



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÁS LIMA DE AQUINO

**Estruturas Multiplicativas: o uso de recursos didáticos e a resolução de
problemas à luz da Teoria dos Campos Conceituais**

RECIFE

2024

JOÁS LIMA DE AQUINO

**Estruturas Multiplicativas: o uso de recursos didáticos e a resolução de
problemas à luz da Teoria dos Campos Conceituais**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado ao Departamento de Matemática - CCEN
da Universidade Federal de Pernambuco como
requisito parcial para a obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Orientadora: Danielle Avanço Vega
Coorientadora: Gracivane da Silva Pessoa

RECIFE

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Aquino, Joás Lima de.

Estruturas Multiplicativas: O uso de recursos didáticos e a resolução de problemas à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Joás Lima de Aquino. - Recife, 2024.

156 : il., tab.

Orientador(a): Danielle Avanço Vega

Coorientador(a): Gracivane da Silva Pessoa

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2024.

Inclui referências, anexos.

1. Teoria dos Campos Conceituais. 2. Estruturas Multiplicativas. 3. Recursos didáticos. 4. Resolução de problemas. I. Vega, Danielle Avanço. (Orientação). II. Pessoa, Gracivane da Silva. (Coorientação). IV. Título.

510 CDD (22.ed.)

JOÁS LIMA DE AQUINO

Estruturas Multiplicativas: o uso de recursos didáticos e a resolução de problemas à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática - CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 07 de Março de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ma. Danielle Avanço Vega (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Ma. Gracivane da Silva Pessoa (Coorientadora)
Centro Universitário da Vitória de Santo Antão (UNIVISA)

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

*Dedico este trabalho a **DEUS**, por sempre ter sido minha inspiração de vida e ter me fortalecido para chegar até aqui. Dedico também a minha família e aos meus amigos, que me apoiaram desde o início desse sonho até o final. Todos eles fizeram com que eu pudesse acreditar em mim e na minha capacidade de ir além.*

AGRADECIMENTOS

*Agradeço primeiramente a **Deus**, que sempre foi o meu guia, minha força, minha inspiração, meu ar que respiro, meu refúgio e minha fortaleza. Sem Ele, eu não teria chegado onde cheguei, pois ele tem sido minha luz nos momentos mais escuros e difíceis, sempre segurando as minhas mãos e não me deixando cair. Que a Ti, seja para sempre todo o louvor, a honra, a glória e toda a exaltação.*

*Agradeço aos meus pais, **Josefa Fernandes e Juarez José**, por terem me apoiado da forma que sempre acharam melhor e me incentivado desde cedo aos estudos. Hoje, estou chegando aqui graças ao apoio de vocês. Agradeço também ao meu irmão **Miquéias Lima**, que, mesmo de longe, sempre me incentivou a continuar na jornada. Grato a Deus pela vida de toda a minha família.*

*Agradeço a minha orientadora **Danielle Avanço**, que, mesmo nos conhecendo a tão pouco tempo, soube me acolher com todo o seu carisma e sua simpatia, abraçando as minhas ideias e me estimulando a explorar mais de mim. Muito obrigado por ter confiado em mim desde o início, suas palavras de motivação sempre trouxeram alegria ao meu coração inseguro. És uma inspiração enquanto pessoa e professora.*

*Agradeço a minha coorientadora **Gracivane Pessoa**, que foi e ainda é a minha preceptora no Programa de Residência Pedagógica. Não consigo imaginar como seria essa minha trajetória como residente sem ter lhe conhecido. Tens me ensinado tanto sobre como ser um bom professor e humanizado. Tens acreditado em mim e no meu potencial, estimulando-me, desde sempre, a produzir um trabalho gigante como esse. Sem a senhora, as ideias não teriam saído do papel. Muito obrigado por ter sido essa mãezona. Eu sou grato a Deus pela sua vida.*

*Agradeço também a todos os professores que, durante minha trajetória na UFPE, foram destaques para mim e que, com certeza, contribuíram para a minha formação acadêmica. Dentre alguns, eu cito: **Aline Barbosa, Dalvaneide Araújo, Manoel Lemos, Paulo Câmara, Pedro Braga e Sylvia Regina.***

*Agradeço a todos os meus amigos que me ajudaram nessa jornada de alguma forma, incentivando-me e acreditando no meu potencial, sempre sendo um ombro amigo em que eu pudesse confiar. Destaco alguns deles: **Brandon Rodh, Denise Silva, Jemima Fernandes, Juan Oliveira, Laiane Beatriz, Silas Wendel, Silas Santana, Stella Villela, Suelen Soares e Thaynara Victória.***

*Todos eles foram especiais para mim durante essa caminhada, sobretudo meu amigo de longa distância **Juan**, que sempre teve seus ouvidos atentos aos meus desabafos, suspiros, estresses e meus relatos de experiência (quase 24 horas por dia), sempre me apoiando e acreditando em um “Joás” que podia ir além, pois era e é capaz. Enfim, obrigado a todos por tudo e pelo apoio.*

*Agradeço aos meus companheiros da residência, **Diógenes Barros, Jamesson Martins e Mirian Júlia**, por vivenciarmos vários momentos em nossa convivência na residência e compartilharmos conhecimentos e experiências. Sou grato por vocês, pelo apoio e pela ajuda nas aplicações das atividades que compuseram esse trabalho. Vocês possuem um espaço no meu coração.*

*Agradeço a todos os meus colegas e amigos da universidade, sobretudo **Alex Victor, Mariana Karoline e Thiago Alves**, como os demais: **José Adriano, Renato Nasi, Vitória Cecília e Yasmin Rebeca**. Todos vocês contribuíram para que a minha trajetória fosse mais leve, extrovertida e dinâmica, sempre rindo nos piores momentos. Obrigado pelo companheirismo de todos.*

*Agradeço, por fim, a todos da **congregação evangélica** em que faço parte, pois tenho certeza que continuam orando e torcendo por mim. Agradeço ao apoio também de todos os **meus alunos**. E, para finalizar, não poderia deixar de ser grato a todos que passaram por mim durante essa caminhada, com destaque a uma pessoa específica, **Brenda Vitória**, que me defendeu em minha primeira semana na UFPE, quando fui intimidado por um professor numa sala de aula ao afirmar que não poderia me manter no curso sendo do interior e tendo que sair mais cedo das aulas. Só Deus sabe o quanto aquele apoio e defesa me serviram para ter forças para seguir em frente. E aqui estou eu. Grato por sempre acreditar em mim.*

Deus abençoe a todos!

O Espírito de Deus me fez; e a inspiração do Todo-Poderoso me deu vida.

Jó 33:4

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como objetivo principal realizar uma análise de três recursos didáticos (Tábua de Pitágoras, Algoritmos da Multiplicação e Malha Quadriculada) e compreender a contribuição deles para a consolidação do conceito da multiplicação e para a resolução de problemas a partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), do psicólogo francês Gérard Vergnaud. Essa pesquisa parte de uma inquietação docente quanto às dificuldades que os estudantes, sobretudo do 7º ano do ensino fundamental, podem apresentar durante o processo de resolução de problemas que envolvem as Estruturas Multiplicativas, como a interpretação e o cálculo. A partir disso, propõe-se entender as categorias e classificações de Vergnaud como caminho para ampliar o repertório cognitivo dos discentes no que tange aos variados tipos de situações e contextos que envolvem tanto a multiplicação quanto a sua operação inversa (divisão), além de explorar possíveis recursos que podem auxiliar o estudante na compreensão do conceito e na efetuação dos cálculos. Na metodologia dessa pesquisa, foram realizadas também análises em documentos oficiais da educação e no livro didático, além de que foi aplicada uma sequência didática na turma do 7º ano de uma escola pública, cujos resultados revelam a necessidade de o docente trabalhar continuamente o conceito da multiplicação mediante abordagens que envolvam o uso de recursos didáticos e a resolução de problemas à luz da TCC.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais. Estruturas Multiplicativas. Recursos didáticos. Resolução de problemas.

Abstract

The main objective of this Course Completion Work (CCW) is to carry out an analysis of three didactic resources (Pythagoras Table, Multiplication Algorithms and Checkerboard Mesh) and understand their contribution to the consolidation of the concept of multiplication and to the resolution of problems based on the Theory of Conceptual Fields (TCF), by the French psychologist Gérard Vergnaud. This research is based on a teacher's concern regarding the difficulties that students, especially in the 7th year of elementary school, may present during the process of solving problems involving multiplicative structures, such as interpretation and calculation. From this, it is proposed to understand Vergnaud's categories and classifications as a way to expand the students' cognitive repertoire with regard to the various types of situations and contexts that involve both multiplication and its inverse operation (division), in addition to exploring possible resources that can help the student understand the concept and carry out calculations. In the methodology of this research, analyzes were also carried out on official education documents and the textbook, in addition to applying a didactic sequence to the 7th grade class of a public school, the results of which reveal the need for the teacher continually to work on the concept of multiplication through approaches that involve the use of teaching resources and problem solving in the light of TCF.

Keywords: Theory of Conceptual Fields. Multiplicative Structures. Didactic resources. Problem solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Definição da multiplicação entre naturais	22
Figura 2 - Representações de uma multiplicação	22
Figura 3 - Representação da divisão na forma de chave	25
Figura 4 - Ilustração do livro sobre o problema das lajotas.....	30
Figura 5 - Montagem ilustrativa de problemas abordados no livro do 6º ano	32
Figura 6 - Problemas do livro do 7º ano (divisão)	34
Figura 7 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo	40
Figura 8 - Tabuada Tradicional de Multiplicação	47
Figura 9 - Tábua de Pitágoras.....	49
Figura 10 - Localização do produto 35 na Tábua.....	50
Figura 11 - Tabuada do 2 associada à do 1.....	51
Figura 12 - Tabuada do 3 associada às anteriores	52
Figura 13 - Tabuada do 4 associada às anteriores	53
Figura 14 - Decomposições aditivas e multiplicativas do 1 até 10	54
Figura 15 - Localização do produto 28.....	55
Figura 16 - Representação de um par ordenado no Plano Cartesiano	56
Figura 17 - Representações por pares ordenados	56
Figura 18 - Representação do produto pelo número de quadrados	57
Figura 19 - Representação dos números quadrados perfeitos	58
Figura 20 - Visualização do número quadrado perfeito 9	59
Figura 21 - Localização dos números quadrados perfeitos	59
Figura 22 - Diagonal principal como eixo de simetria	60
Figura 23 - Algoritmo tradicional aplicado à multiplicação 341 x 58.....	63
Figura 24 - Evolução dos algarismos do SND	65
Figura 25 - Organização das classes do sistema decimal	66
Figura 26 - Ordens do SND a partir das potências de base dez.....	66
Figura 27 - Multiplicação entre 24 e 31 por decomposição	68
Figura 28 - Multiplicação entre 317 e 64 por decomposição	69
Figura 29 - Multiplicação entre 29 e 13 por decomposição	70
Figura 30 - Quadro ilustrativo da Regra de Sinais	70
Figura 31 - Divisão por decomposição de 144 por 9.....	71
Figura 32 - Divisão por decomposição de 202 por 9.....	72
Figura 33 - Representação dos números 2640, 20064 e 264000 no sistema chinês.....	73
Figura 34 - Multiplicação entre 4 e 3 pelo método chinês	74
Figura 35 - Multiplicação entre 24 e 4 pelo método chinês	74
Figura 36 - Multiplicação entre 56 e 13 pelo método chinês	75
Figura 37 - Multiplicação entre 246 e 32 pelo método chinês	76
Figura 38 - Multiplicação entre 102 e 211 pelo método chinês	76
Figura 39 - Divisão de 669 por 3 pelo método chinês	77
Figura 40 - Grade de ripas que simbolizam uma gelosia	78
Figura 41 - Multiplicação entre 52 e 34 pelo método gelosia (etapa 1)	79

Figura 42 - Multiplicação entre 52 e 34 pelo método gelosia (etapa 2)	79
Figura 43 - Multiplicação entre 247 e 391 pelo método gelosia	80
Figura 44 - Adaptação do método gelosia para envolver as 4 operações	81
Figura 45 - Adaptação do método da gelosia (divisão)	81
Figura 46 - Representação do produto 4x8 na malha	83
Figura 47 - Diferença entre os produtos 8x4 e 4x8	85
Figura 48 - Composição de figuras com área 32	86
Figura 49 - Composição de três retângulos	87
Figura 50 - Protocolo E52 (Questão 1, Ficha 1)	103
Figura 51 - Protocolo E19 (Questão 1, Ficha 1)	103
Figura 52 - Protocolo E9 e E14 (Questão 2, Ficha 1)	104
Figura 53 - Protocolo E5 (Questão 3, Ficha 1)	105
Figura 54 - Protocolo E4 (Questão 4, Ficha 1)	105
Figura 55 - Protocolo E8 (Questão 4, Ficha 1)	106
Figura 56 - Protocolo E5 (Questão 5, Ficha 1)	106
Figura 57 - Protocolo E30 (Questão 5, Ficha 1)	107
Figura 58 - Protocolo E19 (Questão 6, Ficha 1)	108
Figura 59 - Protocolo E34 (Questão 7, Ficha 1)	108
Figura 60 - Protocolo E14 (Questão 8, Ficha 1)	109
Figura 61 - Protocolo E26 (Ditado de pares ordenados)	117
Figura 62 - Protocolo E10 (Ditado de pares ordenados)	118
Figura 63 - Protocolo E24 (Questão 1, Ficha 2)	121
Figura 64 - Protocolo E19 (Questão 1, Ficha 2)	121
Figura 65 - Conjuntos soluções das questões 2 e 3 da Ficha 2	122
Figura 66 - Conjunto das respostas das questões 2 e 3 da Ficha 2	123
Figura 67 - Protocolo E41 (Questão 8, Ficha 2)	129
Figura 68 - Protocolo E3 (Questão 1, Ficha 3)	131
Figura 69 - Protocolo E34 (Questão 1, Ficha 3)	131
Figura 70 - Multiplicação entre 23 e 41 pelo método chinês	132
Figura 71 - Protocolo E18 (Questão 1, Ficha 3)	132
Figura 72 - Protocolo E32 (Questão 2, Ficha 3)	134
Figura 73 - Protocolo E39 (Questão 2, Ficha 3)	134
Figura 74 - Protocolo E30 (Questão 3, Ficha 3)	137
Figura 75 - Protocolo E10 (Questão 1, Ficha 4)	140
Figura 76 - Protocolo E5 (Questão 1, Ficha 4)	140
Figura 77 - Protocolo E12 (Questão 3, Ficha 4)	144
Figura 78 - Protocolo E33 (Questão 4, Ficha 4)	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Registro de procedimentos utilizados pelo 7º ano A na Ficha 1	110
Tabela 2 - Registro de procedimentos utilizados pelo 7º ano B na Ficha 1	110
Tabela 3 - Respostas dos estudantes sobre as relações entre as questões da Ficha 1	114
Tabela 4 - Análise quantitativa e qualitativa das respostas da questão 1 da Ficha 2.....	120
Tabela 5 - Análise qualitativa das respostas da questão 4 da Ficha 2	125
Tabela 6 - Análise quantitativa das respostas das questões 4, 5 e 6 da Ficha 2	126
Tabela 7 - Análise das respostas da questão 8 da Ficha 2	128
Tabela 8 - Análise quantitativa das respostas na questão 1 (Ficha 3)	133
Tabela 9 - Análise quantitativa das respostas da questão 3 (Ficha 3)	137
Tabela 10 - Análise qualitativa das respostas da questão 1 letra A (Ficha 4)	141
Tabela 11 - Análise qualitativa das respostas da 1ª questão letra B (Ficha 4)	141
Tabela 12 - Análise quantitativa das respostas da questão 2 (Ficha 4)	142
Tabela 13 - Análise qualitativa das respostas não em branco da 4ª questão da Ficha 4.....	147

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Análise quantitativa das respostas do 7ºA na Ficha 1	101
Gráfico 2 - Análise quantitativa das respostas do 7ºB na Ficha 1	102
Gráfico 3 - Respostas dos estudantes do 7º ano A em relação aos tipos de dificuldades nos problemas da Ficha 1	111
Gráfico 4 - Respostas dos estudantes do 7º ano B em relação aos tipos de dificuldades nos problemas da Ficha 1	112
Gráfico 5 - Opinião dos estudantes do 7º ano A quanto ao seu desempenho na Ficha 1	113
Gráfico 6 - Opinião dos estudantes do 7º ano B quanto ao seu desempenho na Ficha 1	113
Gráfico 7 - Resultado quantitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano B	116
Gráfico 8 - Resultado quantitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano A	116
Gráfico 9 - Resultado qualitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano B	119
Gráfico 10 - Resultado qualitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano A	119
Gráfico 11 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 7 (Ficha 2)	127
Gráfico 12 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 7 (Ficha 2)	127
Gráfico 13 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 2 (Ficha 3)	135
Gráfico 14 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano A na questão 2 (Ficha 3)	136
Gráfico 15 - Resposta dos estudantes quanto a sua preferência aos métodos apresentados... ..	138
Gráfico 16 - Respostas dos estudantes quanto às dificuldades na multiplicação entre números grandes.....	138
Gráfico 17 - Análise quantitativa das respostas dos estudantes na questão 1 (Ficha 4)	141
Gráfico 18 - Análise qualitativa das respostas da questão 2 (Ficha 4) consideradas "parciais"	143
Gráfico 19 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 3 (Ficha 4)	145
Gráfico 20 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano A na questão 3 (Ficha 4)	145
Gráfico 21 - Análise quantitativa das respostas na questão 4 (Ficha 4)	147

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
1.1 JUSTIFICATIVA.....	18
1.2 OBJETIVOS.....	19
1.2.1 Objetivo geral.....	19
1.2.2 Objetivos específicos.....	20
2 A MULTIPLICAÇÃO.....	20
2.1 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES.....	21
2.2 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO.....	26
2.3 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	29
3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	34
3.1 CAMPO MULTIPLICATIVO.....	39
4 EXPLORANDO RECURSOS DIDÁTICOS.....	46
4.1 TÁBUA DE PITÁGORAS.....	46
4.1.1 Regularidades e potencialidades da Tábua de Pitágoras.....	48
4.2 ALGORITMOS DA MULTIPLICAÇÃO.....	62
4.2.1 Sistema de Numeração Decimal.....	64
4.2.2 Método da decomposição.....	68
4.2.3 Método chinês.....	73
4.2.4 Método da gelosia.....	78
4.3 MALHA QUADRICULADA.....	82
5 METODOLOGIA.....	88
5.1 FICHA 1.....	90
5.2 FICHA 2.....	92
5.3 FICHA 3.....	95
5.4 FICHA 4.....	97
6 RESULTADOS.....	99
6.1 FICHA 1.....	100
6.2 FICHA 2.....	115
6.3 FICHA 3.....	129
6.4 FICHA 4.....	139
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	147

REFERÊNCIAS.....	151
ANEXO A – TÁBUA DE PITÁGORAS.....	155
ANEXO B – MALHA QUADRICULADA.....	156

1 INTRODUÇÃO

A multiplicação, uma operação matemática fundamental, desempenha um papel crucial em diversas esferas da vida cotidiana e da ciência. No âmbito diário, essa operação básica possibilita a realização de tarefas simples, como a medição de ingredientes em receitas, o cálculo do tempo necessário para concluir atividades, como exercícios físicos, ou para planejar viagens com base na percepção de distância ou tempo. A importância da multiplicação vai além da resolução de problemas cotidianos; ela é essencial para simplificar uma variedade de questões complexas. Ao permitir que o indivíduo organize e manipule quantidades de forma eficiente e precisa, essa operação básica se revela fundamental em diferentes contextos, seja dentro ou fora do ambiente escolar.

A partir disso, construir uma concepção sólida desse conceito, desde o início em que a multiplicação é introduzida aos discentes, é essencial, para que, no futuro, eles possam aplicar esse conceito em diversas situações-problema sem ter dificuldades na resolução delas. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), a multiplicação é uma operação matemática que começa a ser introduzida nos primeiros anos do Ensino Fundamental 1, especificamente no 2º ano. A primeira definição que o sujeito tem contato dessa operação é que ela é definida como “adição sucessiva de parcelas iguais”. Sendo uma definição mais limitada ao trabalhar esse conceito com números naturais e com a multiplicação de números menores, conforme o estudante avança nas séries do ensino fundamental, chegando nos anos finais, por exemplo, essa definição torna-se mais limitada, principalmente quando começa a trabalhar a multiplicação a partir de outras concepções e conjuntos numéricos, como ressalta a Base Nacional Comum Curricular:

Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais temáticas: Álgebra, Geometria e medidas e Probabilidades e estatística (Brasil, 2018, p. 269).

Segundo os PCN (Brasil, pág. 109), é necessário que o estudante, durante sua trajetória no ensino fundamental, desenvolva competências que garantam a ele a aplicabilidade da multiplicação em diversas situações-problema que fogem da ideia primária de sua definição, afirmando que essa concepção (adição sucessiva de parcelas iguais) é insuficiente para que os estudantes compreendam outras situações que envolvem a operação em destaque. Destarte, é importante que, ao ser ensinada a multiplicação, ela ganhe uma nova “roupagem”, para que o

discente não fique limitado a uma única concepção e, assim, consiga aplicar tal operação em diferentes contextos. Sob esse prisma, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) trazem como ponto essencial no processo de ensino sobre a multiplicação essa associação dessa operação básica a situações que envolvam a proporção direta e inversa, o produto de medidas, a combinatória, a geometria e, não menos importante, a própria divisão (operação inversa da multiplicação).

Isso posto, pode-se mencionar, então, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1996), a qual pode ser definida como:

Um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição e de constituição conceitual (Vergnaud, 1996 apud Vieira; Abrahão, 2021, p.4)

O psicólogo francês Gérard Vergnaud já entendia a importância de ampliar a visão do sujeito sobre os diferentes tipos de problemas que envolvem um determinado conceito. Sob esse viés, é fundamental desenvolver a compreensão dos conceitos estudados e contribuir para o aumento da “bagagem cognitiva” do sujeito sobre variadas situações-problema com diversos tipos de enunciados a partir de um campo conceitual. Vergnaud, em seus estudos, começou a formalizar e analisar dois campos conceituais: aditivo e multiplicativo. Priorizando o campo de foco (campo conceitual multiplicativo), Vergnaud trabalha Estruturas Multiplicativas divididas em categorias que permitem a concretização das ideias estabelecidas nos PCN, possibilitando a ampliação tanto do conceito de multiplicação (abordando, inclusive, a divisão em conjunto) quanto a sua aplicação em diferentes contextos.

Ainda, o psicólogo matemático aborda, em sua teoria, duas competências que ele acha essenciais e principais quando se trabalham situações-problema envolvendo a Matemática com os estudantes: o cálculo relacional e o cálculo numérico. O primeiro está voltado à habilidade de interpretação do problema proposto, enquanto o segundo está relacionado ao cálculo propriamente dito. Em geral, os estudantes podem apresentar dificuldades que não devem ser ignoradas quando expostos a essas situações. Essas dificuldades precisam ser encontradas e solucionadas, sugerindo, assim, ao docente o papel de mediar essa aquisição de conhecimentos mediante uma abordagem conjunta envolvendo as duas competências apresentadas.

Com base nisso, é aqui que se solidifica a proposta desse trabalho. Diante de um cenário em que os discentes, infelizmente, não dominam a Matemática básica, como é mostrado pelos dados do Pisa 2022 (principal avaliação de educação básica no mundo) – em que 7 a cada

10 estudantes brasileiros, na faixa etária dos 15 anos, não sabem o mínimo esperado de Matemática (Bimbati, 2023) –, torna-se necessário discutir e intervir sobre as possíveis dificuldades que eles apresentam em frente a situações-problema que envolvem duas operações básicas da Matemática: multiplicação e divisão. Assim, procura-se entender as dificuldades dos discentes, especificamente de estudantes do 7º ano do ensino fundamental, no que tange ao conceito de “multiplicação” e como a ausência de recursos didáticos para auxiliar eles na efetuação do cálculo pode dificultar no processo de resolução de problemas.

Contextualizando, ao sair de pequenas questões tradicionalmente mecânicas e bem objetivas, como “calcule os seguintes produtos ou quocientes abaixo”, será que o indivíduo consegue aplicar o conceito de multiplicação para resolver problemas elaborados a partir das Estruturas Multiplicativas? Quais as dificuldades que ele pode apresentar? Será no ato da interpretação dos enunciados? Ou será na escolha dos procedimentos ideais para o desenvolvimento dos cálculos propriamente ditos?

Com base nisso, nesse trabalho, será feito um estudo voltado para o conceito de multiplicação (e, com efeito, a sua operação inversa), além de uma análise dessa operação aritmética nos documentos oficiais da educação e em livros didáticos (capítulo 2). Será discutida a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e, em seguida, o campo multiplicativo, procurando entender como que o domínio das Estruturas Multiplicativas pode ampliar o repertório cognitivo do estudante e sua habilidade interpretativa e ainda revelar a necessidade de explorar estratégias didáticas que auxiliem no processo do cálculo numérico (capítulo 3). Logo após, serão explorados três recursos a partir do viés da TCC, sendo eles: a Tábua de Pitágoras, os Algoritmos da multiplicação e a Malha Quadriculada (capítulo 4). Por fim, serão apresentados a metodologia do trabalho (capítulo 5) e os resultados da aplicação de uma sequência didática com estudantes do 7º ano (capítulo 6).

1.1 JUSTIFICATIVA

A inspiração para a abordagem desse tema se deu mediante a participação no Programa de Residência Pedagógica (PRP) em uma escola pública do estado de Pernambuco, em que, acompanhando duas turmas de 7º ano, no começo do ano letivo de 2023, percebeu-se que os estudantes ainda apresentavam significativas dificuldades no cálculo das operações básicas (sobretudo multiplicação e divisão), isso incluindo até as contas mais simples, como as que estão presentes na tabuada tradicional (envolvendo os números naturais e até os inteiros). Em uma aula breve, a preceptora do programa (docente de ambas as turmas) chegou a trazer

recursos didáticos – como alguns métodos históricos de multiplicação e a Tábua de Pitágoras –, mostrando o quanto era importante a aplicação deles no processo de ensino. Ainda, independente da série, pode-se afirmar que é perceptível, por vezes, a presença de alunos que possuem reais dificuldades nas operações aritméticas, principalmente na multiplicação e na divisão. Diante disso, houve um trabalho em cima de repetições e prática de cálculos, já que o objetivo era que o discente se habituasse a esses novos métodos, pois, para trabalhar novos conceitos posteriores, torna-se essencial que os estudantes possuam uma base mais sólida.

Além do PRP, mediante aulas particulares, estudando e resolvendo questões voltadas para o Enem, também se percebiam essas dificuldades na hora do cálculo, além da interpretação. Isto é, mudando agora o público-alvo (vestibulandos), era visível que, em paralelo, eles apresentavam duas dificuldades: interpretação e cálculo. Isso, para eles, era consequência de toda uma trajetória na educação básica marcada por métodos extremamente mecanizados, sem terem acesso a recursos que poderiam auxiliar na aprendizagem e na interiorização do conceito (tornando o processo mais uma simples “decoreba”).

Sendo assim, o ato de memorizar questões e resoluções, sem entender o que está por trás de todo esse processo e do conceito em si, proporciona um cenário em que o sujeito se habitue a um único tipo de contexto: “limitado”, sem conseguir desenvolver suas habilidades e competências, por completas, para compreender diversos tipos de problemas e saber aplicar, de acordo com cada um, o procedimento ideal ou de sua escolha. Portanto, neste trabalho, é foco entender essas dificuldades a partir de um estudo voltado para as Estruturas Multiplicativas, em que o uso de recursos didáticos e a resolução de problemas sejam caminhos que auxiliem na concepção sobre o que venha a ser “multiplicação” e que minimizem as dificuldades que os estudantes possam apresentar no futuro quanto a essa parte da Matemática básica, priorizando essas operações entre os números inteiros.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Analisar a utilização de diferentes recursos didáticos e a resolução de problemas que envolvem as Estruturas Multiplicativas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, com estudantes do 7º ano do ensino fundamental.

1.2.2 Objetivos específicos

- Compreender a bagagem cognitiva que os estudantes do 7º ano possuem sobre as Estruturas Multiplicativas a partir da relação de habilidades e competências identificadas em documentos oficiais da educação e no livro didático;
- Investigar o conhecimento prévio de estudantes do 7º ano ao resolver problemas de Estruturas Multiplicativas elaborados a partir da Teoria dos Campos Conceituais;
- Identificar as dificuldades no cálculo numérico e no cálculo relacional;
- Verificar a potencialidade dos recursos didáticos (Tábua de Pitágoras, Algoritmos e Malha Quadriculada) ao serem utilizados no processo de construção do conceito da multiplicação e na resolução de problemas envolvendo as estruturas.

2 A MULTIPLICAÇÃO

As operações aritméticas são ações que o sujeito realiza com números, com o intuito de transformá-los em outros números (Moreno, 2021). Segundo essa autora, “as Operações Aritméticas Fundamentais são: adição, subtração, multiplicação e divisão [...]”, mas que, juntas a elas, estão “[...] outras três: potenciação, radiciação e logaritmação”. Essas operações estão classificadas em diretas e inversas. A exemplo, a subtração é a operação inversa da adição, uma vez que “ $4 + 3 = 7$ e $7 - 3 = 4$ ”, enquanto a operação da potenciação admite duas inversas: a radiciação e a logaritmação.

Em relação à multiplicação, esta é uma extensão direta da adição, oferecendo uma maneira eficiente de lidar com situações em que quantidades iguais ou semelhantes precisam ser agrupadas. A multiplicação é uma operação fundamental na aritmética que representa o aumento de uma quantidade por outra (ao trabalhar com números naturais, por exemplo), e a ideia intuitiva por trás dela é a de repetição ou a formação de grupos iguais. Como a operação inversa da adição é a subtração, tem-se que a inversa da multiplicação é a divisão, e esta possui uma ideia primária intuitiva de subtrações sucessivas de um determinado número.

O foco deste trabalho é voltado para o estudo da multiplicação e, por conseguinte, da divisão, outra vez que “[...] para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão, envolvendo os significados dessas operações [...]” (Brasil, 1997, p. 109).

É importante ressaltar que a necessidade de efetuar essa operação aritmética é algo histórico, dado que os povos primitivos já possuíam uma ideia intuitiva da multiplicação ao

utilizar seus dedos ou riscos para representar seus cálculos (Galdino, 2016). Todavia, esses métodos de contagem eram limitados, pois

[...] nem sempre as quantidades eram pequenas e isso dificultava e inviabilizava a utilização dos dedos e riscos para resolver contas com números maiores. Desse modo, o homem sentia necessidade de desenvolver procedimentos para realizar contas e controlar grandes quantidades, pois, segundo o autor, a humanidade percebeu que a contagem um a um tinha suas limitações e imprecisões, e contar por meio de agrupamentos maiores foi a melhor solução (Galdino, 2016 apud Gil; Arrais, 2021).

É lógico que essa ideia intuitiva de agrupamentos (interligada à operação da adição), ao se trabalhar com números naturais, é o ideal, como também é fato que, nos primeiros anos escolares, os estudantes até utilizam da estratégia dos dedos ou dos riscos para realizar as contagens e, em seguida, diante de números maiores, sentem a necessidade de agrupar e efetuar a adição de parcelas sucessivas. Porém, embora se saiba que a multiplicação é uma adição sucessiva de parcelas iguais, isso “[...] não implica que a operação de multiplicação é uma operação que pode ser gerada a partir da operação da soma” (Carvalho, 2016).

Em outros termos, faz-se necessário que as escolas e os docentes desenvolvam um papel maior no processo de ensino-aprendizagem sobre uma compreensão mais ampla acerca dessa operação. Para enfatizar essa crítica, Davydov (1982) afirma que o ensino tradicional apresenta às crianças os conceitos como um produto final, isto é, algo concreto em que não há mais transformações em sua essencialidade, muitas vezes, evitando explicações sobre o processo e tornando os assuntos bem abstratos (sobretudo da Matemática) para os discentes assimilarem. Davydov ainda ressalta a necessidade de os estudantes desenvolverem o pensamento teórico e prático, a fim de ampliar suas funções psicológicas superiores, processo este que pode ser feito por meio de um ensino que vise à pluralidade das aplicações de um determinado conceito e seus variados significados. Sendo assim, apresentar a multiplicação como não sendo um produto final sem entender os processos por trás da operação e os seus diferentes significados é preciso.

Com base nisso, neste capítulo, haverá brevemente uma abordagem acerca da multiplicação e da divisão, apresentando suas definições e propriedades, além de análises desses conceitos a partir de documentos oficiais da educação e de livros didáticos.

2.1 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Restringida ao conjunto dos números naturais, a operação aritmética da multiplicação pode ser definida como uma operação entre dois números, a fim de adicionar um deles o tanto de vezes que o outro número permitir. Matematicamente, pode-se trazer a seguinte definição:

Figura 1 - Definição da multiplicação entre naturais

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ vezes}} = c$$

Fonte: Autoria própria.

Sendo **a** e **b** dois números naturais, também conhecidos como “fatores”, enquanto a multiplicação entre ambos resultará em um número **c** (chamado de “produto”), que é obtido mediante a adição sucessiva de parcelas iguais. Uma outra forma de entender esse processo é combinar “[...] cada elemento de um conjunto com **a** objetos com cada elemento do outro conjunto de **b** objetos” (Moreno, 2021).

A multiplicação possui duas representações: na forma horizontal ou na forma vertical. Segue uma ilustração abaixo.

Figura 2 - Representações de uma multiplicação

Horizontal:	$a \times b = c$
Vertical:	$\begin{array}{r} a \\ \times b \\ \hline c \end{array}$

Fonte: Autoria própria.

Embora essa definição esteja relacionada aos fatores serem naturais, pode-se associá-la aos inteiros, em que, no caso de um dos fatores ser um número negativo, em vez de adicionar um valor um tanto de vezes, subtrai-lo-ia esse tanto de vezes. Por exemplo, $3 \times (-2) = -3 - 3$. Ou seja, subtrairia o 3 duas vezes. Como não há um valor referencial para a subtração, então seria o número 0 (elemento neutro da adição), em que teria: $0 - 3 - 3 = -6$.

Quando ambos fatores são negativos, torna-se viável trabalhar com a Regra de Sinais, tratando a operação com os sinais à parte da operação com os números. Como exemplo, veja a multiplicação de -4 por -3 .

$$(-4) \times (-3) = 4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

É importante destacar, ainda, que a ordem dos fatores não determina quantos agrupamentos serão necessários, e sim que o ideal é agrupar o menor número de vezes possível, isto é, na multiplicação de 4 por 3, o ideal é adicionar o 4 três vezes do que o 3 quatro vezes (mobilizando a ideia da comutatividade). Assim, percebe-se que essa ideia primária de “adição sucessiva” pode ser adaptada ao conjunto dos números inteiros, mas que pode causar confusões na mente do estudante, sobretudo quando o problema não está relacionado com o conjunto numérico em si, mas com a grandeza numérica envolvida na operação. Prova disso é se deparar com a multiplicação de 22 por 25, em que fica inviável e extensa a efetuação do cálculo mediante a definição proposta. Dessa maneira, a adição sucessiva de parcelas iguais torna-se uma limitação, evidenciando a necessidade de encontrar estratégias diversas para a execução do cálculo numérico proposto.

Para entender melhor o conceito da multiplicação, faz-se preciso também destacar as propriedades intrínsecas na construção e na execução dessa operação entre os números inteiros.

- 1) **Comutatividade:** a ordem dos fatores não altera o produto.

$$a \times b = b \times a$$

- 2) **Associatividade:** a forma como os fatores são agrupados não altera o resultado final.

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- 3) **Elemento neutro:** todo número multiplicado por 1 resulta nele próprio.

$$a \times 1 = a = 1 \times a$$

- 4) **Elemento nulo:** todo número multiplicado por zero resulta em zero.

$$a \times 0 = 0 = 0 \times a$$

- 5) **Distributividade:** a operação da multiplicação é distributiva em relação à adição e à subtração.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Da propriedade 1, é preciso destacar uma observação sobre a comutatividade, em que, mesmo alterando a ordem dos fatores e o resultado sendo o mesmo, o significado e o procedimento de efetuar o cálculo podem ser diferentes, quando o contexto do problema requer um significado. Exemplo disso, veja a seguinte situação-problema: “Paula comprou 5 sacolas de maçãs, com 6 maçãs em cada uma. Quanto maçãs ela comprou?”. O raciocínio de agrupar 5

vezes o número 6, ou seja, adicionar 6 cinco vezes, mantém o significado de que o 6 representa o número de maçãs, mas, se for o contrário, adicionar 5 seis vezes, o 5 representa o número de sacolas. Em ambos os casos, o resultado é 30, mas com sentidos diferentes (um é 30 maçãs, o outro é 30 sacolas). Em geral, são situações diferentes com significados diferentes, embora possuindo o mesmo resultado.

Como visto, a multiplicação pode ser definida como uma adição sucessiva, e já a divisão pode ser, por sua vez, conceituada como subtrações sucessivas de um certo valor. Em outros termos, dada uma divisão $a \div b \mid b \neq 0$, tem-se $a - b = c, c - b = d, d - b = e, \dots, z - b = 0$. O total de subtrações realizadas é o resultado da divisão. Veja um exemplo numérico:

$$15 \div 3$$

$$15 - 3 = 12; 12 - 3 = 9; 9 - 3 = 6; 6 - 3 = 3; 3 - 3 = 0$$

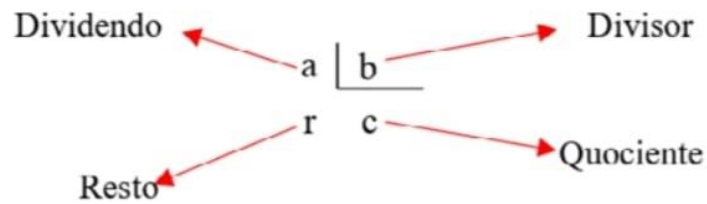
Foram realizadas 5 subtrações, então $15 \div 3 = 5$. Pode-se entender esses passos como uma forma de distribuir a quantidade **a** para **b** objetos ou saber quantas vezes **b** pode ser encaixado dentro de **a**. Nem sempre o valor final dessas subtrações sucessivas será zero¹, indicando que **a** não é um número múltiplo de **b**, envolvendo um quociente que não pertence ao conjunto dos inteiros, e sim dos racionais (conjunto que não será abordado neste trabalho). Quando isso ocorre, tem-se, então, uma sobra, que é mais conhecida como “resto”. Para conhecer essa e outras nomenclaturas dos elementos que compõem uma divisão, segue abaixo as representações possíveis dessa operação e, em seguida, as nomenclaturas.

- **Forma horizontal:** $a \div b$
- **Forma vertical:** $\frac{a}{b}$

Além dessas duas formas de representações, há também a representação na forma de chave, como ilustra a Figura 3.

¹ É importante lembrar que isso ocorre quando o minuendo é menor que o subtraendo (em módulo), de modo que a subtração $a - b$ resulta em um número não natural. O fato de resultar em um número não natural implica que o dividendo da divisão não é divisível pelo divisor.

Figura 3 - Representação da divisão na forma de chave



Fonte: Moreno (2021).

Uma forma mais geral de representar a divisão com números inteiros é com a seguinte expressão:

$$D = d \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < |q|$$

D é o dividendo; **d** é o divisor; **q** é o quociente; e **r** é o resto. Quando o resto for zero (o que irá indicar que **d** divide **D**), então a expressão acima pode ser simplificada para: $D = d \times q$ (voltando à representação da operação multiplicativa). Além disso, é essencial ressaltar as principais propriedades dessa operação aritmética.

- 1) **Elemento neutro:** todo número dividido por 1 tem ele próprio como resultado.

$$\frac{a}{1} = a$$

- 2) **Propriedade do zero:** se $a \neq 0$, então **a** dividido por zero não existe (uma indeterminação) e zero dividido por **a** é zero.

$$\frac{a}{0} = \text{indeterminação} \text{ e } \frac{0}{a} = 0$$

- 3) **Propriedade da comutatividade (ou não comutatividade):** a divisão não é comutativa.

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}, \text{ com } |a| \neq |b| \neq 0$$

- 4) **Propriedade da associatividade (ou não associatividade):** a divisão não é associativa.

$$a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c, \text{ com } a \neq 0 \text{ ou } |c| \neq 1$$

- 5) **Propriedade do produto:** o quociente é o mesmo para múltiplos do dividendo e do divisor.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} = c$$

- 6) **Propriedade da distributividade (em relação ao dividendo):** a divisão é distributiva em relação à adição e subtração quanto ao dividendo. No que tange ao divisor, a propriedade não se aplica.

$$(1) \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad e \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

$$(2) \frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad e \quad \frac{a}{b-c} \neq \frac{a}{b} - \frac{a}{c}$$

No que tange à propriedade 3, é necessária a restrição, pois há situações em que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, em que basta $|a|$ ser igual a $|b|$, e ambos diferentes de zero. Essa observação se faz necessária na propriedade 4 também, pois, quando $a = 0$ ou $|c| = 1$, tem-se que $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$. Logo, somente nesses casos que ambas as propriedades não se aplicam. Por fim, é preciso ressaltar que o presente trabalho não focará em apresentar demonstrações dessas propriedades, já que não faz parte do foco deste.

A partir da apresentação desses conceitos e de suas propriedades, ver-se-á uma breve análise desses conceitos (sobretudo a multiplicação) nos documentos oficiais de educação (como os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo de Pernambuco) e em dois livros didáticos (um do 6º e outro do 7º ano) da coleção “Trilhas da Matemática” (Sampaio, 2018).

2.2 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO

Nesta subseção, será analisado o conceito de multiplicação (e da divisão) nos PCN (Brasil, 1997) e no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2021). Priorizando o grupo de foco (estudantes do início do Ensino Fundamental – Anos Finais), o Currículo de Pernambuco esclarece como ponto essencial para o desenvolvimento das habilidades previstas nesta etapa da Educação Básica:

[...] levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos estudantes, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando o desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (Pernambuco, 2021, p.376).

Sendo assim, mirando em estudantes do 6º e 7º ano, por exemplo, o docente não pode ignorar a bagagem cognitiva que eles trazem dos anos anteriores, ou seja, o seu repertório em

relação aos conteúdos previstos para serem lecionados naquele ano. No que concerne ao conceito da multiplicação, é necessário que o professor esteja por dentro do que os discentes tiveram contato nos anos anteriores, investigando os seus conhecimentos atuais, para, então, prosseguir ampliando esse repertório e suavizando as dificuldades que eles ainda apresentam no que tange aos conceitos antes vistos ou até mesmo não vistos. Diante disso, torna-se importante realizar uma análise de como o Currículo de Pernambuco organiza as unidades temáticas, os objetos de conhecimentos e as habilidades (tendo como principal fundamentação a Base Nacional Comum Curricular) quanto ao conteúdo em questão desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais.

O conceito de multiplicação é apresentado, pela primeira vez, aos estudantes no 2º ano do Ensino Fundamental, na unidade temática “Números”, com o seguinte objeto de conhecimento “Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação)” e a habilidade “(EF02MA07PE) – Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável”. Observe que aqui se encontra o primeiro contato da criança com a primeira definição do que é a “multiplicação”: adição sucessiva de parcelas iguais. Há também um objeto de conhecimento voltado para apresentar, mesmo sem formalização do conceito, as primeiras divisões: “Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte”; trabalhando a ideia intuitiva de metade e terça parte mediante a prática da repartição de uma coleção em partes iguais e introduzindo um dos significados da divisão: quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

No 3º ano, tem-se o objeto de conhecimento “Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação” com a seguinte habilidade “(EF03MA03PE) – Construir e utilizar fatos básicos da adição, subtração e da multiplicação (utilizando diversas estratégias de cálculos: composição e decomposição por meio de adições e multiplicações, procedimentos de contagem, diversas formas de representação, inclusive com sinais de adição, multiplicação e igualdade) para o cálculo mental ou escrito”. Neste ano, já se tem um objeto de conhecimento específico voltado para ampliar os significados e as estratégias de resolução de problemas, que é “Problemas envolvendo significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida”. Esse objeto de conhecimento possui três habilidades, dentre as quais se destaca a habilidade “(EF03MAXPE) – Reconhecer que a multiplicação e a divisão são operações inversas”. Em relação à divisão, já há uma preocupação em apresentar problemas que envolvem divisões de um número natural por 1 até 10, com o resto sendo zero ou não.

No 4º ano, há um acréscimo de mais um significado dado à multiplicação, que é a “proporcionalidade”, e a habilidade (EF04MA06PE) traz como estratégias o cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. Na divisão, a habilidade (EF04MA07PE) sugere trabalhar divisões cujos divisores tenham no máximo dois algarismos. Neste ano, há um destaque para um objeto de conhecimento voltado para problemas de contagem para introduzir a ideia de combinatória, possuindo a seguinte habilidade “(EF04MA08PE) – Resolver, com suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais”. Veja que é uma outra forma de ressignificar a multiplicação, introduzindo o princípio multiplicativo aos estudantes.

No 5º ano, em relação aos anos anteriores que abordavam essas operações entre números naturais, há uma ampliação do conjunto numérico, expandindo-o para os racionais com o seguinte objeto de conhecimento: “Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais”.

Chegando no 6º ano (início do Ensino Fundamental – Anos Finais), há dois objetos de conhecimento que compartilham uma mesma habilidade: “Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais” e “Divisão euclidiana”. A habilidade (EF06MA03PE) sugere que, nesta etapa, os discentes consigam compreender os processos por trás dessas operações, de modo que sejam enfatizados os diferentes significados dessas operações aritméticas. A habilidade (EF06MA11PE) retrata o mesmo objetivo que a anterior, só que focando nos números racionais, destacando como possíveis estratégias as representações por fração ou decimal para efetuar as operações.

Por fim, no 7º ano, há a apresentação dos números inteiros envolvendo as operações apresentadas nos anos anteriores. Duas habilidades que são destaques neste ano são: “(EF07MA04PE) – Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros e suas aplicações em diversos contextos, inclusive da educação financeira” e “(EF07MA05PE) – Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos”.

Em geral, percebe-se que o Currículo, a partir da BNCC, possui essa preocupação em mostrar para os discentes os diversos significados e estratégias de resolução de problemas no que concerne à multiplicação e à divisão. Veja que a multiplicação, por sua vez, foi abordada com os seguintes significados: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade e um pouco de combinatória; enquanto a divisão teve: repartição equitativa e medida (ambas já discutidas na seção 1.1).

Os quatro significados dado ao conceito de multiplicação estão também presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais, os quais ainda destacam que os significados dessas operações devem ocorrer em situações dos tipos: multiplicação comparativa, proporcionalidade, produto de medidas e combinatória. Uma observação é que a configuração retangular é apresentada dentro de “produto de medidas”. Dentro das situações de proporcionalidade, existe a possibilidade de formular outras situações que irão dar os significados já apresentados quanto à operação da divisão. Os PCN, em relação a esses significados, propõem aos docentes:

[...] convém destacar que é desejável que os problemas a serem trabalhados em sala de aula não sejam tratados separadamente. O que se recomenda é que os professores garantam que todos eles sejam explorados em situações mais ricas, contextualizadas, que possibilitem o desenvolvimento da interpretação, da análise, da descoberta, da verificação e da argumentação (Brasil, 1997, p.112).

Portanto, é essencial que os estudantes tenham contato, desde cedo, a esses diversos significados e estratégias que rodeiam o conceito da multiplicação e sua operação inversa, ampliando seus repertórios no que tange a essas operações entre os números inteiros, a fim de que, quando cheguem nos Anos Finais, possam dar continuidade na consolidação desses conhecimentos mediante o aprofundamento e aplicações dos conceitos em diversas situações.

2.3 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

A coleção “Trilhas da Matemática” (Sampaio, 2018) é utilizada pela escola em que o autor do trabalho possui contato mediante o PRP (Programa de Residência Pedagógica) numa escola estadual de Pernambuco. Decidiu-se analisar não só o livro do 7º ano (foco da pesquisa), mas também o livro do 6º ano, por entender que a coleção sugere como ideal para ser transmitido ao estudante no início dos Anos Finais do Ensino Fundamental e, assim, compreender um pouco da bagagem que os discentes carregam (ou deveriam) em relação à multiplicação e à divisão para o 7º ano, no qual foi realizada uma sequência didática que será explicada e detalhada nos capítulos 5 e 6 desse trabalho.

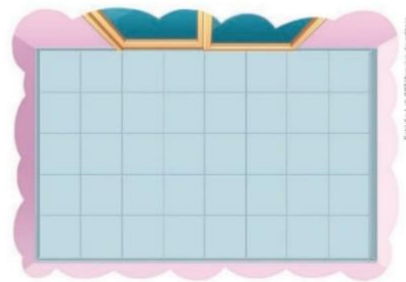
O objetivo dessa análise, em geral, é ver como que o livro didático aborda o conceito da multiplicação e da divisão e seus diferentes significados, como foram apresentados pelos documentos oficiais.

O tema “Multiplicação e divisão”, no livro do 6º ano, é apresentado no capítulo 4. De início, há uma abordagem voltada somente para o conceito de multiplicação, pelo tópico “Multiplicação”, destacando duas habilidades da BNCC: (EF06MA03) e (EF06MA12). A primeira condiz com a habilidade (EF06MA03PE), que foi destacada na subseção anterior, enquanto a segunda habilidade ressalta “Fazer estimativa de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima”. Há uma observação destacada sobre a importância de o estudante compreender a diferença entre raciocínio aditivo e raciocínio multiplicativo, ou seja, entender que a multiplicação não é exclusivamente baseada na ideia de adição sucessiva, embora seja a definição primária ideal que deva ser apresentada aos discentes.

O primeiro problema apresentado teve intuito de tanto introduzir a ideia da adição sucessiva de parcelas iguais quanto a de disposição retangular. O problema foi o seguinte: “André comprou 15 caixas de determinado piso, cada uma contendo 20 lajotas. Quantas lajotas ele comprou ao todo?”. O livro trouxe primeiro a resolução da seguinte forma “ $15 \times 20 = 300$ ”, utilizando como estratégia a adição sucessiva. Em seguida, contextualizou o problema com a seguinte afirmação: “André usou o piso que comprou em diferentes ambientes de sua casa. Veja como ficou o piso da varanda.”; apresentando, logo após, uma figura retangular do tipo 5 x 8, explicando essa forma de representar uma multiplicação a partir da organização “fileiras por lajotas”, que corresponderia à ideia de “colunas por linhas”. Segue uma ilustração do livro abaixo.

Figura 4 - Ilustração do livro sobre o problema das lajotas

André usou o piso que comprou em diferentes ambientes de sua casa. Veja como ficou o piso da varanda.



Fonte: Sampaio (2018).

Com o mesmo problema, a partir de um novo contexto, abordou o significado da multiplicação a partir de situações de proporcionalidade. O novo problema foi: “André comprou os pisos em uma promoção na qual cada lote com 3 caixas custou 360 reais. Quanto ele pagou

pelas 15 caixas que comprou?”. Como 15 é o quántuplo de 3, então se pode efetuar a multiplicar de 360 por 5, resultando em 1800.

O livro traz um subtópico abordando os “Algoritmos da Multiplicação”, especificamente o da decomposição e o método usual. Em ambos, há uma retomada na explicação sobre o Sistema de Numeração Decimal, haja vista como um pré-requisito para compreender melhor os procedimentos realizados ao efetuar o cálculo multiplicativo por um desses algoritmos. Em seguida, há a apresentação das propriedades da multiplicação, ressaltando a sua importância em um dos blocos de observação: “O estudo das propriedades da multiplicação tem como objetivo facilitar os cálculos, principalmente os procedimentos de cálculo mental” (Sampaio, 2018).

Em relação a estas propriedades, foram destacadas: comutativa, elemento neutro, associativa e distributiva em relação à adição. Como o domínio numérico a ser ainda trabalhado neste capítulo do livro é os naturais, não há a relação da distributiva em relação à subtração. Após isso, há uma sequência de problemas propostos para o estudante. Sobre estes, percebe-se que todos eles possuem contextos e estratégias de resolução diferentes, abordando várias situações que contribuem para a formalização de um conceito de multiplicação mais amplo, envolvendo as seguintes estruturas: problemas para prática dos algoritmos; problemas envolvendo multiplicação e subtração; problemas de proporcionalidade; da propriedade associativa; da ideia de combinatória; de números quadrados perfeitos a partir da análise lógica de uma sequência de figuras; problema específico para apresentar um novo algoritmo de multiplicação (o método gelosia); problemas usando a calculadora quebrada como recurso didático e dentre outros.

Em geral, os problemas que compõem essa atividade complementar do livro são bem diversificados, contribuindo para uma ampliação do repertório do estudante sobre diferentes enunciados envolvendo a multiplicação. Além disso, há alguns problemas de provas da OBMEP (Olimpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) que foram também utilizados neste tópico. Segue abaixo alguns exemplos de problemas abordados pelo livro.

Figura 5 - Montagem ilustrativa de problemas abordados no livro do 6º ano

1. Calcule o resultado de cada multiplicação na qual um número da fileira horizontal é multiplicado por um número da fileira vertical. Veja no exemplo destacado que $74 \times 96 = 7104$.

x	67	96	375	2938
8	536	928	3000	23504
74	4968	7104	27750	217412
657	44019	62016	246075	1890066

4. A tabela a seguir apresenta os pontos obtidos pelas equipes em um jogo de basquete.

	Número de pontos obtidos por cada equipe	
	Equipe visitante	Equipe local
Cestas de 3 pontos	8	11
Cestas de 2 pontos	36	31
Cestas de 1 ponto	9	13

Dados elaborados pelo autor.

Qual foi o placar final do jogo?
equipe local: 108; equipe visitante: 105

6. Com os algarismos 1, 3, 6 e 7, forme dois números de dois algarismos cada, sem repetição, de modo que o produto deles seja:

a) o maior possível; $71 \times 63 = 4473$

b) o menor possível; $16 \times 37 = 592$

7. Observe a sequência de figuras abaixo.

1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura

a) Quantos pontos formarão a próxima figura? 25

b) É a 10ª figura? 100

c) Qual é a regra que permite descobrir o número de pontos em cada figura?
Representando a ordem de uma figura por n , temos que o número de pontos dessa figura é $n \times n$.

10. Gabriel quer usar uma calculadora para obter o produto de 27×81 , mas a tecla **1** está quebrada. Como ele pode realizar esse cálculo sem apertar a tecla **1**?
Resposta possível: Ele pode fazer $27 \times 80 = 2160$ e depois somar 27, obtendo 2187.

11. Gilmar calculou o resultado de 246×87 e obteve como resultado 21416, mas Patrícia percebeu que o resultado estava errado sem realizar o cálculo.

a) Como ela pôde descobrir o erro? 11. a) O algarismo das unidades deveria ser 2, pois o produto das unidades é $6 \times 7 = 42$.

b) Qual é o resultado correto dessa multiplicação? 21402

(Obmep) Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

a) 1 c) 3 e) 8

b) 2 d) 4

Fonte: Sampaio (2018).

Chegando no tópico da “Divisão”, as habilidades da BNCC destacadas são as mesmas que a do tópico da “Multiplicação”. O livro traz, para introduzir o conceito de divisão, um problema que, contextualizando, resalta o seguinte: “várias escolas irão enviar um total de alunos para um campeonato de jogos, e eles ficarão em 4 alojamentos, sabendo que cada alojamento recebe o mesmo número de alunos e que o total de alunos é 200”. Em seguida, há uma alteração no problema, pedindo o total de alojamentos, sabendo que cada um só pode receber 25 estudantes. Observe que a primeira ideia proposta pelo problema é a de repartição equitativa, enquanto a segunda propõe a ideia de “quantas vezes uma quantidade cabe em outra”.

Prosseguindo, o livro apresenta as representações da divisão, trazendo as nomenclaturas de cada elemento e, logo após, abordando o subtópico “Divisão exata e não exata”, em que apresenta a “Relação Fundamental da Divisão”: $\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente} + \text{resto}$ (que já foi apresentado na subseção 1.1). O livro ainda aborda o algoritmo usual da divisão, sem abordar algum outro método, e apresenta uma estratégia de resolução: divisões por meio de estimativas. Após isso, há uma sequência de problemas propostos para os

estudantes, os quais mantêm semelhança com as estruturas apresentadas no tópico da multiplicação.

Para finalizar a análise do livro do 6º ano, há mais um tópico abordando “Relação entre multiplicação e divisão”, com base na habilidade (EF06MA14) – Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. Assim, o livro apresenta ao estudante que a divisão é a operação inversa da multiplicação e, em seguida, propõe problemas de fixação.

No livro do 7º ano, a multiplicação se faz presente no capítulo 2, abordando operações entre inteiros. O tópico da multiplicação começa com uma abordagem de um jogo de tabuleiro, em que há dois dados adaptados com os seguintes números em suas faces: $D_{\text{amarelo}} = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ e $D_{\text{verde}} = \{-3, -2, -1, +1, +2, +3\}$. Cada participante, em sua vez de jogar, lança os dois dados e efetua a multiplicação entre os números obtidos na face superior de cada dado. A partir disso, o livro aborda as Regras de Sinais com base nas possibilidades de multiplicações que podem ser realizadas. Este tópico é bem curto, e as estruturas utilizadas para compor as atividades propostas são semelhantes às do livro do 6º ano, trazendo problemas, em sua maioria, simples, sem abordar, por exemplo, alguns dos significados antes já apresentados no livro do 6º ano, como a proporcionalidade e a combinatória.

Em seguida, há um subtópico abordando as propriedades dessa operação nos inteiros, em geral, mantendo o mesmo padrão que foi mostrado no livro do 6º ano. Nas atividades propostas, os exercícios são mais de fixação, maior parte sem ter um contexto (isto é, sendo mais objetivos), mas que uma questão em específico aborda a seguinte estrutura: “____ x (- 8) = - 8”, em que o estudante deve completar o fator ausente. Embora seja uma estrutura interessante até para efetuar a divisão a partir de uma multiplicação (qual o número que multiplicado por - 8 resulta em - 8?), os exemplos foram bem simples, não trazendo nenhum desafio ao estudante.

Chegando no tópico da “Divisão exata com números inteiros”, o livro aborda novamente a Regra de Sinais a partir de um problema objetivo e direto (sem contexto) e já traz uma sequência de exercícios mantendo o padrão dos que foram propostos no tópico anterior. Duas habilidades da BNCC, que são destacadas no livro, são a (EF07MA04) e (EF07MA05), que condizem com as que foram apresentadas na subseção anterior no parágrafo que abordava o 7º ano a partir do Currículo de Pernambuco. Segue abaixo uma ilustração de alguns exemplos desse tópico.

Figura 6 - Problemas do livro do 7º ano (divisão)

45. Calcule o resultado da divisão em cada caso.

a) $(+215) : (-5)$ -43 d) $(-480) : (-10)$ 48 g) $(-360) : (+5)$ -72
 b) $(+324) : (+4)$ 81 e) $(+720) : (-9)$ -80 h) $(-151) : (+151)$ -1
 c) $(-180) : (-15)$ 12 f) $0 : (-38)$ zero i) $(+100) : (-20)$ -5

46. Encontre todos os pares de números do quadro abaixo de modo que o quociente da divisão entre eles seja um número inteiro positivo.

-12	+4	-6	+2	-1
-----	----	----	----	----

Resolução
 Para que o quociente da divisão seja um número inteiro positivo, ambos os números devem ter sinais iguais. Podemos formar os seguintes pares nessas condições:

- $-12 : (-6) = +2$ • $-12 : (-1) = +12$ • $-6 : (-1) = +6$ • $+4 : (+2) = +2$

47. Encontre todos os pares de números do quadro da atividade anterior de modo que o quociente da divisão entre eles seja um número inteiro negativo. Registre as divisões no caderno.

$-12 : (+4) = -3$; $-12 : (+2) = -6$; $-6 : (+2) = -3$; $+4 : (-1) = -4$

48. Determine o quociente entre dois números inteiros diferentes de zero nos casos em que eles são:

a) iguais; 1 b) opostos. -1

49. Complete a sequência em cada caso a seguir. *Veja resposta no final do livro.*

a) $64 \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare$ c) $(-64) \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare$
 b) $64 \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare$ d) $(-64) \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare \xrightarrow{-2} \blacksquare$

Fonte: Sampaio (2018).

Por fim, nos dois livros de destaques neste trabalho, percebe-se que as habilidades propostas no Currículo de Pernambuco (a partir da BNCC) e algumas definições estabelecidas pelos PCN se fazem presente mais no livro do 6º ano do que no do 7º, com alguns tópicos não sendo abordados como deveriam (a exemplo das propriedades) e problemas propostos a partir de situações mais contextualizadas (6º ano) e menos contextualizadas (7º ano). Mediante ao que foi supracitado, compreende-se que algumas estruturas antes utilizadas como definições do conceito de multiplicação (a saber, proporcionalidade, configuração retangular e combinatória) não são mais abordadas, e os conceitos passam a ser mais apresentados como um “produto final” – crítica já apresentada por Davydov (1982) –, de modo a refletir se essa ausência é necessária ou se essas “categorias” podem ainda contribuir para a ampliação da bagagem cognitiva dos estudantes, conforme avançam nos anos do Ensino Fundamental, acerca dos problemas, situações e contextos que envolvem a multiplicação e, por conseguinte, a divisão.

E é nessa necessidade de reflexão e discussão que o próximo capítulo abordará uma teoria psicológica cognitivista que será voltada para entender as relações entre os conceitos a serem apreendidos pelos estudantes e como devem ser trabalhados, de modo que o sujeito possa construir e reestruturar seus campos conceituais ao longo do tempo, passando por diferentes fases de desenvolvimento cognitivo.

3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Diante das análises realizadas no capítulo anterior sobre os conceitos da multiplicação e da divisão, investigando a abordagem que os documentos oficiais da educação e os dois livros didáticos destacados apresentam em relação ao assunto proposto a partir de suas definições, significados e propriedades, ficou perceptível a importância de compreender como esses conceitos devem ser trabalhados com os discentes, de modo com que estes possam ampliar seus repertórios e saberes sobre o que venha a ser realmente a “multiplicação” e como está aplicada em diferentes contextos e problemas, como os PCN já haviam apresentado por meio de definições do tipo: multiplicação comparativa, proporcionalidade, produto de medidas e combinatória.

Sendo assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais e até o Currículo de Pernambuco alertam acerca da necessidade de se trabalhar essas operações aritméticas associadas a problemas que explorem seus diversos significados e definições, envolvendo outros conceitos da Matemática, para que os estudantes possam ter uma compreensão mais sólida e abrangente sobre as variadas temáticas dessa área do conhecimento. Dessa maneira, é aqui que, fundamentado por esses documentos oficiais, será apresentada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) começou a ser estudada e formalizada pelo psicólogo e matemático francês Gérard Vergnaud por volta da década de 80, o qual procurou compreender como os discentes constroem os conceitos, incluindo os conceitos matemáticos, considerando não apenas os aspectos cognitivos, mas também a influência do contexto e das relações entre diferentes conceitos. Como discípulo de Piaget, Vergnaud traz em sua teoria uma ampliação do foco piagetiano sobre as operações lógicas gerais para um estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-situação”, isto é, o sujeito inserido em um determinado contexto de aprendizagem (Vergnaud, 1996a).

Com base nisso, pode-se trazer a seguinte definição para TCC:

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e na técnica, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio (Moreira, 2002, p.8).

Assim, a TCC busca compreender como o indivíduo organiza seus conhecimentos, como lida com as dificuldades conceituais e como constrói significados a partir das interações com os conceitos presentes em um determinado campo conceitual. Em outras palavras, a TCC

baseia-se na ideia de que os conceitos não são entidades isoladas, mas que estão interligados em campos conceituais.

Campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações do pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (Moreira, 2002, p.8)

Para a formalização desse conceito de campo conceitual, Vergnaud (1983a) destaca três argumentos:

- 1) Um determinado conceito não é formado a partir de um único tipo de situação;
- 2) Uma situação não pode ser analisada a partir de um só conceito;
- 3) A formação e a assimilação de todas as características de um conceito ou todos os elementos de uma situação são um processo abrangente que se desenrola ao longo de vários anos, às vezes mais de uma década, envolvendo analogias e mal-entendidos entre diferentes situações, concepções, procedimentos e significados.

Para ele, o campo conceitual é como uma unidade de estudo que dá sentido às dificuldades analisadas no processo de conceitualização do real, destacando que a conceitualização, por sua vez, é a essência do desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, é preciso dar destaque aos aspectos conceituais dos esquemas² e à análise conceitual das situações, já que estes são fundamentais para compreender como ocorre a construção do conhecimento pelos sujeitos-em-situação. Nessa visão, torna-se importante conceituar “conceito” dentro da TCC.

Vergnaud, para definir “conceito”, propõe uma estrutura de um triplete composto por três conjuntos: $C = (S, I, R)$; em que **C** é o conceito; **S** são as situações; **I** são os invariantes operatórios; e **R** são as representações simbólicas.

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; **I** é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; **R** é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e,

² O conceito de esquema é o ponto central da teoria de Piaget que Vergnaud (1996a) utilizou para fundamentar a sua teoria, destacando, ainda, outras ideias piagetianas importantes para a investigação em didática das Ciências e da Matemática: adaptação, desequilíbrio e reequilíbrio.

consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas (Moreira, 2002, p.10, grifos nossos).

Segundo Moreira (2002), pode-se compreender essa estrutura como sendo: situações (referente do conceito), invariantes operatórios (significado do conceito) e representações simbólicas (significante); em que cada um deles estão inter-relacionados entre si.

Em relação ao conjunto S, as situações podem ser entendidas como “situações-problema”, ou seja, uma combinação de tarefas que serão executadas pelo sujeito para se chegar em um determinado resultado. Desse modo, o termo "situações", na TCC, refere-se aos diferentes e variados cenários ou problemas nos quais os conceitos são aplicados, contribuindo para a construção do entendimento dos discentes de forma mais contextualizada e significativa. A partir disso, é que se torna essencial que o docente propicie aos estudantes situações que estimulem a emersão de novos conhecimentos, e isso ocorrerá na medida em que eles tenham contato com variadas situações (ou tipos de problemas), ampliando o seu repertório e ganhando significado.

Moreira (2002) ainda afirma que essas situações dão sentido ao conceito, mas que este não está nas situações em si mesmas. “O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes”. Isso posto, tem-se a necessidade de conceituar “esquemas”, que, segundo o autor, podem ser representações de padrões de pensamento e organização mental que são desenvolvidos através da interação do sujeito com as situações ou com os significantes (representações simbólicas). Em geral, os esquemas são como as ações executadas pelo sujeito diante de uma situação, de tal forma que “o desenvolvimento cognitivo consiste sobretudo, e principalmente, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas” (Moreira, 2002, p.12).

É importante destacar que os esquemas, isto é, a forma como que o sujeito organiza seu pensamento e executa determinadas ações, diferem de sujeito para sujeito, uma vez que cada estudante escolhe para si a melhor forma de resolver um determinado problema. Os esquemas são diversos e estão ligados diretamente à maneira com que cada sujeito reage a uma situação. “Quanto mais esquemas o indivíduo tiver, mais condições de solucionar as tarefas ele terá. Seu desenvolvimento cognitivo se dará à medida que o seu repertório de esquemas for mais vasto” (Barros; Boaventura, 2019, p.119). Em outras palavras, pode-se compreender, por fim, os esquemas como as estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes para solucionar uma certa situação.

Além disso, Moreira (2002, p.17) ressalta que Vergnaud “[...] considera que os esquemas necessariamente se referem a situações, a tal ponto que dever-se-ia falar em interação

esquema-situação ao invés de interação sujeito-objeto”, e que esses esquemas possuem “ingredientes” que são denominados “invariantes operatórios”. Os invariantes operatórios são uma estrutura de conhecimento que se mantém constante e é aplicada a várias situações de um campo conceitual específico (a exemplo das propriedades da multiplicação e da divisão), enquanto os esquemas são estruturas mais amplas que englobam não apenas os invariantes operatórios, mas também outras operações que o sujeito pode utilizar e adaptar, dependendo da situação e do problema em questão.

Por último, tem-se o conjunto das representações simbólicas, que se referem à capacidade dos discentes de expressarem conceitos por meio de símbolos, fórmulas, expressões e linguagem de maneira geral. As representações servem para que possam ser identificados os invariantes operatórios (objetos, propriedades, relações e teoremas), como também para planejar, organizar e controlar a ação (os esquemas). Em outros termos, as representações simbólicas referem-se à forma como um estudante expressa e comunica sua compreensão em relação a uma situação proposta, envolvendo não apenas a escolha de símbolos, fórmulas e notações para representar conceitos, mas também revelando a relação entre a compreensão do discente e a expressão de seus conhecimentos. Cada estudante, ao enfrentar um determinado conceito, opta por uma representação específica para traduzir sua compreensão em uma linguagem, permitindo a negociação entre diferentes formas simbólicas associadas a um mesmo conceito.

É preciso destacar ainda que essas representações simbólicas estão associadas à forma como o estudante interpreta a situação proposta³. A interpretação do problema envolve a capacidade de extrair significado, identificar relações e reconhecer padrões, o que, por sua vez, influencia diretamente nas escolhas das representações simbólicas. Sendo assim, a partir de situações propostas para os estudantes, sabe-se que a interpretação é um dos fatores primordiais que contribui para que o problema seja resolvido, uma vez que a habilidade de interpretar inclui identificar os dados fornecidos, compreender o contexto, reconhecer as relações entre diferentes elementos e entender claramente o que é solicitado no problema. A partir disso, o sujeito pode chegar à resolução do problema, haja vista que este é a aplicação de estratégias e técnicas para encontrar soluções para os problemas interpretados.

Como já abordado pela Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1983b) ressalta que o conceito emerge com base na resolução de problemas. Ele ainda propõe que as situações

³ Importante ressaltar que, neste trabalho, os métodos que serão apresentados (Tábua de Pitágoras, Algoritmos da Multiplicação e a Malha Quadriculada) são diferentes representações do conceito das Estruturas Multiplicativas, por exemplo.

a serem trabalhadas e que são essenciais para a conceitualização são as de resolução de problemas. Em sua concepção, a resolução de problemas consiste em propor ao sujeito situações de modo com que ele, ao não saber resolver, possa ampliar seus conhecimentos na busca de possíveis soluções, já que “é através de situações de resolução de problemas que os conceitos se desenvolvem” (Moreira, 2002, p.23).

Com base nisso, trabalhar os conceitos por meio da resolução de problemas elaborados a partir do viés da TCC se torna importante, uma vez que o discente consegue ampliar a sua bagagem cognitiva acerca de um determinado conceito, na medida em que consegue colocar em prática seus conhecimentos prévios diante de situações diversas, as quais irão requerer uma organização de pensamento em prol da formalização de possíveis estratégias de resolução (esquemas), envolvendo outros conhecimentos (invariantes operatórios), que serão identificados conforme o sujeito os representa simbolicamente⁴. Isso posto, o próximo tópico abordará, então, o Campo Multiplicativo (problemas matemáticos elaborados a partir das Estruturas Multiplicativas estudadas por Vergnaud em sua teoria).

3.1 CAMPO MULTIPLICATIVO

Embora a Teoria dos Campos Conceituais seja uma teoria geral e que pode ser aplicada em diversas áreas de conhecimento, Vergnaud (1996) focou seus estudos da teoria na área do raciocínio lógico e, em seguida, deu um enfoque maior na Matemática, destacando, assim, dois campos conceituais: o aditivo e o multiplicativo. O campo conceitual aditivo é definido por um conjunto de situações que exigem, para sua resolução, a aplicação de operações de adição, subtração ou uma combinação de ambas. Já o campo multiplicativo requer, para encontrar suas soluções, a aplicação da multiplicação, divisão ou de ambas. Em geral, segundo o autor, não se pode abordar, por exemplo, a adição separada da subtração nem a multiplicação isolada da divisão (são conceitos entrelaçados). O foco deste trabalho é acerca do campo multiplicativo.

Nesse campo específico, assim como em todo o campo conceitual, o sujeito não constrói um conceito em torno de um único tipo de problema, mas constrói um campo conceitual a partir de um vasto repertório de situações.

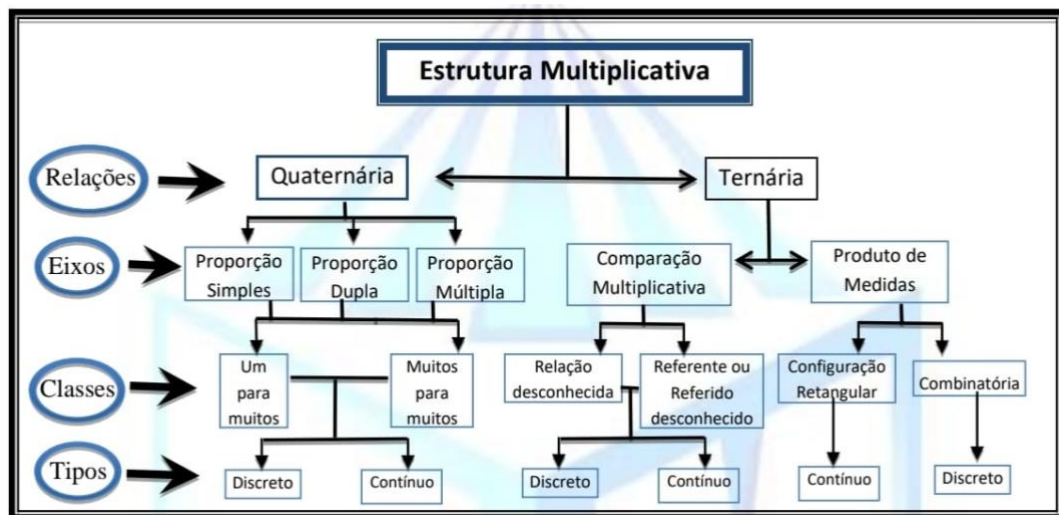
⁴ Nesse trabalho, o tripé de Vergnaud será abordado mediante as diversas situações-problema (S), que foram propostas nas atividades aplicadas com duas turmas do 7º ano, os invariantes operatórios (I), que são explicados pelas diferenças entre cada significados, e as representações (R); que serão exploradas pelas diferentes formas (métodos) de resolução dos problemas.

O campo conceitual multiplicativo consiste em todas aquelas situações que podem ser analisadas seja como situação-problema de proporção simples, dupla ou múltiplas, ou aqueles que envolvem comparações multiplicativas, ou, ainda, os que tratam de produto de medidas. Vários conceitos matemáticos estão vinculados às estruturas multiplicativas, tais como: função linear e n-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, combinação, o número racional, entre outros (Souza; Magina, 2017).

Observe que, segundo Souza e Magina (2017), com base nos estudos do campo multiplicativo, Vergnaud categoriza os tipos de situações que compõem esse campo conceitual como sendo: proporção, comparação multiplicativa e produto de medidas. Dentro de “produto de medidas”, serão encontrados os problemas do tipo “organização retangular” e “combinatória”. Perceba que são categorias que fundamentam exatamente as estruturas apresentadas pelos PCN em 1997. Portanto, todas as definições que tanto o Currículo de Pernambuco quanto os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam para o ensino da multiplicação são a partir da Teoria dos Campos Conceituais, especificamente do campo multiplicativo.

Para compreender essas Estruturas Multiplicativas, Magina, Merlini e Santos (2016) propuseram o seguinte esquema:

Figura 7 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016)

A Figura 7 apresenta um esquema relacionado às Estruturas Multiplicativas, dividindo-as em dois tipos de relações: quaternárias e ternárias. De acordo com Vergnaud (2009), as relações quaternárias são aquelas que envolvem quatro quantidades de duas grandezas diferentes, tomadas duas a duas, enquanto as ternárias são aquelas que envolvem três

quantidades, em que uma é o produto das outras duas ao mesmo tempo, que geralmente obedecem ao tipo de estrutura: $a \times b = c$.

As relações quaternárias são compostas por três eixos (que podem ser chamados de “categorias”), os quais são: proporção simples, dupla e múltipla. Cada uma dessas categorias possui classes do tipo: “um para muitos” ou “muitos para muitos”; de modo que cada uma dessas classes pode ser abordada a partir de dois tipos de quantidades: discreta e contínua.

As relações ternárias constituem-se por dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medida. Na primeira categoria, as situações podem ser classificadas em: “relação desconhecida” ou “referente ou referido desconhecido”. No segundo eixo, tem-se o produto de medidas, que é dividido em duas classes: “configuração retangular” e “combinatória”. Na classe da “configuração retangular”, têm-se problemas que abordam a quantidade contínua, enquanto, na classe da “combinatória”, os problemas envolvem o tipo de quantidade “discreta”.

Para compreender melhor cada uma dessas categorias e classificações que compõem as Estruturas Multiplicativas, seguem abaixo exemplos de possíveis situações contextualizadas (e possíveis variações dos enunciados, alterando a variável desconhecida dos problemas, a fim de trabalhar os significados da divisão: repartição e quotição) e elaboradas (de forma autoral) para serem abordadas, sobretudo, com estudantes do Ensino Fundamental – Anos Finais.

❖ Relações quaternárias:

Situação 1 (*proporção simples – classe um para muitos*): “Um doce de chocolate custa R\$2,00. Se Maurício comprou uma caixa que vem 20 doces e sabendo que cada doce mantém o seu preço, então quanto que Maurício pagou pelos chocolates?”

- *Variação 1.1*: “Maurício comprou uma caixa de doces de chocolates, pagando R\$40,00. Sabendo que, na caixa, vem 20 doces, então por quanto que saiu cada um?”
- *Variação 1.2*: “Maurício está interessado na compra de uma caixa de doces de chocolate, que custa R\$40,00. Sabe-se que cada doce dessa caixa tem um valor de R\$2,00. Quantos doces há na caixa?”

Situação 2 (*proporção simples – classe muitos para muitos*): “A mãe de Paulo comprou três maçãs – fruta rica em vitamina C – por R\$4,00. Como Paulo ama essa fruta, ele pediu para sua mãe comprar mais unidades. Se ela deseja comprar 18 maçãs, quanto que seria o valor da compra?”

- *Variação 2.1:* “A mãe de Paulo comprou 18 maçãs (fruta favorita de Paulo por ser rica em vitamina C) por R\$24,00. Quanto que ela pagaria se comprasse somente 3 maçãs?”
- *Variação 2.2:* “A mãe de Paulo comprou maçãs para o lanche do dia a dia, pagando um total de R\$24,00. Sabendo que 3 maçãs valem R\$4,00, então quantas maçãs foram compradas?”

Situação 3 (*proporção dupla – classe um para muitos*): “Em prol de arrecadar dinheiro para a compra de material escolar de uma aluna da turma afetada por grandes enchentes na época do inverno, ficou combinado que cada aluno iria contribuir com um valor de R\$5,00. Se, nessa turma, tirando a aluna em questão, há um total de 35 alunos, então qual foi o valor arrecado por todos?”

- *Variação 3.1:* “Uma aluna de uma escola pública foi afetada, junto a sua família, por grandes enchentes na época do inverno, chegando a perder todos os seus materiais da escola. Em prol de ajudar a colega, a sua turma arrecadou um total de R\$175,00. Sabendo que, na turma (sem contar a aluna em questão), há um total de 35 alunos e que cada um contribuiu com o mesmo valor, então qual o valor contribuído por cada aluno?”
- *Variação 3.2:* “A fim de ajudar uma colega afetada por grandes enchentes, os seus amigos de sala na escola decidem ajudar ela com arrecadação de dinheiro para a compra do material escolar perdido nas enchentes. Sabe-se que a turma arrecadou um total de R\$175,00 e que cada um de seus colegas contribuiu com um valor de R\$5,00. Quantos colegas essa aluna tem?”

Situação 4 (*proporção dupla – classe muitos para muitos*): “Numa festa de aniversário de 15 anos de duas irmãs gêmeas, à cada grupo de 8 convidados, as aniversariantes recebiam, em média, 16 presentes. Se, na festa, houve um total de 120 convidados, quantos presentes foram recebidos pelas jovens?”

- *Variação 4.1:* “Numa festa de aniversário de 15 anos de duas irmãs gêmeas, elas receberam 240 presentes. Sabendo que, à cada 8 convidados, as jovens recebiam, em média, 16 presentes, quantas pessoas foram convidadas para a festa?”
- *Variação 4.2:* “Oitenta convidados levaram 160 presentes para a festa de aniversário de duas irmãs gêmeas, comemorando a chegada aos 15 anos. Supondo que cada um dos convidados leva em média o mesmo total de presentes que os demais, quantos presentes as gêmeas receberiam se 120 pessoas comparecessem à festa?”

- *Varição 4.3:* “Se um total de 120 pessoas levam 240 presentes ao todo para uma festa de aniversário, então quantas pessoas são necessárias para um total de 16 presentes? Considere que todos levam, em média, a mesma quantidade de presentes individualmente.”

Situação 5 (*proporção múltipla – classe um para muitos*): “Um banho de ducha (com duração de 10 minutos) gasta, em média, 90 litros de água. Guilherme, um jovem que sempre gosta de manter a higiene pessoal, toma banho 3 vezes por dia. Em uma semana, quantos litros de água Guilherme gastará só com os seus banhos?”

- *Varição 5.1:* “Guilherme é um jovem que sempre gosta de manter a sua higiene pessoal e, por isso, capricha bem em seu banho. Sabe-se que ele toma banho três vezes ao dia. Se, em uma semana completa, ele gastou 1.890 litros de água e que ele passa, em cada banho, o mesmo total de tempo (10 minutos), então quantos litros ele gasta de água por cada banho?”
- *Varição 5.2:* “Em uma semana, Guilherme gastou um total de 1.890 litros de água pelos banhos tomados em geral. Sabendo que cada banho de Guilherme (que leva, em média, 10 minutos) tem um gasto de 90 litros, então quantos banhos ele toma por dia?”
- *Varição 5.3:* “Por cada banho tomado com duração de 10 minutos, Guilherme gasta, em média, 90 litros. Sabe-se que, para manter uma higiene pessoal adequada, Guilherme toma 3 banhos por dia. Quantos dias serão necessários para que o total de água gasta chegue aos 1.890 litros?”

Situação 6 (*proporção múltipla – classe muitos para muitos*): “As amigas Júlia e Esther decidem preparar bolos. Elas utilizam 6 xícaras de farinha de trigo à cada dois bolos, como também utilizam 2 xícaras de açúcar à cada 4 xícaras de farinha. Se a dupla cozinhar 6 bolos, quantas xícaras de açúcar as meninas vão precisar?”

- *Varição 6.1:* “Para fazer dois bolos, Esther e Júlia utilizam 6 xícaras de farinha. Sabe-se que, segundo a receita dos bolos, à cada 4 xícaras de farinha, são utilizadas 2 xícaras de açúcar. Se as meninas utilizaram 9 xícaras de açúcar, então quantos bolos foram feitos?”
- *Varição 6.2:* “São utilizadas 3 xícaras de açúcar para a produção de dois bolos. Sabe-se que, para 2 xícaras de açúcar, têm-se 4 xícaras de farinha de trigo. Se foram produzidos 6 bolos, então quantas xícaras de farinha foram utilizadas?”

❖ **Relações ternárias:**

Situação 7 (*comparação multiplicativa – classe relação desconhecida*): “Lara comprou um conjunto profissional de lápis de cor para suas artes na escola por R\$60,00. Ainda, ela comprou um kit de lápis grafite de escrever por R\$15,00. Quantas vezes o conjunto do lápis de cor foi mais caro que o kit do lápis grafite?”

- *Variação 7.1 (classe referido desconhecido)*: “Lara foi para uma loja de papelaria comprar seu material escolar. Dentre os materiais, ela comprou um conjunto profissional de lápis de cor e um kit de lápis grafite. O conjunto de lápis de cor custou R\$60,00. Sabendo que esse conjunto custou 4 vezes mais que o kit de lápis grafite, então quanto que Lara pagou por esse kit?”
- *Variação 7.2 (classe referente desconhecido)*: “Lara comprou um conjunto profissional de lápis de cor e um kit de lápis grafite numa loja de papelaria. O kit de lápis grafite custou R\$15,00. Sabe-se que o conjunto de lápis de cor custou 4 vezes mais que o kit. Logo, qual foi o valor desse conjunto profissional?”

Situação 8 (*produto de medidas – classe configuração retangular*): “Numa sala de aula comum de uma escola estadual, as carteiras são distribuídas nas salas da seguinte forma: 5 fileiras com 9 carteiras. Quantas carteiras há na sala?”

- *Variação 8.1*: “Uma sala de aula, de uma escola estadual, tem 45 carteiras organizadas em fileiras contendo 9 delas. Quantas fileiras são necessárias para a distribuição completa das carteiras na sala de aula?”
- *Variação 8.2*: “Uma sala de aula, de uma escola estadual, tem 45 carteiras organizadas em 5 fileiras. Para que sejam todas distribuídas igualmente, cada fileira terá que conter quantas carteiras?”

Situação 9 (*produto de medidas – classe combinatória*): “Ruan tem quatro calças jeans e 7 camisas com cores diversificadas. De quantas maneiras, Ruan pode combinar as calças e as camisas?”

- *Variação 9.1*: “Ruan foi convidado para sair com seus amigos. Sabe-se que há 24 looks possíveis a partir de combinações feitas entre suas calças jeans e suas camisas de cores diferentes. Se Ruan possui 4 calças jeans, então quantas camisas ele possui?”

- *Variação 9.2*: “Ruan pode combinar suas calças jeans com suas camisas de cores diferentes de 24 formas. Sabendo que ele tem 7 camisas, quantas calças jeans ele possui?”

Esses são alguns dos inúmeros problemas que podem ser elaborados a partir das Estruturas Multiplicativas de Vergnaud. Observe que, dadas 9 situações, cada uma possui alguns exemplos de variações, que levará o estudante a pensar em outras estratégias para se chegar à resposta (seja só com multiplicação, seja só com a divisão, seja com ambos). Na “situação 7”, veja que as variações destacadas são exatamente exemplos da classe “referente ou referido desconhecido”, pois se altera a variável do problema.

Com efeito, diante de um vasto repertório de situações, o estudante poderá interiorizar o conceito em questão, compreendendo até a relação entre a multiplicação e a divisão. É lógico que, para a resolução de cada um desses problemas, o sujeito irá escolher estratégias diversas para efetuar os cálculos e expressar o seu entendimento, montando seus esquemas para chegar ao resultado a partir de sua interpretação acerca da situação proposta. Também, torna-se importante pontuar que o desafio que o discente enfrentará em frente a esses e outros problemas contextualizados não é somente a interpretação, mas é também o fato de como a bagagem limitada de estratégias que ele carrega pode influenciar nos cálculos propriamente ditos, inclusive dificultando a resolução dos problemas.

Com base nisso, Vergnaud (2009) já abordava sobre a importância de ampliar as competências das crianças em relação ao “cálculo relacional” e ao “cálculo numérico”. O “cálculo relacional” envolve as operações de pensamento fundamentais para interpretar as relações envolvidas em uma determinada situação, como compreender a operação ideal para efetuar o cálculo numérico. O “cálculo numérico” é literalmente o cálculo propriamente dito, isto é, uma competência que se preocupa em identificar se o sujeito tem dificuldades em efetuar alguma operação ou cálculo. Sendo assim, não adianta ampliar o repertório de situações que contribuam para o estudante ter domínio das categorias e classificações das Estruturas Multiplicativas – aperfeiçoando a habilidade de interpretar –, se ele possui dificuldades no cálculo numérico. Dessa forma, Vergnaud ressalta que as duas competências são necessárias para a resolução de problemas.

Mediante isso, o próximo capítulo, então, irá abordar alguns recursos que possam auxiliar o estudante no momento em que for efetuar as operações da multiplicação e da divisão, a fim de que, neste trabalho, possa mostrar ao leitor a importância de se realizar uma parceria entre essas duas competências, ampliando, paralelamente, o repertório do estudante sobre os

diversos tipos de problemas que envolvem a multiplicação e a divisão e ainda a sua bagagem de estratégias para a efetuação dessas operações aritméticas.

4 EXPLORANDO RECURSOS DIDÁTICOS

Com base no capítulo anterior, ficou perceptível como é importante estabelecer essa parceria entre o cálculo relacional e o cálculo numérico. Também foi mostrado que a forma ideal de preparar o sujeito para conseguir interpretar os diversos problemas (isto é, entender o que a situação sugere e quais operações aplicar em prol do resultado) é a partir do contato dele com os diversos tipos de situações que envolvem aquele determinado conceito (no caso da multiplicação, seria a partir dos problemas das Estruturas Multiplicativas). O contato com um vasto número de problemas diversificados irá ampliar a bagagem cognitiva do estudante, o qual poderá compreender as relações entre os conceitos dentro de uma situação, embora em um processo lento, haja vista que o domínio de um campo conceitual pode durar anos, como já discutido.

“É importante ressaltar que as dificuldades que aparecem no domínio desses campos não podem ser simplesmente contornadas, ignoradas ou esquecidas, isso não garante a aprendizagem, elas devem ser encontradas e enfrentadas” (Barros; Boaventura, 2019). Desse modo, a partir do entendimento de que, se, para a resolução de problemas, dominar as competências do “cálculo relacional” e do “cálculo numérico” é importante, então as dificuldades que forem identificadas nos estudantes precisam ser minimizadas. Sendo assim, torna-se preciso explorar alguns recursos que possam auxiliar os estudantes no cálculo numérico (ou seja, no cálculo da multiplicação e da divisão).

Diante dessa necessidade, é que nesse capítulo serão abordados três recursos: a Tábua de Pitágoras, os Algoritmos da Multiplicação e a Malha Quadriculada. A exploração desses não será só com o viés de um simples recurso para “decoreba”, mas para auxiliar no entendimento dos conceitos propostos. Dessa maneira, cada um desses recursos será explorado a partir da Teoria dos Campos Conceituais (e do campo multiplicativo), isto é, analisar os recursos como possíveis campos que permitem a relação com outros conceitos da Matemática, com o intuito de ampliar o domínio cognitivo do estudante sobre o conceito em questão.

4.1 TÁBUA DE PITÁGORAS

Ao pensar no ensino da multiplicação na disciplina de Matemática no ensino fundamental, o primeiro recurso didático que vem à mente do professor é a tabuada tradicional de multiplicação. Uma tabuada de multiplicação é uma tabela que lista as multiplicações de um número específico por outros de 1 a 10, como é o caso da tabela tradicional. Por vezes, torna-se frequente ver a nomenclatura da tabuada associada a um número base, uma vez que a operação ocorre a partir de um número “fixado” que será utilizado em todas as operações; por exemplo, “tabuada do três” é a tabela que lista todos os números resultados da multiplicação do três por fatores do 1 ao 10.

A depender da tabela, tem-se uma multiplicação entre fatores de 0 a 10, trabalhando com o conjunto dos números naturais incluindo o 0 (zero), isto é, $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, podendo expandir o conjunto para os números inteiros, mantendo a atenção nas regras dos sinais (ponto este que não será discutido nesse trabalho, pois não faz parte do foco principal deste). Segue uma ilustração do recurso tradicional abaixo.

Figura 8 - Tabuada Tradicional de Multiplicação

Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5
1 x 0 = 0	2 x 0 = 0	3 x 0 = 0	4 x 0 = 0	5 x 0 = 0
1 x 1 = 1	2 x 1 = 2	3 x 1 = 3	4 x 1 = 4	5 x 1 = 5
1 x 2 = 2	2 x 2 = 4	3 x 2 = 6	4 x 2 = 8	5 x 2 = 10
1 x 3 = 3	2 x 3 = 6	3 x 3 = 9	4 x 3 = 12	5 x 3 = 15
1 x 4 = 4	2 x 4 = 8	3 x 4 = 12	4 x 4 = 16	5 x 4 = 20
1 x 5 = 5	2 x 5 = 10	3 x 5 = 15	4 x 5 = 20	5 x 5 = 25
1 x 6 = 6	2 x 6 = 12	3 x 6 = 18	4 x 6 = 24	5 x 6 = 30
1 x 7 = 7	2 x 7 = 14	3 x 7 = 21	4 x 7 = 28	5 x 7 = 35
1 x 8 = 8	2 x 8 = 16	3 x 8 = 24	4 x 8 = 32	5 x 8 = 40
1 x 9 = 9	2 x 9 = 18	3 x 9 = 27	4 x 9 = 36	5 x 9 = 45
1 x 10 = 10	2 x 10 = 20	3 x 10 = 30	4 x 10 = 40	5 x 10 = 50

Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
6 x 0 = 0	7 x 0 = 0	8 x 0 = 0	9 x 0 = 0	10 x 0 = 0
6 x 1 = 6	7 x 1 = 7	8 x 1 = 8	9 x 1 = 9	10 x 1 = 10
6 x 2 = 12	7 x 2 = 14	8 x 2 = 16	9 x 2 = 18	10 x 2 = 20
6 x 3 = 18	7 x 3 = 21	8 x 3 = 24	9 x 3 = 27	10 x 3 = 30
6 x 4 = 24	7 x 4 = 28	8 x 4 = 32	9 x 4 = 36	10 x 4 = 40
6 x 5 = 30	7 x 5 = 35	8 x 5 = 40	9 x 5 = 45	10 x 5 = 50
6 x 6 = 36	7 x 6 = 42	8 x 6 = 48	9 x 6 = 54	10 x 6 = 60
6 x 7 = 42	7 x 7 = 49	8 x 7 = 56	9 x 7 = 63	10 x 7 = 70
6 x 8 = 48	7 x 8 = 56	8 x 8 = 64	9 x 8 = 72	10 x 8 = 80
6 x 9 = 54	7 x 9 = 63	8 x 9 = 72	9 x 9 = 81	10 x 9 = 90
6 x 10 = 60	7 x 10 = 70	8 x 10 = 80	9 x 10 = 90	10 x 10 = 100

Fonte: Mota (2019).

Em geral, esse recurso é importante, pois explora de forma sistemática a operação aritmética em questão, facilitando, sobretudo, o entendimento e o cálculo. Ao estudar a tabuada, o estudante consegue perceber uma lógica de ligações entre os fatores que estão sendo multiplicados, e essa ligação permite identificar relações e padrões. Por exemplo, quando se multiplica um número par ou um número ímpar por 5, tem-se, respectivamente, um produto com o algarismo das unidades sendo 0 ou 5; ou quando se multiplica um número por 2, tem-se

um produto sempre par, ou seja, com o algarismo das unidades pertencendo ao seguinte conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Assim, esses padrões facilitam a memorização da tabuada e ajudam no progresso do cálculo mental, porém sem garantir, em sua totalidade, a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nessa operação.

A partir disso, é aqui em que se encontra uma das “rupturas” que abrem portas para que esse recurso seja uma barreira no desenvolvimento cognitivo do discente acerca da multiplicação, que é: limitar o estudante à memorização (o famoso “decoreba”) de padrões sem interiorizar os conceitos e as relações presentes dentro da tabuada ou da tabela de multiplicação; característica marcante de um sistema de educação tradicional. Veja que essa denúncia já era feita por Freire (2002, p.10), “em lugar de ser o texto e sua compreensão, o desafio passa a ser a memorização do mesmo”. Isso posto, este quadro pode trazer aos estudantes dificuldades em cálculos mais complexos – ao passo que só conseguem decorar a multiplicação entre números pequenos – e limitações em habilidades de resolução de problemas, principalmente de situações reais do cotidiano do ser humano.

Com efeito, evidencia-se a importância de equilibrar a prática da tabuada com atividades que promovam essa compreensão de forma mais lúdica e visual. Por isso, o recurso didático de foco é a Tábua de Pitágoras, um instrumento mais dinâmico em relação à tabela tradicional, que permite, por sua vez, com maior aplicação, a interiorização do conceito da multiplicação, favorecendo a memorização de características básicas dessa operação aritmética e o desenvolvimento do cálculo mental e proporcionando ao estudante a oportunidade de explorar regularidades nas multiplicações e de utilizar estratégias pessoais e técnicas convencionais para resolver problemas envolvendo a multiplicação.

4.1.1 Regularidades e potencialidades da Tábua de Pitágoras

Antes de apresentar, de fato, a Tábua de Pitágoras, é importante rememorar a origem da palavra “Tabuada” e as contribuições de Pitágoras para a Matemática. O termo “tabuada” teve origem a partir das tábuas de argila que eram utilizadas na Grécia Antiga para realizar e confirmar resultados de contas matemáticas longas, agilizando no processo da contagem, a fim de suavizar o trabalho de quem dependia dessa operação no seu dia a dia, a saber, os comerciantes (Editora Conceitos, 2017; Cassiano et al, 2017). O termo que hoje todos conhecem foi conceituado por Pitágoras, matemático e filósofo grego do século VI a.C., o qual, segundo a história, criou uma tabela que permitia a efetuação da operação de multiplicação de forma simplificada, e, assim, surgiram os primeiros relatos da criação da tabuada de

multiplicação que, por ser desenvolvida por ele na antiguidade, recebeu o nome de Tabela de Pitágoras, que pode ser chamada de Tabela Pitagórica ou Tábua de Pitágoras.

A Tábua de Pitágoras é uma tabela de multiplicação que é composta por uma dupla entrada, que são os dois eixos: vertical e horizontal (coluna e linha, respectivamente). Em cada um desses eixos, números de 1 a 10 são distribuídos, e, assim, forma-se uma grade de números, em que cada quadrado simboliza uma célula, a qual, por sua vez, representa o produto da multiplicação de dois números que rotulam a coluna e a linha correspondentes à célula fixada. Segue uma ilustração dessa tabela com os eixos destacados na cor azul abaixo.

Figura 9 - Tábua de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Fixando um determinado quadrado (ou célula), pode-se encontrar os fatores multiplicados olhando para a interseção das colunas e linhas condizentes. Segue abaixo uma ilustração da célula que possui como valor o número 35.

Figura 10 - Localização do produto 35 na Tábua

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Assim, encontra-se a seguinte multiplicação para a célula fixada: $5 \times 7 = 35$, isto é, o 35 está localizado na interseção da coluna 5 com a linha 7. Ainda, é importante frisar que, por ser uma tabela de multiplicação que vai de um vezes um até 10x10, existem na parte interna da tabela 100 produtos. Ainda, a partir da Figura 9, pode-se identificar padrões que também são visíveis na tabuada tradicional de multiplicação, tais como:

- (I) Todo número multiplicado por 1 resulta nele mesmo. *Ex.*: $1 \times 2 = 2$.
- (II) Todo número multiplicado por 2 (ou seu múltiplo, como 4, 6 e 8) resulta em um produto par, isto é, um valor cujo algarismo das unidades pertence ao conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. *Ex.*: $2 \times 7 = 14$ e $4 \times 7 = 28$.
- (III) Todo número multiplicado por 5 resulta em um produto cujo algarismo das unidades será 5 (se o multiplicador for ímpar) ou 0 (se o multiplicador for par). *Ex.*: $5 \times 3 = 15$ e $5 \times 4 = 20$.
- (IV) Números multiplicados por 3, 7 e 9 possuem o algarismo da unidade alternando entre par e ímpar, o que depende do multiplicador, se este for par ou ímpar (Obs.: lembre-se que, se um número for par, segue que todo número multiplicado por ele resulta em par. Caso ambos sejam ímpares, o produto será ímpar).
- (V) Todo número multiplicado por 10 resulta nele como algarismo da dezena e o 0 (zero) como algarismo da unidade. *Ex.*: $10 \times 5 = 50$.

Uma curiosidade sobre o padrão (III), é que se vê a possibilidade de construir uma sequência de números, em que se sabe sempre o algarismo das unidades. Exemplos:

- i. $S_3 = \{3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, \dots\}$
- ii. $S_9 = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, \dots\}$
- iii. $S_7 = \{7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, \dots\}$

O primeiro elemento do conjunto S_3 corresponde ao algarismo da unidade condizente à multiplicação do 3 por 1. O segundo elemento corresponde ao algarismo da unidade do produto de 3 por 2, e, assim, segue os demais. Logo, se quisesse encontrar o algarismo da unidade correspondente à multiplicação do 3 por 14, por exemplo, poderia seguir a sequência S_3 . Como há 10 elementos na sequência, e, após o 0 (zero), a sequência começa a se repetir, entende-se que a multiplicação por 14 resultará exatamente em uma “volta” completa, parando no 4º elemento desse conjunto na segunda volta, que é o 2, o que é certo, já que $3 \times 14 = 42$. Tal possibilidade não se restringe somente aos números 3, 6 e 9, mas que pode trabalhar essa ideia de sequência e padrões com os números da tabuada, potencializando o recurso em questão e envolvendo a ideia de relações lógico matemáticas (sequenciação).

Outra regularidade visível na Tabela Pitagórica é que o estudante pode conseguir associar a tabuada de um determinado número à de outros números anteriores. Veja o exemplo da Figura 11 abaixo.

Figura 11 - Tabuada do 2 associada à do 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Veja que a coluna 2, que representa a tabuada do 2 (destacada na cor verde), é o dobro dos valores da coluna 1, em que se encontra a tabuada do 1 (destacada na cor amarela). Isso ocorre, pois $2 = 1 + 1 = 2 \times 1$ (*o dobro de um*). Seja outro exemplo com base na ilustração abaixo:

Figura 12 - Tabuada do 3 associada às anteriores

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

A coluna 3 (destacada na cor verde) pode ser obtida somando os valores das colunas 1 e 2 (destacadas na cor amarela) nas respectivas linhas ou pegando o triplo dos valores da primeira coluna, já que se sabe:

$$3 = 2 + 1 = 3 \times 1 \text{ (o triplo de um).}$$

Assim, ao multiplicar, por exemplo, 3 por 7, tem-se:

$$3 \times 7 = (1 + 2) \times 7 = 1 \times 7 + 2 \times 7.$$

A expressão numérica acima explicita o seguinte: o produto em que se encontra na interseção da coluna 3 com a linha 7 é o mesmo que somar o produto da coluna 1 e linha 7 com

o produto da coluna 2 e linha 7 (a linha 7 é o fator em evidência). Em outros termos, o que ocorre é a decomposição aditiva de um número em outros menores e a aplicação da propriedade distributiva, o que pode ajudar o estudante a preencher toda essa tabela a partir das primeiras colunas, uma vez que qualquer número, em exceção do 1, na tabela, pode ser decomposto em outros menores. Outro exemplo pode ser a coluna 4, como ilustra a Figura 13 a seguir.

Figura 13 - Tabuada do 4 associada às anteriores

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Veja que a coluna 4 (destacada na cor verde) pode ser obtida somando os valores na linha respectiva da coluna 1 com a coluna 3 (destacadas na cor amarela) ou pegando o dobro da coluna 2 (destacada na cor cinza). Isso pode ser explicado pelo seguinte:

$$4 = 4 \times 1 \text{ (o quádruplo de um)} = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 \times 2 \text{ (o dobro de dois)}$$

A partir disso, a Figura 14 mostra as decomposições aditivas e multiplicativas em até duas parcelas ou dois fatores que podem ser trabalhadas dentro da Tábua de Pitágoras.

Figura 14 - Decomposições aditivas e multiplicativas do 1 até 10

$1 = 1 \times 1$
$2 = 1 + 1 = 2 \times 1$
$3 = 1 + 2 = 3 \times 1$
$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 \times 2 = 4 \times 1$
$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5 \times 1$
$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1$
$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7 \times 1$
$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$
$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 3 \times 3 = 9 \times 1$
$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 5 \times 2 = 10 \times 1$

Fonte: Autoria própria.

Observe que, se considerar outras possibilidades, pode-se, por exemplo, para conseguir responder a tabuada do 7, somar os valores das colunas 1, 2 e 4 de uma mesma linha, dado que $7 = 1 + 2 + 4$. Contudo, veja que as possibilidades aumentam, e, por isso, neste trabalho, o foco será mantido no que foi mostrado pela Figura 14. Isso não implica que não possa ser trabalhado pelo docente ou, até mesmo, de ser utilizado como procedimento de cálculo para preenchimento da tabela pelo estudante.

Além disso, perceba que a Figura 14 considera a comutatividade no que tange à adição “ $2 + 4$ ” e à multiplicação “ 3×2 ”, por exemplo, já que, pela propriedade comutativa, segue que: “ $2 + 4 = 4 + 2$ ” e “ $3 \times 2 = 2 \times 3$ ”. Como já abordado neste trabalho no capítulo 1, na multiplicação, nem sempre 3×2 é o mesmo que 2×3 , embora o produto final seja o mesmo valor. Um exemplo para relembrar esse ponto é: “Paula tem três bolsas com quatro maçãs em cada ou quatro bolsas com três maçãs em cada”. A forma como que são distribuídas as maçãs para um total de bolsas é diferente, sabendo que, no total, sempre vai ter 12 maçãs.

A Tábua de Pitágoras auxilia na visualização dessa propriedade de forma mais lúdica, na medida em que o estudante consegue perceber que um determinado valor pode ser encontrado em células (quadrados) diferentes dentro da tabela. Veja a Figura 15.

Figura 15 - Localização do produto 28

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

A ilustração acima mostra claramente que 7×4 difere de 4×7 , embora seja o mesmo valor nos quadrados condizentes, no caso 28. Pode-se pensar nessas multiplicações sob o viés do Plano Cartesiano, que, por curiosidade, a Tábua de Pitágoras também é conhecida como Tabela Cartesiana, uma vez que, como já foi apresentado, a tabela em questão possui dupla entrada (coluna e linha) e que pode ser representada como um par ordenado do tipo:

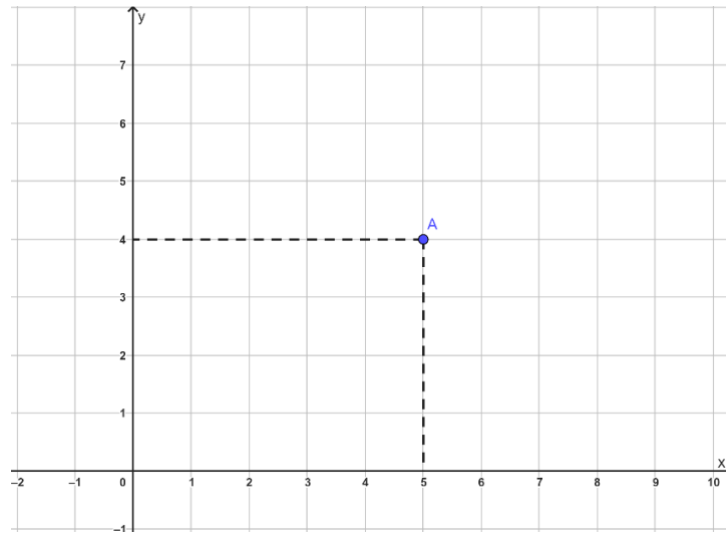
$$(a, b) = a \times b$$

O par acima corresponde ao encontro da coluna “a” com a linha “b”, o que resulta na célula cujo valor é o produto “a x b”. Assim, pode-se representar agora as multiplicações utilizando a ideia de pares ordenados do Plano Cartesiano, em que 7×4 seria o par (7, 4), e 4×7 seria o par (4, 7). Estes são dois pares cujas localizações no plano são diferentes. Logo, o estudante, a partir dessa relação, pode interiorizar melhor o conceito da multiplicação no que concerne à propriedade comutativa, sabendo que a troca da ordem dos fatores não altera o resultado, mas sim o significado.

Observe que esses pares trabalham a ideia tradicional do Plano Cartesiano, em que o primeiro termo indica a localização do ponto no eixo X (que seria a representação das colunas), e o segundo termo indica a localização do ponto no eixo Y (que seria a representação das linhas). Aqui, pode haver uma pequena confusão de conceitos, pois, quando se pensa no Plano

Cartesiano, o eixo X seria na horizontal, e o eixo Y seria na vertical. Para visualizar esse pequeno detalhe, segue a Figura 16.

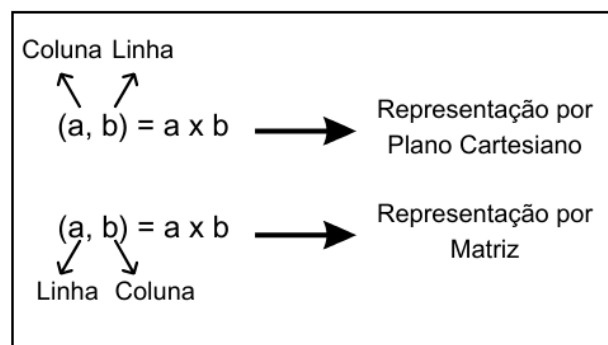
Figura 16 - Representação de um par ordenado no Plano Cartesiano



Fonte: Autoria própria.

Observe que, mesmo o eixo X sendo a horizontal, quando se olha para o ponto A, que corresponde ao par ordenado (5, 4), percebe-se que o valor 5 condiz com sua posição na vertical (coluna), e quando olha para o eixo Y, o valor 4 condiz com sua posição na horizontal (linha). Dessa maneira, o par (a, b) que representa a multiplicação $a \times b$, em que “a” é a ordem da coluna, e “b” é a ordem da linha, é uma representação seguindo características de um par ordenado do Plano Cartesiano. Porém, outra possibilidade seria definir o par ordenado (a, b) como sendo o primeiro termo a ordem da linha, e o segundo, a ordem da coluna, trabalhando, dessa maneira, com o conceito de Matrizes. A Figura 17 ilustra os dois tipos de representações explicados acima.

Figura 17 - Representações por pares ordenados



Fonte: Autoria própria.

É essencial deixar claro para o estudante a diferença entre essas duas formas de representações. Ao trabalhar com a representação por Matriz, é importante pontuar que o par ordenado (a, b) corresponde exatamente à posição de um elemento dentro de uma matriz, ou seja, dada uma matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$, em que n não necessariamente diferente de p , o componente a_{np} indicaria o produto $n \times p$ e poderia ser representado pelo par ordenado (n, p).

Ainda, o produto $n \times p$ indica, na Tábua de Pitágoras, o número de quadrados (ou células) destacados até o quadrado condizente ao encontro da linha n com a coluna p , enquanto, na Matriz, indica o total de componentes dela. Segue a Figura 18.

Figura 18 - Representação do produto pelo número de quadrados

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Observe que a parte destacada na cor verde contém exatamente 18 quadrados, o que representa a multiplicação do 3 pelo 6 (linha 3, coluna 6). Para construir a Matriz, cada um desses quadrados simboliza exatamente um componente da Matriz, em que se sabe que o último elemento será representado por a_{36} , cujo valor é 18. Veja a matriz E exemplar a seguir.

$$E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Todos os elementos correspondem à multiplicação dos algarismos de seus índices. Por exemplo, o componente a_{24} condiz à multiplicação de 2 por 4, que é o elemento 8, como mostra acima. É uma forma diferente e que potencializa o uso desse recurso didático ao se ensinar multiplicação e relacionar com o conceito de matrizes.

Quando $n = p$, M seria uma matriz quadrada, e isso pode ser visível na Tabela Pitagórica a partir dos números quadrados perfeitos, isto é, $n \times p = n^2$ ou p^2 , o que implica que $n = p$, sabendo que $n, p \in \mathbb{N}$. Pode-se explicar tais detalhes a partir da Figura 19 abaixo.

Figura 19 - Representação dos números quadrados perfeitos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

A Figura 19 ilustra, de forma bem visual, a ideia por trás da definição de números quadrados perfeitos, isto é, um dado número inteiro que pode ser escrito como o quadrado de outro menor ou que, ao extrair a sua raiz quadrada, resulta em outro número inteiro. *Ex.*: $9 = 3^2 = 3 \times 3$ e $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$. Lembre-se que 3×3 é a representação multiplicativa do par ordenado $(3, 3)$, que também simboliza uma matriz quadrada 3×3 , cujos componentes correspondem aos quadrados coloridos na Figura 19, no caso, os que estão na região superior do encontro da linha 3 com a coluna 3, que são eles: $\{1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 6, 9\}$. Veja a Figura 20 abaixo, ilustrando melhor a visualização do quadrado perfeito 9 que se esconde por trás dos números quadrados anteriores 1 e 4.

Figura 20 - Visualização do número quadrado perfeito 9

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Com base nisso, pode-se definir o conjunto P dos números quadrados perfeitos de 1 até o 100: $P = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$. Uma curiosidade sobre esses números são as suas localizações. Veja a ilustração feita pela Figura 21.

Figura 21 - Localização dos números quadrados perfeitos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Pela ilustração acima, perceba que os números quadrados perfeitos, gerados pela multiplicação de dois fatores iguais, localizam-se na diagonal principal da Tabela de Pitágoras, os quais estão sendo indicados pela cor verde. Ainda, é preciso se atentar que alguns desses números aparecem mais de uma vez, como o produto 16 que também é condizente ao par ordenado (2, 8) ou (8, 2). Para explicar melhor esse detalhe, atente-se ao fato de que o número 16 possui os seguintes divisores: $D(16) = 1, 2, 4, 8, 16$. Na Tabela Pitagórica, por ser até o produto 10 por 10, têm-se as seguintes multiplicações presentes: 2×8 ; 8×2 e 4×4 ; aparecendo três vezes. Diferente do 25, que possui como divisores: $D(25) = 1, 5, 25$; e, na tabela, somente o cinco vezes cinco se faz presente, logo, é um produto que só aparece uma única vez.

Outra curiosidade a partir dessa diagonal principal é que ela é um eixo de simetria, em que divide a tabela em duas partes, cujos elementos são espelhados. Veja a Figura 22.

Figura 22 - Diagonal principal como eixo de simetria

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Esse espelhamento se dá exatamente pela propriedade comutativa da multiplicação, em que $a \times b = c = b \times a$.

Outra possibilidade de ideia para esse recurso é trabalhar com a ocorrência de eventos, por meio de possíveis perguntas, tais como: “Que números aparecem menos e mais vezes? Por quê?”, “Quantos números pares e ímpares aparecem?”, “Quais números aparecem apenas uma vez? Por quê?”, “O que você percebe sobre os números cujos fatores multiplicados são iguais?”.

Veja que, na primeira pergunta, o estudante pode responder olhando para os números que aparecem uma vez ou os que aparecem duas vezes, como o número 3. Sobre os que aparecem uma vez, tem-se alguns números quadrados perfeitos, como o 25 (já destacada e explicado anteriormente) e também os números 1 e 100, que só aparecem na primeira e na última célula, respectivamente, da tabela. Essa pergunta difere da penúltima, por ela ser mais específica voltada para só esses casos de quando aparece uma única vez. Nesses que aparecem duas vezes, os fatores são iguais, mas com a ordem trocada, como 3×1 e 1×3 . Já os que aparecem mais vezes, tem-se os números cujas possibilidades de decomposição são mais amplas, como o 8, que se tem: 1×8 , 8×1 , 2×4 e 4×2 (quatro vezes), considerando a comutatividade. Também, tem-se alguns números quadrados perfeitos que aparecem mais de uma vez, diferente do 25, como o 16 (também já apresentado antes), por ter: 4×4 , 2×8 e 8×2 . Essa pergunta também se difere da última, pois esta está preocupada com a percepção dos alunos sobre os números quadrados perfeitos, percebendo que eles se encontram na diagonal principal e que nem todos aparecem uma única vez.

Estes são apenas alguns exemplos, mas que dão oportunidades para que o docente pense em trabalhar esse recurso voltado para o ensino de Probabilidade também. Para mostrar tal possibilidade, veja o seguinte problema: “Com base nos dois eixos da Tabela de Pitágoras, qual a probabilidade de sortear um número de 1 a 10 para cada eixo de modo que o produto desses dois valores seja maior que 20?”. A partir desse viés, vê-se que outros problemas podem ser elaborados e que potencializam esse recurso para ser explorado até com alunos do ensino médio, ao estudar Probabilidade. Segue mais algumas ideias de perguntas voltadas para essa área: “Qual a probabilidade de o produto ser par? E de ser ímpar?”, “Qual a probabilidade de o produto ser maior que 50? E menor?”, “Qual a probabilidade de o produto ser um número quadrado perfeito cujos fatores são iguais?” e “Qual a probabilidade de o produto ser resultado da multiplicação de dois números primos?”.

Por fim, ao falar de multiplicação, não se pode deixar de fora a divisão, operação esta que pode ser trabalhada também a partir da tábua. Veja a expressão abaixo:

$$(_, 6) = 18$$

A ausência de um dos termos no par ordenado remete à ideia de se pensar na divisão do produto pelo fator conhecido, no caso, realizando a divisão de 18 por 6, encontrando 3. O estudante pode pensar também: “qual o número que multiplicado por 6 resulta em 18”, que é outra forma de entender a divisão. Ainda, pode-se utilizar a ideia de localização de par

ordenado, seja por uma representação de Plano Cartesiano, seja por uma de Matrizes, em que olhe fixamente para o fator conhecido em um dos seus eixos para encontrar a célula cujo valor é o produto dado na expressão, como o 18. Após localizado, o estudante pode olhar para o outro eixo, que será exatamente o valor que corresponde à divisão dos dois números apresentados inicialmente no problema.

Com base em todas essas regularidades e potencialidades apresentadas, é importante que faça parte do processo de ensino-aprendizagem o preenchimento da tábua por parte do estudante a partir de uma tabela vazia ou de uma tabela preenchida parcialmente⁵, para que ele consiga perceber, por conta própria ou por mediação do docente, essas relações e padrões presentes na Tábua de Pitágoras. A princípio, a maioria dos discentes pode tentar preencher com base na tabuada tradicional, cabendo, pois, ao professor saber instigar eles para sair do padrão e descobrir as riquezas por trás do conceito da multiplicação e a presença de outros conceitos matemáticos, como os que foram abordados nessa seção.

4.2 ALGORITMOS DA MULTIPLICAÇÃO

Após explorar o recurso da Tábua de Pitágoras, ficou claro quanto potencial ele possui para auxiliar na aprendizagem dos conceitos por trás da tabuada tradicional, além de facilitar no cálculo de pequenas multiplicações, isto é, entre números menores, como unidade por unidade. No entanto, ao se trabalhar a multiplicação entre números maiores – por exemplo, 341×58 –, o estudante pode ainda utilizar a sua bagagem de conhecimento adquirido a partir da aprendizagem da tabuada para realizar cálculos maiores. Sendo assim, o procedimento passa agora a depender de um tipo de algoritmo, ou seja, um tipo de passo a passo (procedimentos) para encontrar o produto correspondente à multiplicação em questão.

Essa necessidade de um algoritmo se dá exatamente pela limitação que a ideia primária de multiplicação (adição sucessiva de parcelas iguais) traz para os discentes. Ou seja, imagina encontrar o produto de 341 por 58 a partir de adições sucessivas? Isso iria requerer um grande tempo para uma única multiplicação. Dessa forma, tem-se o algoritmo tradicional da multiplicação que é ensinado e passado aos estudantes em seus primeiros contatos com a disciplina da Matemática. Veja a aplicação desse algoritmo na multiplicação de 341 por 58.

⁵ A ideia de trazer uma tabela preenchida parcialmente facilita ao estudante a compreensão da tabela sem, necessariamente, a mediação do docente.

Figura 23 - Algoritmo tradicional aplicado à multiplicação 341 x 58

1º passo	2º passo	3º passo	4º passo	5º passo	6º passo	7º passo	8º passo
C D U	C D U	C D U	C D U	C D U	C D U	C D U	C D U
3 4 1	3 4 1	3 ³ 4 1	² 3 ³ 4 1	3 4 1	3 ² 4 1	¹ 3 ² 4 1	3 4 1
x 5 8	x 5 8	x 5 8	x 5 8	x 5 8	x 5 8	x 5 8	x 5 8
	8	2 8	2 7 2 8	2 7 2 8	2 7 2 8	2 7 2 8	2 7 2 8
				5	0 5	1 7 0 5	1 7 0 5 +
							1 9 7 7 8
							DM UM C D U

Fonte: Autoria própria.

A Figura 23 acima ilustra o passo a passo que os discentes realizam a partir do método tradicional de multiplicação. Embora seja um método tranquilo e que a maior parte dos estudantes e professores estão mais habituados a ele, torna-se essencial criticar como a apresentação desse algoritmo nos primeiros anos do Ensino Fundamental no Brasil, muitas vezes, coloca-o como ideal e único. Isso é explicado por (Silva, 2003 apud Santos; Baier, 2018), quando eles afirmam que muitos docentes não conhecem as variedades dos algoritmos em relação às principais operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), os quais já foram desenvolvidos desde a história das civilizações antigas até os dias atuais, e esse cenário limita a prática do ensino destas operações aos discentes, sobretudo quando estes apresentam dificuldades com o método tradicional. Com efeito, o currículo que acaba representando o Brasil é um que trabalha, por vezes, um só tipo de processo para se realizar as quatro operações básicas principais.

Sendo assim, em um quadro em que os estudantes apresentem dificuldades com a multiplicação, principalmente, de números maiores, cabe ao docente encontrar caminhos para auxiliar os menores ao efetuarem essa operação de destaque neste trabalho. É nesse viés que os Algoritmos da Multiplicação entram como um possível caminho para ajudar os discentes na resolução de problemas (sobretudo os das Estruturas Multiplicativas de Vergnaud).

É importante frisar que não há como falar sobre os algoritmos, sem fazer ligações com a História da Matemática, dado que os próprios algoritmos são registros de toda uma evolução histórica das concepções que as antigas civilizações possuíam em relação ao conceito de número e às operações aritméticas. Resgatar esses conhecimentos e levá-los para a sala de aula como estratégia de ampliar o repertório cognitivo do estudante sobre os diversos métodos de efetuar a multiplicação e, até mesmo, a divisão é uma estratégia didática. Os PCNs já trazem um olhar para a importância de o docente recorrer à História da Matemática, sugerindo

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (Brasil, 1997, p.42).

Ainda, o mesmo documento garante que a História da Matemática é um recurso didático para o processo de ensino-aprendizagem, contanto que o docente saiba o utilizar adequadamente na sala de aula.

[...] essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-las a fatos, datas e nomes a serem memorizados (Brasil, 1997, p.43).

A partir dessa visão, pode-se afirmar que os Algoritmos da Multiplicação são, sem dúvidas, também recursos didáticos que o professor pode utilizar na sala de aula, apresentando sempre um pouco da história e ampliando as possibilidades de procedimentos utilizados pelos estudantes na resolução de problemas envolvendo a multiplicação.

Diante disso, nesta parte do trabalho, serão discutidos três métodos multiplicativos: o método da decomposição, o método chinês e o método da gelosia. Em conjunto, será apresentado, brevemente, um pouco da história por trás de cada algoritmo. Ainda, antes de abordá-los, será realizada uma breve revisão do Sistema de Numeração Decimal e sua história, haja vista que os três métodos aqui listados são efetuados a partir desse sistema, como o próprio algoritmo usual brasileiro.

4.2.1 Sistema de Numeração Decimal

Os números que, na atualidade, todos possuem conhecimento fazem parte de toda uma formação cultural que proporcionou a integração de elementos em um sistema numérico que, após passar por uma longa evolução, ficou conhecido por: Sistema de Numeração Indo-arábico. Esta é uma outra forma de se chamar o famoso Sistema de Numeração Decimal (SND), nome este que é comumente apresentado aos estudantes no Ensino Fundamental.

O termo “Indo-arábico” representa as raízes da evolução desse sistema desde as antigas civilizações, sobretudo dos povos hindus e árabes. A origem dele passou por diversas construções acerca do conceito de número, entre elas: distinção entre um e muitos, correspondência um a um, ideias primárias sobre contagem, correspondência com as diversas

partes do corpo e os variados sistemas numéricos precedentes. Embora essa origem esteja ligada diretamente aos povos hindus, a sua propagação se deu pelo povo árabe no território da Europa (em regiões, como norte da África e parte da Espanha), de modo que a união dos saberes e das contribuições desses povos para a formalização do conceito de número e dos seus símbolos tornou o sistema conhecido como é atualmente (Ifrah, 2005).

No SND, são usados dez símbolos, denominados algarismos, que, por meio deles, qualquer número pode ser escrito. São estes os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Uma curiosidade é que houve também toda uma trajetória histórica para que estes símbolos fossem representados como são hoje em dia, e isso se deve à cada contribuição e influência exercidas pelas diversas culturas, as quais tiveram contato com as representações dos algarismos a partir do povo hindu. A Figura 24 ilustra essa evolução dos símbolos.

Figura 24 - Evolução dos algarismos do SND

HINDU 300 a.C.	—	=	≡	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
HINDU 500 d.C.	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯	୦	୧	୨
ÁRABE 900 d.C.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ÁRABE (ESPANHOLA) 1000 d.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ITALIANO 1400 d.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ATUAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fonte: Borges; Bonfim (2012).

Veja que foi um longo período até que os algarismos se tornassem os símbolos que, na atualidade, todos conhecem e estudam. Isso posto, é profícuo ainda destacar as principais características desse sistema:

- São realizados agrupamentos de 10 em 10 algarismos, por isso, é conhecido como sistema de base dez. Ex.: agrupando 10 unidades, obtém-se 1 dezena; agrupando 10 dezenas, obtém-se 1 centena; e, assim, em diante.
- É posicional, dado que um mesmo símbolo pode representar valores diferentes a depender de sua posição na composição do número. Ex.: 12 é diferente de 21, pois, no primeiro número, o 2 representa a ordem da unidade, enquanto, no segundo, a ordem da dezena.

- O sistema é aditivo, pois se obtém o valor do número a partir da adição dos valores posicionais de cada algarismo. Ex.: $34 = 30 + 4$.
- É multiplicativo também, outra vez que o valor do algarismo é multiplicado pelo valor da posição ocupada de acordo com a classe pertencida. Ex.: $34 = 3 \times 10 + 4 \times 1$.
- Há um símbolo para representar o zero: 0; o qual tem a função de guardar posição vazia em um número.

No Sistema de Numeração Indo-arábico, os algarismos são separados por classes: classe das unidades simples, classe dos milhares, classe dos milhões, classe dos bilhões e, assim, por diante. Estas classes são grupos de três ordens, em que cada uma dessas ordens corresponde à posição de um algarismo. Veja a Figura 25 abaixo, que ilustra bem algumas dessas classes e dos grupos apresentados.

Figura 25 - Organização das classes do sistema decimal

Classe dos Milhões			Classe dos Milhares			Classe das Unidades Simples		
9ª Ordem	8ª Ordem	7ª Ordem	6ª Ordem	5ª Ordem	4ª Ordem	3ª Ordem	2ª Ordem	1ª Ordem
Centenas de Milhão	Dezenas de Milhão	Unidades de Milhão	Centenas de Milhar	Dezenas de Milhar	Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
100.000.000	10.000.000	1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1

Fonte: Barbosa (2019).

A partir da Figura 25, ainda, pode-se representar cada ordem pelas potências de base 10, como ilustra a Figura 26 abaixo:

Figura 26 - Ordens do SND a partir das potências de base dez

1ª ordem	1	10^0
2ª ordem	10	10^1
3ª ordem	100	10^2
4ª ordem	1.000	10^3
5ª ordem	10.000	10^4
6ª ordem	100.000	10^5
7ª ordem	1.000.000	10^6
8ª ordem	10.000.000	10^7
9ª ordem	100.000.000	10^8

Fonte: Autoria própria.

Para entender essas classificações e ordens, segue o número 3.209. Observe que:

- O algarismo 9 representa a ordem da unidade na classe das unidades simples;
- O algarismo 0 representa a ordem da dezena na classe das unidades simples;
- O algarismo 2 representa a ordem da centena na classe das unidades simples;
- O algarismo 3 representa a ordem da unidade de milhar na classe dos milhares.

Pela Figura 26, pode-se, então, usar o valor posicional de cada algarismo do número 3.209 para obter a sua decomposição:

$$\begin{aligned} 3.209 &= 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0 \\ &= 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1 \\ &= 3000 + 200 + 9 \end{aligned}$$

Mediante tudo isso, percebe-se que aprender o SND é fundamental, haja vista que é a base para o entendimento de vários conceitos matemáticos, sobretudo sobre a composição dos números, isto é, como representá-los a partir de um sistema numérico. Ademais, torna-se muito claro que o ato de decompor um número a partir do SND pode contribuir em muito para a efetuação dos cálculos, principalmente com as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), uma vez que se consegue “quebrar” um número maior em outros menores, facilitando no processo de resolução dos cálculos. Veja dois exemplos rápidos da aplicação desse conhecimento para efetuar a operação da adição e subtração:

- i. $274 + 152 = (200 + 70 + 4) + (100 + 50 + 2) = 300 + 120 + 6 = 426$
- ii. $84 - 13 = (80 + 4) - (10 + 3) = (80 - 10) + (4 - 3) = 70 + 1 = 71$

Com base nisso, de acordo com o foco deste trabalho, seguirá um aprofundamento da aplicação desse objeto de conhecimento para se entender os três algoritmos de multiplicação listados nesta seção, sobretudo os métodos da decomposição e chinês aplicados tanto para a multiplicação quanto para a sua operação inversa (divisão).

4.2.2 Método da decomposição

A multiplicação por decomposição é um algoritmo que, diferente do usual, utiliza o princípio da decomposição dos números a partir do Sistema de Numeração Indo-arábico, isto é, decompor os números por unidades, dezenas, centenas e dentre outras classes e ordens do SND. Como já foi apresentado antes, a ideia central é representar um número, a princípio, “grande” (não necessariamente) como uma adição de outros menores. Veja alguns exemplos:

- i. $24 = 20 + 4$
- ii. $139 = 100 + 30 + 9$
- iii. $192 = 100 + 90 + 2$
- iv. $2552 = 2000 + 500 + 50 + 2$
- v. $3991 = 3000 + 900 + 90 + 1$

Porém, é preciso estar atento ao fato que a decomposição que se pretende retratar neste trabalho não é uma decomposição somente ligada às possibilidades de decomposições a partir da adição, mas que, a depender do número, possa também aplicar a subtração. No exemplo v, em vez de $3000 + 900 + 90 + 1$, o número poderia ser decomposto como: $4000 - 9$. Assim, o estudante pode, em paralelo, efetuar a multiplicação com números com sinais negativos, ou seja, expandindo o conjunto numérico para os inteiros. Isso, porque a subtração $4000 - 9$ pode ser escrita como a adição $4000 + (-9)$. Segue o primeiro exemplo de multiplicação a partir desse princípio:

Figura 27 - Multiplicação entre 24 e 31 por decomposição

$$\begin{aligned}
 24 \times 31 &= (20 + 4) \times (30 + 1) && [1^\circ \text{ passo}] \\
 &= 20 \times 30 + 20 \times 1 + 4 \times 30 + 4 \times 1 && [2^\circ \text{ passo}] \\
 &= 600 + 20 + 120 + 4 && [3^\circ \text{ passo}] \\
 &= 744
 \end{aligned}$$

Fonte: Autoria própria.

A Figura 27 ilustra o algoritmo da decomposição, mostrando três passos para a efetuação da multiplicação de 24 por 31. No 1º passo, decompõem-se os números 24 e 31, sendo, respectivamente, $20 + 4$ e $30 + 1$. Observe a importância da presença dos parênteses. As

setas vermelhas e azuis saindo de 20 e 4 indicam que será utilizada a propriedade da distributividade, em que o 20 sairá multiplicando tanto o 30 quanto o 1, ocorrendo o mesmo em relação ao 4. Assim, obtém-se a linha 2. No 2º passo, para cada par de produto, a multiplicação ocorrerá a partir dos algarismos significativos, isto é, aqueles que não são zero. Ex.: no 20 x 30, será feito 2 x 3 (resultando em 6) e repetirá o total de zeros presentes em ambos, no caso, dois zeros. Assim, tem-se o produto 600. Isso ocorre pelo seguinte:

$$20 \times 30 = 2 \times 10 \times 3 \times 10 = 2 \times 3 \times 10^2 = 6 \times 100 = 600$$

É importante que o estudante, mesmo seguindo esse passo a passo, entenda o porquê que se pode contar os zeros e só multiplicar os algarismos significativos. No 3º e último passo, serão somados todos os produtos decorrentes dos pares de multiplicações da linha 2. Logo, chega-se ao resultado 744. Sobre essa soma, o discente pode somar primeiro os números de mesma ordem, a saber $600 + 120$; e depois pensar na soma de 20 e 4. Isso é subjetivo e pode variar de estudante para estudante, uma vez que o método da decomposição permite variados caminhos para se chegar à resposta, como também variados procedimentos no momento de operar seja com a multiplicação, seja com a adição. Segue mais outro exemplo:

Figura 28 - Multiplicação entre 317 e 64 por decomposição

$$\begin{aligned} 317 \times 64 &= (300 + 10 + 7) \times (60 + 4) \\ &= 300 \times 60 + 300 \times 4 + 10 \times 60 + 10 \times 4 + 7 \times 60 + 7 \times 4 \\ &= 18.000 + 1.200 + 600 + 40 + 420 + 28 \\ &= 19.200 + 1.060 + 28 \\ &= 20.288 \end{aligned}$$

Fonte: Autoria própria.

Veja que, na Figura 28, na quarta linha, foram somados 18.000 e 1.200 primeiro, resultando em 19.200; depois, 600, 40 e 420, resultando em 1.060; por fim, somou tudo com o 28. A depender do estudante, este pode efetuar estas somas de uma vez só ou na ordem que preferir (utilizando a propriedade associativa, como fazer primeiro $600 + 420 = 1.020$; depois $40 + 28 = 68$ e, em seguida, 1.020 com 68). Isso, porque nem todos os estudantes terão facilidades nestas somas, e quanto maiores forem o multiplicando e o multiplicador, ter-se-á uma conta um pouco longa e cansativa, porém sem ser complicada, uma vez que, a partir dessas decomposições, o estudante somente irá trabalhar com a tabuada tradicional.

Além disso, é essencial ressaltar que essa prática de decompor e efetuar a multiplicação contribui para o desenvolvimento do cálculo mental, na medida em que o discente pode pensar nas composições dos números mentalmente para efetuar multiplicações menores. Por exemplo, 52×4 ; sabendo que 52 pode ser decomposto como $50 + 2$, tem-se, então, que 50 multiplicado por 4 resulta em 200, e 2 multiplicado por 4 resulta em 8; logo, o resultado é $200 + 8$ (e não precisa de algum material concreto para este cálculo, como folha de papel, lápis ou calculadora).

Como já foi ressaltado, não necessariamente, o estudante precisa sempre decompor os números a partir da adição, mas que é necessário que possa expandir o conjunto numérico e trabalhar com números negativos também. Veja a Figura 29 abaixo.

Figura 29 - Multiplicação entre 29 e 13 por decomposição

$$\begin{aligned}
 29 \times 13 &= (30 - 1) \times (10 + 3) \\
 &= 30 \times 10 + 30 \times 3 + (-1) \times 10 + (-1) \times 3 \\
 &= 300 + 90 - 10 - 3 \\
 &= 377
 \end{aligned}$$

Fonte: Autoria própria.

Na ilustração acima, o número 29 foi decomposto em $30 - 1$, e veja que essa decomposição é bem melhor do que $20 + 9$, uma vez que permite ao estudante trabalhar com números menos difíceis de se multiplicar. Também, como foi ressaltado na seção secundária deste capítulo (na parte da Tábua de Pitágoras), não faz parte do foco central discutir a Regra de Sinais, mas segue abaixo um quadro só para a ilustrar.

Figura 30 - Quadro ilustrativo da Regra de Sinais

			Adição	Multiplicação
(+)	(+)	=	(+)	(+)
(+)	(-)	=	Subtrai e conserva o sinal do número maior em módulo.	(-)
(-)	(+)	=	Subtrai e conserva o sinal do número maior em módulo.	(-)
(-)	(-)	=	(-)	(+)

Fonte: Autoria própria.

Embora o método da decomposição seja mais voltado e relacionado ao cálculo da multiplicação, pode-se pensar na possibilidade de utilizá-lo também para resolver divisões mais simples. Veja abaixo um exemplo:

Figura 31 - Divisão por decomposição de 144 por 9

$$\begin{aligned} 144 \div 9 &= (90 + 54) \div 9 \\ &= (90 \div 9) + (54 \div 9) \\ &= 10 + 6 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Fonte: Autoria própria.

Observe que, na Figura 31, somente o 144 é decomposto, uma vez que a propriedade da distributividade é aplicável ao dividendo, mas não ao divisor, pois, assim, alteraria o resultado. Isso, porque, dado um “ $a = c + d$ ”, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c + d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{b}$$

Mas, dado um “ $b = e + f$ ”, não se tem:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{e + f} \neq \frac{a}{e} + \frac{a}{f}$$

Ou seja, não se pode “quebrar” o divisor, pois estaria mudando o resultado final, o que já foi mostrado no capítulo 2 deste trabalho, quando ressaltado que, na divisão, não ocorre distributividade sobre a adição, isto é, distributividade em relação ao divisor (a prova dessa propriedade não será apresentada, dado que não é o foco central do trabalho). Porém, para mostrar que isso sucede, segue um exemplo numérico em que $a = 6$; $b = 5 = 2 + 3$.

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{6}{2 + 3} \neq \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 3 + 2 = 5$$

Perceba que é uma contradição, pois se chegou na igualdade $\frac{6}{5} = 5$, o que, claramente, não é verdade.

Ainda sobre a Figura 31, veja que a decomposição ocorreu a partir de valores conhecidos que são divisíveis por 9 (90 e 54). Veja que a resposta final é um número inteiro, e nem sempre isso será possível. A Figura 32 ilustra bem um caso desse tipo:

Figura 32 - Divisão por decomposição de 202 por 9

$$\begin{aligned} 202 \div 9 &= (180 + 18 + 4) \div 9 \\ &= (180 \div 9) + (18 \div 9) + (4 \div 9) \\ &= 20 + 2 + 4 \div 9 \\ &= 22 + 4 \text{ de resto.} \end{aligned}$$

Fonte: Autoria própria.

O número 202 foi decomposto em $180 + 18 + 4$, isso porque são números menores e que dois deles são divisíveis por 9 (pelo critério de divisibilidade)⁶. Assim, encontrou $20 + 2 = 22$ e 4 de resto, já que $4 \div 9$ não é um número natural nem mesmo um inteiro, mas que, ao trabalhar com os inteiros, deixar essa representação do resto se torna necessário, uma vez que, ao efetuar a divisão de 4 por 9, para encontrar a parte decimal, já envolveria o conjunto dos números racionais (que não é o foco deste trabalho).

Por fim, além da aplicação desse método na efetuação das operações básicas, esse método também revela potencialidade em outros conteúdos que envolvem a multiplicação, como o conceito de Porcentagem. Ao saber as porcentagens mais simples de se trabalhar, então o cálculo torna-se mais fácil. A ideia é decompor uma porcentagem mais difícil em outras mais simples, aplicar a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à adição e, assim, resolver as porcentagens mais conhecidas ($50\% =$ metade de um número; $25\% =$ um quarto de um número; $10\% =$ um décimo de um número; $1\% =$ um centésimo de um número). Ainda, diante de uma porcentagem do tipo 20% , pode-se representar da seguinte forma: $2 \times 10\%$, ou seja, o dobro do décimo de um número.

Essa parte não será mais aprofundada neste trabalho, mas foi apresentada com o intuito de revelar essa possibilidade de ampliação nos conceitos relacionados a partir de um método multiplicativo, contribuindo para o auxílio no cálculo numérico e mental diante de diversas situações-problema.

⁶ Critério de divisibilidade por 9: se a soma dos algarismos de um número resulta em um número múltiplo de 9, então ele é divisível por 9.

4.2.3 Método chinês

O algoritmo que será abordado nesta subseção é o método chinês, também conhecido como japonês ou maia. Durante a época da dinastia Han (séculos II a.C. – III a.C.), os povos chineses tinham desenvolvido um tipo de sistema numérico que era baseado pela representação dos números por barras verticais e horizontais. Este sistema era de numeração decimal e posicional, mas não possuía um símbolo para representar o algarismo zero, o que era uma das limitações desse sistema na época, levando à necessidade de alterar os símbolos no decorrer do tempo, a fim de possuir representações para a base 10 (Ifrah, 2010 apud Silva, 2020). A Figura 33 ilustra bem isso.

Figura 33 - Representação dos números 2640, 20064 e 264000 no sistema chinês



Fonte: Ifrah (2010) apud Silva (2020).

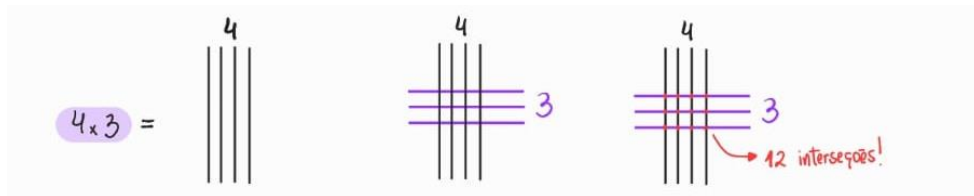
Na ilustração acima, observe que não havia um símbolo representando o zero, e sim símbolos representando uma potência de base 10. No primeiro caso, tem-se 264 dezenas; no segundo, 2 dezenas de milhar e 64; no terceiro, 264 unidades de milhar. Em outros termos, percebem-se aqui características que lembram os princípios aditivos e multiplicativos. Somente no século VII d.C. que os chineses começaram a ter um símbolo para representar o zero.

É importante destacar que, por ser um método bem antigo, não há uma certeza de onde realmente se originou, sendo um algoritmo com raízes também da civilização maia, outra vez que há historiadores que afirmam ter sido inventado por ela durante sua habitação na América Central antes da chegada dos colonizadores espanhóis no século IV. Por, na atualidade, ser também um método bastante utilizado pelos japoneses, acabou-se sendo conhecido como “método japonês” (Llorente, 2017). Essas raízes revelam como esse algoritmo atravessou gerações e que continua sendo uma ótima estratégia para trabalhar a multiplicação entre números naturais e entender a sua estrutura conceitual. Diante disso, será explicado tal método.

O algoritmo de multiplicação chinês (maia ou japonês) consiste em representar cada número que está sendo multiplicado por um conjunto de varetas ou barras nas posições verticais

e horizontais. O produto se dará pela contagem das interseções entre essas varetas. Veja a Figura 34 abaixo.

Figura 34 - Multiplicação entre 4 e 3 pelo método chinês

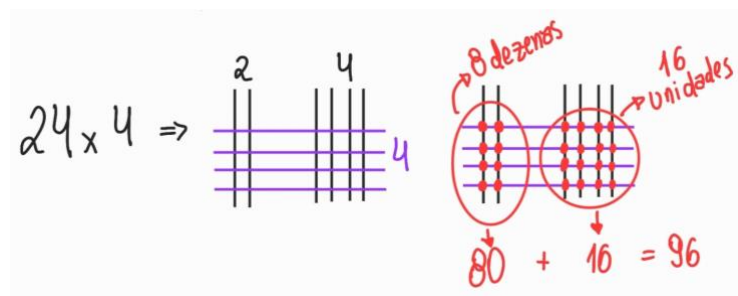


Fonte: Autoria própria.

Na figura acima, o fator 4 é representado por 4 varetas verticais. Em seguida, representa-se o segundo fator, que é 3, por 3 varetas horizontais (que estão destacadas na cor lilás). Após essa representação, contam-se os pontos de interseções (destacados na cor vermelha), resultando em 12 interseções (que é o produto correspondente à multiplicação entre 4 e 3).

Observe que é bem simples, mas que os dois números em questão pertencem à classe das unidades. No caso de se trabalhar com números maiores (como dezenas, centenas e dentre outras classes e ordens), será necessário um espaço entre as varetas para representar cada valor posicional dos algarismos (seja na horizontal, seja na vertical). Segue outro exemplo abaixo.

Figura 35 - Multiplicação entre 24 e 4 pelo método chinês



Fonte: Autoria própria.

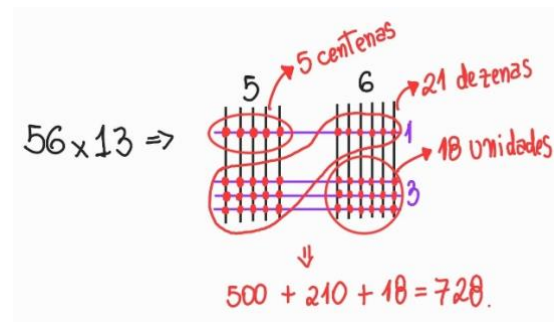
Na Figura 35, o fator 24 foi representado por um conjunto de duas varetas verticais (2 dezenas) e o outro fator por um de 4 varetas verticais (4 unidades). O que ocorre aqui é a ideia da decomposição a partir do Sistema de Numeração Decimal ($20 + 4$). Assim, tem-se uma multiplicação entre um número da classe das dezenas (24) e outro da classe das unidades (4). Em relação à Figura 34, só tinha aparecido um único grupo de pontos de interseção, mas aqui já há dois grupos destacados na cor vermelha. O da direita é o conjunto dos pontos cuja

contagem representará o total de unidades, e o da esquerda é o que representa o total de dezenas. Os pontos são contados separadamente em cada grupo. No grupo das unidades, há 16 pontos; e, no grupo das dezenas, há 8.

Para se realizar a soma, pode-se realizar o agrupamento de 10 em 10, isto é, em relação as 16 unidades, tem-se: 1 dezena e 6 unidades. Assim, o 1 soma com o 8, pois ambos pertencem ao grupo das dezenas. Assim, tem-se: 9 dezenas e 6 unidades. Portanto, o produto é: 96. Outra ideia seria deixar todos os números numa mesma classe, isto é, 8 dezenas = 80 unidades; em seguida, somaria o 16 com 80, resultando em 96 (como é mostrado na Figura 35).

Conforme os números sejam maiores, mais classes e mais conjuntos de pontos de interseções vão aparecendo. Veja outro exemplo ilustrado na Figura 36.

Figura 36 - Multiplicação entre 56 e 13 pelo método chinês

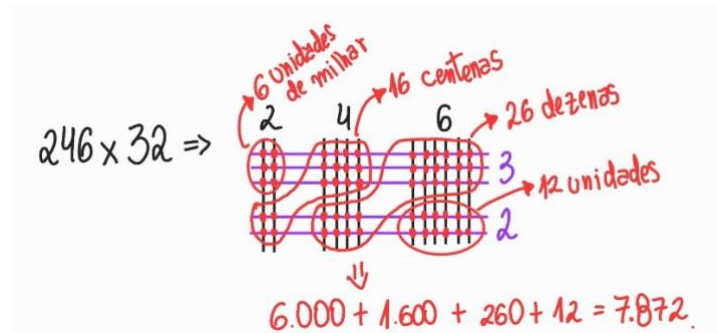


Fonte: Autoria própria.

Agora, tem-se uma multiplicação de dezena por dezena. Observe que existem 4 grupos de pontos de interseção, isso porque existem 4 conjuntos de varetas (dois na vertical e dois na horizontal). Diferente do exemplo anterior, a dinâmica muda um pouco aqui. Em vez de contar os pontos de interseção de cada grupo separadamente, agora serão contados olhando para os grupos formados por diagonais (destacadas na cor vermelha). Assim, têm-se três grupos que irão representar, da direita para a esquerda, as seguintes classes: unidades, dezenas e centenas. No grupo das unidades, há 18 pontos; no das dezenas, há 21; e, no das centenas, há 5. O 18 seria 1 dezena e 8 unidades, logo, o 1 sai somando com o 21 das dezenas, ficando 22. Agora, o 22 seria 2 centenas e 2 dezenas, logo, o 2 sai somando com o 5 das centenas, ficando 7 centenas. Por fim, o número seria a composição: 7 centenas e 2 dezenas e 8 unidades, que é exatamente o número $700 + 20 + 8 = 728$. Observe que é o SND aplicado totalmente para encontrar a multiplicação entre dois números naturais.

Segue mais outro exemplo que ilustra o caso entre centena e dezena.

Figura 37 - Multiplicação entre 246 e 32 pelo método chinês

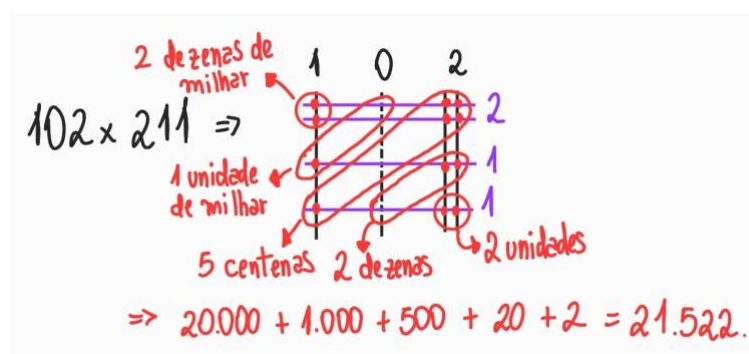


Fonte: Autoria própria.

Agora, existem 4 diagonais, que irão representar, da direita para a esquerda, os grupos das: unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar. Perceba que, após ter entendido o que está por trás dos procedimentos desse método, o estudante pode fazer direto. No grupo das unidades, há 12 pontos; na diagonal das dezenas, há 26 pontos de interseção; na diagonal das centenas, há 16 pontos; e na última diagonal (grupo das unidades de milhar), há 6 pontos. Assim, têm-se 6 unidades de milhar, 16 centenas, 26 dezenas e 12 unidades, resultando em 7.872. Também, ao entender que 12 unidades é 1 dezena e 2 unidades, assim como 26 dezenas é 2 centenas e 6 dezenas, pode-se simplificar ao seguinte caso: 2 unidades; 7 dezenas; 8 centenas e 7 unidades de milhar.

Dessa maneira, observe que a multiplicação com números maiores se torna bem tranquilo e fácil, uma vez que o estudante irá trabalhar com os números sendo representados por barras, e o produto, por pontos. Antes de finalizar a abordagem sobre esse método, é importante apresentar um exemplo envolvendo o algarismo zero e, também, mostrar uma possibilidade ao trabalhar com a divisão. A Figura 38 ilustra uma multiplicação em que um dos fatores possui o algarismo zero.

Figura 38 - Multiplicação entre 102 e 211 pelo método chinês

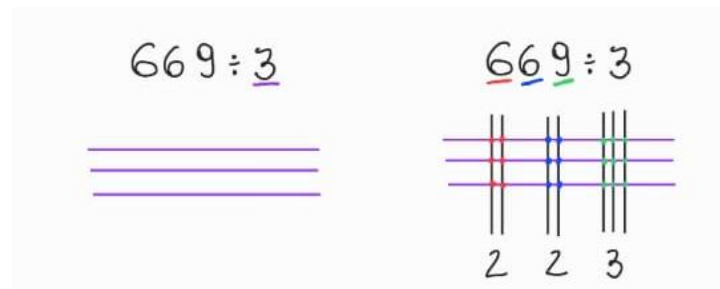


Fonte: Autoria própria.

O algarismo zero está sendo representado por uma linha tracejada, pois, se o zero não for representado, o 102 viraria 12. O caso acima também é de uma multiplicação entre centena e centena, e há 5 diagonais indicando os grupos das classes: unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar. As interseções entre as linhas com as tracejadas não resultam em um ponto de encontro, simbolizando exatamente a multiplicação de um número qualquer por zero, que resulta em zero. Seguindo os mesmos procedimentos apresentados anteriormente, encontra-se o produto 21.522.

Por fim, para ilustrar uns casos de como realizar a divisão por meio desse algoritmo, segue a Figura 39.

Figura 39 - Divisão de 669 por 3 pelo método chinês



Fonte: Autoria própria.

Diferente da multiplicação, em que se cruzam as varetas para encontrar os pontos de interseção, aqui se deseja pensar primeiro no total de retas que resultam no total de pontos de acordo com cada algarismo do dividendo. Para começar, será representado o divisor, no caso 3, por varetas na horizontal. Agora, será analisado cada algarismo do dividendo 669. Olhando para a casa da centena (o 6, que está sublinhado de vermelho), precisa-se desenhar um total de varetas na vertical de modo que a interseção delas com as 3 horizontais resulte em 6 pontos de interseção. Logo, foram necessárias duas varetas, formando os 6 pontos vermelhos destacados na Figura 18. Assim, segue essa lógica para os demais algarismos, mantendo o espaço entre as casas que representam as classes (centena, dezena e unidade). Finalizando, irá representar o número com base nas varetas desenhadas verticalmente: 223.

Existem casos específicos que precisam de mais atenção, envolvendo um procedimento um pouco diferente, mas que não serão explorados nesse trabalho, ficando para estudos posteriores. No geral, é uma adaptação, para a operação da divisão, de um método

originalmente pensado para a multiplicação, mostrando a potencialidade desse algoritmo não convencional.

4.2.4 Método da gelosia

Por fim, será apresentado o último algoritmo da multiplicação deste trabalho: o método de multiplicação gelosia ou algoritmo da gelosia. Acredita-se que este método se originou na Índia por volta do século XII e, posteriormente, difundiu-se para diferentes regiões, alcançando civilizações, como os chineses, persas e até os árabes. A etimologia do termo “gelosia” possui relação com a sua semelhança com as grades de janelas da época (Zonzini, 2015 apud Olimpio et al, 2021).

Em outros termos, a “gelosia” é uma grade de ripas que pode ser colocada em frentes a janelas e portas como um tipo de “barreira”, que impedisse a luz e o calor excessivos de penetrarem no interior de uma casa, construção ou edifício (Sampaio, 2018). Segue uma ilustração de um modelo dessas grades.

Figura 40 - Grade de ripas que simbolizam uma gelosia



Fonte: Sampaio (2018).

Este algoritmo se dá exatamente pelo uso dessas grades para efetuar o cálculo da multiplicação entre números naturais. A construção da grade é relativa à quantidade dos algarismos dos fatores que estão sendo multiplicados, os quais estão dispostos na parte superior (primeiro fator) e na parte lateral direita (segundo fator). Cada algarismo ficará dentro de uma célula (semelhante aos eixos da Tábua de Pitágoras) e, assim, fecha-se a grade, formando pequenos quadrados na parte interna da grade. Em seguida, cada quadradinho interno é cortado por uma diagonal, dividindo-o em duas partes, que serão o espaço para preencher com o produto

correspondente à multiplicação da coluna e linha condizentes ao quadradinho em questão. Observe que, como cada coluna ou linha possui um único algarismo, então, a multiplicação de um algarismo por outro resultará, no máximo, em um produto que pertence ao grupo das dezenas, e, por isso, que só serão necessários esses dois espaços em cada célula.

Veja o primeiro exemplo abaixo ilustrado pela Figura 41.

Figura 41 - Multiplicação entre 52 e 34 pelo método gelosia (etapa 1)

	5	2	x	
				3
				4

	5	2	x	
		0		3
		6		4

Fonte: Autoria própria.

A Figura 41 acima mostra, na primeira parte, a construção da grade a partir dos dois fatores 52 e 34 (veja que foi formado uma grade 2x2). Dentro dessa grade, há 4 células (quadrinhos), em que cada um possui uma diagonal. Na segunda parte da Figura 41, tem-se o preenchimento da célula correspondente à coluna do algarismo 2 do multiplicando com a linha do algarismo 3 do multiplicador 34. Assim, efetua-se a multiplicação entre esses dois algarismos: $2 \times 3 = 06$. Aqui, o zero à esquerda será necessário para preencher o primeiro espaço do quadradinho, representando 0 dezenas. A partir disso, pode-se, então, preencher toda a grade a partir de multiplicações da tabuada tradicional. Segue a Figura 42.

Figura 42 - Multiplicação entre 52 e 34 pelo método gelosia (etapa 2)

	5	2	x	
1	1	0		3
	5	6		
2	2	0		4
	0	8		

	5	2	x	
1	1	0		3
7	2	6		
	0	8		4
6		8		

Fonte: Autoria própria.

Na primeira parte da Figura 42, tem-se o preenchimento da grade completa a partir das multiplicações entre as colunas e linhas. Na segunda parte, estão destacadas as diagonais na cor lilás, pois será efetuada a adição dos valores em cada diagonal, da direita para a esquerda. Assim, na primeira diagonal, só tem o 8, logo, desce o 8 para o primeiro quadradinho externo. Na segunda diagonal, tem-se a adição $0 + 0 + 6 = 6$ e, portanto, desce o 6 para o quadrado externo condizente. Na terceira diagonal, tem-se a adição $2 + 5 + 0 = 7$, então, desce o 7 no externo. Por fim, a última diagonal só tem o 1, então, desce ele para o quadrado externo ao lado. Para ler esse número, segue a ideia: ler de cima para baixo, da esquerda para a direita. Dessa maneira, encontra-se o produto 1.768. Veja outro exemplo.

Figura 43 - Multiplicação entre 247 e 391 pelo método gelosia

	2	4	7	x
	0	1	2	3
	1	3	6	9
	0	0	0	1
	2	4	7	

	2	4	7	x
0	0	1	2	3
9	1	3	6	9
6	0	0	0	1
5	7	7		

Fonte: Autoria própria.

Observe que, na Figura 43, tem-se uma multiplicação de centena por centena, logo, existem nove quadradinhos internos na grade. Conforme os números sejam maiores, a grade também será maior. Após preenchida a grade interna, é hora de somar os valores em cada diagonal da direita para a esquerda, como já ressaltado antes. Veja que a diagonal 3, cuja soma é $2 + 0 + 6 + 6 + 1$, resulta em 15. Aqui, desce o 5 para o quadrado externo condizente (já que este só pode receber um único algarismo) e passa esse 1 para somar com o resultado da soma da próxima diagonal. Na diagonal 4, tem-se: $0 + 8 + 3 + 2 + 2 = 15$, mas que, somando com o 1 que veio da diagonal anterior, fica 16. O 6 desce para o quadrado externo, enquanto o 1 passa para a próxima diagonal, que resultará na adição $1 + 6 + 1 = 8 + 1$ (que veio da diagonal anterior) = 9. Logo, o produto será 96.577.

O método gelosia é um algoritmo simples e que, além de trabalhar com a tabuada, pede do estudante a realização também da operação aditiva. Esse método ainda pode permitir envolver, a partir de adaptações, outras operações, como a subtração e a divisão, mediante uma

grade preenchida parcialmente e entregue ao estudante para completar. Veja a Figura 44 que ilustra bem esse caso.

Figura 44 - Adaptação do método gelosia para envolver as 4 operações

		5		x
		3	1	
	2	4	4	
	7	5	8	9
	8	0		

Fonte: Autoria própria.

A partir de uma grade parcialmente preenchida, para o estudante completar, ele poderá encontrar estratégias que o façam operar com as quatro operações. Para o quadrado cujo valor é 27, o qual está na fileira do 9, tem-se o seguinte pensamento: “um número que multiplicado por 9 resulta em 27. Logo, para encontrar esse tal número, divide o 27 por 9, encontrando 3 como quociente”. Dessa maneira, o 3 é o valor do primeiro algarismo do multiplicando que fica na primeira coluna. Segue uma ilustração abaixo.

Figura 45 - Adaptação do método da gelosia (divisão)

	?	5		x
		3	1	
	2	4	4	
	7	5	8	9
	8	0		

$\Rightarrow ? \times 9 = 27$
 $? = \frac{27}{9} = 3$

Fonte: Autoria própria.

Olhando para a terceira coluna, que é o terceiro algarismo do multiplicando, e para a segunda fileira (que é o segundo algarismo do multiplicador), tem-se: “um número (algarismo) multiplicado por 9 resulta em um produto cujo algarismo da unidade é 8. Este outro número só pode ser o 2, já que $9 \times 2 = 18$ ”. Outra forma seria somando os valores da segunda diagonal (da direita para a esquerda): $4 + x + 5 = _0$, isto é, um número cujo algarismo da unidade é 0. Assim,

o único algarismo que pode ser colocado no espaço vazio dessa diagonal é o 1, dado que o único valor possível dessa soma seria o 10 (pois, para ser 20, x teria que ser 11, mas ele só pode ser um número com um único algarismo). Assim, $5 + x + 4 = 10$ permite ao estudante efetuar uma subtração, por exemplo, já que “qual o número que somado a 9 é igual a 10” é uma forma de pensar sobre essa operação.

Como já foi descoberto o valor do terceiro algarismo do multiplicando (que é 2), então, segue outro passo: “um número multiplicado por 2 resulta em 14. Esse número é o 7”. Logo, encontra-se o primeiro algarismo do multiplicando, tendo todos os fatores conhecidos e, assim, finalmente, preencher o restante da tabela. Isso, logicamente, é relativo, pois dependerá do caminho que o estudante escolherá para preencher a grade.

Portanto, percebe-se que, embora só trabalhando com números naturais, o algoritmo de multiplicação gelosia é simples e tranquilo de se realizar, facilitando, sobretudo, nos cálculos de números altos também, uma vez que o estudante só irá trabalhar com a tabuada (multiplicação entre unidades) e a adição. O docente pode seguir a ideia da adaptação apresentada acima, a fim de tornar o recurso mais rico, englobando as quatro operações básicas e desenvolvendo o raciocínio e, com efeito, também o cálculo mental.

4.3 MALHA QUADRICULADA

Por fim, o último recurso didático que será apresentado neste trabalho é a Malha Quadriculada, instrumento este que consiste em uma grade formada por linhas horizontais e verticais, criando pequenos quadradinhos. Em geral, vê-se tal recurso sendo mais usado em aulas de Matemática voltadas para o campo de Grandezas e Medidas, como para trabalhar perímetros, áreas, eixos de simetrias, coordenadas, gráficos e dentre outros assuntos. A Malha Quadriculada ajuda os estudantes a visualizarem os problemas e organizarem informações de forma mais clara e ordenada.

Saindo do uso padrão desse recurso, é importante ressaltar que, sem dúvidas, este instrumento tem relação direta com a multiplicação, principalmente quando se trata de problemas de área, por exemplo. Veja o problema abaixo:

Problema 2: “*Helena comprou um terreno cuja largura mede 4 metros, enquanto o comprimento mede 8 metros. Represente a área correspondente na malha quadriculada*”.

Embora o problema 1 não deixe claro qual é o formato do terreno comprado por Helena, sabe-se que há duas dimensões: largura x comprimento. Sendo assim, percebe-se um caso tradicional de um problema de figura retangular, em que, para calcular a área, multiplica-se as duas medidas dadas:

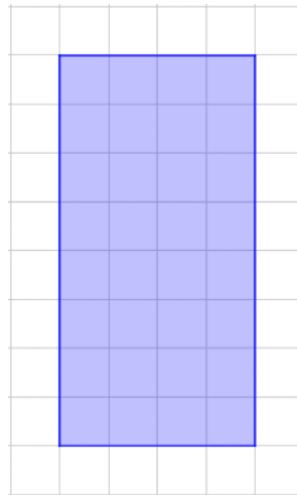
$$4 \text{ metros} \times 8 \text{ metros} = 32 \text{ metros quadrados}$$

Isso, porque se conhece a fórmula da área de uma figura retangular, que é dada pela multiplicação da base pela altura, ou seja:

$$A = b \times h$$

Veja que o procedimento por trás desse problema é a operação aritmética da multiplicação. Assim, pode-se representar essa questão na Malha Quadriculada, como ilustra a Figura 46.

Figura 46 - Representação do produto 4x8 na malha



Fonte: Autoria própria

Observe que a o 4 representa a base, que é a largura da figura retangular, e o 8 representa a altura, que é o comprimento do retângulo. Isso o lembra de algo já apresentado, certo? A organização da Tábua de Pitágoras. Veja que aqui a base representa o total de colunas, e a altura, o total de linhas. O retângulo ilustrado pela Figura 46 possui 32 quadradinhos, cada um com uma equivalência de 1 u.m.a (unidade de medida de área), que é a correspondência da

multiplicação de 4 por 8. Logo, percebe-se que é uma maneira mais lúdica e visual de se trabalhar a multiplicação.

A multiplicação realizada pela Malha Quadriculada é chamada de organização retangular, uma das categorias já analisadas neste trabalho de acordo com as Estruturas Multiplicativas de Vergnaud. A partir disso, o estudante pode aprender a multiplicar números naturais com o apoio desse recurso, representando os produtos como áreas em uma grade de quadradinhos. É essencial frisar que há uma contramão em utilizar a malha para representar produto de números inteiros cujos sinais são diferentes, pois o produto seria um número negativo e não há como ter uma área negativa.

Do problema 2, pode-se pensar em mais dois tipos de variações de problemas, em que se muda o procedimento para chegar à resposta. Veja uma variação abaixo:

Variação (I): “Helena comprou um terreno retangular cuja largura mede 4 m. Se ela possui um plano de construir uma casa cuja área seja de 32 m², então qual deve ser a medida do comprimento desse terreno?”

Esse tipo de variação muda o procedimento da questão, de modo que o estudante opere por meio da divisão para encontrar o valor esperado. O discente pode usar a malha ainda para encontrar a resposta, sabendo que ele precisa desenhar uma figura com 32 quadradinhos e que a base é 4. Assim, pode-se utilizar da ideia primária de multiplicação: adição sucessiva de parcelas iguais. A partir disso, ele pode ir adicionando de quatro em quatro até chegar em 32 quadrados e, então, contar quantas vezes ele adicionou ou desenhou na malha as fileiras de 4 quadrados, que será a resposta final (ou poderia realizar a subtração sucessiva).

Outra variação seria:

Variação (II): “Helena comprou um terreno retangular de 32 m². Desenhe na malha quadriculada uma possibilidade de como distribuir as medidas da base e do comprimento para se ter uma figura cuja área corresponda aos 32 m². ”

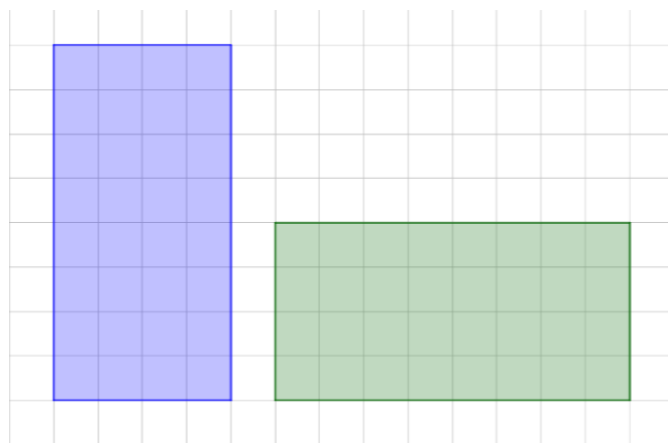
Diante dessa variação, o estudante pode desenhar figuras retangulares com as seguintes medidas, como mostra o conjunto P das possibilidades:

$$P = \{32 \times 1; 1 \times 32; 16 \times 2; 2 \times 16; 8 \times 4; 4 \times 8\}$$

Observe que o conjunto P acima é exatamente o conjunto das possíveis decomposições multiplicativas em até dois fatores naturais. Logo, o estudante passa a pensar nas possibilidades da multiplicação de dois números que resulta em 32.

Ainda, é preciso destacar que as multiplicações 8×4 e 4×8 , embora possuam o mesmo resultado (produto/área), mas que podem ser visualizados de forma diferente (e isso equivale para os demais). Isso, porque o problema 1 representa uma situação do cotidiano em que se deve pensar: um terreno com 8 metros de largura é igual a um com 4 de largura? A resposta, obviamente, é não. Pense em uma vizinhança, em que aumentar a largura de um terreno de 4 metros para 8 metros pode simbolizar uma “invasão” no terreno dos vizinhos ao redor. Dessa forma, tem-se um ponto que pode auxiliar o estudante a entender a propriedade comutativa da multiplicação de forma mais visual, assim como a Tábua de Pitágoras, em que nem sempre, a depender da situação, 8×4 é igual a 4×8 . A Figura 47 ilustra bem esse quadro.

Figura 47 - Diferença entre os produtos 8×4 e 4×8



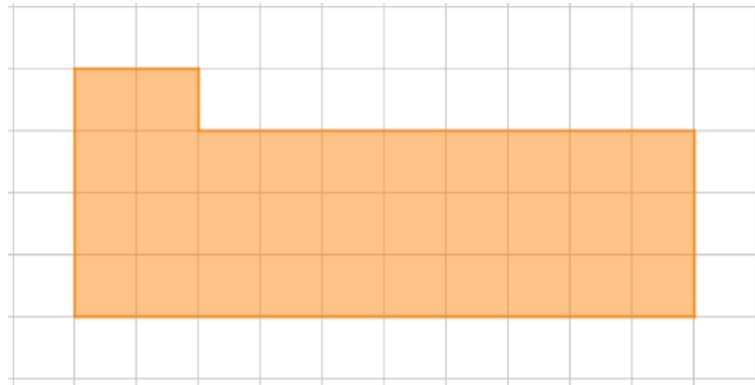
Fonte: Autoria própria.

O retângulo verde toma mais espaço na horizontal, enquanto o azul toma mais espaço na malha na vertical. Ambos possuem a mesma área, porém a forma com que ocupam o espaço na malha é diferente. Todavia, existe outra forma de enxergar esses retângulos na Malha Quadriculada, que é considerando eles o mesmo retângulo, porém o verde está rotacionado 90° em relação ao azul. Nesse campo de visão, são iguais. É importante que o discente entenda esses dois significados, o que ampliará seu entendimento sobre a propriedade em questão.

Retomando à variação (II), não se pode deixar passar que, ao trabalhar com a Malha Quadriculada, o docente precisa deixar claro para o estudante a unidade de medida de área ou de comprimento que cada quadradinho representa. No caso das Figuras 46 e 47, utiliza-se 1 u.m.c (unidade de medida de comprimento) e 1 u.m.a (unidade de medida de área). Todavia,

deve-se atentar a um possível caminho tomado pelo estudante ao tentar desenhar uma figura cuja área seja 32, principalmente quando não está explícita a forma da figura (se é retângulo ou outro tipo). Observe a Figura 48.

Figura 48 - Composição de figuras com área 32



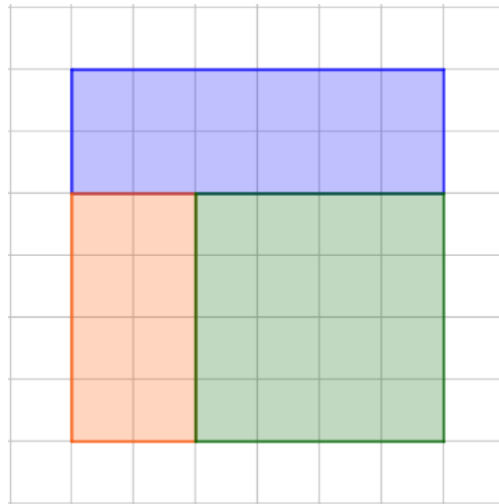
Fonte: Autoria própria.

A Figura acima ilustra um polígono não quadrilátero (quatro lados), mas que pode ser decomposto em dois retângulos, cuja área total é 32 u.m.a. Pode-se pensar sobre eles com a seguinte decomposição: um retângulo 10x3 e outro 2x1. Assim, poderia chegar à área total somando as duas áreas: $10 \times 3 + 2 \times 1$ (importante esclarecer que podem ocorrer outras variações de decomposições). Esse caminho se torna interessante, pois o estudante amplia seu campo de possibilidades podendo desenhar qualquer polígono com variadas formas a partir da contagem dos quadradinhos pequenos cuja área é 1 unidade de medida de área.

Porém, é preciso que, ao ser fixada a forma ideal para uma determinada questão, o discente consiga encontrar o caminho certo para as respostas obedecendo ao comando dos problemas. Em outras palavras, se o docente considerar a Figura 48 como certa em relação à variação 2 do problema 1, em que se pede uma figura retangular, só por possuir a mesma área, o estudante pode pensar que a Figura 48 é também um retângulo, o que não é verdade, já que o retângulo é um polígono com quatro lados e cujos ângulos são retos; enquanto o polígono formado pela composição de dois retângulos na Figura 48 possui 6 lados, e nem todos os ângulos internos são retos.

Ao falar de composição de figuras, pode-se pensar na seguinte situação ilustrada pela Figura 49 abaixo.

Figura 49 - Composição de três retângulos



Fonte: Autoria própria.

A Figura acima mostra um quadrado 6x6 composto por três retângulos com as seguintes medidas: verde (4x4); azul (6x2) e laranja (2x4). Uma curiosidade nessa parte é que a figura verde foi chamada de retângulo, sendo que claramente é um quadrado, enquanto a imagem completa foi chamada de quadrado, o que ocorre de propósito, uma vez que é sempre importante lembrar que todo quadrado é um retângulo, porém o contrário não vale, já que o quadrado é um caso específico do retângulo, isto é, quando todos os lados possuem a mesma medida⁷.

O docente pode pedir aos estudantes para que representem a operação matemática por trás da área de cada retângulo colorido da Figura 49. Sendo assim, eles verão que o verde possui área de 16 u.m.a, já que $4 \times 4 = 16$; o azul possui área de 12 u.m.a, e, por fim, o laranja possui área de 8 u.m.a. Além disso, veja que se torna visível que o retângulo cujos lados possuem a mesma medida (ou seja, um quadrado) representa um número quadrado perfeito, como o 16, enquanto os demais não podem ser um quadrado com fatores diferentes.

Outra ideia interessante é trabalhar com a soma das áreas. Por exemplo, “quanto que vale a área total do retângulo formado pelas figuras laranja e verde?”. Aqui, se o estudante já tiver identificado a multiplicação correspondente e, por conseguinte, a área de cada um desses retângulos, ter-se-á o seguinte:

⁷ É importante lembrar que os quadrados pertencem ao universo dos paralelogramos, em que se encontram também os losangos (quadrilátero com lados congruentes) e os retângulos (quadrilátero com ângulos retos). Assim, todo quadrado é um losango e um retângulo, pois se enquadra com suas definições.

$$A_{laranja} + A_{verde} = (2 \times 4) + (4 \times 4) = 8 + 16 = 24 \text{ u.m.a}$$

Caso o estudante junte primeiro os dois retângulos, perceberá que há um fator em comum, o 4. Assim, ocorreria:

$$A_{laranja} + A_{verde} = 6 \times 4 = 24 \text{ u.m.a}$$

E de onde veio esse 6? Claramente da soma de 2 com o 4. Em outros termos, o que ocorre é a aplicação da propriedade distributiva, colocando em evidência o fator comum em ambos:

$$(2 \times 4) + (4 \times 4) = (2 + 4) \times 4 = 6 \times 4 = 24 \text{ u.m.a}$$

Dessa forma, percebe-se um modo de trabalhar também, além da propriedade comutativa, a distributividade, o que torna mais rico esse recurso, pois o discente amplia o seu conhecimento, interiorizando as propriedades da multiplicação.

Além dessas potencialidades apresentadas, é profícuo pontuar que problemas voltados para a ideia de organização retangular, a partir das Estruturas Multiplicativas, não necessariamente sendo problemas envolvendo áreas, podem ser aproveitados e estudados a partir desse recurso didático, trabalhando com diferentes representações. Como exemplo, pense na seguinte situação: “uma sala de aula de uma escola pública contém em média 45 carteiras. Desenhe com o apoio da malha uma possível organização do tipo colunas e fileiras”. Aqui, o estudante pode representar de forma simbólica cada quadradinho como sendo uma carteira da sala e, assim, desenhar um retângulo de modo que a base multiplicada pela altura resulte em 45, como 5 de base e 9 de altura.

Por fim, fica claro que a Malha Quadriculada é uma ferramenta valiosa para auxiliar no ensino e na compreensão do conceito da multiplicação e divisão também, proporcionando uma representação visual e prática das operações matemáticas.

5 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho é de natureza bibliográfica e qualitativa (a partir do estudo de casos). Inicialmente, foi realizada uma abordagem sobre a multiplicação e a divisão

(já que ambas estão relacionadas), ressaltando suas definições, significados e propriedades. Em seguida, foi feita uma pesquisa desses conceitos em documentos oficiais da educação – os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo de Pernambuco –, procurando entender como que esses conceitos são abordados no ensino fundamental até o 7º ano. Como o público-alvo deste trabalho, em geral, é a turma do 7º ano, então foram analisados os livros didáticos do 6º e 7º anos da coleção “Trilhas da Matemática”, para averiguar como que esses conceitos são definidos, os tipos de problemas e recursos que eles apresentam para o auxílio no processo de ensino-aprendizagem da multiplicação e da divisão (entre números naturais e inteiros).

A partir dessa análise, notou-se a necessidade de fundamentar o trabalho também com a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) do psicólogo matemático francês Gérard Vergnaud, abordando a ideia geral da teoria e especificamente o campo multiplicativo. Também foi discutido que, para a resolução de problemas, havia duas competências essenciais, entre elas o cálculo numérico, o que levou a trazer no trabalho recursos didáticos que podem auxiliar no processo de efetuação das operações em questão. Esses recursos foram explorados com o intuito de visualizar neles a possibilidade de relacionar outros conceitos e ampliar o repertório do sujeito sobre os campos conceituais e esclarecer o fato de que vários conceitos estão inter-relacionados na Matemática.

Diante disso, com discussões com as orientadoras, foi decidido realizar uma aplicação de uma sequência didática com as turmas de 7º ano de uma escola pública estadual de Pernambuco, a qual o autor deste trabalho atuou como um dos integrantes do Programa de Residência Pedagógica. No total, foram duas turmas de 7º ano com uma média de 30 a 35 estudantes com constância nas aulas. A aplicação ocorreu durante o mês de novembro do ano de 2023 e possuiu o objetivo de verificar tanto o conhecimento dos discentes sobre os problemas envolvendo as Estruturas Multiplicativas (identificando as principais dificuldades deles no que tange à resolução) quanto a potencialidade dos recursos abordados sob a luz da TCC. É preciso enfatizar que, por ser uma turma de 7º ano, nem todas as regularidades e potencialidades analisadas nos recursos foram colocadas em prática, haja vista que alguns pontos seriam mais voltados para estudantes de anos mais avançados ou até por questão de tempo para aplicação (precisando essa ser mais objetiva).

Sendo assim, a sequência didática foi composta por momentos de explanações sobre os recursos e de aplicações de fichas com problemas (de fixação e contextualizados). Foram aplicadas 4 fichas (uma sobre problemas das Estruturas Multiplicativas, e as demais sobre cada um dos três recursos apresentados). A elaboração dessas fichas foi com base no conhecimento que o autor possuía das turmas e das dificuldades que já apresentavam, além de, a partir da

análise dos livros do 6º e 7º ano da coleção “Trilhas da Matemática” (coleção adotada pela escola), entender o que eles deveriam ter de bagagem sobre as operações destacadas neste trabalho. Seguem, nas próximas subseções, as explicações acerca de cada uma dessas fichas.

5.1 FICHA 1

O primeiro momento da sequência didática foi aplicar nas duas turmas uma ficha composta por 4 tipos de problemas a partir das Estruturas Multiplicativas (cada tipo com uma variação a mais e pequenas mudanças nos termos). Foi destinada para esse momento uma aula (50 minutos) para cada turma. Assim, foram 8 problemas no total, com o intuito de ver se os estudantes conseguiriam identificar que havia pares de problemas que abordavam um mesmo contexto de situação, mas que os procedimentos de resolução eram diferentes; ou ainda melhor, que, nesses pares de problemas, um continha a resposta do outro. Seguem abaixo os problemas que compuseram a Ficha 1.

Ficha 1

- 1) Numa festa de aniversário de 15 anos de duas irmãs gêmeas, à cada grupo de 8 convidados, as aniversariantes recebiam, em média, 16 presentes. Se, na festa, houve um total de 120 convidados, quantos presentes foram recebidos pelas jovens?
- 2) Numa sala de aula comum de uma escola estadual, as carteiras são distribuídas nas salas da seguinte forma: 5 fileiras com 9 carteiras. Quantas carteiras há na sala?
- 3) Lara comprou um conjunto profissional de lápis de cor para suas artes na escola por R\$60,00. Ainda, ela comprou um kit de lápis grafite de escrever por R\$15,00. Quantas vezes o conjunto do lápis de cor foi mais caro que o kit do lápis grafite?
- 4) Ruan tem quatro calças jeans e sete camisas com cores diversificadas. De quantas maneiras Ruan pode combinar as calças e as camisas?
- 5) Se um total de 120 pessoas levam 240 presentes ao todo para uma festa de aniversário, então quantas pessoas são necessárias para um total de 16 presentes? Considere que todos levam a mesma quantidade de presentes individualmente.

6) Uma sala de aula, de uma escola municipal, tem 45 carteiras organizadas em 5 fileiras. Para que sejam todas distribuídas igualmente, cada fileira terá que conter quantas carteiras?

7) Maria Helena comprou um conjunto profissional de lápis de cor e um kit de lápis grafite numa loja de papelaria. O kit de lápis grafite custou R\$15,00. Sabe-se que o conjunto de lápis de cor custou 4 vezes mais que o kit. Logo, qual foi o valor desse conjunto profissional?

8) Bruno foi convidado para sair com seus amigos. Sabe-se que há 24 looks possíveis a partir de combinações feitas entre suas calças jeans e suas camisas de cores diferentes. Se Bruno possui 4 calças jeans, então quantas camisas ele tem?

Os pares de mesmos problemas, alterando a variável, foram: 1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8. Uma observação sobre a questão 8 é que, a princípio, não foi visto o erro do número 24, que deveria ser 28, para corresponder ao outro problema (esse detalhe será explicado melhor no capítulo dos resultados). Em geral, são 4 tipos de categorias presentes com as seguintes classificações das Estruturas Multiplicativas de Vergnaud:

- 1 e 5: problemas da categoria proporção dupla da classe muitos para muitos;
- 2 e 6: problemas da categoria produto de medidas da classe de configuração retangular;
- 3 e 7: problemas da categoria comparação multiplicativa das classes de relação desconhecida e de referente desconhecido (respectivamente);
- 4 e 8: problemas da categoria produto de medidas da classe combinatória.

Observe que são os mesmos problemas das situações que foram exemplificadas no capítulo 3 (subseção 3.1) e que todos eles possuem estratégias diferentes de se chegar à resolução, operando com a multiplicação e/ou divisão. Após essa aplicação, cada estudante também recebeu um questionário com perguntas voltadas para a percepção deles acerca de suas dificuldades na resolução dos problemas, a fim de que, com isto, pudesse mostrar a importância de trabalhar o conceito da multiplicação mediante a parceria do cálculo relacional e numérico. Segue abaixo o questionário proposto.

Questionário

- Você teve dificuldades em entender e em interpretar o que as questões pediam?

SIM ☐ NÃO ☐

- Você teve dificuldades de realizar o cálculo em alguma questão?

SIM ☐ NÃO ☐

Se SIM, Quais? _____

- Quais questões você achou mais fáceis?

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

- Quais questões você teve mais dificuldades de resolver?

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

- Você percebeu alguma relação entre as questões?

- Quais questões você acha que acertou?

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

5.2 FICHA 2

O segundo momento da sequência didática foi trabalhar com os estudantes a Tábua de Pitágoras. Foram destinadas duas aulas (100 minutos) para cada turma. A primeira aula foi para a explanação do recurso proposto, explicando a representação simbólica da multiplicação “a x b” pelo par ordenado “(a, b)”, trazendo exemplos e mostrando como isso estava relacionado com o preenchimento da tabela pitagórica. Em seguida, cada estudante iria receber uma tabela vazia para realizar um preenchimento parcial, uma vez que, como este recurso já tinha sido trabalhado no início do ano com as turmas, o foco seria mais em compreender se os discentes sabiam localizar os pares ordenados e preencher cada célula a partir do entendimento de que cada par correspondia a uma multiplicação. É importante destacar que o par ordenado (a, b) foi

definido a partir da representação por Matriz, isto é, o primeiro termo indica a localização na horizontal, enquanto o segundo indica a localização na vertical.

Para essa primeira aula, o preenchimento parcial se deu a partir de uma dinâmica de “Ditados de pares ordenados”, em que cada estudante iria ficar atento aos pares que seriam ditados (e repetidos até três vezes). No total, foram 20 pares ordenados ditados de forma aleatória (que serão detalhados no próximo capítulo). O objetivo dessa dinâmica era trabalhar com os discentes a localização cartesiana e destacar as propriedades da multiplicação, como a comutatividade. Veja que aqui se faz presente a ideia dos invariantes operatórios e das representações simbólicas de Vergnaud.

Na segunda aula, houve a aplicação da Ficha 2, em que, paralelamente, os estudantes iriam responder com o apoio da Tábua de Pitágoras já preenchida. Essa ficha foi composta pelas seguintes questões:

Ficha 2

1) Localize os pares ordenados a seguir na Tábua de Pitágoras, represente cada par por meio da operação da multiplicação e diga o valor correspondido.

a) (2, 3)

f) (1, 9)

b) (4, 5)

g) (4, 8)

c) (7, 3)

h) (7, 7)

d) (8, 4)

i) (5, 9)

e) (5, 5)

j) (6, 4)

2) Qual o resultado que aparece na tabela mais vezes? Se houver mais de um, cite três exemplos.

3) Qual o resultado que aparece na tabela menos vezes? Se houver mais de um, cite três exemplos.

4) Quais são os valores em que os pares ordenados possuem Algarismos iguais? Cite três exemplos. E o que você observa sobre esses valores?

5) Quais os pares ordenados em que o resultado é o mesmo? Cite três exemplos.

6) Com base na Tábua de Pitágoras, é certo dizer que a multiplicação $2 \times 1 = 1 \times 2$? Justifique.

7) Preencha os pares ordenados abaixo, de acordo com o seu resultado correspondido na Tábua de Pitágoras.

a) $(2, \underline{\quad}) = 16$

c) $(\underline{\quad}, 7) = 35$

e) $(\underline{\quad}, \underline{\quad}) = 56$

b) $(4, \underline{\quad}) = 32$

d) $(\underline{\quad}, 9) = 63$

8) Gustavo tem quatro calças jeans diferentes e sete camisas com cores diversificadas. De quantas maneiras Gustavo pode combinar as calças e as camisas? Use a Tábua de Pitágoras para auxiliar no cálculo.

Embora seja uma ficha longa, mas observe que são questões voltadas para a tabela, em que treina mais a observação e a visualização dos estudantes nas regularidades da Tábua. A primeira questão entra mais como um exercício de fixação em relação ao que já tinham feito na

primeira aula, em que teriam que representar o par ordenado (a, b) pela multiplicação $a \times b$ e pelo seu produto correspondente “c”. A segunda e a terceira questão trabalham a percepção acerca dos valores que aparecem mais e menos vezes na tabela. Como explicado na subseção 4.1, o que ocorre por trás dessa frequência de aparição dos valores é o conceito de divisores e múltiplos. Ainda, há um estímulo à reflexão sobre a propriedade comutativa e uma ênfase à ideia de localização também.

A questão 4 tem o intuito de o estudante localizar e identificar números quadrados perfeitos, desenvolvendo sua percepção sobre as características desses números dentro da tabela: localização na diagonal, fatores iguais, a presença do conceito de “potência” e a aparição desses números (a saber que uns deles só aparecem uma única vez) na tabela. A 5ª questão envolve a propriedade comutativa e possui relação direta com o que foi abordado na questão 2, dado que, a partir do momento que o estudante identifica um valor como o que mais aparece na tabela, ele pode destacar os pares ordenados correspondentes a esse valor em cada vez que foi encontrado.

A questão 6 traz uma reflexão sobre a propriedade comutativa, em que, olhando para o produto $2 \times 1 = 1 \times 2$, por meio da tabela pitagórica, pode-se visualizar que existe uma diferença, seja no significado, seja na forma como que ocorre os agrupamentos entre os objetos. Na tábua, essa visualização fica facilitada quando os estudantes percebem que cada um desses produtos está em localizações diferentes, ou seja, em quadrados diferentes. A questão 7 é voltada para trabalhar a operação da divisão, envolvendo a ideia de múltiplos e divisores também. Por fim, a última questão é um problema das Estruturas Multiplicativas (combinatória) da Ficha 1, cujo objetivo é ver se os discentes conseguem responder utilizando a Tábua de Pitágoras ou com o apoio dela. Observe que é uma ficha que trabalha bastante tanto as representações que podem ser dadas às operações em destaque quanto a presença dos invariantes operatórios, com problemas estruturados com base na TCC.

5.3 FICHA 3

O terceiro momento da sequência foi trabalhar com os estudantes os algoritmos da multiplicação. Foram destinadas duas aulas, a princípio, mas que, no decorrer delas, foi visto a necessidade de estender para 3 aulas (150 minutos). Na primeira aula, houve uma breve revisão sobre o Sistema de Numeração Decimal e, em seguida, a abordagem sobre o primeiro método de multiplicação: decomposição. Na segunda aula, foi retomado, com um exemplo, o método da decomposição e, logo após, foram explicados os outros dois métodos (maia e gelosia). Em

relação aos dois primeiros, houve uma explanação trazendo exemplos da aplicação deles na divisão. Como já foram abordados no início do ano letivo de 2023, não houve uma abordagem aprofundada nesses métodos, só o necessário para que pudessem responder a Ficha 3. Na terceira aula, houve a aplicação da Ficha 3, que foi composta pelas seguintes questões:

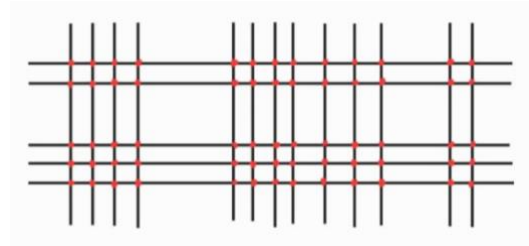
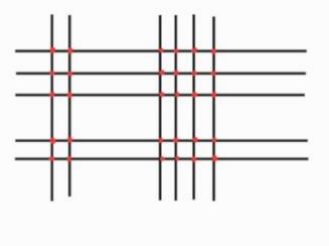
Ficha 3

1) A partir dos métodos apresentados na sala de aula, resolva as operações abaixo:

- a) 42×112 (decomposição) b) $108 \div 4$ (decomposição)
 c) 23×41 (método chinês) d) $88 \div 4$ (método chinês)
 e) 53×24 (método gelosia) f) 261×137 (método gelosia)

2) De acordo com cada método, responda o que se pede em cada letra.

a) Quais os números que estão sendo multiplicados nas duas figuras abaixo?



b) Complete os espaços em branco abaixo.

		4		X
	1	2		
	8	4	8	6
2	5	2	0	
		9	5	

$$\begin{aligned}
 28 \times 83 &= (20 + 8) \times (____ + 3) \\
 &= 1600 + ____ + 640 + ____ \\
 &= 2240 + ____ \\
 &= ____
 \end{aligned}$$

3) Em prol de arrecadar dinheiro para a compra de material escolar de uma aluna da turma afetada por grandes enchentes, ficou combinado que cada aluno iria contribuir com um valor de R\$5,00. Se, nessa turma, tirando a aluna em questão, há um total de 35 alunos, então qual foi o valor arrecado por todos? (Use um dos métodos apresentados para resolver o problema.)

A primeira questão é do tipo de fixação (de treino), para os estudantes colocarem em prática os métodos apresentados. A segunda questão, na letra A, requer o reconhecimento dos fatores que estão sendo multiplicados a partir da contagem das varetas (ou barras) do método maia, envolvendo o conceito até do próprio sistema decimal, na medida que precisam entender o que cada grupo de varetas simboliza dentro das classes e ordens do SND. Na letra B, foi feita uma adaptação dos métodos da decomposição e da gelosia, de modo que o estudante passe a completar os espaços vazios, efetuando as demais operações (como adição, subtração e divisão), além de compreender um pouco mais sobre a propriedade distributiva. Na última questão, o problema proposto é das Estruturas Multiplicativas (proporção dupla – um para muitos), em que o estudante teria que resolver a partir de um dos métodos apresentados.

Em seguida, houve duas perguntas (no final da Ficha 3) para registrar a opinião dos discentes sobre os métodos apresentados e suas dificuldades com a multiplicação entre números grandes. Segue o pequeno questionário abaixo:

Questionário 2

- Qual dos métodos apresentados você gostou mais?

Método da decomposição

☐

Método chinês

☐

Método gelosia

☐

- Você sentia dificuldades para a realização de algumas multiplicações envolvendo números grandes?

SIM

☐

NÃO

☐

5.4 FICHA 4

O quarto e último momento da sequência didática foi a aplicação do recurso da Malha Quadriculada. Foi destinada uma única aula (50 minutos), com o início explicando a ideia geral do recurso e como entender e representar multiplicações na malha. Em seguida, os estudantes receberam a Ficha 4 que continha as seguintes questões:

Ficha 4

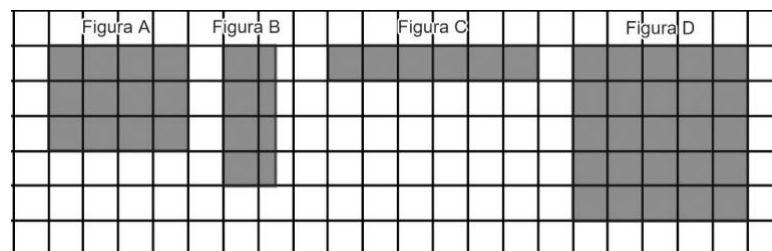
1) Desenhe figuras retangulares, com o apoio da malha quadriculada, com as seguintes áreas:

A) 24 u.m.a

B) 15 u.m.a

2) Em relação à primeira questão, há mais outras possibilidades de figuras para a letra A? e para a letra B? Explique.

3) Escreva abaixo a multiplicação correspondente à área de cada figura. Considere que cada quadrado tem lado medindo 1 u.m.c.



4) Numa sala de aula de uma escola estadual, há um total de 45 carteiras que serão distribuídas em uma organização do tipo “colunas por fileiras”. Desenhe na malha quadriculada uma forma de se organizar essa sala, considerando cada quadrado uma representação simbólica das carteiras.

Como discutido na subseção 4.3, uma forma de trabalhar a multiplicação seria por meio da contagem de quadrados que valem 1 na malha quadriculada ou pelo conceito de área de figuras retangulares, em que cada quadradinho valeria 1 u.m.a. Veja que a área de uma figura retangular é “base x altura” (largura x comprimento), trabalhando com a multiplicação de dois fatores, em que o primeiro irá indicar o total de colunas, e o segundo o total de linhas (abordando, assim, a categoria de produto de medidas da classe configuração retangular).

A questão 1 traz duas áreas para serem representadas de forma retangular na malha quadriculada. Para se pensar nas possibilidades, os estudantes irão trabalhar com a ideia de “múltiplos e divisores”, já que terão que encontrar uma decomposição multiplicativa de dois fatores. A segunda questão é voltada para complementar a primeira, uma vez que, mesmo a questão pedindo “figuras retangulares (plural)”, os estudantes podem acabar desenhando só

uma para cada letra. Assim, o objetivo é fazer com que eles pensem se aquele desenho feito é o único, ou seja, se não há outras possibilidades, pedindo ainda uma explicação dele para isso.

A questão 3 trabalha a ideia de reconhecimento dos fatores a partir de uma figura retangular. Eles irão representar a multiplicação correspondente (não o produto) à área de cada figura, que pode ser feito a partir da contagem das colunas e das linhas (fileiras). Observe que, na figura B, há um desafio, pois a segunda coluna está incompleta, ou seja, a representação desse fator é um número que não pertence aos naturais nem aos inteiros. Assim, os discentes terão que pensar em qual número seria esse, sendo que a segunda coluna está pintada só na metade (trabalhando com a representação de um número racional). É preciso destacar que não há um foco na abordagem dos números racionais, por este trabalho focar nos números inteiros, porém a questão foi proposta como um desafio para os estudantes. Desse modo, essa ficha teve que ser objetiva e “tranquila”, para que eles não ficassem estagnados no processo de resolução.

Por fim, a última questão é outro problema das Estruturas Multiplicativas (configuração retangular), em que os estudantes iriam também representar de forma simbólica cada quadrado como se fosse uma carteira do problema. Dessa maneira, foi finalizada a sequência aplicada com os estudantes.

6 RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados da aplicação das 4 fichas em duas turmas de 7º ano (7º ano A e 7º ano B). Serão apresentados alguns registros destaques de respostas dos estudantes (chamados de “protocolo E1”). O código “E1” representa o seguinte: “estudante 1”. Essa classificação se dá pela ordem da análise das respostas de cada estudante conforme a ordem de entrega de cada um após finalizada a aplicação em um certo dia. Como as Fichas foram aplicadas em dias diferentes, a quantidade de discentes presentes por dia não foi constante. Ainda, o código E1, caso apareça mais de uma vez em fichas diferentes, não necessariamente será o mesmo estudante (em geral, não é o mesmo sujeito).

Além desses registros, haverá análises qualitativa e quantitativa que serão apresentadas por meio de tabelas, gráficos e explicações. Este capítulo será dividido igualmente como o capítulo anterior. Porém, antes de expor esses resultados, é preciso destacar algumas observações sobre as duas turmas em questão (que serão motivos de os dados terem sido analisados separadamente):

- A turma do 7º ano A é uma turma em que os estudantes, em sua maioria, obedecem à faixa etária ideal da turma, além de que há pouquíssimos repetentes. Em geral, é uma turma que, no decorrer do ano de 2023, é tranquila de se trabalhar, e os estudantes são bem participativos. Há um número bem pequeno de discentes que não contribuem com as aulas ou que, geralmente, não participam das atividades.
- A turma do 7º ano B é uma turma em que os estudantes, em sua maioria, não obedecem à faixa etária ideal da turma, além de que há um número significativo de repetentes. Em geral, é uma turma que, no decorrer do ano de 2023, apresentou mais dificuldades de se conseguir uma boa participação e contribuição para o progresso das aulas e dos assuntos. Há um número mediano de estudantes que mostram ter interesse e que são participativos, mas que, infelizmente, muitas vezes, são prejudicados pelo resto da turma.

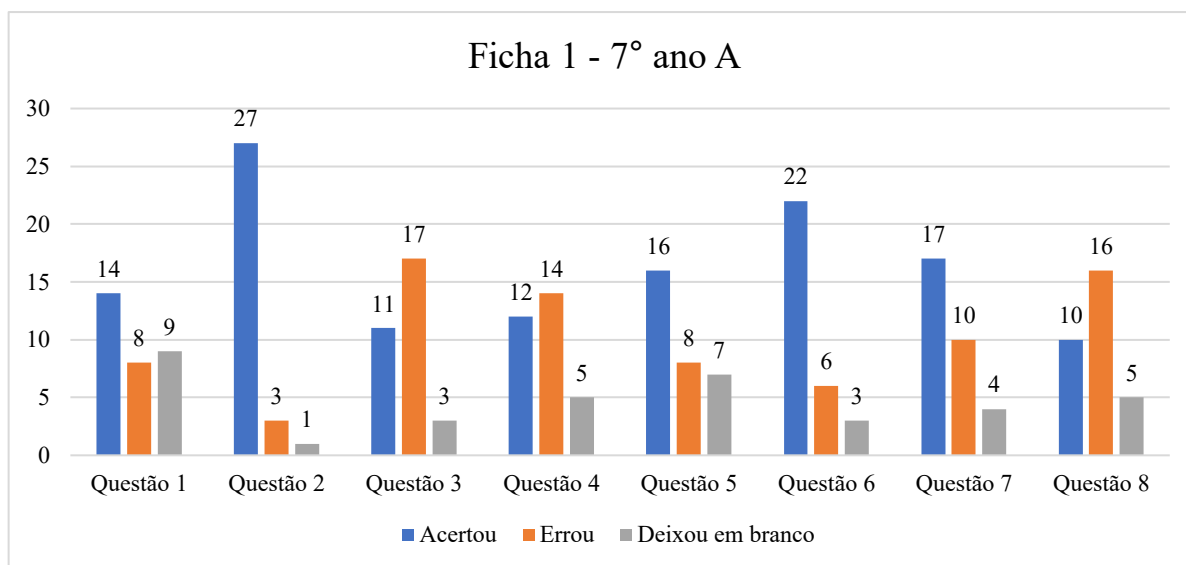
Em relação à escola, esta é, infelizmente, negligenciada pelo poder público com a baixa qualidade da infraestrutura (como poucas salas para um número grande de estudantes), de modo que as aulas, no decorrer de 2023, foram organizadas em rodízios, ou seja, em certos dias, algumas turmas ficavam “on-line” e outras “presencial”. Esse é um dos fatores que contribuiu para que a aplicação das fichas, junto à explanação dos recursos, ocorresse durante o mês de novembro inteiro, além de que é um dos fatores que desmotivaram os estudantes em relação aos estudos e a manter frequência nas aulas quando eram presenciais. E é, nesse cenário desafiador, que os resultados da aplicação da sequência didática proposta serão discutidos (com observação de que, diante desse trabalho extenso, não haverá muitos registros apresentados de uma única ficha).

6.1 FICHA 1

A aplicação da Ficha 1 ocorreu no dia 08/11/2023. A primeira turma foi a do 7º ano A; em seguida, foi a do 7º ano B. Foi destinada uma única aula para essa aplicação em cada turma e foi suficiente, cumprindo com o cronograma planejado inicialmente. Os estudantes foram separados em fileiras com distância considerável uma da outra. Durante a aplicação, pouquíssimas dúvidas foram tiradas, pois o intuito era deixar com que cada um fizesse por conta própria. A Ficha 1 não continha em seu título o assunto dos problemas propostos, já que seria necessário ver como que eles iriam resolver as situações e quais operações aplicar.

Ao analisar as respostas dos estudantes, foi pensado em três categorias: acertou / errou / deixou em branco. Segue abaixo o primeiro gráfico que ilustra essa primeira análise do trabalho.

Gráfico 1 - Análise quantitativa das respostas do 7ºA na Ficha 1

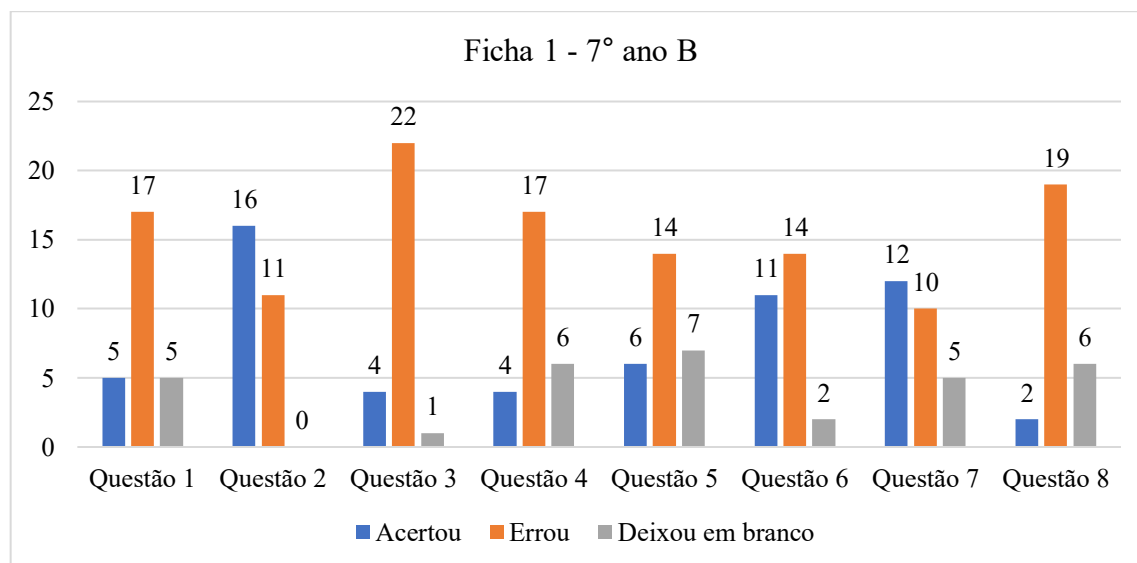


Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse dia, houve um total de 31 estudantes presentes. Perceba que, no geral, o desempenho deles foi razoável e que, nas questões 1, 2, 5, 6 e 7, houve mais acertos do que erros, e a questão 2 (problema de configuração retangular para efetuar 5×9) teve um número bastante significativo em relação aos acertos, já que houve somente 3 estudantes que erraram e um que deixou em branco. Já as questões 3 (comparação multiplicativa – relação desconhecida) e 8 (combinatória com um dos fatores desconhecidos) foram as duas que mais houve erros. Algo em comum em ambas é que a operação ideal é a divisão. A questão 4 também foi de combinatória, mas a estratégia por trás era efetuar a multiplicação. Os dois problemas que envolvem combinatória compõem as três questões em que os erros se sobressaem aos acertos, o que pode mostrar que os discentes não tiveram muito contato com problemas voltados para essa categoria nos anos anteriores (como sugeria os PCN e o Currículo de Pernambuco).

Em relação ao 7º ano B, segue o gráfico abaixo:

Gráfico 2 - Análise quantitativa das respostas do 7ºB na Ficha 1



Fonte: Dados da pesquisa.

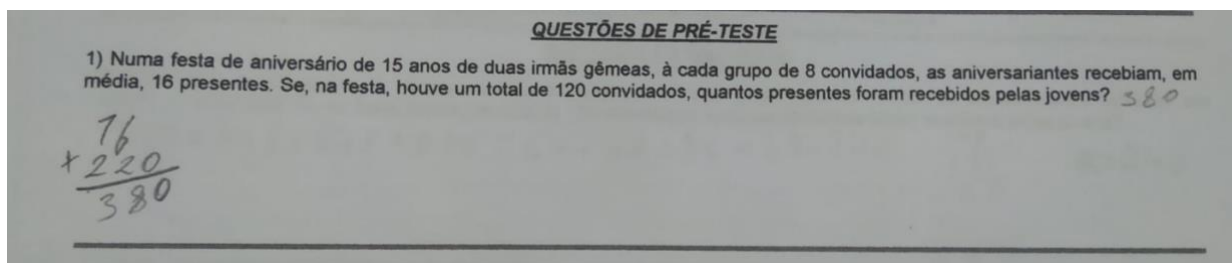
Já no 7º ano B (com 27 estudantes presentes no dia), veja que o que mais prevalece é um quadro no qual há mais erros do que acertos, revelando um desempenho não muito favorável. As únicas questões em que os acertos se sobressaíram aos erros foram as questões 2 e 7. Um ponto facilitador desse problema foi o contexto, em que a questão 2 se tratava de uma sala de aula com um total de carteiras distribuídas em colunas e fileiras, ou seja, os estudantes podiam tentar entender esse problema olhando ao redor (e isso foi perceptível quando se via os discentes contando as carteiras que tinham na sala e em como elas estavam organizadas na mesma forma que o problema propusera); e a segunda pedia para calcular o valor de um produto sabendo que ele custava 4 vezes mais que o produto de R\$15. As questões 3 e 8 foram as que mais tiveram maior índice de erros.

Comparando ambas as turmas, observe como que as características descritas em relação a cada uma são fatores que, infelizmente, dificultam o processo de ensino-aprendizagem. A partir de uma visão geral das respostas dos estudantes, o que mais foi perceptível foi como muitos não conseguiam entender a operação ideal (ou o procedimento de operações) do problema e como não conseguiam efetuar o cálculo propriamente dito corretamente, independente da estratégia escolhida.

Na questão 1, por exemplo, a depender de como o estudante interpreta o problema, utilizaria só multiplicação (120×2) ou dividiria 120 por 8 (encontrando o número de grupos de 8 pessoas presentes na festa) e, em seguida, multiplicaria por 16 (que é o total de presentes correspondente à cada grupo de 8 pessoas). Muitos discentes não conseguiram entender a

operação por trás da questão, efetuando adição, subtração, divisão e multiplicação aleatória dos números presentes no problema. Veja um exemplo desse registro abaixo:

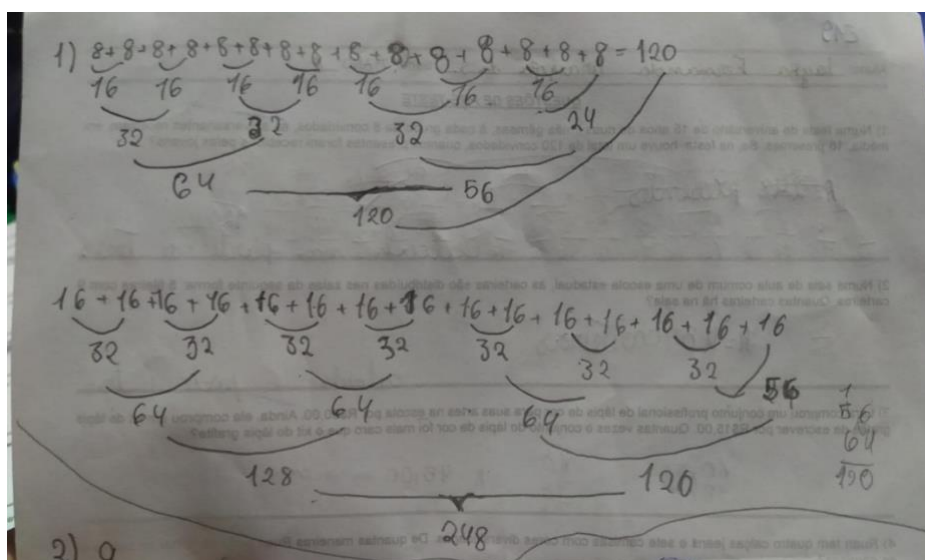
Figura 50 - Protocolo E52 (Questão 1, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que o E52 realiza a operação da adição, além de mostrar que não sabe realizar essa operação corretamente, desconhecendo o próprio Sistema de Numeração Decimal. Ainda, o número 220 está equivocado. Houve outros registros de o estudante ter realizado multiplicação entre todos os valores da questão, incluindo o “15 anos”. Ademais, outros apresentaram dificuldades durante o processo do cálculo numérico, como mostra a Figura 51.

Figura 51 - Protocolo E19 (Questão 1, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

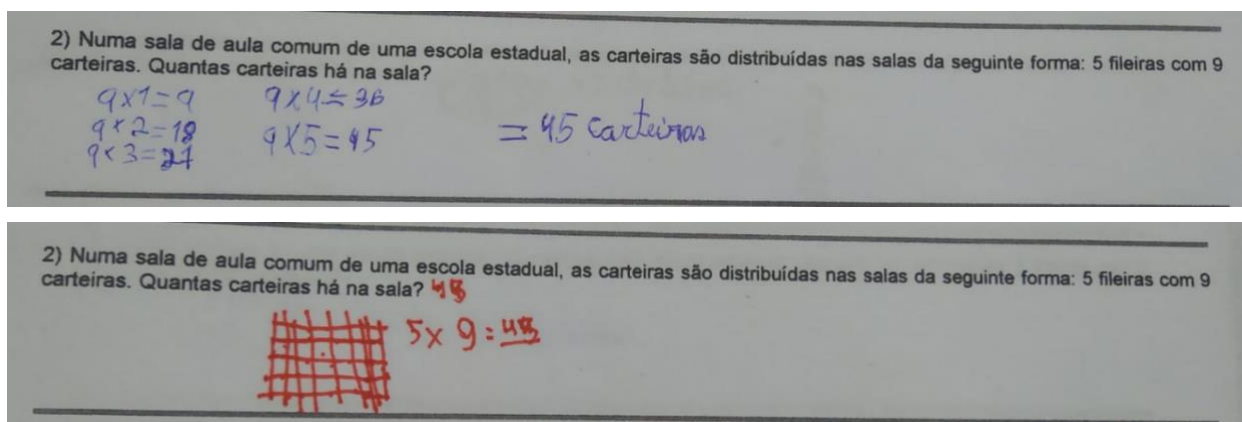
Na primeira parte, o E19 realiza agrupamentos de 8 até chegar em 20, utilizando a ideia de adição sucessiva de parcelas iguais. Assim, ele encontra 15 agrupamentos e, em seguida, multiplica 16 por 15, mas, em uma das parcelas, acaba adicionando um 8 a mais

quando efetua $32 + 16 = 56$. Observe que podem ser dificuldades relacionadas à falta de atenção ou ao ato de operar mesmo. Dentre outros procedimentos encontrados nessa primeira situação, destacam-se: a de operação ideal aplicada diretamente (ou seja, utilizar a representação usual da multiplicação ou da divisão) ou quando houve o registro apenas do resultado.

No registro apenas do resultado (o que pode ser devido ao cálculo mental ou até à prática do chute não necessariamente certo), um que merece destaque é a resposta do E15: “não fiz o cálculo, pois é só dobrar o valor de 120, o que, no caso, é 240”, mostrando que conseguiu resolver a situação a partir do raciocínio lógico, sem necessidade do cálculo no papel.

Indo para a questão 2 (problema em que pedia o total de carteiras numa sala que era organizada em 5 fileiras com 9 carteiras em cada), a que mais teve índice de acertos em ambas as turmas, maior parte dos estudantes utilizaram a representação usual da multiplicação, enquanto outros recorreram a outros tipos de estratégias, como de desenhos, algoritmos e tabuada. Segue abaixo a Figuras 52 com os dois registros, que ilustram dois casos (uso da tabuada e do método maia, respectivamente) desses outros tipos de estratégias.

Figura 52 - Protocolo E9 e E14 (Questão 2, Ficha 1)



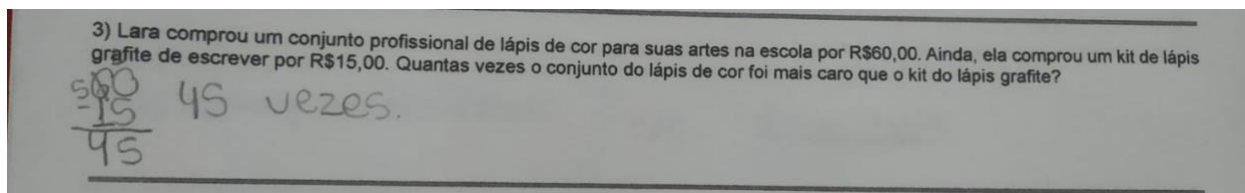
Fonte: Dados da pesquisa.

O uso do método chinês foi uma surpresa, pois já mostra que o estudante conhece outro método fora o usual de multiplicação e que acha mais viável. Já o registro do uso da tabuada mostra uma limitação do estudante, em que, para resolver um cálculo, precisa “construir” a tabuada do início até encontrar o resultado ideal (o que pode ser evidência de uma simples memorização da tabuada).

Na questão 3 (problema de comparação multiplicativa com relação desconhecida, em que iria realizar a divisão entre 60 e 15 e ver quantas vezes o 15 “cabe” dentro do 60), houve registros de respostas que mostraram, sobretudo, a aplicação direta de uma operação não ideal,

entre as operações: adição e subtração. A exemplo, realizaram $60 - 15 = 45$ (pois entenderam que eram a diferença, isto é, um é 45 reais mais caro que o outro produto), como ilustra o Protocolo E5 abaixo:

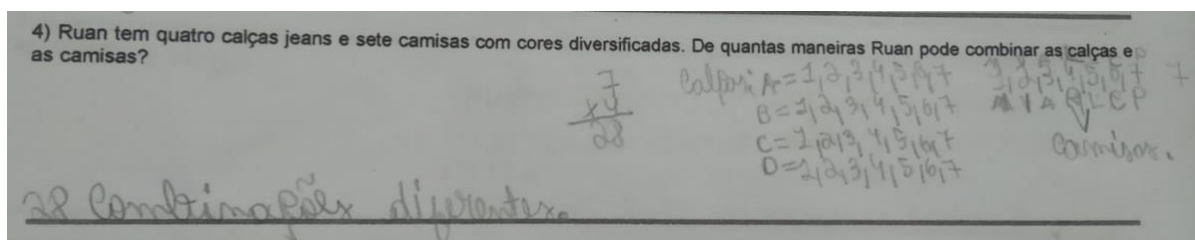
Figura 53 - Protocolo E5 (Questão 3, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

Em alguns poucos casos, houve a aplicação da operação da divisão ou da adição sucessiva de parcelas iguais: $15 + 15 + 15 + 15$ (precisa de quatro parcelas de 15 para se chegar em 60). Na questão 4 (problema de combinatória que pede para encontrar o total de combinações a partir de 4 calças e 7 camisas), houve vários tipos de procedimentos, desde a aplicação correta da operação ideal (multiplicação) ou não ideal (como a adição de 7 com 4) até o uso de desenhos para representar os objetos da situação e tentar entender a operação por trás. O uso dessa estratégia pode se dá exatamente pela ideia de “combinação” ser nova e ainda não bem definida para eles. Assim, a partir de um tipo de representação, o estudante pode visualizar o problema com outro olhar, e isso ficou claro no registro da resposta do E4, como mostra a Figura 54.

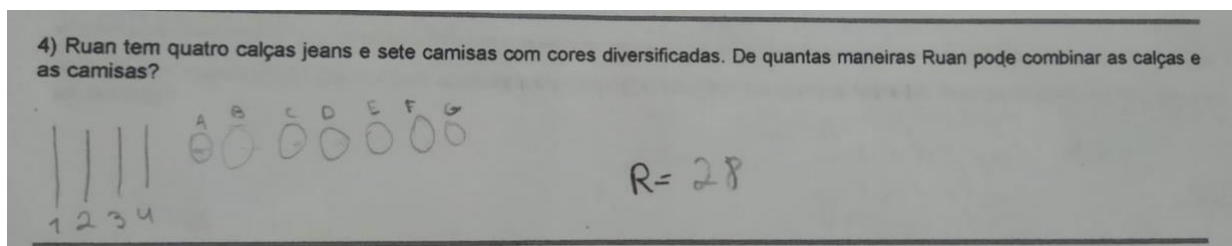
Figura 54 - Protocolo E4 (Questão 4, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que o E4 deu nomenclaturas para os objetos: calças = {A, B, C, D} e camisas = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. A partir disso, para cada calça, ele colocou todas as possibilidades de camisas. Com isso, percebeu que o que iria ocorrer era que, para cada calça, iria ter 7 opções e, no final, iria efetuar a multiplicação entre 7 e 4 e que ele já sabia o resultado, colocando ao lado a representação usual da multiplicação na vertical. Outra representação destaque foi:

Figura 55 - Protocolo E8 (Questão 4, Ficha 1)

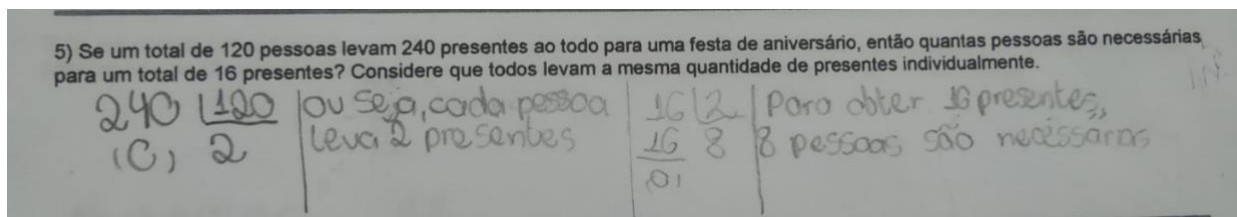


Fonte: Dados da pesquisa.

Veja que agora o E8 representou as calças por quatro traços e as camisas por 7 bolas, o que pode ter ajudado o estudante a refletir e concluir que seria 28 a resposta. Embora esses dois exemplos gratificantes, um número significativo de discentes efetuou a adição entre 7 e 4 ou trouxe opinião registrada textualmente, como foi o caso do E15: “quatro calças jeans com quatro camisas, ainda sobra 3 camisas, mas não dá mais para combinar, pois só tem 4 calças e não 7”, mostrando uma limitação ao grupo com menor elementos, em que se não há mais calças, o sujeito não pode usar as outras camisas. Esse pensamento foi registrado por outros estudantes também.

Indo para a questão 5 (problema 1 trocando a variável da situação, em que agora se pede o total de pessoas necessárias para 16 presentes), tem-se uma situação para aplicar a divisão (duas vezes) quando divide 240 por 120 e depois 16 por 2 (valor encontrado na primeira divisão). Outra forma de se pensar nesse problema é que, se 120 pessoas levam 240 presentes, então cada pessoa leva dois presentes, então se procura encontrar o número que multiplicado por 2 resulta em 16. Perceba que, se o estudante já tiver resolvido a primeira questão e ver que são parecidas, entenderá que é 8 (número que estava explícito na primeira questão). Seguem abaixo dois registros de respostas:

Figura 56 - Protocolo E5 (Questão 5, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 57 - Protocolo E30 (Questão 5, Ficha 1)

QUESTÃO 5

Left column (groups of 2):

$$\begin{array}{l} 6+2=8 \\ 8+2=10 \\ 10+2=12 \\ 12+2=14 \\ 14+2=16 \end{array}$$

Right column (groups of 1):

$$\begin{array}{l} 1+1=2 \\ 2+1=3 \\ 3+1=4 \\ 4+1=5 \\ 5+1=6 \\ 6+1=7 \\ 7+1=8 \\ 8+1=9 \\ 9+1=10 \\ 10+1=11 \\ 11+1=12 \\ 12+1=13 \\ 13+1=14 \\ 14+1=15 \\ 15+1=16 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 56, ocorre exatamente um dos procedimentos ideais, enquanto, na Figura 57, o E30 começou bem por meio da ideia de encontrar a quantidade de agrupamentos de 2 necessários para chegar até 16, porém refez novamente considerando agrupamentos de 1 (como se fosse 1 presente por cada pessoa), resultando na resposta equivocada 16. Da mesma forma que a questão 1, também houve um número significativo de discentes que não souberem aplicar a operação ideal.

Na questão 6 (problema 2 trocando a variável da situação, em que se pede o número de carteiras em cada uma das 5 fileiras de modo que se tenham 45 no total), o estudante iria realizar a divisão entre 45 por 9. Houve registros de estratégias, como a da tabuada e de desenhos, além da efetuação do cálculo a partir da operação ideal (divisão) e não ideal (adição, subtração e multiplicação). Ainda, para quem prestou atenção no problema dois, saberia a resposta dessa questão tranquilamente, colocando só o valor (ou, em outros casos, realizou “chute”). Para exemplificar esse caso em que o estudante conseguiu relacionar a questão 6 com a questão 2, segue a Figura 58.

Figura 58 - Protocolo E19 (Questão 6, Ficha 1)

5) Se um total de 120 pessoas levam 240 presentes ao todo para uma festa de aniversário, então quantas pessoas são necessárias para um total de 16 presentes? Considere que todos levam a mesma quantidade de presentes individualmente.

R: 8 pessoas, é inserir o cálculo da primeira questão.

6) Uma sala de aula, de uma escola municipal, tem 45 carteiras organizadas em 5 fileiras. Para que sejam todas distribuídas igualmente, cada fileira terá que conter quantas carteiras?

9 carteiras, só insere o cálculo da questão

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que, na Figura 58, há registro da questão 5 também, uma vez que o E19 conseguiu perceber a relação entre essas questões e conseguiu resolver tranquilamente sem precisar efetuar outro cálculo.

Partindo para a penúltima questão, a 7 (problema 3 trocando a variável da situação, em que se pede o referente, de modo a efetuar a multiplicação entre 15 e 4), o procedimento de se chegar à resposta parece ser mais claro aqui do que na questão 3, uma vez que é mais compreensível entender quando é para utilizar a multiplicação do que quando é divisão. Porém, houve um número significativo de estudantes que aplicaram a adição ou subtração, por exemplo, ou que não souberam desenvolver a multiplicação 15×4 . Para quem utilizou a definição pela adição sucessiva, foi mais tranquilo, pois o 4 indica menos agrupamentos para se fazer com o 15 (menos chances de se perder durante o processo de contagem). Segue um registro de um estudante que, em vez de multiplicar, somou os dois valores.

Figura 59 - Protocolo E34 (Questão 7, Ficha 1)

7) Maria Helena comprou um conjunto profissional de lápis de cor e um kit de lápis grafite numa loja de papelaria. O kit de lápis grafite custou R\$15,00. Sabe-se que o conjunto de lápis de cor custou 4 vezes mais que o kit. Logo, qual foi o valor desse conjunto profissional?

15,00
+ 4,00
~~19,00~~

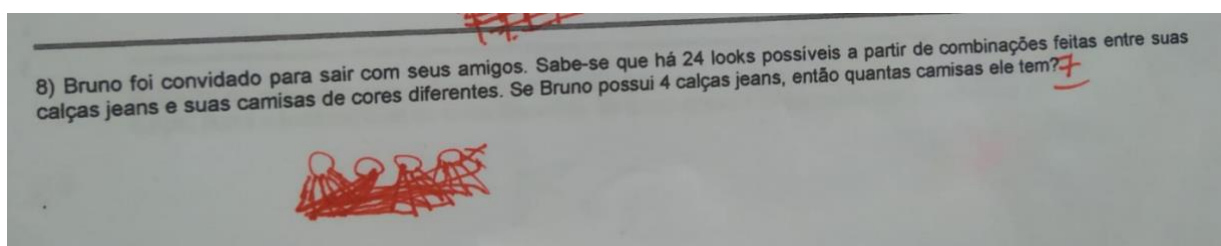
Fonte: Dados da pesquisa.

Chegando na última questão (em que se pede um dos fatores que multiplicado por 4 resultará em 24 combinações de roupa), a operação que se esperava do estudante era a divisão

de 24 por 4. Veja que, diferente dos demais, aqui há uma mudança de valor que não foi intencional (mas falta de atenção na elaboração do problema), pois deveria ser uma variação do problema 4. Porém, a questão 4 resulta em 28 combinações (4×7), enquanto aqui é 24 combinações. Esse detalhe pode testar a atenção do estudante, uma vez que ele precisa primeiro ter resolvido a questão 4 e ver que os números não “batem”. Sendo assim, mesmo sem ter sido intencional, a questão traz um novo desafio: a atenção do estudante com os dados fornecidos na questão. Em geral, foi um número pequeno de estudantes que acabaram sendo prejudicados por esse detalhe, enquanto outros conseguiram realizar bem o cálculo quando entendida a operação ideal ou outros que não entenderam a operação ideal, aplicando a subtração, adição e multiplicação de 24 com 4).

Ainda, como já ressaltado antes, houve estratégias voltadas para a representação do problema em si. A Figura 60 ilustra um registro em que o estudante utilizou para representar a situação de uma outra forma, mas que escolhe colocar como resposta o 7 da questão 4 (e nesta colocou a resposta 24, por causa dessa última).

Figura 60 - Protocolo E14 (Questão 8, Ficha 1)



Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que é uma estratégia de representação bem comum em problemas de combinação. Essa mesma representação foi utilizada na questão 4, mas que não prosseguiu em nenhuma das duas por, talvez, não dominar bem esse procedimento e achar bem cansativo contar todas as ligações até o final. No caso da questão 4, o E14 desenhou 4 bolas na parte superior e 7 na parte inferior e começou a fazer as ligações (não todas). Mesmo escolhendo seguir pela ideia equivocada de que um problema complementa o outro (devido ao fato que as outras seguiram esse padrão), o estudante já mostra um repertório de ideias básicas de combinação e de como montar possíveis representações.

Com base em todas essas análises de alguns erros, acertos, representações e dificuldades, seguem, então, duas tabelas que ilustram os procedimentos utilizados pelos discentes em cada questão de acordo com a turma.

Tabela 1 - Registro de procedimentos utilizados pelo 7º ano A na Ficha 1

Questões	O.D.I.	O.D.N.I.	Só resultado	A.S.P.I. ou S.S.P.I.	Representações Por símbolos	Resposta por texto	Algoritmos não usuais	Tabuada
1ª	9	2	7	4	0	0	0	0
2ª	16	0	4	5	1	0	1	2
3ª	3	12	6	5	0	0	0	0
4ª	6	2	10	0	4	2	0	0
5ª	9	4	5	4	0	2	0	0
6ª	10	3	7	3	1	2	1	1
7ª	7	3	9	6	0	0	2	0
8ª	7	7	6	2	2	0	0	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que, na Tabela 1, no 7º ano A, foram registrados procedimentos dos tipos: **O.D.I.** (Operação direta ideal); **O.D.N.I.** (Operação direta não ideal); **só resultado** (só registro do produto ou quociente); **A.S.P.I ou S.S.P.I** (adição sucessiva de parcelas iguais ou subtração sucessiva de parcelas iguais); **representações por símbolos** (uso de figuras ou algum desenho); **resposta por texto** (escrita explicando o resultado, sem nenhum cálculo); **algoritmos não usuais** (uso de métodos extras, como o chinês) e **tabuada**.

Tabela 2 - Registro de procedimentos utilizados pelo 7º ano B na Ficha 1

Questões	O.D.I.	O.D.N.I.	Só resultado	A.S.P.I. ou S.S.P.I.	Contagem 1 a 1	Resposta por texto
1ª	6	10	4	2	0	0
2ª	13	4	4	5	1	0
3ª	5	12	5	2	1	1
4ª	3	3	6	1	1	7
5ª	6	11	3	0	0	0
6ª	7	4	8	3	0	3
7ª	7	5	6	4	0	0
8ª	3	5	11	0	0	2

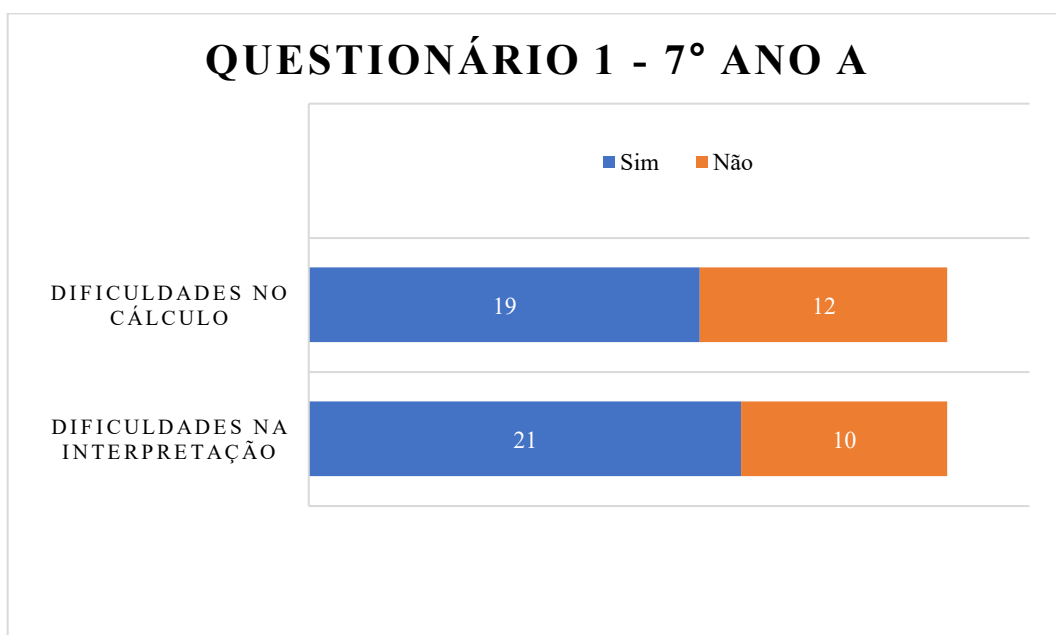
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 2, na turma do 7º ano B, foi registrado um tipo de procedimento que não estava presente na Tabela 1: **contagem 1 a 1** (uso de palitos); enquanto outros procedimentos – como tabuada, algoritmos não usuais e representações por símbolos – não tiveram registro.

É preciso frisar que o estudante ter aplicado a operação ideal em uma questão não implica que acertou, pois pode ter compreendido o problema, mas ter tido dificuldades na efetuação do cálculo. Isso ocorre em todos os outros tipos de procedimentos também. No caso do procedimento de adição sucessiva, veja que o E19 (Figura 51) aplicou direitinho a definição da multiplicação por adição sucessiva, mas que, no final, apresentou dificuldade na adição entre 32 e 16, colocando 56. Ainda, nas respostas em que só tiveram registro do resultado, este não exatamente foi sempre o resultado ideal, ou seja, houve registros de respostas que aparentaram ter sido “chute”.

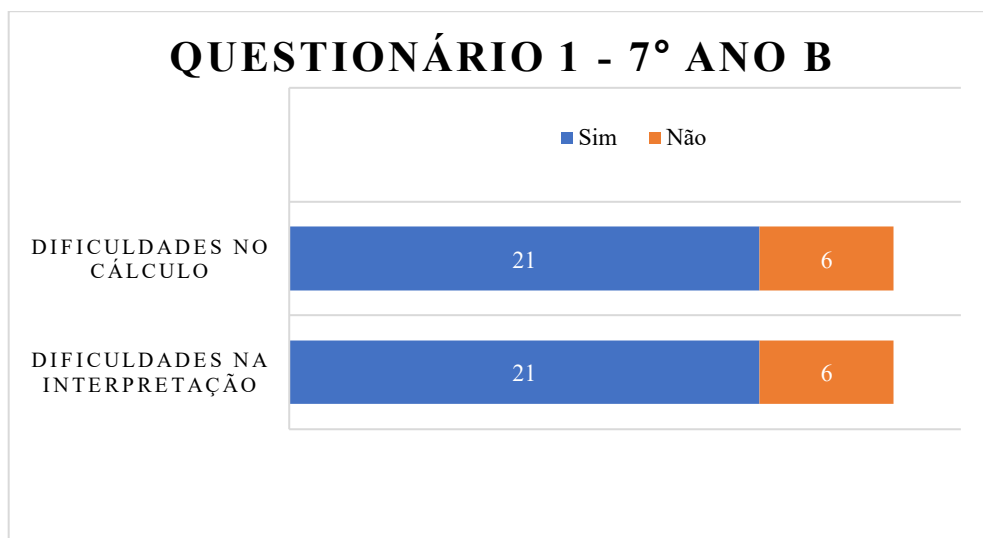
Partindo para os resultados do Questionário 1 entregue aos estudantes após a finalização da Ficha 1, em relação às duas primeiras perguntas, têm-se os seguintes gráficos ilustrativos.

Gráfico 3 - Respostas dos estudantes do 7º ano A em relação aos tipos de dificuldades nos problemas da Ficha 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 4 - Respostas dos estudantes do 7º ano B em relação aos tipos de dificuldades nos problemas da Ficha 1

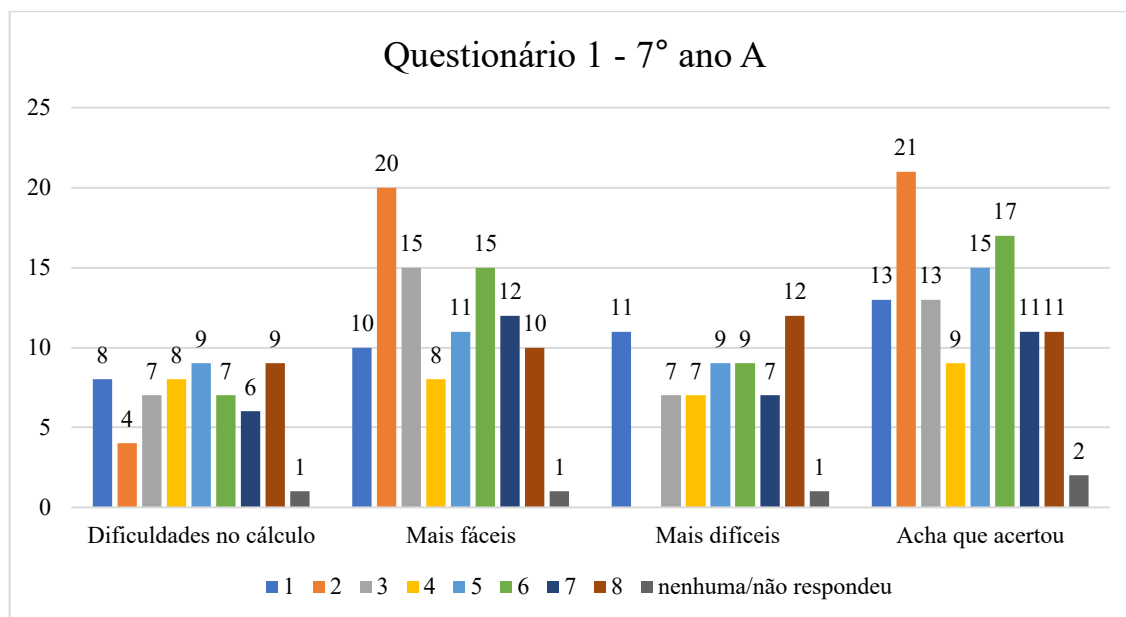


Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que as dificuldades em relação à interpretação e ao cálculo propriamente dito são exatamente o que Vergnaud, em sua teoria, já afirmava sobre *cálculo relacional* (entender as relações presentes no problema e compreender a operação ideal para ser aplicada) e *cálculo numérico* (dificuldades na maneira de efetuar o cálculo), respectivamente. Em ambas as turmas, há um número bem significativo de estudantes que possuem estas duas dificuldades (seja só uma delas ou ambas ao mesmo tempo).

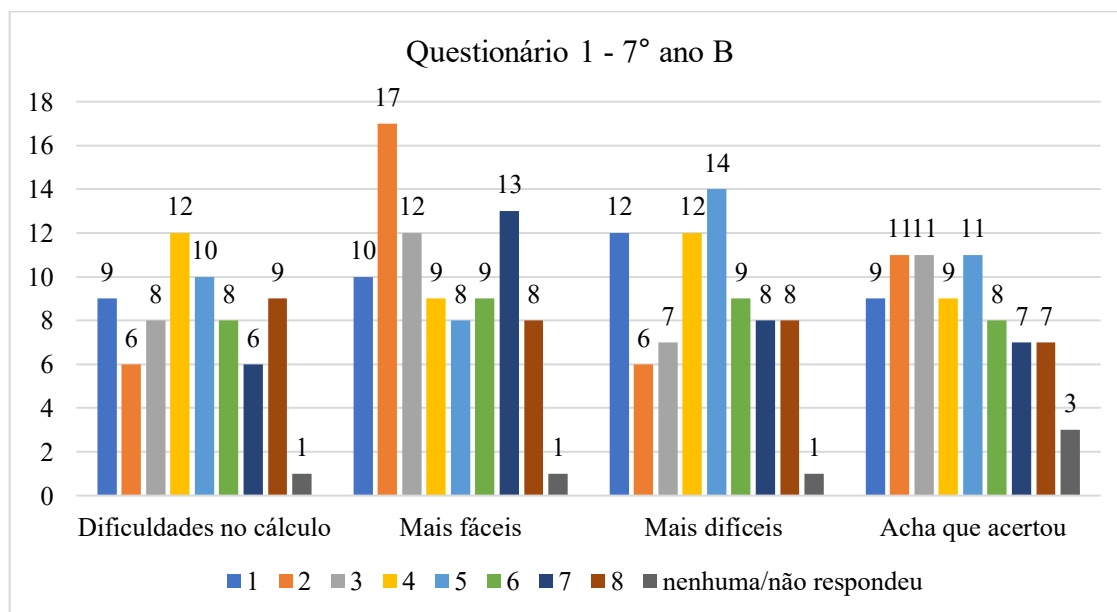
Dando continuidade, houve outras perguntas que estavam voltadas a identificar as questões que os discentes acharam mais complicadas de realizar o cálculo, mais fáceis, mais difíceis e quais eles acham que iriam acertar. Para ilustrar esses dados, seguem os Gráficos 5 e 6 abaixo.

Gráfico 5 - Opinião dos estudantes do 7º ano A quanto ao seu desempenho na Ficha 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 6 - Opinião dos estudantes do 7º ano B quanto ao seu desempenho na Ficha 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que, em ambas as turmas, a questão 2 (organização retangular) foi a que mais acharam fácil. No que tange à questão mais difícil, houve as seguintes: questão 7 (comparação multiplicativa) pelo 7º ano A; questão 5 (proporção dupla) pelo 7º ano B. Uma diferença entre as categorias “Dificuldades no cálculo” e “Mais difíceis” é que a primeira é voltada especificamente para o cálculo numérico, enquanto a segunda é uma característica geral do

problema (ou seja, é difícil no cálculo e na interpretação ao mesmo tempo). Note que, no 7º ano A, embora a questão 7 foi considerada mais difícil pela maioria, os estudantes tiveram mais dificuldades no cálculo tanto da questão 7 quanto da questão 5 também. Já no 7º ano B, a questão 5 foi considerada mais difícil para a maioria, enquanto a questão 4 (combinatória) foi a que tiveram mais dificuldades no cálculo. Uma importante observação quanto a essa categoria de análise “Dificuldades no cálculo” é que quem só respondeu ela foi quem afirmou nos Gráficos 3 e 4 que tiveram dificuldades de realizar o cálculo.

Em relação ao que os discentes achavam sobre as questões que iriam acertar, têm-se as questões 2, 3 e 5 como as com mais frequência na turma do 7º ano B; enquanto, para o 7º ano A, foi exatamente a questão 2 seguida da questão 6, ambas sobre organização retangular. Por fim, para fechar essa análise, teve a pergunta sobre as relações entre as questões, isto é, se o estudante conseguiu perceber alguma semelhança.

Tabela 3 - Respostas dos estudantes sobre as relações entre as questões da Ficha 1

	7º ano A	7º ano B
Sim	22	11
Não	5	15
Deixou em branco	4	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que há uma grande discrepância entre as duas turmas, em que, no 7º ano A, mais estudantes (muito mais do que a metade) responderam afirmando que perceberam relações entre as questões, enquanto, no 7º ano B, foi bem menos que a metade que respondeu com “sim”. A pergunta não pedia exatamente quais as questões que eles perceberam essas relações, mas maioria, ao menos da turma A, respondeu identificando algumas relações, como o E4: “*sim, a 5ª, 6ª e 7ª são basicamente as ‘respostas’ da 1ª, 2ª e 3ª*”; o E8: “*sim. A partir da 5ª, elas tinham uma relação*”; e o E6: “*certas questões exigem o cálculo oposto das outras e existem questões parecidas com outras*”.

Ainda, o E57 trouxe a seguinte observação: “*a resposta da 2 tá na 6, a da 3 na 7, e todos usam o mesmo tipo de cálculo para responder. Na 8 só muda um número com a 4*”. Veja que a última frase revela que o estudante soube identificar que havia uma diferença entre a questão 8 e a 4 (que já foi relatada anteriormente). Assim, finaliza-se essa primeira etapa dos resultados.

6.2 FICHA 2

A aplicação da Ficha 2 ocorreu em dois dias. No dia 09/11/2023, a aplicação foi com a turma do 7º ano B; no dia 10/11/2023, foi com a turma A. Em ambas, foram necessárias duas aulas (como previsto no cronograma). A primeira aula foi composta pela explicação do recurso da Tábua de Pitágoras, explanando sobre a localização dos produtos dentro da tabela e como o par ordenado (a, b) representa a multiplicação $a \times b$. Como os estudantes já tinham contato com esse recurso no início do ano letivo, manteve-se a representação do par ordenado por Matrizes (embora não conceituando esse conteúdo mais avançado), ou seja, um par ordenado (a, b) em que o primeiro representa a linha, e o segundo, a coluna. Assim, diante do par ordenado $(2, 3)$, os estudantes iriam localizar o quadrado cuja interseção se dá pelo encontro da linha 2 com a coluna 3. Por fim, foi apresentado para eles as representações: $(a, b) = a \times b = c$. Todas essas informações ficaram no quadro branco de aula.

Em seguida, cada estudante recebeu uma tabela vazia para ser preenchida com base na dinâmica de “Ditados de pares ordenados”, em que seriam ditados 20 pares, e os estudantes iriam localizar aquele par dentro da tabela e colocar o resultado correspondente ao que simbolizava o par (no caso, a multiplicação). Em relação à turma do 7º ano B (25 estudantes presentes), os pares ordenados ditados foram escolhidos aleatoriamente durante a dinâmica, e o intuito era ver se os estudantes tinham conseguido entender a localização dos pares dentro da tabela e como se dava a representação simbólica proposta, de modo que, quando chegassem na 2ª fase (aplicação da Ficha 2), eles pudessem realizar sem tantas dificuldades. Os pares ordenados ditados para a turma B foram os seguintes:

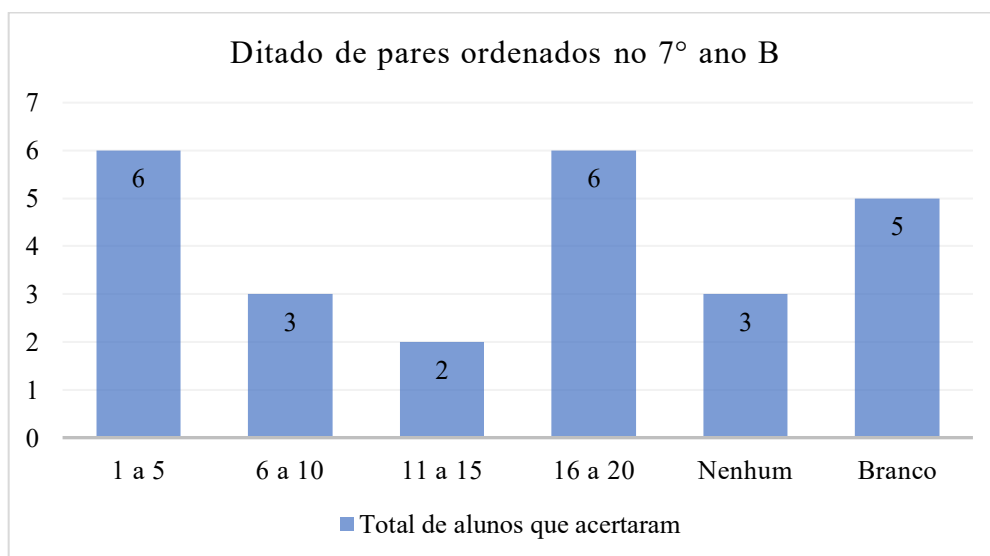
$(3, 5)$	$(4, 3)$	$(8, 2)$	$(9, 4)$	$(1, 8)$
$(5, 7)$	$(6, 5)$	$(4, 9)$	$(8, 3)$	$(9, 7)$
$(2, 8)$	$(3, 9)$	$(5, 8)$	$(2, 9)$	$(4, 4)$
$(3, 7)$	$(7, 7)$	$(9, 10)$	$(8, 8)$	$(5, 2)$

Já na turma do 7º ano A (19 estudantes presentes), os pares ordenados ditados foram:

$(5, 3)$	$(8, 9)$	$(7, 2)$	$(9, 3)$	$(6, 8)$
$(3, 9)$	$(2, 4)$	$(10, 5)$	$(7, 5)$	$(9, 9)$
$(8, 4)$	$(5, 5)$	$(8, 6)$	$(3, 4)$	$(6, 6)$
$(9, 5)$	$(8, 1)$	$(2, 7)$	$(8, 10)$	$(5, 8)$

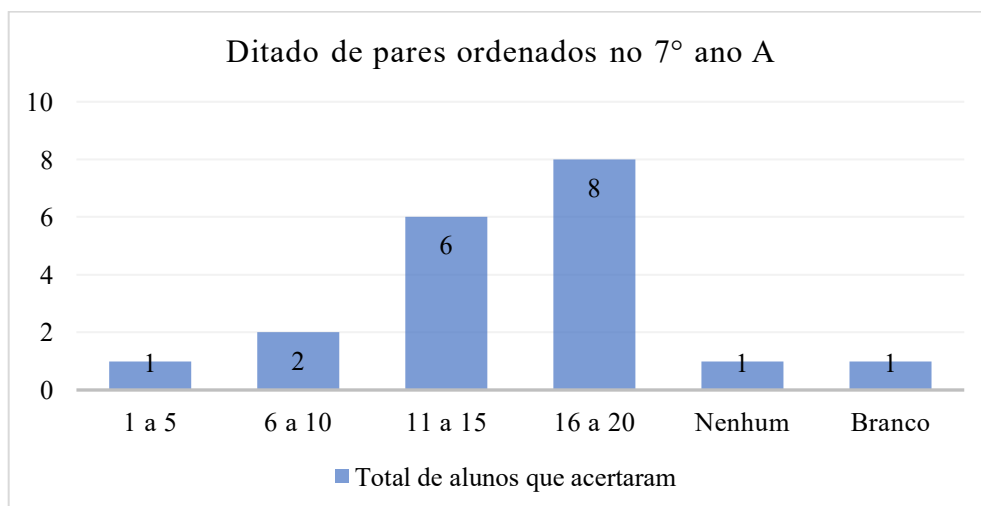
Seguem abaixo os Gráficos 7 e 8 que apresentam o número de acertos no que tange ao preenchimento da tabela pitagórica a partir do ditado de 20 pares ordenados de cada turma. Os dados foram analisados por acertos de: 1 a 5; 6 a 10; 11 a 15; 16 a 20; nenhum e deixou em branco.

Gráfico 7 - Resultado quantitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano B



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 8 - Resultado quantitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano A



Fonte: Dados da pesquisa.

Veja que os resultados, na turma B, foram medianos, mas que, em geral, se analisar quem fez acertos entre 1 e 10 e nenhum, a quantidade se sobressai quanto aos que acertaram

entre 11 e 20. Já na turma A, dos 19 estudantes, 14 acertaram entre 11 e 20, mostrando um resultado, em geral, mais razoável. Embora estivesse bem explicada no quadro a atividade, uns dos fatores que contribuíram para alguns resultados não almejados foram: falta de atenção, atraso para chegar na sala e ausência de material escolar (lápis e caneta, por exemplo). Houve uns estudantes que chegaram atrasados na sala (após o início da dinâmica), perdendo a explicação principal do recurso, além de outros que, ao escutarem os ditados, não faziam seus registros, pois não possuíam material para escrever, e somente após alguns minutos que, quando percebido isso, os aplicadores tentaram arranjar algum material extra para os ajudar.

Ainda, foi perceptível que alguns discentes sabiam localizar os pares ordenados e outros não, como também alguns que sabiam localizar, mas não sabiam o resultado condizente, de modo que foi recomendado que fizessem pelo menos as marcações nos quadrados que correspondiam à localização dos pares, para entender que sabiam localizar, mas não o resultado. Um exemplo disso foi o registro do E26, que deixou umas células sem serem preenchidas, mas que ficaram marcadas por um ponto.

Figura 61 - Protocolo E26 (Ditado de pares ordenados)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2				8			14			
3				12					27	
4										
5			15		25			40		
6						36				
7		14			35					
8	8			32					80	80
9			27		45					
10					50					

Fonte: Dados da pesquisa.

O E26 respondeu parcialmente, deixando três pares sem serem respondidos, mas bem localizados: (8, 6); (6, 8) e (9, 9). Veja que é lógico os pares (8, 6) e (6, 8) não terem sido preenchidos, já que são o mesmo produto, o que mostra que o estudante tinha dificuldade em encontrar esse produto (ou seja, dificuldades ainda na tabuada). Alguns estudantes também tiveram dificuldades em localizar, deixando em branco alguns pares; outros localizaram os pares alterando a ordem proposta na atividade, ou seja, considerando o primeiro termo a coluna

e o segundo a linha (representação por Plano Cartesiano), utilizando a propriedade comutativa (mas que não era a proposta). Ainda, outros tiveram dificuldades na própria tabuada ao se depararem até com a multiplicação entre fatores menores, como $(3, 5) = 3 \times 5 = 15$, colocando 30 como resposta (registro do E6, por exemplo). Um registro que foi além dos possíveis erros que poderiam ser esperados foi o do E10.

Figura 62 - Protocolo E10 (Ditado de pares ordenados)

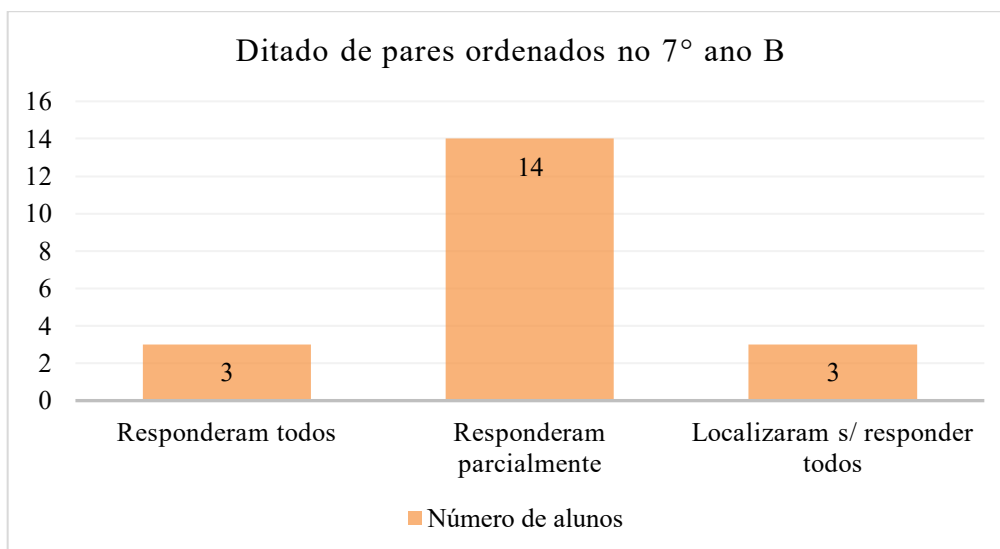
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	4								
3	3	6	9							
4	4	8	12	16						
5	5	10	15	20	25					
6	6	12	18	24	30	36				
7	7	14	21	28	35	42	49			
8	8	16	24	32	40	48	56	64		
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Dados da pesquisa.

Para ele, o par ordenado (a, b) representa o número formado pelos algarismos “a” e “b”, isto é, “ab”. Em contrapartida, houve outros estudantes que nem esperaram o início da dinâmica e começaram a preencher toda a tabela (mostrando entusiasmo com a atividade) e acertando todos os pares ordenados (revelando domínio da tabuada).

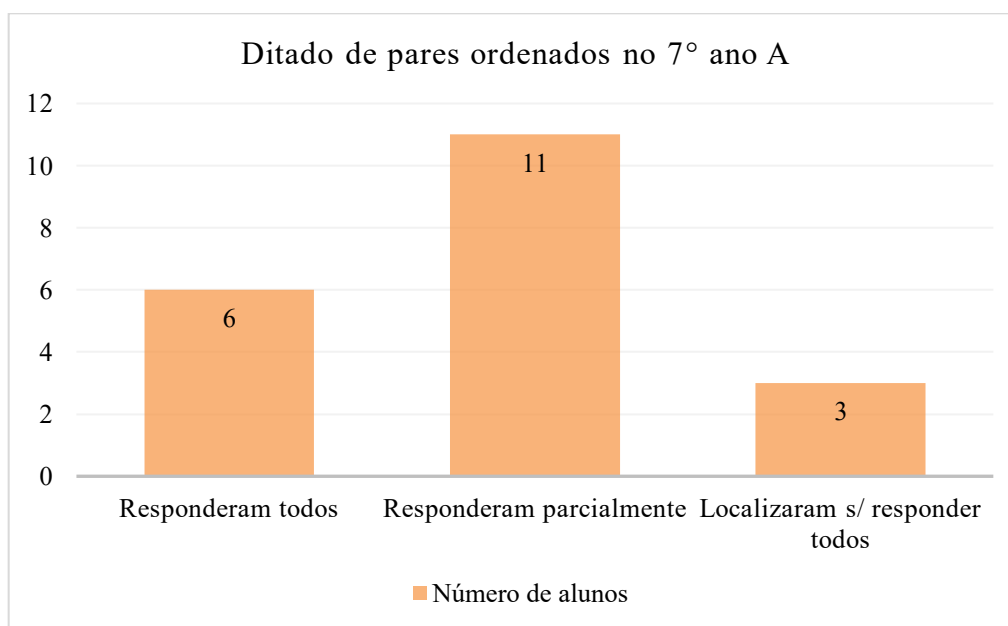
No que concerne à forma como ocorreram os registros, seguem mais outros dois gráficos que apresentam as seguintes categorias: Responderam todos / Responderam parcialmente / Localizaram sem responder todos. A segunda categoria diz a respeito de quem respondeu deixando alguns em branco, enquanto a terceira é sobre quem respondeu alguns, mas localizou os outros deixando alguma marcação.

Gráfico 9 - Resultado qualitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano B



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 10 - Resultado qualitativo do ditado de pares ordenados no 7º ano A



Fonte: Dados da pesquisa.

Uma observação sobre a turma A é que dois estudantes responderam parcialmente, deixando uns em branco e outros localizados. Assim, entre as duas últimas colunas, há uma interseção, ou seja, há 2 em comum. Perceba que, se retirar esses dois de um, teria $6 + 11 + 1 = 18$ (número dos estudantes do 7º A que responderam, sem contar o que deixou em branco).

Partindo para a segunda aula (a aplicação da Ficha 2), com a distribuição de uma tabela toda preenchida, as respostas dos discentes foram analisadas por questões. Começando pela

questão 1, esta pedia para os estudantes localizarem os pares ordenados na tabela, colocando o produto correspondente à cada par e a representação do par pela multiplicação, isto é: $(2, 3) = 2 \times 3 = 6$. O primeiro lado da igualdade é a representação por par ordenado, seguindo a ideia de Matrizes; a parte do meio é a representação pela operação da multiplicação e, por fim, a última parte é o produto correspondente. Deixando claro que, antes de entregar a ficha, foi revisado pela segunda vez as representações acima. Para essa primeira questão, os resultados foram analisados com base na resposta em que o aluno, pelo menos, soube representar o produto correspondido ou a operação multiplicativa. Segue abaixo uma tabela que apresenta as categorias analisadas a partir das respostas registradas.

Tabela 4 - Análise quantitativa e qualitativa das respostas da questão 1 da Ficha 2

	7º ano A	7º ano B
Acertou com todas as representações	3	12
Acertou com uma das representações	12	8
Acertou parcialmente com todas as representações (6 a 9)	0	2
Acertou parcialmente com uma das representações (6 a 9)	3	0
Acertou parcialmente com todas as representações (1 a 5)	0	0
Acertou parcialmente com uma das representações (1 a 5)	0	2
Errou todas	0	0
Deixou em branco	1	1

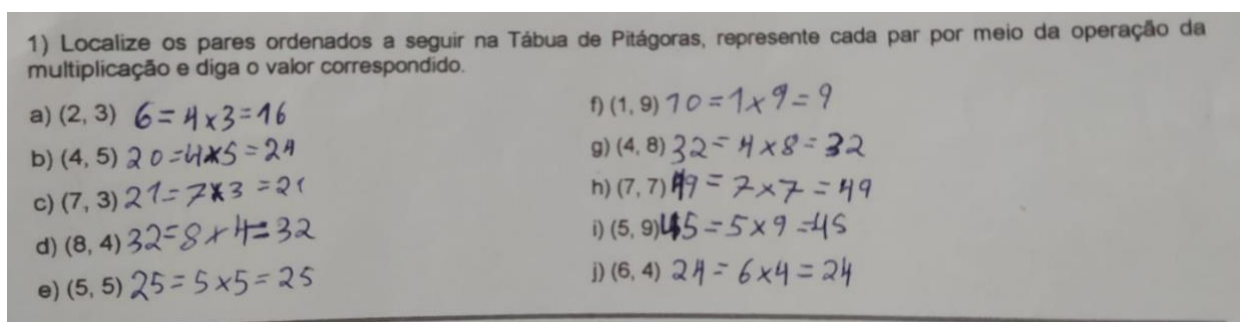
Fonte: Dados da pesquisa.

Explicando algumas categorias, “**Acertou com todas as representações**” são aqueles que acertou todas as letras, utilizando as duas representações para um par ordenado $(2, 3) = 2 \times 3 = 6$; “**Acertou com uma das representações**” são aqueles que acertou todas as letras, utilizando apenas uma das representações; “**Acertou parcialmente com todas representações (6 a 10)**” são aqueles que não acertaram todas as letras ou que deixaram algumas em branco

com o uso das duas representações, chegando a ter entre 6 e 9 acertos; **“Acertou parcialmente com uma das representações (6 a 10)”** são aqueles que, conforme a categoria anterior, usaram apenas um tipo de representação; **“Acertou parcialmente com todas representações (1 a 5)”** são aqueles que tiveram entre 1 a 5 acertos; **“Acertou parcialmente com uma das representações (1 a 5)”** são aqueles que tiveram entre 1 a 5 acertos com o uso de apenas uma representação. Observe que a turma B seguiu a proposta ideal da questão em uma quantidade bem superior que a Turma A, isto é, realizaram as duas representações.

Em relação aos registros, serão destacados dois que, em específico, mostraram algumas características intrigantes, como foi o caso do E24:

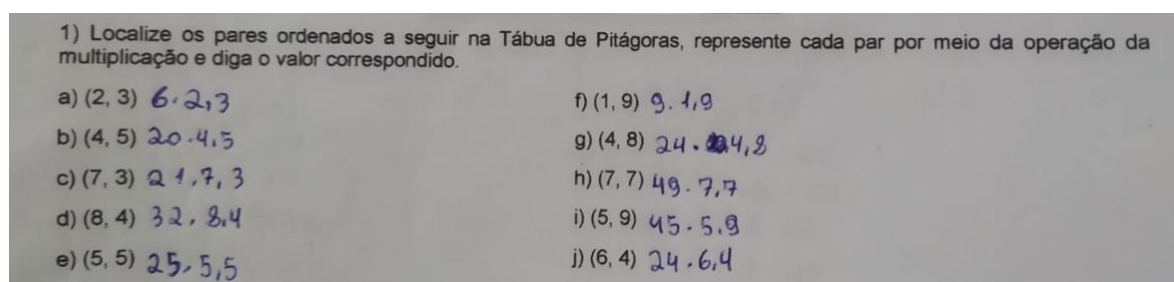
Figura 63 - Protocolo E24 (Questão 1, Ficha 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que, na letra a), o estudante traz o resultado 6, que corresponde ao par proposto, porém iguala à multiplicação 4×3 e ainda traz outra igualdade com o número 16. Embora os demais, em maioria, estão corretos, outro errinho é na letra f) que traz primeiro 10 e iguala à multiplicação 1×9 e depois ao 9. Nesta última, pelo fato de ter “ $1 \times 9 = 9$ ”, que era o que a questão pedia, a letra foi considerada certa, mas é preciso se atentar ao fato que o estudante pode apresentar alguma dificuldade na operação da multiplicação ou na operação que o par ordenado estava representando. Outro registro intrigante foi o do E19.

Figura 64 - Protocolo E19 (Questão 1, Ficha 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que o estudante acerta todas as letras, porém não representa na forma ideal. Veja que, seguindo o padrão efetuado, o estudante representa a igualdade por um ponto, e a multiplicação, por uma vírgula (que não são consideradas representações ideais, pois possuem outros significados na Matemática). Em geral, os discentes, em ambas as turmas, foram bem, acertando com uma ou duas representações maioria ou todas as letras.

As questões 2 e 3 foram analisadas em conjunto. As questões 2 e 3 possuem um foco parecido, uma vez que, respectivamente, pedem para o discente citar três exemplos (caso exista mais de um) de resultados que aparecem mais vezes e menos vezes. Foi elaborado, por parte do aplicador, para esta análise um conjunto solução para ambos os casos, isto é, todos os possíveis resultados. No que tange aos que aparecem menos vezes, foram considerados os que aparecem 1 ou 2 vezes; enquanto, para os que aparecem mais vezes, são os que aparecem 4 vezes (máximo possível). Seguem abaixo os dois conjuntos:

Figura 65 - Conjuntos soluções das questões 2 e 3 da Ficha 2

Conjunto dos produtos que aparecem mais vezes:	$S_+ = \{6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 40\}$
Conjunto dos produtos que aparecem menos vezes:	$S_- = \{1, 2, 3, 5, 7, 14, 15, 21, 25, 27, 28, 32, 35, 42, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 81, 90, 100\}$

Fonte: Autoria própria.

Alguns estudantes responderam tranquilamente, colocando três exemplos, outros colocaram até mais que três (acertando todos ou só alguns), e teve alguns estudantes que não compreenderam a questão e pensavam que as duas questões estavam relacionadas à questão 1, em que, dentre as letras, havia duas que davam o mesmo resultado: (8, 4) e (4, 8). Exemplo disso foi o registro das respostas do E.13: “(4,8) e (8,4) são diferentes, mas dá a mesma soma” (segunda questão) e “(2,3); (6,4) e (1,9) números aparecem poucos” (terceira questão). Perceba ainda que o estudante ressalta a operação da soma em relação aos pares ordenados destacados, não entendendo que a operação destacada na ficha é a multiplicação. Os exemplos que ele trouxe são das letras da questão 1 (e isso ocorreu com outros estudantes também).

Para registrar as respostas dos discentes, foram elaborados também conjuntos de respostas, destacando os números que apareceram equivocadamente. Segue abaixo.

Figura 66 - Conjunto das respostas das questões 2 e 3 da Ficha 2

	7º A	7º B
Conjunto das respostas dos produtos que aparecem mais vezes:	$R_+^A = \{4, 5, 6, 7, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40\}$	$R_+^B = \{1, 2, 5, 6, 10, 12, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 30, 40, 42\}$
Conjunto das respostas dos produtos que aparecem menos vezes:	$R_-^A = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 14, 18, 25, 42, 49, 64, 81, 100\}$	$R_-^B = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 18, 20, 23, 24, 25, 28, 35, 49, 56, 64, 80, 81, 90, 100\}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os números destacados na cor vermelha são respostas erradas que apareceram durante a análise. Alguns resultados também apareceram com grande frequência, por exemplo:

- Na 2ª questão, na turma do 7º ano A, os três valores com mais frequência foram: 30 (11 vezes), 20 (9 vezes) e 10 (8 vezes).
- Na 2ª questão, na turma do 7º ano B, os três valores com mais frequência foram: 12 (9 vezes), 20 (8 vezes) e 30 (6 vezes).
- Na 3ª questão, na turma do 7º ano A, os três valores com mais frequência foram: 1 (15 vezes), 2 (8 vezes) e 81 (6 vezes).
- Na 3ª questão, na turma do 7º ano B, os três valores com mais frequência foram: 1 (9 vezes), 100 (9 vezes) e 81 (5 vezes).

Isso pode mostrar quais os números que eles conseguem enxergar na tabela com mais facilidade no que tange aos que aparecem mais ou menos vezes ou, até mesmo, em relação aos números que possuem mais ou menos possibilidades de decomposições multiplicativas na tabela pitagórica.

Na questão 4, foi tratado sobre os números quadrados perfeitos, isto é, os números que são resultados da multiplicação de dois fatores iguais. Logo, o par ordenado que corresponde a esses números é do tipo: (n, n). A questão pede para citar três exemplos dos valores, e não dos pares. Todavia, durante a aplicação, percebeu-se que os estudantes tinham dificuldades em diferenciar número de algarismo, e isso foi perceptível nas respostas deles, abrindo margem

para outras interpretações, como achar que algarismo igual são os pares serem iguais. Além disso, houve estudantes que pensaram que algarismos iguais seriam os pares (1, 4) e (4, 1), por exemplo, pois os números são os mesmos, só muda a posição. Houve uma retomada equivocada à questão 1, trazendo 8x4 e 4x8 como resposta. Ainda, outra dúvida que apareceu durante a aplicação foi achar que “par ordenado” seria aqueles valores pares, como 2, 4, 12, 20...; ou ainda pares em que os algarismos seriam pares, como: (2, 4).

Embora a questão esclarecesse que eram os valores que seriam as respostas, muitos estudantes registraram os pares ordenados ou uma combinação dos dois tipos de representações, como foi o caso de E23: “(7, 7), (5, 5) e 64”. Independente da representação, percebeu-se que houve um entendimento do discente quanto à ideia de “números quadrados perfeitos” e ao fato de entender o que a questão propusera, embora não representasse conforme o comando proposto pela questão. Sendo assim, foi decidido considerar os dois tipos de representações, pois o foco deste trabalho não é focar no “acerto” ou “erro”, mas trazer um posicionamento que um docente tem que ter ao avaliar os seus estudantes, em que cada resposta deve ser levada em consideração à forma como que o sujeito expõe seus conhecimentos acerca do problema proposto.

Outro registro que revela a compreensão do discente quanto à questão pode ser exemplificado pela resposta do E31: “(5,5) e (7,7). Os resultados são ímpares”. Veja que aqui o E31 só trouxe dois pares, que pode ser indício de ter entendido que a questão pedia um par de respostas ou só por ter achado que só teriam esses dois pares. Observe ainda que ele trouxe uma explicação sobre os dois pares, mas que não é uma característica dos números quadrados perfeitos dentro da tabela. Sobre o registro das explicações, nem todos escreveram suas opiniões sobre esses números e o que eles conseguiam ver de regularidades neles na tabela. Porém, um registro, em específico, foi interessante ao abordar o fato de que alguns aparecem apenas uma única vez na tabela, que foi o de E.15: “100, 64 e 49. Eles são únicos na tabela”. Ele ainda pode ter percebido essa relação por causa da questão 3, já que o 100 apareceu também em seu registro de resposta.

Foram elaboradas duas tabelas para essa questão. Uma que será em conjunto com as próximas questões por compartilharem as mesmas categorias: Acerto / Acerto parcial / Errou todas / Deixou em branco. Em “acerto”, serão consideradas as duas representações “possíveis”. Em “acerto parcial”, serão consideradas as respostas que tiveram pelo menos um erro (sem errar todos) ou não que trouxeram três exemplos. A outra tabela irá contabilizar o número de estudantes que responderam só com pares ordenados, com os dois tipos de representação e só com os valores. A Tabela 5 ilustra essa análise.

Tabela 5 - Análise qualitativa das respostas da questão 4 da Ficha 2

	7º ano A	7º ano B
Respondeu só com valores	4	10
Respondeu só com pares	9	10
Respondeu com os dois tipos	6	4
Respostas com justificativas	5	5

Fonte: Dados da pesquisa.

Indo para a questão 5, foi abordado sobre os pares ordenados que possuem o mesmo resultado como produto. Ex.: (4, 1), (1, 4) e (2, 2) correspondem ao produto 4. Assim, a questão pede para os discentes citarem três exemplos de pares que possuem o mesmo valor. Foi considerado “Acerto” quem respondeu os três totalmente; “Acerto parcial” quem respondeu menos que três ou errou um ou dois; “Errou todas” e “Deixou em branco”. Caso o estudante compreendeu a questão errado, será verificado e registrado o conteúdo para contabilizar como erro ou como acerto parcial. Diferente da questão anterior, foi difícil aqui ver representações que não fossem por par ordenado, como a questão pedia, de modo que, quando apareceu, a resposta foi considerada como “parcial”.

Algumas dificuldades em relação a outros conceitos, como “algarismos” e “pares ordenados”, como já foi ressaltado antes, são visíveis com alguns registros, como o do *E4*: “(8,4) e (4, 8) / (5, 7) e (7, 5) / (4, 9) e (9, 4)”. Perceba que o estudante trouxe três pares de pares ordenados cujo resultado dá o mesmo, ou seja, mostrando que possui dificuldades quanto à diferença de “par de algo” e “par ordenado”. Outros estudantes registraram essa mesma linha de raciocínio também. Esse tipo de resposta foi considerado “Acerto parcial”, uma vez que não há um conjunto de três pares ordenados cujos produtos são iguais.

Ainda, de forma inesperada, destaca-se o registro de *E35*: “(5, 3, 2), (3, 2, 5) e (2, 5, 3)”. Observe que não são pares ordenados, e sim ternas ordenadas. Essa resposta foi considerada errada. Embora isso, o registro é interessante, pois o estudante realiza a comutatividade entre os números (e que há uma característica que lembra a permutação de três números), de modo que as três ternas possuem o mesmo valor.

Na questão 6, foi tratado sobre a compreensão que o estudante tem sobre a propriedade comutativa, em que, pela tabela, fica visível que $a \times b = c = b \times a$, mas que a posição dos pares

(a, b) e (b, a) muda, e, por conseguinte, suas localizações são diferentes. Logo, as respostas foram avaliadas da mesma forma que as questões anteriores. Em relação às respostas consideradas como corretas, destaca-se o *E.17*: “às vezes, quando trocamos os números da conta X (vezes) nem sempre vai ser o mesmo cálculo”; em que dá para entender que o estudante aparenta falar sobre a forma como ocorre a efetuação do cálculo, ou seja, a multiplicação 2×5 pode aparentar menos ou mais agrupamentos do que 5×2 , o que pode depender do fator escolhido para representar o total de agrupamentos (ou 5 agrupamentos de 2 ou 2 agrupamentos de 5). Outras respostas que já se esperava sobre a localização dos pares foram de *E.11*: “não está no mesmo lugar” e *E.40*: “altera o par ordenado, mas não altera a multiplicação”.

No que concerne à categoria “Acerto parcial”, pode-se trazer a resposta de *E.29*: “não, porque afeta o resultado”, em que não fica claro totalmente o que ele quis dizer com “afeta o resultado”, se é o produto em si ou o significado, isto é, o estudante pode não ter conseguido expressar bem sua opinião. Em geral, as respostas dos discentes foram voltadas em afirmar que sempre $2 \times 1 = 1 \times 2$, utilizando a definição de comutatividade como argumento inclusive, como o *E.15*: “sim, porque a ordem não muda o resultado”.

Com base nessas três questões anteriores (4, 5 e 6), segue abaixo uma tabela que apresenta a análise quantitativa com base nas categorias já apresentadas, discutidas e exemplificadas.

Tabela 6 - Análise quantitativa das respostas das questões 4, 5 e 6 da Ficha 2

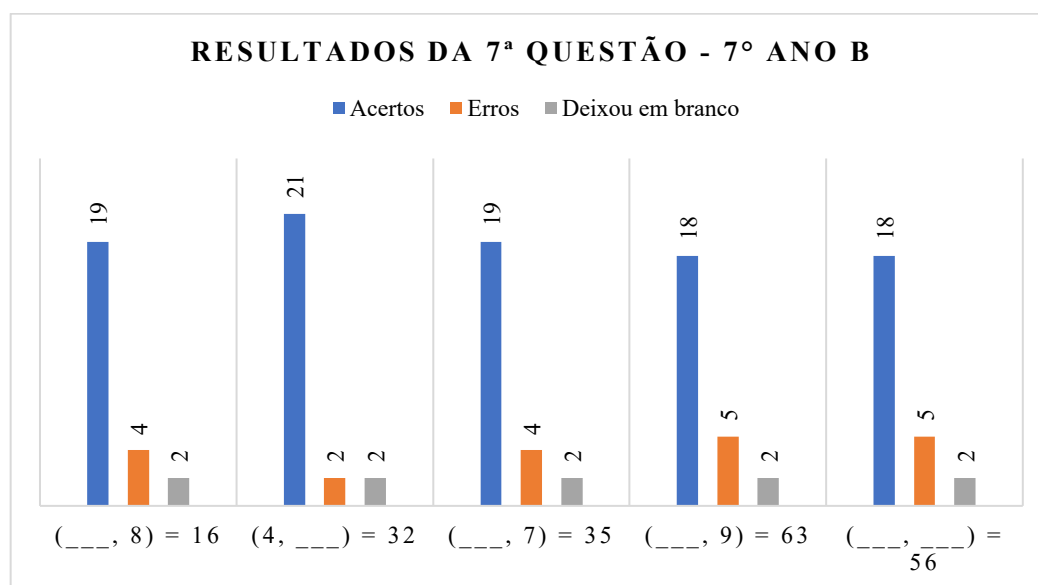
	4ª questão		5ª questão		6ª questão	
	7º A	7º B	7º A	7º B	7º A	7º B
Acertou	11	7	5	5	2	4
Acertou parcialmente	4	5	10	10	0	2
Errou	0	12	3	9	16	16
Deixou em branco	0	1	1	1	1	3

Fonte: Dados da pesquisa.

Note que, no geral, a turma do 7º ano B mantém uma quantidade igual ou superior de erros em relação à turma A, mas que, na 6ª questão, considerando as respostas de “Acerto” e “Acerto parcial”, a turma B supera em 4 quantidades a turma A.

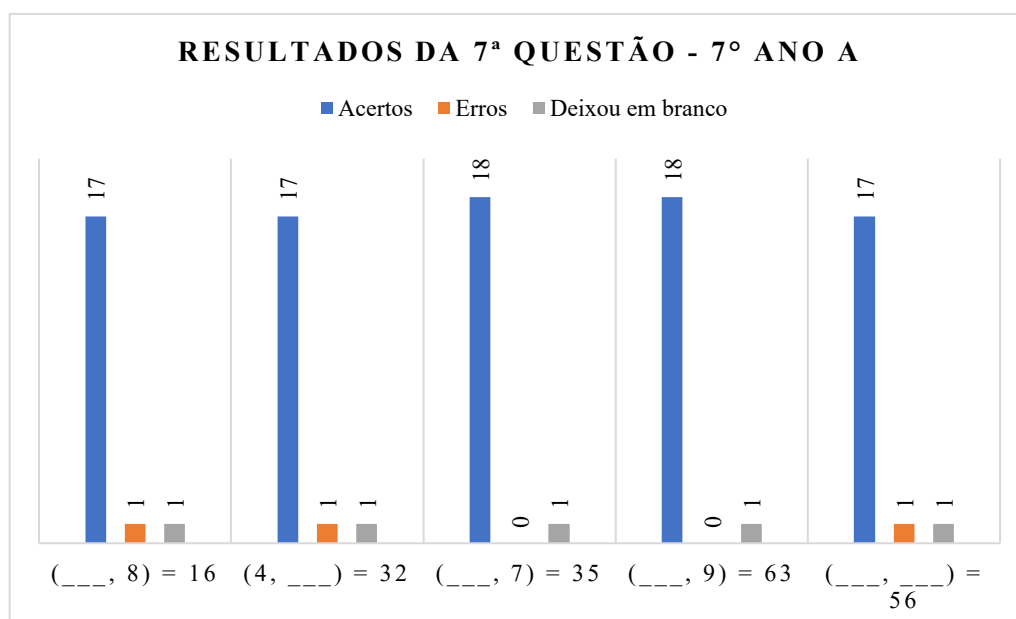
A sétima questão teve como objetivo trabalhar a ideia de divisão por meio da ausência de um dos termos do par ordenado. Ainda, teve como proposta pensar na decomposição multiplicativa até dois fatores de um valor, como é o caso de: $(_, _) = 56$. No total, foram 5 letras para serem respondidas, as quais foram analisadas nas categorias: acertou / errou / deixou em branco. Seguem abaixo dois gráficos que apresentam o desempenho dos estudantes quanto à questão 7, trabalhando o recurso da Tábua de Pitágoras para a operação da divisão.

Gráfico 11 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 7 (Ficha 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 12 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 7 (Ficha 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que, mesmo sendo a operação da divisão, o desempenho de ambas as turmas foi consideravelmente bom. Chegando na última questão, tem-se um problema elaborado a partir das categorias das Estruturas Multiplicativas, que fez parte da Ficha 1, e que foi colocada aqui para ver se os discentes iriam conseguir acertar a questão com o auxílio da Tábua de Pitágoras. Esse auxílio poderia se dá por representar os dois valores como um par ordenado e, assim, procurar na tabela o produto correspondente ou simplesmente efetuar a operação (o que não fica claro se eles utilizaram a tábua ou não, uma vez que não precisa ser representado por um par para indicar que utilizou a tábua para encontrar o resultado).

É importante destacar que, com base na análise da Ficha 1, os estudantes tiveram bastante dificuldades em entender qual a operação que deveria ser aplicar. Por ser ainda um tipo de problema cuja ideia central (combinação) não tinha sido apresentada a eles, então muitos não souberam identificar a operação ideal para esse tipo de questão. Sendo assim, trazendo na questão a ideia de usar a Tábua de Pitágoras para resolver o problema, eles poderiam, a partir desse ponto, entender que, se a tábua é sobre a multiplicação, então a operação ideal para a questão seria a multiplicação.

Porém, é importante frisar que, por ser a última questão da Ficha 2, corria o grande risco de não ser feita (ser deixada em branco), pois fatores, como tempo e cansaço, poderiam influenciar na desistência da questão, já que era um problema mais contextualizado. Os resultados foram analisados seguindo as categorias: Acertou / Errou / Deixou em branco. Na primeira categoria, independente da representação utilizada, se o estudante realmente deixou claro se usou ou não a Tábua de Pitágoras, todos acertos foram contabilizados nela.

Tabela 7 - Análise das respostas da questão 8 da Ficha 2

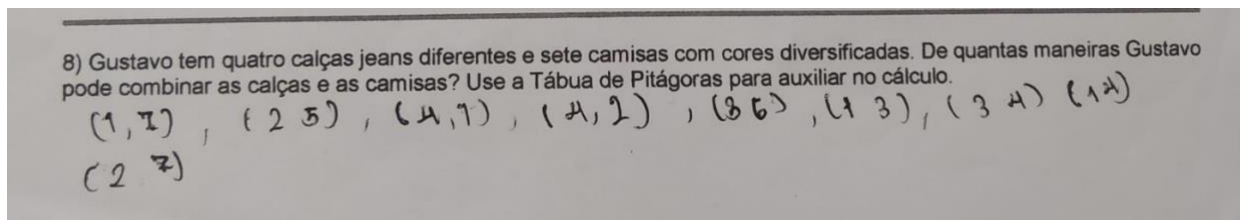
	7º ano A	7º ano B
Acertou	12	11
Errou	5	5
Deixou em branco	2	9

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que, comparados aos gráficos de acertos da Ficha 1 (Gráficos 1 e 2), os números de acertos aqui foram maiores. Para finalizar essa análise, foi destacado o registro do E41, que utilizou os conceitos aprendidos na tábua de outra forma que, embora não tenha conseguido chegar ao resultado, é interessante e remete à ideia de “combinação”, ou seja, o uso

de uma outra classificação das Estruturas Multiplicativas para tentar resolver um problema de outra classificação. Veja a figura a seguir.

Figura 67 - Protocolo E41 (Questão 8, Ficha 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que ele utilizou a ideia de combinação, de maneira a tentar encontrar os pares ordenados que podem ser formados a partir dos dois conjuntos para cada termo do par (a, b) : $a = \{1, 2, 3, 4\}$ e $b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Como afirmado antes, por ser uma ideia nova para os discentes, tentar representar todas as possibilidades pode ser um desafio, e, assim, eles só listam alguns exemplos e desistem de tentar encontrar todas as possibilidades de combinações. Isso ocorreu com outro estudante que utilizou a mesma ideia, parou no meio e acabou chutando o valor “35”. Por fim, finaliza-se a análise dos resultados da Ficha 2.

6.3 FICHA 3

A aplicação da terceira ficha (voltada para os Algoritmos da multiplicação) ocorreu depois de uma intervenção apresentando os três métodos. A intervenção durou duas aulas para cada turma e foi dividida em etapas:

- 1ª aula: revisar o Sistema de Numeração Decimal (dando foco à decomposição dos números); apresentar o método da decomposição com exemplos tanto de multiplicação quanto de divisão;
- 2ª aula: revisar rapidamente o método da decomposição e apresentar, em seguida, os outros dois métodos (maia e da gelosia) por meio de exemplos no quadro branco. No método maia, foram feitos exemplos de divisão também, enquanto o método da gelosia foi abordado só para a multiplicação.

Durante essas duas aulas, em ambas as turmas, percebeu que os estudantes possuíam até dificuldades na decomposição dos números, o que precisou de um tempo de foco (motivo do porquê que foram duas aulas só para os métodos). De acordo com o planejamento inicial, seriam dedicadas duas aulas para a Ficha 3, porém, no total, foram 3 (contando com a última aula que foi a aplicação da ficha proposta). Ainda, foi um desafio tanto a aplicação quanto a intervenção, pois, durante esses dias, os estudantes, em geral, estavam bem agitados e não estavam prestando tanta atenção por já estarem na reta final (últimas duas semanas de novembro). A aplicação da Ficha 3 ocorreu no dia 01/12/2023 e, nesse dia, tiveram 24 estudantes do 7º ano A e 23 da turma B.

A Ficha 3, apresentada no capítulo anterior, foi composta por três questões: a primeira foi para os estudantes aplicarem os métodos, contendo 6 letras, duas para cada método; a segunda questão foi trabalhando os métodos com outro olhar, tentando explorar um pouco das potencialidades; e, por fim, a terceira foi um problema elaborado a partir da ideia das Estruturas Multiplicativas, em que se pedia para o estudante resolvê-lo a partir de um dos métodos apresentados.

Sobre a questão 1, as respostas foram analisadas com base em quatro categorias: Acertou / Acertou parcialmente / Errou / Deixou em branco. No “parcialmente”, entraram as respostas em que o estudante soube montar o algoritmo sem errar os detalhes, mas não soube continuar de um ponto em diante, ou que colocou as respostas, mas sem montar o algoritmo. Durante a análise dos dados, percebeu-se que muitos alunos não conseguiram entender os três métodos, mas fizeram o que tinham entendido. Assim, muitos que só entendiam só o método chinês faziam as letras que pediam só o do método chinês, deixando os demais em branco. É preciso destacar que a falta da compreensão dos métodos se deu sobretudo pela falta de atenção e pela agitação da turma, já que eles já tinham sido trabalhados no início do ano letivo (sobretudo o chinês e o da gelosia).

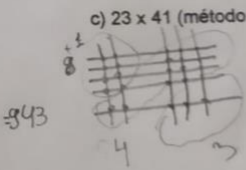
Contudo, mesmo com esses fatores do dia a dia do docente numa sala de aula, alguns estudantes (um número até significativo) conseguiram fazer maior parte da questão 1. Um exemplo disso é o registro das respostas do E3, como mostra a figura abaixo.

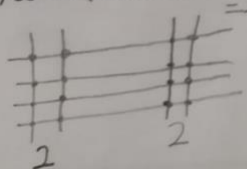
Figura 68 - Protocolo E3 (Questão 1, Ficha 3)

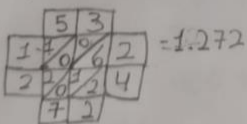
1) A partir dos métodos apresentados na sala de aula, resolva as operações abaixo:

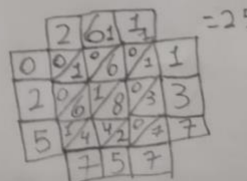
a) 42×112 (decomposição)
 $(40+2) \times 100+12$
 $40 \times 100 + 40 \times 12 + 2 \times 100 + 2 \times 12$
 $4000 + 480 + 200 + 24 =$
 $= 4.710$

b) $108 \div 4$ (decomposição)
 $100 \div 4 + 8 \div 4$
 $25 + 2 =$
 $= 27$

c) 23×41 (método chinês)

 $= 943$

d) $88 \div 4$ (método chinês)

 $= 22$

e) 53×24 (método gelosia)

 $= 1.272$

f) 261×137 (método gelosia)

 $= 25757$

2) De acordo com cada método, responda o que se pede em cada letra.

Fonte: Dados da pesquisa.

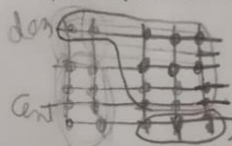
Observe que, na letra a), o estudante conseguiu aplicar o método da decomposição, porém, no final, errou uma adição, já que deveria ser 4.704. Nas demais letras, conseguiu acertar tranquilamente com um erro só na letra f), que se deu quando realizou a multiplicação da “coluna do 2” (primeiro algarismo do primeiro fator) com a “linha 1” (primeiro algarismo do segundo fator), registrando 01 como resposta. Assim, o número que representa a ordem da dezena de milhar foi o 2, enquanto deveria ser 3. Uma observação sobre esse estudante é que era um novato que tinha chegado na metade do ano letivo e apresentava muitas dificuldades nas atividades, porém aqui se mostrou empenhado em fazer a ficha e conseguiu ter um bom desempenho no geral. Outro registro interessante de um estudante que conseguiu realizar todos os métodos foram as respostas do E34.

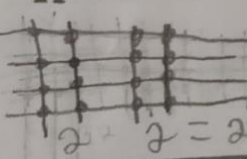
Figura 69 - Protocolo E34 (Questão 1, Ficha 3)

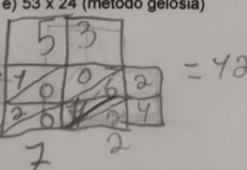
1) A partir dos métodos apresentados na sala de aula, resolva as operações abaixo:

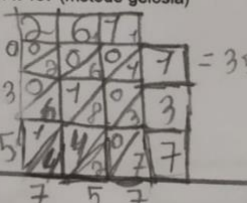
a) 42×112 (decomposição)
 $(40+2) \times (100+12)$
 $40 \times 100 + 40 \times 12 + 2 \times 100 + 2 \times 12$
 $4000 + 480 + 200 + 24 = 4704$

b) $108 \div 4$ (decomposição)
 $(100+8) \div 4$
 $100 \div 4 + 8 \div 4$
 $25 + 2 = 27$

c) 23×41 (método chinês)

 $800 + 140 + 3 = 943$

d) $88 \div 4$ (método chinês)

 $2 + 2 = 22$

e) 53×24 (método gelosia)

 $= 1.272$

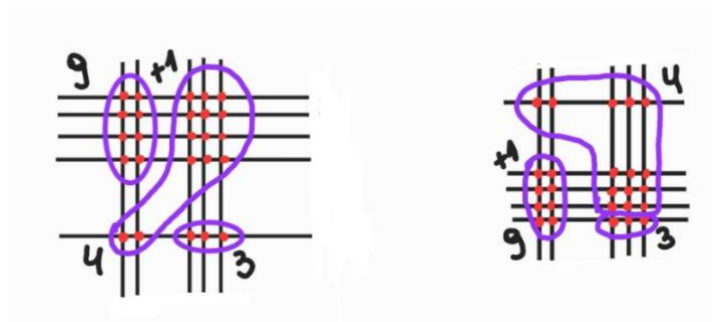
f) 261×137 (método gelosia)

 $= 35757$

2) De acordo com cada método, responda o que se pede em cada letra.

Fonte: Dados da pesquisa.

Note que, na letra c), quando foi representar o segundo fator na horizontal, desenhou primeiro uma vareta simbolizando o número 1 e depois quatro varetas, formando o número 14, e não 41. Porém, quando foi realizar a adição dos pontos de interseção, em que deveria somar olhando para as diagonais, o E34 fez o seguinte:

Figura 70 - Multiplicação entre 23 e 41 pelo método chinês

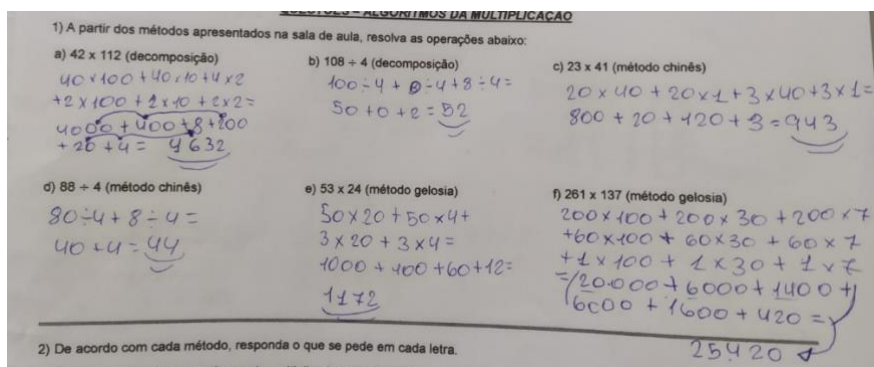


Fonte: Autoria própria.

Na ilustração acima, há a maneira ideal de efetuar a multiplicação pelo método chinês (primeira parte) e a maneira utilizada pelo E34 (segunda parte). O conjunto das centenas, por exemplo, virou o conjunto de pontos na parte inferior, e o estudante, do conjunto que seria das unidades, pegou três pontos e separou do seu grupo de pontos de interseção, destacando só os três como a ordem da unidade. Por fim, somou todos os pontos que estão dentro do terceiro conjunto superior. Em outros termos, quando viu que se perdeu na representação dos fatores, fez uma adaptação (não recomendável) para se chegar ao resultado e conseguiu.

Outro registro que também explica um dos pontos levantados anteriormente (de o estudante só ter entendido um único método e fazer somente as letras que pediam esse método ou fazer todas as letras a partir dele) são as respostas do E18.

Figura 71 - Protocolo E18 (Questão 1, Ficha 3)



Fonte: Autoria própria.

Veja que o estudante demonstra ter entendido o método da decomposição (mesmo errando alguns detalhes nos cálculos) e que só aplica esse método na resolução de todas as outras letras. Isso ocorreu também com outros estudantes, como também houve casos em que os estudantes só fizeram as letras condizentes com o método que achou mais interessante. Para finalizar a análise dessa primeira questão, segue a Tabela 8 abaixo.

Tabela 8 - Análise quantitativa das respostas na questão 1 (Ficha 3)

	(A)		(B)		(C)		(D)		(E)		(F)	
	7ºA	7ºB	7ºA	7ºB	7ºA	7ºB	7ºA	7ºB	7ºA	7ºB	7ºA	7ºB
Acertou	8	1	9	4	7	2	7	2	6	2	3	0
Acertou parcialmente	10	9	5	4	10	6	2	3	4	6	5	7
Errou	4	7	4	8	2	8	8	9	2	5	3	6
Deixou em branco	2	6	6	7	5	7	7	9	12	10	13	10

Fonte: Dados da pesquisa.

Em geral, as turmas tiveram um desempenho mediano, o que já era esperado pelos fatores que, infelizmente, contribuíram para a falta de foco durante a intervenção e a aplicação.

Na questão 2, os métodos foram explorados com um novo tipo de abordagem, envolvendo a identificação dos fatores a partir de imagens e outras operações básicas, como adição, subtração e divisão, durante processo de preenchimento de espaços vazios dentro dos algoritmos. A questão foi dividida em duas partes: letra A e letra B; cada letra dividida em duas subpartes. Na letra A, procurou-se identificar os números que estão sendo multiplicados a partir de duas imagens correspondentes ao método chinês. Na letra B, uma parte foi sobre o método de gelosia, em que há partes da grade vazias, em que o estudante teria que preencher a partir do raciocínio e do cálculo com base nas 4 operações, enquanto a segunda parte seguiu a mesma ideia, só que em relação ao método da decomposição.

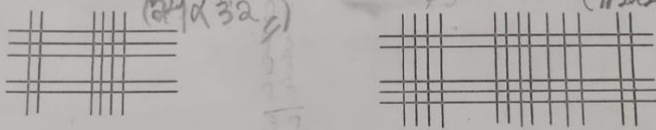
Entre algumas respostas analisadas dos estudantes, houve uns estudantes que contaram o total de linhas horizontais ou verticais, representando por um único número, ignorando os espaços entre as retas que foram explicados durante a abordagem dos métodos. Ainda, outros

ficaram contando todos os pontos, em vez de contar as retas (já que o foco não era o resultado, e sim identificar os fatores que estavam sendo representados). Outro problema foi ao fazer a decomposição do número 83, que colocavam $8 + 3$ (o que aconteceu com o E43, por exemplo). No entanto, teve um número razoável de estudantes que conseguiram realizar todas as letras da questão 2, embora errando alguns detalhes, como foi o caso do E32.

Figura 72 - Protocolo E32 (Questão 2, Ficha 3)

2) De acordo com cada método, responda o que se pede em cada letra.

a) Quais os números que estão sendo multiplicados nas duas figuras abaixo?



b) Complete os espaços em branco abaixo.

	3	4	3	X
2	1	2	1	6
2	5	0	5	5
	2	9	5	X

Handwritten calculations for 28×83 :

$$28 \times 83 = (20 + 8) \times (80 + 3)$$

$$= 1600 + 60 + 640 + 24$$

$$= 2240 + 2324$$

$$= 5164$$

Handwritten addition:

$$\begin{array}{r} 2240 \\ + 2324 \\ \hline 5164 \end{array}$$

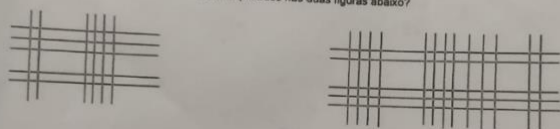
Fonte: a.

Veja que o E32 fez a maioria certinho, somente na segunda parte da letra b) que, na terceira linha, preencheu o espaço vazio com 2.324 (que já era o resultado), sendo que só era para realizar a adição entre os dois números que ele tinha encontrado na linha anterior. Em geral, ele foi muito bem. Outro registro é de um estudante que gostou muito do método da decomposição e só fez as letras das questões voltadas para esse método. Segue o registro das respostas dele.

Figura 73 - Protocolo E39 (Questão 2, Ficha 3)

2) De acordo com cada método, responda o que se pede em cada letra.

a) Quais os números que estão sendo multiplicados nas duas figuras abaixo?



b) Complete os espaços em branco abaixo.

		4		X
	1	2		6
2	5	0		
		9	5	

Handwritten calculations for 28×83 :

$$28 \times 83 = (20 + 8) \times (80 + 3)$$

$$= 1600 + 60 + 640 + 24$$

$$= 2240 + 84$$

$$= 2324$$

Handwritten addition:

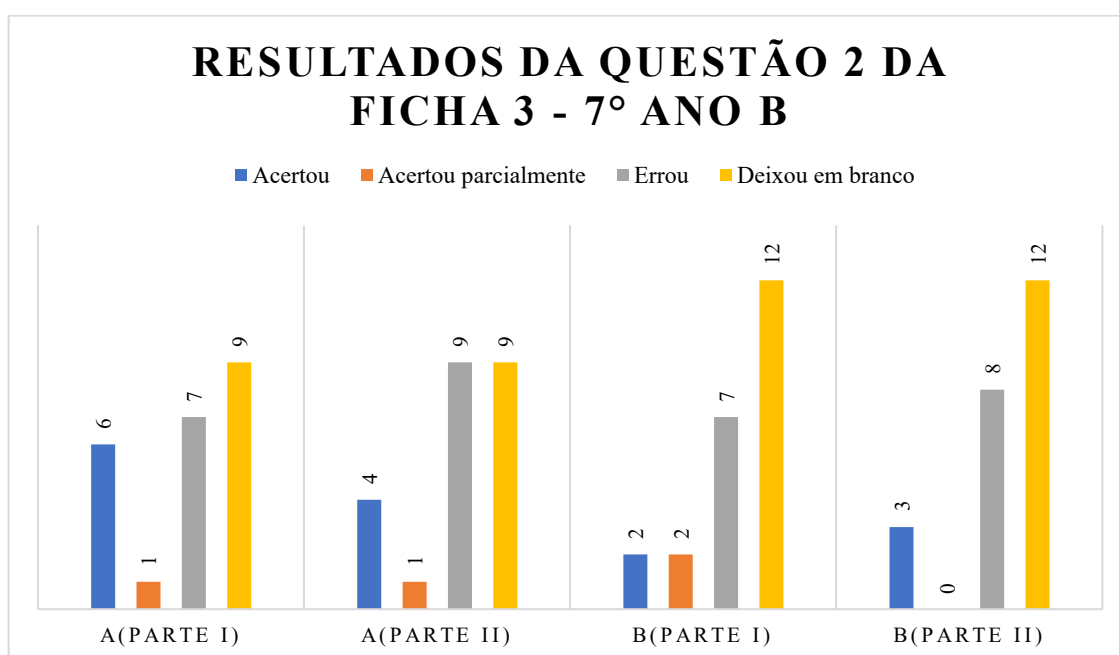
$$\begin{array}{r} 2240 \\ + 84 \\ \hline 2324 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que o E39 não resolve as outras letras, mas que acerta tranquilamente a parte da decomposição (e isso ocorreu também na questão 1). Note ainda que ele usa as “setinhas” para explicitar a propriedade distributiva e entender como deve preencher os espaços vazios. Outra curiosidade é que da linha 2 para a linha 3, ocorre a aplicação da associatividade, em que o estudante tem que entender que o valor que falta somar é 60 com 24.

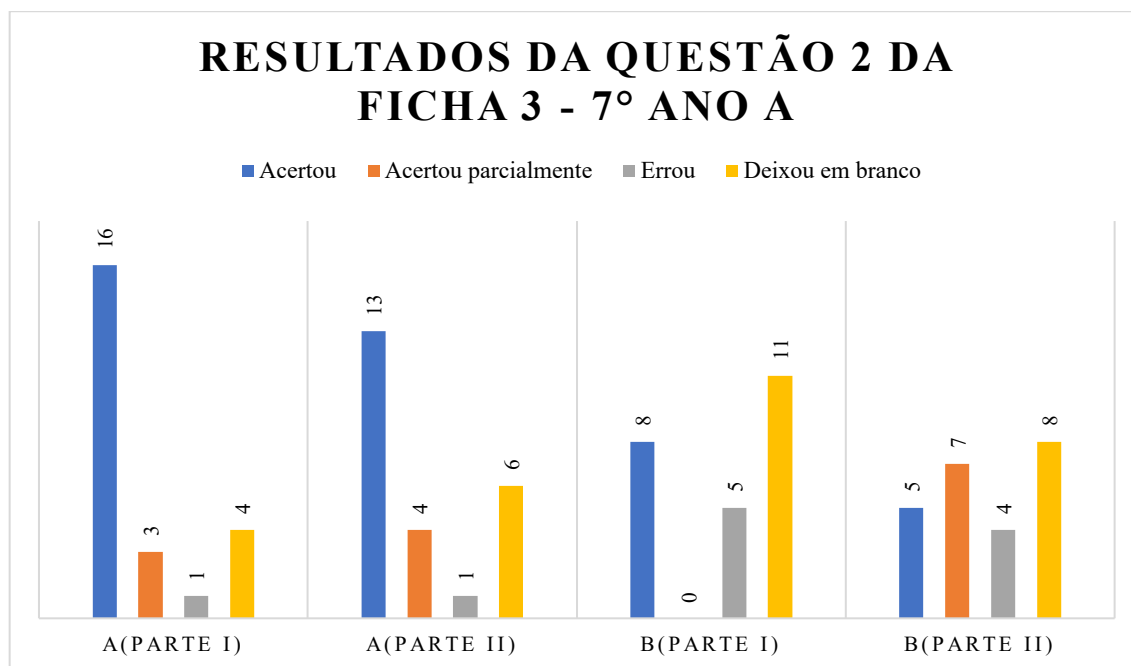
Com base nisso, seguem abaixo dois gráficos que apresentam os resultados das duas turmas nessa questão a partir de uma análise quantitativa, em que houve as mesmas categorias já abordadas anteriormente. Na categoria de “Acertou parcialmente”, entraram as respostas em que houve alguns erros ou que teve alguma parte deixada em branco.

Gráfico 13 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 2 (Ficha 3)



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 14 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano A na questão 2 (Ficha 3)



Fonte: Dados da pesquisa.

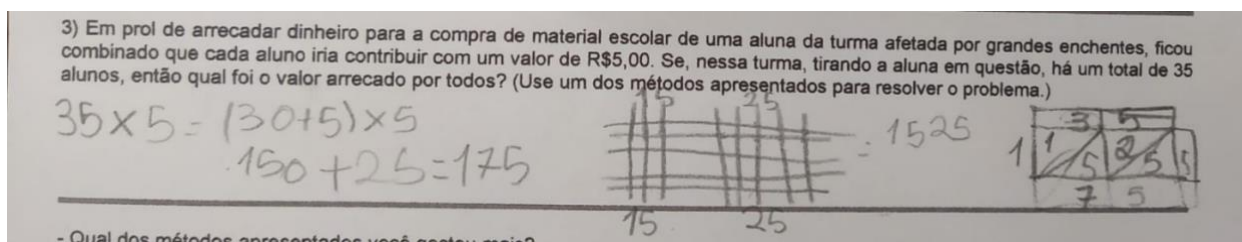
Partindo para a terceira questão e última dessa ficha, tem-se um problema elaborado a partir das Estruturas Multiplicativas (proporção dupla – um para muitos), e o intuito era que fosse resolvida por meio de um dos métodos apresentados. Assim, as respostas foram analisadas por: Acertou sem uso dos métodos / Errou sem uso dos métodos / Acertou com um dos métodos / Errou com um dos métodos / Deixou em branco. A escolha dessas categorias se deu exatamente pelo fato de alguns estudantes terem respondido usando o algoritmo usual de multiplicação (ou ainda de terem só respondido com o resultado sem cálculo), e não um dos novos três métodos apresentados.

Em relação aos registros, alguns estudantes não entenderam a operação ideal do problema proposto (que era uma nova situação que pedia, em um contexto, a multiplicação entre 35 e 5), aplicando a divisão, por exemplo. Todavia, a maioria entendeu e aplicou um dos métodos, errando alguns detalhes. A exemplo, o E40 que chegou a aplicar o método da decomposição, porém errou ao fazer $35 \times 5 = 3 \times 5 + 5 \times 5$. Já teve outro estudante (o E47) que armou o algoritmo tranquilamente, mas errou na multiplicação de 5×5 (revelando novamente dificuldades na tabuada). Em relação aos métodos da decomposição e da gelosia, eles dependem de que o estudante domine, ao menos, a tabuada. Dessa forma, foi permitido aos estudantes usarem a Tábua de Pitágoras que tinham ganhado na aplicação da Ficha 2 para os auxiliar, embora a maioria tinha relatado que não tinha mais ou que tinha jogado fora ou perdido. Quanto

ao método chinês, veja que não é preciso da tabuada, basta só entender os conjuntos dos pontos de interseção e suas representações dentro do Sistema de Numeração Decimal.

Um registro que merece destaque é do E30, que chegou a aplicar os três métodos apresentados, como mostra a figura abaixo.

Figura 74 - Protocolo E30 (Questão 3, Ficha 3)



Fonte: Dados da pesquisa.

Veja que o estudante consegue acertar a questão por meio do método da decomposição e da gelosia, enquanto, no método chinês, teve dificuldades na contagem dos pontos. Como era uma multiplicação de uma dezena por uma unidade, iria ter dois conjuntos de pontos de interseção somente. Em geral, o estudante aparenta ter gostado dos três algoritmos, tanto que respondeu ao questionário posterior que preferia o método da gelosia, embora soubesse os outros algoritmos. Isso posto, segue abaixo uma tabela que apresenta a análise quantitativa e qualitativa das respostas dessa questão nas duas turmas.

Tabela 9 - Análise quantitativa das respostas da questão 3 (Ficha 3)

	7º ano A	7º ano B
Acertou com um dos métodos	13	2
Errou com um dos métodos	3	0
Acertou sem um dos métodos	0	1
Errou sem um dos métodos	1	4
Deixou em branco	7	16

Fonte: Dados da pesquisa.

Perceba que, dos 23 estudantes da turma B, somente 7 responderam a situação-problema, enquanto, dos 24 da turma A, 17 responderam. A turma A teve um desempenho bem

superior à turma B. Ainda, veja que, da turma B, 5 estudantes responderam com o algoritmo usual ou só com o registro do resultado sem cálculo, mas 4 deles erraram mesmo assim.

Quanto ao Questionário 2, que veio ao final da Ficha 2, seguem dois gráficos que irão ilustrar os resultados das respostas dos estudantes.

Gráfico 15 - Resposta dos estudantes quanto a sua preferência aos métodos apresentados

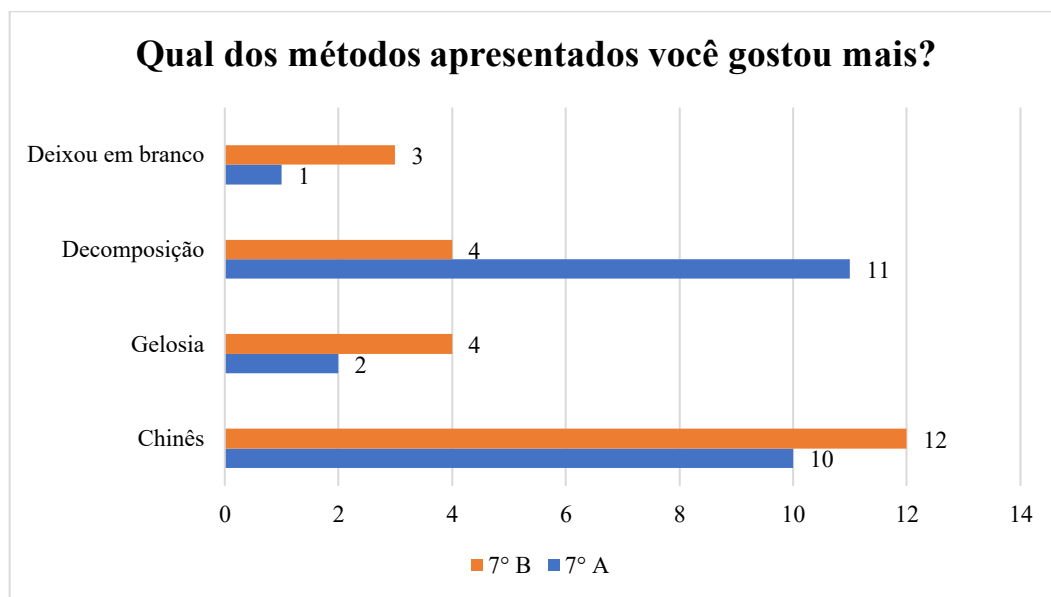
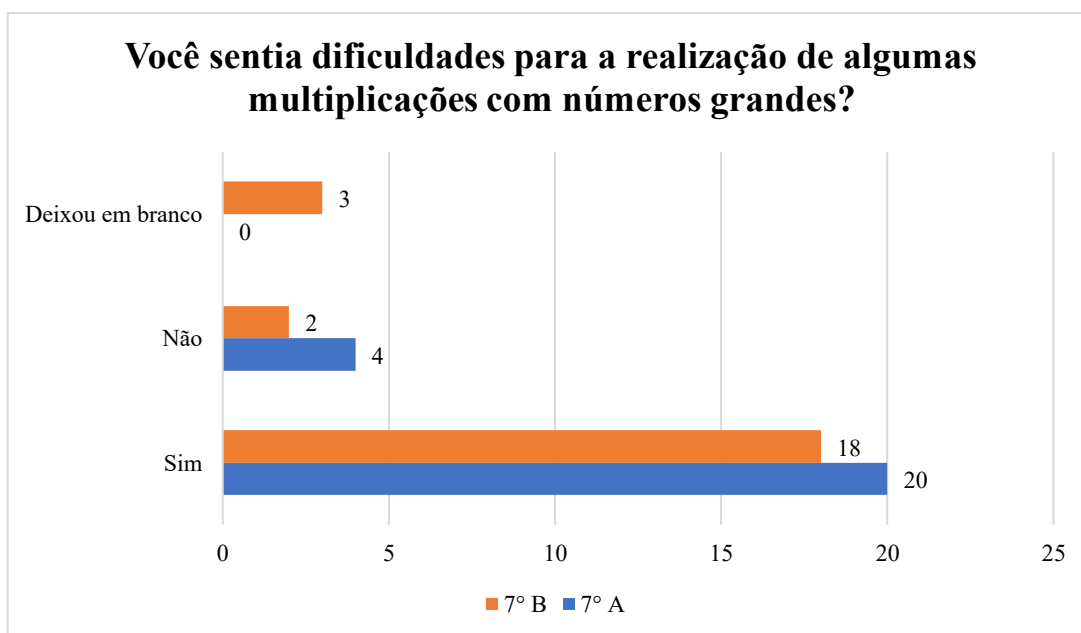


Gráfico 16 - Respostas dos estudantes quanto às dificuldades na multiplicação entre números grandes



No que concerne ao Gráfico 15, percebe-se que a turma A preferiu o método da decomposição, com uma outra boa parte dos estudantes que preferiram o método chinês também. Já a turma B preferiu o método chinês. O Gráfico 16 mostra que os estudantes, em sua maioria, responderam ter dificuldades com a multiplicação entre números maiores, revelando essa necessidade de realmente trazer novos algoritmos para auxiliar eles em cálculos maiores. Dessa forma, finaliza-se a análise da aplicação da Ficha 3.

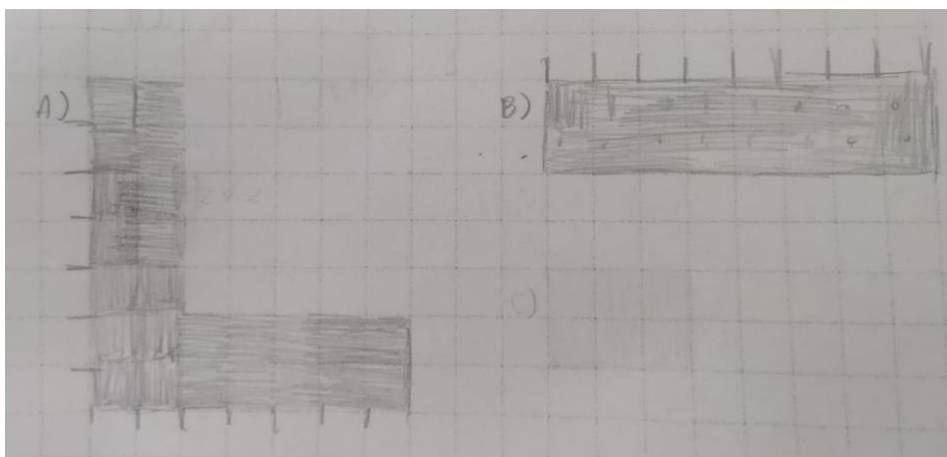
6.4 FICHA 4

Chegando na última parte da sequência didática, tem-se a Ficha 4 que possui o objetivo de, por meio da malha, expandir o conceito da multiplicação para o campo de Grandezas e Medidas também, trabalhando de forma mais visual os conceitos envolvidos e a potencialidade desse recurso para a aprendizagem da multiplicação. Essa Ficha foi dividida em 4 questões e foi aplicada no dia 05/12/2023. Houve 27 e 26 estudantes nas turmas A e B, respectivamente.

A primeira questão foi dividida em duas partes: letra A e letra B. A questão pedia para o estudante desenhar figuras retangulares com o apoio da malha quadriculada com as seguintes áreas: 24 e 15, respectivamente. O 24 se dá pelo fato de ter mais possibilidades de figuras, enquanto o 15 é mais limitado, o que se deve também por ser um produto resultado da multiplicação de dois primos ou dele mesmo por 1. Além disso, foi levado em consideração o tamanho da malha, para que houvesse espaço suficiente para que o estudante desenhasse todas as figuras dessa Ficha 4. Logo, não foi visto como positivo colocar números maiores.

Os dados foram analisados com base nas categorias: Acertou / Errou / Deixou em branco. Ainda, houve uma análise quanto à frequência das possíveis medidas da figura, isto é, quantas vezes desenharam uma imagem 6×4 , caso seja a letra A. Isso mostra que, ao pensar nos fatores multiplicados, os estudantes veem com mais facilidade que 6×4 (caso seja o mais frequente) resulta em 24 do que 12×2 . Entre os registros esperados, destacaram-se as respostas dos estudantes que trouxeram uma nova decomposição ou que realizaram composição de figuras. Nessa última, foram registradas respostas de várias possibilidades de composições, como: $2 \times 5 + 7 \times 2$ (letra A); $20 \times 1 + 4 \times 1$ (letra A); $8 \times 1 + 7 \times 1$ (letra B); $10 \times 1 + 5 \times 1$ (letra B). No entanto, observe que, quando ocorre esse tipo de representação, não se tem uma figura retangular (na maioria dos casos), e sim um polígono não quadrilátero. Para exemplificar, o E10 realizou uma composição de figuras, embora a questão pedisse figuras retangulares. Veja a figura abaixo.

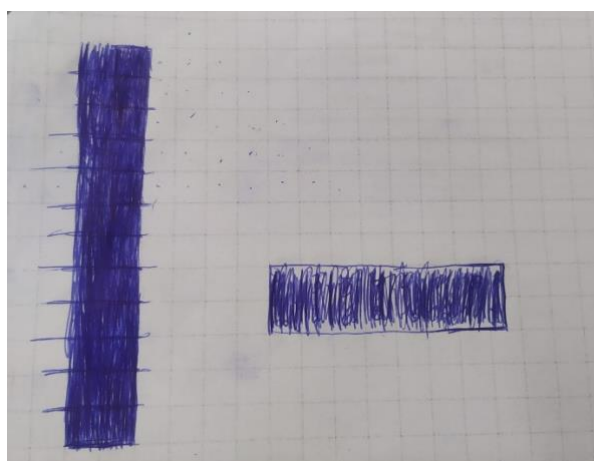
Figura 75 - Protocolo E10 (Questão 1, Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que a figura feita para a letra A possui área igual a 15 u.m.a., mas não é um retângulo, e sim um polígono de 6 lados (motivo que leva a resposta ser considerada errada). Essa figura é formada pela composição de dois retângulos, que podem ser do tipo: $2 \times 5 + 7 \times 2$. Outro registro interessante foi uma das decomposições não esperadas, como foi o caso do E5.

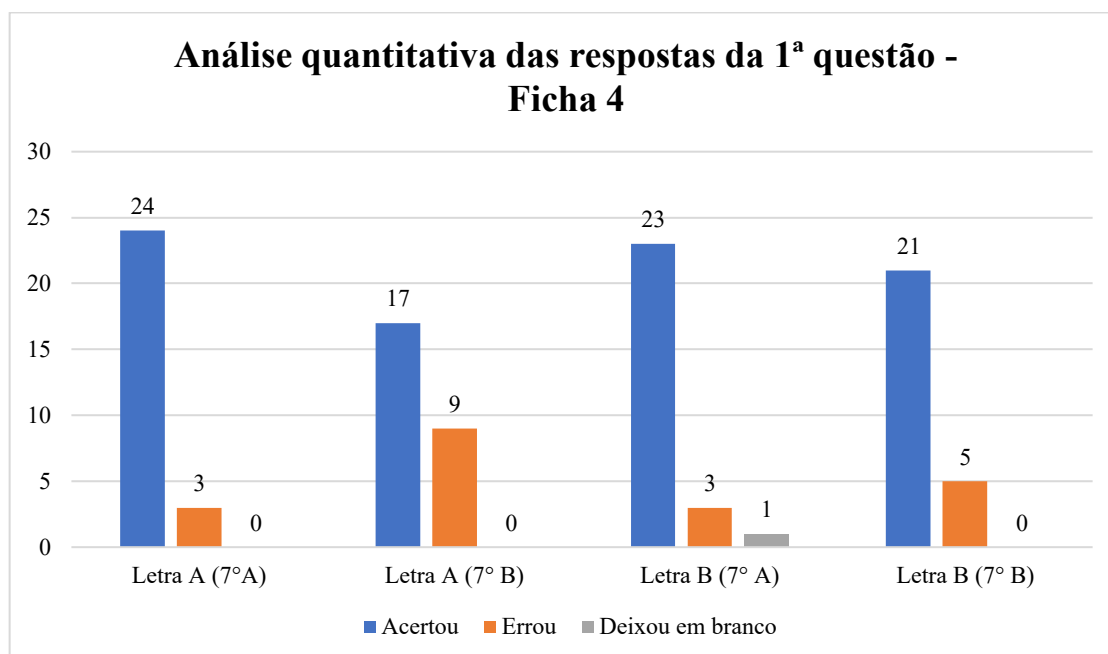
Figura 76 - Protocolo E5 (Questão 1, Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

Note que a segunda figura, que ilustra a resposta da letra B, é um retângulo de área 15, mas que foi decomposto em: $7,5 \times 2$. Isso pode ter acontecido, pois o estudante pensou na metade do produto, pois já sabia que o outro fator seria 2 (o que aparenta ser mais fácil, mostrando que não teve problema em trabalhar com números decimais). Segue abaixo um gráfico que apresenta uma análise quantitativa quanto às respostas nessa questão. Em seguida, uma tabela que apresenta a frequência de cada tipo de resposta registrada por turma.

Gráfico 17 - Análise quantitativa das respostas dos estudantes na questão 1 (Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 10 - Análise qualitativa das respostas da questão 1 letra A (Ficha 4)

	7º ano A	7º ano B
6x4 / 4x6	7	8
8x3 / 3x8	11	4
12x2 / 2x12	6	4
24x1 / 1x24	0	1
Composição de figuras	0	6

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 11 - Análise qualitativa das respostas da 1ª questão letra B (Ficha 4)

	7º ano A	7º ano B
5x3 / 3x5	23	16
15x1 / 1x15	0	4
Decomposição extra	0	1
Composição de figuras	1	2

Fonte: Dados da pesquisa.

Note que, na turma A, as decomposições multiplicativas até dois fatores que mais apareceram foram “8x3 / 3x8” (letra A) e “5x3 / 3x5” (letra B), enquanto, na turma B, foram

“6x4 / 4x6” (letra A) e a mesma que a turma A na letra B. Ou seja, são decomposições mais fáceis que os estudantes conseguiram visualizar em relação ao 24 u.m.a. e 15 u.m.a. durante a aplicação. Perceba também que, em geral, as duas turmas tiveram um bom desempenho nessa primeira questão. Durante a aplicação, é válido pontuar que os discentes estavam bem entusiasmados com a atividade, por envolver uma dinâmica diferente em relação às outras atividades propostas.

A segunda questão (do tipo discursiva) pede ao estudante para que ele responda se há ou não há outras possibilidades de figuras em relação às letras A e B da questão 1. A questão pede ainda que o estudante explique sua resposta e até desenhe, caso queira, para mostrar essa(s) outra(s) possibilidade(s). As respostas foram analisadas em: Acertou / Acertou parcialmente / Errou / Deixou em branco. Ainda, é preciso destacar que, na malha quadriculada, sem nenhum contexto, a figura 4x6 é igual 6x4, pois só estão rotacionadas. Sendo assim, o que se esperava dos estudantes é que argumentassem que existiam ou não outras possíveis decomposições que não usassem a propriedade comutativa.

Todavia, alguns estudantes responderam com base nessa propriedade, como foi o caso do E4, o qual explica que pode desenhar a figura em pé ou deitada. Outra resposta interessante foi do E40: *“sim, porque eu dividi 24 e 15 por 3, mas pode ser dividido por outros números, tipo 2, 4, 5, 6... se ele for outro retângulo, já está certo”*; em que fez a questão 1 a partir da divisão de 24 e 15 por três, já que era um divisor comum entre os dois. Porém, em relação ao 15, dividir por 5 (outra possibilidade) resultaria no mesmo retângulo, só que rotacionado. Em geral, as respostas dos estudantes foram bem diversificadas, de modo que a categoria “Acertou parcialmente” precisou de um foco maior, uma vez que teve discentes que afirmou que existia, mas não acertava nos exemplos ou não dava exemplos ou justificativas razoáveis. Outros desenhavam os mesmos desenhos ou a rotação dos retângulos já feitos na questão 1.

Sendo assim, seguem abaixo uma tabela com uma análise quantitativa e um gráfico com uma análise qualitativa das respostas que se enquadraram na categoria “Acertou parcialmente”.

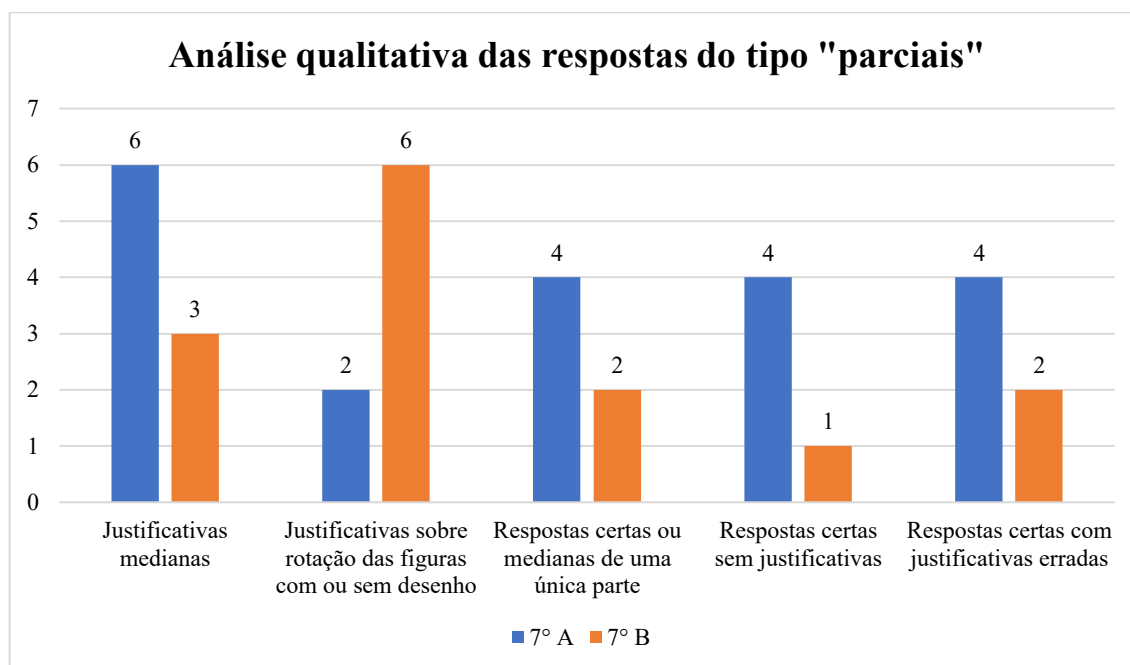
Tabela 12 - Análise quantitativa das respostas da questão 2 (Ficha 4)

	7º ano A	7º ano B
Acertou	0	3
Acertou parcialmente	20	14
Errou	6	6

Deixou em branco	1	3
------------------	---	---

Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 18 - Análise qualitativa das respostas da questão 2 (Ficha 4) consideradas "parciais"



Fonte: Dados da pesquisa.

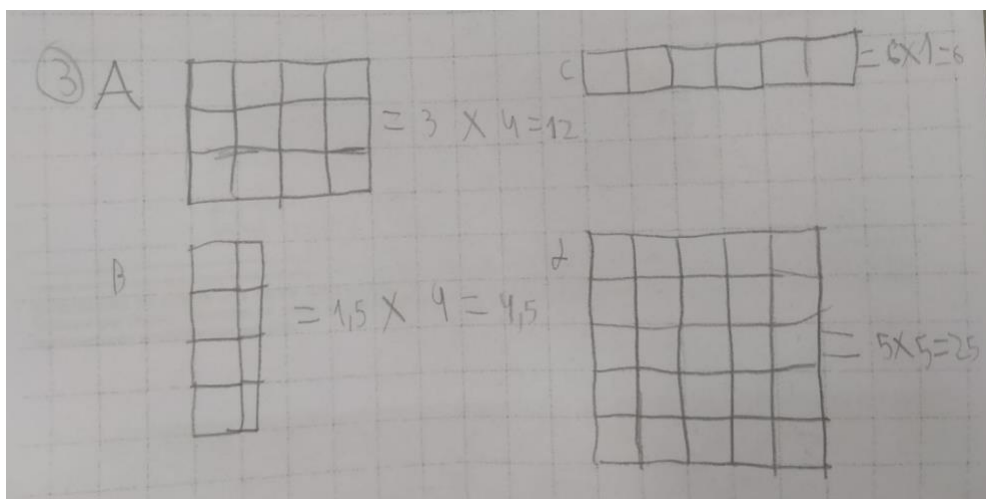
Com base nas respostas, foram criadas essas subcategorias do tipo “parciais”. Houve estudantes que registraram suas respostas com algum desenho (utilizando a comutatividade), outros que responderam e justificaram bem uma parte da questão (ou seja, sobre uma das letras da questão 1), como também houve respostas sem justificativas ou com justificativas erradas. Um exemplo dessa última foi o E35: “sim, podemos fazer quadrados também”. Porém, veja que, embora todo quadrado seja um retângulo, o estudante desconhece que o quadrado é a representação simbólica dos números quadrados perfeitos e que nenhum dos números propostos (24 e 15) são quadrados perfeitos. Por fim, um exemplo sobre “justificativa mediana” seria a resposta do E1, que, contextualizando sua resposta, afirmou que há sim mais possibilidades e que, comparando os dois valores 24 e 15, há mais possibilidades para 24 do que para 15, pois 24 é um número maior (embora seja importante se atentar ao fato de que não é porque o número é maior que o outro que terá mais decomposições multiplicativas, já que esse número pode ser primo, por exemplo).

Indo para a terceira questão, esta conteve 4 figuras, em que os estudantes teriam que escrever as multiplicações correspondentes à área de cada uma delas (sabendo que cada lado dos quadradinhos mede 1 u.m.c.). Ainda, uma das figuras envolve uma base cuja representação

numérica é um número racional. Pensando na fórmula da área do retângulo: $b \times h$, o ideal seria que, dado um retângulo com base 5 e altura 2, o estudante escrevesse 5×2 e não 2×5 . Porém, por não ter sido apresentada a fórmula, foi considerada a resposta que troca a ordem dos fatores. A resposta ideal seria só a representação da multiplicação (base $\times$ altura), e, caso houvesse o produto junto, também seria considerada como acerto. Foi considerada parcial a resposta que teve só o produto, já que poderia indicar que o estudante contou os quadradinhos dentro de cada figura (e esse não era o foco da questão).

Alguns registros percebidos durante a análise foram que alguns estudantes, na letra B (que trazia uma figura de base 1,5), colocavam 2 como base. Houve outro estudante que desenhou novamente as figuras da questão 3 na Malha Quadriculada, o que pode ter ajudado ele a visualizar melhor os comprimentos dos lados. Veja o registro abaixo.

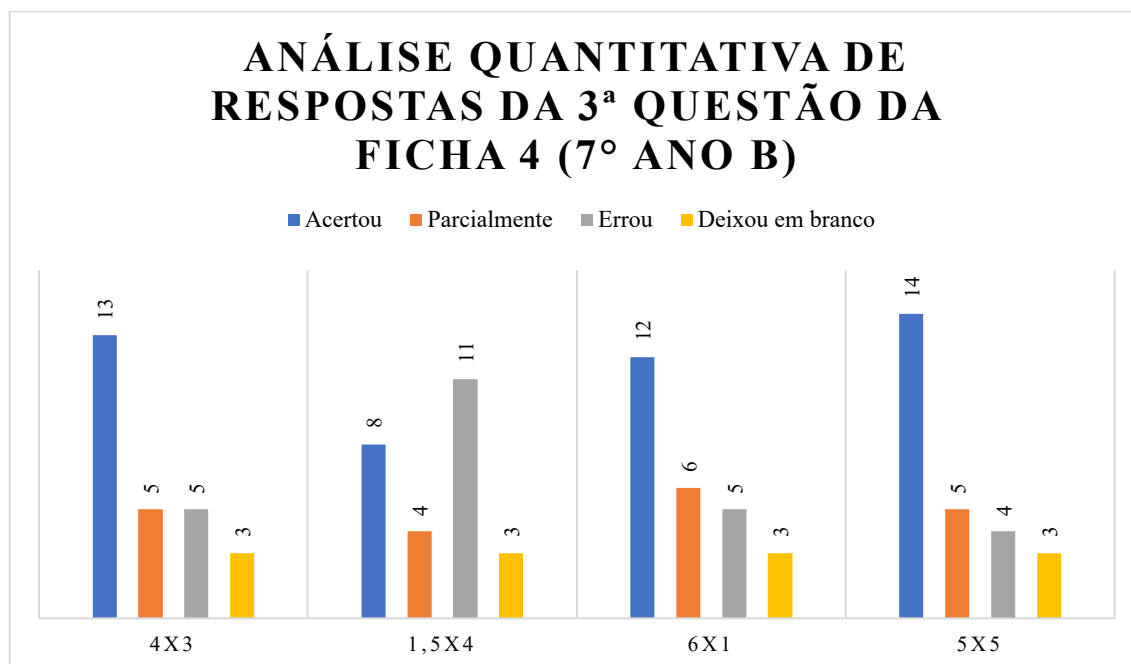
Figura 77 - Protocolo E12 (Questão 3, Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

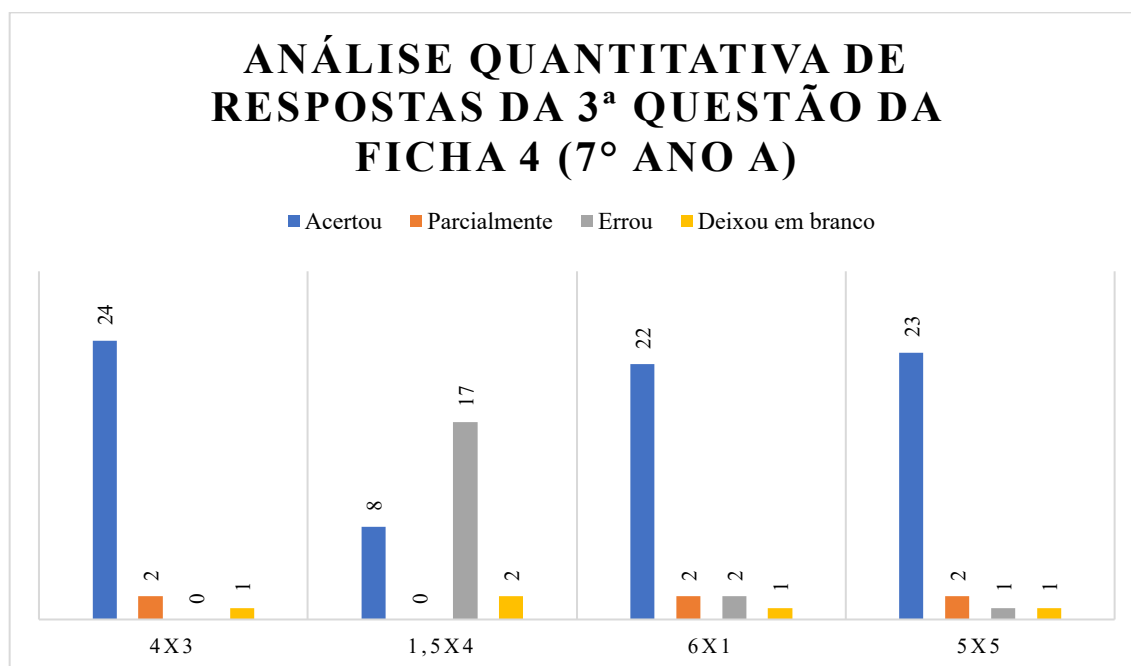
A partir disso, seguem abaixo dois gráficos que apresentam uma análise quantitativa em relação às respostas das duas turmas quanto à cada figura proposta.

Gráfico 19 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano B na questão 3 (Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 20 - Análise quantitativa das respostas do 7º ano A na questão 3 (Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

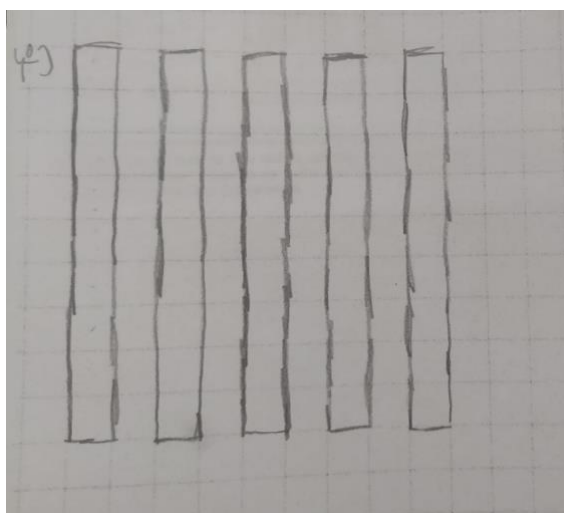
Note que, em geral, o 7º ano A possuiu um desempenho mais razoável que a turma B. Porém, na questão 2, se juntar a quantidade de quem acertou completamente ou parcialmente, a turma B se destaca mais. Já era de se esperar que eles teriam dificuldades ao trazer uma figura

retangular cuja base é um número racional como desafio, já que o contato que eles tiveram sobre esse conjunto era mínimo, outra vez que, durante o ao letivo, eles apresentavam muitas dúvidas ainda com os números inteiros.

Chegando na última questão, teve-se um problema elaborado a partir das Estruturas Multiplicativas, cuja categoria era a de organização retangular. Assim, poder-se-ia usar a malha quadriculada para representar o problema de forma visual ou desenhar o retângulo cuja área coincidissem com o que a questão pedia. Ela pedia para o estudante organizar uma sala com 45 carteiras em colunas por fileiras, isto é, dois fatores que, ao serem multiplicados, resultassem em 45. Existem duas possibilidades: $9 \times 5 = 5 \times 9$ e $3 \times 15 = 15 \times 3$. Porém, ao se pensar numa sala de aula, a organização melhor distribuída é a de 9×5 ou 5×9 .

A princípio, pensou-se nas seguintes categorias para analisar as respostas: Acertou / Errou / Deixou em branco. Contudo, durante a aplicação, percebeu que alguns estudantes estavam realizando uma representação simbólica seguindo literalmente a organização das carteiras dentro de uma sala de aula, ou seja, levando em consideração os espaços entre as fileiras. Em outras palavras, houve discentes que fizeram vários retângulos, dando espaço entre eles, pois, numa sala de aula, há espaço entre as colunas ou fileiras. Para exemplificar isso, segue o registro do E33.

Figura 78 - Protocolo E33 (Questão 4, Ficha 4)

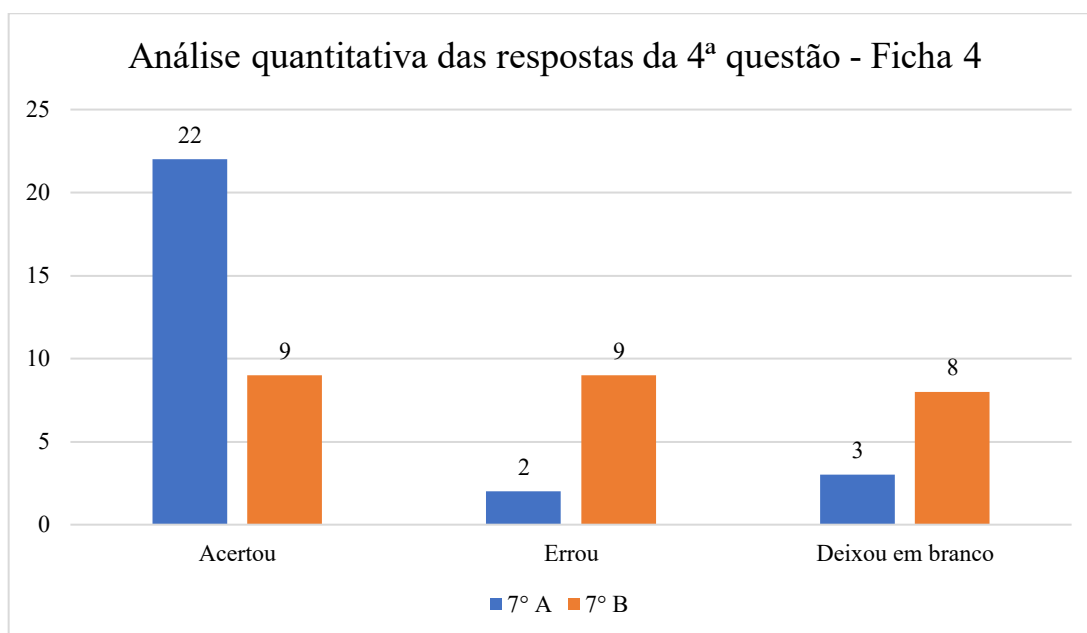


Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, o estudante estava trabalhando com composições de figuras, em que se sabe que, somando a área de todas elas, o resultado será o mesmo. Considerando isso, respostas que registraram esse tipo de representação foram consideradas certas também. Assim, foram

abertas duas subcategorias: fez o desenho padrão do retângulo / fez com a composição de figuras, fazendo vários retângulos de modo que cada um pudesse representar cada coluna ou fileira de carteiras (quadrinhos). Seguem abaixo um gráfico e uma tabela que apresentam essas duas análises, respectivamente.

Gráfico 21 - Análise quantitativa das respostas na questão 4 (Ficha 4)



Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 13 - Análise qualitativa das respostas não em branco da 4ª questão da Ficha 4

	7º ano A	7º ano B
Sem composição de figuras	14	15
Com composição de figuras	10	3

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, finaliza-se a análise das respostas dos estudantes no que tange à última ficha dessa sequência didática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desse trabalho, foram analisadas a multiplicação e a divisão nos documentos oficiais e em livros didáticos, trazendo definições, propriedades e significados, mostrando que todos eles se complementam ao tratar desses conceitos por uma abordagem diversificada e rica, em que há a aplicação deles em diferentes contextos e situações. Estas situações, por vez, têm como base as Estruturas Multiplicativas de Vergnaud, em que o conceito da multiplicação não pode ser abordado de forma isolada, ou seja, o indivíduo só aprenderá esse conceito quando exposto a um vasto repertório de problemas que explorem diferentes procedimentos e representações, a fim de dar significado ao conceito. Ainda, foram ressaltadas duas dificuldades que, com base na teoria de Vergnaud, geralmente são vistas durante o processo de resolução de problemas: interpretação e cálculo; revelando a necessidade de realizar uma parceria entre o cálculo relacional e o numérico. Por fim, para auxiliar os estudantes no cálculo numérico, foram explorados três recursos a partir da Teoria dos Campos Conceituais, de modo que a utilização deles pudesse ajudar na ampliação da bagagem cognitiva do discente em relação à multiplicação, envolvendo, inclusive, outros conceitos.

Após analisados os resultados da sequência didática proposta sob a luz de toda essa abordagem, percebeu-se que os estudantes do 7º ano do ensino fundamental ainda possuem dificuldades em relação à multiplicação e a sua operação inversa, mesmo só trabalhando com números inteiros (sobretudo os positivos). Essas dificuldades são em torno de suas habilidades em interpretar problemas e em saber efetuar corretamente os cálculos, como foi concluído pelos Gráficos 3 e 4. Foi visto que um dos procedimentos mais utilizados pelos estudantes era a definição da multiplicação como uma adição sucessiva de parcelas iguais, e que essa definição primária é sim limitada, pois muitos estudantes erravam seus cálculos por estarem diante de operações entre números grandes, o que evidencia a necessidade de construir uma base diversificada desde os anos anteriores com os estudantes sobre as diversas estratégias de resolver um cálculo de multiplicação e divisão.

Com aplicação da Ficha 1, ficou evidente que muitos estudantes não tinham uma bagagem de conhecimentos acerca das situações propostas, pois muitos não souberam nem identificar as operações ideais para cada problema, mesmo sabendo que os documentos oficiais sugerem a abordagem das Estruturas Multiplicativas desde o 2º ano do ensino fundamental até o 6º e que o livro didático do 6º ano trazia essa abordagem também. A partir dos dados dessa ficha, notou-se também a necessidade de trabalhar recursos didáticos em paralelo que auxiliassem eles no cálculo numérico (que foi uma dificuldade encontrada e que não poderia ser ignorada). Assim, houve a aplicação de outras três fichas após momentos de intervenção do

aplicador com os estudantes na sala de aula, explanando os recursos de forma objetiva (uma vez que o tempo era pouco para uma abordagem mais aprofundada).

Com a aplicação da Ficha 2, percebeu-se que o recurso da Tábua de Pitágoras foi importante para auxiliar os estudantes no cálculo de números pequenos e para perceber relações e regularidades presentes na tabuada que, por vezes, não são tão visíveis na tabuada tradicional. Trabalhar a multiplicação e divisão por meio da representação simbólica de um par ordenado contribuiu para alguns estudantes visualizarem propriedades e ampliassem sua visão sobre o conteúdo a partir de ligações com outros conceitos presentes (par ordenado, números quadrados perfeitos e múltiplos e divisores). A partir disso, foi possível identificar dificuldades conceituais que iam além da proposta do trabalho e que permeavam outras definições, como a de números quadrados perfeitos, pares e par ordenado.

Ainda, o uso do recurso para a resolução de um problema das Estruturas Multiplicativas, como foi o caso da questão 8 da Ficha 2, foi bem eficiente, uma vez que houve uma quantidade bem maior de estudantes que acertaram em comparação quando foi aplicada a Ficha 1. Todavia, propõe-se aqui que o recurso seja uma base para aprofundar os conhecimentos dos discentes sobre a tabuada, procurando dominar esse conceito de forma íntegra, sem ser só pela decoreba. É importante ressaltar que se faz preciso um tempo maior para se dedicar à abordagem da tabuada em sua totalidade, buscando desenvolver nos discentes esse olhar mais completo sobre o recurso didático e as regularidades presentes que ampliam o entendimento sobre o conceito da multiplicação e o da divisão.

A aplicação da Ficha 3 se deu exatamente pela limitação que a tabuada pode trazer: cálculo entre números pequenos. Embora os estudantes já tivessem um certo contato com outros algoritmos além do usual, a aplicação dessa ficha foi mais difícil, pois precisava mais de atenção e dedicação dos estudantes, e o cenário que foi presenciado durante a aplicação e intervenção não foi favorável. Todavia, escutar estudantes afirmarem que possuíam dificuldades no cálculo de números grandes e que estavam contentes de ver outros métodos que tinham aprendido durante o momento de explanação foi a confirmação da necessidade desse recurso para destravar o bloqueio que alguns possuíam na efetuação das operações. Contudo, é importante que a explanação de cada um desses algoritmos seja de forma aprofundada e sem pressa, para que cada um possa entender bem os passos a passos e, assim, possuir um repertório mais amplo de procedimentos para aplicar na resolução dos problemas de multiplicação e divisão. É normal alguns estudantes se identificarem mais com um método do que o outro e continuarem apresentando dificuldades, ou até mesmo preferirem o método tradicional, que deve continuar sendo abordado com os discentes.

Já sobre a Ficha 4, o que conclui é que a Malha Quadriculada, além de ser um recurso didático e rico para trabalhar vários conceitos, é uma estratégia atrativa, já que os estudantes se sentiram muito motivados e empolgados com a atividade proposta. O desempenho deles, em geral, foi bem razoável, e o propósito foi bem alcançado. Foi outra forma de enxergar a multiplicação, explorando a área de Grandezas e Medidas por meio da configuração retangular (uma das categorias das Estruturas Multiplicativas de Vergnaud). Ficou evidente que os discentes conseguiram pensar em alguns pontos da proposta, como a comutatividade da multiplicação, as possibilidades de decomposição multiplicativa e a representação de um produto por uma área de um retângulo, mobilizando esses invariantes operatórios diante da situação-problema proposta.

Portanto, mediante tudo que foi ressaltado e analisado, evidenciou-se que os problemas envolvendo as Estruturas Multiplicativas precisam ser trabalhados de maneira contínua, dado que o domínio de um dado campo conceitual é longo e extenso. Os recursos analisados possuem potencial para ampliar a bagagem de procedimentos dos estudantes no processo de resolução de problemas e na consolidação do conceito, e que, ao propor diversas situações e expor diferentes recursos e algoritmos, o docente contribui para o domínio do discente acerca das duas competências essenciais para a resolução de problemas: cálculo relacional e cálculo numérico.

Pretende-se dar continuidade a essa pesquisa em estudos futuros, uma vez que há a necessidade de encontrar novos recursos didáticos e novas estratégias para auxiliarem no domínio das Estruturas Multiplicativas, tanto na habilidade do cálculo relacional quanto do cálculo numérico. Sendo assim, é necessário continuar buscando pôr em prática as potencialidades de cada um desses recursos em turmas que apresentam dificuldades na multiplicação e divisão, abordando problemas com outros conjuntos numéricos também e realizando uma parceria entre os recursos e a resolução de problemas que envolvem as Estruturas Multiplicativas. Além disso, pretende-se aprofundar os conhecimentos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, com a finalidade de que as dificuldades que os discentes possuem em relação a essa parte que compõe a Matemática básica, sobretudo as dificuldades conceituais, sejam identificadas e minimizadas.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, Elson. Sistema de numeração decimal. **Educa Mais Brasil**, 16 de mai. de 2019. Disponível em: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/sistema-de-numeracao-decimal>>. Acesso em: 03 de fev. de 2024.
- BARBOSA, G. **O teorema fundamental da aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental**. 2008. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo, 2008.
- BARROS, R. A.; BOAVENTURA, T. S. L. Desenvolvimento dos Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo no Ensino dos Números Negativos: Uma Análise Crítica de Livros Didáticos. **Perspectivas da Educação Matemática**, INMA/UFMS, v.12, n.28, 2019.
- BIMBATI, Ana Paula. 7 em 10 alunos no Brasil não sabem mínimo de matemática, diz prova mundial. **UOL**, São Paulo, 05 de dez. de 2023. Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/noticias/2023/12/05/pisa-2022-alunos-brasil-desempenho-matematica.htm>>. Acesso em: 23 de fev. de 2024.
- BORGES, L. C. **A origem dos números**. 2012. P37-49. Tese – Licenciatura em Matemática – Universidade Federal de Mato grosso do Sul, Paranaíba, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.
- CARVALHO, Jadna. **Uma breve discussão sobre a multiplicação**. 2016. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.
- CASSIANO, Jordanna. et al. A aprendizagem da tabuada de multiplicação e o artifício de ensino aprendendo a multiplicar com as mãos: uma ação do subprojeto PIBID Matemática. **11ª Jornada Acadêmica da UEG Campus Santa Helena de Goiás**, 2019.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización em la enseñanza**. 3. Ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

FREIRE, P. (2002). **Ação cultural para a liberdade**. São Paulo: Paz e Terra.

GALDINO, A. P. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito da multiplicação**: um estudo com base na teoria histórico-cultural. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GIL, M. L. E.; ARRAIS, L. F. L. A multiplicação e o ensino: um estudo a partir das proposições de Davydov. **Colloquium Humanarum**, Presidente Prudente, v.18, p.77-85 jan/dez 2021.

GOES, Luciana. Matemática Montessori - Tábua de Pitágoras. **A Arte de Educar, Educação em questão**, 05 de set. de 2017. Disponível em: <<https://aartedeeducareducacaoemquestao.blogspot.com/2017/09/matematica-montessori-tabua-de-pitagoras.html>>. Acesso em: 08 de dez. de 2023.

IFRAH, George. **Números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas Senra. – 11 ed, - São Paulo: Globo, 2005.

LLORENTE, Analía. 3 métodos simples para aprender a multiplicar sem calculadora. Terra, 11 de dez. de 2017. Disponível em: <<https://www.terra.com.br/byte/ciencia/3-metodos-simples-para-aprender-a-multiplicar-sem-calculadora,efa37b250cec764a128a999ea6f7c410n64c4vjf.html>>. Acesso em: 06 de fev. de 2024.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. A Estrutura Multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: Uma visão com foco na aprendizagem. In: Castro Filho et al. **Matemática, Cultura e Tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016, p.66-82.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Investigações em Ensino de Ciências (UFRGS), Porto Alegre, v.7, n.1, 2002.

MORENO, H. M. C. **As operações aritméticas fundamentais:** suas implicações na expansão dos conjuntos numéricos e os números racionais não negativos. Cuiabá – MT, 2021.

MOTA, Roberta. Tabuada. **Educa Mais Brasil**, 03 de jan. de 2019. Disponível em: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/tabuada>>. Acesso em: 08 de dez. de 2023.

OLIVEIRA, A. M. L.; NASCIMENTO, E. S. A trajetória de vida de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática. **Itinerarius Reflectionis**, v.16, n.2, 2020.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco:** ensino fundamental. Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: Secretaria, 2021.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da Matemática**, 6º ano: ensino fundamental, anos finais. 1. Ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da Matemática**, 7º ano: ensino fundamental, anos finais. 1. Ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SANTOS, I. A.; BAIER, Tânia. O ensino de métodos históricos de multiplicação sob a perspectiva da pesquisa qualitativa. **Pesquisa Qualitativa na Educação e nas Ciências em Debate**. Foz do Iguaçu, 2018.

SILVA, B. L. O. **Um Estudo Histórico da Evolução do Algoritmo de Multiplicação:** da Babilônia à Aritmética de Treviso. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.

SOUZA, E. I. R.; MAGINA, S. M. P. A concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectivas da Educação Matemática**, INMA/UFMS, v.10, n.24, 2017.

Tabela Pitagórica. **Editora Conceitos.com**, São Paulo, dez. de 2017. Disponível em: <<https://conceitos.com/tabela-pitagorica/>>. Acesso em: 20 de dez. de 2023.

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lúcia Faria Mouro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Evolução das relações entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Didática da Matemática**. Editora: Instituto Piaget. Lisboa, 1996a.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983b, p.127-174.

VERGNAUD, G. **Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d1un exemple**: les structures aditives. Atelier Internacional d'Eté: Recherche em Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 1983a.

ANEXO B – MALHA QUADRICULADA