
ESTIMAÇÃO E TESTES DE PROCESSOS ESTACIONÁRIOS E
NÃO ESTACIONÁRIOS SAZONAIS COM LONGA DEPENDÊNCIA

BARTOLOMEU ZAMPROGNO

Orientadores: Prof. Dr. Manoel Raimundo da Sena Junior – UFPE

Prof. Dr. Valdério Anselmo Reisen – UFES

Área de concentração: Estatística Matemática

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal
de Pernambuco para obtenção do grau de Mestre em Estatística

Recife, fevereiro de 2004

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

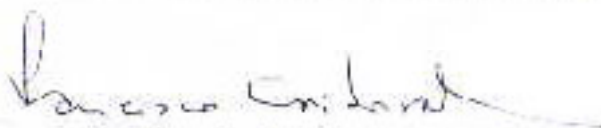
Bartolomeu Zambraglio

Intitulada

Estimação e testes de processos estacionários e não estacionários

sazonais com longa dependência

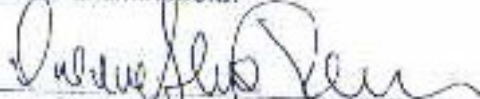
seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



Coordenador da Pós Graduação em Estatística

 **Prof. Francisco Cribari Neto**
Coordenador de Mestrado
Estatística

Banca Examinadora:



Valério Anselmo Reisen (UFES)

orientador



Sylvio José Ferreira dos Santos



Francisco Cribari Neto

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

A minha mãe, Rosângela.

Agradecimentos

A Deus, acima de qualquer coisa.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Manoel Raimundo da Sena Junior e Prof. Dr. Valdério Anselmo Reisen. Em especial, ao professor Valdério, que acreditou em minha pessoa em praticamente toda minha vida acadêmica.

Ao professor Prof. Dr. Francisco Cribari Neto por ter depositado confiança em mim.

Aos professores do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE.

Aos meus familiares. Em especial, a minha tia Ivanete.

Aos colegas de turma. Em especial, a Raydonal e Felipe.

À compreensão e ajuda da Adriana.

Ao colega Artur, pela ajuda compartilhada.

Ao Departamento de Estatística da UFES pela oportunidade do uso de sua infra-estrutura.

À capes, pelo apoio financeiro.

À Valéria Bittencourt, secretária do programa de pós-graduação, pelo carinho, pela convivência e presteza em seus afazeres.

A todos aqueles que acreditam em sonhos.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o processo ARFIMA sazonal (SARFIMA) no contexto de estimação, testes e poder considerando séries estacionárias e não estacionárias. Para estimar os parâmetros fracionários do modelo SARFIMA, os métodos usuais de estimação já existentes na literatura de séries temporais com longa dependência são aqui estendidos para séries com esta característica envolvendo sazonalidade. Consideramos as propostas de Hassler (1994) e Reisen, Rodrigues e Palma (2003a), que se baseiam no método de Geweke e Porter-Hudak (1983), e implementamos os estimadores de Reisen (1994) e Fox e Taqu (1986) para o modelo em análise. O estudo de teste e poder é considerado em processos sazonais com raízes unitárias. Nesta fase, o desempenho dos testes de Dickey, Hasza e Fuller (1984) e Hylleberg et al. (1990) são comparados com os testes obtidos através da distribuição empírica dos estimadores do parâmetro fracionário sazonal. Pontos críticos dos testes são obtidos para diferentes tamanhos amostrais. Os resultados empíricos apresentados neste trabalho contribuem para o aprimoramento da modelagem, estimação e testes de processos fracionários sazonais. Aplicamos a metodologia a um conjunto de dados reais.

Abstract

The main purpose of this thesis is to study the ARFIMA seasonal process (SARFIMA) in the context of estimating and power testing when dealing with stationary and nonstationary seasonal long memory time series. Some well known long memory parameter estimation procedures are extended here to the estimation of long memory parameters of the SARFIMA process. We consider the methods given by Hassler (1994) and Reisen, Rodrigues and Palma (2003a) which are based on the Geweke and Porter-Hudak (1983) procedure. The approaches in Reisen (1994) and Fox-Taquq (1986) are also implemented for long memory time series with seasonal component. The test and power studies are considered for unit root seasonal processes. The seasonal unit root tests given in Dickey, Hasza and Fuller (1984) and Hylleberg et al. (1990) are compared to those obtained from the long memory parameter estimation methods. Critical point values for testing seasonal unit root tests are obtained here for different sample sizes. The empirical study investigation presented in this work contributes for better understanding on the estimation and test for seasonal long memory process. The methodology is applied to a real data set.

Índice

1. Introdução	1
1.1. Introdução	1
1.2. Série temporal.....	3
1.2.1. Processos estocásticos	3
1.2.2. Conceitos básicos.....	5
1.3. Suporte computacional.....	6
2. Longa dependência e Raízes unitárias	7
2.1. Longa dependência	7
2.1.1. O processo ARFIMA(p, d, q)	8
2.1.2. Métodos de estimação do parâmetro d em modelos ARFIMA(p, d, q)	9
2.1.2.1. Estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983)	9
2.1.2.2. Estimador proposto por Reisen (1994)	11
2.1.2.3. Estimador proposto por Fox e Taqqu (1986)	13
2.2. Raízes unitárias	13
2.2.1. O teste de Dickey e Fuller (1979)	14
3. Modelo ARFIMA sazonal (SARFIMA).....	19
3.1. Introdução	19
3.2. O modelo ARFIMA sazonal.....	20
3.2.1. O modelo sazonal completo e o rígido	22
3.3. Estimadores para o modelo SARFIMA($0, d, 0$) $\times$ ($0, D, 0$) _s	24
3.3.1. Estimadores baseados no método de GPH.....	25
3.3.2. Estimadores baseados no método de Reisen	27
3.3.3. Estimador baseado no método de Fox e Taqqu	28

3.4. Processo de simulação	28
3.5. Resultados numéricos para o modelo rígido	29
3.6. Resultados numéricos para o modelo completo	37
4. Raízes unitárias sazonais	53
4.1. Introdução	53
4.2. Testes de raízes unitárias sazonais para período sazonal $s = 4$	54
4.2.1. Teste DHF	54
4.2.2. Teste HEGY	55
4.2.3. Teste usando estimadores de D	56
4.3. Processo de simulação	57
4.4. Resultados numéricos	57
4.4.1. Resultados do teste DHF	58
4.4.2. Resultados do teste HEGY	59
4.4.3. Resultados dos testes fracionários	59
4.4.4. Comparação entre testes	64
5. Uma aplicação	68
6. Conclusões	74
◦ Referências	76
◊ ANEXO A – Quadros de resultados numéricos para modelo rígido com $s = 4$	79
◊ ANEXO B – Quadros de resultados numéricos para modelo completo com $s = 4$	82
◊ ANEXO C – Quadros de resultados numéricos para modelo rígido com $s = 12$	90
◊ ANEXO D – Quadros de resultados numéricos para modelo completo com $s = 12$...	96
◊ ANEXO E – Pontos críticos	128

Capítulo 1

Introdução

1.1. Introdução

Em geral, o modelo clássico para séries temporais supõe que uma série X_t , onde $t = 1, 2, \dots, n$, possa ser escrita como a soma de três componentes: tendência (T_t), sazonalidade (S_t) e o termo aleatório (ε_t):

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$

É na componente sazonal que nossos estudos, considerando o fenômeno da longa dependência — conceito este abordado no capítulo 2 —, estão concentrados. Em particular, uma série sazonal pode ser descrita como uma série onde a função espectral apresenta picos nas frequências sazonais $\omega_s \equiv 2\pi j/s$, $j = 1, \dots, s/2$, onde s é o período sazonal.

Em séries temporais econômicas, a análise da variação sazonal vem sendo analisada desde o final da década de 20 como, por exemplo, em Mitchell (1927), Macaulay (1938) e Burns e Mitchell (1946). Apesar da longa história, existe pouco consenso sobre a melhor maneira de como tratar a sazonalidade, pois sua especificação varia significativamente de um artigo para outro e poucos pesquisadores providenciam uma justificação explícita do seu tratamento. Barsky e Miron (1989) consideram um modelo sazonal determinístico, Hansen e Sargent (1993) propõem um modelo sazonal periódico com periodicidade não alterada e Canova (1992) considera um modelo sazonal como a soma de um processo determinístico com um processo estocástico estacionário. Outra forma de tratamento é o modelo sazonal não estacionário, que permite raízes unitárias sazonais (Box e Jenkins, 1976). É muito difícil saber a priori que aproximação produz a melhor descrição estatística dos dados e, sabendo que a sazonalidade é quantitativamente importante em muitas séries, a imposição de um tipo de sazonalidade quando outra está presente pode resultar em sérios vieses, ou perda de informações. Segue-se assim a importância de estabelecer qual tipo de sazonalidade está presente.

Na literatura destacam-se três classes de séries temporais para modelar a sazonalidade: processos sazonais determinísticos, processos sazonais estacionários e processos sazonais integrados (ou processos sazonais não estacionários devido a raiz unitária sazonal). É neste

último processo que se erguem as maiores dificuldades das discussões estatísticas fazendo com que, logicamente, a análise deste tipo de processo preceda em relação a qualquer outro tipo de sazonalidade, pois resultados espúrios podem surgir se raízes unitárias sazonais estão presentes e são desconsideradas. Um relato mais detalhado destas três classes de séries temporais sazonais pode ser encontrado no capítulo 12 de Maddala e Kim (1998).

No contexto de séries temporais com característica de longa dependência, existem diversos trabalhos que abordam o estudo do parâmetro d do modelo ARFIMA(p, d, q). Geweke e Porter-Hudak [GPH] (1983) propuseram um estimador para d que é referenciado em praticamente todos os artigos desta área. Reisen (1994) propôs uma modificação no método de GPH, considerando a função periodograma suavizado ao invés da função periodograma. Fox e Taquq (1986), Sowell (1992) e Robinson (1994) são exemplos de outras contribuições para a estimação do parâmetro d .

Em outros contextos, Fava e Alves (1998) analisaram as taxas da inflação brasileira. Sowell (1990) derivou a distribuição assintótica da estatística teste de Dickey-Fuller no caso de processos fracionariamente integrados. A diversidade de aplicações é grande, entretanto o estudo do processo ARFIMA com componente sazonal é bem recente. Trabalhos como Porter-Hudak (1990) e Hassler (1994) apresentam propostas para a estimação do parâmetro D em processos sazonais com a característica de longa dependência. Reisen, Rodrigues e Palma (2003a, b) comparam estes estimadores como novas propostas, que, através de simulações de Monte Carlo, apresentaram melhores resultados.

As contribuições deste trabalho estão colocadas em dois pontos principais: a estimação dos parâmetros fracionários do modelo SARFIMA dentro e fora da região de estacionariedade e o poder dos testes de raízes unitárias sazonais quando o processo gerador da série apresenta longa dependência. No estudo de poder, pontos críticos foram gerados para as nossas análises.

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos de séries temporais. No capítulo 2 descrevemos a característica de longa dependência em processos ARFIMA(p, d, q), bem como alguns estimadores para o parâmetro d e propriedades; além disso, resumizamos o conceito de raiz unitária e o teste de Dickey e Fuller (1979). O primeiro objetivo deste trabalho é considerado no capítulo 3, onde avaliamos a estimação dos parâmetros fracionários do modelo SARFIMA em processos estacionários e não estacionários, apresentamos as funções espectrais de alguns processos e os resultados de simulações. No capítulo 4, os testes de raízes unitárias sazonais de Dickey, Hasza e Fuller (1984) e Hylleberg et al. (1990) são avaliados juntamente com as distribuições empíricas dos estimadores considerados no capítulo 3. No capítulo 5 mostramos uma aplicação e, finalmente, no capítulo 6 são descritas as conclusões, apresentando os resultados mais relevantes.

1.2. Série temporal

Uma série temporal é qualquer conjunto ordenado de observações. O tipo de ordenação se dá, geralmente, através do tempo, igualmente espaçado, em intervalos discretos. Outro tipo de ordenação, por exemplo, é o espaço. Séries temporais ocorrem em uma grande variedade de campos, tais como agricultura, negócios e economia, engenharia, geofísica, estudos médicos, controle de qualidade e outros. Dentre seus objetivos, podemos citar: investigar o mecanismo gerador, fazer previsões, descrever o comportamento e procurar periodicidades relevantes nos dados.

Existem, basicamente, duas áreas de concentração usadas na análise de séries temporais. Na primeira, a análise é feita no domínio do tempo e os modelos propostos são modelos paramétricos (com um número finito de parâmetros). No segundo, a análise é conduzida no domínio da frequência e os modelos propostos são modelos não-paramétricos.

Uma característica intrínseca de uma série temporal é que as observações são dependentes ou correlacionadas e a ordem das observações é, portanto, importante. Daí, procedimentos e técnicas estatísticas que assumem independência não podem ser aplicados, e diferentes métodos são necessários.

1.2.1. Processos estocásticos

Os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas. Abaixo apresentamos uma definição formal do que é um processo estocástico.

Definição 1.1: Seja τ um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família $X = \{X_t, t \in \tau\}$ tal que, para cada $t \in \tau$, X_t é uma variável aleatória.

Daí, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias, que suporemos definidas num mesmo espaço de probabilidades. O conjunto τ é normalmente associado ao conjunto dos inteiros $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

De outra maneira, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas no tempo $X(\omega, t)$, onde ω pertence a um espaço amostral e t pertence a um conjunto indexado. Para um t fixado, $X(\omega, t)$ é uma variável aleatória (v.a.). Para um dado ω^* , $X(\omega^*, t)$, com uma função de t , é denominada uma função amostral ou realização. Assim, uma série temporal é uma realização ou função amostral de um certo processo estocástico.

Para um processo estocástico X_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a média do processo é definida por

$$E(X_t) = \mu_t,$$

a variância por

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2,$$

a covariância entre X_t e X_{t+k} por

$$\gamma_k = \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t+k} - \mu_{t+k})],$$

e a correlação entre X_t e X_{t+k} é dada por

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\sigma_t^2 \sigma_{t+k}^2}}.$$

Uma das suposições mais freqüentes sobre uma série temporal é que ela é estacionária, ou seja, ela se desenvolve, ao longo do tempo, aleatoriamente em torno de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável.

Na teoria, podemos caracterizar um processo estocástico estacionário como sendo fortemente estacionário — onde a função de distribuição de probabilidade conjunta é invariante no tempo — ou estacionário até uma dada ordem. Para fins práticos, adota-se o processo fracamente estacionário.

Definição 1.2: Um processo estocástico $X(t)$, onde $t \in \tau$, é dito ser fracamente estacionário (ou simplesmente estacionário) se e somente se:

1. $E(X_t) = \mu_t = \mu$, constante, para todo $t \in \tau$;
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty$, para todo $t \in \tau$;
3. γ_k é uma função somente de k , para todo $t \in \tau$.

Definição 1.3: Um processo $\{a_t\}$ é chamado ruído branco se ele é uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas com média constante $E(a_t) = \mu_a$, usualmente assumindo ser 0, variância constante $\text{Var}(a_t) = \sigma_a^2$ e $\gamma_k = 0$ para todo $k \neq 0$.

Por definição, segue imediatamente que um processo ruído branco $\{a_t\}$ é estacionário. Quando $a_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, o denotaremos como ϵ_t e o chamaremos de ruído branco gaussiano.

1.2.2. Conceitos básicos

A partir desta seção, iremos considerar $\{X_t\}$ sempre como um processo estacionário. Logo, dos resultados apresentados na seção anterior, temos que, $E(X_t) = \mu$ e $\text{Var}(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2$ são constantes e a covariância γ_k é função somente de k . Neste contexto, podemos denominar

$$\gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

a função de autocovariância,

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+k})}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

a função de autocorrelação, onde $\gamma_0 = \text{Var}(X_t)$, e

$$\phi_{kk} = \text{Corr}(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1})$$

a função de autocorrelação parcial, pois representam, respectivamente, a covariância, a correlação e a correlação parcial entre X_t e X_{t+k} separadas somente por uma diferença de tempo k .

Podemos perceber que uma série temporal estacionária é caracterizada por todas as funções apresentadas nesta seção. Os valores exatos destes parâmetros podem ser obtidos se o conjunto de todas as possíveis realizações for conhecido, fato quase impossível em situações práticas. Sob algumas condições, nós podemos estimar estas funções.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ observações de um processo $\{X_t\}$, então um estimador não tendencioso e consistente de μ é a média amostral, isto é,

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Um estimador natural da função de autocovariância γ_k é dado pela função de autocovariância amostral:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n-1.$$

Daí, segue que o estimador da função de autocorrelação é dado por

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n-1,$$

onde $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ é a variância amostral. Priestley (1981) deriva as propriedades amostrais de $\hat{\gamma}_k$ e $\hat{\rho}_k$.

A função de autocorrelação parcial amostral é dada por

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{kj} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\rho}_{kj} \hat{\rho}_j},$$

onde $\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. Sob a hipótese de um processo ruído branco, a variância pode ser aproximada por $\text{Var}(\hat{\phi}_{kk}) \sim 1/n$. A prova deste resultado pode ser encontrada em Wei (1990).

No domínio da frequência, um processo $\{X_t\}$ estacionário tem a função espectral definida como

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Um estimador natural desta função é a função periodograma, dada por

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_k \cos(\omega k) \right]. \quad (1.1)$$

A função periodograma é um estimador assintoticamente não viciado da função espectral, veja Reisen (1995, p. 35).

1.3. Suporte computacional

Todos os programas elaboração da frequência, como uma característica orados para esta dissertação de mestrado foram construídos na linguagem de programação matricial **Ox**. Esta linguagem foi criada por Jurgen Doornik em 1994, veja Doornik (2001). Para construção dos gráficos utilizamos o pacote estatístico **R**. Este programa pode ser obtido em versões Windows, Linux, Unix e Macintosh da página <http://www.r-project.org>. Uma grande vantagem dos programas **Ox** e **R** é que podem ser obtidos gratuitamente.

Capítulo 2

Longa dependência e Raízes unitárias

2.1. Longa dependência

O interesse pelos processos estocásticos que apresentam longa dependência (ou memória longa) surgiu na área de ciências geofísicas no início da década de 50, com o trabalho pioneiro de Hurst na área de hidrologia. Somente na década de 80 esse tipo de processo passou a ser considerado em aplicações na área de economia. Os processos com memória longa caracterizam-se por persistente dependência entre as observações mesmo que bastante afastadas no tempo.

De maneira mais formal, pode-se definir um processo com longa dependência, no domínio do tempo, como uma série na qual as autocorrelações, mesmo distantes, não são desprezíveis, ou seja, a função de autocorrelação apresenta o seguinte comportamento:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)| = \infty.$$

No domínio da frequência, o processo é tal que a função espectral da série torna-se ilimitada para as frequências próximas de zero:

$$f_X(\omega) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \omega \rightarrow 0.$$

Dentre as formas possíveis de se representar os processos com longa dependência, a de maior destaque na literatura é o modelo $\text{ARIMA}(p, d, q)$, o qual apresenta esta característica para valores não inteiros de d . Nesta situação, d torna-se um parâmetro desconhecido e então o modelo $\text{ARIMA}(p, d, q)$ é referido como o modelo ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Models*), tendo sido introduzido por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981).

2.1.1. O processo ARFIMA(p, d, q)

Seja ϵ_t o processo ruído branco gaussiano. Considere B da forma $B^k X_t = X_{t-k}$, onde k assume valores inteiros. X_t , $t = 1, \dots, n$, é um processo ARFIMA(p, d, q) com diferenciação fracionária se pode ser escrito da forma

$$\phi(B)(1 - B)^d(X_t - \mu) = \theta(B)\epsilon_t, \quad (2.1)$$

onde $d \in \mathbb{R}$, $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios autoregressivo — de ordem p — e de média móvel — de ordem q — dados, respectivamente, por $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$. O termo $(1 - B)^d$ é definido como a expansão binomial, dada por

$$(1 - B)^d = 1 - dB - \frac{d(1-d)}{2!}B^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!}B^3 - \dots$$

Quando $d \in (-0.5, 0.5)$ e as raízes de $\phi(B)$ e $\theta(B)$ estão fora do círculo unitário, o processo definido por (2.1) é estacionário e invertível e sua função de densidade espectral $f_X(\omega)$ é dada por

$$f_X(\omega) = f_u(\omega)(2 \sin(\omega/2))^{-2d}, \quad \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.2)$$

onde $f_u(\omega)$ é a função de densidade espectral do processo ARMA(p, q); para maiores detalhes sobre o processo ARMA, veja Box, Jenkins e Reinsel (1994). Para $d \geq 0.5$, X_t é um processo não estacionário e invertível (Hosking, 1981).

Nota-se que

$$f_X(\omega) \sim \omega^{-2d}, \quad \text{quando } \omega \rightarrow 0.$$

Sendo assim, os processos ARFIMA estacionários divergem na frequência zero quando $d \in (0; 0.5)$ e um zero nessa mesma frequência quando $d < 0$.

Verifica-se que a função de autocorrelação do processo ARFIMA decai hiperbolicamente e que tem a seguinte relação assintótica,

$$\rho_k \sim k^{2d-1}, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Desta forma, os processos ARFIMA distinguem-se dos processos ARMA, pois o decaimento de sua função de autocorrelação é lento e hiperbólico, enquanto que nos modelos ARMA o decaimento é rápido e exponencial.

Existem vários estimadores do parâmetro de diferenciação fracionária d propostos na literatura, que podem ser classificados em paramétricos e semi-paramétricos. Os paramétricos, sugeridos por Fox e Taqqu (1986), Sowell (1992) e outros, são assim denominados devido à necessidade de determinar a ordem do processo; isto é, precisa-se definir o valor de p e q do processo ARFIMA(p, d, q). Já nos estimadores semi-paramétricos não há a exigência de definir tal ordem. Geweke e Porter-Hudak (1983) e Reisen (1994) são exemplos dessa segunda forma de classificação. Recentes estudos de simulação comparando métodos de estimação são Reisen, Abraham e Toscano (2000) e Lopes, Olbermann e Reisen (2003).

2.1.2. Métodos de estimação do parâmetro d em modelos ARFIMA(p, d, q)

Seja X_t um processo ARFIMA(p, d, q) com $d \in \Re$ representado pela expressão (2.1) e a função de densidade espectral de X_t dada pela expressão (2.2). Aplicando o logaritmo em (2.2) temos

$$\ln f_X(\omega) = \ln f_u(\omega) - d \ln \left[2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2. \quad (2.3)$$

Podemos reescrever (2.3) como

$$\ln f_X(\omega) = \ln f_u(0) - d \ln \left[2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2 + \ln \left[\frac{f_u(\omega)}{f_u(0)} \right]. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) será utilizada nas duas subseções seguintes para estimar d no modelo ARFIMA(p, d, q).

2.1.2.1. Estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983)

Este método baseia-se em uma equação que exhibe a relação entre a função de densidade espectral de um processo ARFIMA(p, d, q) e de um processo ARMA(p, q). Substituindo ω pelas frequências $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, para $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$ e adicionando $\ln I(\omega_j)$ na equação (2.4), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma, temos

$$\ln I(\omega_j) = \ln f_u(0) + \ln \left[\frac{f_u(\omega_j)}{f_u(0)} \right] + \ln \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right] - d \ln \left[2 \sin\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \right]^2. \quad (2.5)$$

Considerando o limite superior de j igual a $g(n)$, tal que $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, o termo $\ln \left[\frac{f_u(\omega_j)}{f_u(0)} \right]$ na equação (2.5) pode ser considerado desprezível. Assim, obtemos uma equação aproximada dada por

$$\ln I(\omega_j) \cong \ln f_u(0) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) resulta em uma equação aproximada de uma regressão linear simples da forma

$$y_j \cong b_1 + b_2 x_j + \varepsilon_j, \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$\begin{aligned} y_j &= \ln I(\omega_j), \\ b_1 &= \ln f_u(0) - c, \\ b_2 &= -d, \\ x_j &= \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2, \\ \varepsilon_j &= \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right] + c, \\ c &= E \left[- \frac{\ln I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \end{aligned}$$

As variáveis ε_j são aproximadamente independentes de distribuição de Gumbel com média zero e variância $\pi^2/6$, veja Reisen (1995, p. 37).

O estimador do parâmetro d proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), denotado por $\hat{d}$, utilizando o método de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) da regressão de $y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$ em $x_1, x_2, \dots, x_{g(n)}$, é dado por

$$\hat{d}_p = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde $\bar{x}$ é a média de $x_j = \ln [2 \operatorname{sen}(\frac{\omega_j}{2})]$, para $j = 1, 2, \dots, g(n)$.

Teorema 2.1 {Geweke e Porter-Hudak (1983)}. O estimador $\hat{d}_p$ do parâmetro de longa dependência tem distribuição assintoticamente normal quando $d \in (-0.5, 0)$ com:

1. $E(\hat{d}_p) = d$;
2. $\text{Var}(\hat{d}_p) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$,

na qual $g(n) = cn^\alpha$, onde $0 < \alpha < 1$ e c é uma constante qualquer.

2.1.2.2. Estimador proposto por Reisen (1994)

A função periodograma é um estimador não consistente da função densidade espectral. Entretanto, a função periodograma suavizado é um estimador assintoticamente não viciado e consistente da função densidade espectral (Priestley, 1981).

Reisen (1994) sugere substituir a função periodograma pela função periodograma suavizado na equação (2.5). A função periodograma suavizado é dada por

$$f_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \lambda(h) \hat{\gamma}_h \cos(\omega h), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde $\lambda(h)$ é uma função real de h , conhecida como janela (*lag window*).

Diferentes formas da função $\lambda(h)$ são sugeridas na literatura de séries temporais. Neste trabalho, utilizamos a janela de Parzen (Parzen, 1961), que é definida como

$$\lambda(h) = \begin{cases} 1 - 6(h/m)^2 + 6(h/m)^3, & |h| < m/2, \\ 2(1 - (h/m))^3, & m/2 \leq |h| \leq m, \\ 0, & |h| > m, \end{cases}$$

onde $m = n^\beta$ e $0 < \beta < 1$.

Retornando às equações (2.4) e (2.5), trocamos a função periodograma pela função periodograma suavizado. Assim, temos

$$\ln f_s(\omega_j) = \ln f_u(0) + \ln \left[\frac{f_u(\omega_j)}{f_u(0)} \right] + \ln \left[\frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right] - d \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2, \quad (2.7)$$

onde $j = 1, 2, \dots, g(n)$ e $g(n) = n^\alpha$, onde $0 < \alpha < 1$. Podemos reescrever a equação (2.7) como

$$\ln f_s(\omega_j) \cong \ln f_u(0) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) resulta em uma equação aproximada de uma regressão linear simples da forma

$$y_j \cong b_1 + b_2 x_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$\begin{aligned} y_j &= \ln f_s(\omega_j), \\ b_1 &= \ln f_u(0), \\ b_2 &= -d, \\ x_j &= \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2, \\ \varepsilon_j &= \ln \left[\frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \end{aligned}$$

Neste caso, ε_j , veja Reisen (1995, p. 43), possui distribuição assintótica normal com média zero e variância dada por

$$\operatorname{Var}[\ln(f_s(\omega)/f(\omega))] \sim \begin{cases} 0.53928 \left(\frac{m}{n} \right), & \omega \neq 0, \pi, \\ 1.07856 \left(\frac{m}{n} \right), & \omega = 0, \pi. \end{cases}$$

O estimador do parâmetro d proposto por Reisen (1994), denotado por $\hat{d}_{\text{sp}}$, utilizando o método de MQO da regressão de $y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$ em $x_1, x_2, \dots, x_{g(n)}$, é dado por

$$\hat{d}_{\text{sp}} = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde $\bar{x}$ é a média de $x_j = \ln[2 \operatorname{sen}(\frac{\omega_j}{2})]$, $j = 1, 2, \dots, g(n)$. Este estimador apresenta as seguintes propriedades assintóticas:

$$\begin{aligned} E(\hat{d}_{\text{sp}}) &= d, \\ \operatorname{Var}(\hat{d}_{\text{sp}}) &= 0.53928 \frac{m}{n \sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \bar{x})^2}, \quad \omega \neq 0, \pi, \end{aligned}$$

onde o valor $0.53928 \frac{m}{n}$ é a variância assintótica de ε_j . Para mais detalhes, veja Reisen (1995, p. 45).

2.1.2.3. Estimador proposto por Fox e Taqqu (1986)

Os procedimentos de estimação citados nas duas subseções anteriores, estimadores semi-paramétricos, estimam somente o parâmetro d do processo ARFIMA(p, d, q). Para estimar os demais parâmetros do modelo, primeiramente diferenciamos a série com o valor estimado para d e, após, aplicamos um determinado método de estimação como, por exemplo, o de máxima verossimilhança, no processo ARMA(p, q) resultante. Já no caso paramétrico, o estimador de máxima verossimilhança do processo ARFIMA(p, d, q) estima simultaneamente todos os parâmetros.

Sowell (1992) apresenta o estimador de máxima verossimilhança exato, entretanto é complicado obter computacionalmente esse estimador. Uma alternativa a este problema é a proposta de Fox e Taqqu (1986). Eles utilizam a proposta de Whittle (1951) para obter uma aproximação para o método da máxima verossimilhança. Em Hauser (1999) é descrito de forma completa este procedimento de estimação. De modo compacto, o estimador de Fox e Taqqu (1986) — utilizando a linguagem de programação `0x` — pode ser obtido minimizando, em relação aos parâmetros, a função

$$\sum_{j=1}^m \ln \left(\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right) + \sum_{j=1}^m \ln f_X(\omega_j), \quad \omega_j = 2\pi j/n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

onde m é o maior inteiro menor que $(n-1)/2$, $I(\omega_j)$ é a função periodograma dada pela equação (1.1) e $f_X(\omega_j)$ é a densidade espectral do processo ARFIMA.

2.2. Raízes unitárias

O problema de raiz unitária em modelos ARMA aparece quando o polinômio autorregressivo apresenta uma raiz sobre o círculo unitário. Isto implica que devemos tomar uma diferença da série original antes de ajustar o modelo.

Como exemplo, vamos considerar testes para raízes unitárias no modelo AR, mais especificamente consideremos o modelo AR(1) estacionário,

$$X_t = \theta_0 + \phi X_{t-1} + a_t, \quad (2.9)$$

onde a_t é o ruído branco e $\theta_0 = (1 - \phi)\mu$, $\mu = E(X_t)$, $|\phi| < 1$. Se $\hat{\phi}_{MV}$ indica o Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de ϕ , então sabemos que, para n observações do processo,

$$\sqrt{n}\hat{\phi}_{MV} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\phi, (1 - \phi^2)). \quad (2.10)$$

Se quisermos testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \phi = \phi_0$ contra a alternativa $\mathcal{H}_1 : \phi \neq \phi_0$, usamos a estatística

$$\frac{\hat{\phi}_{MV} - \phi_0}{\text{e.p.}(\hat{\phi}_{MV})}, \quad (2.11)$$

em que o denominador indica o erro padrão de $\hat{\phi}_{MV}$. Sob a hipótese nula, a estatística (2.11) tem uma distribuição t -Student. Observe que (2.10) pode ser escrita como

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_{MV} - \phi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, (1 - \phi^2)), \quad (2.12)$$

de modo que podemos dizer que $\hat{\phi}_{MV} = O_p(n^{-1/2})$, ou seja, a taxa de convergência do estimador é $1/\sqrt{n}$. Entretanto, no caso de raízes unitárias, a aproximação normal (2.10) não se aplica, logo não podemos usar a distribuição t para testar

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \phi &= 1, \\ \mathcal{H}_1 : \phi &< 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A subseção seguinte primeiramente define o processo Movimento Browniano Padrão e apresenta o Teorema Central do Limite Funcional, para descrever o teste de Dickey e Fuller (1979).

2.2.1. O teste de Dickey e Fuller (1979)

Os testes de raízes unitárias mais simples e amplamente utilizados foram desenvolvidos por Fuller (1976) e Dickey e Fuller (1979). Estes são aqui referidos como testes de **Dickey-Fuller** ou DF. Eles têm como hipótese nula a existência de uma raiz unitária, ou seja, a série

em estudo é integrada de ordem 1 ($d = 1$). A hipótese alternativa é que a série é estacionária, isto é, seu processo gerador é um $\text{ARMA}(p, q)$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Ocorre, porém, que uma série estacionária não é necessariamente um $\text{ARMA}(p, q)$, pois, se na equação (2.1), $0 < d < 0.5$, então o processo é estacionário com memória longa.

Consideremos o modelo (2.9) com média zero, isto é,

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t. \quad (2.14)$$

Segue-se que

$$\Delta X_t = \phi^* X_{t-1} + a_t, \quad (2.15)$$

onde $\phi^* = \phi - 1$. Podemos obter o Estimador de Mínimos Quadrados (EMQ) de ϕ^* por meio de Mínimos Quadrados (MQ) de ΔX_t sobre X_{t-1} . Logo (2.13) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^* : \phi^* &= 0, \\ \mathcal{H}_1^* : \phi^* &< 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definição 2.1: O Movimento Browniano Padrão (MBP) é um processo contínuo $\{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$ tal que:

- a) $W(0) = 0$;
- b) para quaisquer instantes $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$, as variáveis aleatórias $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ são independentes e $W(s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, s - t)$;
- c) as trajetórias de $W(t)$ são contínuas com probabilidade um.

A definição acima em conjunto com o Teorema Central do Limite (TCL) funcional dá a base para a demonstração dos testes de Dickey-Fuller que serão enunciados posteriormente. Apresentaremos agora o TCL funcional.

Se $X_1, X_2, \dots$ é uma seqüências de v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média μ e variância σ^2 , e $\bar{X}_n = 1/n \sum_{t=1}^n X_t$, então o TCL usual nos diz que

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.17)$$

Passemos, agora, a tomar médias de uma proporção r dos dados, $0 \leq r \leq 1$. Por exemplo, com n observações, calculemos a média da primeira metade dos dados,

$$\bar{X}_{[n/2]} = \frac{1}{[n/2]} \sum_{t=1}^{[n/2]} X_t. \quad (2.18)$$

Então, mais uma vez, usando o TCL,

$$\sqrt{[n/2]}(\bar{X}_{[n/2]} - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.19)$$

De modo geral, seja

$$X_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} X_t,$$

para $0 \leq r \leq 1$, que é proporcional à média das primeiras $100r\%$ observações. É fácil verificar que

$$X_n(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < 1/n, \\ X_1/n, & 1/n \leq r < 2/n, \\ (X_1 + X_2)/n, & 2/n \leq r < 3/n, \\ \vdots & \vdots \\ (X_1 + \dots + X_n)/n, & r = 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Podemos escrever

$$\sqrt{n}X_n(r) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} X_t = \frac{\sqrt{[nr]}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{[nr]}} \sum_{t=1}^{[nr]} X_t,$$

na qual

$$\sqrt{[nr]} \frac{1}{[nr]} \sum_{t=1}^{[nr]} X_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

pelo TCL e $\sqrt{[nr]}/\sqrt{n} \rightarrow \sqrt{r}$, logo obtemos

$$\sqrt{n}X_n(r) \xrightarrow{d} \sqrt{r}\mathcal{N}(0, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, r\sigma^2), \quad (2.21)$$

da qual segue, finalmente,

$$\sqrt{n} \frac{X_n(r)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r). \quad (2.22)$$

Observamos, também, que considerando médias baseadas em observações de $[nr_1]$ a $[nr_2]$, com $r_1 < r_2$, temos

$$\sqrt{n} \left[\frac{X_n(r_2) - X_n(r_1)}{\sigma} \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r_2 - r_1),$$

independentemente de (2.21), se $r < r_1$, do que concluímos que a seqüência de funções aleatórias $\{\frac{\sqrt{n}X_n(\cdot)}{\sigma}, n = 1, 2, \dots\}$ tem distribuição limite que é o MBP:

$$\frac{\sqrt{n}X_n(\cdot)}{\sigma} \xrightarrow{d} W(\cdot). \quad (2.23)$$

Em (2.22) temos o TCL funcional. Se $r = 1$, $X_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$, temos como resultado o TCL usual, a distribuição limite sendo $\mathcal{N}(0, 1)$.

Teorema 2.2: Considere o modelo (2.9) com $\theta_0 = 0$ e suponha que $a_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$. Então,

$$n(\hat{\phi}_{\text{MV}} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1)}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}, \quad (2.24)$$

onde $W(r)$ é o MBP, ou seja, para cada t , $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$.

Do teorema acima vemos que a taxa de convergência do estimador é diferente do caso estacionário: $\hat{\phi}_{\text{MQ}} = O_p(n^{-1})$. Para testar (2.13) ou (2.16) podemos usar a estatística

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\phi}_{\text{MQ}}^*}{\text{e.p.}(\hat{\phi}_{\text{MQ}}^*)}, \quad (2.25)$$

em que

$$\text{e.p.}(\hat{\phi}_{\text{MQ}}^*) = \frac{S}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} \quad (2.26)$$

e

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^n (\Delta X_t - \hat{\phi}_{\text{MQ}}^* X_{t-1})^2 \quad (2.27)$$

é o estimador de σ^2 na regressão acima. A estatística (2.25) é equivalente a

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\phi}_{\text{MQ}} - 1}{(S^2 / \sum X_{t-1}^2)^{1/2}}. \quad (2.28)$$

O resultado a seguir é consequência do Teorema 2.2.

Teorema 2.3: Sob as mesmas condições do teorema anterior,

$$\hat{\tau} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1)}{(\int_0^1 [W(r)]^2 dr)^{1/2}}. \quad (2.29)$$

Os testes usando (2.24) ou (2.29) são chamados *testes de Dickey-Fuller*. As distribuições destas estatísticas estão tabeladas em Fuller (1976).

Caso no Teorema 2.2 a média seja diferente de zero, no lugar de (2.24) e (2.29) teremos, respectivamente,

$$n(\hat{\phi}_{\text{MQ}} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1) - W(1) \int_0^1 W(r) dr}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr - (\int_0^1 W(r) dr)^2}, \quad (2.30)$$

$$\hat{\tau}_\mu \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1) - W(1) \int_0^1 W(r) dr}{[\int_0^1 [W(r)]^2 dr - (\int_0^1 W(r) dr)^2]^{1/2}}. \quad (2.31)$$

Neste caso, $\theta_0 \neq 0$, a notação padrão utilizada para $\hat{\tau}$ é $\hat{\tau}_\mu$, entendendo-se que o processo X_t tem média $\mu = \theta_0/(1 - \phi)$. A distribuição de $\hat{\tau}_\mu$ afasta-se mais da normal do que no caso $\mu = 0$.

Outros testes de raízes unitárias, como Dickey-Fuller aumentado [ADF] — veja Said e Dickey (1984) — e Phillips e Perron [PP] (1988) são também bastante utilizados. Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin [KPSS] (1992) é um teste de estacionariedade cuja hipótese alternativa considera a raiz unitária. Para um estudo desses testes, ver os capítulos 3 e 4 de Maddala e Kim (1998).

Capítulo 3

Modelo ARFIMA sazonal (SARFIMA)

3.1. Introdução

Uma série temporal exhibe o fenômeno sazonal quando este se repete depois de um regular período de tempo não superior a um ano. O menor período de tempo desta repetição do fenômeno é denominado de período sazonal. Assim, quando as observações de uma série temporal — que estão deslocadas s unidades de tempo — exibem um comportamento similar, dizemos que a série apresenta sazonalidade com período s . Os dados de consumo japonês é um exemplo de série temporal sazonal com $s = 4$ — veja, Engle et al. (1993); já a venda de automóveis em um ano — que decai nos meses de agosto e setembro, devido à chegada de novos modelos ao mercado —, bem como a venda de brinquedos — que crescem no mês de dezembro — são exemplos de séries que têm a componente sazonal com período $s = 12$.

A análise da componente sazonal considerando o fenômeno da longa dependência ainda é bem recente. Porter-Hudak (1990) examina um conjunto de séries de agregação monetária estendendo o modelo de diferenciação fracionária de Granger e Joyeux (1980) e de Geweke e Porter-Hudak (1983) para o caso sazonal, ou seja, o modelo de diferenciação fracionária sazonal. Este modelo também é considerado por Hassler (1994). Ray (1993) analisou a série rendimento mensal dos produtos da IBM comparando as previsões de um modelo ARIMA sazonal, metodologia Box e Jenkins (1976), com o SARFIMA, onde este apresentou melhores resultados. Arteche e Robinson (2000) introduziram o processo de memória longa cíclico ou sazonal assimétrico e avaliaram métodos usuais de estimação como o da regressão do logaritmo da função periodograma e Fox-Taqqu.

Porter-Hudak (1990) sugere a estimação, para o modelo SARFIMA, considerando frequências harmônicas próximas da frequência zero. Hassler (1994) considera um caso particular do modelo estudado por Porter-Hudak, o modelo $\text{SARFIMA}(0, 0, 0) \times (0, D, 0)_s$, e recomenda utilizar as frequências harmônicas, baseando-se também no método de Geweke e Porter-Hudak (1983), não somente na vizinhança da frequência zero, mas em todas as frequências, isto é, na frequência zero e nas sazonais. Um dos problemas destes métodos está na pouca quantidade de observações que terminam figurando na equação de regressão. Em estudo recente, Reisen, Rodrigues e Palma (2003a) compararam a sugestão de Porter-Hudak (1990) e Hassler (1994) com uma nova proposta, onde — em vez de somente utilizar

as freqüências próximas das freqüências zero e sazonais na regressão — consideraram todas as freqüências harmônicas. Esta proposta resultou em melhores estimativas (tanto em viés como em erro quadrático médio) do que as sugeridas por Porter-Hudak (1990).

Nossa proposta de trabalho para este capítulo é comparar diferentes estimadores para os parâmetros de longa dependência, d e D , do modelo $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, avaliando como se comportam dentro e fora da região de estacionariedade. Consideramos os estimadores de Hassler (1994), para modelo rígido, Reisen, Rodrigues e Palma (2003a, b), e os estimadores de Fox e Taqu (1986) e Reisen (1994) são adaptados para o caso sazonal. Na seção 3.2 descrevemos o processo em estudo. Apresentamos os estimadores para os parâmetros fracionários do modelo SARFIMA na seção 3.3. Nas seções 3.4, 3.5 e 3.6, respectivamente, comentamos o processo de simulação e apresentamos os resultados numéricos.

3.2. O modelo ARFIMA sazonal

Consideremos o filtro

$$\Delta_k = (1 - B^k),$$

onde $\Delta_1 = (1 - B)$, $\Delta_4 = (1 - B^4)$ e assim por diante. A metodologia de Box e Jenkins (1976) usa a primeira diferença para eliminar a tendência, a quarta diferença para eliminar a sazonalidade em séries com período $s = 4$ e a décima segunda diferença para eliminar sazonalidade em séries com período $s = 12$.

A idéia acima pode ser estendida para processos sazonais onde a diferença não é necessariamente inteira; ou seja, um filtro alternativo é dado por $(1 - B^s)^D$, onde $D \in \mathfrak{R}$. Nesta situação, podemos ter séries temporais sazonais estacionárias e não estacionárias, dependendo do valor de D . A seguir definimos o processo SARFIMA.

Definição 3.1 (Peires e Singh, 1996): O processo SARFIMA $\{X_t\}$ é definido por

$$\Phi(B^s)\phi(B)(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t, \quad (3.1)$$

onde

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$$

e

$$\Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

são chamados, respectivamente, de operadores AR e MA sazonais. Os polinômios $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são aqueles definidos na seção 2.1.1. Os valores que p, q, P, Q e s assumem são inteiros positivos e os parâmetros d e D assumem valores reais.

De acordo com o Teorema 2 de Giraitis e Leipus (1995) e com a Proposição 3.1 abaixo, o modelo 3.1 é estacionário e invertível se e somente se $|d + D| < 1/2$, $|D| < 1/2$ e $\phi(z)$, $\theta(z)$, $\Phi(z)$ e $\Theta(z)$ têm suas raízes fora do círculo unitário. Desta maneira, permite-se d e D assumir valores positivos e negativos e a função espectral do processo SARFIMA(p, d, q) $\times$ (P, D, Q) $_s$ apresenta zero ou picos nas frequências pertencentes ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

Proposição 3.1: Seja a_t ruído branco e $d, D \in \left\{(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})\right\}$ e $s \in \mathbb{N}$. Se $|d + D| < \frac{1}{2}$, então a série temporal definida por

$$(1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t = a_t \quad (3.1.1)$$

é estacionária e invertível.

Prova: Sabemos que quando $d, D \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1 - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j$ e $(1 - B^s)^{-D} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i B^{si}$, onde $b_j = \frac{\Gamma(d+j-1)}{j! \Gamma(d-1)}$ e $c_i = \frac{\Gamma(D+i-1)}{i! \Gamma(D-1)}$, quando aplicado em um ruído branco resulta uma série temporal estacionária e invertível.

De (3.1.1) podemos reescrever X_t como

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - B)^{-d} (1 - B^s)^{-D} a_t \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i B^{si} \right) a_t \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l B^l a_t \\ &= \psi(B) a_t, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

onde

$$\psi_l = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{s} \rfloor} b_{l-sk} c_k. \quad (3.1.3)$$

Pela formula de Stirling e através de algumas artifícios algébricos, temos que

$$|\psi_l| \leq C_{d,D}(l^{d-1} + l^{D-1} + l^{d+D-1}), \quad l \geq 1,$$

onde $C_{d,D}$ é uma constante independente de l . Então, usando a desigualdade acima e resultados de séries infinitas pode-se mostrar que $\sum_{l=0}^{\infty} |\psi_l|^2 < \infty$ para $d + D < \frac{1}{2}$. Portanto, $\psi(B)$ converge quando $|B| < 1$. Assim, a série é estacionária.

Para provar a invertibilidade, a prova é similar a anterior com d e D substituídos, na desigualdade acima, por $-d$ e $-D$, respectivamente. Assim, para $d + D > -0.5$, a série dos coeficientes ao quadrado da representação infinita AR converge quando $|B| < 1$. c.q.d.

O modelo (3.1) tem uma ampla variedade de aplicações, tais como nas áreas de engenharia, saúde, biologia e economia. Neste estudo, consideramos $p = q = P = Q = 0$; ou seja, é considerado apenas o SARFIMA(0, d , 0) $\times$ (0, D , 0)_s, denominado de modelo completo.

3.2.1. O modelo sazonal completo e o rígido

Seja um processo $\{X_t\}$ satisfazendo

$$(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = a_t, \quad (3.2)$$

onde a_t é ruído branco. Note que $(1 - B^s)^D$ é da forma

$$(1 - B^s)^D = 1 - DB^s - \frac{D(1-D)}{2!}B^{2s} - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!}B^{3s} - \dots$$

O modelo (3.2) é denominado de modelo sazonal completo fracionalmente integrado quando $d, D \in \mathbb{R}$. A função espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} (2 \sin(\omega s/2))^{-2D} (2 \sin(\omega/2))^{-2d}, \quad (3.3)$$

para $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Quando, em (3.2), $d = 0$, denominamos de modelo rígido.

O espectro é ilimitado nas frequências $\omega = 2\pi v/s$, $v = 0, 1, \dots, [s/2]$. Quando $v = 0$, denominamos de frequência zero e para $v = 1, \dots, [s/2]$, chamamos de frequências sazonais. A notação $[s/2]$ significa que pegamos a parte inteira do resultado da divisão de s por 2. Com objetivo de ilustrar o comportamento de (3.3), apresentamos nas Figuras 1 e 2 formas de $f_X(\omega)$ para diferentes valores de D , d e s . Observamos que nas frequências zero e sazonais a função espectral é ilimitada quando $d + D > 0$ e $D > 0$. E a presença de d no processo

gerador, modelo completo, altera o comportamento da função espectral, principalmente nas frequências mais próximas da frequência zero. Também chamamos atenção para o valor do parâmetro D que à medida que seu valor aumenta, a função espectral apresenta-se mais nítida, no sentido de ser ilimitada. Repare que, variando de $D = 0.3$ para $D = 0.7$, a função espectral fica mais concentrada entre as frequências sazonais.

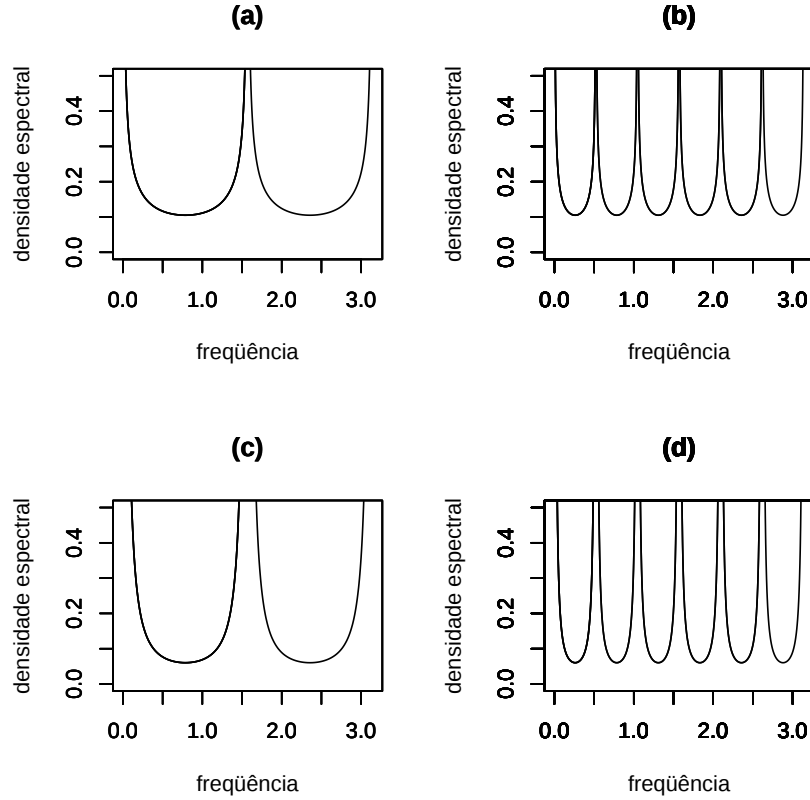


Figura 1. Função de densidade do modelo rígido: (a) Modelo SARFIMA(0,0,0) $\times$ (0,0.3,0)₄
(b) Modelo SARFIMA(0,0,0) $\times$ (0,0.3,0)₁₂ (c) Modelo SARFIMA(0,0,0) $\times$ (0,0.7,0)₄
(d) Modelo SARFIMA(0,0,0) $\times$ (0,0.7,0)₁₂.

A função de autocorrelação de $\{X_t\}$, para o modelo rígido, pode ser calculada utilizando o procedimento formulado por Hosking (1981). A função de autocorrelação deste processo decai de forma lenta e com picos nos *lags* sazonais. Esta função de autocorrelação é dada por

$$\rho_{sk} = \frac{\Gamma(1-D)\Gamma(k+D)}{\Gamma(D)\Gamma(1+k-D)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

e $\rho_{sk+r} = 0$, para $r = 1, \dots, s-1$.

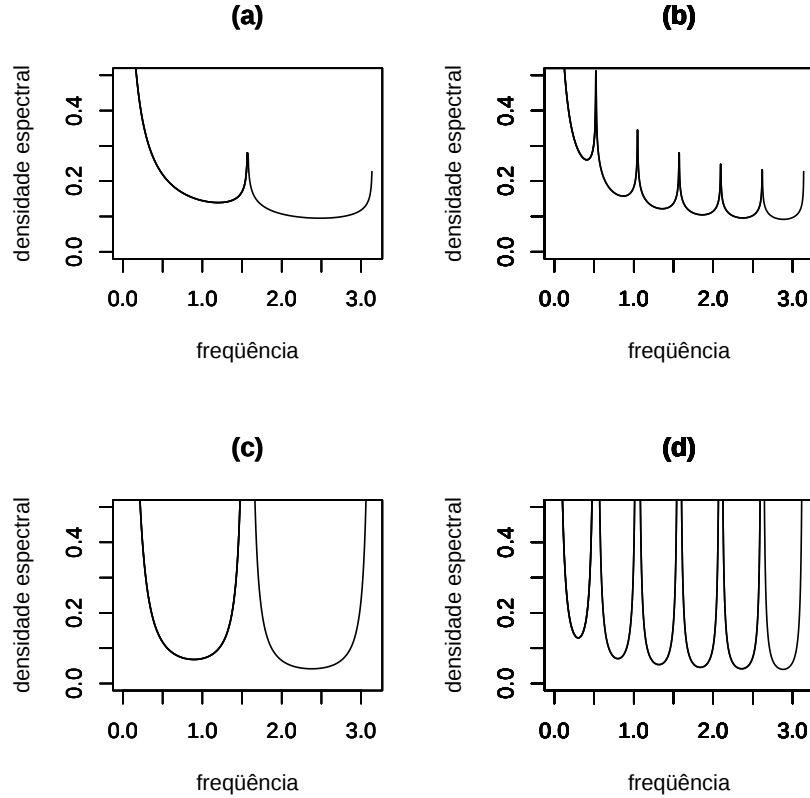


Figura 2. Função de densidade do modelo completo: (a) Modelo SARFIMA(0, 0.3, 0) $\times$ (0, 0.1, 0)₄
(b) Modelo SARFIMA(0, 0.3, 0) $\times$ (0, 0.1, 0)₁₂ (c) Modelo SARFIMA(0, 0.3, 0) $\times$ (0, 0.7, 0)₄
(d) Modelo SARFIMA(0, 0.3, 0) $\times$ (0, 0.7, 0)₁₂.

Na Figura 3 apresentamos uma série simulada e sua função de autocorrelação amostral, para um modelo rígido. Note que a autocorrelação é diferente de zero somente nos *lags* múltiplos de s .

3.3. Estimadores para o modelo SARFIMA(0, d , 0) $\times$ (0, D , 0) _{s}

Conduzimos os estudos com os métodos de Geweke e Porter-Hudak (GPH), Reisen, e Fox e Taqu descritos anteriormente, mas agora considerando processos sazonais. Em uma das propostas, os estimadores GPH e Reisen apresentam metodologias análogas, quando é considerada a estimação de D e d numa região próxima às frequências zero e sazonais em estudo. Na outra sugestão, os três estimadores são estudados em todas as frequências com exceção das sazonais (Reisen, Rodrigues e Palma, 2003a). Estes métodos estão descritos nas três subseções seguintes.

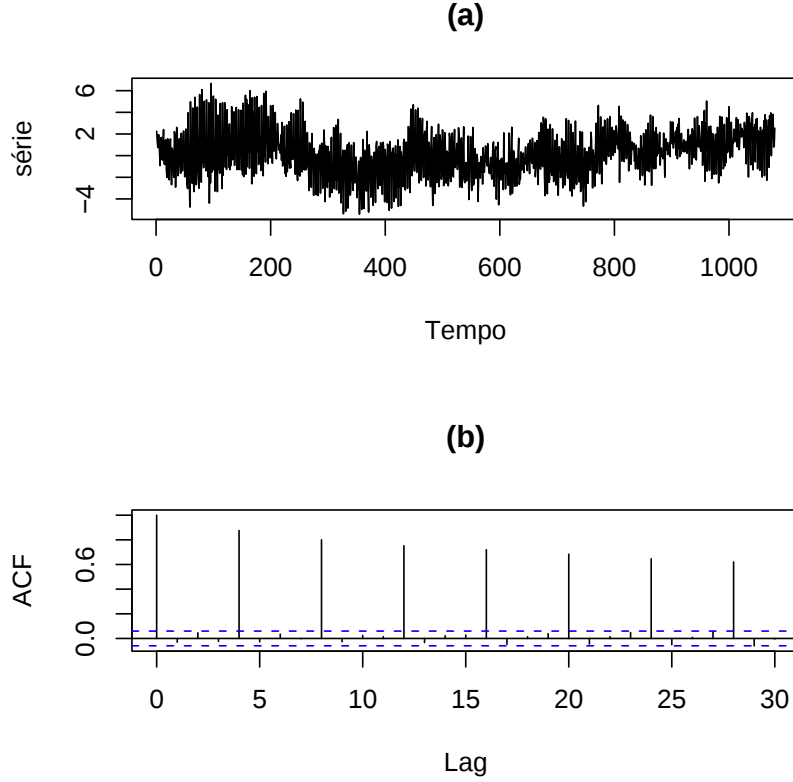


Figura 3. (a) Série temporal simulada - Modelo rígido com $n = 1080$, $D = 0.7$ e $s = 4$
(b) Autocorrelação amostral da série apresentada em (a).

3.3.1. Estimadores baseados no método de GPH

Este estimador segue o mesmo padrão descrito na seção 2.1.2.1., mas agora é adaptado para o caso sazonal. Sabemos que o estimador do método de GPH é baseado em uma regressão linear oriunda do logaritmo da função espectral do processo. Então, aplicando o logaritmo em (3.3), temos

$$\ln f_X(\omega) = \ln \frac{\sigma_a^2}{2\pi} - D \ln 4 \sin^2(\omega s/2) - d \ln 4 \sin^2(\omega/2), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) pode ser interpretada como uma regressão linear múltipla, isto é,

$$y_j = b_1 + b_2 x_{1j} + b_3 x_{2j} + \varepsilon_j, \quad (3.5)$$

onde $y_j = \ln I_x(\omega_j)$, $x_{1j} = \ln 4 \sin^2(\omega_j s/2)$, $x_{2j} = \ln 4 \sin^2(\omega_j/2)$, ε_j é uma sequência

de variáveis aleatórias não-correlacionadas com média zero e mesma variância, b_1 é uma constante, $b_2 = -D$ e $b_3 = -d$. Daí, D e d são estimados via mínimos quadrados ordinários.

No modelo ARFIMA, $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, onde n é o número de observações, $j = 1, 2, \dots, m$ e m é uma função de n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Entretanto, em modelos sazonais, é interessante analisar a regressão (3.5) com ω variando na vizinhança da frequência zero e das frequências sazonais; isto é, estamos interessados nas frequências harmônicas, todas as frequências com exceção da frequência zero e das sazonais. Portanto, temos

$$\omega_{v,j} = \begin{cases} \frac{2\pi v}{s} + \frac{2\pi j}{n}, & v = 0, 1, \dots, [s/2] - 1, \\ \frac{2\pi v}{s} - \frac{2\pi j}{n}, & v = [s/2], \end{cases}$$

onde $j = 1, 2, \dots, m$. Note que quando $v = [s/2]$, $\omega_{v,j} \geq \pi$. Por isso, neste caso, fazemos $\omega_{v,j} = \frac{2\pi v}{s} - \frac{2\pi j}{n}$.

Considerando o número de observações divisível por s , escolhemos $m = \frac{n}{2s} - 1$, pois existem $n/2$ frequências harmônicas. Se considerarmos $m = \frac{n}{2s}$, então a regressão ao redor de uma frequência sazonal entra no domínio da frequência sazonal seguinte, o que não é de nosso interesse.

Desta forma, para cada frequência considerada, temos um estimador de D e d . Estes estimadores são denotados por GPH_v , $v = 0, 1, \dots, [s/2]$. Por exemplo, GPH_1 é o estimador originado da regressão variando ω em torno da frequência sazonal correspondente a $v = 1$ ($\omega_{1,j}$, $j = 1, \dots, m$). O procedimento descrito até aqui seguiu da idéia dada por Hassler (1994). Reisen, Rodrigues e Palma (2003a) propõem uma regressão utilizando todas as frequências harmônicas, com exceção das frequências zero e sazonais; esta forma é denotada por GPH_T . A variância assintótica de GPH_v e GPH_T para o modelo rígido é idêntica a do estimador $\hat{d}_p$, veja Lema 1 de Hassler (1994).

Suponha, por exemplo, que $n = 120$ e $s = 4$. Daí, $j = 1, 2, \dots, 14$ e $v = 0, 1, 2$. Logo, temos

$$\omega_{0,j} = \frac{2\pi j}{n}, \quad \omega_{1,j} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi j}{n}, \quad \omega_{2,j} = \pi - \frac{2\pi j}{n}.$$

Então, cada regressão em torno da v -ésima frequência é realizada com 14 observações. O estimador GPH_T utiliza 57 observações ($60 - 3$), que são as frequências harmônicas. Observe que a quantidade de elementos que entram no cálculo da regressão é bem reduzida, principalmente para o estimador GPH_v .

Na Figura 4 apresentamos as regiões da função densidade espectral utilizadas para os estimadores considerados neste capítulo. A linha escura representa estas regiões. Podemos perceber que os estimadores que fazem uso de todas as frequências harmônicas utilizam maior quantidade de observações.

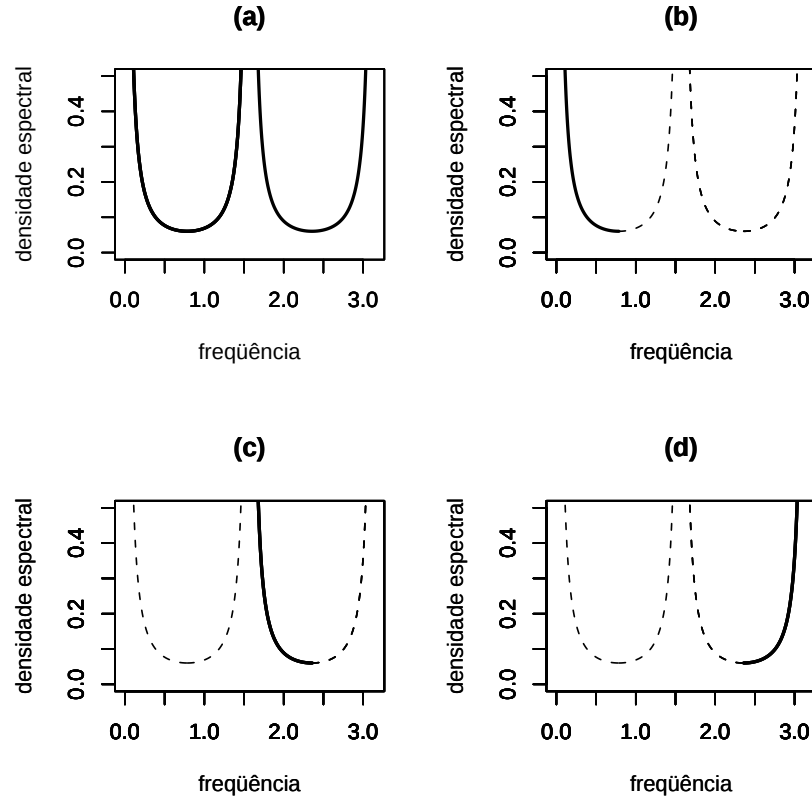


Figura 4. Exemplos das regiões da densidade espectral usada para os estimadores,

$s = 4$: (a) Região de GPH_T , sp_T e FT (b) Região de GPH_0 e sp_0

(c) Região de GPH_1 e sp_1 (d) Região de GPH_2 e sp_2 .

3.3.2. Estimadores baseados no método de Reisen

De maneira análoga ao estimador GPH_v e ao estimador de Reisen, Rodrigues e Palma (2003a) que são baseados no método de GPH (1983), adaptamos o estimador de Reisen (1994) para o caso onde a sazonalidade está presente nos dados. A única mudança em relação aos métodos apresentados na seção anterior se dá na estimação da função espectral, onde, em vez de considerar a função periodograma, consideramos a função periodograma suavizado (veja seção 2.1.2.2). Assim, denominamos de sp_v os estimadores de D e d que

consideram as frequências harmônicas próximas da frequências zero ou sazonais, e spt o estimador que considera todas as frequências harmônicas. A notação “sp” vem do inglês (*smoothed periodogram*). Também, para modelo rígido, pode ser mostrado que a variância assintótica destes estimadores de D é análoga a variância assintótica de $\hat{d}_{sp}$.

3.3.3. Estimador baseado no método de Fox e Taquq

Este método é baseado no estimador Fox e Taquq (1986), apresentado na seção 2.1.2.3. No entanto,

$$\sum_{j=1}^m \ln \left(\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right) + \sum_{j=1}^m \ln f_X(\omega_j)$$

difere do estimador apresentado no capítulo 2, na função $f_X(\omega_j)$, onde, agora, $f_X(\omega_j)$ é a equação (3.3), com $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, mas excluindo os valores de j que fazem ω_j ser frequência zero ou sazonal. Este método é denotado por FT. Para modelo rígido, Arteche e Robinson (2000) mostram que a variância assintótica do estimador de D é igual a variância assintótica do estimador de d do modelo ARFIMA.

3.4. Processo de simulação

Baseando-se na representação autoregressiva

$$(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = \epsilon_t, \quad (3.6)$$

onde ϵ_t é um número pseudo-aleatório de uma distribuição normal padrão, geramos amostras para os processos em estudo descartando as 300 observações iniciais. No caso de modelos rígidos ($d = 0$), simulamos séries para diferentes valores de D , considerando este pertencente ou não à região estacionária. Em relação aos modelos completos, estes também foram avaliados dentro ($d + D < 0.5$) e fora ($d + D \geq 0.5$) da condição de estacionariedade.

Para avaliarmos o comportamento dos estimadores, geramos amostras de tamanhos $n = 120, 240, 360, 480$ e 1080 replicando cada grandeza amostral 1000 vezes. E, para efeito de comparação dos estimadores, utilizamos as quantidades amostrais: média, viés e erro quadrático médio (EQM).

3.5. Resultados numéricos para o modelo rígido

No Quadro 1 apresentamos os resultados dos estimadores considerados nas seções anteriores quando D pertence à região estacionária. Neste caso, avaliamos $D = 0.3$ com $s = 4$. Observamos que dentre os estimadores que consideram a estimação de D , utilizando frequências perto da frequências zero ou sazonais, GPH_v e sp_v , o estimador GPH_v apresenta um menor viés em relação a sp_v , entretanto quando observamos o EQM de cada estimador esta relação se inverte. Por exemplo, ao fixarmos nossa atenção à estimação na primeira frequência sazonal das amostras de tamanhos 240 e 1080, percebemos que a medida viés é bem menor para GPH_1 (0.0083), mas em EQM, sp_1 (0.0158) é o que apresenta melhor resultado para o tamanho de amostra igual a 240 e esta relação é idêntica à situação de tamanho amostral $n = 1080$. Outra observação é que quando aumentamos o tamanho da amostra os estimadores ficam mais precisos tanto em viés quanto em EQM, como era esperado. Por exemplo, quando observamos o viés (0.0083) e o EQM (0.0280) de GPH_1 para $n = 240$ e comparamos com o viés (0.0030) e o EQM (0.0044) de $n = 1080$, vemos que quanto maior o tamanho da amostra, melhores são as estimativas. Agora, dentre os estimadores que consideram todas as frequências harmônicas, GPH_T , sp_T e FT , os estimadores baseados no método da regressão (GPH_T e sp_T) apresentam os melhores resultados tanto em viés quanto em EQM, sendo que o estimador FT só vem a apresentar um melhor resultado — entretanto não melhor que os dois outros estimadores — quando o tamanho da amostra tem um grandeza razoável ($n \geq 480$). Se observarmos, para $n = 480$ e 1080, o EQM do estimador FT , vemos que este apresenta um melhor resultado em relação a GPH_T . Em termos de viés, FT perde para todos os estimadores considerados, até mesmo os que se baseiam apenas em algumas frequências harmônicas, GPH_v e sp_v ; então, deixando-o de fora da análise, percebemos que os estimadores baseados em todas frequências harmônicas são melhores nas duas medidas consideradas. Provavelmente isto se deve à maior quantidade de elementos considerados na equação de regressão destes estimadores. Outros resultados considerando $0 < D < 0.5$ podem ser encontrados no ANEXO A, Quadro A1, caso $D = 0.1$ com $s = 4$. As considerações apresentadas para $D = 0.3$ podem ser estendidas para esse caso.

A partir de agora, para não se tornar repetitivo, toda vez que fizermos menção a um quadro que pertence a um anexo, iremos referir a esse determinado quadro sem referirmos à qual anexo ele se encontra; na notação Quadro A1, a letra A indica ANEXO A e o número 1 indica o primeiro quadro deste anexo. Seguindo esta notação, por exemplo, se por acaso fizermos menção ao Quadro B3a isto significará que este específico quadro é a primeira parte do terceiro quadro do ANEXO B.

Quadro 1. Resultados para $D = 0.3$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{D}$)	0.3004	0.3105	0.3262	0.2234	0.3637	0.3492	0.3122	0.3220	0.1690
	viés($\hat{D}$)	0.0004	0.0105	0.0262	-0.0765	0.0637	0.0492	0.0122	0.0220	-0.1309
	EQM($\hat{D}$)	0.0710	0.0711	0.0700	0.0469	0.0354	0.0385	0.0164	0.0101	0.0278
240	média($\hat{D}$)	0.3029	0.3083	0.3117	0.2637	0.3399	0.3278	0.3050	0.3149	0.2386
	viés($\hat{D}$)	0.0029	0.0083	0.0117	-0.0362	0.0399	0.0278	0.0050	0.0149	-0.0614
	EQM($\hat{D}$)	0.0258	0.0280	0.0239	0.0186	0.0158	0.0155	0.0065	0.0042	0.0080
360	média($\hat{D}$)	0.3028	0.3099	0.3087	0.2753	0.3232	0.3197	0.3058	0.3093	0.2612
	viés($\hat{D}$)	0.0028	0.0099	0.0087	-0.0246	0.0232	0.0197	0.0058	0.0093	-0.0387
	EQM($\hat{D}$)	0.0155	0.0156	0.0151	0.0105	0.0091	0.0103	0.0041	0.0025	0.0038
480	média($\hat{D}$)	0.2997	0.3030	0.3012	0.2807	0.3188	0.3135	0.3033	0.3087	0.2695
	viés($\hat{D}$)	-0.0002	0.0030	0.0012	-0.0192	0.0188	0.0135	0.0033	0.0087	-0.0304
	EQM($\hat{D}$)	0.0107	0.0110	0.0116	0.0074	0.0065	0.0073	0.0028	0.0018	0.0025
1080	média($\hat{D}$)	0.2979	0.3030	0.3005	0.2885	0.3109	0.3077	0.3007	0.3046	0.2858
	viés($\hat{D}$)	-0.0020	0.0030	0.0005	-0.0114	0.0109	0.0077	0.0007	0.0046	-0.0141
	EQM($\hat{D}$)	0.0044	0.0044	0.0044	0.0033	0.0026	0.0028	0.0011	0.0006	0.0008

Considerando agora D fora da região estacionária, no Quadro 2 apresentamos resultados referentes a $D = 0.7$ com $s = 4$. Os estimadores GPH_v e sp_v não apresentam comportamento semelhante ao caso $D = 0.3$. Mais especificamente, observe — com exceção de GPH_0 , para $n = 120$ — que entre GPH_0 e sp_0 , considerando todos os tamanhos amostrais, sp_0 apresentou um menor viés em relação a GPH_0 . Por exemplo, tomando $n = 360$, vemos que o viés de sp_0 (0.0046) é bem menor que o viés de GPH_0 (0.0321) e esta relação também é válida para o EQM. Já nas frequências sazonais, em geral, o estimador GPH_v apresenta menor viés e menor EQM do que o estimador sp_v . Observamos isto, por exemplo, para $n = 1080$ onde o viés e EQM de GPH_1 e GPH_2 são menores que os de sp_1 e sp_2 . Estes comentários indicam que estes estimadores não se comportam muito bem.

Ainda no caso $D = 0.7$ com $s = 4$, mas agora avaliando os estimadores GPH_T , sp_T e FT , observamos que o estimador FT apresenta comportamento superior aos outros dois — com exceção de $n = 120$, onde GPH_T exibe melhores resultados —, pois a partir de tamanho de amostra $n = 240$, considerando o EQM, e $n = 360$, avaliando o viés, estas medidas apresentam os melhores resultados para este estimador. Estas considerações podem ser estendidas para o Quadro A3, onde $D = 0.9$. Levando em consideração apenas os estimadores semi-paramétricos, observamos que, assim como no caso $D = 0.3$ (estacionário), GPH_T apresenta um menor viés para qualquer tamanho de amostra considerado e, além disso, em alguns casos, como em $n = 360$ e $n = 1080$, o EQM é inferior ou igual de sp_T .

Em outra análise, variando D de 0.1 a 0.9, verificamos que o estimador FT melhora tanto em viés quanto em EQM à medida que D aumenta e o tamanho da amostra cresce. Por exemplo, para $D = 0.9$ (Quadro A3), FT apresenta os melhores resultados em relação a qualquer outro estimador. Em relação aos estimadores que são baseados em uma regressão considerando todas as frequências harmônicas, GPH_T e sp_T , quando $0 < D < 0.5$, sp_T tem um maior viés e menor EQM. Estes resultados assemelham-se aos encontrados para um modelo ARFIMA(p, d, q), veja Reisen, Abraham e Toscano (2000). No entanto, quando D não mais pertence à região de estacionariedade o estimador GPH_T apresenta um melhor desempenho, pois passa a ter menor viés e EQM. Esta afirmação também é válida para $D = 1.0$, veja Quadro 3. No caso dos estimadores GPH_v e sp_v , observamos que estes estimadores se comportam de maneira bem distinta, dependendo do valor de D . Quando $D = 0.1$ (Quadro A1), sp_v tem um menor EQM para todos os valores de v em todos tamanhos amostrais considerados. Além disso, sp_2 apresenta-se também melhor em viés, sendo que a partir de $n = 480$ fato semelhante também ocorre para sp_1 . Mas, analisando $D = 0.3$ e $D = 0.5$ (este último fora da região estacionária) o comportamento dos estimadores, em geral, é análogo aos resultados dos modelos ARFIMA(p, d, q); ou seja, sp_v tem menor EQM

Quadro 2. Resultados para $D = 0.7$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	s _{PT}	FT
120	média($\hat{D}$)	0.7388	0.7319	0.7178	0.6504	0.8812	0.8425	0.7299	0.8144	0.5928
	viés($\hat{D}$)	0.0388	0.0319	0.0178	-0.0495	0.1812	0.1425	0.0299	0.1144	-0.1071
	EQM($\hat{D}$)	0.0733	0.0682	0.0736	0.0490	0.0682	0.0774	0.0171	0.0252	0.0232
240	média($\hat{D}$)	0.7290	0.7307	0.7223	0.6891	0.8239	0.8085	0.7287	0.7866	0.6627
	viés($\hat{D}$)	0.0290	0.0307	0.0223	-0.0108	0.1239	0.1085	0.0287	0.0866	-0.0372
	EQM($\hat{D}$)	0.0280	0.0269	0.0299	0.0200	0.0322	0.0325	0.0078	0.0131	0.0058
360	média($\hat{D}$)	0.7321	0.7324	0.7296	0.7047	0.8047	0.7893	0.7294	0.7749	0.6850
	viés($\hat{D}$)	0.0321	0.0324	0.0296	0.0046	0.1047	0.0893	0.0294	0.0749	-0.0149
	EQM($\hat{D}$)	0.0201	0.0180	0.0180	0.0126	0.0214	0.0234	0.0053	0.0091	0.0031
480	média($\hat{D}$)	0.7209	0.7296	0.7225	0.7003	0.7910	0.7729	0.7251	0.7634	0.6909
	viés($\hat{D}$)	0.0209	0.0296	0.0225	0.0095	0.0153	0.0150	0.0251	0.0634	-0.0091
	EQM($\hat{D}$)	0.0142	0.0112	0.0121	0.7634	0.0634	0.0064	0.0034	0.0064	0.0020
1080	média($\hat{D}$)	0.7148	0.7164	0.7189	0.7070	0.7529	0.7488	0.7181	0.7412	0.7020
	viés($\hat{D}$)	0.0148	0.0164	0.0189	0.0070	0.0529	0.0488	0.0181	0.0412	0.0020
	EQM($\hat{D}$)	0.0052	0.0053	0.0053	0.0037	0.0060	0.0066	0.0016	0.0027	0.0008

e maior viés. No entanto, com $D = 0.7$ e 0.9 , sp_0 exibe melhor desempenho que GPH_0 , mas GPH_1 e GPH_2 apresentam melhores resultados tanto em viés quanto em EQM, que, no geral, independe do tamanho de amostra considerado. Uma observação importante é que os estimadores semi-paramétricos, que utilizam ou não todas as frequências harmônicas, não apresentam boas medidas de viés quando $0.5 < D < 1.0$. Em todos os casos esta medida é muito distante do ideal, próxima de zero.

A situação $D = 1.0$, retratada no Quadro 3, dá indícios de nova alteração no comportamento dos estimadores, pois GPH_T , em geral, apresenta resultados melhores que sp_T e FT . Vimos que até $D = 0.9$, FT tem uma melhora significativa em viés e EQM, apresentando-se melhor nas medidas consideradas, mas, neste caso, perde destaque, em viés e EQM, para GPH_T , que se torna o melhor estimador.

A partir de agora, avaliaremos o modelo rígido com $s = 12$. Nos Quadros 4a e 4b estão os resultados referentes a $D = 0.3$, caso estacionário. No geral, podemos observar que as considerações feitas para $D = 0.3$, mas com período sazonal $s = 4$, são aplicáveis aqui. No entanto, a qualidade das estimações piora bastante em termos de viés e EQM para todos os estimadores considerados. Por exemplo, observe que, para $n = 1080$, o viés e o EQM de sp_T são 0.0310 e 0.0043 , respectivamente. Comparando com a situação de mesmo tamanho amostral e mesmo valor para D , mas período sazonal $s = 4$, encontramos valores bem menores, 0.0046 , o viés, e 0.0006 , o EQM. Esta piora na estimação é verificada para qualquer valor de D em todos tamanhos amostrais considerados. Esse acréscimo em valores das medidas viés e EQM pode ser checado também nos demais quadros que exibem resultados de sazonalidade com período sazonal $s = 12$ quando em comparação com os quadros que exibem resultados para o período sazonal $s = 4$. Além disso, pode ser observado que este acréscimo também ocorre no modelo completo.

Independente do comentado no parágrafo anterior, apesar das estimativas ficarem mais imprecisas com o aumento do período sazonal, na região estacionária observamos que os estimadores se comportam de maneira bem parecida, ou seja, quando $s = 4$ e $D = 0.1$ sp_v apresenta em algumas frequências menor viés e EQM que GPH_v , sendo semelhante ao que ocorre com $D = 0.1$ com $s = 12$, veja Quadros C1a e C1b. Dando sequência, entre GPH_T e sp_T , GPH_T exibe menor viés e sp_T menor EQM, mas GPH_T apresenta resultados mais condizentes. Observe as seguintes situações para $n = 360$. Avaliando $D = 0.1$, podemos observar que GPH_T apresenta viés absoluto ($|-0.0003|$) menor que sp_T (0.0021), embora apresente EQM (0.0052) mais elevado do que sp_T (0.0028); já quando $D = 0.3$, o viés de GPH_T (0.0087) é muito menor do que o de sp_T (0.0369) e o EQM (0.0058) não é muito distante daquele de sp_T (0.0047). Além disso, observamos que o valor que é atribuído a D

Quadro 3. Resultados para $D = 1.0$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{D}$)	0.9940	1.0012	0.9836	0.8953	1.2041	1.1489	0.9891	1.1170	0.8631
	viés($\hat{D}$)	-0.0059	0.0011	-0.0163	-0.1046	0.2041	0.1489	-0.0108	0.1170	-0.1368
	EQM($\hat{D}$)	0.0640	0.0662	0.0692	0.0638	0.0747	0.0747	0.0142	0.0227	0.0270
240	média($\hat{D}$)	0.9818	1.0097	0.9933	0.9473	1.1368	1.1046	0.9239	1.0047	0.8576
	viés($\hat{D}$)	-0.0181	0.0096	-0.0066	-0.0526	0.1368	0.1046	0.0239	0.1047	-0.0423
	EQM($\hat{D}$)	0.0306	0.0302	0.0299	0.0277	0.0371	0.0372	0.0071	0.0161	0.0059
360	média($\hat{D}$)	0.9871	0.9978	0.9788	0.9724	1.1054	1.0677	0.9923	1.0663	0.9563
	viés($\hat{D}$)	-0.1280	-0.0021	-0.0211	-0.0275	0.1054	0.0676	-0.0076	0.0662	-0.0436
	EQM($\hat{D}$)	0.0224	0.0219	0.0203	0.0186	0.0252	0.0203	0.0037	0.0068	0.0038
480	média($\hat{D}$)	0.9823	1.0009	0.9860	0.9733	1.0908	1.0637	0.9936	1.0569	0.9667
	viés($\hat{D}$)	-0.0177	0.0008	-0.0139	-0.0266	0.0908	0.0636	-0.0064	0.0569	-0.0332
	EQM($\hat{D}$)	0.0163	0.0172	0.0171	0.0125	0.0195	0.0181	0.0025	0.0049	0.0024
1080	média($\hat{D}$)	0.9872	1.0027	0.9846	0.9856	1.0595	1.0311	0.9942	1.0352	0.9844
	viés($\hat{D}$)	-0.0127	0.0027	-0.0153	-0.0143	0.0595	0.0311	-0.0057	0.0352	-0.0155
	EQM($\hat{D}$)	0.0096	0.0104	0.0095	0.0070	0.0104	0.0085	0.0011	0.0019	0.0007

Quadro 4a. Resultados para $D = 0.3$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.3325	0.2601	0.3144	0.3566	0.3238	0.3013	0.3103	0.0636	0.3733
	viés($\hat{D}$)	0.0325	-0.0399	0.0144	0.0566	0.0238	0.0013	0.0103	-0.2364	0.0733
	EQM($\hat{D}$)	0.5310	0.5785	0.4946	0.5311	0.5931	0.4723	0.5514	0.2002	0.1323
240	média($\hat{D}$)	0.2949	0.2821	0.2897	0.3227	0.3203	0.3054	0.3125	0.1791	0.3404
	viés($\hat{D}$)	-0.0051	-0.0179	-0.0103	0.0227	0.0203	0.0054	0.0125	-0.1209	0.0404
	EQM($\hat{D}$)	0.1478	0.1329	0.1379	0.1218	0.1427	0.1450	0.1378	0.0897	0.0540
360	média($\hat{D}$)	0.3056	0.2916	0.3144	0.3019	0.3154	0.3135	0.3012	0.2245	0.3379
	viés($\hat{D}$)	0.0056	-0.0084	0.0144	0.0019	0.0154	0.0135	0.0012	-0.0755	0.0379
	EQM($\hat{D}$)	0.0717	0.0663	0.0735	0.0723	0.0747	0.0792	0.0691	0.0499	0.0294
480	média($\hat{D}$)	0.3140	0.3034	0.3088	0.3081	0.3022	0.2992	0.2956	0.2509	0.3349
	viés($\hat{D}$)	0.0140	0.0034	0.0088	0.0081	0.0022	-0.0008	-0.0044	-0.0491	0.0349
	EQM($\hat{D}$)	0.0460	0.0422	0.0469	0.0481	0.0438	0.0433	0.0503	0.0316	0.0212
1080	média($\hat{D}$)	0.2994	0.3122	0.2976	0.3040	0.3081	0.2920	0.3040	0.2170	0.3479
	viés($\hat{D}$)	-0.0006	0.0122	-0.0024	0.0040	0.0081	-0.0080	0.0040	-0.0830	0.0479
	EQM($\hat{D}$)	0.0661	0.0665	0.0682	0.0717	0.0644	0.0707	0.0728	0.0481	0.0320

Quadro 4b. Resultados para $D = 0.3$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPHr	spr	FT
120	média($\hat{D}$)	0.3902	0.3875	0.3822	0.3724	0.3330	0.3142	0.3523	-0.2974
	viés($\hat{D}$)	0.0902	0.0875	0.0822	0.0724	0.0330	0.0142	0.0523	-0.5974
	EQM($\hat{D}$)	0.1267	0.1291	0.1308	0.1193	0.1625	0.0394	0.0175	0.3819
240	média($\hat{D}$)	0.3425	0.3570	0.3711	0.3497	0.3310	0.3042	0.3369	0.0911
	viés($\hat{D}$)	0.0425	0.0570	0.0711	0.0497	0.0310	0.0042	0.0369	-0.2088
	EQM($\hat{D}$)	0.0546	0.0554	0.0584	0.0529	0.0671	0.0109	0.0070	0.0505
360	média($\hat{D}$)	0.3499	0.3439	0.3488	0.3579	0.3261	0.3087	0.3369	0.1775
	viés($\hat{D}$)	0.0499	0.0439	0.0488	0.0579	0.0261	0.0087	0.0369	-0.1224
	EQM($\hat{D}$)	0.0348	0.0333	0.0338	0.0346	0.0392	0.0058	0.0047	0.0188
480	média($\hat{D}$)	0.3395	0.3440	0.3381	0.3353	0.3221	0.3033	0.3296	0.2090
	viés($\hat{D}$)	0.0395	0.0440	0.0381	0.0353	0.0221	0.0033	0.0296	-0.0909
	EQM($\hat{D}$)	0.0248	0.0256	0.0236	0.0222	0.0288	0.0039	0.0031	0.0105
1080	média($\hat{D}$)	0.3460	0.3413	0.3399	0.3470	0.3340	0.3003	0.3310	0.1696
	viés($\hat{D}$)	0.0460	0.0413	0.0399	0.0470	0.0340	0.0003	0.0310	-0.1303
	EQM($\hat{D}$)	0.0308	0.0323	0.0318	0.0333	0.0388	0.0057	0.0043	0.0206

influencia também na qualidade da estimativa. Quanto ao estimador FT, observamos que este apresenta os piores resultados.

Seguindo os comentários, mas agora considerando a situação onde D pertence à região não estacionária, expomos nos Quadros 5a e 5b o caso $D = 0.7$ com $s = 12$. Demais quadros encontram-se no ANEXO C. Os resultados mostram que o estimador GPH_T é melhor nas duas medidas avaliadas quando comparadas com as de sp_T e FT. Isto é um indício de alteração no comportamento dos estimadores. Observe também os resultados dos Quadros 6a, 6b, C3a e C3b, onde podemos confirmar o comentado. Note que o EQM de sp_T é maior do que GPH_T para todos tamanhos amostrais considerados. Assim, o estimador GPH_T é o que apresenta os melhores resultados, situação diferente da ocorrida para $s = 4$ onde o estimador FT exibe as menores medidas de viés e EQM, para grandes tamanhos amostrais ou quando D está bem próximo de um. Se voltarmos os Quadros 4a, 4b, C2a e C2b, caso estacionário, observaremos que GPH_T apresenta menor viés e maior EQM do que sp_T , situação idêntica à caracterizada para processos ARFIMA.

Diante das considerações apresentadas, observamos que quando o valor de D aumenta de 0.1 para 1.0 — alguns resultados estão apresentados no ANEXO C —, o estimador baseado no logaritmo da função periodograma, GPH_T , apresenta as melhores estimativas, como pode ser verificado pelo viés e EQM, em relação aos demais.

3.6. Resultados numéricos para o modelo completo

Os Quadros 7a, 7b, 8a, 8b, 9a, 9b, 10a e 10b, juntamente com os quadros pertencentes ao ANEXO B, contêm resultados referentes à estimação conjunta de D e d com $s = 4$. Chamamos atenção aos Quadros 7a, 7b, 9a e 9b, onde estes, se observarem os demais quadros, têm praticamente todos os valores preenchidos, com exceção da medida $\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$ (correlação entre $\hat{D}$ e $\hat{d}$) que não foi obtida para os estimadores que utilizam todas as frequências harmônicas. A motivação que nos levou ao cálculo da correlação referida, para os estimadores GPH_v e sp_v , é devida aos altos valores, de viés e EQM, exibidos para as estimativas do parâmetro d . Ainda nos referindo aos Quadros 7a, 7b, 9a e 9b, deixamos presentes os valores das medidas (média, viés e EQM), que dizem respeito à estimativa do parâmetro d , de GPH_1 , GPH_2 , sp_1 e sp_2 para esclarecermos, mais adiante, o erro que se comete em estimar d nas frequências sazonais — ou seja, distante da frequência zero. No caso de estimação conjunta de D e d com $s = 12$, as medidas apresentadas na estimação de d também mostram valores cada vez maiores à medida que se afasta da frequência zero até porque existem seis frequências sazonais; nesta situação não deixamos nenhum quadro completo para visualização.

Quadro 5a. Resultados para $D = 0.7$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.7188	0.7091	0.7302	0.7461	0.7237	0.7368	0.7420	0.3543	0.9809
	viés($\hat{D}$)	0.0188	0.0091	0.0302	0.0461	0.0237	0.0368	0.0420	-0.3457	0.2809
	EQM($\hat{D}$)	0.5439	0.5635	0.5522	0.5533	0.5534	0.5249	0.5103	0.2709	0.2224
240	média($\hat{D}$)	0.7436	0.7261	0.7391	0.7031	0.7471	0.7329	0.7296	0.5839	0.8989
	viés($\hat{D}$)	0.0436	0.0261	0.0391	0.0031	0.0471	0.0329	0.0296	-0.1161	0.1989
	EQM($\hat{D}$)	0.1234	0.1360	0.1285	0.1375	0.1384	0.1410	0.1353	0.0873	0.0985
360	média($\hat{D}$)	0.7260	0.7251	0.7384	0.7221	0.7465	0.7357	0.7282	0.6306	0.8674
	viés($\hat{D}$)	0.0260	0.0251	0.0384	0.0221	0.0465	0.0357	0.0282	-0.0694	0.1674
	EQM($\hat{D}$)	0.0758	0.0704	0.0661	0.0730	0.0672	0.0712	0.0753	0.0538	0.0690
480	média($\hat{D}$)	0.7290	0.7307	0.7386	0.7396	0.7516	0.7223	0.7278	0.6627	0.8552
	viés($\hat{D}$)	0.0290	0.0307	0.0386	0.0396	0.0516	0.0223	0.0278	-0.0373	0.1552
	EQM($\hat{D}$)	0.0485	0.0479	0.0460	0.0495	0.0501	0.0510	0.0447	0.0352	0.0510
1080	média($\hat{D}$)	0.7082	0.7424	0.7199	0.7268	0.7464	0.7453	0.7277	0.6248	0.8832
	viés($\hat{D}$)	0.0082	0.0424	0.0199	0.0268	0.0464	0.0453	0.0277	-0.0752	0.1832
	EQM($\hat{D}$)	0.0761	0.0719	0.0668	0.0693	0.0747	0.0721	0.0714	0.0566	0.0714

Quadro 5b. Resultados para $D = 0.7$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPHr	spr	FT
120	média($\hat{D}$)	0.9602	0.9739	0.9476	0.9430	0.9074	0.7296	0.9116	0.1264
	viés($\hat{D}$)	0.2602	0.2739	0.2476	0.2430	0.2074	0.0296	0.2116	-0.5735
	EQM($\hat{D}$)	0.2181	0.2165	0.2119	0.2069	0.2618	0.0393	0.0628	0.3557
240	média($\hat{D}$)	0.9168	0.8883	0.9118	0.9155	0.8643	0.7339	0.8774	0.5240
	viés($\hat{D}$)	0.2168	0.1883	0.2118	0.2155	0.1643	0.0339	0.1774	-0.1760
	EQM($\hat{D}$)	0.1076	0.0937	0.1082	0.1070	0.1182	0.0125	0.0392	0.0377
360	média($\hat{D}$)	0.8805	0.8669	0.8778	0.8766	0.8306	0.7327	0.8500	0.6010
	viés($\hat{D}$)	0.1805	0.1669	0.1778	0.1766	0.1306	0.0327	0.1500	-0.0989
	EQM($\hat{D}$)	0.0691	0.0647	0.0657	0.0656	0.0741	0.0070	0.0271	0.0135
480	média($\hat{D}$)	0.8537	0.8576	0.8646	0.8522	0.8190	0.7346	0.8367	0.6390
	viés($\hat{D}$)	0.1537	0.1576	0.1646	0.1522	0.1190	0.0346	0.1367	-0.0609
	EQM($\hat{D}$)	0.0513	0.0522	0.0521	0.0487	0.0518	0.0054	0.0220	0.0062
1080	média($\hat{D}$)	0.8655	0.8776	0.8770	0.8850	0.8439	0.7336	0.8527	0.6026
	viés($\hat{D}$)	0.1655	0.1776	0.1770	0.1850	0.1439	0.0335	0.1527	-0.0973
	EQM($\hat{D}$)	0.0641	0.0680	0.0675	0.0712	0.0726	0.0068	0.0275	0.0133

Quadro 6a. Resultados para $D = 1.0$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.9704	1.0284	1.0077	0.9954	0.9948	0.9904	0.9586	0.5675	1.2803
	viés($\hat{D}$)	-0.0296	0.0284	0.0077	-0.0046	-0.0052	-0.0096	-0.0414	-0.4325	0.2803
	EQM($\hat{D}$)	0.5116	0.4553	0.4394	0.5086	0.5012	0.5287	0.5388	0.3723	0.2160
240	média($\hat{D}$)	0.9665	0.9967	0.9902	0.9877	0.9986	0.9983	0.9695	0.8169	1.2254
	viés($\hat{D}$)	-0.0335	-0.0033	-0.0098	-0.0123	-0.0014	-0.0017	-0.0305	-0.1831	0.2254
	EQM($\hat{D}$)	0.1320	0.1433	0.1293	0.1279	0.1312	0.1454	0.1344	0.1215	0.1155
360	média($\hat{D}$)	0.9825	1.0042	0.9971	1.0123	1.0107	1.0031	0.9924	0.9125	1.1992
	viés($\hat{D}$)	-0.0175	0.0042	-0.0029	0.0123	0.0107	0.0031	-0.0076	-0.0875	0.1992
	EQM($\hat{D}$)	0.0744	0.0739	0.0708	0.0781	0.0778	0.0675	0.0654	0.0651	0.0779
480	média($\hat{D}$)	0.9930	1.0042	0.9962	1.0192	0.9929	0.9911	0.9831	0.9383	1.1732
	viés($\hat{D}$)	-0.0070	0.0042	-0.0038	0.0192	-0.0071	-0.0089	-0.0169	-0.0617	0.1732
	EQM($\hat{D}$)	0.0473	0.0497	0.0507	0.0502	0.0518	0.0545	0.0456	0.0426	0.0584
1080	média($\hat{D}$)	0.9712	0.9988	1.0076	0.9959	1.0086	1.0087	0.9817	0.8999	1.1987
	viés($\hat{D}$)	-0.0288	-0.0012	0.0076	-0.0041	0.0086	0.0087	-0.0183	-0.1001	0.1987
	EQM($\hat{D}$)	0.0721	0.0722	0.0752	0.0737	0.0645	0.0703	0.0747	0.0616	0.0814

Quadro 6b. Resultados para $D = 1.0$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPHr	spT	FT
120	média($\hat{D}$)	1.2981	1.3013	1.2671	1.2831	1.1681	0.9963	1.2250	0.3996
	viés($\hat{D}$)	0.2981	0.3013	0.2671	0.2831	0.1681	-0.0036	0.2250	-0.6003
	EQM($\hat{D}$)	0.2226	0.2183	0.2092	0.2332	0.2528	0.0326	0.0640	0.3813
240	média($\hat{D}$)	1.2270	1.2242	1.2319	1.2365	1.1558	0.9904	1.1908	0.7857
	viés($\hat{D}$)	0.2270	0.2242	0.2319	0.2365	0.1558	-0.0095	0.1907	-0.2142
	EQM($\hat{D}$)	0.1128	0.1132	0.1205	0.1202	0.1223	0.0092	0.0427	0.0510
360	média($\hat{D}$)	1.1844	1.2029	1.1961	1.1936	1.1495	0.9998	1.1681	0.8715
	viés($\hat{D}$)	0.1844	0.2029	0.1961	0.1936	0.1495	-0.0001	0.1680	-0.1284
	EQM($\hat{D}$)	0.0717	0.0823	0.0798	0.0777	0.0764	0.0052	0.0317	0.0192
480	média($\hat{D}$)	1.1706	1.1803	1.1654	1.1758	1.1286	1.0005	1.1503	0.9084
	viés($\hat{D}$)	0.1706	0.1803	0.1654	0.1758	0.1286	0.0005	0.1502	-0.0916
	EQM($\hat{D}$)	0.0588	0.0637	0.0604	0.0613	0.0564	0.0032	0.0250	0.0100
1080	média($\hat{D}$)	1.1909	1.1936	1.2055	1.2002	1.1398	0.9967	1.1691	0.8684
	viés($\hat{D}$)	0.1909	0.1936	0.2055	0.2002	0.1398	-0.0032	0.1691	-0.1315
	EQM($\hat{D}$)	0.0779	0.0790	0.0840	0.0779	0.0772	0.0050	0.0321	0.0200

Resultados referentes a $d = 0.3$ e $D = 0.1$ com $s = 4$ estão apresentados nos Quadros 7a e 7b. Observe que $d + D < 0.5$, portanto estamos no caso estacionário. Como agora temos que estimar conjuntamente d e D , devemos tomar cuidado na avaliação dos estimadores, pois destacaremos o estimador que apresentar menor viés e EQM para d e D em conjunto. Para não ficar confuso, adotaremos o seguinte critério: se um determinado estimador apresentar menor viés tanto para d quanto para D ele será denominado de *melhor estimador quanto a viés*; se um determinado estimador exibir menor EQM tanto para d quanto para D , então será denominado o *melhor estimador quanto a EQM*; entretanto, se em uma comparação, um específico estimador for o melhor quanto a viés ou quanto a EQM e ainda assim também for melhor para d ou D ou ambos em EQM ou viés, respectivamente, então, referir-nos-emos a ele como o que *apresenta as melhores propriedades*, mesmo que não indique valores próximos dos ideais, perto de zero. Assim, para $n = 120$, GPH_T é o melhor quanto a viés e sp_T é o melhor quanto a EQM e, para $n = 1080$, sp_T apresenta as melhores propriedades, pois apesar de seu EQM ser maior que o de FT na estimação de d , eles são bem próximos e, além disso, apresenta menor viés e EQM na estimativa de D . Desta maneira, continuando a análise considerando o tamanho amostral, observamos que sp_T apresenta as melhores propriedades quando n torna-se grande. Outro fato que chama atenção é a correlação entre $\hat{D}$ e $\hat{d}$ calculada para GPH_v e sp_v , onde observamos que esta é fortemente negativa próxima da frequência zero — veja também ANEXO D — e que esta vem perdendo força à medida que o seu cálculo é feito nas frequências mais distantes da frequência zero, sendo que na última frequência sazonal a medida da correlação é sempre positiva.

Já dissemos anteriormente que os Quadros 7a, 7b, 9a e 9b, em relação a todos outros que avaliam a estimação de d e D conjuntamente, são os únicos que apresentam todas as medidas (média, viés e EQM) para os estimadores GPH_v e sp_v , $v = 1, \dots, s/2$. O motivo de deixarmos visíveis estes valores é simplesmente para mostrarmos o aumento do viés e do EQM à medida que d se afasta da frequência zero, sendo, portanto, de certa parte grosseira a estimação de d nas frequências sazonais. Portanto, fica ilustrado o aumento do vício quando usamos frequências que não são próximas da frequência zero. Entretanto, se observarmos a soma dos valores estimados para d e D na frequência zero, teremos um valor próximo dos verdadeiros valores dos parâmetros. Como D continua sendo bem estimado, uma idéia a ser tomada é a estimação de $d + D$ na frequência zero e somente D na última frequência sazonal, mas nesta idéia teremos o problema de encontrar um erro padrão válido para este estimador. Em outras palavras, para $v = 0$, fazendo uso do estimador GPH_v , a soma de $\text{GPH}_0(\hat{d}) + \text{GPH}_0(\hat{D})$ é próxima do total de $d + D$. Ao considerar estimação de D na frequência sazonal v máxima, podemos obter uma boa estimativa ($\hat{D}$) e conseqüentemente obter a estimativa para d . Por exemplo, $n = 360$ (Quadro 7a), $\hat{d} + \hat{D}$ na frequência $v = 0$

fornece a estimativa da soma igual a 0.4009. Para $v = 2$, $\text{GPH}_2(\hat{D}) = 0.0995$. Portanto, $0.4009 - 0.0995 = 0.3014$ fornece uma estimativa de pequeno viés para $\hat{d}$. Em virtude destas considerações, devemos destacar que, assim como no modelo rígido com $0 < D < 0.5$, GPH_0 apresenta menor viés — ou seja, seguindo a nossa notação, é o melhor estimador quanto a viés — e sp_0 é o melhor estimador quanto a EQM.

Os comentários feitos acima podem ser estendidos para os quadros B1a e B1b, principalmente a respeito do estimador sp_T . Entretanto, quando temos $d = 0.1$ e $D = 0.3$, Quadros B2a e B2b, novamente encontramos GPH_T melhor quanto a viés e sp_T melhor quanto a EQM; o mesmo pode ser dito para GPH_v e sp_v , que também apresentam as respectivas considerações dadas. O estimador FT, em geral, apresenta as melhores estimativas para d , mas seus resultados não são tão bons para estimação D . De forma resumida, estas considerações são as características de todos estimadores com $d + D < 0.5$.

Em uma análise mais específica, os estimadores GPH_v e sp_v , para estimação de D , ou d e D , na frequência zero, tanto na região estacionária como na não estacionária, apresentam propriedades semelhantes. O que queremos dizer com isso é que o estimador que utiliza a função periodograma na equação de regressão quase sempre tem um menor viés em todas as frequências e o estimador que faz uso da função periodograma suavizado na maioria das vezes tem um menor EQM. Deixamos como sugestão o comentado para a soma de d com D , que parece ser mais eficiente, no sentido de melhores estimativas, do que as propostas GPH_v e sp_v .

Em relação à estimação de d e D com $s = 4$, quando $d + D > 0.5$, caso não estacionário, apresentamos resultados nos Quadros 8a, 8b, 9a, 9b, 10a, 10b, B3a, B3b, B4a e B4b. Observamos que dependendo dos valores assumidos pelos parâmetros na geração das séries um estimador apresenta melhores resultados do que os demais, principalmente quando o tamanho da amostra aumenta. Nos Quadros 8a e 8b ($d = 0.3$ e $D = 0.3$) — com exceção de $n = 120$, onde não destacamos nenhum estimador — sp_T apresenta as melhores propriedades, sendo que GPH_T sempre, quando da estimação de D , apresenta um menor viés. Já a situação $d = 0.1$ e $D = 0.7$, Quadros B3a e B3b, FT apresenta as melhores propriedades. Entretanto, no caso $d = 0.3$ e $D = 0.7$ (Quadros 9a e 9b) o aumento no tamanho da amostra caracteriza sp_T como aquele que apresenta as melhores propriedades. E, quando ultrapassamos de 1.0 a soma de d com D ($d + D > 1.0$), Quadros 10a e 10b, observamos que sp_T novamente apresenta-se com as melhores propriedades. Assim, sp_T assume um lugar de destaque em relação aos demais estimadores, pois quando $0.5 < D < 1.0$ ele quase sempre é considerado um estimador com as melhores propriedades e quando $d + D > 1.0$ sp_T é, em todos os tamanhos de amostras considerados, o estimador que apresenta as melhores

Quadro 7a. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.1$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
120	média($\hat{d}$)	0.3478	0.8490	-0.1109	0.7497	0.4757	0.0888	0.3105	0.2893	0.2989
	viés($\hat{d}$)	0.0478	0.5490	-0.4109	0.4497	0.1757	-0.2112	0.0105	-0.0106	-0.0010
	EQM($\hat{d}$)	5.3542	50.4467	147.4159	2.5756	19.5367	69.9208	0.0111	0.0074	0.0073
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9952	-0.9424	0.7634	-0.9929	-0.9285	0.7445	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.0528	0.0520	0.0866	-0.4872	0.0973	0.0940	0.0980	0.0874	-0.0466
240	viés($\hat{D}$)	-0.0472	-0.0480	-0.0134	-0.5872	-0.0027	-0.0060	-0.0019	-0.0125	-0.1466
	EQM($\hat{D}$)	7.0198	0.6175	0.1823	3.4584	0.2069	0.0795	0.0190	0.0100	0.0340
	média($\hat{d}$)	0.2654	0.4898	0.2168	0.5089	0.3467	0.2011	0.3060	0.2948	0.3023
	viés($\hat{d}$)	-0.0346	0.1898	-0.0832	0.2089	0.0467	-0.0989	0.0060	-0.0051	0.0023
	EQM($\hat{d}$)	2.0425	17.0769	61.9198	1.1952	8.0288	32.9245	0.0057	0.0038	0.0036
360	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9944	-0.9245	0.7303	-0.9933	-0.9070	0.6980	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1549	0.0755	0.0946	-0.1622	0.0968	0.0951	0.1001	0.0953	0.0305
	viés($\hat{D}$)	0.0549	-0.0245	-0.0054	-0.2622	-0.0032	-0.0049	0.0001	-0.0046	-0.0694
	EQM($\hat{D}$)	2.5905	0.1734	0.0579	1.5414	0.0709	0.0295	0.0070	0.0043	0.0094
	média($\hat{d}$)	0.3400	0.3671	0.3444	0.4812	0.2173	0.3818	0.3023	0.2945	0.3003
360	viés($\hat{d}$)	0.0400	0.0671	0.0444	0.1812	-0.0827	0.0818	0.0023	-0.0054	0.0003
	EQM($\hat{d}$)	1.2176	9.5429	34.8472	0.7492	4.6985	20.4454	0.0033	0.0021	0.0020
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9946	-0.9104	0.7093	-0.9939	-0.8843	0.7108	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.0609	0.0931	0.0995	-0.1228	0.1134	0.1035	0.1007	0.0990	0.0550
	viés($\hat{D}$)	-0.0391	-0.0069	-0.0005	-0.2228	0.0134	0.0035	0.0007	-0.0009	-0.0449
360	EQM($\hat{D}$)	1.5234	0.0919	0.0315	0.9566	0.0398	0.0169	0.0039	0.0024	0.0046

Quadro 7b. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.1$ com $s = 4$.

Quadro 10: resultados para $\alpha = 0.5$ e $D = 0.1$ com $\beta = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
480	média($\hat{d}$)	0.2869	0.3348	0.4734	0.4303	0.3030	0.3596	0.3030	0.2985	0.3020
	viés($\hat{d}$)	-0.0131	0.0348	0.1734	0.1303	0.0030	0.0596	0.0030	-0.0014	0.0020
	EQM($\hat{d}$)	0.9021	6.1672	25.1769	0.5506	3.4331	14.9026	0.0024	0.0016	0.0015
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9951	-0.9061	0.6965	-0.9946	-0.8893	0.6738	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1182	0.0922	0.1079	-0.0607	0.1000	0.1067	0.0996	0.0979	0.0664
	viés($\hat{D}$)	0.0182	-0.0078	0.0079	-0.1607	-0.0000	0.0067	-0.0003	-0.0020	-0.0335
	EQM($\hat{D}$)	1.1304	0.0592	0.0213	0.7010	0.0290	0.0121	0.0029	0.0016	0.0028
	média($\hat{d}$)	0.2683	0.2914	0.2030	0.3384	0.2763	0.1575	0.3029	0.3002	0.3020
	viés($\hat{d}$)	-0.0317	-0.0086	-0.0970	0.0384	-0.0237	-0.1425	0.0029	0.0002	0.0020
	EQM($\hat{d}$)	0.4086	2.6855	10.7245	0.2507	1.4779	6.6271	0.0010	0.0007	0.0006
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9957	-0.9000	0.7028	-0.9951	-0.8896	0.6853	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1392	0.1044	0.0983	0.0527	0.1066	0.0992	0.1014	0.1013	0.0863
	viés($\hat{D}$)	0.0392	0.0044	-0.0017	-0.0473	0.0066	-0.0008	0.0014	0.0013	-0.0136
	EQM($\hat{D}$)	0.5009	0.0231	0.0085	0.3102	0.0119	0.0050	0.0011	0.0007	0.0008

propriedades. No entanto, os resultados mostram altos valores de viés e EQM quando a soma dos parâmetros ($d + D$) se aproxima de ou ultrapassa um, fato que nos sugere maiores cuidados para esta situação.

Passaremos agora à situação d e D com período sazonal $s = 12$. Devido à quantidade de quadros que se encontram no corpo deste trabalho, deixamos os que se referem a esta parte no ANEXO D. Nos Quadros D1a a D3d estão os resultados referentes à situação $d + D < 0.5$, caso estacionário. Nas situações onde temos baixos valores para D , caso $D = 0.1$, observamos que o estimador FT apresenta boas estimativas para o parâmetro d em termos de viés e EQM, mas as estimativas para D não são boas. O estimador sp_T exibe um viés bem mais elevado do que GPH_T , principalmente no caso $d = 0.1$ e $D = 0.3$ (Quadros D3a a D3d). Entretanto, no geral, não existe um estimador com as melhores propriedades e sim o melhor estimador quanto a viés que é GPH_T e o melhor quanto a EQM, sp_T .

Nos Quadros D4a a D8d apresentamos os resultados relativos à situação $d + D \geq 0.5$, caso não estacionário. Quando $d = 0.3$ e $D = 0.3$, observamos que para $n \geq 360$ sp_T se destaca tanto em viés quanto em EQM na estimação do parâmetro d . No entanto, exibe um alto viés na estimação de D , mas, no geral, o estimador GPH_T apresenta menores distorções na estimação conjunta, pois, por exemplo, quando $n = 360$, vemos que o viés de GPH_T (0.0083), na estimação de d , é um pouco maior que o viés absoluto de sp_T ($|-0.0045|$), entretanto na estimação de D o viés de sp_T apresenta valor muito elevado (0.0304) em relação a GPH_T (0.0030). Ainda podemos dizer que os EQMs de ambos estimadores apresentam valores relativamente próximos. Agora, para os quadros onde $d + D > 0.8$, observamos que nenhum estimador considerado se adequa bem ao contexto em questão, pois as medidas de viés e EQM exibem altos valores ou para d ou D ou ambos. Isto pode estar acontecendo devido a dois motivos: a soma estar próxima de um ou ao período sazonal $s = 12$, que percebemos um aumento tanto em viés quanto em EQM quando saltamos da análise de séries com período sazonal $s = 4$ para séries com período sazonal $s = 12$. Outro fato que ocorre é que em alguns casos GPH_T é o que apresenta as melhores propriedades, outras vezes um estimador apresenta menor viés e EQM para d e ao mesmo tempo outro estimador apresenta menor viés e EQM para D , tornando, assim, bastante confuso indicar um estimador para este caso.

Quadro 8a. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.3$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
120	média($\hat{d}$)	0.2218	—	—	0.7986	—	—	0.3132	0.2832	0.3033
	viés($\hat{d}$)	-0.0782	—	—	0.4986	—	—	0.0132	-0.0167	0.0033
	EQM($\hat{d}$)	6.0111	—	—	2.7020	—	—	0.0132	0.0092	0.0092
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9958	-0.9423	0.7829	-0.9932	-0.9240	0.7129	—	—	—
240	média($\hat{D}$)	0.4196	0.3033	0.3227	-0.3264	0.3687	0.3398	0.3101	0.3215	0.1621
	viés($\hat{D}$)	0.1196	0.0033	0.0227	-0.6264	0.0687	0.0398	0.0101	0.0215	-0.1378
	EQM($\hat{D}$)	7.8677	0.5917	0.1806	3.6509	0.2179	0.0823	0.0164	0.0106	0.0310
	média($\hat{d}$)	0.2609	—	—	0.5567	—	—	0.3108	0.2930	0.3051
360	viés($\hat{d}$)	-0.0391	—	—	0.2567	—	—	0.0108	-0.0069	0.0051
	EQM($\hat{d}$)	1.9373	—	—	1.1325	—	—	0.0056	0.0038	0.0037
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9943	-0.9139	0.7395	-0.9931	-0.9040	0.7296	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3646	0.3166	0.2997	-0.0048	0.3678	0.3326	0.3035	0.3181	0.2355
360	viés($\hat{D}$)	0.0646	0.0166	-0.0003	-0.3048	0.0678	0.0326	0.0035	0.0181	-0.0644
	EQM($\hat{D}$)	2.4410	0.1633	0.0623	1.4694	0.0743	0.0340	0.0071	0.0044	0.0086
	média($\hat{d}$)	0.2894	—	—	0.4790	—	—	0.3092	0.2969	0.3050
	viés($\hat{d}$)	-0.0106	—	—	0.1790	—	—	0.0092	-0.0030	0.0050
360	EQM($\hat{d}$)	1.3148	—	—	0.7609	—	—	0.0037	0.0024	0.0024
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9950	-0.9055	0.7223	-0.9939	-0.8852	0.7162	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3287	0.3270	0.2983	0.0902	0.3565	0.3220	0.3058	0.3142	0.2589
	viés($\hat{D}$)	0.0287	0.0270	-0.0017	-0.2098	0.0565	0.0220	0.0058	0.0142	-0.0410
360	EQM($\hat{D}$)	1.6484	0.0833	0.0334	0.9712	0.0420	0.0198	0.0040	0.0027	0.0042

Quadro 8b. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.3$ com $s = 4$.

Quadro 6b: resultados para $\alpha = 0.3$ e $D = 0.3$ com $s = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
480	média($\hat{d}$)	0.3087	—	—	0.4353	—	—	0.3099	0.3012	0.3086
	viés($\hat{d}$)	0.0087	—	—	0.1353	—	—	0.0099	0.0012	0.0086
	EQM($\hat{d}$)	0.9727	—	—	0.6218	—	—	0.0028	0.0018	0.0017
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9951	−0.8964	0.7241	−0.9947	−0.8906	0.6982	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3067	0.3087	0.3007	0.1500	0.3421	0.3186	0.3027	0.3131	0.2694
1080	viés($\hat{D}$)	0.0067	0.0087	0.0007	−0.1500	0.0421	0.0186	0.0026	0.0131	−0.0305
	EQM($\hat{D}$)	1.2196	0.0582	0.0244	0.7915	0.0324	0.0145	0.0030	0.0020	0.0029
	média($\hat{d}$)	0.2740	—	—	0.3336	—	—	0.3075	0.3027	0.3059
	viés($\hat{d}$)	−0.0260	—	—	0.0336	—	—	0.0074	0.0027	0.0059
	EQM($\hat{d}$)	0.3848	—	—	0.2477	—	—	0.0012	0.0007	0.0008
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9954	−0.8982	0.7239	−0.9948	−0.8773	0.7304	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3423	0.2981	0.3056	0.2686	0.3196	0.3134	0.3019	0.3076	0.2865
	viés($\hat{D}$)	0.0423	−0.0019	0.0056	−0.0314	0.0196	0.0134	0.0019	0.0076	−0.0134
	EQM($\hat{D}$)	0.4790	0.0216	0.0083	0.3119	0.0121	0.0058	0.0011	0.0007	0.0008

Quadro 9a. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.7$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	spt	FT
120	média($\hat{d}$)	0.3655	0.2193	0.8080	1.0543	-0.3506	1.3284	0.3820	0.2936	0.3584
	viés($\hat{d}$)	0.0655	-0.0807	0.5080	0.7543	-0.6506	1.0284	0.0820	-0.0063	0.0584
	EQM($\hat{d}$)	4.5909	46.1252	150.6524	2.3305	15.5009	56.4777	0.0341	0.0175	0.0216
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9950	-0.9401	0.7556	-0.9914	-0.9076	0.6915	—	—	—
240	média($\hat{D}$)	0.6581	0.7279	0.7125	-0.1903	0.9452	0.8455	0.6843	0.8059	0.5441
	viés($\hat{D}$)	-0.0419	0.0279	0.0125	-0.8903	0.2452	0.1455	-0.0156	0.1059	-0.1558
	EQM($\hat{D}$)	5.9439	0.5463	0.1711	3.1562	0.2544	0.1250	0.0218	0.0251	0.0377
	média($\hat{d}$)	0.5706	-0.3498	1.5720	0.7406	-0.8242	1.9833	0.3887	0.3270	0.3684
360	viés($\hat{d}$)	0.2706	-0.6498	1.2720	0.4406	-1.1242	1.6833	0.0887	0.0270	0.0684
	EQM($\hat{d}$)	1.9677	15.4136	58.9756	1.0704	8.3727	32.0253	0.0293	0.0123	0.0185
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9950	-0.9057	0.7032	-0.9922	-0.8896	0.6887	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.4327	0.7728	0.7284	0.2262	0.9195	0.8242	0.6831	0.7705	0.6216
360	viés($\hat{D}$)	-0.2673	0.0728	0.0284	-0.4738	0.2195	0.1242	-0.0168	0.0705	-0.0783
	EQM($\hat{D}$)	2.4677	0.1499	0.0585	1.3655	0.1268	0.0573	0.0109	0.0113	0.0126
	média($\hat{d}$)	0.5021	-0.0175	1.1103	0.6490	-0.7213	1.9222	0.3914	0.3405	0.3709
	viés($\hat{d}$)	0.2021	-0.3175	0.8103	0.3490	-1.0213	1.6222	0.0914	0.0405	0.0709
360	EQM($\hat{d}$)	1.1766	9.7895	36.7302	0.6761	5.8657	22.1796	0.0252	0.0103	0.0165
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9951	-0.8935	0.6554	-0.9926	-0.8855	0.6611	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.5009	0.7268	0.7186	0.3315	0.8705	0.8042	0.6747	0.7459	0.6371
	viés($\hat{D}$)	-0.1991	0.0268	0.0186	-0.3685	0.1705	0.1042	-0.0252	0.0459	-0.0628
360	EQM($\hat{D}$)	1.4434	0.0904	0.0342	0.8462	0.0788	0.0383	0.0085	0.0066	0.0089

Quadro 9b. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.7$ com $s = 4$.

Quadro 3b: resultados para $\alpha = 0.3$ e $D = 0.1$ com $s = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
480	média($\hat{d}$)	0.5599	-0.0959	1.1188	0.5787	-0.6644	1.7025	0.3928	0.3510	0.3753
	viés($\hat{d}$)	0.2599	-0.3959	0.8188	0.2787	-0.9644	1.4025	0.0928	0.0510	0.0753
	EQM($\hat{d}$)	0.9830	6.0956	26.6879	0.4999	4.1602	17.6693	0.0240	0.0100	0.0159
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9957	-0.8536	0.6154	-0.9935	-0.8502	0.6643	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.4457	0.7344	0.7171	0.4188	0.8530	0.7880	0.6774	0.7377	0.6510
	viés($\hat{D}$)	-0.2543	0.0344	0.0171	-0.2812	0.1530	0.0880	-0.0225	0.0377	-0.0489
	EQM($\hat{D}$)	1.1858	0.0566	0.0230	0.6193	0.0534	0.0258	0.0072	0.0048	0.0065
	média($\hat{d}$)	0.5555	-0.1719	1.0396	0.4930	-0.5546	1.4964	0.4000	0.3630	0.3828
1080	viés($\hat{d}$)	0.2555	-0.4719	0.7396	0.1930	-0.8546	1.1964	0.1000	0.0630	0.0827
	EQM($\hat{d}$)	0.4329	2.7267	12.3590	0.2212	2.1598	8.0874	0.0249	0.0103	0.0170
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9954	-0.8503	0.5725	-0.9933	-0.8602	0.5930	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.4418	0.7312	0.7138	0.5147	0.8075	0.7572	0.6692	0.7133	0.6631
	viés($\hat{D}$)	-0.2582	0.0312	0.0138	-0.1853	0.1075	0.0572	-0.0307	0.0133	-0.0368
	EQM($\hat{D}$)	0.5069	0.0227	0.0096	0.2578	0.0254	0.0105	0.0055	0.0022	0.0042

Quadro 10a. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.9$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{d}$)	0.5220	—	—	1.0833	—	—	0.4484	0.3003	0.4043
	viés($\hat{d}$)	0.2220	—	—	0.7833	—	—	0.1484	0.0002	0.1043
	EQM($\hat{d}$)	3.5686	—	—	1.8610	—	—	0.0796	0.0356	0.0494
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9946	-0.9166	0.7089	-0.9893	-0.8489	0.6051	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.5680	0.9377	0.8759	-0.0882	1.1744	1.0593	0.7784	0.9812	0.6713
	viés($\hat{D}$)	-0.3320	0.0377	-0.0241	-0.9882	0.2744	0.1593	-0.1215	0.0812	-0.2287
	EQM($\hat{D}$)	4.7406	0.4921	0.1655	2.6691	0.2212	0.1147	0.0551	0.0256	0.0783
	média($\hat{d}$)	0.5713	—	—	0.7820	—	—	0.4738	0.3707	0.4344
240	viés($\hat{d}$)	0.2713	—	—	0.4820	—	—	0.1738	0.0707	0.1344
	EQM($\hat{d}$)	1.5665	—	—	0.8191	—	—	0.0757	0.0302	0.0499
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9957	-0.8529	0.5305	-0.9922	-0.8010	0.5232	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.5218	0.9434	0.8737	0.3045	1.1416	1.0279	0.7606	0.9176	0.7335
	viés($\hat{D}$)	-0.3782	0.0434	-0.0263	-0.5955	0.2416	0.1279	-0.1393	0.0176	-0.1664
	EQM($\hat{D}$)	2.0462	0.1605	0.0582	1.1280	0.1199	0.0574	0.0498	0.0139	0.0463
	média($\hat{d}$)	0.6951	—	—	0.7166	—	—	0.4950	0.4035	0.4564
	viés($\hat{d}$)	0.3951	—	—	0.4166	—	—	0.1950	0.1035	0.1564
360	EQM($\hat{d}$)	1.0559	—	—	0.5652	—	—	0.0828	0.0345	0.0562
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9951	-0.8031	0.4054	-0.9926	-0.7704	0.4151	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3855	0.9270	0.8623	0.3873	1.1031	0.9892	0.7433	0.8786	0.7443
	viés($\hat{D}$)	-0.5145	0.0270	-0.0377	-0.5127	0.2031	0.0892	-0.1566	-0.0213	-0.1556
	EQM($\hat{D}$)	1.4233	0.0868	0.0413	0.7811	0.0811	0.0343	0.0542	0.0130	0.0413

Quadro 10b. Resultados para $d = 0.3$ e $D = 0.9$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
480	média($\hat{d}$)	0.6978	—	—	0.6578	—	—	0.5027	0.4174	0.4668
	viés($\hat{d}$)	0.3978	—	—	0.3578	—	—	0.2027	0.1174	0.1668
	EQM($\hat{d}$)	0.8250	—	—	0.3797	—	—	0.0831	0.0351	0.0584
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9952	-0.7141	0.2733	-0.9925	-0.7090	0.3415	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3731	0.9313	0.8691	0.4467	1.0880	0.9850	0.7410	0.8641	0.7561
1080	viés($\hat{D}$)	-0.5269	0.0313	-0.0309	-0.4533	0.1880	0.0850	-0.1589	-0.0358	-0.1439
	EQM($\hat{D}$)	1.1354	0.0584	0.0283	0.5322	0.0617	0.0272	0.0544	0.0135	0.0369
	média($\hat{d}$)	0.7305	—	—	0.6317	—	—	0.5324	0.4603	0.4975
	viés($\hat{d}$)	0.4305	—	—	0.3317	—	—	0.2324	0.1603	0.1975
	EQM($\hat{d}$)	0.4962	—	—	0.2389	—	—	0.0977	0.0477	0.0726
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9950	-0.5074	-0.1756	-0.9945	-0.5226	-0.0052	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3345	0.9216	0.8550	0.4722	1.0302	0.9388	0.7136	0.8114	0.7553
	viés($\hat{D}$)	-0.5655	0.0216	-0.0450	-0.4278	0.1302	0.0388	-0.1863	-0.0885	-0.1447
	EQM($\hat{D}$)	0.7241	0.0258	0.0183	0.3477	0.0297	0.0117	0.0668	0.0210	0.0377

Capítulo 4

Raízes unitárias sazonais

4.1. Introdução

Os testes clássicos de raízes unitárias, tais como DF, ADF e PP, foram amplamente estudados ao longo das duas últimas décadas. Eles tipicamente apresentam baixo poder quando o processo gerador da série apresenta a característica de memória longa.

Diebold e Rudebusch (1991) avaliaram o poder do teste DF através de experimentos de Monte Carlo. Consideraram o processo $(1 - B)^d X_t = \epsilon_t$, com dez diferentes valores para d que variaram de 0,3 a 1,3. Foram geradas 5000 amostras de 50, 100 e 250 observações. Os autores concluíram que o teste apresenta baixo poder e que o poder cresce com o tamanho da amostra e à medida que aumenta $|d - 1|$.

Hassler e Wolters (1994) demonstram que a probabilidade de rejeitar a hipótese de existência de raiz unitária em um processo fracionariamente integrado diminui à medida que aumenta o número de defasagens utilizadas no teste ADF.

Resumidamente, todos os artigos que avaliaram o poder dos testes clássicos de raízes unitárias, para processos que apresentam a característica de longa dependência, concluem que estes têm um ganho de poder quando o tamanho da amostra cresce e à medida que d se distancia da unidade. Sendo assim, vemos que a capacidade de avaliação destes testes, em processos com memória longa, deixa a desejar quando o tamanho da amostra não é muito grande e o valor de d está muito próximo da hipótese nula do teste.

Os testes de raízes unitárias que citamos até aqui não são aplicados a séries que apresentam uma componente sazonal. Nesse caso, a literatura é ainda bem escassa, pois poucos pesquisadores se aguçaram nesses estudos. Dickey, Hasza e Fuller [DHF] (1984) desenvolveram um teste baseando-se no teste de Dickey e Fuller (1979), onde, ao invés do filtro $(1 - B)$, consideraram o filtro $(1 - B^s)$. Hylleberg, Engle, Granger e Yoo [HEGY] (1990) fatoraram o polinômio $(1 - B^4)$, apresentando um teste com quatro raízes distintas. Ambos os testes examinam na hipótese nula a presença de raiz unitária. Outro teste que verifica a existência de raiz unitária sazonal é o proposto por Canova e Hansen (1995). A grande diferença deste teste em relação aos dois outros é que a hipótese nula considera a estaciona-

riedade da série, ficando a hipótese de existência de raiz unitária sazonal para a hipótese alternativa. Este teste é uma extensão do teste KPSS.

Este capítulo tem por objetivo investigar o poder dos testes de raízes unitárias sazonais na presença de processos com diferenciação fracionária sazonal. Os testes usuais DHF e HEGY são considerados no estudo, assim como os testes baseados nos estimadores do parâmetro fracionário sazonal (D) do modelo SARFIMA descritos no capítulo 3. No estudo simulado foram gerados os pontos críticos dos testes para diferentes tamanhos amostrais e período de sazonalidade $s = 4$. Com base nos pontos críticos empíricos, comparamos o poder dos testes. A divisão deste capítulo se dá da seguinte forma: a seção 4.2 sumariza os testes DHF, HEGY e as estatísticas de testes baseadas nos estimadores do parâmetro fracionário D . O estudo simulado e os resultados estão nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente.

4.2. Testes de raízes unitárias sazonais para período sazonal $s = 4$

Com enfoque em dados sazonais com período $s = 4$, podemos escrever

$$\begin{aligned}(1 - B^4) &= (1 - B)(1 + B)(1 + B^2) \\ &= (1 - B)(1 + B)(1 + iB)(1 - iB),\end{aligned}\tag{4.1}$$

que tem quatro raízes com módulo igual a um. Uma é na frequência zero, uma em dois ciclos por ano (ou $1/2$ ciclo de período $s = 4$) e dois pares de raízes complexas em um ciclo por ano (ou $1/4$ de ciclo de período $s = 4$), veja Abraham e Ledolter (1983, pp. 297 – 298).

4.2.1. Teste DHF

Dickey, Hasza e Fuller (1984) propuseram alguns estimadores baseados no método de regressão para testar raízes unitárias sazonais com período $s = 4$. Dentre estes estimadores, considerando

$$X_t = \alpha_s X_{t-s} + \varepsilon_t,$$

onde ε_t são variáveis aleatórias i.i.d. $(0, \sigma^2)$, o estimador natural de α_s , obtido pelo método de mínimos quadrados, apresentou melhores resultados, tornando-se assim a estatística de teste do teste DHF. As hipóteses são $\mathcal{H}_0 : \alpha_4 = 1$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha_4 < 1$. A distribuição

assintótica da estatística de teste sob a hipótese nula foi obtida e pontos críticos foram gerados para vários valores de s através de experimentos de Monte Carlo.

Como apresentado em 4.1, observe que o filtro $(1 - B^4)$ tem quatro raízes, uma das quais é uma raiz unitária. Entretanto, testa-se a hipótese que todas as quatros raízes do filtro Δ_4 são unitárias (uma raiz unitária não sazonal e três raízes unitárias sazonais) contra a hipótese alternativa de não existência de raiz unitária, ou seja, as raízes têm o mesmo módulo. Desta maneira, por exemplo, o teste DHF exclui a possibilidade de que a série X_t possa ser estacionária com o uso do filtro Δ_1 , para cuidar da raiz unitária, e do uso de variáveis *dummies*, para cuidar da sazonalidade.

4.2.2. Teste HEGY

Em HEGY (1990) uma série integrada é definida como uma série que tem valor infinito em seu espectro em uma particular frequência v , zero ou sazonal. De outra maneira, uma série integrada de ordem D , na frequência v , é definida como uma série X_t que apresenta espectro da forma

$$f_X(\omega) \sim c(\omega - v)^{-2D},$$

para ω perto de v . Isto pode ser denotado por $X_t \sim I_v(D)$. Para dados com período $s = 4$, considere 4.1; as frequências de interesse correspondem a $v = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ de um ciclo (2π) . Concentrando em séries integradas de ordem 1, temos que a frequência $v = 0$ corresponde com a componente da forma $(1 - B)X_t = \varepsilon_t$, $v = \frac{1}{2}$ corresponde à componente da forma $(1 + B)X_t = \varepsilon_t$ e $v = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ corresponde a $(1 + B^2)X_t = (1 + iB)(1 - iB)X_t = \varepsilon_t$, onde ε_t é um processo estacionário.

Baseado numa expansão de uma representação auto-regressiva, tal como $\phi(B)X_t = \varepsilon_t$, ao redor dos pontos $v = 1, -1, i, -i$, o teste HEGY é uma extensão do bem conhecido teste de raiz unitária de DF na frequência $v = 0$. O teste utiliza em uma regressão auxiliar,

$$\begin{aligned} y_{4t} &= (1 - B^4)X_t \\ &= \pi_1 y_{1,t-1} + \pi_2 y_{2,t-1} + \pi_3 y_{3,t-2} + \pi_4 y_{3,t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $y_{1t} = (1 + B + B^2 + B^3)X_t$ é a série observada ajustada para a raiz unitária sazonal em $v = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, $y_{2t} = -(1 - B + B^2 - B^3)X_t$ é a série observada ajustada para a raiz unitária sazonal em $v = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, enquanto que $y_{3t} = -(1 - B^2)X_t$ é a série observada ajustada para a raiz unitária sazonal em $v = 0, \frac{1}{2}$. Os testes para as raízes unitárias nas frequências $0, \frac{1}{2}$ são

baseados em valores ‘ t ’ de $\pi_1(t_{\pi_1})$ e $\pi_2(t_{\pi_2})$, onde ambos são distribuídos (sob a hipótese nula) de acordo com a distribuição de Dickey-Fuller. Para raízes complexas, os testes são baseados em valores ‘ F ’ sobre $\pi_3 = \pi_4 = 0$ ou caso $\pi_4 = 0$ sobre valores ‘ t ’ de $\pi_3(t_{\pi_3})$. Os valores críticos podem ser encontrados em HEGY (1990) ou em Fuller (1976) para t_{π_1} e t_{π_2} e em DHF (1984) para t_{π_3} .

O teste HEGY testa raiz unitária sazonal em processos que podem também exibir sazonalidade determinística ou estacionária. A equação (4.2) pode ser modificada para a inclusão de um intercepto, *dummies* sazonais e uma tendência linear, mas estas alterações irão mudar a forma da distribuição nula da estatística de teste. Também, como no teste ADF, valores defasados de $(1 - B^4)X_{t-i}$ podem ser incluídos.

4.2.3. Testes usando estimadores de D

No Capítulo 3 consideramos diversos estimadores para D com diferentes formas de estimação. Nesta seção, apresentamos as estatísticas de teste baseadas nesses estimadores. A estatística de teste é

$$t_{\hat{D}} = \frac{\hat{D} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{D})}}, \quad (4.3)$$

onde $\hat{D}$ é um estimador de D e $\widehat{\text{Var}}(\hat{D})$ é a variância estimada associada ao estimador de $\hat{D}$. Os pontos críticos para testar $\mathcal{H}_0 : D = 1$ contra $\mathcal{H}_1 : D < 1$ são obtidos da distribuição empírica de (4.3). Para os estimadores semi-paramétricos, consideramos as estatísticas de testes usando as variâncias assintóticas e de regressão. No método FT, utilizamos uma estimativa da variância assintótica.

Temos, a seguir, as apresentações das estatísticas de testes de cada estimador de D :

$$\begin{aligned} t_{\text{GPH}_{v,\mathbf{a}}} &= \frac{\widehat{\text{GPH}}_{v,\mathbf{a}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{GPH}}_{v,\mathbf{a}})}}, \\ t_{\text{GPH}_{v,\mathbf{r}}} &= \frac{\widehat{\text{GPH}}_{v,\mathbf{r}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{GPH}}_{v,\mathbf{r}})}}, \\ t_{\text{sp}_{v,\mathbf{a}}} &= \frac{\widehat{\text{sp}}_{v,\mathbf{a}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{sp}}_{v,\mathbf{a}})}}, \\ t_{\text{sp}_{v,\mathbf{r}}} &= \frac{\widehat{\text{sp}}_{v,\mathbf{r}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{sp}}_{v,\mathbf{r}})}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{\text{GPH}_{T,\mathbf{a}}} &= \frac{\widehat{\text{GPH}}_{T,\mathbf{a}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{GPH}}_{T,\mathbf{a}})}}, \\
t_{\text{GPH}_{T,\mathbf{r}}} &= \frac{\widehat{\text{GPH}}_{T,\mathbf{r}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{GPH}}_{T,\mathbf{r}})}}, \\
t_{\text{sp}_{T,\mathbf{a}}} &= \frac{\widehat{\text{sp}}_{T,\mathbf{a}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{sp}}_{T,\mathbf{a}})}}, \\
t_{\text{sp}_{T,\mathbf{r}}} &= \frac{\widehat{\text{sp}}_{T,\mathbf{r}} - 1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{sp}}_{T,\mathbf{r}})}}, \\
t_{\text{FT}} &= \frac{\widehat{\text{FT}} - 1}{\sqrt{\frac{6}{n\pi^2}}},
\end{aligned}$$

onde $v = 0, 1, \dots, s/2$, e no cálculo das variâncias “ $\mathbf{a}$ ” e “ $\mathbf{r}$ ” referem-se ao uso da variância assintótica e de regressão, respectivamente. Por exemplo, $t_{\text{GPH}_{v,\mathbf{a}}}$ é a estatística de teste do GPH, na frequência sazonal “ v ” utilizando uma estimativa da variância assintótica do estimador.

4.3. Processo de simulação

O processo de simulação constou de duas etapas. Na primeira, geramos pontos críticos para os testes em estudos replicando 24.000 vezes os tamanhos amostrais $n = 120, 240, 360$ e 480 . Os testes de DHF e HEGY foram avaliados em duas situações: sem intercepto (s/inter) e com intercepto (c/inter). Na segunda etapa, avaliamos o poder dos testes considerados ao nível de significância de 5% replicando 1000 vezes o experimento para cada tamanho amostral utilizado na obtenção de pontos críticos. Todo processo de simulação considerou o erro como sendo um ruído branco gaussiano.

4.4. Resultados numéricos

Nos quadros pertencentes ao ANEXO E apresentamos pontos críticos de todos os testes considerados — DHF, HEGY e testes fracionários — para os tamanhos amostrais avaliados. Os Quadros E1 e E2 são os únicos que apresentam resultados de regressão sem intercepto e com intercepto, visto que, nos testes fracionários, ou ele é intrínseco ao estimador (caso dos

semi-paramétricos) ou não se adapta (caso paramétrico). Podemos observar que o intercepto altera a distribuição da estatística do teste. No teste HEGY (Quadro E2) a mudança se dá apenas para os pontos críticos de π_1 (t_{π_1}) porque ele tem toda massa espectral na frequência zero (Hylleberg et al. (1990)). Outro aspecto que podemos observar é que os pontos críticos t_{π_1} e t_{π_2} são similares aos da distribuição de Dickey-Fuller e o ponto crítico t_{π_3} é semelhante ao provindo da distribuição de DHF, sem a inclusão do intercepto. Neste caso, observe que os valores de t_{π_3} são bem próximos de DHF (Quadro E1), veja percentil 5%. HEGY (1990) também afirmam que os valores críticos t_{π_4} são muitos similares ao de uma distribuição normal padrão, exceto quando na equação de regressão *dummies* sazonais são consideradas. A inclusão de *dummies* sazonais não foi avaliada neste trabalho. A distribuição da estatística ‘ F ’ se comporta como uma distribuição F com graus de liberdade $(2, n - p)$, onde p é o número de regressores. Quanto aos demais quadros do ANEXO E, podemos observar um comportamento bem distinto entre as distribuições empíricas dos estimadores fracionários, principalmente quando no denominador de 4.3 fazemos a alteração da variância assintótica para a variância de regressão.

4.4.1. Resultados do teste DHF

Os resultados da avaliação do poder do teste DHF estão apresentados no Quadro 11. Observamos que para $D = 0.98$ o poder do teste é muito próximo de 5%, mostrando que o teste se confunde bastante para valores de D próximos da raiz unitária. Igualmente aos testes univariados de raízes unitárias, quando aumenta o tamanho da amostra ou o $|D - 1|$, o poder do teste aumenta. Os resultados também mostram que os poderes dos testes, quando consideramos ou não o intercepto na equação de regressão, são muito semelhante.

Quadro 11. Poder do teste DHF com $s = 4$ sobre 1.000 replicações.

n	Regressão	D							
		1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
120	s/inter	0.052	0.068	0.092	0.155	0.476	0.820	1.000	1.000
	c/inter	0.050	0.063	0.107	0.187	0.484	0.825	1.000	1.000
240	s/inter	0.053	0.066	0.119	0.227	0.659	0.966	1.000	1.000
	c/inter	0.049	0.077	0.131	0.239	0.686	0.976	1.000	1.000
360	s/inter	0.046	0.079	0.119	0.267	0.780	0.992	1.000	1.000
	c/inter	0.050	0.084	0.126	0.307	0.763	0.991	1.000	1.000
480	s/inter	0.043	0.089	0.149	0.318	0.828	0.999	1.000	1.000
	c/inter	0.043	0.074	0.142	0.326	0.821	0.998	1.000	1.000

4.4.2. Resultados do teste HEGY

Considerando agora o teste HEGY, nos Quadros 12 e 13 apresentamos resultados para o poder de π_1 (λ_1), poder de π_2 (λ_2); além de, no caso das raízes complexas, o poder para o caso em que utilizamos dois testes: ‘t’, onde testamos $\pi_4 = 0$ e após $\pi_3 = 0$ (λ_t); ou fizemos o uso do teste ‘F’, onde $\pi_3 = \pi_4 = 0$ (λ_F). Novamente, assim como no teste DHF para valores de $D \geq 0.98$, o poder deste teste é bem próximo do nível de significância de 5%. Um detalhe importante é observar que os poderes dos testes para as diferentes raízes diferem, apesar de ser mínima esta diferença. Observe que para $n = 120$ com $D = 0.8$, Quadro 12, $\lambda_1 = 0.198$, $\lambda_2 = 0.201$, $\lambda_t = 0.264$ e $\lambda_F = 0.140$. Estes valores indicam que, por exemplo, em alguns casos a raiz unitária 1 pode não estar presente, a raiz unitária -1 pode estar e as raízes complexas podem ou não estar presentes. Quando aguçamos somente em λ_t e λ_F , vemos que λ_t tem poder maior que λ_F para valores de D que decrescem de 1.0 até uma região ao redor de 0.5, dependendo também do tamanho amostral. Para $D < 0.5$, exceto quando $n = 120$, além de λ_F apresentar maior poder, observamos que o poder de λ_t diminui. É notável que o aumento do tamanho amostral e o aumento da distância de D para a raiz unitária gera aumento de poder do teste. Outra observação é que semelhantemente ao que ocorre para os pontos críticos, onde a presença da componente intercepto altera somente os pontos críticos de π_1 , aqui ocorre algo parecido para o poder. Observe que os resultados de λ_2 , λ_t e λ_F são bem próximos (parecidos) quando o intercepto está ou não incluído na equação 4.2, mas no caso de λ_1 , os resultados mostram uma alteração no poder, como era de se esperar. Nas Figuras 5 e 6 apresentamos resultados dos quadros 12 e 13 considerando o tamanho amostral $n = 480$. Na legenda, onde se vê l1, l2, t e F leia-se λ_1 , λ_2 , λ_t , λ_F , respectivamente.

4.4.3. Resultados dos testes fracionários

No contexto dos estimadores fracionários, nos Quadros 14 e 15 apresentamos resultados referentes a $t_{GPH_{v,a}}$, $t_{sp_{v,a}}$, $t_{GPH_{v,r}}$ e $t_{sp_{v,r}}$. Novamente observamos que o aumento de $|D - 1|$ e n acarreta aumento de poder nos testes. Observamos também que: se $D \geq 0.98$ ocorre uma alteração no poder de rejeição dos estimadores, pois, em alguns casos, o teste baseado na função periodograma é melhor do que o baseado na função periodograma suavizado e vice-versa. No entanto, para $D < 0.95$ o estimador de Reisen apresenta uma maior taxa de rejeição para quase todas as possíveis considerações, exceto para alguns valores de D quando $n \geq 240$ e $v = 0$ utilizando-se da variância de regressão. Em outra análise, entre o

Quadro 12. Poder do teste HEGY sem intercepto com $s = 4$ sobre 24.000 replicações.

n		D							
		1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
120	λ_1	0.044	0.058	0.053	0.092	0.198	0.322	0.794	1.000
	λ_2	0.056	0.065	0.074	0.095	0.201	0.330	0.798	0.998
	λ_t	0.046	0.053	0.083	0.128	0.264	0.514	0.949	0.968
	λ_F	0.043	0.044	0.051	0.070	0.140	0.328	0.912	1.000
240	λ_1	0.051	0.062	0.078	0.116	0.269	0.514	0.970	1.000
	λ_2	0.056	0.070	0.076	0.126	0.280	0.512	0.973	1.000
	λ_t	0.049	0.048	0.079	0.148	0.408	0.749	0.977	0.960
	λ_F	0.054	0.052	0.046	0.077	0.232	0.546	0.999	1.000
360	λ_1	0.051	0.052	0.079	0.126	0.343	0.632	0.991	1.000
	λ_2	0.046	0.055	0.098	0.155	0.331	0.643	0.998	1.000
	λ_t	0.049	0.057	0.092	0.174	0.524	0.873	0.980	0.961
	λ_F	0.046	0.041	0.055	0.095	0.336	0.704	1.000	1.000
480	λ_1	0.043	0.069	0.102	0.155	0.399	0.690	0.998	1.000
	λ_2	0.059	0.067	0.096	0.162	0.383	0.711	1.000	1.000
	λ_t	0.041	0.064	0.118	0.212	0.568	0.924	0.989	0.956
	λ_F	0.040	0.057	0.072	0.119	0.394	0.778	1.000	1.000

Quadro 13. Poder do teste HEGY com intercepto com $s = 4$ sobre 24.000 replicações.

n		D							
		1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
120	λ_1	0.042	0.046	0.064	0.083	0.138	0.260	0.675	0.969
	λ_2	0.053	0.065	0.078	0.098	0.178	0.345	0.803	0.997
	λ_t	0.052	0.057	0.085	0.122	0.290	0.536	0.957	0.961
	λ_F	0.055	0.037	0.056	0.059	0.169	0.338	0.898	1.000
240	λ_1	0.053	0.063	0.081	0.114	0.292	0.539	0.969	1.000
	λ_2	0.068	0.055	0.092	0.107	0.310	0.538	0.977	1.000
	λ_t	0.044	0.052	0.089	0.141	0.436	0.778	0.985	0.968
	λ_F	0.048	0.040	0.056	0.076	0.256	0.591	0.998	1.000
360	λ_1	0.066	0.050	0.084	0.124	0.334	0.697	0.998	1.000
	λ_2	0.056	0.078	0.087	0.150	0.338	0.655	0.994	1.000
	λ_t	0.041	0.069	0.094	0.187	0.503	0.858	0.983	0.966
	λ_F	0.048	0.042	0.060	0.126	0.327	0.716	1.000	1.000
480	λ_1	0.046	0.056	0.089	0.162	0.422	0.795	1.000	1.000
	λ_2	0.048	0.059	0.076	0.151	0.370	0.701	0.998	1.000
	λ_t	0.053	0.053	0.103	0.209	0.557	0.927	0.987	0.968
	λ_F	0.047	0.049	0.066	0.118	0.377	0.808	1.000	1.000

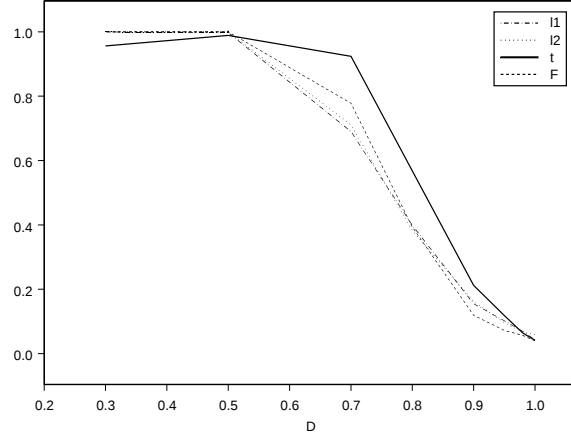


Figura 5. Poder do teste HEGY sem a componente intercepto para $n = 480$.

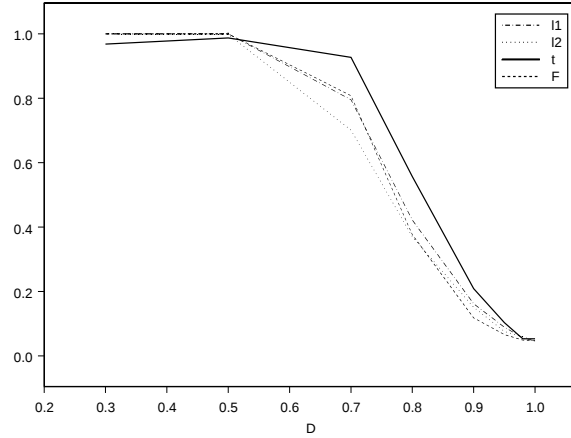


Figura 6. Poder do teste HEGY com a componente intercepto para $n = 480$.

uso da variância assintótica e a variância de regressão, os resultados indicam que o poder é maior quando fazemos uso a variância assintótica estimada no denominador dos testes. Nas Figuras 7 e 8 mostramos os resultados dos testes com variância assintótica para os tamanhos amostrais $n = 120$ e 480 . Destas figuras vemos claramente que o teste $t_{\text{GPH}_{v,a}}$, para qualquer frequência, apresenta poder inferior ao teste $t_{\text{sp}_{v,a}}$.

Finalmente, no Quadro 16 encontram-se resultados referentes aos testes fracionários baseados em todas as frequências harmônicas. Para estes testes encontramos poder de rejeição igual a 1 quando $D = 0.7$, o que mostra a superioridade destes testes em relação aos demais avaliados. E, dentre estes, o teste fracionário t_{FT} é o que apresenta a maior taxa de rejeição. Em seguida, os testes baseados na função periodograma suavizado apresentam-se

Quadro 14. Poder para $t_{\text{GPH}_{v,\alpha}}$ e $t_{\text{sp}_{v,\alpha}}$ com $s = 4$ sobre 1.000 replicações.

Frequência	n	Teste	D							
			1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
$v = 0$	120	GPH	0.044	0.050	0.047	0.059	0.126	0.204	0.473	0.783
		sp	0.045	0.045	0.048	0.063	0.131	0.234	0.570	0.907
	240	GPH	0.052	0.057	0.054	0.076	0.194	0.387	0.841	0.998
		sp	0.042	0.059	0.068	0.101	0.214	0.479	0.926	1.000
	360	GPH	0.054	0.049	0.064	0.087	0.229	0.491	0.966	1.000
		sp	0.058	0.048	0.074	0.107	0.294	0.609	0.994	1.000
	480	GPH	0.057	0.047	0.061	0.091	0.270	0.610	0.993	1.000
		sp	0.048	0.054	0.067	0.099	0.362	0.751	1.000	1.000
$v = 1$	120	GPH	0.048	0.055	0.055	0.065	0.126	0.221	0.528	0.822
		sp	0.053	0.051	0.072	0.091	0.192	0.427	0.926	1.000
	240	GPH	0.047	0.046	0.064	0.096	0.204	0.404	0.895	0.997
		sp	0.055	0.068	0.066	0.132	0.338	0.717	1.000	1.000
	360	GPH	0.051	0.050	0.059	0.079	0.274	0.580	0.984	1.000
		sp	0.053	0.058	0.077	0.147	0.498	0.885	1.000	1.000
	480	GPH	0.038	0.051	0.083	0.113	0.318	0.720	0.998	1.000
		sp	0.047	0.054	0.099	0.170	0.571	0.940	1.000	1.000
$v = 2$	120	GPH	0.040	0.052	0.074	0.060	0.121	0.180	0.475	0.820
		sp	0.050	0.058	0.067	0.083	0.151	0.300	0.739	0.983
	240	GPH	0.038	0.039	0.053	0.086	0.182	0.372	0.843	0.998
		sp	0.054	0.060	0.067	0.097	0.247	0.534	0.975	1.000
	360	GPH	0.055	0.045	0.072	0.104	0.242	0.497	0.968	1.000
		sp	0.053	0.040	0.069	0.114	0.315	0.682	0.999	1.000
	480	GPH	0.048	0.056	0.060	0.072	0.299	0.636	0.994	1.000
		sp	0.042	0.050	0.071	0.109	0.416	0.802	1.000	1.000

Quadro 15. Poder para $t_{\text{GPH}_{v,r}}$ e $t_{\text{sp}_{v,r}}$ com $s = 4$ sobre 1.000 replicações.

Frequência	n	Teste	D									
			1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30		
$v = 0$	120	GPH	0.044	0.046	0.045	0.055	0.109	0.186	0.394	0.672		
		sp	0.053	0.040	0.043	0.057	0.085	0.144	0.347	0.609		
	240	GPH	0.050	0.052	0.054	0.076	0.180	0.330	0.772	0.978		
		sp	0.049	0.041	0.049	0.059	0.160	0.319	0.779	0.991		
$v = 1$	360	GPH	0.053	0.052	0.062	0.077	0.188	0.431	0.925	0.998		
		sp	0.050	0.046	0.054	0.080	0.207	0.462	0.964	0.998		
	480	GPH	0.052	0.051	0.056	0.072	0.215	0.521	0.978	1.000		
		sp	0.045	0.057	0.056	0.071	0.279	0.612	0.998	1.000		
	120	GPH	0.034	0.050	0.048	0.057	0.107	0.175	0.420	0.698		
		sp	0.048	0.047	0.067	0.082	0.178	0.370	0.888	0.994		
	240	GPH	0.051	0.043	0.055	0.082	0.142	0.334	0.815	0.979		
		sp	0.048	0.065	0.061	0.115	0.294	0.670	0.999	1.000		
$v = 2$	360	GPH	0.056	0.032	0.053	0.063	0.203	0.479	0.938	1.000		
		sp	0.053	0.054	0.071	0.133	0.452	0.835	1.000	1.000		
	480	GPH	0.048	0.045	0.067	0.089	0.239	0.621	0.978	1.000		
		sp	0.050	0.051	0.088	0.154	0.516	0.921	1.000	1.000		
	120	GPH	0.036	0.048	0.061	0.061	0.095	0.161	0.415	0.713		
		sp	0.040	0.059	0.061	0.078	0.124	0.233	0.618	0.930		
	240	GPH	0.037	0.038	0.048	0.063	0.166	0.305	0.754	0.974		
		sp	0.047	0.062	0.061	0.090	0.224	0.477	0.945	1.000		
$v = 2$	360	GPH	0.058	0.043	0.063	0.082	0.212	0.454	0.927	0.997		
		sp	0.060	0.042	0.068	0.111	0.282	0.625	0.995	1.000		
	480	GPH	0.055	0.058	0.056	0.060	0.258	0.556	0.981	1.000		
		sp	0.045	0.055	0.064	0.111	0.366	0.764	1.000	1.000		

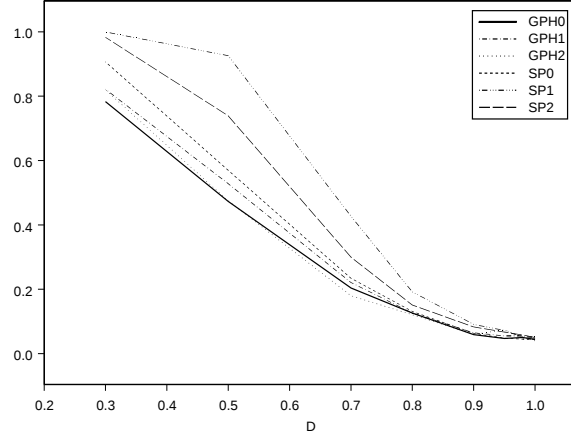


Figura 7. Poder dos testes $t_{GPH_{v,a}}$ e $t_{sp_{v,a}}$ para $n = 120$.

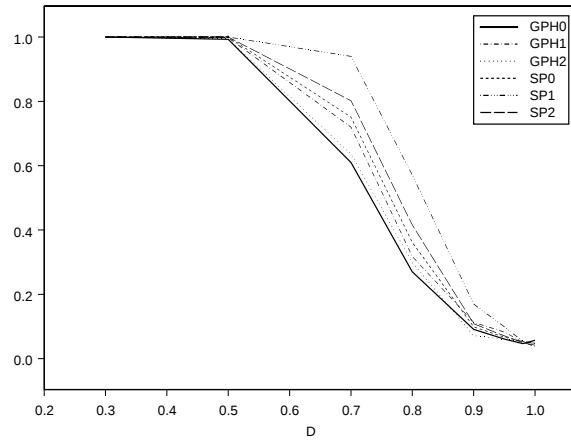


Figura 8. Poder dos testes $t_{GPH_{v,a}}$ e $t_{sp_{v,a}}$ para $n = 480$.

superiores àqueles baseados na função periodograma; sendo que o teste $t_{sp_{T,r}}$ apresenta poder um pouco superior ao teste $t_{sp_{T,a}}$.

4.4.4. Comparação entre testes

Nas Figuras 9, 10 e 11 apresentamos, para $n = 480$, resultados do teste HEGY com a presença do intercepto em comparação com o teste fracionário $t_{sp_{v,a}}$. A razão de fazer a comparação com $t_{sp_{v,a}}$ é porque este exhibe os melhores resultados de poder do que $t_{GPH_{v,a}}$. Nestes confrontos, consideramos λ_1 com sp_0 , λ_2 com sp_1 e λ_t e λ_F com sp_2 . Podemos perceber que $t_{sp_{v,a}}$ somente é superior a HEGY quando $v = 1$. E nas figuras numeradas

Quadro 16. Poder dos testes que utilizam frequências harmônicas com $s = 4$ sobre 1.000 replicações.

n	Teste	D							
		1.00	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
120	t_{FT}	0.043	0.075	0.112	0.175	0.477	0.841	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,a}}$	0.047	0.069	0.089	0.147	0.336	0.635	0.978	1.000
	$t_{sp_{T,a}}$	0.045	0.058	0.095	0.181	0.538	0.897	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,r}}$	0.047	0.068	0.086	0.138	0.324	0.610	0.972	1.000
	$t_{sp_{T,r}}$	0.046	0.057	0.096	0.189	0.560	0.904	1.000	1.000
240	t_{FT}	0.049	0.076	0.158	0.357	0.868	0.997	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,a}}$	0.038	0.062	0.096	0.194	0.641	0.947	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,a}}$	0.047	0.091	0.127	0.331	0.824	0.996	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,r}}$	0.035	0.056	0.095	0.188	0.621	0.935	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,r}}$	0.046	0.090	0.130	0.339	0.827	0.997	1.000	1.000
360	t_{FT}	0.063	0.091	0.189	0.482	0.972	1.000	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,a}}$	0.048	0.072	0.123	0.286	0.839	0.995	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,a}}$	0.047	0.082	0.171	0.422	0.967	1.000	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,r}}$	0.047	0.082	0.114	0.272	0.824	0.992	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,r}}$	0.046	0.082	0.176	0.435	0.969	1.000	1.000	1.000
480	t_{FT}	0.049	0.104	0.251	0.627	0.997	1.000	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,a}}$	0.058	0.078	0.152	0.364	0.935	1.000	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,a}}$	0.049	0.091	0.217	0.544	0.990	1.000	1.000	1.000
	$t_{GPH_{T,r}}$	0.057	0.081	0.147	0.360	0.924	1.000	1.000	1.000
	$t_{sp_{T,r}}$	0.051	0.090	0.226	0.550	0.990	1.000	1.000	1.000

de 12 a 15 confrontamos os testes fracionários que consideram todas frequências harmônicas com o teste DHF sem a componente intercepto (DHFsi). Podemos ver que o poder dos testes que utilizam estimadores baseados no método GPH apresentam resultados inferiores ao de DHF para $n \leq 240$.

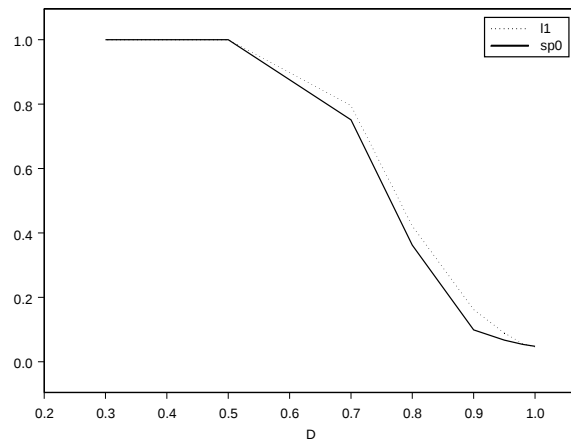


Figura 9. Poder de λ_1 (l1), teste HEGY, e $t_{sp_{0,a}}$ (sp0) para $n = 480$.

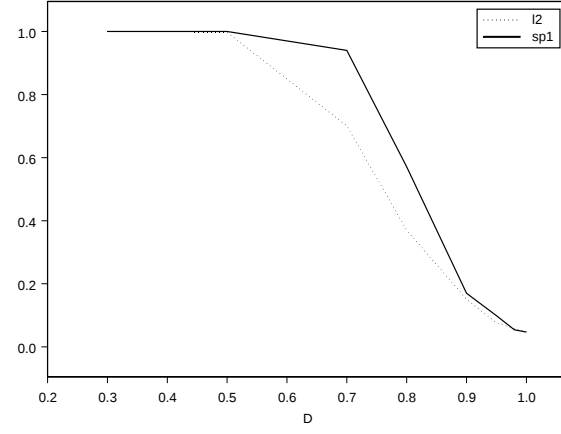


Figura 10. Poder de λ_2 (l2), teste HEGY, e $t_{sp1,a}$ (sp1) para $n = 480$.

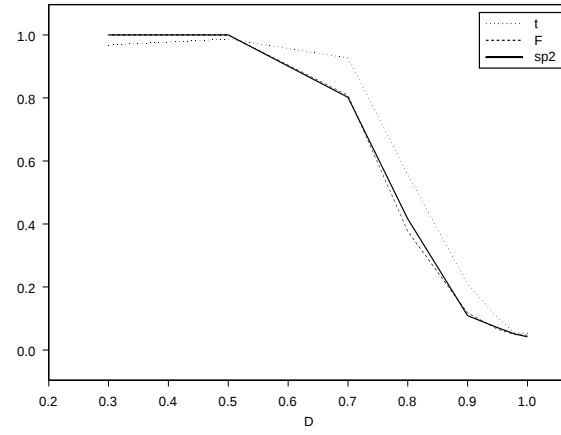


Figura 11. Poder de λ_t (t) e λ_F (F), teste HEGY, e $t_{sp2,a}$ (sp2) para $n = 480$.

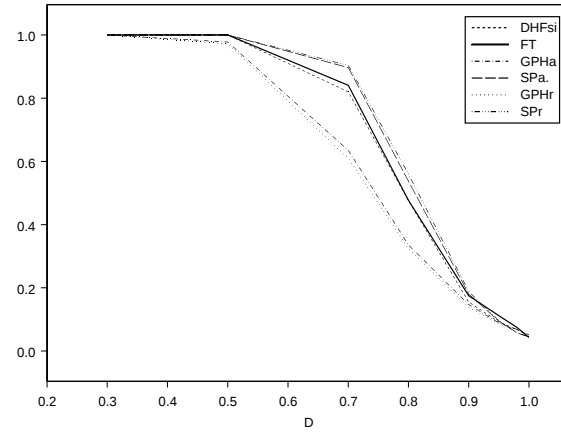


Figura 12. Poder do teste DHF comparado com testes fracionários para $n = 120$.

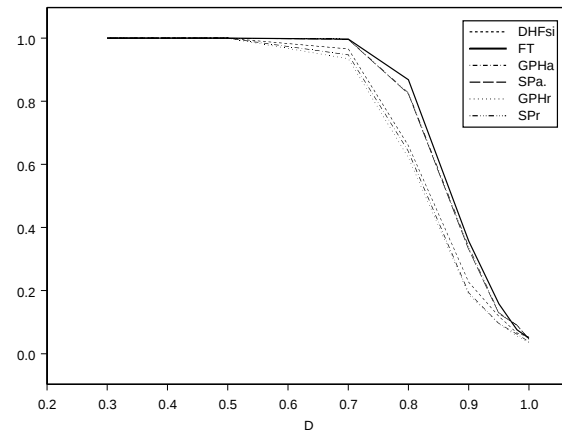


Figura 13. Poder do teste DHF comparado com testes fracionários para $n = 240$.

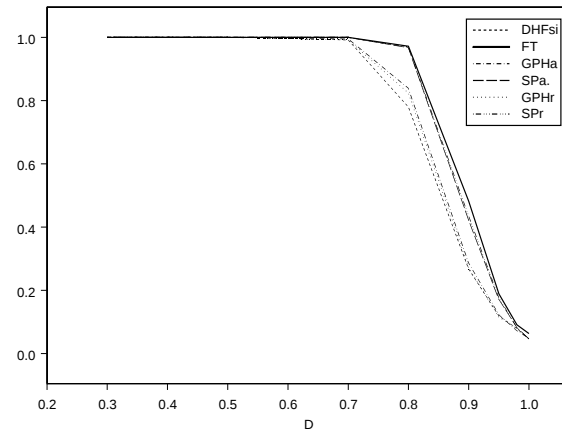


Figura 14. Poder do teste DHF comparado com testes fracionários para $n = 360$.

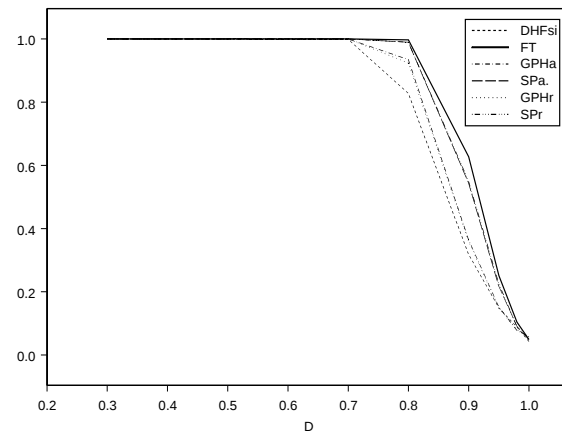


Figura 15. Poder do teste DHF comparado com testes fracionários para $n = 480$.

Capítulo 5

Uma aplicação

Séries temporais com característica de longa dependência têm sido observadas em diversas áreas. Para indentificar este fenômeno, em processos ARFIMA, podemos fazer uso da função de autocorrelação, que decai lentamente de forma hiperbólica, ou da função densidade espectral, onde para frequências próximas de zero torna-se ilimitada. No caso de processos SARFIMA, a função densidade espectral é ilimitada nas frequências zero e sazonais.

O uso da função de autocorrelação amostral na identificação de um modelo é bastante usual. Em processos ARIMA um decaimento lento desta função pode indicar que devemos diferenciar a série, com valores inteiros. Entretanto, se levarmos em consideração os estudos do fenômeno de longa dependência, o decaimento lento da função de autocorrelação amostral pode indicar que a série deve ser diferenciada com valores fracionários, pertencentes ao conjunto dos números reais. Portanto, devemos tomar cuidado quando fazemos uso da função de autocorrelação para identificar um modelo, pois um decaimento lento desta função pode indicar que devemos diferenciar a série com valores inteiros ou fracionários, ocasionando com isso uma confusão na análise visual. Não distante disso, ao aplicarmos testes de raízes unitárias, estes podem avaliar uma série que apresenta a característica de longa dependência como sendo integrada de ordem 1, visto que estes testes apresentam baixo poder quando esta característica está presente nos dados.

Neste capítulo faremos a análise de uma série temporal que apresenta a característica em estudo. A motivação central é mostrar as conseqüências nas previsões ao desconsiderar a presença desta característica. Para isso, faremos uso da modelagem SARIMA, considerando os testes de DHF, HEGY, $t_{\text{GPH}_{T,a}}$, e SARFIMA, onde avaliaremos o erro de previsão com as medidas: erro absoluto médio (EAM), erro médio (EM) e erro quadrático médio de previsão (EQM_p), apresentadas a seguir:

$$\text{EAM} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h |e_{t+j}|,$$

$$\text{EM} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h e_{t+j},$$

$$\text{EQM}_p = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h e_{t+j}^2.$$

A série utilizada é a do consumo trimestral de gás, em milhões de *therms*, de UK (UKgas) considerando as observações entre 1960, a partir do primeiro trimestre, e 1986, até o quarto trimestre, tendo um total de 108 observações. Esta série pertence à base de dados do pacote estatístico R. Observamos na Figura 16 que a série UKgas apresenta tendência e que a variância cresce com o passar do tempo, indicando que estamos diante de uma série não estacionária. Devido ao aumento da variância, analisaremos a série fazendo-se uso do resultado da transformação de Box-Cox.¹ A transformação sugerida pelo método de Box-Cox foi $1/\sqrt{y}$, onde y indica a série em estudo.² Fizemos também uma análise visual utilizando as transformações $\ln y$ e $1/y$, mas o melhor resultado é o proveniente da transformação de Box-Cox. Na Figura 17 apresentamos a transformação $1/\sqrt{y}$ na série UKgas. Observamos que a série transformada continua não estacionária, pois a mesma apresenta tendência. Chamamos de série transformada aquela proveniente da transformação de Box-Cox. Examinando a função de autocorrelação amostral da série transformada, Figura 18, percebemos indícios de sazonalidade com período sazonal $s = 4$ e um decaimento lento, indicando assim que devemos diferenciar os dados. Fica assim evidente a presença do fenômeno longa dependência. Diante de todos estes comentários temos base teórica para tomar duas frentes de modelagem: a modelagem SARIMA e modelagem SARFIMA.

Para selecionarmos os modelos SARIMA, escolhemos o critério AIC (*Akaike Information Criterion*) considerando alguns valores para d e D . Para fortalecer nossas análises, obtivemos resultados dos testes de DHF, HEGY, $t_{\text{GPH}_{T,a}}$ e ADF. No ajuste dos modelos SARFIMA, fizemos uso do estimador GPH_T e, após diferenciada a série, ajustamos modelos com o critério AIC. Para fins de previsão, toda modelagem foi avaliada na série com observações entre o primeiro trimestre de 1960 até o quarto trimestre de 1983, restando assim 12 observações para avaliarmos as previsões dos modelos ajustados.

Antes de entrarmos na modelagem em si, aplicamos os testes de raízes unitárias sazonais comentados acima e o teste ADF. O valor da estatística de teste DHF é -5.6464 , indicando a rejeição da hipótese de raiz unitária sazonal, veja Quadro 17. O teste ADF aplicado na série transformada resulta em -0.9868 com valor-p igual a 0.9366 e quando aplicado na série diferenciada com $D = 1$ resulta em -4.3953 com valor-p igual a 0.01. Para o teste HEGY

¹ Box e Cox (1964) sugerem um método para estabilizar a variância que é conhecido como transformação de Box-Cox.

² O pacote R (até a versão 1.8.1.) não tem esta transformação para séries temporais. Obtivemos este resultado com o pacote estatístico MINITAB.

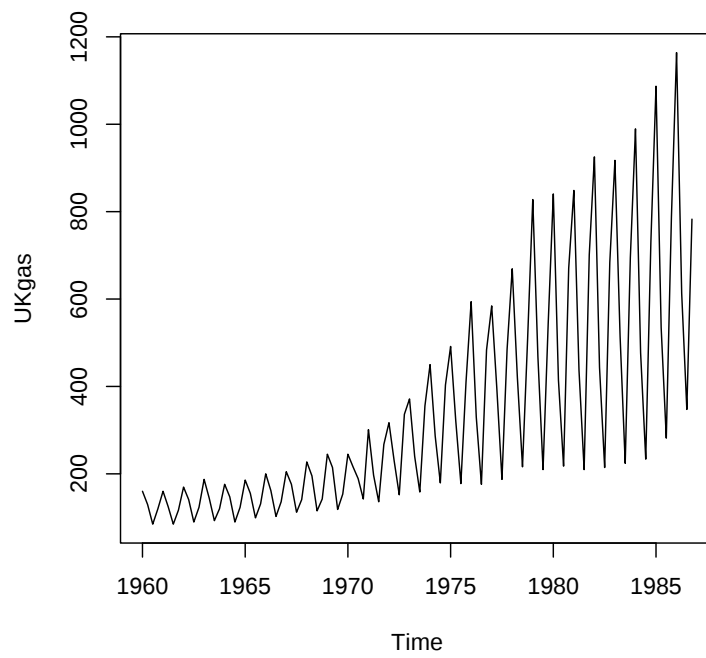


Figura 16. Série UKgas.

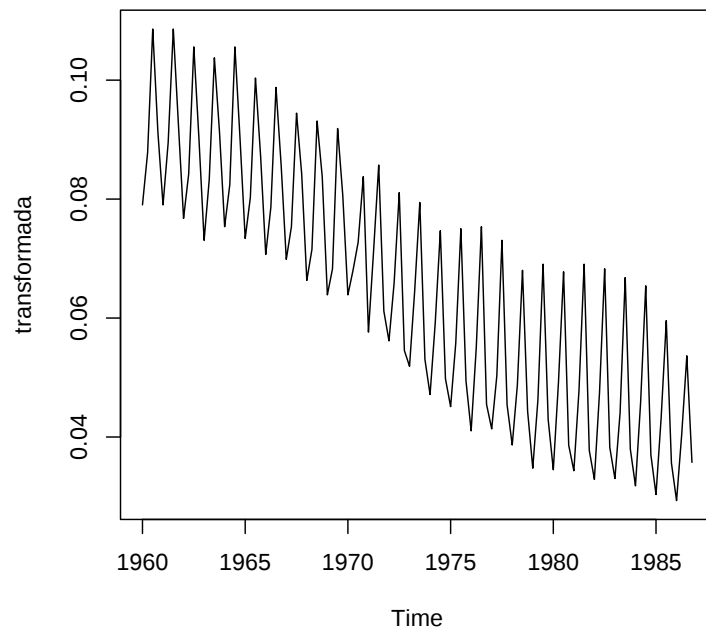


Figura 17. Série transformada.

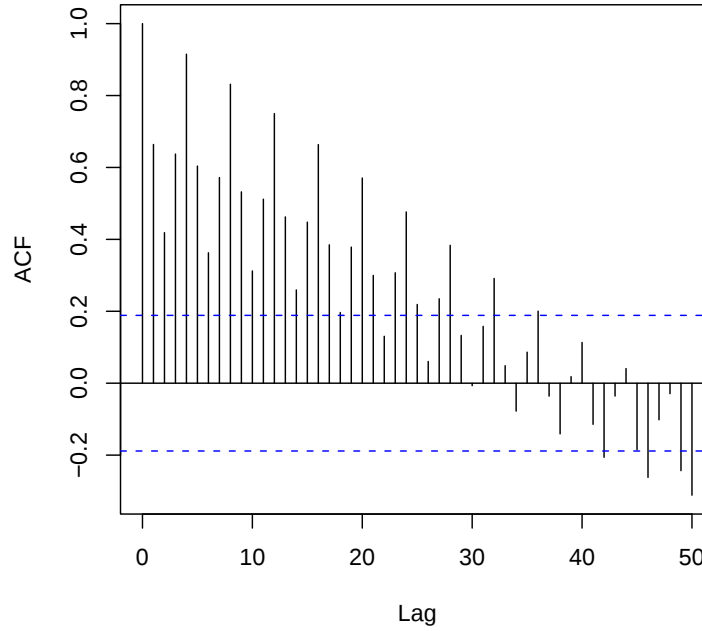


Figura 18. Função de autocorrelação amostral da série transformada.

temos $\pi_1 = -5.2695$, $\pi_2 = -1.5849$ e $'F' = 0.5819$, indicando a não rejeição das raízes -1 e complexas, veja Quadro 18. Em contrapartida a estes testes usuais, aplicamos também um dos testes que propomos. O resultado do teste $t_{\text{GPH}_{T,a}}$ é -1.9565 , mostrando que temos evidências para rejeitar a hipótese nula de raiz unitária.

Quadro 17. Pontos críticos dos testes DHF e $t_{\text{GPH}_{T,a}}$ com $s = 4$ sobre 24.000 replicações em tamanho de amostra $n = 108$.

Testes	Regressão	Percentis							
		1.0%	2.5%	5.0%	10%	90%	95%	97.5%	99%
DHF	s/inter	-2.53	-2.17	-1.87	-1.51	1.10	1.47	1.80	2.19
	c/inter	-2.62	-2.29	-2.00	-1.68	0.79	1.19	1.54	1.99
$t_{\text{GPH}_{T,a}}$	—	-2.40	-1.97	-1.63	-1.24	1.10	1.42	1.70	2.03

Quadro 18. Pontos críticos para o teste HEGY com $s = 4$ sobre 24.000 replicações em tamanho de amostra $n = 108$.

Regressão	Percentis		
	t_{π_1}	t_{π_2}	$F : \pi_3 \cap \pi_4$
	5%	5%	95%
s/inter	-1.91	-1.92	3.09
c/inter	-2.83	-1.90	3.08

No Quadro 19 apresentamos o modelo resultante dos testes de raízes unitárias juntamente com outros, onde estes foram obtidos com o critério AIC. Para testarmos se o modelo foi bem especificado, investigamos a correlação serial dos resíduos e aplicamos o teste de Portmanteau (Ljung-Box). Os resultados indicam que os modelos são adequados.

Quadro 19. Melhores resultados com o critério AIC em modelos SARIMA na série transformada.

Modelos	AIC
$(2, 0, 3) \times (1, 1, 0)_4$	-764.45
$(3, 1, 2) \times (0, 1, 2)_4$	-756.38
$(2, 1, 2) \times (1, 0, 0)_4$	-773.62

No contexto de processos com longa dependência, utilizamos o estimador GPH_T para a estimação conjunta dos parâmetros d e D . Não temos conhecimento sobre testes de hipóteses que consideram se os resultados das estimativas são realmente diferentes de zero, mas os valores que obtivemos para esta série nos fornecem evidências de que são diferentes de zero. Obtivemos para a série transformada $\hat{d} = 0.8374$ e $\hat{D} = 0.5140$. Estas estimativas mostram que estamos lidando com uma série não estacionária, pois $\hat{d} + \hat{D} > 0.5$.

No Quadro 20 mostramos os melhores modelos obtidos com o critério AIC aplicado na série diferenciada com as estimativas fracionárias. Da mesma maneira que fizemos a análise de resíduos para os modelos SARIMA, estes aqui também mostram-se adequados.

Quadro 20. Melhores resultados com o critério AIC em modelos SARFIMA na série transformada.

Modelos	AIC
$(3, \hat{d}, 3) \times (0, \hat{D}, 0)_4$	-738.00
$(1, \hat{d}, 3) \times (1, \hat{D}, 1)_4$	-737.49
$(3, \hat{d}, 2) \times (1, \hat{D}, 2)_4$	-738.63

Para finalizar nossos estudos, no Quadro 21 mostramos os resultados das previsões com os modelos considerados. Os resultados mostram que a transformação $1/\sqrt{y}$ se adequou bem aos dados. Observamos que a modelagem SARIMA prevê melhor até 6 passos à frente, mostrando que a longo prazo a modelagem SARFIMA se adapta melhor aos dados. Isto é verificado com o confronto entre os modelos $SARIMA(2, 1, 2) \times (1, 0, 0)_4$, onde este é o modelo SARIMA que melhor prevê nos passos $h = 9$ e 12 , e o modelo $SARFIMA(3, \hat{d}, 3) \times (0, \hat{D}, 0)_4$.

É conhecido que previsões geradas pelo processo ARMA não são melhores que o valor médio da série para poucos passos à frente. Entretanto, o modelo de longa dependência ARFIMA fornece previsões diferentes da média para horizontes distantes, veja Brockwell e

Davis (1991, p. 534). Em nosso estudo de aplicação, os resultados evidenciam este comportamento.

Quadro 21. Medidas de previsão obtidas de modelos SARIMA e SARFIMA com $s = 4$ na série transformada para o período 1984.1 a 1986.4.

Método	Medidas	Previsão				
		$h = 1$	$h = 3$	$h = 6$	$h = 9$	$h = 12$
SARIMA $(2, 0, 3) \times (1, 1, 0)_4$	EAM	0.0002	0.0007	0.0009	0.0011	0.0019
	EM	0.0002	0.0004	8.66e-05	0.0007	-0.0016
	EQM _p	8.40e-08	8.26e-07	4.51e-07	3.79e-06	1.27e-05
SARIMA $(3, 1, 2) \times (0, 1, 2)_4$	EAM	0.0004	0.0008	0.0011	0.0010	0.0018
	EM	0.0004	0.0006	0.0002	-0.0004	-0.0012
	EQM _p	1.89e-07	1.11e-06	6.16e-07	3.43e-06	1.15e-05
SARIMA $(2, 1, 2) \times (1, 0, 0)_4$	EAM	0.0003	0.0010	0.0014	0.0010	0.0015
	EM	0.0003	0.0010	0.0004	-0.0002	-0.0009
	EQM _p	1.02e-07	1.55e-06	8.51e-07	2.08e-06	6.94e-06
SARFIMA $(3, \hat{d}, 3) \times (0, \hat{D}, 0)_4$	EAM	0.0011	0.0010	0.0016	0.0011	0.0018
	EM	0.0011	0.0010	0.0001	0.0002	0.0003
	EQM _p	1.29e-06	1.05e-06	7.64e-07	1.89e-06	6.08e-06
SARFIMA $(1, \hat{d}, 3) \times (1, \hat{D}, 1)_4$	EAM	0.0006	0.0012	0.0014	0.0014	0.0021
	EM	0.0006	0.0001	-4.24e-05	7.33e-06	1.33e-05
	EQM _p	3.75e-07	1.66e-06	8.85e-07	3.82e-06	9.34e-06
SARFIMA $(3, \hat{d}, 2) \times (1, \hat{D}, 2)_4$	EAM	0.0005	0.0013	0.0018	0.0014	0.0022
	EM	0.0005	0.0001	-4.37e-05	-9.01e-05	-3.00e-06
	EQM _p	3.11e-07	2.26e-06	1.30e-06	4.28e-06	9.77e-06

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho observamos que, dentre os estimadores avaliados, não existe um estimador que seja superior aos outros estudados considerando todos os possíveis casos. Verificamos que utilizar todas as frequências, GPH_T e sp_T , produz melhores estimativas em termos de viés e EQM. Outra observação é que em pequenos tamanhos amostrais a diferença no comportamento dos estimadores fica bem evidente. Além disso, observamos que:

1. O aumento do período sazonal piora a qualidade de todos os estimadores; ou seja, nossos resultados mostram que o viés e o EQM dos estimadores em séries com período sazonal $s = 12$ apresentam valores bem maiores do que as que têm período $s = 4$.
2. O aumento do tamanho amostral melhora a qualidade das estimativas, principalmente quando provindas de GPH_T e sp_T .
3. A estimativa do parâmetro d torna-se bem viciada quando a soma dos parâmetros $(d+D)$ está próxima de ou é superior a 1.0.
4. O período sazonal, o tamanho da amostra e a estacionariedade ou não de um processo alteram completamente a qualidade dos estimadores, visto que:
 - Para modelo rígido com $s = 4$, em processos estacionários, o estimador GPH_T é o melhor em termos de viés enquanto que o estimador sp_T é o melhor em termos de EQM. Já na região não estacionária, o estimador FT apresenta os melhores resultados, exceto quando $D = 1.0$, onde GPH_T é o melhor estimador.
 - Para modelo rígido com $s = 12$ o estimador GPH_T exibe melhores resultados. Na região de estacionariedade este estimador apresenta um viés bem reduzido com EQM bem próximo de sp_T e na região não estacionária, GPH_T é melhor tanto em viés quanto em EQM.
 - Para modelo completo e processo estacionário com $s = 4$, o estimador sp_T , no geral, é o que apresenta as melhores medidas de viés e EQM. No entanto, quando $s = 12$, o estimador GPH_T apresenta menor viés e sp_T menor EQM. Já na região não estacionária as medidas avaliadas passam a apresentar altos valores, principalmente quando a soma dos parâmetros fracionários está próxima de ou é superior a 1.0.

5. Os estimadores GPH_v e sp_v que consideramos não apresentaram bons resultados. Em certas situações, para algumas frequências, o estimador sp_v chega a apresentar melhor desempenho em viés e, em outras, o estimador GPH_v além de exibir menor viés, os resultados indicam menor EQM. Deixamos como proposta, para o modelo completo, o que comentamos para a soma das estimativas dos parâmetros ($\hat{d} + \hat{D}$) na frequência zero, com estimação de D na última frequência sazonal, onde esta sugestão resulta em melhores resultados.

No que se refere a testes de raízes unitárias considerando o fenômeno de longa dependência, salientamos que, em processos ARFIMA, à medida que o tamanho amostral torna-se grande e d se afasta da raiz unitária, o poder dos testes de raízes unitárias aumenta. Nossos estudos verificaram que estes resultados também ocorrem para processos SARFIMA, como era de se esperar, e que:

1. Entre DHF e HEGY, observamos que os resultados das simulações indicam o teste DHF como o que apresenta maior poder.
2. O teste HEGY comparado com $sp_{v,a}$ apresentou maior poder, exceto quando $v = 1$.
3. Dentre os testes fracionários que fazem uso de todas as frequências harmônicas, no geral, os resultados das simulações indicam t_{FT} e $t_{sp_{T,r}}$ como os que apresentam os melhores resultados.

Antes de cessar os comentários, deixamos para futuros trabalhos a proposta de estimar d e D em processos com erros não normais e estudar um teste de raízes unitárias que considera tanto d como D em um mesmo teste.

Referências

- [1] Abraham, B. e Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Arteche, J. e Robinson, P. M. (2000). Semiparametric inference in seasonal and cyclical long memory processes. *Journal of Time Series Analysis*, **21**, 1–25.
- [3] Barsky, R. e Miron, J. (1989). The seasonal and the business cycle. *Journal of Political Economy*, **97**, 503–534.
- [4] Box, G. E. P. e Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal Roy. Stat. Soc., Ser B*, **26**, 211–252.
- [5] Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco.
- [6] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. e Reinsel, G. C. (1994). *Time series analysis: forecasting and control*, 3ª ed. Prentice-Hall, New Jersey.
- [7] Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991). *Time series: theory and methods*, 2ª ed. Springer-Verlag, New York.
- [8] Burns, A. F. e Mitchell, W. C. (1946). *Measuring business cycles*. National Bureau of Economic Research, New York.
- [9] Canova, F. (1992). An alternative approach to modeling and forecasting seasonal time series. *Journal of Business & Economic Statistics*, **10**, 97–108.
- [10] Canova, F. e Hansen, B. E. (1995). Are seasonal patterns constant over time: a test for seasonal stability. *Journal of Business and Economic Statistics*, **13**, 237–252.
- [11] Dickey, D. A. e Fuller, W. A. (1979). Distribution of estimator for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427–431.
- [12] Dickey, D. A., Hasza, D. P. e Fuller, W. A. (1984). Distribution of estimator for autoregressive time series with a unit root. *Journal of American Statistical Association*, **79** (386), 355–367.
- [13] Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. (1991). On the power of Dickey-Fuller tests against fractional alternatives. *Economics Letters*, **35**, 155–160.
- [14] Doornik, J.A. (2001). *Ox: an Object-oriented Matrix Programming Language*, 4ª ed. Londres: Timberlake Consultants & Oxford: <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik>.
- [15] Engle, R. F., Granger, C. W. J., Hylleberg, S. e Lee, H. S. (1993). The Japanese consumption function. *Journal of Econometrics*, **55**, 275–298.

- [16] Fava, V. L. e Alves, D. C. O. (1998). Longa persistência nas taxas de inflação. *Revista de Econometria*, **18**, 245–264.
- [17] Fox, R. e Taqqu, M.S. (1986). Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistic*, **14**, 517–532.
- [18] Fuller, W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. Wiley, New York.
- [19] Geweke, J. e Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221–237.
- [20] Giraitis, L. e Leipus, R. (1995). A generalized fractionally differencing approach in long memory modelling. *Lithuanian Mathematical Journal*, **35**, 53–65.
- [21] Granger, C. W. J. e Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 15–29.
- [22] Hansen, L. e Sargent, T. (1993). Seasonality and approximation errors in rational expectations models. *Journal of Econometrics*, **55**, 21–55.
- [23] Hassler, U. (1994). (Mis)specification of long memory in seasonal time. *Journal of Time Series Analysis*, **15** (1), 19–30.
- [24] Hassler, U. e Wolters, J. (1994). On the power of unit root tests against fractional alternatives. *Economics Letters*, **45**, 1–5.
- [25] Hauser, M. A. (1999). Maximum likelihood estimators for ARMA and ARFIMA models: a Monte Carlo study. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **80**, 229–255.
- [26] Hosking, J. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, **68**, 165–176.
- [27] Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. W. J. e Yoo, B. S. (1990). Seasonal integration and cointegration. *Journal of Econometrics*, **44**, 215–238.
- [28] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B, Schmidt, P. e Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, **54**, 159–178.
- [29] Lopes, S., Olbermann, B. e Reisen, V. A. (2004). A comparison of estimation methods in nonstationary ARFIMA processes. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **forthcoming**.
- [30] Macaulay, F. R. (1938). *Some theoretical problems suggested by movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856*. National Bureau of Economic Research, New York.
- [31] Maddala, G. S. e Kim, I.-M. (1998). *Unit roots cointegration and structural change*. University Press, Cambridge.
- [32] Mitchell, W. C. (1927). *The business cycles: The problem and its setting*. National Bureau of Economic Research, New York.

- [33] Parzen, E. (1961). Mathematical consideration in the estimation of spectra. *Technometrics*, **3**, 167–190.
- [34] Peiris, M.S. e Singh, N. (1996). Predictors for seasonal and nonseasonal fractionally integrated ARIMA models. *Biometrika*, **38**, 741–752.
- [35] Phillips, P. C. B. e Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, **75**, 335–346.
- [36] Porter-Hudak, S. (1990). An application of the seasonal fractilly differenced model to the monetary aggregates. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 338–344.
- [37] Priestley, M. B. (1981). *Spectral analysis in time series*. Academic Press, London.
- [38] Ray, B. K. (1993). Long Range forecasting of IBM products revenues using a sazonal fractionally differenced ARMA models. *International Journal of Forecasting*, **9**, 255–269.
- [39] Reisen, V. A. (1994). Estimation of the fractional difference parameter in the ARIMA(p, d, q) model using the smoothed periodogram. *Journal Times Series Analysis*, **15**, 355–350.
- [40] Reisen, V. A. (1995). *O modelo ARIMA para d fracionário*. ABE & CNPq, Brasil.
- [41] Reisen, V. A., Abraham, B. e Toscano, E. M. M. (2000). Parametric and semiparametric estimations of stationary univariate ARFIMA models. *Brazilian Journal of Probability and Statistic*, **14**, 185–206.
- [42] Reisen, V. A., Rodrigues, A. L. e Palma, W. (2004a). Estimation of seasonal ARFIMA processes. *Computational Statistics and Data Analysis*, **Preprint**.
- [43] Reisen, V. A., Rodrigues, A. L. e Palma, W. (2004b). Estimating seasonal long memory processes: a Monte Carlo study. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **Preprint**.
- [44] Robinson, P. M. (1994). Semiparametric analysis of long-memory time series. *The Annals of Statistics*, **22**, 515–539.
- [45] Said, S. E. e Dickey, D. A. (1984). Testing for unit root autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, **71**, 599–608.
- [46] Sowell, F. B. (1990). The fractional unit root distribution. *Econometrica*, **58**, 495–505.
- [47] Sowell, F. B. (1992). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractional integrated time series models. *Journal of Econometrics*, **53**, 165–188.
- [48] Wei, W. (1990). *Time series analysis. Univariate and multivariate methods*. Addison Wesley, New York.
- [49] Whittle, P. (1951). *Hypothesis testing in time series analysis*. Hafner, New York.

ANEXO A – Quadros de resultados numéricos para modelo rígido com $s = 4$

Quadro A1. Resultados para $D = 0.1$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{D}$)	0.1016	0.1057	0.0965	0.0350	0.1119	0.0976	0.1045	0.0907	-0.0372
	viés($\hat{D}$)	0.0016	0.0057	-0.0034	-0.0649	0.0119	-0.0023	0.0045	-0.0092	-0.1372
	EQM($\hat{D}$)	0.0665	0.0698	0.0658	0.0425	0.0321	0.0356	0.0162	0.0095	0.0300
240	média($\hat{D}$)	0.0953	0.0989	0.0963	0.0636	0.1048	0.0989	0.0978	0.0926	0.0347
	viés($\hat{D}$)	-0.0046	-0.0010	-0.0036	-0.0363	0.0048	-0.0010	-0.0021	-0.0073	-0.0652
	EQM($\hat{D}$)	0.0278	0.0279	0.0246	0.0175	0.0131	0.0136	0.0071	0.0041	0.0087
360	média($\hat{D}$)	0.1009	0.1029	0.0924	0.0755	0.1043	0.0951	0.0976	0.0933	0.0540
	viés($\hat{D}$)	0.0009	0.0029	-0.0075	-0.0244	0.0043	-0.0048	-0.0023	-0.0066	-0.0459
	EQM($\hat{D}$)	0.0155	0.0155	0.0161	0.0103	0.0085	0.0095	0.0037	0.0023	0.0045
480	média($\hat{D}$)	0.0925	0.0931	0.0938	0.0740	0.0986	0.0969	0.0939	0.0925	0.0621
	viés($\hat{D}$)	-0.0074	-0.0068	-0.0061	-0.0259	-0.0013	-0.0030	-0.0060	-0.0074	-0.0378
	EQM($\hat{D}$)	0.0104	0.0115	0.0105	0.0075	0.0062	0.0064	0.0027	0.0017	0.0031
1080	média($\hat{D}$)	0.0975	0.0976	0.1020	0.0893	0.1008	0.1018	0.0990	0.0980	0.0840
	viés($\hat{D}$)	-0.0024	-0.0023	0.0020	-0.0106	0.0008	0.0018	-0.0009	-0.0019	-0.0159
	EQM($\hat{D}$)	0.0046	0.0044	0.0046	0.0030	0.0024	0.0027	0.0011	0.0007	0.0009

Quadro A2. Resultados para $D = 0.5$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{D}$)	0.5158	0.5199	0.5052	0.4317	0.6135	0.5878	0.5154	0.5630	0.3776
	viés($\hat{D}$)	0.0158	0.0199	0.0552	-0.0682	0.1135	0.0877	0.0154	0.0630	-0.1223
	EQM($\hat{D}$)	0.0674	0.0672	0.0648	0.0471	0.0476	0.0528	0.0167	0.0144	0.0261
240	média($\hat{D}$)	0.5101	0.5209	0.5200	0.4678	0.5813	0.5640	0.5176	0.5491	0.4527
	viés($\hat{D}$)	0.0101	0.0209	0.0200	-0.0321	0.0813	0.0640	0.0176	0.0491	-0.0472
	EQM($\hat{D}$)	0.0275	0.0268	0.0263	0.0194	0.0210	0.0223	0.0068	0.0070	0.0064
360	média($\hat{D}$)	0.5134	0.5073	0.5132	0.4861	0.5576	0.5503	0.5115	0.5377	0.4682
	viés($\hat{D}$)	0.0134	0.0073	0.0132	-0.0138	0.0576	0.0502	0.0115	0.0377	-0.0317
	EQM($\hat{D}$)	0.0163	0.0161	0.0159	0.0118	0.0123	0.0140	0.0041	0.0043	0.0035
480	média($\hat{D}$)	0.5145	0.5120	0.5104	0.4912	0.5482	0.5384	0.5115	0.5312	0.4777
	viés($\hat{D}$)	0.0145	0.0120	0.0103	-0.0087	0.0482	0.0384	0.0115	0.0312	-0.0222
	EQM($\hat{D}$)	0.0110	0.0113	0.0117	0.0075	0.0084	0.0095	0.0029	0.0028	0.0021
1080	média($\hat{D}$)	0.5096	0.5089	0.5104	0.4986	0.5299	0.5268	0.5081	0.5206	0.4924
	viés($\hat{D}$)	0.0096	0.0089	0.0104	-0.0013	0.0299	0.0268	0.0081	0.0206	-0.0075
	EQM($\hat{D}$)	0.0041	0.0046	0.0044	0.0030	0.0038	0.0036	0.0012	0.0012	0.0007

Quadro A3. Resultados para $D = 0.9$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{D}$)	0.9275	0.9119	0.9078	0.8275	1.1091	1.0595	0.9205	1.0320	0.7878
	viés($\hat{D}$)	0.0275	0.0119	0.0078	-0.0727	0.2090	0.1595	0.0205	0.1319	-0.1121
	EQM($\hat{D}$)	0.0677	0.0719	0.0726	0.0547	0.0806	0.0779	0.0176	0.0281	0.0231
240	média($\hat{D}$)	0.9163	0.9291	0.9176	0.8769	1.0538	1.0272	0.7287	0.7866	0.6627
	viés($\hat{D}$)	0.0163	0.0291	0.0176	-0.0230	0.1538	0.1271	0.0287	0.0866	-0.0372
	EQM($\hat{D}$)	0.0291	0.0294	0.0295	0.0237	0.0409	0.0407	0.0078	0.0131	0.0058
360	média($\hat{D}$)	0.9129	0.9208	0.9284	0.8885	1.0236	1.0045	0.9215	0.9869	0.8825
	viés($\hat{D}$)	0.0129	0.0208	0.0284	-0.0114	0.1236	0.1044	0.0215	0.0868	-0.0174
	EQM($\hat{D}$)	0.0197	0.0193	0.0203	0.0156	0.0272	0.0264	0.0044	0.0102	0.0025
480	média($\hat{D}$)	0.9246	0.9277	0.9194	0.9059	1.0067	0.9893	0.9257	0.9781	0.8938
	viés($\hat{D}$)	0.0246	0.0277	0.0194	0.0059	0.1067	0.0893	0.0256	0.0781	-0.0061
	EQM($\hat{D}$)	0.0146	0.0137	0.0140	0.0105	0.0197	0.0202	0.0032	0.0082	0.0016
1080	média($\hat{D}$)	0.9204	0.9249	0.9215	0.9134	0.9709	0.9618	0.9237	0.9557	0.9093
	viés($\hat{D}$)	0.0204	0.0249	0.0215	0.0134	0.0709	0.0618	0.0237	0.0557	0.0093
	EQM($\hat{D}$)	0.0077	0.0073	0.0080	0.0050	0.0095	0.0099	0.0017	0.0040	0.0008

ANEXO B – Quadros de resultados numéricos para modelo completo com $s = 4$

Quadro B1a. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.1$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{d}$)	0.0727	—	—	0.4344	—	—	0.0973	0.0814	0.0917
	viés($\hat{d}$)	-0.0273	—	—	0.3344	—	—	-0.0026	-0.0185	-0.0082
	EQM($\hat{d}$)	5.1586	—	—	2.2908	—	—	0.0113	0.0076	0.0077
	$\hat{\rho}_{\hat{d}\hat{d}}$	-0.9953	-0.9396	0.7984	-0.9932	-0.9272	0.7595	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1375	0.1233	0.1203	-0.3455	0.1258	0.0993	0.1072	0.0956	-0.0396
240	viés($\hat{D}$)	0.0375	0.0233	0.0203	-0.4455	0.0258	-0.0007	0.0072	-0.0043	-0.1396
	EQM($\hat{D}$)	6.7301	0.5773	0.1826	3.0392	0.2055	0.0823	0.0174	0.0093	0.0315
	média($\hat{d}$)	0.1512	—	—	0.3018	—	—	0.1012	0.0891	0.0960
	viés($\hat{d}$)	0.0512	—	—	0.2018	—	—	0.0012	-0.0108	-0.0039
	EQM($\hat{d}$)	2.2934	—	—	1.2580	—	—	0.0054	0.0034	0.0032
360	$\hat{\rho}_{\hat{d}\hat{d}}$	-0.9955	-0.9153	0.7481	-0.9944	-0.8985	0.7197	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.0563	0.1041	0.1083	-0.1587	0.1188	0.1077	0.1050	0.1000	0.0354
	viés($\hat{D}$)	-0.0437	0.0041	0.0083	-0.2587	0.0188	0.0077	0.0050	0.0000	-0.0645
	EQM($\hat{D}$)	2.8760	0.1665	0.0597	1.6116	0.0709	0.0293	0.0071	0.0039	0.0084
	média($\hat{d}$)	0.0440	—	—	0.1946	—	—	0.1040	0.0940	0.0986
360	viés($\hat{d}$)	-0.0560	—	—	0.0946	—	—	0.0040	-0.0059	-0.0013
	EQM($\hat{d}$)	1.2320	—	—	0.7199	—	—	0.0034	0.0022	0.0021
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{D}}$	-0.9948	-0.9044	0.7384	-0.9939	-0.9014	0.7018	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1589	0.1024	0.0981	-0.0335	0.1103	0.0955	0.0986	0.0965	0.0539
	viés($\hat{D}$)	0.0589	0.0024	-0.0019	-0.1335	0.0103	-0.0045	-0.0013	-0.0034	-0.0460
EQM($\hat{D}$)	1.5420	0.0880	0.0366	0.9205	0.0430	0.0194	0.0042	0.0026	0.0048	

Quadro B1b. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.1$ com $s = 4$.

Quadro D10. Resultados para $\alpha = 0.1$ e $D = 0.1$ com $g = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
480	média($\hat{d}$)	0.0578	—	—	0.1980	—	—	0.0998	0.0935	0.0969
	viés($\hat{d}$)	-0.0422	—	—	0.0980	—	—	-0.0001	-0.0064	-0.0030
	EQM($\hat{d}$)	0.8981	—	—	0.5476	—	—	0.0022	0.0016	0.0015
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9950	-0.9082	0.7403	-0.9946	-0.8928	0.7158	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1502	0.0833	0.0955	-0.0291	0.0938	0.0948	0.0989	0.0973	0.0647
1080	viés($\hat{D}$)	0.0502	-0.0167	-0.0045	-0.1291	-0.0062	-0.0052	-0.0010	-0.0026	-0.0352
	EQM($\hat{D}$)	1.1061	0.0659	0.0249	0.6793	0.0313	0.0144	0.0029	0.0017	0.0030
	média($\hat{d}$)	0.0902	—	—	0.1618	—	—	0.1007	0.0982	0.1004
	viés($\hat{d}$)	-0.0098	—	—	0.0618	—	—	0.0007	-0.0017	0.0004
	EQM($\hat{d}$)	0.3854	—	—	0.2395	—	—	0.0010	0.0006	0.0005
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9955	-0.8829	0.7088	-0.9952	-0.8665	0.7029	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.1131	0.0999	0.1008	0.0252	0.1048	0.1016	0.1008	0.0997	0.0843
	viés($\hat{D}$)	0.0131	-0.0001	0.0008	-0.0748	0.0048	0.0016	0.0008	-0.0002	-0.0156
	EQM($\hat{D}$)	0.4777	0.0210	0.0089	0.2957	0.0108	0.0051	0.0012	0.0007	0.0010

Quadro B2a. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.3$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
120	média($\hat{d}$)	0.0284	—	—	0.5040	—	—	0.1058	0.0717	0.0942
	viés($\hat{d}$)	-0.0716	—	—	0.4040	—	—	0.0058	-0.0282	-0.0057
	EQM($\hat{d}$)	5.3462	—	—	2.4245	—	—	0.0109	0.0083	0.0078
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9952	-0.9423	0.7596	-0.9927	-0.9338	0.7262	—	—	—
240	média($\hat{D}$)	0.3884	0.3241	0.3240	-0.2348	0.3989	0.3537	0.3016	0.3234	0.1602
	viés($\hat{D}$)	0.0884	0.0241	0.0240	-0.5348	0.0989	0.0537	0.0015	0.0234	-0.1397
	EQM($\hat{D}$)	7.0445	0.6096	0.1765	3.2918	0.2262	0.0889	0.0170	0.0106	0.0309
	média($\hat{d}$)	0.0833	—	—	0.3471	—	—	0.1043	0.0853	0.1000
360	viés($\hat{d}$)	-0.0167	—	—	0.2471	—	—	0.0043	-0.0146	0.0000
	EQM($\hat{d}$)	2.0787	—	—	1.2455	—	—	0.0053	0.0039	0.0035
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9952	-0.9219	0.7339	-0.9943	-0.9095	0.7093	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3315	0.3082	0.3078	-0.0088	0.3700	0.3319	0.3057	0.3197	0.2388
360	viés($\hat{D}$)	0.0315	0.0082	0.0078	-0.3088	0.0700	0.0319	0.0057	0.0197	-0.0611
	EQM($\hat{D}$)	2.6323	0.1790	0.0585	1.6192	0.0772	0.0342	0.0070	0.0046	0.0081
	média($\hat{d}$)	0.0695	—	—	0.2351	—	—	0.1013	0.0890	0.0995
	viés($\hat{d}$)	-0.0305	—	—	0.1351	—	—	0.0013	-0.0109	-0.0004
360	EQM($\hat{d}$)	1.2675	—	—	0.7516	—	—	0.0034	0.0025	0.0022
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	-0.9947	-0.9154	0.7352	-0.9937	-0.9092	0.7148	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3464	0.3105	0.2966	0.1310	0.3545	0.3196	0.3048	0.3149	0.2589
	viés($\hat{D}$)	0.0464	0.0105	-0.0034	-0.1690	0.0545	0.0196	0.0048	0.0149	-0.0410
360	EQM($\hat{D}$)	1.5939	0.0934	0.0371	0.9620	0.0487	0.0214	0.0041	0.0029	0.0043

Quadro B2b. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.3$ com $s = 4$.

Quadro D20b: Resultados para $\alpha = 0.1$ e $D = 0.3$ com $g = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
480	média($\hat{d}$)	0.0549	—	—	0.2260	—	—	0.1010	0.0924	0.1010
	viés($\hat{d}$)	−0.0451	—	—	0.1260	—	—	0.0010	−0.0075	0.0010
	EQM($\hat{d}$)	0.8788	—	—	0.5556	—	—	0.0024	0.0016	0.0015
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9945	−0.9000	0.7111	−0.9940	−0.8861	0.7017	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3572	0.2979	0.2922	0.1455	0.3362	0.3146	0.3010	0.3105	0.2669
	viés($\hat{D}$)	0.0572	−0.0021	−0.0078	−0.1545	0.0362	0.0146	0.0010	0.0105	−0.0330
	EQM($\hat{D}$)	1.0889	0.0610	0.0230	0.6987	0.0307	0.0150	0.0031	0.0021	0.0030
	média($\hat{d}$)	0.0527	—	—	0.1347	—	—	0.1005	0.0958	0.1000
1080	viés($\hat{d}$)	−0.0473	—	—	0.0347	—	—	0.0005	−0.0041	0.0000
	EQM($\hat{d}$)	0.4019	—	—	0.2623	—	—	0.0010	0.0007	0.0006
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9955	−0.8864	0.6699	−0.9955	−0.8771	0.6749	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.3562	0.3036	0.3005	0.2564	0.3285	0.3097	0.3021	0.3074	0.2859
	viés($\hat{D}$)	0.0562	0.0036	0.0005	−0.0436	0.0285	0.0097	0.0021	0.0074	−0.0140
	EQM($\hat{D}$)	0.4957	0.0203	0.0080	0.3251	0.0122	0.0058	0.0011	0.0008	0.0009

Quadro B3a. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.7$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sPT	FT
120	média($\hat{d}$)	0.1304	—	—	0.7603	—	—	0.1258	0.0412	0.1122
	viés($\hat{d}$)	0.0304	—	—	0.6603	—	—	0.0258	−0.0587	0.0122
	EQM($\hat{d}$)	4.8016	—	—	2.4345	—	—	0.0170	0.0150	0.0114
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9943	−0.9331	0.7709	−0.9910	−0.8930	0.6829	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7187	0.7304	0.7138	−0.0865	0.9534	0.8724	0.7240	0.8340	0.5793
240	viés($\hat{D}$)	0.0187	0.0304	0.0138	−0.7865	0.2534	0.1724	0.0240	0.1340	−0.1206
	EQM($\hat{D}$)	6.1957	0.5138	0.1704	3.2584	0.2527	0.1267	0.0179	0.0309	0.0263
	média($\hat{d}$)	0.1876	—	—	0.4310	—	—	0.1146	0.0678	0.1076
	viés($\hat{d}$)	0.0876	—	—	0.3310	—	—	0.0146	−0.0321	0.0076
	EQM($\hat{d}$)	2.1011	—	—	1.0701	—	—	0.0078	0.0065	0.0058
360	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9948	−0.9195	0.7161	−0.9919	−0.8884	0.7015	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.6390	0.7027	0.7090	0.3283	0.8813	0.8184	0.7209	0.7947	0.6530
	viés($\hat{D}$)	−0.0610	0.0027	0.0090	−0.3717	0.1813	0.1184	0.0209	0.0947	−0.0469
	EQM($\hat{D}$)	2.6379	0.1685	0.0613	1.3913	0.1117	0.0596	0.0078	0.0146	0.0068
	média($\hat{d}$)	0.1265	—	—	0.2992	—	—	0.1161	0.0800	0.1109
360	viés($\hat{d}$)	0.0265	—	—	0.1992	—	—	0.0161	−0.0199	0.0109
	EQM($\hat{d}$)	1.3293	—	—	0.7686	—	—	0.0066	0.0045	0.0045
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9947	−0.8997	0.7061	−0.9929	−0.8807	0.6805	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7020	0.7299	0.7262	0.4874	0.8667	0.8116	0.7193	0.7769	0.6744
	viés($\hat{D}$)	0.0020	0.0299	0.0262	−0.2126	0.1667	0.1116	0.0193	0.0769	−0.0255
EQM($\hat{D}$)	1.6512	0.0937	0.0356	0.9844	0.0768	0.0379	0.0047	0.0095	0.0035	

Quadro B3b. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.7$ com $s = 4$.

Quadro 8.10b: Resultados para $\alpha = 0.1$ e $D = 0.1$ com $\delta = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	spt	FT
480	média($\hat{d}$)	0.1505	—	—	0.2294	—	—	0.1148	0.0856	0.1090
	viés($\hat{d}$)	0.0505	—	—	0.1294	—	—	0.0148	−0.0143	0.0090
	EQM($\hat{d}$)	0.9127	—	—	0.5447	—	—	0.0051	0.0033	0.0035
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9942	−0.8859	0.6856	−0.9927	−0.8829	0.6654	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.6776	0.7292	0.7216	0.5706	0.8561	0.7932	0.7207	0.7679	0.6855
1080	viés($\hat{D}$)	−0.0224	0.0292	0.0216	−0.1294	0.1561	0.0932	0.0207	0.0679	−0.0144
	EQM($\hat{D}$)	1.1101	0.0565	0.0247	0.6793	0.0576	0.0269	0.0036	0.0071	0.0024
	média($\hat{d}$)	0.0903	—	—	0.1376	—	—	0.1107	0.0964	0.1089
	viés($\hat{d}$)	−0.0097	—	—	0.0376	—	—	0.0107	−0.0035	0.0089
	EQM($\hat{d}$)	0.4099	—	—	0.2375	—	—	0.0025	0.0015	0.0019
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9941	−0.8831	0.6769	−0.9931	−0.8729	0.6851	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7415	0.7328	0.7222	0.6812	0.8089	0.7643	0.7182	0.7458	0.7015
	viés($\hat{D}$)	0.0415	0.0328	0.0222	−0.0188	0.1089	0.0643	0.0182	0.0458	0.0015
	EQM($\hat{D}$)	0.4982	0.0219	0.0103	0.2953	0.0255	0.0120	0.0018	0.0032	0.0009

Quadro B4a. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.9$ com $s = 4$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
120	média($\hat{d}$)	0.2094	—	—	0.7265	—	—	0.1387	0.0125	0.1199
	viés($\hat{d}$)	0.1094	—	—	0.6265	—	—	0.0387	−0.0874	0.0199
	EQM($\hat{d}$)	4.9145	—	—	1.9360	—	—	0.0352	0.0297	0.0231
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9946	−0.9339	0.7472	−0.9882	−0.8707	0.6116	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7803	0.9033	0.8980	0.1244	1.1397	1.0837	0.8970	1.0523	0.7597
240	viés($\hat{D}$)	−0.1197	0.0033	−0.0020	−0.7756	0.2397	0.1837	−0.0029	0.1523	−0.1402
	EQM($\hat{D}$)	6.3329	0.5626	0.1659	2.6663	0.2063	0.1180	0.0193	0.0358	0.0323
	média($\hat{d}$)	0.2172	—	—	0.3961	—	—	0.1376	0.0599	0.1227
	viés($\hat{d}$)	0.1172	—	—	0.2961	—	—	0.0376	−0.0400	0.0226
	EQM($\hat{d}$)	2.2138	—	—	1.0014	—	—	0.0273	0.0165	0.0179
360	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9952	−0.8996	0.6822	−0.9908	−0.8462	0.5602	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7786	0.9347	0.9147	0.5555	1.1397	1.0394	0.8989	1.0055	0.8368
	viés($\hat{D}$)	−0.1214	0.0347	0.0147	−0.3445	0.2397	0.1394	−0.0010	0.1054	−0.0631
	EQM($\hat{D}$)	2.7160	0.1485	0.0537	1.2851	0.1181	0.0557	0.0095	0.0173	0.0102
	média($\hat{d}$)	0.2561	—	—	0.2930	—	—	0.1450	0.0772	0.1305
360	viés($\hat{d}$)	0.1561	—	—	0.1930	—	—	0.0450	−0.0227	0.0305
	EQM($\hat{d}$)	1.2881	—	—	0.6394	—	—	0.0240	0.0123	0.0157
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9950	−0.8767	0.6281	−0.9916	−0.8172	0.5707	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7463	0.9350	0.9234	0.6881	1.1110	1.0270	0.9029	0.9894	0.8614
	viés($\hat{D}$)	−0.1537	0.0350	0.0234	−0.2119	0.2110	0.1270	0.0029	0.0894	−0.0385
EQM($\hat{D}$)	1.5548	0.0806	0.0313	0.8005	0.0778	0.0409	0.0061	0.0119	0.0053	

Quadro B4b. Resultados para $d = 0.1$ e $D = 0.9$ com $s = 4$.

Quadro D-40: Resultados para $\alpha = 0.1$ e $D = 0.3$ com $g = 4$.										
n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	sp ₀	sp ₁	sp ₂	GPH _T	sp _T	FT
480	média($\hat{d}$)	0.2258	—	—	0.2388	—	—	0.1487	0.0926	0.1351
	viés($\hat{d}$)	0.1258	—	—	0.1388	—	—	0.0487	−0.0073	0.0351
	EQM($\hat{d}$)	1.0031	—	—	0.4789	—	—	0.0231	0.0102	0.0156
	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9952	−0.8662	0.5687	−0.9919	−0.8197	0.5313	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7762	0.9362	0.9237	0.7547	1.0912	1.0185	0.8995	0.9750	0.8707
1080	viés($\hat{D}$)	−0.1238	0.0362	0.0237	−0.1453	0.1912	0.1185	−0.0004	0.0750	−0.0292
	EQM($\hat{D}$)	1.1920	0.0573	0.0224	0.5869	0.0660	0.0311	0.0054	0.0087	0.0044
	média($\hat{d}$)	0.2896	—	—	0.2044	—	—	0.1610	0.1171	0.1477
	viés($\hat{d}$)	0.1896	—	—	0.1044	—	—	0.0610	0.0171	0.0477
	EQM($\hat{d}$)	0.4982	—	—	0.2344	—	—	0.0214	0.0085	0.0149
1080	$\hat{\rho}_{\hat{D}\hat{d}}$	−0.9955	−0.7981	0.4439	−0.9930	−0.7722	0.4315	—	—	—
	média($\hat{D}$)	0.7083	0.9389	0.9181	0.8048	1.0331	0.9745	0.8961	0.9447	0.8854
	viés($\hat{D}$)	−0.1917	0.0389	0.0181	−0.0952	0.1331	0.0745	−0.0038	0.0447	−0.0145
	EQM($\hat{D}$)	0.5702	0.0208	0.0090	0.2724	0.0285	0.0127	0.0036	0.0038	0.0025

ANEXO C – Quadros de resultados numéricos para modelo rígido com $s = 12$

Quadro C1a. Resultados para $D = 0.1$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.1039	0.1122	0.0928	0.0611	0.1277	0.0866	0.0842	-0.0911	0.1188
	viés($\hat{D}$)	0.0039	0.0122	-0.0072	-0.0389	0.0277	-0.0134	-0.0158	-0.1911	0.0188
	EQM($\hat{D}$)	0.5339	0.5628	0.5657	0.5363	0.5657	0.5483	0.5582	0.1677	0.1140
240	média($\hat{D}$)	0.1212	0.1023	0.0770	0.0934	0.1033	0.1141	0.0838	0.0228	0.1112
	viés($\hat{D}$)	0.0212	0.0023	-0.0230	-0.0066	0.0033	0.0141	-0.0162	-0.0772	0.0112
	EQM($\hat{D}$)	0.1379	0.1365	0.1413	0.1336	0.1367	0.1284	0.1335	0.0711	0.0492
360	média($\hat{D}$)	0.0960	0.1026	0.0949	0.1030	0.0986	0.0911	0.1139	0.0322	0.1169
	viés($\hat{D}$)	-0.0040	0.0026	-0.0051	0.0030	-0.0014	-0.0089	0.0139	-0.0678	0.0169
	EQM($\hat{D}$)	0.0667	0.0725	0.0682	0.0709	0.0653	0.0708	0.0673	0.0423	0.0314
480	média($\hat{D}$)	0.1012	0.0936	0.1066	0.1210	0.0986	0.0920	0.0902	0.0530	0.1066
	viés($\hat{D}$)	0.0012	-0.0064	0.0066	0.0210	-0.0014	-0.0080	-0.0098	-0.0470	0.0066
	EQM($\hat{D}$)	0.0455	0.0506	0.0479	0.0433	0.0480	0.0460	0.0498	0.0295	0.0222
1080	média($\hat{D}$)	0.0942	0.1078	0.1051	0.0957	0.0987	0.1010	0.0782	0.0330	0.1112
	viés($\hat{D}$)	-0.0058	0.0078	0.0051	-0.0043	-0.0013	0.0010	-0.0218	-0.0670	0.0112
	EQM($\hat{D}$)	0.0679	0.0623	0.0786	0.0693	0.0728	0.0645	0.0673	0.0419	0.0271

Quadro C1b. Resultados para $D = 0.1$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPH _T	sPT	FT
120	média($\hat{D}$)	0.1123	0.1013	0.1139	0.0934	0.0970	0.0925	0.0906	-0.5122
	viés($\hat{D}$)	0.0123	0.0013	0.0139	-0.0066	-0.0030	-0.0074	-0.0093	-0.6122
	EQM($\hat{D}$)	0.1092	0.1050	0.1136	0.1113	0.1380	0.0401	0.0133	0.4029
240	média($\hat{D}$)	0.0985	0.0999	0.1083	0.1184	0.0965	0.0997	0.1004	-0.1122
	viés($\hat{D}$)	-0.0015	-0.0001	0.0083	0.0184	-0.0035	-0.0002	0.0004	-0.2122
	EQM($\hat{D}$)	0.0499	0.0495	0.0511	0.0471	0.0580	0.0119	0.0054	0.0526
360	média($\hat{D}$)	0.1035	0.1070	0.1084	0.1055	0.1034	0.0996	0.1021	-0.0293
	viés($\hat{D}$)	0.0035	0.0070	0.0084	0.0055	0.0034	-0.0003	0.0021	-0.1293
	EQM($\hat{D}$)	0.0310	0.0287	0.0277	0.0313	0.0344	0.0052	0.0028	0.0200
480	média($\hat{D}$)	0.1125	0.1158	0.1109	0.0987	0.0995	0.0994	0.1029	0.0070
	viés($\hat{D}$)	0.0125	0.0158	0.0109	-0.0013	-0.0005	-0.0005	0.0029	-0.0929
	EQM($\hat{D}$)	0.0203	0.0204	0.0216	0.0200	0.0237	0.0037	0.0020	0.0111
1080	média($\hat{D}$)	0.1023	0.1082	0.1110	0.1101	0.0852	0.1003	0.1011	-0.0318
	viés($\hat{D}$)	0.0023	0.0082	0.0110	0.0101	-0.0148	0.0003	0.0011	-0.1318
	EQM($\hat{D}$)	0.0319	0.0294	0.0306	0.0278	0.0342	0.0054	0.0029	0.0210

Quadro C2a. Resultados para $D = 0.5$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.5054	0.5493	0.5441	0.4986	0.5401	0.5056	0.4550	0.2115	0.6752
	viés($\hat{D}$)	0.0054	0.0493	0.0441	-0.0014	0.0401	0.0056	-0.0450	-0.2885	0.1752
	EQM($\hat{D}$)	0.5327	0.5607	0.5543	0.5408	0.5150	0.5615	0.6519	0.2394	0.1672
240	média($\hat{D}$)	0.5321	0.5077	0.5336	0.5136	0.5049	0.5150	0.5249	0.3810	0.6373
	viés($\hat{D}$)	0.0321	0.0077	0.0336	0.0136	0.0049	0.0150	0.0249	-0.1190	0.1373
	EQM($\hat{D}$)	0.1372	0.1380	0.1451	0.1217	0.1404	0.1472	0.1421	0.0911	0.0747
360	média($\hat{D}$)	0.5068	0.5224	0.5209	0.5112	0.5303	0.5269	0.5152	0.4181	0.6167
	viés($\hat{D}$)	0.0068	0.0224	0.0209	0.0112	0.0303	0.0269	0.0152	-0.0819	0.1167
	EQM($\hat{D}$)	0.0676	0.0619	0.0693	0.0720	0.0720	0.0666	0.0756	0.0501	0.0470
480	média($\hat{D}$)	0.5159	0.5015	0.5212	0.5219	0.5104	0.5167	0.5159	0.4461	0.5824
	viés($\hat{D}$)	0.0159	0.0015	0.0212	0.0219	0.0104	0.0167	0.0159	-0.0539	0.0824
	EQM($\hat{D}$)	0.0485	0.0489	0.0448	0.0420	0.0462	0.0451	0.0480	0.0350	0.0318
1080	média($\hat{D}$)	0.5279	0.5060	0.5321	0.5117	0.5122	0.5201	0.5158	0.4387	0.6077
	viés($\hat{D}$)	0.0279	0.0060	0.0321	0.0117	0.0122	0.0201	0.0158	-0.0613	0.1077
	EQM($\hat{D}$)	0.0760	0.0718	0.0697	0.0731	0.0685	0.0676	0.0696	0.0495	0.0435

Quadro C2b. Resultados para $D = 0.5$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPHr	spr	FT
120	média($\hat{D}$)	0.6827	0.6661	0.6581	0.6562	0.5920	0.5108	0.6252	-0.0893
	viés($\hat{D}$)	0.1827	0.1661	0.1581	0.1562	0.0920	0.0108	0.1252	-0.5893
	EQM($\hat{D}$)	0.1624	0.1598	0.1637	0.1561	0.2063	0.0415	0.0342	0.3761
240	média($\hat{D}$)	0.6401	0.6382	0.6185	0.6384	0.5917	0.5234	0.6109	0.3075
	viés($\hat{D}$)	0.1401	0.1382	0.1185	0.1384	0.0917	0.0234	0.1109	-0.1924
	EQM($\hat{D}$)	0.0751	0.0732	0.0728	0.0752	0.0896	0.0115	0.0191	0.0441
360	média($\hat{D}$)	0.6079	0.6097	0.6077	0.6129	0.5922	0.5155	0.5904	0.3873
	viés($\hat{D}$)	0.1079	0.1097	0.1077	0.1129	0.0922	0.0155	0.0904	-0.1127
	EQM($\hat{D}$)	0.0476	0.0478	0.0439	0.0464	0.0562	0.0057	0.0121	0.0162
480	média($\hat{D}$)	0.5902	0.5966	0.5875	0.5960	0.5677	0.5151	0.5776	0.4204
	viés($\hat{D}$)	0.0902	0.0966	0.0875	0.0960	0.0677	0.0151	0.0776	-0.0795
	EQM($\hat{D}$)	0.0301	0.0297	0.0310	0.0332	0.0374	0.0041	0.0087	0.0088
1080	média($\hat{D}$)	0.6171	0.6114	0.6069	0.6070	0.5814	0.5168	0.5933	0.3869
	viés($\hat{D}$)	0.1171	0.1114	0.1069	0.1070	0.0814	0.0168	0.0933	-0.1130
	EQM($\hat{D}$)	0.0461	0.0459	0.0463	0.0458	0.0503	0.0061	0.0126	0.0164

Quadro C3a. Resultados para $D = 0.9$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores								
		GPH ₀	GPH ₁	GPH ₂	GPH ₃	GPH ₄	GPH ₅	GPH ₆	sp ₀	sp ₁
120	média($\hat{D}$)	0.9742	0.9252	0.9062	0.8891	0.9383	0.9394	0.9428	0.5361	1.1941
	viés($\hat{D}$)	0.0742	0.0252	0.0062	−0.0109	0.0383	0.0394	0.0428	−0.3639	0.2941
	EQM($\hat{D}$)	0.4930	0.5361	0.5403	0.4850	0.5334	0.5118	0.5321	0.2919	0.2177
240	média($\hat{D}$)	0.9183	0.9153	0.9175	0.9103	0.9181	0.9333	0.9162	0.7557	1.1419
	viés($\hat{D}$)	0.0183	0.0153	0.0175	0.0103	0.0181	0.0333	0.0162	−0.1443	0.2419
	EQM($\hat{D}$)	0.1266	0.1395	0.1275	0.1200	0.1338	0.1410	0.1337	0.1063	0.1192
360	média($\hat{D}$)	0.9229	0.9299	0.9245	0.9260	0.9293	0.9413	0.9109	0.8308	1.1053
	viés($\hat{D}$)	0.0229	0.0299	0.0245	0.0260	0.0293	0.0413	0.0109	−0.0692	0.2053
	EQM($\hat{D}$)	0.0695	0.0703	0.0734	0.0685	0.0680	0.0703	0.0749	0.0569	0.0822
480	média($\hat{D}$)	0.9266	0.9271	0.9320	0.9225	0.9309	0.9244	0.9263	0.8676	1.0780
	viés($\hat{D}$)	0.0266	0.0271	0.0320	0.0225	0.0309	0.0244	0.0263	−0.0324	0.1780
	EQM($\hat{D}$)	0.0481	0.0514	0.0461	0.0508	0.0475	0.0464	0.0489	0.0358	0.0591
1080	média($\hat{D}$)	0.9082	0.9369	0.9291	0.9344	0.9275	0.9335	0.8983	0.8151	1.1159
	viés($\hat{D}$)	0.0082	0.0369	0.0291	0.0344	0.0275	0.0335	−0.0017	−0.0849	0.2159
	EQM($\hat{D}$)	0.0697	0.0718	0.0708	0.0684	0.0686	0.0694	0.0761	0.0589	0.0845

Quadro C3b. Resultados para $D = 0.9$ com $s = 12$.

n	Estatísticas	Estimadores							
		sp2	sp3	sp4	sp5	sp6	GPHr	spr	FT
120	média($\hat{D}$)	1.1900	1.1978	1.2082	1.1929	1.1096	0.9245	1.1406	0.3188
	viés($\hat{D}$)	0.2900	0.2978	0.3082	0.2929	0.2096	0.0245	0.2406	-0.5811
	EQM($\hat{D}$)	0.2242	0.2314	0.2312	0.2309	0.2541	0.0383	0.0722	0.3617
240	média($\hat{D}$)	1.1351	1.1289	1.1418	1.1503	1.0894	0.9224	1.1061	0.7142
	viés($\hat{D}$)	0.2351	0.2289	0.2418	0.2503	0.1894	0.0224	0.2061	-0.1858
	EQM($\hat{D}$)	0.1160	0.1193	0.1232	0.1301	0.1230	0.0105	0.0490	0.0408
360	média($\hat{D}$)	1.1108	1.1084	1.1044	1.1070	1.0660	0.9288	1.0816	0.7986
	viés($\hat{D}$)	0.2108	0.2084	0.2044	0.2070	0.1660	0.0288	0.1816	-0.1013
	EQM($\hat{D}$)	0.0854	0.0778	0.0778	0.0840	0.0807	0.0062	0.0370	0.0133
480	média($\hat{D}$)	1.0881	1.0842	1.0897	1.0865	1.0499	0.9267	1.0644	0.8332
	viés($\hat{D}$)	0.1881	0.1842	0.1897	0.1865	0.1499	0.0267	0.1643	-0.0667
	EQM($\hat{D}$)	0.0661	0.0629	0.0638	0.0647	0.0603	0.0041	0.0297	0.0065
1080	média($\hat{D}$)	1.1047	1.1118	1.0970	1.1177	1.0525	0.9275	1.0800	0.7961
	viés($\hat{D}$)	0.2047	0.2118	0.1970	0.2177	0.1525	0.0274	0.1799	-0.1038
	EQM($\hat{D}$)	0.0832	0.0844	0.0785	0.0879	0.0815	0.0059	0.0362	0.0139