{C.12})$$

A prova deste teorema segue as mesmas linhas do teorema C.2 e não a apresentaremos.

## C.2 Exemplos

Para adquirir mais familiaridade com o método, vamos aplicá-lo a alguns problemas específicos.

### 1. Polinômios de Hermite

Considere a equação de Hermite

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right] y(x) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Na formulação de Gurappa esta equação pode ser escrita como

$$\left[ \hat{E} - n - \frac{1}{2} \hat{D}^2 \right] y(x) = 0. \quad (\text{C.14})$$

Esta equação tem exatamente a forma (C.1) com  $F(\hat{E}) = \hat{E} - n$  e  $P(x, \hat{D}) = -\frac{1}{2}\hat{D}^2$ . A condição  $F(\hat{E})x^\lambda = 0$  implica  $\lambda = n$ , portanto, de acordo com o teorema C.1, podemos escrever uma solução como

$$y(x) = C_n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{\hat{E} - n} P(x, \hat{D}) \right]^m \right\} x^n. \quad (\text{C.15})$$

Além disso, os operadores satisfazem à seguinte condição de comutação

$$[\hat{F}, \hat{P}] = -\frac{1}{2}[\hat{E}, \hat{D}^2] = \hat{D}^2 = -2\hat{P}. \quad (\text{C.16})$$

Portanto, pelo teorema C.2, podemos escrever a solução na forma

$$y(x) = 2^n \exp\left(-\frac{1}{4}\hat{D}^2\right) x^n, \quad (\text{C.17})$$

onde a escolha  $C_n = 2^n$  fixa a normalização usual dos polinômios de Hermite.

## 2. Polinômios de Laguerre

A equação de Laguerre

$$\left[ x \frac{d^2}{dx^2} + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx} + n \right] y(x) = 0. \quad (\text{C.18})$$

Na formulação de Gurappa esta equação pode ser escrita como

$$\left[ \hat{E} - n - x\hat{D}^2 - (\nu + 1)\hat{D} \right] y(x) = 0. \quad (\text{C.19})$$

Esta equação tem exatamente a forma (C.1) com  $F(\hat{E}) = \hat{E} - n$  e  $P(x, \hat{D}) = -x\hat{D}^2 - (\nu + 1)\hat{D}$ . A condição  $F(\hat{E})x^\lambda = 0$  implica  $\lambda = n$ , portanto podemos escrever a solução como

$$y(x) = C_n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{\hat{E} - n} P(x, \hat{D}) \right]^m \right\} x^n \quad (\text{C.20})$$

Além disso, usando os comutadores  $[\hat{E}, \hat{D}] = -\hat{D}$  e  $[\hat{E}, x\hat{D}^2] = -x\hat{D}^2$  concluímos que  $[\hat{F}, \hat{P}] = -P$ . Portanto, de acordo com o teorema **B.2**, a solução fica

$$y(x) = C_n \exp(\hat{P})x^n. \quad (\text{C.21})$$

Escolhendo  $C_n = (-1)^n/n!$ , temos os polinômios de Laguerre

$$y(x) = L_n^\nu(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \exp\left(-x \frac{d^2}{dx^2} - (\nu + 1) \frac{d}{dx}\right) x^n. \quad (\text{C.22})$$

A tabela C.1 mostra um resumo de soluções dos polinômios ortogonais clássicos obtidas com o método de Gurappa.

Equação diferencial	$F(\hat{E})$	Solução
$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n\right] H_n(x) = 0$	$\hat{E} - n$	$H_n(x) = C_n \exp[-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}] x^n$
$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx} + n\right] y(x) = 0.$	$\hat{E} - n$	$L_n^\nu(x) = C_n \exp[-x \frac{d^2}{dx^2} - (\nu + 1) \frac{d}{dx}] x^n$
$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + n(n + 1)\right] P_n(x) = 0$	$(\hat{E} + n + 1)(\hat{E} - n)$	$P_n(x) = C_n \exp[-\frac{1}{2(\hat{E} + n + 1)} \frac{d^2}{dx^2}] x^n$
$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} + n^2\right] T_n(x) = 0$	$(\hat{E} + n)(\hat{E} - n)$	$T_n(x) = C_n \exp[-\frac{1}{2(\hat{E} + n)} \frac{d^2}{dx^2}] x^n$
$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 3x \frac{d}{dx} + n(n + 2)\right] U_n(x) = 0$	$(\hat{E} + n + 2)(\hat{E} - n)$	$U_n(x) = C_n \exp[-\frac{1}{2(\hat{E} + n + 2)} \frac{d^2}{dx^2}] x^n$
$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - (2\lambda + 1)x \frac{d}{dx} + n(n + 2\lambda)\right] \times$ $\times C_n^\lambda(x) = 0$	$(\hat{E} + n + 2\lambda)(\hat{E} - n)$	$C_n^\lambda(x) = C_n \exp[-\frac{1}{2(\hat{E} + n + 2\lambda)} \frac{d^2}{dx^2}] x^n$

Tabela C.1: Soluções de Gurappa para as polinômios ortogonais clássicos. Na ordem de cima para baixo estão listados os polinômios de Hermite, Laguerre, Legendre, Chebyshev tipo I, Chebyshev tipo II e Gegenbauer. Não é possível encontrar uma forma exponencial para os polinômios de Jacobi.

### C.3 Generalização para mais de uma variável

A generalização para o casos de  $N$  variáveis é imediata [75]. Neste caso, uma equação diferencial parcial pode ser escrita na forma

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left( \sum_i \hat{E}_i^n \right) + \hat{P} \right) y(\{x\}) = 0, \quad (\text{C.23})$$

onde introduzimos o operador de Euler associado a  $i$ -ésima variável

$$\hat{E}_i \equiv x_i \frac{d}{dx_i}. \quad (\text{C.24})$$

O operador  $\sum_i \hat{E}_i^n$  é diagonal no espaço das funções monomiais simétricas,  $m_\lambda(\{x\})$ , com autovalores  $\sum_i \lambda_i^n$ , portanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_n \left( \sum_i \hat{E}_i^n \right) - a_n \left( \sum_i \lambda_i^n \right) \right) m_\lambda(\{x\}) = 0. \quad (\text{C.25})$$

Supondo que a ação de  $\hat{P}$  no espaço das funções monomiais simétricas seja dada por

$$\hat{P}m_\lambda = \epsilon_\lambda m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} C_{\mu\lambda} m_\mu, \quad (\text{C.26})$$

a solução da equação (C.23) é dada por

$$y(\{x\}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_n \left( \sum_i \hat{E}_i^n \right) - a_n \left( \sum_i \lambda_i^n \right) \right)} (\hat{P} - \epsilon_\lambda) \right]^k m_\lambda(\{x\}), \quad (\text{C.27})$$

com  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left( \sum_i \lambda_i^n \right) + \epsilon_\lambda = 0$ .

Vimos que os polinômios de Jack são as autofunções do modelo de Calogero-Sutherland trigonométrico. A seguir mostraremos como o método de Gurappa pode ser usado na construção destas autofunções [78]. Estamos interessados em resolver

a equação de autovalor

$$\left[ \sum_{i=1}^N \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] P_\lambda = b_\lambda P_\lambda, \quad (\text{C.28})$$

onde  $P_\lambda$  denota o polinômios de Jack. Na formulação de Gurappa esta equação de autovalor pode ser reescrita na forma

$$\left( \sum_i (\hat{E}_i^2 - \lambda_i^2) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (\hat{E}_i - \hat{E}_j) + \sum_i \lambda_i^2 - b_\lambda \right) P_\lambda = 0, \quad (\text{C.29})$$

cujas solução é dada por

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{S}_\lambda^n m_\lambda \quad (\text{C.30})$$

onde definimos os operadores

$$\hat{S}_\lambda = \frac{1}{\sum_i (\hat{E}_i^2 - \lambda_i^2)} \hat{Z}_\lambda \quad (\text{C.31})$$

e

$$\hat{Z}_\lambda = \frac{1}{\alpha} \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (\hat{E}_i - \hat{E}_j) + \sum_i \lambda_i^2 - b_\lambda. \quad (\text{C.32})$$

A ação do operador  $\hat{Z}_\lambda$  na base de monômios simétricos é dada por [45]

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\lambda m_\lambda &= \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) + \sum_i \lambda_i^2 - b_\lambda \right) m_\lambda \\ &+ \frac{2}{\alpha} \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \sum_{s=1}^{\lambda_i - \lambda_j - 1} m_{(\dots, \lambda_i - s, \dots, \lambda_j + s, \dots)}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Portanto, a ação de  $\hat{S}$  sobre  $m_\lambda$  resulta numa singularidade que pode ser eliminada simplesmente zerando-se o coeficiente de  $m_\lambda$  em (C.33). Desta condição resulta o

espectro do modelo

$$b_\lambda = \sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (\text{C.34})$$

$$= \sum_i \left[ \lambda_i^2 + \frac{1}{\alpha} (N + 1 - 2i) \lambda_i \right], \quad (\text{C.35})$$

que está de acordo com a equação (B.54). Com esta escolha para  $b_\lambda$  podemos escrever a expressão final para os polinômios de Jack

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{\alpha} \right)^n \hat{S}_\lambda^n m_\lambda \quad (\text{C.36})$$

onde

$$\hat{S}_\lambda = \frac{1}{\sum_i (\hat{E}_i^2 - \lambda_i^2)} \left( \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (\hat{E}_i - \hat{E}_j) - \sum_i (N + 1 - 2i) \lambda_i \right). \quad (\text{C.37})$$

A equação (C.36) pode ser usada na construção dos polinômios de Jack mostrados na tabela B.2. Como exemplo vamos considerar os polinômios de ordem dois, ou seja  $|\lambda| = 2$ .

### 1. $\lambda = (2)$

De acordo com a eq. (C.36) os polinômios são dados por

$$P_{(2)} = m_{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{\alpha} \right)^n \hat{S}_{(2)}^n m_{(2)}. \quad (\text{C.38})$$

A ação do operador  $\hat{S}$  na base de monômios é dada por

$$\hat{S}_{(2)} m_{(1,1)} = m_{1,1}, \quad (\text{C.39})$$

$$\hat{S}_{(2)} m_{(2)} = -2 m_{1,1}. \quad (\text{C.40})$$

O que nos permite escrever  $(\hat{S}_{(2)})^n m_{(2)} = -2 m_{1,1}$ . Portanto

$$P_{(2)} = m_{(2)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{\alpha} \right)^n m_{(1,1)} \quad (\text{C.41})$$

$$= m_{(2)} + \frac{2}{1+\alpha} m_{(1,1)}. \quad (\text{C.42})$$

## 2. $\lambda = (1, 1)$

Neste caso

$$P_{(1,1)} = m_{(1,1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{\alpha} \right)^n \hat{S}_{(1,1)}^n m_{(1,1)}. \quad (\text{C.43})$$

A ação do operador  $\hat{S}_{(1,1)}$  é dada por  $\hat{S}_{(1,1)} m_{(1,1)} = 0$ , portanto

$$P_{(1,1)} = m_{(1,1)}. \quad (\text{C.44})$$

O método de Gurappa também pode ser usado na obtenção das generalizações multidimensionais dos polinômios clássicos. Por exemplo, vimos na seção 4.2 que os polinômios de Hermite generalizados satisfazem à equação de autovalor

$$\left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_\lambda \right] H_\lambda = 0. \quad (\text{C.45})$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\left( \sum_{i=1}^N 2(\hat{E}_i - \lambda_i) - \hat{A} + \varepsilon_\lambda + 2 \sum_i \lambda_i \right) H_\lambda = 0, \quad (\text{C.46})$$

onde introduzimos o operador

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{j \neq (i)} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{C.47})$$

Portanto, a solução da equação diferencial pode ser escrita como

$$H_\lambda = c_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\sum_i 2(\hat{E}_i - \lambda_i)} (\varepsilon_\lambda - \sum_i \lambda_i - \hat{A}) \right)^n m_\lambda, \quad (\text{C.48})$$

onde  $c_\lambda$  é uma constante. Note que a ação do operador  $\hat{A}$  sobre uma base de funções monomiais  $m_\lambda$  reduz a ordem dos monômios  $|\lambda|$  para  $|\lambda| - 2$ , portanto, não produz termos diagonais. Os termos diagonais produzem singularidades e são evitados com a imposição

$$\varepsilon_\lambda = -2 \sum_i \lambda_i = -2|\lambda|, \quad (\text{C.49})$$

portanto a eliminação das singularidade fornece os autovalores. Desta forma, a solução passa a ser escrita como

$$H_\lambda = c_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sum_i 2(\hat{E}_i - \lambda_i)} \hat{A} \right)^n m_\lambda. \quad (\text{C.50})$$

Os operadores da eq. (C.50) satisfazem à relação de comutação

$$\left[ \sum_i 2(\hat{E}_i - \lambda_i), \hat{A} \right] = -4 \hat{A}, \quad (\text{C.51})$$

e podemos usar o teorema C.2 para escrever a solução na forma de um operador exponencial atuando no espaço de monômios conhecida como fórmula de Lassale [72]

$$H_\lambda = c_\lambda e^{-\hat{A}/4} m_\lambda. \quad (\text{C.52})$$

Vale salientar que poderíamos escolher os próprios polinômios de Jack em vez dos monômios simétricos para a construção da solução. Esta escolha é a usada na ref. [72], onde os autores escrevem a seguinte fórmula de Lassalle

$$H_\lambda = \frac{2^{|\lambda|}}{C_\lambda^{2/\beta}(1^N)} e^{-\hat{A}/4} C_\lambda^{2/\beta}, \quad (\text{C.53})$$

onde  $C_\lambda^{2/\beta}$  é o polinômio de Jack na “padronização C” e a constante é fixada em

$c_\lambda = 2^{|\lambda|}/C_\lambda^{2/\beta}(1^N)$ . O mesmo método pode ser empregado para os polinômios de Laguerre generalizados, resultando na fórmula de Lassalle (4.40).

## Apêndice D

# Mudança de variáveis na equação de Fokker-Planck

Nesta seção vamos mostrar como a equação de Fokker-Planck se transforma sob uma mudança de variáveis. Vamos nos concentrar no caso específico da matriz de difusão ser diagonal, ou seja,  $D_{ij}^{(2)} = D_i^{(2)}\delta_{ij}$ . Resultados para uma matriz de difusão geral podem ser encontrados no livro do Risken [71]. Como ponto de partida considere a equação de Fokker-Planck nas variáveis  $\{x\} = (x_1, \dots, x_N)$

$$\frac{\partial P(\{x\}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\{x\}) + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_i^{(2)}(\{x\}) \right] P(\{x\}, t). \quad (\text{D.1})$$

Agora vamos realizar a mudança de variáveis

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(\{x\}, t) = \tilde{x}_i(x_1, \dots, x_N, t); \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{D.2})$$

Deve-se notar que a mudança de variáveis não altera a probabilidade de encontrar o sistema num dado elemento de volume, ou seja

$$P d^N x = \tilde{P} d^N \tilde{x}. \quad (\text{D.3})$$

Portanto, as densidades de probabilidade  $P$  e  $\tilde{P}$  relacionam-se por

$$\tilde{P} = JP, \quad (\text{D.4})$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação

$$J = \frac{d^N x}{d^N \tilde{x}} = \left| \text{Det} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right|. \quad (\text{D.5})$$

A equação de Fokker-Planck nas variáveis novas pode ser escrita como

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left[ -\tilde{D}_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{D}_i^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_i^2} \right] \tilde{P}, \quad (\text{D.6})$$

onde os novos coeficientes de deriva e de difusão novos são expressos em termos dos antigos por

$$\tilde{D}_i^{(1)} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} D_j^{(1)} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial x_j^2} D_j^{(2)} \right], \quad (\text{D.7})$$

$$\tilde{D}_j^{(2)} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \right)^2 D_j^{(2)}. \quad (\text{D.8})$$

Estas são as regras de transformação usadas na seção 4.3.

# Apêndice E

## Equação de movimento para a função de correlação de $n$ -pontos

Usando a equação (4.66) com  $F$  dado pela eq. (6.53) obtemos a equação de movimento da função de  $n$ -pontos  $\rho_n = \rho_n(x_1, \dots, x_n; t)$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \sum_{\{l\}}' \left\langle \mathcal{L}_{FP}^\dagger \prod_{i=1}^n \delta(x_i - y_{l_i}) \right\rangle \quad (\text{E.1})$$

A ação do operador de Fokker-Planck adjunto  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$  no produto de funções delta pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger \prod_{i=1}^n \delta(x_i - x'_{l_i}) = \sum_{p=1}^n \left( D_{l_p}^{(1)} \frac{\partial}{\partial y_{l_p}} + D_{l_p}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_{l_p}^2} \right) \delta(x_p - y_{l_p}) \prod_{i(\neq p)} \delta(x_i - y_{l_i}) \quad (\text{E.2})$$

$$= \sum_{p=1}^n \left( -\frac{\partial}{\partial y_{l_p}} D_{l_p}^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial y_{l_p}^2} D_{l_p}^{(2)} \right) \Big|_{y_{l_p}=x_p} \delta(x_p - y_{l_p}) \prod_{i(\neq p)} \delta(x_i - y_{l_i}), \quad (\text{E.3})$$

Note que substituímos  $y_{l_p}$  por  $x_p$  na última linha. Usando os coeficientes de deriva

e de difusão definidos pela eq. (4.13) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP}^\dagger \prod_{i=1}^n \delta(x_i - y_{l_i}) &= \sum_{p=1}^n \left[ -\frac{\partial}{\partial x_p} \left( r(x_p) + \beta \sum_{l_{n+1}(\neq l_p)} \frac{s(x_p)}{x_p - y_{l_{n+1}}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} s(x_p) \right] \prod_i \delta(x_i - x_{l_i}) \\
&= \sum_{p=1}^n \left[ -\frac{\partial}{\partial x_p} \left( r(x_p) + \beta s(x_p) \sum_{l_{n+1}(\neq l_p)} \int dx_{n+1} \frac{\delta(x_{n+1} - y_{l_{n+1}})}{x_p - x_{n+1}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} s(x_p) \right] \\
&\quad \times \prod_i \delta(x_i - x_{l_i}) \tag{E.4}
\end{aligned}$$

Substituindo a eq. (E.4) na eq. (E.1) e usando a definição de  $\rho_n$ , eq.(4.68), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_n}{\partial t} &= \sum_{p=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} s(x_p) - \frac{\partial}{\partial x_p} r(x_p) \right] \rho_n \right. \\
&\quad \left. - \beta \frac{\partial}{\partial x_p} s(x_p) \int \frac{dx_{n+1}}{x_p - x_{n+1}} \left\langle \sum_{\{l\}}' \sum_{l_{n+1}(\neq l_p)} \prod_{i=1}^{n+1} \delta(x_i - y_{l_i}) \right\rangle \right\}. \tag{E.5}
\end{aligned}$$

O valor médio que aparece na integral pode ser escrito como

$$\left\langle \sum_{\{l\}}' \sum_{l_{n+1}(\neq l_p)} \prod_{i=1}^{n+1} \delta(x_i - x_{l_i}) \right\rangle = \rho_n(x_1, \dots, x_n; t) \sum_{q(\neq p)} \delta(x_{n+1} - x_q) + \rho_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}; t). \tag{E.6}$$

Substituindo (E.6) em (E.5) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_n}{\partial t} &= \sum_{p=1}^n \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} s(x_p) - \frac{\partial}{\partial x_p} \left( r(x_p) - \beta \sum_{q(\neq p)} \frac{s(x_p)}{x_p - x_q} \right) \right] \rho_n \\
&\quad - \beta \frac{\partial}{\partial x_p} s(x_p) \int dx_{n+1} \frac{\rho_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})}{x_p - x_{n+1}}, \tag{E.7}
\end{aligned}$$

que, com as definições de  $r(x)$  e  $J_\beta$ , resulta na equação de movimento (4.71).

# Apêndice F

## Construção do operador de Fokker-Planck no espaço imagem

O operador de Fokker-Planck no espaço imagem é construído a partir da relação  $\mathcal{M}_\nu^\dagger \Omega = \mathcal{L}_x^\dagger \Omega$ . É conveniente escrever o operador de Fokker-Planck no espaço imagem forma

$$\mathcal{M}_\nu^\dagger = \sum_{k=1}^{n_0} \left( D_{0,k}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \nu_{0,k}} + D_{0,k}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \nu_{0,k}^2} \right) + \sum_{l=1}^{n_1} \left( D_{1,l}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \nu_{1,l}} + D_{1,l}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \nu_{1,l}^2} \right). \quad (\text{F.1})$$

A fim de determinar a ação de  $\mathcal{M}_\nu^\dagger$  sobre  $\Omega$  precisamos das seguintes derivadas

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_{0k}} = - \sum_i \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_{1l}} = \frac{\beta}{2} \sum_i \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \nu_{0k}^2} = - \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{1}{x_j - \nu_{0k}} \right) \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \nu_{1l}^2} = \frac{\beta(\beta+2)}{4} \sum_i \frac{1}{(x_i - \nu_{1l})^2} - \frac{\beta^2}{4} \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} - \frac{1}{x_j - \nu_{1l}} \right) \quad (\text{F.5})$$

Desta forma encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega} \mathcal{M}_\nu^\dagger \Omega &= \sum_i \left( - \sum_k \frac{D_{0k}^{(1)}}{x_i - \nu_{0k}} + \frac{\beta}{2} \sum_l \frac{D_{1l}^{(1)}}{x_i - \nu_{1l}} \right) + \frac{\beta(\beta+2)}{4} \sum_{i,l} \frac{D_{1l}^{(2)}}{x_i - \nu_{1l}} \\
&+ \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left[ \sum_k D_{0k}^{(2)} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{1}{x_j - \nu_{0k}} \right) \right. \\
&\left. + \frac{\beta^2}{4} \sum_l D_{1l}^{(2)} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} - \frac{1}{x_j - \nu_{1l}} \right) \right]. \tag{F.6}
\end{aligned}$$

Para lado direito é conveniente usar a forma simetrizada do operador adjunto

$$\mathcal{L}_x^\dagger = \sum_i \left( r(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left( s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - s(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{F.7}$$

A ação deste operador sobre o núcleo é determinada com o auxílio das derivadas

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \sum_k \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{\beta}{2} \sum_l \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i^2} &= \frac{\beta(\beta+2)}{4} \sum_l \frac{1}{(x_i - \nu_{1l})^2} + \sum_{k \neq k'} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{0k'}} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{1}{x_i - \nu_{0k'}} \right) \\
&+ \frac{\beta^2}{4} \sum_{l \neq l'} \frac{1}{\nu_{1l} - \nu_{1l'}} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} - \frac{1}{x_i - \nu_{1l'}} \right) \\
&- \beta \sum_{k,l} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{1l}} \left( \frac{1}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{1}{x_i - \nu_{1l}} \right). \tag{F.9}
\end{aligned}$$

Resultando em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega} \mathcal{L}_\nu^\dagger \Omega = & \\
& \sum_i \left( \sum_k \frac{r(x_i)}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{\beta}{2} \sum_l \frac{r(x_i)}{x_i - \nu_{1l}} \right) \\
& + \sum_i \left\{ \frac{\beta(\beta+2)}{4} \sum_l \frac{s(x_i)}{(x_i - \nu_{1l})^2} - \beta \sum_{k,l} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{1l}} \left( \frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{s(x_i)}{x_j - \nu_{1l}} \right) \right. \\
& + \sum_{k \neq k'} \frac{1}{\nu_{0k} - \nu_{0k'}} \left( \frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{s(x_i)}{x_j - \nu_{0k'}} \right) + \left. \frac{\beta^2}{4} \sum_{l \neq l'} \frac{1}{\nu_{1l} - \nu_{1l'}} \left( \frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{1l}} - \frac{s(x_i)}{x_j - \nu_{1l'}} \right) \right\} \\
& + \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \left[ \frac{1}{x_i - x_j} \sum_k \left( \frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{0k}} - \frac{s(x_j)}{x_j - \nu_{0k}} \right) - \frac{\beta}{2} \sum_l \left( \frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{1l}} - \frac{s(x_j)}{x_j - \nu_{1l}} \right) \right]. \quad (\text{F.10})
\end{aligned}$$

Igualando as equações (F.6) e (F.10), e com o auxílio das identidades

$$\frac{r_0 + r_1 x_i}{x_i - \nu_{\alpha k}} = r_1 + \frac{r_0 + r_1 \nu_{\alpha k}}{x_i - \nu_{\alpha k}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{s(x_i)}{x_i - \nu_{\alpha k}} = s_1 + s_2(x_i + \nu_{\alpha k}) + \frac{s(\nu_{\alpha k})}{x_i - \nu_{\alpha k}}, \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{s(x_i)}{(x_i - \nu_{\alpha k})^2} = s_2 + \frac{s_1 + 2s_2 \nu_{\alpha k}}{x_i - \nu_{\alpha k}} + \frac{s(\nu_{\alpha k})}{(x_i - \nu_{\alpha k})^2}, \quad (\text{F.13})$$

determinamos os coeficientes de deriva e de difusão

$$D_{0k}^{(1)} = -r(\nu_{0k}) - 2 \sum_{k'(\neq k)} \frac{s(\nu_{0k})}{\nu_{0,k} - \nu_{0,k'}} + \beta \sum_l \frac{s(\nu_{0k})}{\nu_{0,k} - \nu_{1,l}}, \quad (\text{F.14})$$

$$D_{1l}^{(1)} = \frac{\beta+2}{2} s'(\nu_{1l}) - r(\nu_{1l}) + \beta \sum_{l'(\neq l)} \frac{s(\nu_{1l})}{\nu_{1,l} - \nu_{1,l'}} - 2 \sum_k \frac{s(\nu_{1l})}{\nu_{1,l} - \nu_{0,k}}, \quad (\text{F.15})$$

$$D_{0k}^{(2)} = -\frac{\beta}{2} s(\nu_{0k}), \quad (\text{F.16})$$

$$D_{1l}^{(2)} = s(\nu_{1l}). \quad (\text{F.17})$$

Os coeficientes de deriva podem convenientemente ser rescritos em termos de  $B$ , eq. (5.18), na forma

$$D_{0k}^{(1)} = -r(\nu_{0k}) - \frac{\beta}{2}s(\nu_{0k})\frac{\partial \ln B}{\partial \nu_{0k}}, \quad (\text{F.18})$$

$$D_{1l}^{(1)} = \frac{\beta + 2}{2}s'(\nu_{1l}) - r(\nu_{1l}) + s(\nu_{1l})\frac{\partial \ln B}{\partial \nu_{1l}}. \quad (\text{F.19})$$

Além disso, a partir da definição de  $V$ , eq. (5.17), o seguinte é verdadeiro

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \nu_{0k}}[s(\nu_{0k})V] = \frac{2}{\beta}r(\nu_{0k}) \quad (\text{F.20})$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \nu_{1l}}[s(\nu_{1l})V] = \frac{\beta + 2}{2}s'(\nu_{1l}) - r(\nu_{1l}), \quad (\text{F.21})$$

onde  $s'$  indica a primeira derivada de  $s$ . Combinando as equações (F.18), (F.19), (F.20) e (F.21), obtemos

$$D_{0k}^{(1)} = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{VB}\frac{\partial [s(\nu_{0k})VB]}{\partial \nu_{0k}} \quad (\text{F.22})$$

$$D_{1l}^{(1)} = \frac{1}{VB}\frac{\partial [s(\nu_{1l})VB]}{\partial \nu_{1l}}. \quad (\text{F.23})$$

# Bibliografia

- [1] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, New York, 1991.
- [2] J. Okolowicz, M. Płoszajczak, and I. Rotter. Dynamics of quantum systems embedded in a continuum. *Physics Reports*, 374:271, 2003.
- [3] D. K. Ferry and S. M. Goodnick. *Transport in Nanostructures*. Cambridge, 1995.
- [4] H.-J. Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge Univ. Press, Academic, New York, 2000.
- [5] T. Guhr, A. M. Groeling, and H. A. Weidenmüller. Random matrix theories in quantum physics: Common concepts. *Physics Reports*, 229:190–425, 1998.
- [6] P. J. Forrester, N. S. Snaith, and J. J. M. Verbaarschot. Developments in random matrix theory. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36:R1, 2003.
- [7] R. Balian. Random matrices and information theory. *Nuovo Cimento B*, 57(1):183, 1968.
- [8] H. U. Baranger and P. A. Mello. Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: an information-theoretic approach. *Waves Random Media*, 9:105, 1999.
- [9] P. J. Forrester. *Log-gases and random matrices*. Disponível na Web em <http://www.ms.unimelb.edu.au/matpjf/matpjf.html>.

- 
- [10] T. Nagao M. Adler, P. J. Forrester and P. van Moerbeke. Classical skew orthogonal polynomials and random matrices. *J. Stat. Phys.*, 99:141, 2000.
- [11] P. Dennery and A. Krzywicki. *Mathematics for Physicists*. Dover, New York, 1971.
- [12] C. W. J. Beenakker. Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunctions. *Phys. Rev. B*, 46:12841, 1996.
- [13] P. Sheng. *Scattering and localization of classical waves in random media*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [14] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69:731, 1997.
- [15] Y. Imry and R. Landauer. Conductance viewed as transmission. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S306, 1999.
- [16] S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Physics*. Cambridge, 1995.
- [17] C. H. Lewenkopf and H. Weidenmüller. Stochastic versus semiclassical approach to quantum chaotic scattering. *Annals of Physics*, 212:53, 1991.
- [18] P. W. Brouwer. Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads. *Phys. Rev. B*, 51:16878, 1995.
- [19] R. Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Phil. Mag.*, 21:863, 1970.
- [20] M. Büttiker. Four-terminal phase coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1761, 1986.
- [21] Ya. M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports*, 336:2, 2000.
- [22] M. J. M. de Jong and W. J. Beenakker. Shot noise in mesoscopic systems. In: *Mesoscopic electron transport*, edited by L.L. Sohn, L.P. Kouwenhoven, and G. Schön, NATO ASI Series E345 (Kluwer, Dordrecht, 1997), page 225.

- 
- [23] P. A. Mello. Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:4061, 1990.
- [24] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker. Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. *J. Math. Phys. (N. Y.)*, 37:4904, 1996.
- [25] S. Samuel.  $U(N)$  integrals,  $1/N$ , and the de Wit-'t Hooft anomalies. *J. Math. Phys.*, 21:2695, 1980.
- [26] P. A. Mello and J.-L. Pichard. Symmetries and parametrization of the transfer matrix in electronic quantum transport theory. *J. Phys. I*, 1:493, 1991.
- [27] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker. Effects of spin-orbit interactions in disordered conductors: A random-matrix approach. *Phys. Rev. B*, 46:14985, 1992.
- [28] P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Ann. Phys. NY*, 181:290, 1988.
- [29] J. Verbaarschot and T. Wettig. Random matrix theory and chiral symmetry in QCD. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 50:343, 2000.
- [30] J. Verbaarschot. Spectrum of the qcd dirac operator and chiral random matrix theory. *Phys. Rev. Lett.*, 72(16):2531, 1994.
- [31] A. Altland and M. R. Zirnbauer. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys. Rev. B*, 55(2):1142, 1997.
- [32] P. W. Brouwer C. Mudry and A. Furusaki. Random magnetic flux problem in a quantum wire. *Phys. Rev. B*, 59:13221, 1999.
- [33] P. W. Brouwer C. Mudry and A. Furusaki. Crossover from the chiral to the standart universality classes in the conductance of a quantum wire with random hopping only. *Phys. Rev. B*, 62:8249, 2000.

- 
- [34] M. R. Zirnbauer. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory. *J. Math. Phys.*, 37:4986, 1996.
- [35] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic, New York, 1978.
- [36] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of groups, representations and applications*. World Scientific, 1986.
- [37] B. G. Wybourne. *Classical groups for physics*. J. Wiley, New York, 1974.
- [38] R. Gilmore. *Lie groups, Lie algebras and some of their applications*. Dover, 2005.
- [39] Luiz A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.
- [40] M. Casele and U. Magnea. Random matrix theory and symmetric spaces. *Physics Reports*, 349:41–156, 2004.
- [41] M. Caselle. A new classification scheme of random matrix theories. *Cond-mat/9610017*.
- [42] M. Caselle. Calogero-Sutherland techniques in the physics of disordered wires. *Nucl. Phys. B - suppl.*, 120:45A, 1996.
- [43] L. Lapointe and L. Vinet. Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model. *Commun. Math. Phys.*, 178:425, 1996.
- [44] R. P. Stanley. Some combinatorial properties of Jack symmetric polynomials. *Adv. in Math.*, 77:76, 1989.
- [45] Z. N. C. Ha. Fractional statistics in one dimension: view from an exactly solvable model. *Nucl. Phys. B*, 345:604, 1995.
- [46] F. Lesage, V. Pasquier, and D. Serban. Dynamical correlation functions in the Calogero-Sutherland model. *Nucl. Phys. B*, 435:585, 1995.

- 
- [47] D. Serban, F. Lesage, and V. Pasquier. Single-particle Green function in the Calogero-Sutherland model for rational couplings  $\beta = p/q$ . *Nucl. Phys. B*, 466:499, 1996.
- [48] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492, 1958.
- [49] F. J. Dyson. The dynamics of a disordered linear chain. *Phys. Rev.*, 92(6):1331, 1953.
- [50] A. Altland and B. D. Simons. Field theory of the random flux model. *Nucl. Phys. B*, 562(3):445, 1999.
- [51] A. Altland and R. Merkt. Spectral and transport properties of quantum wires with bond disorder. *Nucl. Phys. B*, 607:511, 2001.
- [52] A. Furusaki Y. Hatsugai Y. Morita P. W. Brouwer, E. Racine and C. Mudry. Zero modes in the random hopping model. Cond-mat/02011580.
- [53] A. F. Macedo-Junior. Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, 2002.
- [54] S. A. Trugman M. Inui and E. Abrahams. Unusual properties of midband states in systems with off-diagonal disorder. *Phys. Rev. B*, 49(5):3190, 1994.
- [55] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. J. Wiley, 7th. edition, 1996.
- [56] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. Universal transport properties of quantum dots with chiral symmetry. *Phys. Rev. B*, 66(4):041307, 2002.
- [57] H. U. Baranger and P. A. Mello. Mesoscopic transport through chaotic cavities: a random  $S$ -matrix theory approach. *Phys. Rev. Lett.*, 73(1):142, 1994.
- [58] R. A. Jalabert, J.-L. Pichard, and C. W. J. Beenakker. Universal quantum signatures of chaos in ballistic transport. *Europhys. Lett.*, 27(4):255, 1994.

- 
- [59] M. H. Pederson, S. A. van Langen, and M. Büttiker. Charge fluctuations in quantum point contacts and chaotic cavities in the presence of transport. *Phys. Rev. B*, 57:1838, 1998.
- [60] J. Verbaarschot and I. Zahed. Spectral density of the QCD dirac operator near zero virtuality. *Phys. Rev. Lett.*, 70(25):3852, 1993.
- [61] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer. Grassmann integration in stochastic quantum physics: the case of compound-nucleus scattering. *Phys. Rep.*, 129(6):367, 1985.
- [62] C. M. Marcus et al. Distributions of the conductance and its parametric derivatives in quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1917, 1998.
- [63] F. J. Dyson. A brownian-motion model for the eigenvalues of random matrices. *J. Math. Phys.*, 3:140, 1962.
- [64] G. Lenz and F. Haake. Transitions between universality classes of random matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2325, 1990.
- [65] K. Frahm and J.-L. Pichard. Brownian motion ensembles and parametric correlations of the transmission eigenvalues: applications to coupled quantum billiards to disordered wires. *J. Phys. I (France)*, 5:877, 1995.
- [66] A. M. S. Macêdo. Brezin-Zee dynamical correlator: an  $S$ -matrix brownian motion approach. *Phys. Rev. E*, 55:1457, 1997.
- [67] A. M. S. Macêdo. Quantum dot to disordered wire crossover: A complete solution in all length scales for systems with unitary symmetry. *Phys. Rev. B*, 61:4453, 2000.
- [68] Glauber Tomaz. Classificação de ensembles de movimento browniano na teoria de matrizes aleatórias. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

- 
- [69] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. Brownian motion ensembles of random matrix theory: a classification scheme and an integral transform method. *Nucl. Phys. B*, 752:439, 2006.
- [70] G. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, 2nd edition, 1985.
- [71] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1989.
- [72] T. H. Baker and P. J. Forrester. The Calogero-Sutherland model and generalized classical polynomials. *Commun. Math. Phys.*, 188:175–216, 1997.
- [73] Z. N. C. Ha. Exact dynamical correlation functions of Calogero-Sutherland model and one-dimensional fractional statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1574, 1994.
- [74] M. Lassalle. Polynômes de Hermite généralisés. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. Séries I*, 313:579, 1991.
- [75] N. Gurappa and P. K. Panigrahi. Free harmonic oscillators, Jack polynomials and Calogero-sutherland systems. *Phys. Rev. B*, 62:1943, 2000.
- [76] P. K. Panigrahi N. Gurappa and T. Shreecharan. A new perspective on single and multi-variate differential equations. *J. Comp. App. Math.*, 160:103, 2003.
- [77] N. Gurappa and P. K. Panigrahi. Unified algebraic approach to few- and many-body correlated systems. *Phys. Rev. B*, 67:155323, 2003.
- [78] N. Gurappa, P. K. Panigrahi, and T. Shreecharan. Linear differential equations and orthogonal polynomials: a novel approach. Math-ph/0203015.
- [79] M. Lassalle. Polynômes de Laguerre généralisés. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. Séries I*, 312:725, 1991.
- [80] M. Lassalle. Polynômes de Jacobi généralisés. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. Séries I*, 312:425, 1991.
- [81] K. Sogo. A simple derivation of multivariate Hermite and Legendre polynomials. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65:3097, 1996.

- 
- [82] M. Titov, P. W. Brouwer, A. Furasaki, and C. Mudry. Fokker-planck equations and density of states in disordered quantum wires. *Phys. Rev. B*, 63:235318, 2001.
- [83] T. Imamura and M. Wadati. Universal transport properties of disordered quantum wires. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 71:1511, 2002.
- [84] A. Pandey J. B. French, V. K. B. Kota and S. Tomsovic. Statistical properties of many-particle spectra v. fluctuations and symmetries. *Ann. of Phys. (N. Y.)*, 181:198, 1988.
- [85] A. Pandey. Brownian-motion model of discrete spectra. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5:1275, 1995.
- [86] C. W. J. Beenakker and B. Rajaei. Exact solution for the distribution of transmission eigenvalues in a disordered wire and comparison with random-matrix theory. *Phys. Rev. B*, 49:7499, 1994.
- [87] P. A. Mello. Macroscopic approach to universal conductance fluctuations in disordered metals. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1089, 1994.
- [88] P. Braun, S. Heusler, S. Muller, and F. Haake. Semiclassical prediction for shot noise in chaotic cavities. *J. Phys A : Math. Gen.*, 39:L159, 2006.
- [89] D. V. Savin and H.-J. Sommers. Shot noise in chaotic cavities with an arbitrary number of open channels. *Phys. Rev. B*, 73:081307, 2006.
- [90] F. J. Dyson. A class of matrix ensembles. *J. Math. Phys.*, 13:90, 1972.
- [91] S. G. Mikhlin. *Integral Equations*. Pergamon, New York, 1964.
- [92] C. W. J. Beenakker. Universality of Brézin and Zee's spectral correlator. *Nucl. Phys. B*, 422:515, 1994.
- [93] Y. V. Fyodorov. Negative moments of characteristic polynomials of random matrices: Ingham-Siegel integral as an alternative to Hubbard-Stratonovich transformation. *Nucl. Phys. B*, 621(3):643, 2002.

- 
- [94] Y. V. Fyodorov and E. Strahov. An exact formula for general spectral correlation function of random hermitian matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:3203, 2003.
- [95] E. Brezin and S. Hikami. Characteristic polynomials of random matrices. *Commun. Math. Phys.*, 214:111, 2000.
- [96] J. P. Keating and N. C. Snaith. Random matrix theory and  $\zeta(1/2 + it)$ . *Commun. Math. Phys.*, 214:57, 2000.
- [97] A. V. Andreev and B. D. Simons. Correlators of spectral determinants in quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2304, 1995.
- [98] J. Kaneko. Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, 24:1086, 1993.
- [99] E. Strahov and Y. V. Fyodorov. Universal results for correlations of characteristic polynomials: Riemann-Hilbert approach. *Commun. Math. Phys.*, 241:343, 2003.
- [100] Y. V. Fyodorov and E. Strahov. Characteristic polynomials of random hermitian matrices and Duistermaat-Heckman localisation on non-compact Kahler manifolds. *Nucl. Phys. B*, 630:453, 2002.
- [101] T. Guhr. Dyson's correlation functions and graded symmetry. *J. Math. Phys.*, 32(2):336, 1991.
- [102] T. Guhr. Transitions toward quantum chaos: with supersymmetry from Poisson to Gauss. *Ann. of Phys. (NY)*, 250:145, 1996.
- [103] P. W. Brouwer and K. Frahm. Quantum transport in disordered wires: Equivalence of the one-dimensional  $\sigma$  model and the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar equation. *Phys. Rev. B*, 53(3):1490, 1996.
- [104] K. B. Efetov. *Supersymmetry in Disorder and Chaos*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- 
- [105] A. M. Tsvetik. Mapping of the Calogero-Sutherland model to the gaussian model. *Cond-mat/9603203*.
- [106] Haldane. Stability of chiral luttinger liquids and abelian quantum hall states. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2090, 1995.
- [107] X. G. Wen. Chiral Luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum Hall states. *Phys. Rev. B*, 41:12838, 1990.
- [108] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*. World Scientific, 3rd edition.
- [109] D. V. Khveshchenko. On exact bosonization of the Calogero-Sutherland model. *Int. J. Mod. Phys. B*, 9:1639, 1995.
- [110] T. Guhr and H. Kohler. Supersymmetric extensions of Calogero-Moser-Sutherland-like models: construction and some solutions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38(46), 2005.
- [111] K. Frahm. Equivalence of the Fokker-Planck approach and the nonlinear  $\sigma$  model for disordered wires in the unitary symmetry class. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4706, 1995.
- [112] H. Bateman. *The Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [113] P. Desrosiers, L. Lapointe, and P. Mathieu. Jack superpolynomials: physical and combinatorial definitions. *Czechoslovak J. Phys.*, 54:1223, 2004.
- [114] P. Desrosiers, L. Lapointe, and P. Mathieu. Supersymmetric Calogero-Moser-Sutherland models and Jack superpolynomials. *Nucl. Phys. B*, 606:547, 2001.
- [115] A. N. Sergeev. Superanalogs of the Calogero operators and Jack polynomials. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 8:59, 2002.
- [116] A. N. Sergeev and A. P. Veselov. Deformed quantum Calogero-Moser problems and Lie superalgebras. *Commun. Math. Phys.*, 245:249, 2004.

- 
- [117] A. N. Sergeev. Calogero operator and Lie superalgebras. *Theo. Math. Phys.*, 131:747, 2002.
- [118] I. Dumitriu and A. Edelman. Matrix models for beta ensembles. *J. Math. Phys.*, 43:5830, 2002.
- [119] A. Tulino and S. Verdu. Random matrices and wireless communications. Foundations and trends in communications and information theory, NOW, The essence of knowledge. 2004.
- [120] A. L. Moustakas and S. H. Simin. Random matrix theory of multi-antenna communications: the ricean channel. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:10859, 2005.
- [121] A. Pandey and P. Shukla. Eigenvalue correlations in the circular ensembles. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:3907, 1991.
- [122] P. W. Brouwer, A. Furusaki, I. A. Gruzberg, and C. Mudry. Localization and delocalization in dirty superconducting wires. *Phys. Rev. Lett*, 88:1064, 2000.
- [123] P. Zinn-Justin and J.-B. Zuber. On some integrals over the  $U(N)$  unitary group and their large  $N$  limit.
- [124] V. A. Kazakov. External matrix field problem and new multicriticalities in  $(-2)$ -dimensional random surfaces. *Nucl. Phys. B*, 354:614, 1991.
- [125] P. Zinn-Justin. Universality of correlation functions of hermitian random matrices in an external field. *Commun. Math. Phys.*, 194:631, 1998.
- [126] E. Brezin, S. Hikami, and A. Zee. Oscillating density of states near zero energy for matrices made of blocks with possible application to the random flux problem. *Nucl. Phys. B*, 464:411, 1996.
- [127] K. A. Muttalib. Random matrix models with additional interactions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:L159, 1995.
- [128] F. W. Byron Jr. and R. W. Fuller. *Mathematics of classical and quantum physics*. Dover, 1992.

- 
- [129] L. S. Levitov and G. B. Lesovick. Charge distribution in quantum shot noise. *JETP Lett.*, 58:230, 1993.
- [130] L. S. Levitov and H. Lesovick. Electron counting statistics and coherent states of electric current. *J. Math. Phys.*, 37:4845, 1996.
- [131] Yu. V. Nazarov. Limits of universality in disordered conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 73:134, 1994.
- [132] Yu. V. Nazarov and D. A. Bagrets. Circuit theory for full counting statistics in multiterminal circuits. *Phys. Rev. Lett.*, 88:196801, 2002.
- [133] W. Belzig. Full counting statistic of superconductor-normal-metal heterostructures. In: *Quantum Noise*. Edited by Yu. V. Nazarov and Ya. M. Blanter, NATO Science Series II Vol. 97 (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [134] A. M. S. Macêdo. Scaling theory of phase-coherent metallic conductors. *Phys. Rev. B*, 66:033306, 2002.
- [135] H. S. Borba. Teoria de circuitos para a estatística de contagem de carga. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2005.
- [136] G. C. Duarte Filho. Estatística de contagem em sistemas híbridos normal-supercondutor. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2006.
- [137] H. Lee, L. S. Levitov, and A. Yu. Yakovets. Universal statistics of transport in disordered conductors. *Phys. Rev. B*, 51:4079, 1995.
- [138] D. A. Bragets and Yu. V. Nazarov. Multiterminal counting statistics. In: *Quantum Noise*. Edited by Yu. V. Nazarov and Ya. M. Blanter, NATO Science Series II Vol. 97 (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [139] L. S. Reichl. *A modern course in statistical physics*. Wiley-Interscience, 2nd edition, 1990.

- 
- [140] O. M. Bulashenko. Full counting statistics of a chaotic cavity with asymmetric leads. *J. Stat. Mech.*, page P08013, 2005.
- [141] Yu. V. Nazarov. Generalized Ohm's law. Cond-mat/9410011.
- [142] A. M. S. Macêdo and A. M. C. Souza. Formation of Fabry-Perot resonances in double-barrier chaotic billiards. *Phys. Rev. E*, 71:066218, 2005.
- [143] I. G. MacDonald. *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1997.