



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## TESE DE DOUTORADO

### CONFIGURAÇÃO DE VÓRTICES E EFEITOS DE INTERFACE EM SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS

por

**José José Barba Ortega**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

#### **Banca Examinadora:**

Prof. José Albino Oliveira de Aguiar (Orientador-UFPE)  
Prof. Clécio Clemente de Souza e Silva (Co-orientador - DF - UFPE)  
Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral (Co-orientador - DF-UFPE)  
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (DF - UFPE)  
Prof. Sérgio Galvão Coutinho (DF - UFPE)  
Prof. Edson Sardella (DF – UNESP)  
Prof. José Soares de Andrade Júnior (DF – UFC)

Recife - PE, Brasil  
Julho – 2007

Barba Ortega, José José

Configuração de vórtices e efeitos de interface em supercondutores mesoscópicos. / José José Barba Ortega. - Recife : O autor, 2007.

x, 129 folhas : il., fig., tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Depto. de Física, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Supercondutividade. 2. Ginzburg-Landau. 3. Parâmetro de De Gennes . 4. Variáveis de ligação. I. Título.

537.623

CDD (22.ed.)

FQ2007-0014



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física - CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+55 81) 3446-8449/3446-8450 - Fax (+55 81) 3271-6209  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

---

José José Barba Ortega

### CONFIGURAÇÃO DE VÓRTICES E EFEITOS DE INTERFACE EM SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Albino Oliveira de Aguiar (Presidente e Orientador), Clécio Clemente de Souza e Silva (Co-orientador), Sérgio Galvão Coutinho, Ernesto Carneiro Pessoa Raposo e o Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral (Co-orientador), todos da Universidade Federal de Pernambuco, professores Edson Sardella, do Departamento de Física da Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho e José Soares de Andrade Júnior, do Departamento de Física, da Universidade Federal do Ceará, consideram o candidato:

Aprovado com Distinção      ( ) Aprovado      ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos trinta e um dias do mês de julho de 2007.

  
Prof. José Albino Oliveira de Aguiar  
Presidente e Orientador

  
Prof. Clécio Clemente de Souza e Silva  
Co-orientador

  
Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral  
Co-orientador

  
Prof. Sérgio Galvão Coutinho

  
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

  
Prof. Edson Sardella

  
Prof. José Soares de Andrade Júnior

*a meus país e a meu amor.*

# Agradecimentos

Agradeço especialmente a meu orientador, José Albino, pela sua confiança e amizade.

A Clécio Clemente pela sua orientação e conselhos, a Leonardo Ribeiro, pela sua contribuição no desenvolvimento desse trabalho. Sem vocês esta tese não poderia ter sido feita. Muito obrigado mesmo.

A Gizely, pela sua companhia e correções do portunhol. A Ana Maria, por seu carinho de mãe, pivot de meus primeiros dias no DF.

Aos preconceituosos de sempre: Herling, Ricardo, O Anderson, Eduardo (Mineiro), Miguel Angel - el taticas, Ailton, Ferraz, Gersinho, a Clessio Leão por seus comentários de paz. e a todos aqueles que de uma forma ou de outra fizeram minha vida um pouco mais tranqüila em cada momento.

Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro.

## Resumo

Nesta tese estudamos teoricamente as configurações de vórtices em algumas nanoestruturas supercondutoras, como quadrados mesoscópicos com dois defeitos assimétricos ou com um defeito preenchido com material metálico, anéis mesoscópicos e filmes finos submersos em diferentes tipos de materiais (metais, outros supercondutores, isolantes) ou com uma alta densidade de defeitos em sua interface. O estudo foi realizado mediante resolução numérica das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) para os sistemas citados utilizando-se o método de campos de calibre com variáveis de ligação. Encontramos as configurações de vórtices para estas geometrias e calculamos as curvas de magnetização em função do campo magnético aplicado. Constatamos que as configurações de vórtices, os campos críticos e a própria maneira como os vórtices adentram o supercondutor, dependem fortemente do arranjo dos centros de aprisionamento e da geometria do sistema. No estudo de filmes finos com interfaces diversas, observamos que, devido ao contato com o material, existe um aumento ou uma supressão (dependendo do tipo de interface) da supercondutividade nas bordas da amostra, como revelam os resultados das curvas de magnetização, densidade de elétrons supercondutores e número de vórtices em função do campo magnético e do comprimento de extração de De Gennes  $b$ . Para determinados valores de  $b$  o sistema tem uma resposta paramagnética na curva de magnetização, relacionada à captura do fluxo magnético devido às fronteiras da amostra.

**Palavras Chaves:** Ginzburg-Landau, Supercondutividade, Parâmetro de De Gennes, Variáveis de Ligação.

## Abstract

In this thesis, we study theoretically the vortex configuration in some nanostructures, like a squared sample with two asymmetrical pinning center, or with one metallic pinning center, a mesoscopic ring, and, a film in contact with different types of materials (metals, superconductors, insulators) or having a high density of defects at the interface. We solved the time dependent Ginzburg-Landau equations (TDGL), using the field gauge method. We found the vortex array for these geometries and calculate the magnetization curves as a function of the external magnetic field. In such systems, the vortex configurations, as well as the critical fields, depend strongly of the pinning arrangement, geometry and upon the material in which the superconductor is submerged. In this way, we studied the effect of the presence of these materials in contact with the superconductor and on its thermodynamic properties. In some cases, we observed that, depending on the material interface, exist an enhancement or depression of the surface superconductivity of the sample. The magnetization curves, superconducting electrons density and vortices number as a function of the magnetic field and the de Gennes extrapolation length  $b$ , are also studied. Our results shown that, for some values of  $b$ , the system has a paramagnetic response in the magnetization curves, related to the flux capture due to the sample boundary.

**Keywords:** Ginzburg-Landau, Superconductivity, de Gennes Parameter, Link Variable.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Estado da arte . . . . .	3
1.2	Objetivos e organização da tese . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Introdução à supercondutividade</b>	<b>9</b>
2.1	Algo de história . . . . .	9
2.2	Termodinâmica do estado supercondutor . . . . .	12
2.3	Descrição do gap de energia . . . . .	14
2.4	Teorias fenomenológicas . . . . .	16
2.4.1	Teoria de London . . . . .	16
2.4.2	Teoria de Ginzburg-Landau . . . . .	18
2.4.3	Condições de contorno . . . . .	21
2.4.4	Comprimentos característicos . . . . .	23
2.4.5	Equação de Ginzburg-Landau linearizada (Campos $H_{c2}$ e $H_{c3}$ )	27
2.4.6	Equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo . . . . .	30
2.4.7	Validade da teoria de Ginzburg-Landau . . . . .	32
2.5	Supercondutores do tipo I e tipo II . . . . .	33
2.6	Estado de vórtices . . . . .	36

---

2.6.1	Quantização do fluxo magnético . . . . .	37
2.6.2	Rede de vórtices de Abrikosov e estrutura do vórtice . . . . .	38
2.6.3	Energia de um vórtice . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Método numérico</b>	<b>44</b>
3.1	Método $\psi U$ . . . . .	45
3.1.1	Método $\psi U$ para as equações TDGL . . . . .	48
3.1.2	Método $\psi U$ para as condições de contorno . . . . .	51
3.1.3	Expressões para a magnetização e a integral do fluxóide . . . . .	54
3.1.4	Especificação dos processadores . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Estado de vórtices em amostras supercondutoras</b>	<b>56</b>
4.1	Breve introdução . . . . .	57
4.2	Barreira superficial em amostras macroscópicas . . . . .	57
4.3	Formalismo teórico . . . . .	58
4.4	Configuração de vórtices em supercondutores quadrados . . . . .	59
4.5	Configuração de Vórtices em um Filme Supercondutor . . . . .	66
4.6	Resumo . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Configurações de vórtices em amostras quadradas multiplamente conexas</b>	<b>73</b>
5.1	Breve introdução . . . . .	74
5.2	Formalismo teórico . . . . .	74
5.3	Configuração de vórtices para uma amostra com dois defeitos . . . . .	75
5.4	Configuração de vórtices para uma amostra com uma inclusão metálica	81
5.5	Configuração de vórtices em um anel quadrado . . . . .	88
5.6	Resumo . . . . .	94

<b>6 O Papel das Condições de Contorno de De Gennes nas Propriedades de um Filme Supercondutor</b>	<b>96</b>
6.1 Breve introdução . . . . .	97
6.2 Formalismo teórico . . . . .	98
6.3 Estado supercondutor de um filme mesoscópico . . . . .	99
6.4 Resumo . . . . .	107
<b>7 Conclusões</b>	<b>109</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>113</b>

# Lista de Figuras

1.1	Vórtices Celestiais de Descartes, Principia Philosophia em 1644. . . .	4
2.1	Efeito Meissner em uma esfera supercondutora em um campo magnético constante. Para a esfera esquerda $T > T_c$ e o material comporta-se como um condutor normal. Para a esfera direita $T < T_c$ a esfera torna-se supercondutora. . . . .	10
2.2	Resistividade $\rho$ e calor específico $C_v$ em função da temperatura . . . .	14
2.3	Representação da interação elétron - elétron via fônon (referencial do centro de massa do par de elétrons. Em (a) o elétron $k$ emite um fônon de vetor de onda $-q$ , depois o fônon é absorvido pelo segundo elétron. Em (b) o segundo elétron, de estado $-k$ emite um fônon $q$ , que é depois absorvido pelo primeiro elétron. . . . .	15
2.4	Representação esquemática da dependência espacial do parâmetro de ordem com o comprimento de extrapolação de De Gennes $b$ na interface entre (a) um supercondutor e um metal normal e (b) um supercondutor de $T_c = T_1$ , e um supercondutor a $T_c = T_2$ , com $T_1 < T_2$ .	22
2.5	Dependência radial do parâmetro de ordem $\psi$ e o campo magnético $H$ na interface supercondutor/metal normal. . . . .	23

2.6	Dependências das características de um supercondutor semi-infinito em função do parâmetro GL . . . . .	34
2.7	Diagrama de fase $H-T$ para supercondutores volumétricos dos Tipos I e II . . . . .	35
2.8	Magnetização em função do campo magnético aplicado para supercondutores volumétricos dos tipos I e II . . . . .	36
2.9	(a) Estrutura de um vórtice isolado mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem, (b) as correntes supercondutoras. . . . .	38
3.1	Esquema da malha definindo as variáveis discretas. . . . .	46
4.1	(a) Prisma e (b) filme fino supercondutor. . . . .	60
4.2	(a) Curva de magnetização em função de $H_e$ . Número de vórtices em função do campo magnético aplicado para (b) $H_e$ aumentado desde 0 até 1 e (c) $H_e$ diminuído desde 1 até 0, para uma amostra de $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ para $T = 0.5$ . . . . .	61
4.3	Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ , $T = 0.5$ , para diferentes campos magnéticos aplicados: (a) $H_e = 0.20$ , (b) $H_e = 0.205$ , (c) $H_e = 0.215$ , (d) $H_e = 0.252$ , (e) $H_e = 0.336$ , (f) $H_e = 0.40$ , (g) $H_e = 0.50$ , (h) $H_e = 0.60$ . A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores. . . . .	63
4.4	Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ , $T = 0.5$ , para diferentes campos magnéticos aplicados em um processo de histerese: (g) $H_e = 0.50$ , (f) $H_e = 0.40$ , (e) $H_e = 0.336$ , (d) $H_e = 0.252$ , (c) $H_e = 0.215$ , (b) $H_e = 0.205$ , (a) $H_e = 0.20$ , (o) $H_e = 0.0$ . A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores. . . . .	64

- 4.5 Curvas de magnetização e número de vórtices (inserção) em função do campo magnético para uma amostra de lados  $8\xi(0) \times 8\xi(0)$ , para (a)  $T = 0.5$  e (b)  $T = 0.25$ . . . . . 65
- 4.6 Curva de magnetização e número de vórtices em função do campo magnético aplicado para um filme fino a  $T = 0.5$ . As linhas na curva de magnetização são só guias para uma melhor identificação das fases estruturais. O número entre estas linhas indicam o número de cadeias de vórtices da respectiva fase. . . . . 67
- 4.7 Módulo do parâmetro de ordem indicando a vorticidade  $L$  para o filme fino em (a)  $H_e = 0.2$ , (b) 0.23, (c) 0.30, (d) 0.31, (e) 0.35, (f) 0.37, (g) 0.38, (h) 0.41, (i) 0.42, (j) 0.47, (k) 0.50 e (l) 0.52. A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores. . . . . 68
- 5.1 Magnitude do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para um quadrado mesoscópico com dois buracos com (a)  $L = 0$ , (b)  $L = 4$ , (c)  $L = 7$ , (d)  $L = 9$ , (e)  $L = 13$ , (f)  $L = 15$  respectivamente para  $H_e = 0.150, 0.200, 0.225, 0.235, 0.245$  e  $0.250$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores. . . . . 77
- 5.2 Magnitude do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para um quadrado mesoscópico com dois buracos com (a)  $H_e = 0.315$ , (b) 0.336, (c) 0.360, (d) 0.585, (e) 0.750 e (f) 0.965. A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores. . . . . 80

- 5.3 (a) Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem e de sua fase para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ . (a) módulo do parâmetro de ordem para o intervalo  $H_e = 0.10 - 0.17$  e a fase do parâmetro de ordem para (b)  $H_e = 0.10$  (c)  $H_e = 0.14$ , (d)  $H_e = 0.15$ , (e)  $H_e = 0.16$  e (f)  $H_e = 0.17$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores. . . . . 83
- 5.4 Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem (esquerda) e de sua fase (direita) para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ , para (a)  $H_e = 0.24$ , (b) 0.26, (c) 0.31, (d) 0.33, (e) 0.39 e (f) 0.41. A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase está dada pela barra de cores. . . . . 84
- 5.5 (a) Curva de magnetização  $M$  e (b) número de vórtices  $L$  na amostra para (a)  $b = 0.1$ , (b)  $b = 1.0$ , (c)  $b = 10.0$ , (d)  $b = \infty$ . . . . . 85
- 5.6 Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com vários materiais metálicos caracterizados com (a)  $b = 0.1$ , (b)  $b = 1.0$ , (c)  $b = 10.0$ , (d)  $b = \infty$ , para  $H_e = 0.21$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores. . . . . 86

- 5.7 Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ , para (a)  $H_e = 0.42$ , (b)  $0.44$ , (c)  $0.46$ , (d)  $0.50$ , (e)  $0.52$  e (f)  $0.80$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores. . . . . 87
- 5.8 (A) Esquema da geometria da amostra. Fase do parâmetro de ordem para (B)  $T = 0$ , (C)  $T = 0.375$ , (D)  $T = 0.875$  respectivamente, para  $H_e = 0.15$ . A diferença de fase do parâmetro de ordem ( $\Delta\phi/2\pi$ ) está dada pela barra de cores . . . . . 89
- 5.9 Curvas de magnetização em função de  $H_e$  para: (A)  $T = 0.5$  e (a)  $\kappa = 0.5$ , (b)  $\kappa = 0.7$ , (c)  $\kappa = 1.0$ , e (d)  $\kappa = 2.0$ ; (B)  $\kappa = 2.0$  e (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 0.125$ , (c)  $T = 0.250$ , (d)  $T = 0.375$ , (e)  $T = 0.50$ , (f)  $T = 0.625$ , (g)  $T = 0.750$ , (h)  $T = 0.875$ . . . . . 90
- 5.10 Número de vórtices no anel como função do campo magnético aplicado para diferentes valores da temperatura. . . . . 92
- 5.11 (a) Curva de magnetização e (b) número de vórtices em função de  $H_e$  para  $T = 0.5$  e  $T = 0$  para o anel. . . . . 93
- 6.1 Curvas de magnetização em função do campo aplicado para (A)  $b = 0.0, 1.0, 4.0, 8.0, \infty$  e (B)  $b = -8.0, -4.0, -2.0, -1.0, -0.5, -0.4$ , a  $T = 0.5$ . . . . . 100
- 6.2 Número de vórtices como uma função do campo aplicado para (b)  $b = -8.0, -4.0, -2.0, -1.0$ , (a)  $b = 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$ , para  $T = 0.5$ . . . . 101

6.3	Módulo do parâmetro de ordem $ \psi $ para $L = 28$ , $H_e = 0.40 - 0.42$ e (a) $b = \infty$ , (b) $b = 1$ , (c) $b = -4$ para $T = 0.5$ . As linhas nas figuras são só guias para uma melhor identificação da distância média entre as cadeias de vórtices. A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores. . . . .	102
6.4	Curvas de magnetização com histerese em função do campo aplicado para $b = \infty, 8.0, 4.0, 2.0, 0.0$ , em $T = 0.85$ . . . . .	103
6.5	Curvas de magnetização com histerese em função do campo aplicado para (a) $b = -8.0$ , (b) $b = -2.0$ e (c) $b = -1.0$ , para $T = 0.85$ . . . . .	105
6.6	(a) média do módulo quadrado do parâmetro de ordem $\langle  \psi ^2 \rangle$ , (b) vorticidade $L$ , (c) magnetização $M$ , para $H_e = H_{c2}(T = 0.5) = 0.5H_{c2}(0)$ . . . . .	106

# Capítulo 1

## Introdução

*“Não importa. Tente outra vez. Fracasse outra vez. Fracasse melhor”*

Samuel Beckett 1906 - 1989.

*Muitos anos depois, diante do pelotão de fuzilamento, o coronel Aureliano Buendía haveria de recordar aquela tarde remota em que o pai o levou a conhecer o gelo*<sup>1</sup>... Assim como se sucedeu com a água ao ser resfriada, ao variar a temperatura, a matéria muda de estado. É o que conhecemos como transição de fase. O estudo das propriedades da matéria é algo que tem fascinado o homem e a mulher desde há muito tempo, tanto para entender por qual razão a matéria muda suas propriedades, como para poder aproveitar suas muitas aplicações.

A história da supercondutividade começou a ser escrita no dia 10 de julho de 1908, quando Heike Kamerling Onnes conseguiu, pela primeira vez, liquefazer o Hélio, tendo assim a possibilidade de medir baixas temperaturas. Seu interesse era saber o que poderia acontecer com os elétrons de um metal ao ser esfriado cada vez

---

<sup>1</sup>Gabriel Garcia Márquez, em sua novela *Cem anos de solidão*, nos mostra uma aldeia perdida no tempo, onde não se conheciam muitas coisas, entre elas, uma das transições de fase.

mais. Uma das possibilidades era que estes elétrons se congelassem. Neste caso, a resistividade deveria aumentar. Gilles Holst, estudante de Onnes, mediu a resistência de um capilar de mercúrio puro diminuindo sua temperatura. Quando chegou a  $4.2K$ , a resistência caiu abruptamente, enquanto a corrente fluiu livremente pelo mercúrio<sup>2</sup>. Havia sido então descoberta a *supercondutividade* [1]. É interessante notar que a superfluidez do Hélio, fenômeno análogo à supercondutividade nos metais, foi descoberta somente em 1938 por Kapitza [2] e Allen e Meissner [3].

A supercondutividade é uma das descobertas mais interessantes das ciências naturais do século XX. Dentro de suas muitas aplicações, as mais fascinantes são: a fabricação de transportes massivos levitados, tornando possível, desse modo, atingir velocidades surpreendentes; a transmissão de energia com perdas muito baixas; a fabricação de supercomputadores extremadamente velozes e de baixo consumo energético; a produção de campos magnéticos intensos para exames médicos como ressonância magnética; a construção de potentes aceleradores de partículas e de sensores altamente sensíveis a campos magnéticos muito baixos (SQUID).

Nos anos 80, J. G. Bednorz e K. A. Müller [4] anunciaram a descoberta de supercondutores de alta temperatura. Descobriram que alguns compostos cerâmicos de óxidos metálicos que continham lantânio eram supercondutores a temperaturas suficientemente elevadas para poder usar nitrogênio líquido como resfriador. Como o nitrogênio líquido, cuja temperatura é de  $77K$ , esfria-se com uma eficácia 20 vezes maior que o hélio líquido e a um preço 10 vezes menor, muitas aplicações potenciais começaram a se tornar economicamente viáveis. Isto despertou o interesse no estudo do já então descoberto estado de vórtices em supercondutores. A física dos

---

<sup>2</sup>G. Holst tinha medido amostras de ouro e prata, encontrando que a resistência permanecia constante a baixas temperaturas, associando este fato às impurezas, então, elegeu o mercúrio, já que este podia ser encontrado em forma mais pura que os demais metais.

vórtices abarca diferentes tipos de fenômenos: física do plasma, supercondutividade, hidrodinâmica, superfluidez, etc. Podemos observar vórtices em escala macroscópica tais como redemoinhos formados no mar, na pia doméstica, ciclones e em galáxias distantes. Descartes já em 1644 os incluiu em sua *Principia Philosophia*<sup>3</sup>(ver Figura 1.1). Na supercondutividade, estes redemoinhos de correntes supercondutoras são quantizados e interagem entre si e com possíveis defeitos na amostra, sendo um sistema interessante para ser estudado. Nesta tese, apresentaremos estudos teóricos acerca da configuração de vórtices em amostras supercondutoras quadradas e em filmes finos. Mas, antes, introduziremos brevemente o estado da arte de alguns estudos feitos sobre configuração de vórtices em discos, cilindros e filmes.

## 1.1 Estado da arte

Devido à descoberta da supercondutividade de alta temperatura e aos recentes progressos em técnicas de microfabricação, tem sido possível a fabricação de estruturas mesoscópicas, as quais conduzem a propriedades novas e muito interessantes. Assim, a possibilidade de ter controle sobre os parâmetros supercondutores através da fabricação de amostras nanoestruturadas, tem chamado a atenção de muitos grupos de investigação na área, sejam teóricos ou experimentais. É óbvio que, devido ao grande número de trabalhos existentes, somente nomearemos alguns deles, sem demérito dos demais trabalhos científicos.

Praticamente todas as aplicações de supercondutores requerem um controle

---

<sup>3</sup>Descartes assume que todo o universo é preenchido com matéria a qual, devido a algum movimento inicial, acionou um sistema de vórtices que carrega as estrelas e os planetas em sua trilha. Apesar de todas as falhas na teoria dos vórtices, o modelo de Descartes foi aceito ainda muitos anos depois de Newton provar sua impossibilidade. Como coloca Brewster, um dos biógrafos de Newton: *A mente desinstruída de Descartes não podia admitir a idéia de grandes massas suspensas no espaço vazio, mantidas em suas órbitas apenas por uma influência invisível.*

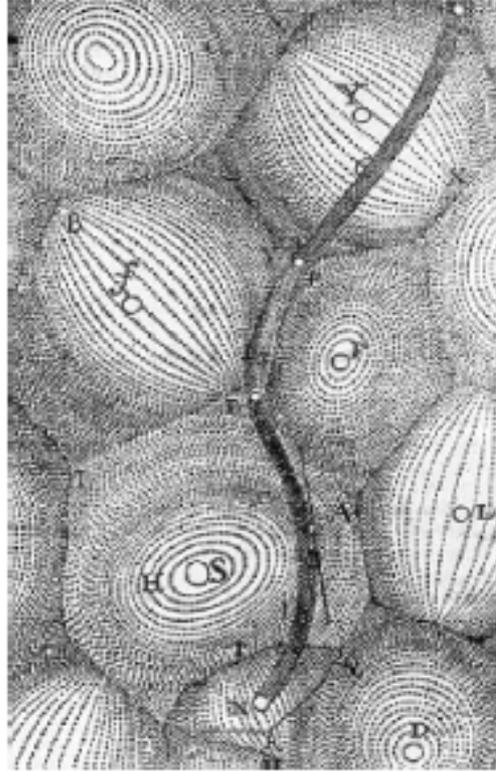


Figura 1.1: Vórtices Celestiais de Descartes, Principia Philosophia em 1644.

da densidade e/ou do movimento de vórtices. Uma forma de fazer isto é introduzindo defeitos no material ou por meio da fabricação de heteroestruturas supercondutor/magnético, supercondutor/metal. Em geral, materiais supercondutores apresentam defeitos estruturais que funcionam como centros de aprisionamento de vórtices. Uma maneira muito eficiente de conseguir isto é criando armadilhas mesoscópicas de vórtices, que podem ser realizadas experimentalmente por meio de técnicas de nanolitografia. Tais armadilhas, em geral inclusões magnéticas, metálicas, isolantes, ou buracos [5], devem ter tamanho comparável ao núcleo do vórtice, que pode variar de  $\sim 1$  a 100 nm dependendo do material e da sua temperatura. Um exemplo

dramático de como o controle individual dos vórtices altera as propriedades macroscópicas de um supercondutor são filmes nanoestruturados com redes periódicas de armadilhas [6–12]. Por exemplo, mudando a forma das armadilhas é possível quebrar a simetria de inversão espacial para o movimento dos vórtices e induzir o chamado efeito catraca [13–16], efeito que corresponde à retificação do movimento de vórtices submetidos a uma força oscilante. Uma outra forma de controlar o movimento dos vórtices é introduzindo uma modulação em alguma propriedade do supercondutor como por exemplo, fazendo com que a largura da amostra não seja constante, ou fazendo com que o parâmetro de Ginzburg-Landau seja uma função da posição [17], simulando assim, inomogeneidades dentro do supercondutor que favorecerão regiões para a nucleação da supercondutividade.

Armadilhas artificiais são especialmente interessantes para manipulação de vórtices em supercondutores. Se a armadilha é, por exemplo, magnética, a energia de interação entre as partículas magnéticas e os vórtices irá depender da intensidade e da direção dos momentos magnéticos das partículas. Assim é possível, numa mesma amostra, criar diversos potenciais de ancoragem para vórtices. Carneiro [18–20] calculou um potencial periódico assimétrico produzido pelos momentos magnéticos de uma rede de partículas ferromagnéticas alinhadas paralelamente à superfície de um filme supercondutor. Este potencial pode ser utilizado para retificação de vórtices [21]. Além disso, partículas magnéticas podem estabilizar pares vórtice-antivórtice, mesmo na ausência de campos externos [22, 23] ou pode ter implicações nas propriedades de transporte da amostra [24–26].

Existe uma grande quantidade de trabalhos que elabora um estudo detalhado das propriedades de vórtices em diferentes geometrias. Por exemplo, o estado de vórtices em supercondutores mesoscópicos com ou sem defeitos e para várias

geometrias é amplamente estudado nas referências [23, 27–41]. Através do análise das transições entre diferentes estados de vórtices, da metaestabilidade do sistema e da nucleação de pares vórtice-antivórtice, reportaram uma grande dependência das propriedades supercondutoras com a geometria e o arranjo de defeitos. Medições experimentais e simulações teóricas em amostras mesoscópicas têm sido amplamente reportadas nas referências [42–52], estudando, entre muitos aspectos, sua estrutura, magnetização, estado de vórtices gigantes, transições entre estados de mesma vorticidade, etc, conseguindo a evidência experimental da existência do estado de vórtice gigante em discos mesoscópicos [53].

Sobre os efeitos das condições de contorno na configuração de vórtices em amostras mesoscópicas, variando o parâmetro de De Gennes, pode-se simular interfaces de um supercondutor com o vácuo, com metais ou com outro supercondutor de temperatura crítica mais elevada. Tem sido encontrada uma forte influência deste parâmetro nas propriedades supercondutoras do material e na configuração dos vórtices dentro da amostra. Também se encontrou uma fortíssima dependência do parâmetro de De Gennes sobre os campos de *matching* [54–62].

Existe uma grande variedade de artigos sobre simulações numéricas do movimento dos vórtices em supercondutores [63], Pode-se destacar: partindo da teoria BCS, são estudadas as circunstâncias nas quais as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo fazem uma descrição espaço-temporal válida para supercondutores, encontrando que, se as variações do parâmetro de ordem são suaves, as equações são válidas próximas à temperatura de transição e a  $T = 0$  [64]. Estudos sobre dinâmica de vórtices na presença de correntes externas foi reportado nas referências [65–69], usando a teoria de Ginzburg-Landau e a teoria de London [70], encontrando as propriedades de equilíbrio e metaestabilidade em supercondutores

mesoscópicos. O modelo de Ginzburg-Landau dependente do tempo para supercondutores extremamente tipo II é reportado computacionalmente em [71] estudando o movimento dos vórtices na presença de campos magnéticos variáveis e correntes externas.

## 1.2 Objetivos e organização da tese

O objetivo desta tese é estudar a configuração de vórtices em nanoestruturas de várias formas, além de analisar a influência dos diferentes tipos de interface sobre a magnetização, número de vórtices e densidade de elétrons supercondutores nestes sistemas, adquirir um melhor entendimento das propriedades supercondutoras nestas geometrias.

O estudo será feito resolvendo o sistema de equações de Ginzburg-Landau não-lineares dependentes do tempo, utilizando o método de campos de calibre e a técnica de variáveis de ligação. A tese está assim dividida :

No capítulo 2, apresentamos um breve resumo histórico da supercondutividade, as teorias que foram desenvolvidas na tentativa de explicar este fenômeno, assim como as propriedades gerais do material supercondutor. Analisamos a estrutura de um vórtice isolado e sua energia no modelo de London. As equações de Ginzburg-Landau são introduzidas, dando ênfase a seus casos limites, suas condições de contorno e sua forma dependente do tempo.

No Capítulo 3, o método numérico utilizado para solucionar as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo é introduzido. A eficiência numérica do método assim como os critérios de convergência são discutidos.

No Capítulo 4, estudamos a nucleação da supercondutividade em duas geometrias diferentes: uma amostra quadrada e uma amostra retangular com condições

de contorno periódicas em um dos eixos, simulando assim, um filme supercondutor. Apresentamos o arranjo dos vórtices e a magnetização nestas amostras.

No Capítulo 5, é analisada a nucleação da supercondutividade para uma amostra quadrada com três tipos de defeitos. No primeiro caso, a amostra tem dois buracos quadrados localizados próximos à borda do supercondutor, estando os buracos preenchidos com material isolante ou simplesmente vácuo. No segundo caso, temos um defeito retangular, preenchido por um material metálico, cujas características podem ser variadas e simuladas através do comprimento de extrapolação de De Gennes. E no terceiro e último caso, temos um anel supercondutor. Para estas diferentes geometrias estudamos o arranjo dos vórtices e a magnetização como uma função do campo magnético externo. Para o caso do anel, analisamos também isotermas de magnetização para diferentes valores do parâmetro de Ginzburg-Landau  $\kappa$ . Para o caso do defeito retangular, analisamos a configuração dos vórtices em relação ao parâmetro de De Gennes.

No Capítulo 6, grandezas termodinâmicas como a magnetização, número de vórtices e densidade de portadores de carga, são estudadas para um filme supercondutor. Neste caso, o filme está rodeado de vários tipos de materiais. Consideramos interfaces supercondutor/vácuo, supercondutor/metálico, supercondutor/supercondutor com temperatura crítica mais alta, e finalmente, uma amostra com uma grande quantidade de defeitos na superfície, levando a ter uma supressão da supercondutividade na fronteira.

No Capítulo 7, apresentamos as conclusões, considerações finais e perspectivas para a continuidade da pesquisa desenvolvida nesta tese.

## Capítulo 2

# Introdução à supercondutividade

*“O inferno dos vivos não é algo que será; se existe, é aquele que já está aqui, o inferno que formamos estando juntos. Existem duas maneiras de não sofrer, a primeira é fácil para a maioria das pessoas: aceitar o inferno e tornar-se parte deste até o ponto de deixar de percebê-lo, a segunda é arriscada e exige atenção e aprendizagem contínuas: tentar saber reconhecer quem e o que, no meio do inferno, não é inferno, e preservar, e abrir espaço.”*

Italo Calvino - As Cidades Invisíveis

### 2.1 Algo de história

A História da Supercondutividade tem sua origem em 1911 no Laboratório Leiden (Holanda). H. Kamerling Onnes, conhecido por estudar as propriedades da matéria a baixas temperaturas e pela produção do hélio líquido (1908), descobriu uma assombrosa propriedade do mercúrio. Suas medidas mostravam que a resistência elétrica do mercúrio caía abruptamente a zero abaixo de certa tempera-

tura crítica ( $T_c = 4.2K$ ) [1]. Esse novo fenômeno foi chamado de *supercondutividade*. Acreditava-se que supercondutividade e condutividade perfeita eram o mesmo fenômeno, até que em 1933, Meissner e Ochsenfel [72] notaram que o supercondutor não só impede a penetração de um campo magnético externo, como também expulsa qualquer campo previamente estabelecido no estado normal. Este comportamento foi chamado de Efeito Meissner (diamagnetismo perfeito) (Figura. 2.1). Até

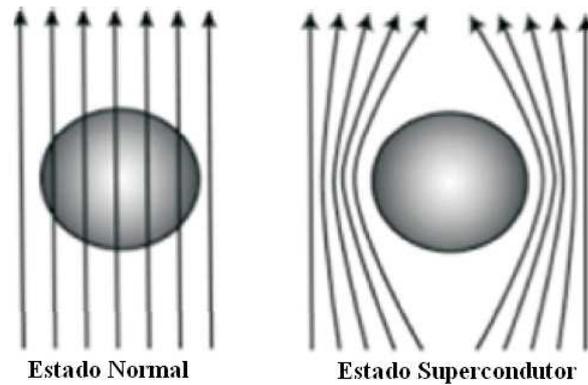


Figura 2.1: Efeito Meissner em uma esfera supercondutora em um campo magnético constante. Para a esfera esquerda  $T > T_c$  e o material comporta-se como um condutor normal. Para a esfera direita  $T < T_c$  a esfera torna-se supercondutora.

então, não existia nenhuma teoria que explicasse esse comportamento. Em 1935, os irmãos Fritz e Heinz London [73] desenvolveram a primeira teoria fenomenológica descrevendo a supercondutividade. Mesmo sem dar uma explicação microscópica do mecanismo da supercondutividade, a teoria de London tornou possível prever o comportamento da indução magnética, e das correntes dentro do supercondutor. Assim, foi mostrado que o campo magnético decai a uma distância característica conhecida como comprimento de penetração de London  $\lambda$ . Em 1950, uma nova teoria fenomenológica, mais abrangente, é proposta por Vitaly Ginzburg e Lev Landau [74], a chamada teoria de Ginzburg-Landau (TGL). Utilizando a idéia da existência de um

parâmetro de ordem supercondutor  $\psi(\mathbf{r})$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , a TGL conseguiu apontar a existência não só do comprimento de penetração  $\lambda$ , como também do comprimento de coerência  $\xi$ , relacionado à variação espacial de  $\psi(\mathbf{r})$ . Também possibilitou, através do parâmetro de Ginzburg-Landau,  $\kappa = \lambda/\xi$ , a descrição de dois tipos existentes de supercondutores: Tipo I ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) e Tipo II ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ), demonstrando que para  $\kappa \rightarrow \infty$  se obtém a teoria de London. Em 1956, Alexei Abrikosov demonstrou que a penetração do fluxo magnético dentro do supercondutor do tipo II ocorre em forma de vórtices, isto é, pacotes de fluxo magnético quantizados, formando uma rede triangular em um supercondutor homogêneo [75].

Em 1957, John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer [76], formularam a primeira teoria microscópica da supercondutividade, chamada teoria BCS, em homenagem aos seus autores. A teoria BCS representou o ponto fundamental no entendimento dos superfluidos isotrópicos carregados, explicando, basicamente, todos os resultados dos supercondutores de baixa temperatura conhecidos na época. Baseada na premissa em que o estado fundamental eletrônico é formado através da interação entre fônons e elétrons, a teoria conseguiu prever a existência de um *gap* de energia da ordem de  $3.5k_B T_C$  entre o estado fundamental e os estados excitados. Neste estado fundamental, os portadores de carga são pares de elétrons com direções de spin e momentos opostos (*pares de Cooper*) [77], e capazes de se mover sem causar dissipação.

A teoria BCS descrevia satisfatoriamente todos os materiais supercondutores até 1986, quando J. G. Bednorz e K. A. Müller [4] anunciaram a descoberta de supercondutores de alta temperatura crítica  $T_c$  no sistema  $BaLaCuO$ , fato que serviu como base para a descoberta da maioria dos materiais sintetizados hoje em dia com  $T_c$  acima de  $40K$ . Materiais como  $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$ ,  $YBa_2Cu_3O_7$  são

hoje conhecidos por possuir  $T_c$  da ordem de  $130K$  e  $90K$  respectivamente, e o  $(Hg_{0,8}Tl_{0,2})Ba_2Ca_2Cu_3O_{8,3}$  com o recorde de  $T_c = 138K$  [78]. Embora a supercondutividade à temperatura ambiente não tenha sido atingida, os supercondutores são usados cotidianamente em várias aplicações. Por exemplo, ressonância magnética nuclear do corpo humano, detectores de depósitos de petróleo e em linhas de transmissão de baixas perdas.

## 2.2 Termodinâmica do estado supercondutor

Na teoria de dois fluidos, consideramos o metal em dois estados diferentes, estado normal e estado supercondutor. Assim, a variação da energia livre será  $f_n(T, 0) - f_s(T, 0) = H_c^2/8\pi$ , onde  $f_s$  e  $f_n$  são as densidades de energia livre de Helmholtz nas fases supercondutora e normal, respectivamente, na ausência de campo magnético, e  $H_c^2/8\pi$  é a energia que o material perde ao se tornar supercondutor. ( $H_c$  é o campo crítico termodinâmico, campo no qual ocorre a transição de fase supercondutor-normal em supercondutores do tipo I. Os supercondutores do tipo II apresentam diamagnetismo perfeito até um campo crítico inferior  $H_{c1}$ , retornando ao estado normal no campo crítico superior  $H_{c2}$ . Entre estes dois valores apresenta-se o estado de vórtices ou estado misto. Temos  $H_{c1} < H_c < H_{c2}$  e  $T \leq T_c$ ). Uma forma empírica para  $H_c(T)$  é dada por:

$$H_c(T) \approx H_c(0) (1 - (T/T_c)^2), \quad (2.1)$$

onde  $T_c$  é o valor da temperatura crítica a campo nulo. Na presença de campos externos não nulos, usamos a densidade de energia livre de Gibbs  $g = f - hH_e/4\pi$ , onde  $h$  é o campo magnético microscópico no interior do supercondutor e  $H_e$  é o

campo externo aplicado. Assim, a variação da energia livre de Gibbs nas fases normal e supercondutora é:

$$g_n(T, 0) - g_s(T, 0) = \frac{H_c^2 - H_e^2}{8\pi}. \quad (2.2)$$

Vemos claramente que, na ausência de campo, as energias de Gibbs e de Helmholtz são equivalentes. A diferença de entropia entre os dois estados  $S = \partial g / \partial t$  é dada por:

$$S_n - S_s = -\frac{1}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial T}. \quad (2.3)$$

Utilizando a equação (2.1) encontramos que na ausência de campo magnético externo:

$$S_n - S_s = \frac{H_c^2(0)}{2\pi} \left[ \left( \frac{T}{T_c} \right) - \left( \frac{T^3}{T_c^4} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Como podemos ver, a entropia do estado normal é maior ou igual à entropia do estado supercondutor. Além disso, na ausência de campo magnético externo a transição ocorre em  $T = T_c$ . Portanto,  $S_n = S_s$  e a descontinuidade no calor específico,  $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ , evidencia uma transição de fase de segunda ordem. Agora, na presença de um campo externo  $H_e(T < T_c)$  a transição ocorre para  $H_e = H_c(T)$ , com a conseqüente descontinuidade na entropia e a uma transição de primeira ordem (ver Figura 2.2).

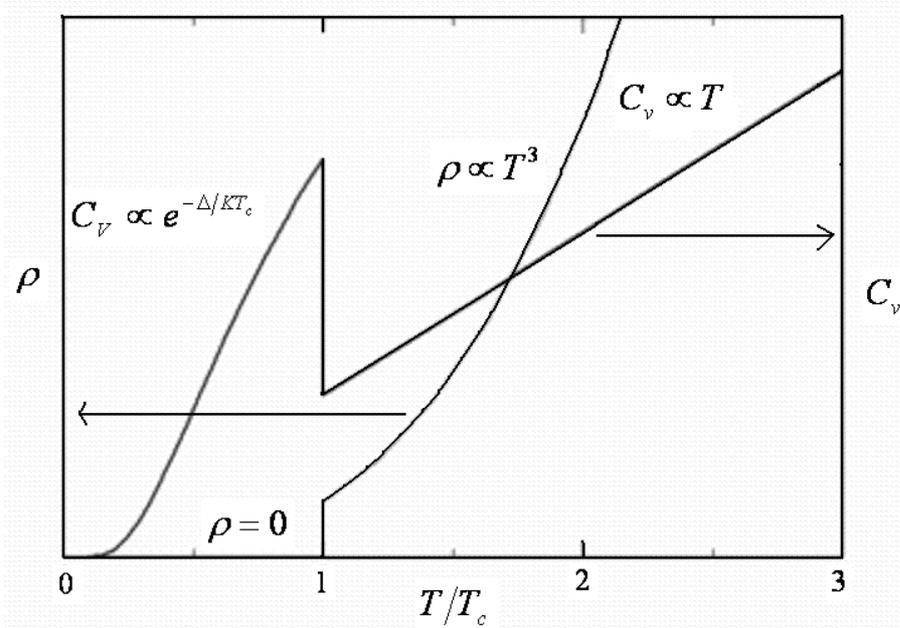


Figura 2.2: Resistividade  $\rho$  e calor específico  $C_v$  em função da temperatura

## 2.3 Descrição do gap de energia

Obedecendo à estatística de Fermi, o estado fundamental de um gás eletrônico corresponde ao completo preenchimento dos seus níveis de energia até o nível de Fermi  $E_F$ . Algo deveria favorecer a formação dos chamados pares de Cooper (pares de elétrons). Este efeito atrativo poderia ser causado pela interação entre os elétrons e algum tipo de excitação no sólido. Em 1950 Frölich [79] introduziu, pela primeira vez, o conceito de interação atrativa entre elétrons por meio de fônons (ver Figura 2.3). O fônon é uma excitação mecânica da rede cristalina causada pela agitação natural existente em todo sistema sujeito a uma temperatura finita. Um elétron que se desloca através do material perturba os átomos da rede, polarizando o meio ao seu redor e atraindo íons positivos do cristal. Essa perturbação é um fônon que sai,

de algum modo, no rastro do elétron. Desta forma, o fônon gerado pela passagem de um elétron - sendo uma onda de átomos positivos deslocados - pode interagir com outro elétron que esteja por perto. Isso forma o par de Cooper: dois elétrons ligados através de um fônon da rede. Em 1957, Bardeen, Cooper e Schrieffer descreveram

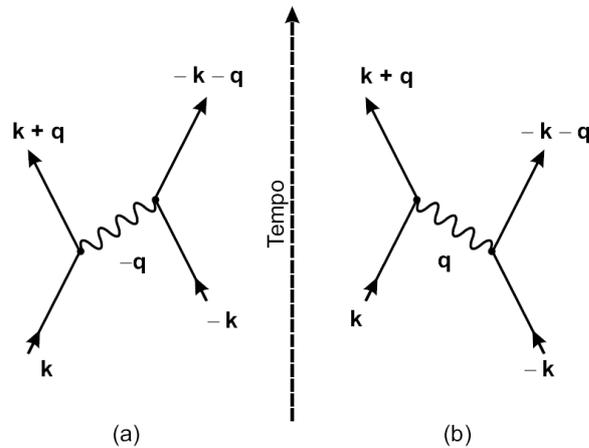


Figura 2.3: Representação da interação elétron - elétron via fônon (referencial do centro de massa do par de elétrons). Em (a) o elétron  $k$  emite um fônon de vetor de onda  $-q$ , depois o fônon é absorvido pelo segundo elétron. Em (b) o segundo elétron, de estado  $-k$  emite um fônon  $q$ , que é depois absorvido pelo primeiro elétron.

a formação de um condensado destes pares, introduzindo a idéia de uma função de onda macroscópica dos  $N$  elétrons do sistema (teoria BCS). A teoria prevê um *gap* de energia entre o estado fundamental (estado em que os pares de Cooper se movem sem causar dissipação) e os estados excitados (estados cuja energia é suficiente para quebrar os pares de Cooper - o material se encontra no estado normal), igual a  $E_g = 2\Delta \approx 3.5k_B T_c$ . Este *gap* supercondutor deve ser máximo em  $T = 0$  pela ausência de excitações térmicas capazes de dissociar os pares de Cooper, e zero em  $T = T_c$ , onde a supercondutividade é destruída. Para os supercondutores de baixa

temperatura,  $\Delta(T)$  tem a seguinte dependência:

$$\Delta(T) \sim \begin{cases} 1.74\Delta(0)\sqrt{1-T/T_c}, & \text{se } T \approx T_c \\ \Delta(0), & \text{se } T \ll T_c \end{cases}$$

onde  $\Delta(0) = 1.764k_B T_c$ . Se o material é imerso em um campo eletromagnético  $ac$  com frequência da ordem de  $2\Delta/h \approx 10^{11} - 10^{12} Hz$  o sistema é excitado, ocorrendo a quebra dos pares de Cooper.

## 2.4 Teorias fenomenológicas

### 2.4.1 Teoria de London

Mais de 20 anos depois do descobrimento da supercondutividade, alguns teóricos desenvolveram a primeira teoria fenomenológica para descrever este fenômeno. Proposta pelos irmãos London em (1935), a teoria assume que a segunda lei de Newton pode ser escrita como [80]:

$$m^* \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -e^* \mathbf{E} . \quad (2.5)$$

Aqui  $m^*$  e  $e^*$  são respectivamente a massa e a carga dos portadores de carga supercondutores,  $\mathbf{v}_s$  é a velocidade da supercorrente e  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico aplicado. Se tomamos a densidade de supercorrente na forma  $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$ , onde  $n_s$  é a densidade de superelétrons, então a equação (2.5) se escreve como:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{j}_s) , \quad (2.6)$$

onde  $\Lambda = 4\pi\lambda^2/c^2 = m^*/n_s e^{*2}$ . A equação (2.6) é conhecida como a primeira equação de London, que descreve a condutividade perfeita, pois o menor campo elétrico é capaz de acelerar os superelétrons. Aplicando o rotacional nos dois lados da equação (2.6) e incluindo a Lei de Faraday, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial t} [-c\nabla \times (\Lambda \mathbf{j}_s) - \mathbf{h}] = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{h}$  é o campo magnético local. Observamos que qualquer valor constante de  $\mathbf{j}_s$  e  $\mathbf{h}$  satisfaz a relação acima. Um campo magnético que penetra a amostra em seu estado normal deveria ser expelido da amostra quando esta passa a seu estado supercondutor. Assim, os irmãos London restringiram a solução da equação (2.7) àquela que satisfaz:

$$-c\nabla \times (\Lambda \mathbf{j}_s) = \mathbf{h}. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é a segunda equação de London. Combinando a equação (2.8) com a equação de Maxwell para o campo magnético  $\nabla \times \mathbf{h} = 4\pi \mathbf{j}_s/c$ , temos:

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \lambda^{-2} \mathbf{h}. \quad (2.9)$$

Esta é a forma mais conhecida da equação de London. Esta equação descreve o caráter diamagnético perfeito de um supercondutor. Podemos resolver a equação (2.9) unidimensionalmente para um supercondutor semi-infinito imerso em um campo magnético paralelo à sua superfície ( $x=0$ ), obtendo:

$$h(x) = h(0)e^{-x/\lambda}. \quad (2.10)$$

Deste modo, as duas equações de London explicam os dois fenômenos fundamentais da supercondutividade, o diamagnetismo perfeito e a resistividade elétrica nula abaixo de  $T_c$ . Embora a teoria de London seja uma ferramenta útil para descrever o comportamento do supercondutor e o estado de vórtices em supercondutores extremos do tipo II ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), trata os vórtices como linhas, sem considerar seu tamanho físico nem sua estrutura interna. Além disso, a teoria de London descreve a supercondutividade a campo constante e muito menor que o campo crítico superior da amostra. Também não pode ser aplicada a sistemas em que a densidade de vórtices é alta. Para poder analisar o estado supercondutor em casos mais gerais, é necessário a construção de uma teoria que permita estudar a estrutura interna do vórtice.

### 2.4.2 Teoria de Ginzburg-Landau

Seguindo o critério geral da teoria de Landau e Lifshitz, postula-se a existência de um parâmetro de ordem que anular-se-á na fase desordenada e será diferente de zero na fase ordenada. Neste caso, com a intenção de levar em conta os efeitos de origem quântica (London tinha predito que o fenômeno da supercondutividade se tratava de um fenômeno quântico macroscópico), elege-se um parâmetro de ordem complexo  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  tal que  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  é proporcional à densidade de pares de Cooper,  $n_s(\mathbf{r})$ . Assim,  $\psi$  pode ser interpretado como uma pseudo-função de onda dos portadores de carga do supercondutor. Aqui, contrário à teoria de London,  $n_s$  não é necessariamente homogênea no espaço. O outro postulado básico é que próximo à transição de fase,  $\psi$  é pequeno e com variações suaves no espaço, de modo que a energia livre de Helmholtz pode ser expandida em potências de  $|\psi|^2$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}$ .

A densidade de energia livre de Helmholtz  $f_s$  na ausência de campos e gradientes é expandida em potências pares do parâmetro de ordem:

$$f_s = f_n + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4. \quad (2.11)$$

Aqui é importante mostrar o significado físico dos parâmetros fenomenológicos  $\alpha$  e  $\beta$ .  $\beta$  deve ser positivo. Caso contrário, a energia só apresentaria mínimo global quando  $\psi = \infty$ , o que inviabilizaria a teoria.  $\alpha$  pode ser negativo ou positivo. Se  $\alpha$  é positivo, o único mínimo da energia ocorre em  $\psi = 0$  (material no estado normal). Se  $\alpha < 0$  o mínimo ocorre em  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta \equiv |\psi_\infty|^2$ , no qual  $|\psi_\infty|$  é o valor que o parâmetro de ordem toma em um supercondutor infinito na ausência de campos e gradientes. Podemos ver que  $\alpha(T)$  deve mudar de sinal em  $T = T_c$ . Então, para incorporar este fato na expressão para  $\alpha(T)$ , fazemos a expansão de Taylor até primeira ordem,  $\alpha(T) \cong \alpha_0(T - T_c)$  onde  $\alpha_0$  é uma constante característica de cada material. Utilizando a equação (2.11), vemos que a diferença de energia livre necessária para manter o fluxo magnético fora do supercondutor é dada por:

$$f_n - f_s = \frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (2.12)$$

Uma vez que, na ausência de campos  $g_n - g_s = H_c^2/8\pi$ , e as energias livres de Helmholtz e Gibbs são iguais,  $\alpha$  e  $\beta$  podem dar uma estimativa do campo crítico da amostra, de modo que  $\alpha^2\beta^{-1} = H_c^2/4\pi$ . Claramente, a energia livre do estado supercondutor é menor que a energia livre do estado normal para  $T < T_c$ . Então, podemos concluir que  $\alpha = 0$  corresponde a  $T = T_c$ . A densidade de energia livre

para um supercondutor isotrópico proposta por Ginzburg e Landau é escrita como:

$$f_s[\psi, \mathbf{A}] = f_n + \alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \left( \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right]^2 + \frac{|h|^2}{8\pi}, \quad (2.13)$$

onde o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é dado por  $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}$ . Os portadores de carga na fase supercondutora são os pares de Cooper com massa  $m^* = 2m$  e carga  $e^* = 2e$ . Analisando fisicamente cada termo do funcional de energia livre, podemos ver que o primeiro termo corresponde à energia do estado normal. Os dois próximos termos correspondem à energia de condensação do estado supercondutor, o quarto termo está relacionado à energia cinética dos pares de Cooper, e o último termo corresponde ao aumento na energia necessário para manter o fluxo fora do supercondutor. Em outras palavras, para assegurar o efeito Meissner. Minimizando  $f$  em relação a  $\mathbf{A}$  e  $\psi$  obtemos:

$$\frac{\delta f_s}{\delta \psi} = 0 \Rightarrow \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\delta f_s}{\delta \mathbf{A}} = 0 \Rightarrow \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{e^{*2}}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (2.15)$$

A densidade de supercorrente  $\mathbf{j}_s$  no supercondutor é dada pela equação de Maxwell  $4\pi\mathbf{j}_s/c = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$  e, conseqüentemente, as duas equações GL tomam a forma:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.17)$$

Exceto pela presença do termo não linear da primeira equação GL (2.16) vemos que é idêntica à equação de Schrödinger para uma partícula de massa  $m^*$  e carga  $e^*$  imersa

em um campo magnético, sendo  $-\alpha$  sua energia e  $\psi$  a função de onda. A segunda equação GL (2.17) toma uma forma mais clara escrevendo  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  para o parâmetro de ordem:

$$\mathbf{j}_s = \frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \equiv e^* |\psi|^2 \mathbf{V}_s, \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{V}_s = \frac{1}{m^*} \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right), \quad (2.18b)$$

onde  $\mathbf{V}_s$  é a velocidade do superfluido. Assim, podemos observar uma excelente analogia com a mecânica quântica.

### 2.4.3 Condições de contorno

Quando aplicamos as equações GL a uma amostra finita é necessário introduzir condições de contorno. A condição de fronteira para o potencial vetor  $\mathbf{A}$  é aquela na qual o campo magnético na superfície do supercondutor  $s$ , deve ser igual ao campo magnético externo aplicado  $\mathbf{H}_e$ :

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}}|_s = \mathbf{H}_e \times \hat{\mathbf{n}}|_s, \quad (2.19)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  denota o componente normal à superfície do supercondutor. A condição de contorno para a interface supercondutor/vácuo pode ser descrita como:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \Big|_s = 0, \quad (2.20)$$

Esta condição assegura que as correntes não podem atravessar a interface supercondutor/vácuo.

De Gennes, usando a teoria microscópica BCS, generalizou esta condição para

interfaces supercondutor/metal ou supercondutor/supercondutor a  $T_c$  mais alta [81] (ver Figura 2.4):

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi|_s = \frac{i}{b}\psi|_s, \quad (2.21)$$

onde  $b$  é uma constante real arbitrária. Este parâmetro fenomenológico  $b$  caracteriza os efeitos da fronteira sobre o parâmetro de ordem. Mais precisamente, quando o parâmetro de ordem  $|\psi|$  na fronteira é extrapolado linearmente metal adentro,  $|\psi| \rightarrow 0$  a uma distância  $b$  da fronteira. Resumindo, o parâmetro  $b$  determina as seguintes condições de fronteira:

1. A interface supercondutor/vácuo ou supercondutor/isolante é determinada por  $b \rightarrow \infty$ , a qual significa que as supercorrentes não podem fluir para fora do supercondutor.

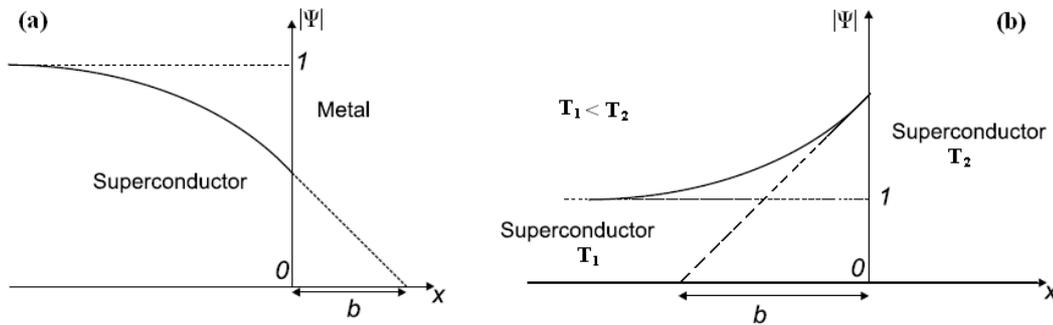


Figura 2.4: Representação esquemática da dependência espacial do parâmetro de ordem com o comprimento de extrapolação de De Gennes  $b$  na interface entre (a) um supercondutor e um metal normal e (b) um supercondutor de  $T_c = T_1$ , e um supercondutor a  $T_c = T_2$ , com  $T_1 < T_2$ .

2.  $b > 0$  descreve uma interface supercondutor/metal, o que causará uma supressão da supercondutividade nas bordas da amostra (ver Figura 2.4 (a)).

3. A interface supercondutor/supercondutor à maior temperatura crítica é modelada com a condição  $b < 0$ , levando a um aumento da supercondutividade na fronteira (ver Figura 2.4 (b)).
4. Para  $b = 0$  esta condição se reduz à condição de contorno de Dirichlet  $\psi|_s = 0$  (S denota a superfície do supercondutor) e é idealizada para um supercondutor em contato com um material ferromagnético, como também pode ser utilizada para analisar um supercondutor com alta densidade de defeitos na interface.

#### 2.4.4 Comprimentos característicos

Existem duas escalas de comprimento fundamentais no contexto da teoria GL. A primeira, chamada de comprimento de coerência  $\xi(T)$ , é uma medida que caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem no interior do vórtice. A segunda, definida como comprimento de penetração de London  $\lambda(T)$ , mede a variação espacial do campo magnético dentro do supercondutor (ver Figura 2.5). Para derivar estes

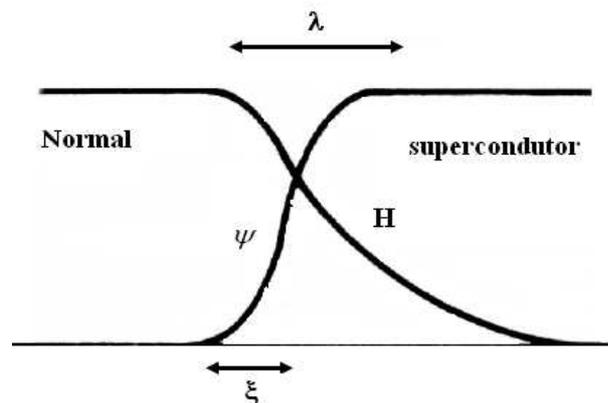


Figura 2.5: Dependência radial do parâmetro de ordem  $\psi$  e o campo magnético  $H$  na interface supercondutor/metal normal.

dois comprimentos, limitemos nossa discussão a um supercondutor semi-infinito na ausência de campos e correntes. Deste modo, a equação (2.16) pode ser escrita em sua forma unidimensional:

$$\alpha\psi + \beta\psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} \psi = 0. \quad (2.22)$$

Introduzindo o parâmetro de ordem adimensional  $f = \psi/\psi_\infty$  para um ponto arbitrário, onde  $\psi(x) \neq \psi_\infty$ , podemos reescrever a equação (2.16) na forma reduzida:

$$-f + f^3 - \xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad (2.23a)$$

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha(T)|} \simeq \frac{\xi^2(0)}{1-t}, \quad (2.23b)$$

onde  $\xi(T)$  mede a extensão de coerência do parâmetro de ordem  $\psi$  e diverge em  $t = T/T_c = 1$ , como também é a distância em que  $\psi$  varia apreciavelmente próximo a uma região no estado normal. Para ver isto melhor, consideremos a relação (2.23) para o caso linear (em torno de uma solução no estado de Meissner), substituindo  $f = 1 + u$  onde  $u \ll 1$ . Obtemos:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2}{\xi^2} u = 0 \Rightarrow f(x) \sim \exp \left[ \pm \sqrt{2} \frac{(x - x_0)}{\xi} \right]. \quad (2.24)$$

Agora, relacionando  $\xi(T)$  ao comprimento de coerência  $\xi_0$ , obtido por meio da teoria microscópica [80], obtemos:

$$\xi(T) = 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}} \quad \text{para} \quad l_{el} \gg \xi_0, \quad (2.25a)$$

$$\xi(T) = 0.855 \sqrt{\frac{\xi_0 l_{el}}{1-t}} \quad \text{para} \quad l_{el} \ll \xi_0, \quad (2.25b)$$

onde  $l_{el}$  é o caminho livre médio elástico dos elétrons normais. As expressões (2.25) são válidas somente para temperaturas próximas a  $T_c$ . Estes limites são conhecidos como limite “limpo” para  $l_{el} \gg \xi_0$ , e limite “sujo” para  $l_{el} \ll \xi_0$ .

O segundo comprimento característico está relacionado com a variação espacial do campo magnético local e das supercorrentes,  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$  respectivamente. Considerando campos magnéticos fracos e baixas temperaturas, de modo que  $\psi \approx \psi_\infty = \text{constante}$ , a equação (2.18b) se reduz a:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e^{*2}|\psi_\infty|^2}{m^*c} \mathbf{A}. \quad (2.26)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação (2.26),

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{e^{*2}|\psi_\infty|^2}{m^*c} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{e^{*2}|\psi_\infty|^2}{m^*c} \mathbf{h}, \quad (2.27)$$

e combinando este resultado com  $\nabla \times \mathbf{h} = 4\pi\mathbf{j}_s/c$ , temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\frac{4\pi e^{*2}|\psi_\infty|^2}{m^*c^2} \mathbf{h} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{h} = \lambda^{-2} \mathbf{h}, \quad (2.28)$$

que nos retorna à equação (2.9) com  $\lambda$  igual a um comprimento de penetração dado

por:

$$\lambda^2(T) = \frac{m^*c^2}{4\pi|\psi_\infty|^2e^{*2}} = \frac{m^*c^2\beta}{e^{*2}|\alpha|} \simeq \frac{\lambda^2(0)}{1-t}. \quad (2.29)$$

Note que  $\lambda(T)$  tem a mesma dependência com a temperatura que  $\xi(T)$ , e coincide com o comprimento de penetração de London a  $T = 0$ , onde todos os elétrons são supercondutores. Dentro da teoria microscópica é possível derivar os resultados exatos para o comprimento de penetração nos limites “limpo” e “sujo”:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2(1-t)}} \quad \text{para} \quad l_{el} \gg \xi_0, \quad (2.30a)$$

$$\lambda(T) = 0.64\lambda(0)\sqrt{\frac{\xi_0}{l_{el}(1-t)}} \quad \text{se} \quad l_{el} \ll \xi_0. \quad (2.30b)$$

O resultado importante nas equações (2.25b) e (2.30b) é que no limite “sujo”, se  $l_{el}$  decresce (supercondutor fica mais impuro),  $\lambda(T)$  cresce, enquanto que  $\xi(T)$  decresce. Assim, para todas as temperaturas e materiais impuros tem-se em geral,  $\lambda(T) \gg \xi(T)$ . Os supercondutores de alta temperatura crítica tem um comprimento de coerência da ordem de  $\xi(T) = 1.2 - 1.5nm$ , e um caminho livre médio tipicamente da ordem de  $l_{el} \sim 15nm$ , logo podemos considerar estes materiais dentro do limite “limpo”. Note que  $\xi(T)$  e  $\lambda(T)$  possuem o mesmo comportamento para  $T \rightarrow T_c$ . Isto torna possível introduzir um novo parâmetro específico de cada material, o chamado parâmetro de Ginzburg-Landau  $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ , o qual independe da temperatura, sendo seu valor importante para definir o tipo de supercondutor. Podemos expressar o campo crítico termodinâmico em termos dos comprimentos  $\lambda$  e  $\xi$ . Lembrando que

$\alpha^2\beta^{-1} = H_c^2/4\pi$  e usando as equações (2.23b) e (2.29) temos:

$$H_c(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}\xi(T)\lambda(T)}, \quad \text{onde} \quad \Phi_0 = hc/2e. \quad (2.31)$$

### 2.4.5 Equação de Ginzburg-Landau linearizada (Campos $H_{c2}$ e $H_{c3}$ )

Como veremos mais adiante, existem dois tipos de supercondutores. Supercondutores do tipo I, são materiais que apresentam estado Meissner até um campo crítico  $H_c$ . Se excedermos este valor ocorre a destruição completa da supercondutividade. Supercondutores do tipo II, apresentam estado de Meissner até um campo crítico inferior  $H_{c1}$  (pode ser de dezenas ou centenas de gauss). Com o aumento do campo, o sistema apresenta o estado misto, caracterizado pela penetração de linhas de fluxo magnético quantizadas que atravessam a amostra, até que o campo atinga o valor do segundo campo crítico  $H_{c2}$  (pode ser de centenas de teslas) onde a supercondutividade é destruída. Para amostras finitas, existe um terceiro campo crítico  $H_{c3}$ ,  $H_{c3} > H_{c2}$ , no qual o material apresenta supercondutividade numa região superficial da ordem de  $\sim \xi(T)$ .

Mostraremos aqui como podemos linearizar as equações GL e usá-las para obter  $H_{c2}$  e  $H_{c3}$ . A equação de Ginzburg-Landau linearizada pode ser aplicada em casos onde  $|\psi| \ll 1$ , ou seja, a densidade de vórtices seja alta. Tais casos incluem filmes finos de espessura  $d \ll \xi(T)$  e supercondutores em geral a uma temperatura e campo magnético muito próximos da linha de transição  $T_c(H)$ . Além disso, neste caso, temos que todos os efeitos de blindagem devido às supercorrentes são desprezíveis, já que todos eles são proporcionais a  $|\psi|^2$ . Como consequência obtém-se uma única equação para  $|\psi|$  com  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{externo}}$ .

Próximo à transição do estado supercondutor para o estado normal,  $\psi \rightarrow 0$  e, podemos considerar que o campo magnético aplicado  $H_e$  não será expelido do interior da amostra, assumir que o termo  $\beta|\psi|^2\psi$  é desprezível comparado com os termos lineares em  $\psi$  na primeira equação GL (2.16), e que  $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_{externo}$ . Nestas condições, obtemos uma versão linearizada da primeira equação GL (equação Ginzburg-Landau Linearizada (LGL)) da seguinte forma:

$$\left(-i\nabla - \frac{e^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \psi = -\frac{2m^*\alpha(T)}{\hbar^2}\psi = \frac{1}{\xi^2(T)}\psi. \quad (2.32)$$

Esta equação é formalmente idêntica à equação de Schrödinger para uma partícula de massa  $m^*$  e carga  $e^*$  na presença de um campo magnético uniforme  $H_e$ , com  $-\alpha$  sendo os autovalores de energia.

Agora, se diminuirmos gradativamente o campo aplicado desde o estado normal, podemos calcular o campo magnético no qual a supercondutividade começa a nuclear no interior de uma amostra volumosa (idealmente infinita), chamado de  $H_{c2}$  ou segundo campo crítico termodinâmico. Resolvendo a equação (2.32) para  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{c2}$ , achamos a solução para o menor valor de energia, obtendo :

$$-\alpha = \frac{e^*\hbar}{m^*c}H_{c2}. \quad (2.33)$$

Relacionando  $H_c$  com  $H_{c2}$  obtemos [80]:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (2.34)$$

É bom lembrar que nos cálculos que conduziram à equação (2.34) consideramos regiões supercondutoras longe das bordas do material. De fato, a nucleação sempre

ocorre primeiro na superfície. Veremos agora o efeito das bordas sobre as propriedades do supercondutor. Assumindo um plano semi-infinito (raio de curvatura  $\gg \xi(T)$ ), posicionado em  $x > 0$ , sua borda está em contato com o vácuo, o que nos permite aplicar a condição de contorno (2.20). Simplificamos o problema tomando  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$  paralelo à superfície  $yz$  do supercondutor. Também, selecionando o calibre de London  $\mathbf{A} = x H_e \hat{\mathbf{y}}$  e procurando soluções da forma  $\psi(x, y) = e^{iky} f(x)$ , podemos escrever a equação (2.32) e sua condição de contorno como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2m^*} (\hbar k - e^* H_e x) f = -\alpha f, \quad (2.35)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.36)$$

A equação (2.7) é semelhante à equação de Schrödinger para um oscilador harmônico simples com frequência  $\omega_c = (|e^*| H_e)/(2m^*)$  e energia  $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ . Para  $n = 0$  e  $k_z = 0$ , temos:

$$\psi(x, y) \sim e^{iky} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}}. \quad (2.37)$$

Vemos que a condição (2.36) é satisfeita adequadamente para  $x_0 \gg \xi(T)$  já que a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico é uma gaussiana centrada em  $x_0$  com amplitude desprezível na superfície. Para o caso oposto,  $x_0 = 0$ , a função de onda também satisfaz a condição (2.36), já que a derivada do pico da gaussiana (centrada em  $x_0 = 0$ ) é zero. Não obstante, para o caso intermediário,  $x_0 \sim \xi$  existe um autovalor de energia menor que para o caso volumétrico. Um cálculo detalhado mostra o valor ótimo de  $x_0 = 0.59\xi(T)$ , indicando que a presença

de uma superfície favorece a nucleação. Então:

$$-\alpha = 0.59 \frac{|e^*| \hbar H_{c3}}{2m^*}, \quad (2.38)$$

onde  $H_{c3}$  é o terceiro campo crítico associado com este estado de supercondutividade superficial. Os campos críticos  $H_{c2}$  e  $H_{c3}$  estão relacionados por [82]:

$$H_{c3} = 2.4\kappa H_c = 1.69H_{c2}. \quad (2.39)$$

A supercondutividade superficial persiste para campos magnéticos altos em supercondutores do tipo II e para supercondutores do tipo I com  $0.42 < \kappa < 0.70$ .

## 2.4.6 Equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo

As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) foram deduzidas da teoria BCS por L. P. Gor'kov e G. M. Éliashberg [83]. O modelo de Ginzburg-Landau dinâmico serve, além do óbvio propósito de estudar a dinâmica dos supercondutores, também para encontrar o estado de equilíbrio termodinâmico partindo de uma situação fora do equilíbrio. Na sua forma normalizada, as equações TDGL podem ser escritas como [67]:

$$\frac{1}{D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{2e}{\hbar} \mu \right) \psi + \frac{1}{\xi^2(T)} (|\psi|^2 - 1) \psi + \left( -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{j}_s = \sigma \left( -\nabla \mu - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{\hbar c^2}{8\pi e \lambda^2(T)} \text{Re} \left[ \bar{\psi} \left( -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right], \quad (2.41)$$

$$\rho = \frac{\mu - \phi}{4\pi \lambda_F^2}. \quad (2.42)$$

Completam a teoria, as equações de Maxwell que relacionam o potencial escalar  $\phi(\mathbf{r})$  e o potencial vetor  $\mathbf{A}$  com a densidade de corrente  $\mathbf{j}_s$  e a densidade de carga  $\rho$ .  $\mu$  é o potencial eletroquímico dividido pela carga eletrônica  $e$ , e  $\lambda_F$  é o comprimento de Fermi para a blindagem das cargas estáticas. Desprezamos agora a diferença entre  $\mu$  e  $\phi$  (supondo ambos pequenos [84], assim como as correntes de deslocamento, tomando  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}_s/c$ ). O parâmetro de ordem  $\psi$  e seu conjugado  $\bar{\psi}$  estão divididos por seu valor de equilíbrio na ausência de campos,  $\psi_\infty(T) = [mc^2/8\pi e^2 \lambda^2(T)]^{1/2}$ .  $D$  e  $\sigma$  são a constante de difusão e a condutividade no estado normal, respectivamente, e são dadas na teoria microscópica por [85]:

$$\frac{4\pi\lambda^2(T)\sigma}{c^2} = \frac{\xi^2(T)}{12D} = \frac{\pi\hbar}{96K_B T_c} \left[1 - \frac{T}{T_c}\right]^{-1} \equiv t_0 \left[1 - \frac{T}{T_c}\right]^{-1}, \quad (2.43)$$

onde  $t_0$  é o tempo de relaxação característico do parâmetro de ordem. Introduzimos agora uma transformação de calibre para o potencial escalar e o potencial vetor com o fim de preservar a invariança nas equações TDGL:

$$\psi \longrightarrow \psi e^{i\frac{2e}{\hbar c}\chi}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (2.45)$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi. \quad (2.46)$$

onde  $\chi$  é um campo escalar arbitrário. Escolhendo o calibre de potencial elétrico zero para todos os tempos, o eliminamos nas equações TDGL,  $\phi = 0$ . Para facilitar a análise dos resultados, colocamos as equações (2.40) e (2.41) na forma adimensional; o parâmetro de ordem  $\psi$  em unidades de  $\psi_\infty(T)$ ; as distâncias em unidades de  $\xi(0) = \sqrt{\hbar^2/4m\alpha(0)T_c}$ ; o tempo em unidades de  $t_0 = \pi\hbar/(96K_B T_c)$ ;  $H_e$  em unidades de  $H_{c2}(0) = (2\pi\xi(0)^2)^{-1} \Phi_0$ ;  $A$  em unidades de  $H_{c2}(0)\xi(0)$ ; e a temperatura  $T$  em

unidades de  $T_c$ . Finalmente, as equações TDGL podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} [i\nabla + \mathbf{A}]^2 \psi + (1 - T) (|\psi|^2 - 1) \psi, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (1 - T) \text{Re} [\bar{\psi} (-i\nabla - \mathbf{A}) \psi] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.48)$$

onde  $\eta = t_\psi/t_A$  é proporcional à relação existente entre os tempos característicos para  $\psi$  e  $\mathbf{A}$ , e foi determinada da teoria BCS para vários casos limites. Usamos  $\eta = 1$  se supomos um modelo de Drude para o estado normal,  $\eta = 12$  para supercondutores com impurezas magnéticas [83] e  $\eta = 5.79$  para supercondutores com acoplamento fraco [86]. Não obstante, a teoria microscópica é construída assumindo a interação entre elétrons tipo BCS a qual é determinante na escolha do valor de  $\eta$ . Por outro lado, as equações TDGL são mais gerais e sua forma não depende do modelo microscópico específico. Em nosso caso, consideramos que o parâmetro de ordem e o potencial vetor magnético têm o mesmo tempo de relaxação, logo  $\eta = 1$ . Essa suposição é aceitável aqui, já que nos interessamos em determinar a configuração do estado estacionário de vórtices e sua evolução temporal.

### 2.4.7 Validade da teoria de Ginzburg-Landau

A teoria GL é baseada na teoria de transição de segunda ordem de Landau. Logo, a energia livre pode ser expandida em potências de  $|\psi|^2$ , visto que próximo a  $T_c$ , a magnitude do parâmetro de ordem é pequeno. Porém, na presença de efeitos de curto alcance, onde a eletrodinâmica se torna não local, essa suposição não é válida. Gor'kov mostrou teoricamente que a expansão de Landau é válida para  $T \approx T_c$ , podendo obter as equações GL como um caso limite da teoria microscópica BCS. Analisamos agora os pontos necessários para a validade das equações GL:

*Tese de Doutorado*

1.  $\psi$  deve ser uma função que varia suavemente no espaço sob distâncias da ordem de  $\xi_0$ , onde  $\xi(T) \gg \xi_0$ . Usando a relação (2.25b) podemos ver que  $1 - t \ll \xi_0/l_{el}$ , e como  $\xi_0 \gg l_{el}$  no limite “sujo”, temos  $1 - t \ll 1$ . Resumindo, a temperatura deve estar próxima da temperatura crítica  $T_c$ ,  $t \approx 1$ .
2.  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{H}_e$  devem ser, igualmente, funções com variações suaves no espaço sob uma distância da ordem de  $\xi_0$ . De igual forma,  $\lambda(T) \gg \xi_0$ , e portanto, usando a relação (2.30b), temos que,  $1 - t \ll (\lambda(0)/\xi_0)^2$ , ou ainda  $t \approx 1$ .

É interessante notar aqui que, embora a teoria GL tenha sido deduzida usando argumentos para ser válida somente perto da transição entre os estados supercondutor/normal, ou seja, para  $t \approx 1$ , também é aplicável em um largo intervalo de temperaturas. De Gennes demonstrou que o modelo GL é válido para qualquer temperatura na presença de campos magnéticos fortes. Vários trabalhos compararam os dados obtidos das medições da corrente crítica em filmes finos de alumínio com os previstos pelas teorias BCS e GL, mostrando que as duas teorias prevêem os mesmos resultados para temperaturas tão baixas quanto  $T \sim 0.1T_c$ .

## 2.5 Supercondutores do tipo I e tipo II

Como notamos previamente na relação (2.34), os supercondutores podem ser classificados em duas categorias dependendo do valor do campo crítico. Supercondutores do tipo I com  $H_{c2} < H_c$ , ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ), apresentam uma transição supercondutora no campo crítico  $H_c$  e não apresentam estado misto. Supercondutores do tipo II com  $H_{c2} > H_c$  ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ), apresentam o estado misto entre os campos críticos  $H_{c1} < H_c < H_{c2}$ , caracterizado pela penetração parcial do fluxo magnético em unidades quantizadas de  $\Phi_0$  (vórtices). Em vários casos de amostras finitas,

aparece um terceiro campo crítico,  $H_{c3}$ . Na Figura 2.6, podemos notar que para

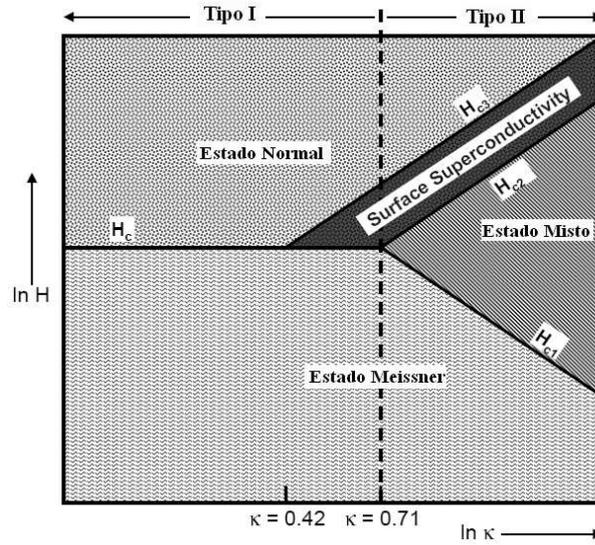


Figura 2.6: Dependências das características de um supercondutor semi-infinito em função do parâmetro GL

$0.42 < \kappa < 1/\sqrt{2}$  o supercondutor é do tipo I, mas agora o estado de Meissner não muda imediatamente quando aumentamos o campo magnético, tal como sucede quando  $\kappa < 0.42$ . Para  $H_c < H_e > H_{c3}$  o fluxo penetra na parte interna da amostra, permanecendo só uma pequena camada supercondutora na superfície. A supercondutividade é totalmente destruída quando o campo é igual ao terceiro campo crítico termodinâmico  $H_{c3}$  [87]. De igual maneira, em supercondutores do tipo II, na região  $H_{c2} < H_e < H_{c3}$ , a supercondutividade só existe em uma pequena camada nas bordas da amostra (ver Figura 2.7). Para amostras volumétricas  $H_{c3} \approx 1.69H_{c2}$ .

Ambos os tipos de supercondutores também têm diferenças no comportamento da magnetização como função do campo externo. A magnetização de um

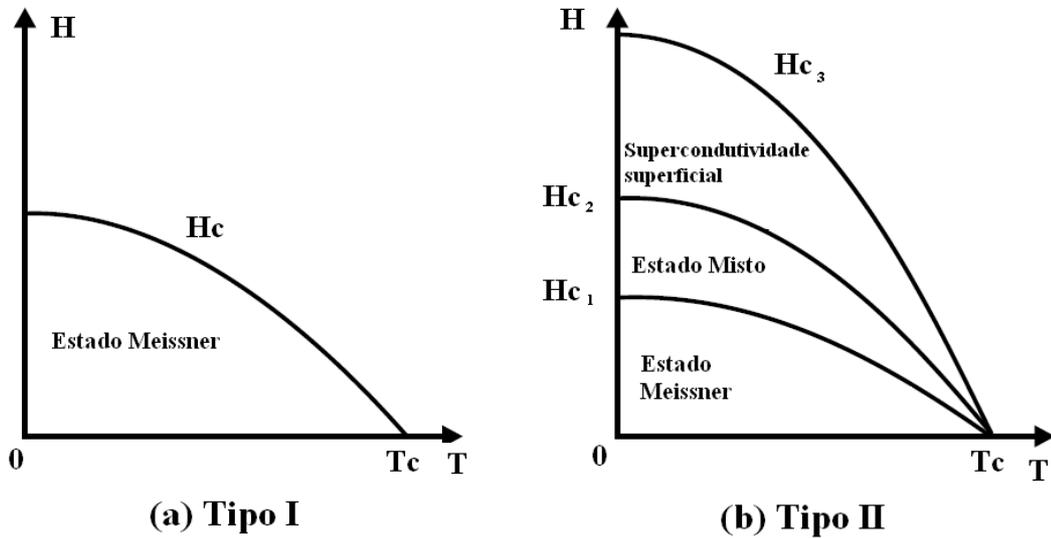


Figura 2.7: Diagrama de fase  $H - T$  para supercondutores volumétricos dos Tipos I e II

supercondutor está definida como  $4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{H}_e$ , onde  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{h} \rangle$ . Como já vimos anteriormente, para  $H_e < H_c$ , o supercondutor está no estado de Meissner e todo o fluxo magnético é expelido de seu interior,  $B = 0$  e  $-4\pi M = H_e$ . Para grandes campos o supercondutor está no estado normal,  $B = H_e$  e  $M = 0$ . Os supercondutores do tipo II permanecem no estado de Meissner até  $H_{c1}$  e  $-4\pi M = H_e$ . No estado misto  $H_{c1} < H_e < H_{c2}$  e a magnetização  $M$  diminui à medida que o campo aumenta até chegar a zero em  $H_{c2}$ . Este comportamento pode ser observado na Figura 2.8.

Também, a energia superficial é diferente para os supercondutores dos tipos I e II. A expulsão do campo aumenta a energia do supercondutor em  $H_c^2/8\pi$ . Espera-se então que energeticamente seja favorável o aparecimento de regiões normais no supercondutor. A criação destas regiões normais requer uma energia superficial negativa  $\sigma_{ns}$  (definida como a diferença de energia entre uma fase homogênea e uma

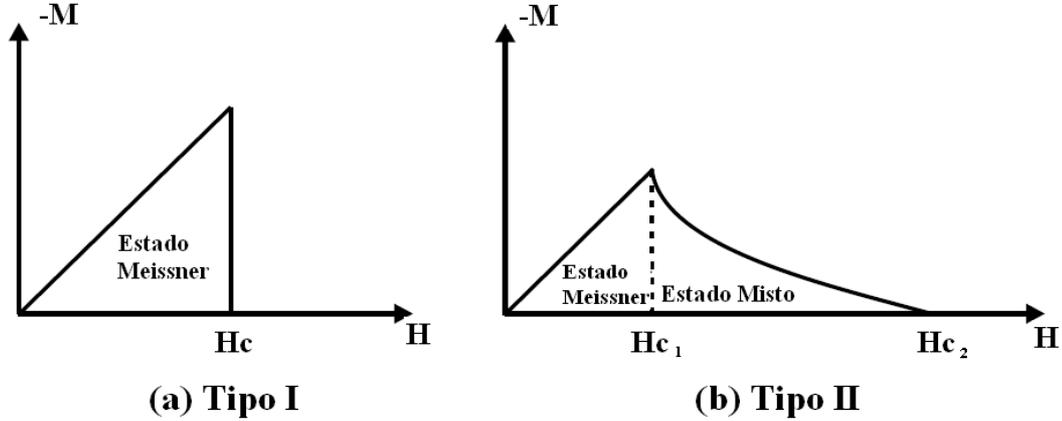


Figura 2.8: Magnetização em função do campo magnético aplicado para supercondutores volumétricos dos tipos I e II

fase mista), cuja contribuição exceda o ganho em energia magnética.  $\sigma_{ns} \sim H_c^2(\xi - \lambda)$  [82]. Assim,  $\sigma_{ns} > 0$ , para supercondutores do tipo I, e  $\sigma_{ns} < 0$  para supercondutores do Tipo II. Esta energia superficial leva à formação de domínios cujo tamanho mínimo deve corresponder ao limite quântico (vórtices).

## 2.6 Estado de vórtices

Podemos dizer que os vórtices na natureza são movimentos espirais ao redor de um centro de rotação, ou também, que são um escoamento turbulento giratório onde as linhas de corrente apresentam um padrão circular ou espiral. No caso da supercondutividade, um vórtice é um escoamento turbulento giratório onde as linhas de corrente apresentam um padrão circular e carregam um quantum de fluxo magnético. Aparecem naturalmente no estado misto, e podem ser vistos como singularidades existentes no superfluido eletrônico.

### 2.6.1 Quantização do fluxo magnético

O estado supercondutor é caracterizado por uma pseudo-função de onda analítica e univalorada,  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ . Como resultado, sua fase  $\varphi(\mathbf{r})$  só pode variar em múltiplos de  $2\pi$  ao percorrer uma volta completa em um circuito fechado  $\Sigma$ :

$$\oint_{\Sigma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi L, \quad (2.49)$$

onde  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Usando a relação (2.18a) e a definição de  $\lambda$ , podemos escrever o fluxo magnético através do circuito supercondutor como:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_{\Sigma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} - \lambda^2 \oint_{\Sigma} \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.50)$$

onde  $\Phi_0 = hc/2e = 2,07 \times 10^{-15} \text{ Tm}^2$  é o quantum de fluxo magnético. Temos:

$$\Phi = \Phi_0 L - \lambda^2 \oint_{\Sigma} \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (2.51)$$

Se o circuito for uma circunferência de diâmetro  $d \gg \lambda$  em um supercondutor macroscópico, então o segundo membro da relação (2.51) é desprezível, pois  $\mathbf{j}_s \approx 0$  ao longo de tal caminho. Neste caso:

$$\Phi = \Phi_0 L, \quad (2.52)$$

onde  $L$  pode ser chamado de *número quântico de fluxóide*, determinando o número de quanta de fluxo  $\Phi_0$  que atravessam uma determinada área. A quantização do fluxo magnético permite a medida precisa de campos magnéticos e suas variações através da contagem de quanta de fluxo magnético em SQUIDS.

### 2.6.2 Rede de vórtices de Abrikosov e estrutura do vórtice

Para minimizar a energia do sistema, as linhas de fluxo se arranjam em uma rede ordenada dentro do supercondutor. Abrikosov encontrou uma rede quadrada que minimizava a energia do sistema. Essa solução consistia em uma série de regiões normais paralelas ao campo externo, onde  $\psi$  decai assintoticamente a zero. Estas regiões normais têm a extensão de  $\sim \xi$ , e carregam um fluxo quantizado  $\Phi_0 = hc/2e$ . Este fluxo é garantido por correntes circulando ao seu redor que, naturalmente, decaem em um comprimento característico igual a  $\lambda$ . A densidade de fluxo tem seu valor máximo no centro do vórtice (ver Figura 2.9). Erros numéricos poderiam ter

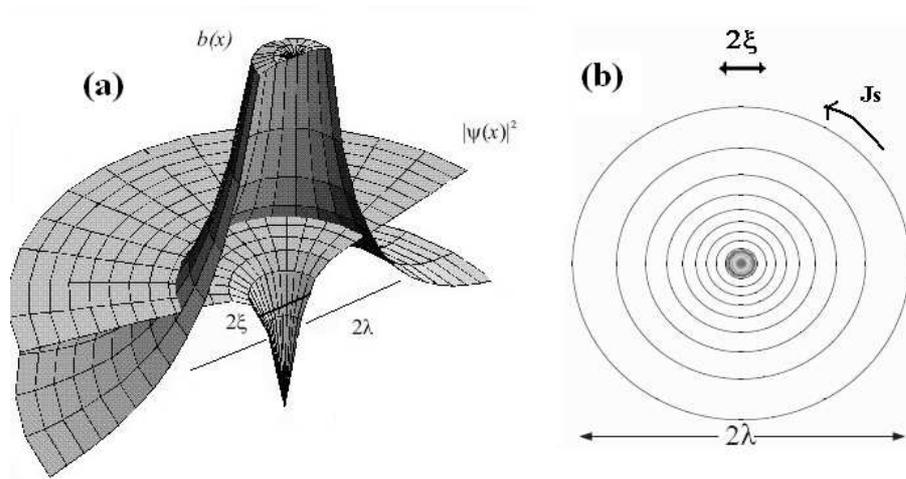


Figura 2.9: (a) Estrutura de um vórtice isolado mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem, (b) as correntes supercondutoras.

levado Abrikosov a concluir que a rede quadrada era energeticamente mais estável que a rede triangular. Não obstante, W. M. Kleiner [88] mostrou que o verdadeiro mínimo de energia é alcançado com uma rede triangular (rede de Abrikosov). É energeticamente mais favorável o aparecimento destes vórtices dentro do estado

supercondutor quando o campo aplicado atinge o valor do primeiro campo crítico  $H_{c1}$ . Como já sabemos, a natureza negativa da energia superficial do supercondutor em contato com uma região de fase normal  $\sigma_{ns}$ , induz a formação de múltiplas regiões normais (domínios), com a finalidade de maximizar a superfície e, assim, minimizar a energia livre.

No chamado limite de London,  $\xi \ll \lambda$  (correspondendo a supercondutores do tipo II extremo) podemos considerar que  $|\psi|^2$  é constante em todo o espaço exceto no seu núcleo, onde só a fase é relevante na variação espacial de  $\psi$ . Assim, tomando o rotacional de (2.18a) temos:

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 \left( \hbar \nabla \times \nabla \varphi - \frac{e^*}{c} \nabla \times \mathbf{A} \right) \quad (2.53a)$$

$$= \frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} (\nabla \times \nabla \varphi) - \frac{c}{4\pi \lambda^2} \mathbf{h}. \quad (2.53b)$$

Consideremos agora a presença de um vórtice  $i$  paralelo ao eixo  $z$ , localizado em  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  no plano  $xy$ . Então integrando a equação (2.53a), obtemos [89]:

$$\int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \nabla \varphi) - \frac{c}{4\pi \lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h} \quad (2.54a)$$

$$= \frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} \oint d\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi - \frac{c}{4\pi \lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h} \quad (2.54b)$$

$$= \frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} 2\pi L - \frac{c}{4\pi \lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}. \quad (2.54c)$$

Nesta última relação (2.54c), aplicamos a mesma análise que levou à relação (2.52), onde  $L$  representa o número de quanta de fluxo magnético carregado pelo vórtice. Assim, a vorticidade ou função fonte  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  de um vórtice é definida como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) L. \quad (2.55)$$

Usando a relação  $4\pi\mathbf{j}_s/c = \nabla \times \mathbf{h}$ , a equação de London (2.9) pode ser escrita como:

$$\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{h} - \mathbf{h} = -\hat{\mathbf{z}}\Phi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)L. \quad (2.56)$$

A equação (2.56) é a equação de London mais um termo de fonte devido a um vórtice localizado em  $\mathbf{r}_i$ , portando um fluxo  $L\Phi_0$  e com um raio infinitesimal representado pela função delta. A solução desta equação no espaço real, também pode ser resolvida por meio da transformada de Fourier, em coordenadas cilíndricas, considerando  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}h$ , e a função de Bessel modificada de ordem zero  $K_0$ . Temos:

$$\mathbf{h}_z(\mathbf{r}) = \frac{L\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\lambda} \right). \quad (2.57)$$

A função  $K_0(\mathbf{r}/\lambda)$  decai como  $e^{-r/\lambda}/\sqrt{r}$  para  $r \gg \lambda$  e diverge logicamente  $\ln(\lambda/r)$  para  $r \rightarrow 0$ . Verifica-se então que  $h_z$  diverge no núcleo do vórtice, divergência esta que tem origem na suposição que  $\xi \rightarrow 0$  na teoria de London. Fisicamente, a uma distância da ordem do raio do núcleo  $\xi$ ,  $|\psi| \rightarrow 0$ . No intuito de obter uma solução fisicamente mais aceitável, podemos introduzir um truncamento em  $r \sim \xi$ , eliminando a divergência em  $\mathbf{h}_z(\mathbf{r})$ , (ver por exemplo [90–92]), substituindo  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  por  $(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 + 2\xi^2)^{1/2}$  em (2.57). Assim, a equação 2.57 descreve estrutura do vórtice no limite de London em  $r > \xi$  e  $\lambda \gg \xi$ .

### 2.6.3 Energia de um vórtice

Próximo a  $H_{c1}$  é energeticamente favorável o aparecimento do primeiro vórtice em um supercondutor do tipo II. Podemos calcular a energia extra  $E_l$  por unidade de comprimento do vórtice e assim determinar o valor de  $H_{c1}$ . Por definição, em

$H_e = H_{c1}$ , a energia livre de Gibbs deve ser contínua. Assim:

$$H_{c1} = \frac{4\pi E_l}{\Phi_0} . \quad (2.58)$$

Baseando-nos na teoria de London, a energia de um sistema supercondutor é a soma da energia cinética do superfluido com a energia devida ao campo aplicado. Temos:

$$E_s = \frac{1}{2} \int n_s m^* \mathbf{V}_s^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} . \quad (2.59)$$

Usando  $\mathbf{j}_s = n_s e^* \mathbf{V}_s$  e a relação (2.6), obtemos:

$$E_s = \frac{2\pi}{c^2} \int \mathbf{j}_s^2(\mathbf{r}) \lambda^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (2.60a)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int [\lambda^2 |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2] d\mathbf{r} . \quad (2.60b)$$

Por meio de integração por partes podemos escrever a relação (2.60b) como:

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \int [\lambda^2 \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})) + |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2] d\mathbf{r} + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint [\mathbf{h}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2r . \quad (2.61)$$

A primeira integral do lado direito da equação (2.61) é igual a zero, já que não levamos em conta o núcleo do vórtice (veja a equação (2.56)). A integral de linha de (2.61) é resolvida usando dois caminhos circulares, um de raio  $r_1 \rightarrow \infty$  e outro de raio  $r_2 \rightarrow \xi$ , com conexões do círculo maior ao menor e vice-versa, ambos centrados no

núcleo do vórtice. Então, lembrando que  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = h(r)\hat{\mathbf{z}}$ , da equação (2.61) obtemos:

$$\begin{aligned} E_s &= -\frac{\lambda^2}{8\pi} \oint \left[ \mathbf{h}(\mathbf{r}) \times \left( \hat{\phi} \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2r \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \left[ h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{r=\xi} - \left[ h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{r=\infty}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

No primeiro termo usamos a expansão assintótica (2.57) para  $\xi \ll r \ll \lambda$ , podemos escrever:

$$h(r) \approx \frac{L\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ \ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right]. \quad (2.63)$$

O segundo termo do lado direito em (2.62) se anula, pois  $h(r \rightarrow \infty) = 0$ , de modo que a energia da linha do vórtice  $E_s = E_l$  é dada por:

$$E_l \sim \left[ \frac{L\Phi_0}{\lambda} \right]^2 \ln \kappa. \quad (2.64)$$

Podemos observar que  $E_l \propto L^2$ , pelo qual é energeticamente mais favorável ter um sistema de dois vórtices com um quantum de fluxo cada um, ao invés de um vórtice com dois quanta de fluxo. Portanto para  $L = 1$ , podemos reescrever a energia em outros termos físicos, usando a relação (2.29), como:

$$E_l \sim H_c^2 \xi^2 \ln \kappa. \quad (2.65)$$

Substituindo (2.58) em (2.65), encontramos o valor do campo para o qual o primeiro vórtice penetra:

$$H_{c1} = 4\pi \frac{E_l}{\Phi_0} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} = \frac{H_c}{\sqrt{2}\kappa} \ln \kappa. \quad (2.66)$$

Não obstante, para um tratamento mais rigoroso, é necessário levar em conta a interação entre os vórtices. Consideremos dois vórtices a uma distância  $r_{i,j} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \rho$  um do outro. Devido à distribuição local de correntes, o vórtice  $i$  sentirá a presença do vórtice  $j$ . Essa presença é determinada pela força de Lorentz  $\mathbf{f}_L^{(i)}$  que sente o vórtice  $i$  induzida pela corrente do vórtice  $j$ . A força de Lorentz por unidade de comprimento do vórtice é dada então por:

$$\mathbf{f}_L^{(i)} = \mathbf{j}_s^{(j)}(\mathbf{r}_i) \times \Phi_0 \hat{\mathbf{z}} = \left( \nabla \times \mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{r}_i) \right) \times \Phi_0 \hat{\mathbf{z}} . \quad (2.67)$$

Como  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = h(r)\hat{\mathbf{z}}$ , então  $\mathbf{j}_s = -(\partial h/\partial r)\hat{\phi}$ . Usando (2.57), a equação (2.67) pode ser escrita como:

$$\mathbf{f}_L^{(i)} = -\Phi_0 \frac{\partial h^{(j)}(\mathbf{r}_i)}{\partial r_i} \hat{\rho} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^3} K_1 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) \hat{\rho} , \quad (2.68)$$

onde  $K_1$  é a função de Bessel modificada de 1ª ordem. Podemos identificar a energia de interação entre os dois vórtices, como  $U(\rho) = \Phi_0 h(\rho)$  [81], ou:

$$\mathbf{f}_L = -\frac{\partial}{\partial r_i} [\Phi_0 h_j(\mathbf{r}_i)] \hat{\rho} = -\nabla [\Phi_0 h_j(\mathbf{r}_i)] = -\nabla [U(\rho)] , \quad (2.69)$$

onde

$$U(\rho) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) . \quad (2.70)$$

Assim, a energia total do sistema  $E_T$  é a soma das energias individuais de cada vórtice (relação (2.64)), mais a energia de interação entre os vórtices (relação (2.70)).

$$E_T = \sum_{i=1}^n E_{li} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n U(r_{i,j}) . \quad (2.71)$$

# Capítulo 3

## Método numérico

*“Naquele tempo, o mundo dos espelhos e o mundo dos homens não estavam isolados um do outro. Eles eram, por outro lado, muito diferentes - nem os seres, nem as formas, nem as cores coincidiam. Os dois reinos, o dos espelhos e o humano, viviam em paz. Entrava-se e saía-se dos espelhos. Uma noite, as pessoas dos espelhos invadiram a terra. A sua força era grande, mas após sangrentas batalhas as artes mágicas do Imperador Amarelo prevaleceram. Este repeliu os invasores, aprisionou-os nos espelhos e impôs-lhes a tarefa de repetir, como numa espécie de sonho, todos os atos dos homens. Privou-os da sua força e da sua figura e reduziu-os a simples reflexos servis. Contudo, um dia eles sacudirão essa letargia mágica... As formas começarão a despertar. Diferirão de nós a pouco e pouco, imitar-nos-ão cada vez menos. Quebrarão as barreiras de vidro e de metal e dessa vez não serão vencidos ”*

José Luis Borges, A Fauna dos Espelhos

Neste Capítulo descreveremos o método numérico de variáveis de ligação utilizado para a solução das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo

(TDGL). Mostraremos uma das formas de discretizar tanto as equações TDGL como as condições de contorno para nosso problema.

### 3.1 Método $\psi U$

Dentre tantas formas que existem para resolver numericamente um problema contínuo, uma é apresentá-lo como um problema no espaço discretizado que o aproxime da solução exata. Neste caso, reduz-se ao problema original quando os parâmetros que definem a discretização particular utilizada tendem a zero. Um método numérico menos versátil, porém mais rápido e mais fácil de programar que o Método de Elementos Finitos (FEM) [93–96] é o Método de Diferenças Finitas (FDM) [66]. A idéia básica deste método começa por definir uma malha retangular uniforme de  $N_i \times N_j$  elementos e dois vetores ortogonais no  $\mathbf{R}^2$  de módulos  $a_i, a_j$  (ver Figura 3.1). Restringiremos nossa análise ao domínio de forma retangular para que seja conveniente com malhas deste tipo e denominaremos de sítios os pontos desta malha. Logo, no método de diferenças finitas, reescrevemos as equações diferenciais transformando-as em equações de diferenças, substituindo as variáveis por seus valores nos sítios e suas derivadas por quocientes incrementais convenientes. De maneira que, ao fazer tender a largura da malha a zero recuperamos as equações diferenciais originais. Por conseguinte, escolhemos uma largura da malha pequena para resolver o problema algébrico resultante.

No caso de equações de campos de calibre (como as equações TDGL), como o resultado da aplicação direta do FDM os sistemas discretos que aproximam as equações diferenciais podem não ser invariantes de calibre para toda a extensão da malha. É possível que essa falta de invariância permaneça quando se extrapola os resultados ao contínuo [97]. Por isso, a alternativa é propor um sistema discreto que

apresente invariância de calibre. Este tipo de esquema dá lugar ao que se denomina teorias de calibre na rede (*lattice gauge theories*) [98]. No caso das equações TDGL

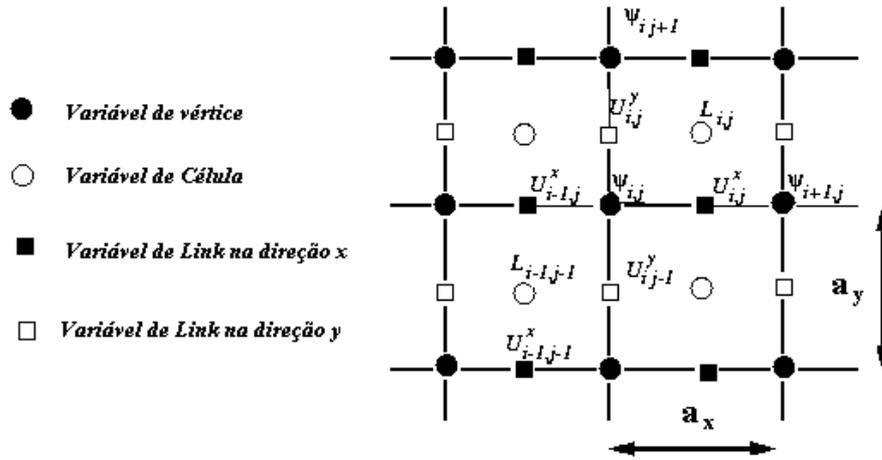


Figura 3.1: Esquema da malha definindo as variáveis discretas.

usaremos um sistema discreto similar aos do FDM, o qual permitirá uma descrição natural do sistema. As equações a serem discretizadas aqui são as equações TDGL (2.47):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} [i\nabla + \mathbf{A}]^2 \psi + (1 - T) (|\psi|^2 - 1) \psi, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (1 - T) \text{Re} [\bar{\psi} (-i\nabla - \mathbf{A}) \psi] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.2)$$

A característica fundamental que devemos levar em conta será a invariância do esquema discreto frente às denominadas transformações de calibre na malha (*lattice gauge transformation*), que constituem a versão discretizada da simetria de calibre que as equações TDGL satisfazem. Escrevemos novamente as relações (2.44), agora

na forma discreta:

$$\psi_{\mathbf{n}} \longrightarrow \psi_{\mathbf{n}} e^{i\chi_{\mathbf{n}}} , \quad (3.3)$$

$$\langle A_{\mu} \rangle_{(\mathbf{n}, \mathbf{n}+\boldsymbol{\mu})} \longrightarrow \langle A_{\mu} \rangle_{(\mathbf{n}, \mathbf{n}+\boldsymbol{\mu})} + \frac{\chi_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\mu}} - \chi_{\mathbf{n}}}{a_{\mu}} , \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{n} = (n_i, n_j)$  é um vetor que localiza os pontos da malha e  $\boldsymbol{\mu}$  é um dos vetores ortogonais que definem as translações da rede ( $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ ). O campo  $\chi$  é um campo escalar real contínuo e diferenciável em todo o domínio, no caso discreto definido nos sítios da malha.  $\psi$  é definido também nos sítios da malha, enquanto o potencial vetor  $\mathbf{A}$  é definido entre dois sítios vizinhos (ligações). Definiremos outras variáveis, denominadas variáveis de ligação, associadas às uniões entre sítios e cuja finalidade será a de substituir o potencial vetor na escrita das equações discretas de modo que permaneçam invariantes com relação às transformações de calibre. Temos:

$$U_{\mu, n} = \exp \left( -i \int_n^{n+\boldsymbol{\mu}} A_{\mu} d\mu \right) = \exp \left( -i a_{\mu} \langle A_{\mu} \rangle_{(n, n+\boldsymbol{\mu})} \right) , \quad (3.5)$$

com  $\mu = i, j$ . Para estas variáveis as transformações de calibre resultam em:

$$U_{\mu, n} \rightarrow U_{\mu, n} \exp \left( -i \left( \chi_{(n+\boldsymbol{\mu})} - \chi_n \right) \right) . \quad (3.6)$$

Podemos verificar a seguinte propriedade das variáveis de ligação:  $U_{-\mu, n+\boldsymbol{\mu}} = \bar{U}_{\mu, n}$ , onde  $\bar{U}$  é o complexo conjugado de  $U$ . Usando essa propriedade, definimos a seguinte relação:

$$U_{\alpha, n} = U_{i, n} U_{j, n+i} \bar{U}_{i, n+j} \bar{U}_{j, n} , \quad (3.7)$$

onde  $n$  indica o vértice inferior esquerdo de cada célula unitária (que corresponde

a área mínima definida por quatro pontos vizinhos da rede). É importante notar que a escolha do sistema discreto não é única, já que sempre podemos somar termos que tendam a zero quando tomamos o limite do contínuo. Para o caso das equações TDGL nos sítios no interior do domínio temos:

$$\psi_n(t+\Delta t) = \psi_n(t) + \frac{\Delta t}{\eta} \left[ \sum_{\mu} \frac{U_{\mu,n} \psi_{n+\mu} - 2\psi_n + \bar{U}_{\mu,n-\mu} \psi_{n-\mu}}{a_{\mu}^2} - (1-T)(\bar{\psi}_n \psi_n - 1) \psi_{i,j} \right], \quad (3.8)$$

$$U_n(t+\Delta t) = U_n(t) + \Delta t \left[ i(1-T) U_{\mu,n} \text{Im}(\bar{\psi}_n U_{\mu,n} \psi_{n+\mu}) + \epsilon_{\mu\mu^{\perp}k} \frac{\kappa^2}{a_{\mu^{\perp}}^2} U_{\mu,n} (U_{\alpha,n} \bar{U}_{\alpha,n-\mu^{\perp}} - 1) \right], \quad (3.9)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor totalmente assimétrico de Levi-Chivita, e o símbolo  $\mu^{\perp}$  denota a componente da malha normal a  $\mu$  e a  $k$ . Do lado esquerdo os valores das variáveis são dados no tempo  $t + \Delta t$ , e do lado direito no tempo  $t$ . Na próxima seção consideremos então, como cada um dos termos do sistema discreto escolhido aproxima os termos das equações diferenciais TDGL.

### 3.1.1 Método $\psi U$ para as equações TDGL

Para derivar a forma discretizada das equações TDGL, reescreveremos as definições (3.5) e (3.7) para o espaço bi-dimensional  $(x, y)$  considerando uma malha de  $N_x \times N_y$  células unitárias, de tamanho  $a_x \times a_y$  [99]- [100]), (ver Figura 3.1). Assim:

$$\mathcal{U}^x = \exp \left( -i \int_{x_0}^x A_x(\xi, y, t) d\xi \right), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{U}^y = \exp \left( -i \int_{y_0}^y A_y(x, \eta, t) d\eta \right), \quad (3.11)$$

$$U_{i,j}^x = \bar{U}_{i,j}^x \mathcal{U}_{i+1,j}^x, \quad (3.12)$$

$$U_{i,j}^y = \bar{U}_{i,j}^y \mathcal{U}_{i,j+1}^y, \quad (3.13)$$

Aqui  $U_{i,j}^x$  é a variável de ligação na direção  $x$  com  $1 \leq i \leq N_x$ ,  $1 \leq j \leq N_y + 1$  associado à ligação horizontal da malha. Similarmente,  $U_{i,j}^y$  é a variável de ligação na direção  $y$  com  $1 \leq i \leq N_x + 1$ ,  $1 \leq j \leq N_y$ , associado à ligação vertical da malha. Como já havíamos dito,  $\psi_{i,j}$  está definido nos sítios, com  $1 \leq i \leq N_x + 1$ , e  $1 \leq j \leq N_y + 1$ , e aproxima o valor do parâmetro de ordem na posição  $(x_i, y_j)$ . Considerando um campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_e(t)$  espacialmente uniforme, onde  $\mathbf{H}_e(t) = H_e(t)\hat{\mathbf{z}}$  e o campo local  $\mathbf{h} = (0, 0, h_z)$ , e utilizando as definições (3.10) - (3.13), podemos escrever cada termo das equações (3.1) e (3.2) como:

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2|_x \psi = -\bar{U}^x \partial_{xx}^2 (\bar{U}^x \psi) - \bar{U}^y \partial_{yy}^2 (\bar{U}^y \psi), \quad (3.14)$$

$$(-i\nabla - \mathbf{A})|_x \psi \equiv (-i\partial_x - \mathbf{A}_x)\psi = -i\bar{U}^x \partial_x (\bar{U}^x \psi), \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{h} = (\partial_y h_z, -\partial_x h_z, 0). \quad (3.16)$$

Uma aproximação de segunda ordem em  $(x_i, y_j)$  do termo (3.14) nos leva à seguinte relação:

$$\begin{aligned} (-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi|_{(x_i, y_i)} = & -\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} + \\ & -\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{a_y^2} + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calculando as derivadas em  $(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i)$   $(x_i, y_i + \frac{a_y}{2})$ , a relação (3.15) pode ser escrita como:

$$\text{Re} [\bar{\psi}(-i\partial_x - \mathbf{A}_x)\psi] |_{x_i + \frac{a_x}{2}, y_i} = \frac{1}{a_x} \text{Im}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) + \varepsilon(a_x^2), \quad (3.18a)$$

$$\text{Re} [\bar{\psi}(-i\partial_y - \mathbf{A}_y)\psi] |_{x_i, y_i + \frac{a_y}{2}} = \frac{1}{a_y} \text{Im}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i+1,j}) + \varepsilon(a_y^2), \quad (3.18b)$$

Deixamos introduzir uma variável auxiliar  $L_{i,j}$ , análoga à relação (3.7), com o objetivo de escrever de uma forma mais compacta os termos da equação (3.16). Esta variável nos indica a circulação local do potencial vetor em cada célula unitária dentro do domínio computacional, ou seja o fluxo local em cada célula:

$$\begin{aligned}
L_{i,j} &= U_{i,j}^x U_{i+1,j}^y \bar{U}_{i,j+1}^x \bar{U}_{i,j}^y \\
&= \exp(-i \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) \\
&= \exp\left(-i \int \int h_z dS\right) \\
&\approx \exp\left[-ia_x a_y h_z\left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j + \frac{a_y}{2}\right)\right][1 + \varepsilon(a_x^4 + a_y^4)].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Escrevendo a equação (3.16) em termos desta nova variável, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ h_z\left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i\right) \right] = \frac{1}{a_x a_y^2} (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1) + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2), \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ h_z\left(x_i, y_i + \frac{a_y}{2}\right) \right] = \frac{-1}{a_x^2 a_y} (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1) + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2). \tag{3.20b}$$

Aproximamos agora o termo da variação temporal do potencial vetor  $\partial_t \mathbf{A}$ , obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_x(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i, t)] = \frac{i}{a_x} \bar{U}_{i,j}^x \frac{\partial}{\partial t} U_{i,j}^x + \varepsilon(a_x^2), \tag{3.21a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_y(x_i, y_i + \frac{a_y}{2}, t)] = \frac{i}{a_y} \bar{U}_{i,j}^y \frac{\partial}{\partial t} U_{i,j}^y + \varepsilon(a_y^2), \tag{3.21b}$$

e por último, para a derivada temporal usamos o esquema de Euler:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\psi_n^{t+\Delta t} - \psi_n^t}{\Delta t}, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = \frac{i}{a_\mu U_{\mu,n}} \frac{U_{\mu,n}^{t+\Delta t} - U_n^t}{\Delta t}. \tag{3.23}$$

Finalmente, com a ajuda das relações (3.14 - 3.23) reescrevemos a primeira equação TDGL:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial t} = & \frac{U_{i,j}^x \psi_{i,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{\eta a_x^2} + \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{\eta a_y^2} \\ & - \frac{1-T}{\eta} (\bar{\psi}_{i,j} \psi_{i,j} - 1) \psi_{i,j} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para a segunda equação TDGL temos:

$$\frac{\partial U_{i,j}^x}{\partial t} = -i(1-T)U_{i,j}^x \text{Im}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) - \frac{\kappa^2}{a_y^2} U_{i,j}^x (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1) , \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial U_{i,j}^y}{\partial t} = -i(1-T)U_{i,j}^y \text{Im}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}) - \frac{\kappa^2}{a_x^2} U_{i,j}^y (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1) . \quad (3.25b)$$

Nesta tese tomamos  $\eta = 1$ . Não obstante, fizemos vários testes numéricos com  $\eta = 12$ , e as configurações de vórtices não se alteravam apreciavelmente, pelo qual consideramos tempos de relaxação iguais para o parâmetro de ordem e o potencial vetor.

### 3.1.2 Método $\psi U$ para as condições de contorno

As equações (3.24) e (3.25) não estão definidas nos sítios dos contornos. Uma vez calculados os valores para os sítios interiores, as variáveis nos sítios da superfície  $s$  são calculadas usando as condições de contorno (2.19) e (2.21).

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [(-i\nabla - \mathbf{A}) \psi] \Big|_s = \frac{i}{b} \psi \Big|_s , \quad (3.26)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}} \Big|_s = \mathbf{H}_e \times \hat{\mathbf{n}} \Big|_s . \quad (3.27)$$

Consideramos agora quatro casos particulares para o valor de  $b$ : para  $b \rightarrow \infty$ , para  $b \neq 0$ , para  $b = 0$  o que conduz a  $\psi|_s = 0$ , e o caso de condições de contorno periódicas.

1.  $b \rightarrow \infty$ , simulando uma interface supercondutor/vácuo, a qual significa que as supercorrentes não podem fluir fora do supercondutor. Assim, considerando a fronteira perpendicular ao eixo  $\mu$ , a condição (3.26) implica que  $(-i\partial_\mu - A_\mu)\psi = -i\bar{\mathcal{U}}^\mu \partial_\mu (\mathcal{U}^\mu \psi) = 0$ . Por sua vez, a condição (3.27) implica que  $L_{i,j} = \exp(-ia_x a_y H_e)$ . Descrevendo mais detalhadamente as condições de contorno, consideramos  $i = 1$  como a fronteira esquerda,  $i = N_x + 1$  a fronteira direita,  $j = 1$  a fronteira inferior e  $j = N_y + 1$  como a fronteira superior. Desta forma, podemos escrever a condição de contorno para o campo magnético:

$$\begin{aligned} U_{1,j}^y &= e^{ia_x a_y H_e} U_{1,j}^x U_{2,j}^y \bar{U}_{1,j+1}^x, & U_{i,1}^x &= e^{-ia_x a_y H_e} \bar{U}_{i+1,1}^y U_{i,2}^x U_{i,1}^y, \\ U_{N_x+1,j}^y &= e^{-ia_x a_y H_e} U_{N_x,j+1}^x U_{N_x,j}^y \bar{U}_{N_x,j}^x, & U_{i,N_y+1}^x &= e^{ia_x a_y H_e} \bar{U}_{i,N_y}^y U_{i,N_y}^x U_{i+1,N_y}^y. \end{aligned}$$

Para o parâmetro de ordem  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_{i,1} &= U_{i,1}^y \psi_{i,2}, & \psi_{1,j} &= U_{1,j}^x \psi_{2,j}, \\ \psi_{i,N_y+1} &= \bar{U}_{i,N_y}^y \psi_{i,N_y}, & \psi_{N_x+1,j} &= \bar{U}_{N_x,j}^x \psi_{N_x,j}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

o que nos indica que temos um sistema com condições de contorno fechadas em  $x$  e  $y$ , ou seja, uma amostra retangular finita no plano  $xy$  sem fluxo de corrente fora do material.

2.  $b \neq 0$ ;  $b > 0$  descreve uma interface supercondutor/metal, o que causará uma supressão da supercondutividade nas bordas da amostra. A interface supercondutor/supercondutor à maior temperatura crítica é modelada com a

condição  $b < 0$ , levando a um aumento da supercondutividade na fronteira. A condição de contorno para o campo magnético é igual a do caso 1, desde que satisfaça certas condições físicas, como considerar o fator de desmagnetização igual a zero. A condição de contorno para o parâmetro de ordem:

$$\psi_{1,j} = (1 - a_y b^{-1}) \psi_{2,j} U_{1,j}^x, \quad \psi_{N_x+1,j} = (1 - a_y b^{-1}) \psi_{N_x,j} \bar{U}_{N_x,j}^x. \quad (3.29)$$

Ao longo do eixo  $y$  impomos condições de contorno periódicas.

3. Para  $b = 0$ , esta condição de contorno de De Gennes se reduz à condição de contorno de Dirichlet  $\psi_{i,j}|_s = 0$  a qual, em nosso caso, representa uma amostra com grande quantidade de defeitos na superfície.
4. Por último, em algumas simulações consideramos condições de contorno periódicas em um dos eixos. Deste modo, exigimos somente que os sítios inferiores e superiores da malha tenham o mesmo valor. As condições de contorno periódicas para  $\psi$  e  $U$  são:

$$\begin{aligned} \psi_{i,1} &= \psi_{i,N_y}, & U_{i,1}^x &= U_{i,N_y}^x, \\ \psi_{i,N_y+1} &= \psi_{i,2}, & U_{i,N_y+1}^x &= U_{i,2}^x. \end{aligned} \quad (3.30)$$

No outro eixo, consideramos uma das condições de contorno anteriores.

Diante do exposto anteriormente, vemos que a suposição básica para a aplicabilidade deste método é que a quantidade  $a_\mu \langle A_\mu \rangle_{(n,n+\mu)}$  seja pequena (pelo menos uma ordem de magnitude menor que a unidade). Isto leva a requerer que a malha seja fina, isto é,  $a_\mu$  seja pequeno onde  $A_\mu$  é grande. Tal situação traz grandes restrições, principalmente no caso de supercondutores do tipo II, onde o campo pode penetrar em forma de vórtices, com os quais se alcançam grandes valores de  $h_z$  implicando

em grandes valores de  $a_\mu \langle A_\mu \rangle$ . Outra limitação na hora de aplicar o método surge ao escolher o passo temporal  $\Delta t$  no Método de Euler. Uma regra prática para a seleção de  $\Delta t$  [101] é:

$$\Delta t \leq \min\left\{\frac{\zeta^2 \eta}{4}, \frac{\zeta^2}{4\kappa^2}\right\}, \quad (3.31)$$

$$\zeta^2 = \frac{2}{a_x^{-2} + a_y^{-2}}.$$

Em nossas equações, a escolha do passo temporal está relacionada com o tamanho da malha e com o valor do parâmetro GL.

### 3.1.3 Expressões para a magnetização e a integral do fluxóide

À medida que as equações temporais são resolvidas, é conveniente monitorar algumas magnitudes características que nos permitam avaliar o desenvolvimento do programa computacional. Como tais magnitudes escolhemos a magnetização e a integral do fluxóide. Vejamos a expressão de cada uma delas.

A magnetização se calcula da forma usual [80]:

$$M_z(t) = \frac{\langle B_z \rangle - H_e}{4\pi} \approx -\frac{\sum_\alpha \arg(U_{\alpha,n})/a_i a_j - H_e}{4\pi}. \quad (3.32)$$

Calculamos a integral do fluxóide como a circulação do gradiente da fase do parâmetro de ordem. Temos:

$$L = \frac{1}{\Phi_0} \oint \nabla \phi ds \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Gamma} \arg(\bar{\psi}_\alpha \psi_{\alpha+1}), \quad (3.33)$$

onde  $\alpha$  percorre, no sentido positivo, a fronteira exterior do domínio supercondutor  $\Gamma$  ou qualquer outro domínio de interesse contido completamente dentro do super-

condutor.

Finalizamos, assim, a descrição do método de variáveis de ligação usado nesta Tese para o caso de domínios simplesmente conexos, o qual pode ser generalizado e aplicado para o caso de domínios multiplamente conexos <sup>1</sup> que serão considerados no Capítulo 5.

### 3.1.4 Especificação dos processadores

As simulações foram feitas em Processadores Intel Pentim IV de 3.0 Ghz e 1.0 GB de RAM. Os tempos computacionais usando só um processador, para cada simulação de cada uma das diferentes geometrias são dados na seguinte tabela:

Capítulo	Geometria	Tempo (minutos)
4	Amostra quadrada	228
4	Filme fino	465
5	Quadrado com dois defeitos	933
5	Quadrado com um defeito metálico	159
5	Anel quadrado	830
6	Filme	3150

---

<sup>1</sup>Um domínio  $D$  se diz simplesmente conexo quando todo contorno fechado em  $D$  não contém singularidades ou a função é analítica em todos os pontos. Caso contrário é multiplamente conexo.

## Capítulo 4

# Estado de vórtices em amostras supercondutoras

*“Para cada problema complexo existe uma solução simples...e está errada.”*

Umberto Eco.

Neste Capítulo, aplicamos as equações TDGL no estudo da dinâmica de vórtices em um supercondutor do tipo II utilizando o método numérico de variáveis de ligação descrito no Capítulo 3. Estudaremos o estado supercondutor de uma amostra quadrada e de um filme fino na presença de um campo magnético uniforme. Além disso, testaremos o método numérico utilizado, comparando resultados já conhecidos com os resultados obtidos em nossos cálculos.

## 4.1 Breve introdução

Como já mencionamos no Capítulo 2, em um supercondutor volumétrico, o campo magnético pode penetrar em forma de vórtices, cada um carregando um único quantum de fluxo. Estes vórtices se arranjam na forma de uma rede triangular e sua formação ocorre entre os dois campos críticos termodinâmicos  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ . No caso de amostras mesoscópicas, amostras cujo tamanho físico é da ordem do parâmetro de penetração e/ou de coerência, as propriedades supercondutoras como a corrente crítica e o campo magnético crítico, assim como a configuração dos vórtices, podem apresentar novas e interessantes propriedades. Por exemplo, tem-se observado a formação de estruturas em forma de cadeia em fitas supercondutoras [102], estado de vórtice gigante<sup>1</sup> em discos mesoscópicos [45]. Graças às modernas técnicas de nanofabricação, tem sido possível manipular os parâmetros supercondutores, levando a um crescente interesse dos grupos de pesquisa nesta área. As equações de Ginzburg-Landau tem sido uma forte ferramenta na análise dos fenômenos da supercondutividade. Mas as resoluções analíticas destas equações só podem ser obtidas em casos muito específicos. Na maioria dos casos, é necessário a solução numérica. Um grande salto nas técnicas de resolução numérica das equações TDGL foi dado com o desenvolvimento do teorema do Virial e da técnica de *Simulated Annealing* aplicados a sistemas supercondutores [103, 104]

## 4.2 Barreira superficial em amostras macroscópicas

É bem sabido que quando aumentamos o campo magnético desde zero até um valor determinado em uma amostra finita, o estado de Meissner é destruído em

---

<sup>1</sup>Vórtice carregando mais de um quantum de fluxo.

um campo  $H_1 \gg H_{c1}$ . Isto acontece devido à presença de uma barreira superficial de energia para a entrada e/ou saída dos vórtices. A barreira superficial em amostras macroscópicas é também conhecida muitas vezes como “barreira de Bean-Livingston” [105] [109]. Um vórtice próximo da interface do supercondutor sentirá duas forças atuando sobre ele: a força repulsiva - que aponta para dentro do supercondutor gerada pelas correntes de blindagem - e a força atrativa - que o vórtice sente devido à superfície. Pode-se entender esta última força como a interação do vórtice com sua imagem, necessária para garantir que a corrente transversal seja nula na superfície da amostra. Este argumento, baseado no modelo de London, leva ao resultado de Bean-Livingston para o valor do campo em que o primeiro vórtice penetra  $H_1 \approx (\sqrt{2}/2)H_c$ . Assim, a força atrativa da superfície e a força repulsiva das correntes de Meissner da barreira superficial de Bean-Livingston são as responsáveis pela forma como os vórtices entram e saem da amostra. Na realidade, as amostras apresentam rugosidades na superfície levando a  $H_{c1} < H_1 < H_c$  [109].

### 4.3 Formalismo teórico

No presente Capítulo, estudamos a magnetização e a configuração de vórtices para um supercondutor do tipo II para duas geometrias diferentes. A primeira, (a) um prisma de seção transversal quadrada (nos referimos a esta geometria abreviadamente como um supercondutor quadrado) e a segunda, (b) um filme fino (ver Figuras 4.1).

As amostras estão imersas em um meio isolante e na presença de um campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$ . Assumiremos o parâmetro de ordem e o campo magnético invariantes na direção do eixo  $z$ . A função de onda supercondutora satisfaz a condição de contorno  $\hat{n} \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})\psi|_s = 0$ , própria para uma inter-

face supercondutor/vácuo. A condição de contorno para  $\mathbf{A}$ , pode ser escrita como  $\mathbf{h}|_z = \nabla \times \mathbf{A}|_z = \mathbf{H}_e$  na superfície. As variáveis são inicializadas no estado de Meissner perfeito com  $\psi(\mathbf{r}, t = 0) = 1$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = 0) = 0$  para cada ponto no domínio supercondutor. Para garantir a convergência do método numérico escolhemos um passo temporal  $\Delta t = 0.015$  satisfazendo o critério (3.31). Usamos valores de  $\kappa = 2$  e temperatura  $T = 0.5T_c$ . Tomamos como condição inicial para um campo magnético  $H$  o estado final de  $\psi(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  do valor anterior,  $H - \Delta H$ . Para cada campo magnético calculamos a magnetização tomando a média temporal da magnetização  $M(t)$ . Temos:

$$4\pi M(t) = \frac{a_x a_y}{N_x N_y} \sum_{i,j} h_z(i, j, t) - H_e \quad (4.1)$$

$$M = \frac{\Delta t}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} M(t),$$

onde  $t_0 = 0$  e  $t_f = 2$ . Estes valores indicam o número de passos temporais usados para cada  $\Delta H_e$ . Resolvemos então o sistema de equações (3.24) e (3.25) onde os efeitos de ruído por flutuações térmicas foram desprezados <sup>2</sup>.

## 4.4 Configuração de vórtices em supercondutores quadrados

Quando estudamos supercondutores mesoscópicos, ou seja, amostras com alguma de suas dimensões comparáveis ao tamanho do comprimento de coerência  $\xi(T)$  e/ou de penetração  $\lambda(T)$ , observamos que suas propriedades termodinâmicas, assim como

<sup>2</sup>É possível estender a dinâmica TDGL adicionando termos de ruído para  $\psi$  e para  $\mathbf{A}$  nas equações (3.24) e (3.25).

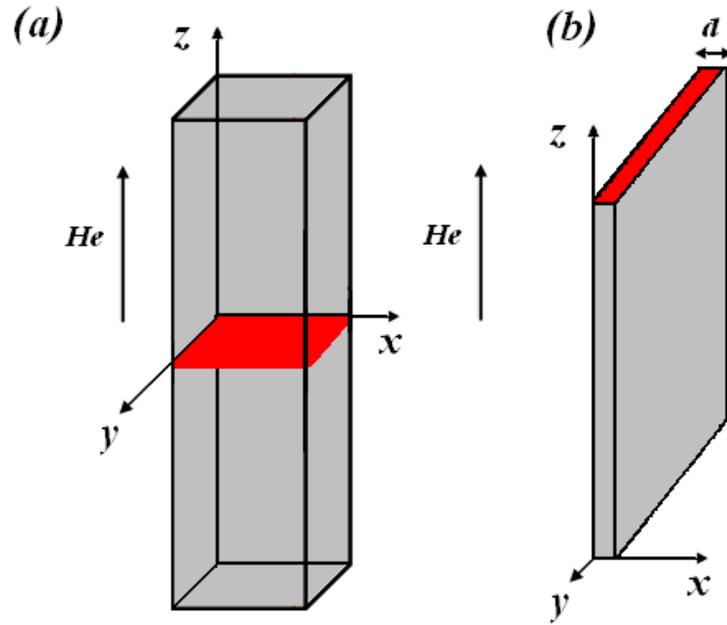


Figura 4.1: (a) Prisma e (b) filme fino supercondutor.

sua configuração de vórtices e em muitos casos a própria estrutura do vórtice, mudam drasticamente. Muitos trabalhos têm sido feitos em amostras mesoscópicas quadradas. Entre muitos deles citamos por exemplo, os grupos de Chibotaru e Melnikov, [29, 35], observaram que a formação de estruturas de vórtice-antivórtice aparecem para preservar a simetria da amostra. Assim, encontraram para campos próximos a  $H_{c3}$ . Um estado de vorticidade  $L = 3$ , com quatro vórtices nas diagonais e um antivórtice no centro é muito sensível a qualquer distorção da simetria da amostra (defeitos ou flutuações).

Neste primeiro caso consideraremos um supercondutor quadrado imerso em um campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$  perpendicular à sua superfície  $xy$ . A amostra está rodeada por um meio isolante ou pelo vácuo. Logo, usamos as condições

de contorno descritas pelas equações (3.28). O procedimento numérico é o seguinte: a amostra é dividida em uma malha quadrada com  $N_x \times N_y = 64 \times 64$  células, cujo espaçamento entre elas é igual a  $a_x = a_y = 0.5$ . Portanto, temos um quadrado com dimensões  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ .  $H_e$  é aumentado e diminuído linearmente no tempo desde 0 até 1, e logo depois diminuído de 1 até 0, com pequenos intervalos  $\Delta H = 10^{-6}$ .

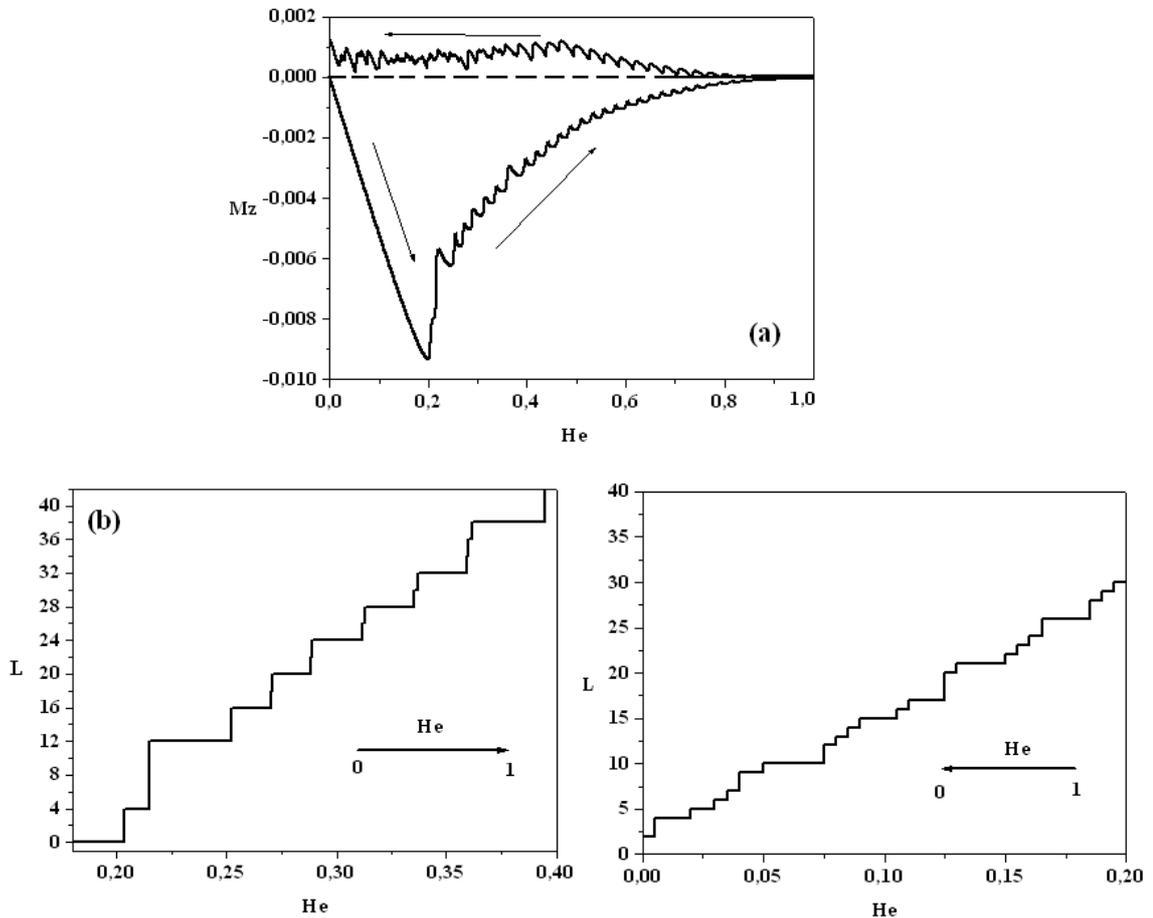


Figura 4.2: (a) Curva de magnetização em função de  $H_e$ . Número de vórtices em função do campo magnético aplicado para (b)  $H_e$  aumentado desde 0 até 1 e (c)  $H_e$  diminuído desde 1 até 0, para uma amostra de  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$  para  $T = 0.5$ .

A curva de magnetização na Figura 4.2 exibe uma série de picos, os quais indicam a entrada ou saída de vórtices da amostra. Para  $H_e > 0.4$  a supercondutividade é fortemente suprimida no interior da amostra, mas permanece nas bordas. Os valores (absolutos) menores na magnetização sugerem uma barreira menor para os vórtices que saem da amostra, do que para os que entram nela. Assim, leva a ter, dependendo da história de como se aplique o campo magnético externo, um número maior de vórtices na amostra, quando o campo é diminuído em detrimento a quando é aumentado (ver Figuras 4.4 e 4.3). Isto, para um determinado  $H_e$ . Podemos ver isto nas Figuras 4.2 (b-c), onde mostramos o número de vórtices  $L$  em função do campo aplicado, quando este é aumentado desde 0 até 1, e diminuído de 1 até 0. Ao diminuir o campo magnético, a barreira superficial atua contra a expulsão dos vórtices e o sistema tem uma resposta paramagnética  $M > 0$  em grande parte da curva de magnetização [110].

Na Figura 4.3, mostramos a distribuição do módulo do parâmetro de ordem para vários valores do campo magnético aplicado. As regiões azuis e vermelhas representam valores do módulo do parâmetro de ordem desde 0 até 1. Para campos aplicados menores que (a)  $H_e = 0.20$  a amostra permanece no estado Meissner; para (b)  $H_e = 0.205$  a instabilidade do sistema permite a entrada de quatro vórtices com os consequentes saltos na magnetização. Entrada similar de vórtices acontece em (c)  $H_e = 0.215$  com (12 vórtices), (d)  $H_e = 0.252$  (16 vórtices), (e)  $H_e = 0.336$ , (f)  $H_e = 0.40$ , (g)  $H_e = 0.50$ , (h)  $H_e = 0.60$ . Vale notar que na Figura 4.3 (f) para  $H_e = 0.40$  temos uma situação não estável com quatro pares de núcleos de vórtices muito próximos. Neste ponto a supercondutividade começa a desaparecer no interior da amostra. O arranjo de vórtices cada vez fica mais denso quando novos vórtices entram, até que o parâmetro de ordem é totalmente suprimido na região

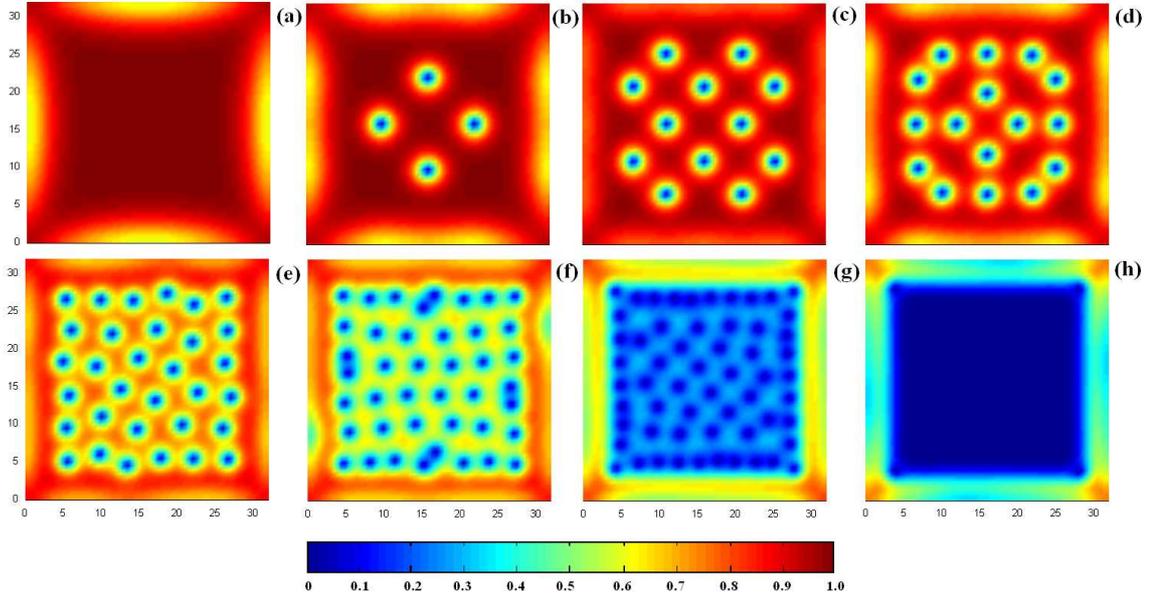


Figura 4.3: Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ ,  $T = 0.5$ , para diferentes campos magnéticos aplicados: (a)  $H_e = 0.20$ , (b)  $H_e = 0.205$ , (c)  $H_e = 0.215$ , (d)  $H_e = 0.252$ , (e)  $H_e = 0.336$ , (f)  $H_e = 0.40$ , (g)  $H_e = 0.50$ , (h)  $H_e = 0.60$ . A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores.

central e a supercondutividade persiste somente nas bordas (veja Figura 4.3 h).

Para poder testar a eficácia do método numérico utilizado, comparamos nossos resultados com o trabalho teórico de Buscaglia e colaboradores [100] de onde tomamos a base do programa computacional, concluindo que nossos dados concordam totalmente com os publicados. Além disso, fizemos uma relação qualitativa com o trabalho de Sangbum e colaboradores [49]. Nesse trabalho apresentam-se algumas configurações de vórtices para uma amostra quadrada de lado  $L = 4.65\lambda$ , menor que a nossa que é de  $32\xi(0) = 16\lambda(0)$ . Similarmente ao nosso caso, Sangbum reporta que os vórtices entram na amostra em número de 4, como consequência de que os vórtices são criados nos pontos médios de cada borda do quadrado. Vale notar que

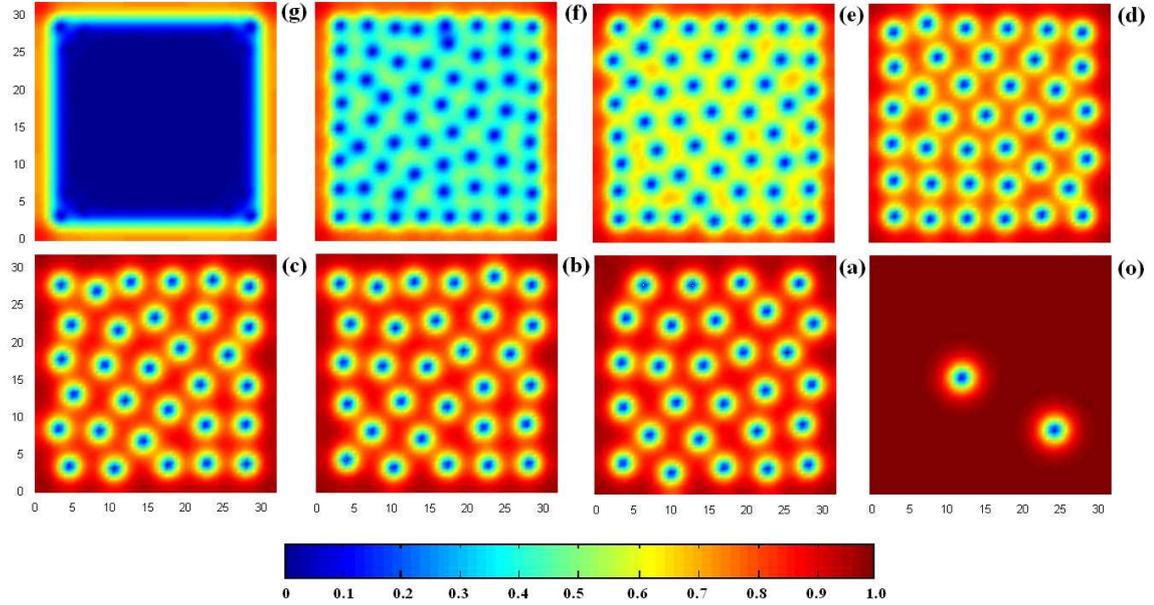


Figura 4.4: Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ ,  $T = 0.5$ , para diferentes campos magnéticos aplicados em um processo de histerese: (g)  $H_e = 0.50$ , (f)  $H_e = 0.40$ , (e)  $H_e = 0.336$ , (d)  $H_e = 0.252$ , (c)  $H_e = 0.215$ , (b)  $H_e = 0.205$ , (a)  $H_e = 0.20$ , (o)  $H_e = 0.0$ . A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores.

em nossos cálculos obtemos transições de  $L$  a  $L + 4$ , mas a transição  $L = 4$  a  $L = 8$  não ocorre. Uma possível causa disso, é o valor da taxa do tempo de relaxação do sistema, o qual não permite ao sistema relaxar o suficiente para tornar possível a entrada dos próximos 4 vórtices. Sendo assim, o tempo de relaxação é um fator determinante na obtenção destas configurações. Outra possível causa é o tamanho da amostra, a qual permitiria a entrada de 2 vórtices a mais por cada borda. Por outro lado, nas Figuras 4.2(c) e 4.4 vemos a persistência de 2 vórtices dentro da amostra em um campo constante  $H_e = 0.0$ . Verificamos que os vórtices saem da amostra quando deixamos a simulação submetida a mais outros 35000 passos temporais.

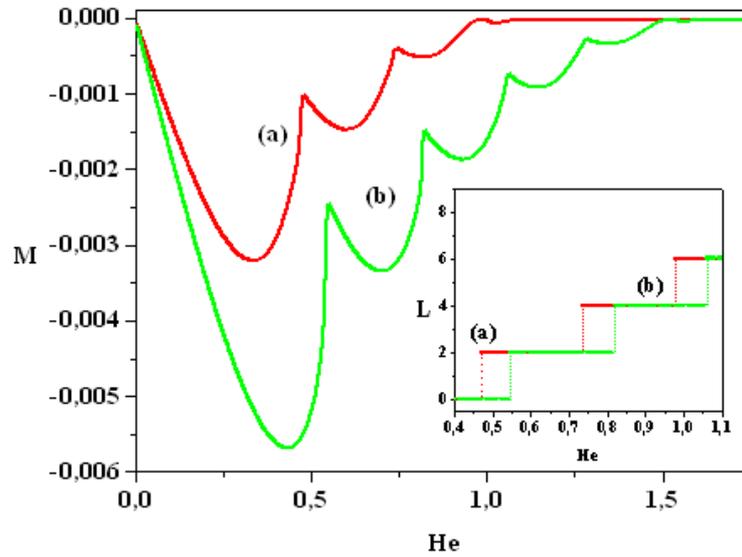


Figura 4.5: Curvas de magnetização e número de vórtices (inserção) em função do campo magnético para uma amostra de lados  $8\xi(0) \times 8\xi(0)$ , para (a)  $T = 0.5$  e (b)  $T = 0.25$ .

Podemos mostrar brevemente a importância do tamanho da amostra sobre a configuração de vórtices fazendo a figura do número de vórtices e a magnetização em função do campo magnético para um quadrado de  $8\xi(0) \times 8\xi(0)$ , para  $T = 0.5$  e  $T = 0.25$  (ver Figura 4.5). Neste caso, ocorrem transições  $L \rightarrow L + 2$  vórtices, concordando qualitativamente com o trabalho de Sardella e colaboradores [111] e diferindo pouco nos valores do campo nos quais ocorre a entrada dos vórtices. Existem diferenças marcantes com trabalhos anteriores [29, 112], onde a transição entre estados de diferente vorticidade se dá de  $L$  a  $L + 1$ . Igualmente, naqueles casos podemos atribuí-las ao tempo de relaxação, ao tamanho da amostra e aos parâmetros utilizados na simulação como valores de  $\kappa$  e temperatura.

Na seguinte tabela resumimos as transições  $\Delta L$  para campos baixos e amostras de diferentes tamanhos:

Tamanho/ $\xi(T)$	Transições	Referência
$7.090 \times 7.090$	$L \rightarrow L + 1$	Baelus [112]
$8 \times 8$	$L \rightarrow L + 2$	Sardella [111]
$8 \times 8$	$L \rightarrow L + 2$	Esta Tese
$18.6 \times 18.6$	$L \rightarrow L + 4$	Sangbum [49]
$22.6 \times 22.6$	$L \rightarrow L + 4$	Esta Tese

Vemos claramente que com a diminuição do tamanho da amostra, obtemos um menor ingresso do número de vórtices.

## 4.5 Configuração de Vórtices em um Filme Supercondutor

Nesta seção consideraremos um filme fino imerso em um campo magnético  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$  aplicado perpendicular à superfície  $xy$ , ou seja, paralelo ao filme. Igualmente ao caso anterior, a amostra está rodeada por um meio isolante. Para simular este filme tomamos condições de contorno periódicas (relação (3.30)) no eixo  $y$  e fixas no eixo  $x$ , que atravessa a espessura do filme. Construímos uma malha retangular de  $N_x = 24$  e  $N_y = 160$  células com espaçamento entre elas  $a_x = a_y = 0.5$ . Podemos visualizar esta geometria como um filme fino de largura  $d = 12\xi(0)$  e infinito no plano  $zy$ .  $H_e$  é aumentado linearmente no tempo desde 0 até 1 com pequenos intervalos  $\Delta H = 2 \times 10^{-7}$ , onde 5 milhões de passos temporais são requeridos para simular o processo.

Com os parâmetros utilizados pudemos determinar os valores dos campos críticos para  $T = 0.5$ :  $H_{c1} = 0.04$ ,  $H_{c2} = 0.5$ , para domínios volumétricos ou infinitos e  $H_{c3} = 0.85$ .

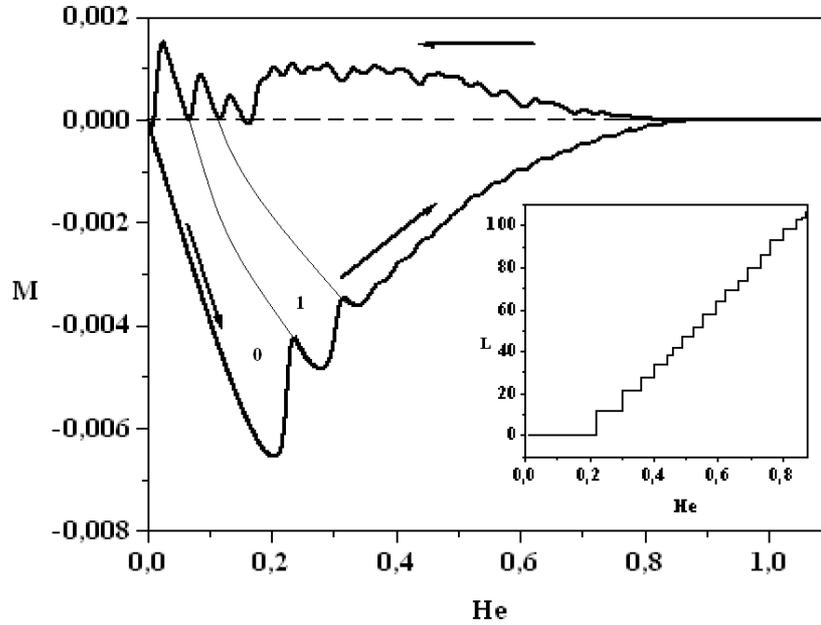


Figura 4.6: Curva de magnetização e número de vórtices em função do campo magnético aplicado para um filme fino a  $T = 0.5$ . As linhas na curva de magnetização são só guias para uma melhor identificação das fases estruturais. O número entre estas linhas indicam o número de cadeias de vórtices da respectiva fase.

A curva de magnetização, ilustrada na Figura 4.6, exhibe, similarmente ao caso da amostra quadrada, uma série de picos. Os primeiros máximos ocorrem para  $H_e = 0.204, 0.281, 0.340$ . Logo após, observamos um rápido decréscimo em  $|M|$  e uma entrada de fluxo magnético ocorre na amostra em  $H_e = 0.222, 0.301, 0.362$ . Na inserção da Figura 4.6, podemos identificar a entrada de fluxo magnético na amostra assim como as sucessivas descontinuidades na curva de magnetização e observar a entrada do número de vórtices  $L$  em função do campo magnético aplicado. O módulo do parâmetro de ordem é mostrado na Figura 4.7 para vários valores de  $H_e$ . Para  $H_e < 0.221$  a amostra permanece no estado de Meissner conforme podemos observar na Figura 4.7a. Doze vórtices ( $12/80 = 0.15/\xi(0)$  vórtices) entram na

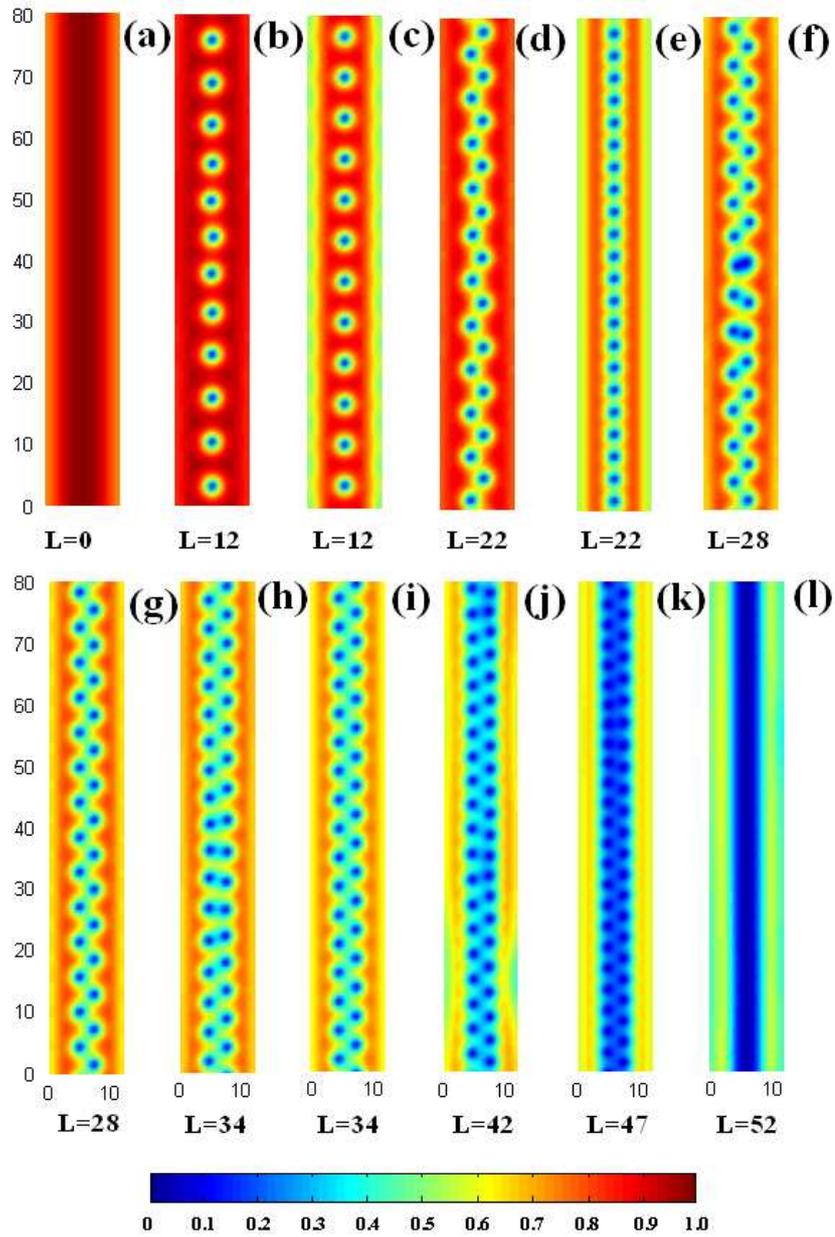


Figura 4.7: Módulo do parâmetro de ordem indicando a vorticidade  $L$  para o filme fino em (a)  $H_e = 0.2$ , (b) 0.23, (c) 0.30, (d) 0.31, (e) 0.35, (f) 0.37, (g) 0.38, (h) 0.41, (i) 0.42, (j) 0.47, (k) 0.50 e (l) 0.52. A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores.

amostra em  $H_e = 0.222$  acomodando-se em uma cadeia linear. O número de vórtices permanece constante até  $H_e = 0.3$  (ver Figuras 4.7 b,c), mas em (c) o estado não é estacionário, e podemos dizer que o sistema caminha para a formação de uma cadeia mais densa de vórtices. Uma nova entrada de vórtices ocorre em  $H_e = 0.31$  com 22 vórtices ( $22/80 = 0.275/\xi(0)$  vórtices) formando uma estrutura instável em forma de rede triangular (ver Figura 4.7 d). O sistema tem uma configuração estável em  $H_e = 0.35$  com 22 vórtices ( $0.275/\xi(0)$  vórtices), mas agora formando uma cadeia linear (ver Figura 4.7 e). Em  $H_e = 0.37$  ocorre uma nova entrada de 6 vórtices (ver Figura 4.7 f), atingindo uma configuração estável em  $H_e = 0.38$  com 28 vórtices ( $0.35/\xi(0)$  vórtices). Desta vez, duas cadeias arranjam-se em uma rede triangular (ver Figura 4.7 g), permanecendo neste estado até  $H_e = 0.40$  (ver Figura 4.7 h). Em  $H_e = 0.42$  (ver Figura 4.7 i) outros 6 vórtices entram na amostra formando agora duas cadeias lineares (com  $0.525/\xi(0)$  vórtices), configuração que permanece constante até  $H_e = 0.47$  (Figura 4.7 j) onde 8 vórtices entram fazendo com que as cadeias fiquem cada vez mais densas. Aumentando um pouco mais o campo magnético, vemos que o parâmetro de ordem na região central é praticamente zero para  $H_e > 0.51$ , onde a supercondutividade sobrevive somente na superfície da amostra (ver Figura 4.7 l). Na inserção da Figura 4.6 podemos observar que a partir de  $H_e \sim 0.85$  a amostra está no estado normal. Este resultado está inteiramente de acordo com o valor do terceiro campo crítico termodinâmico para uma amostra semi-infinita  $H_{c3}(T = 0.5) = 0.85$ .

Para filmes mesoscópicos, os vórtices penetram no filme paralelamente ao campo magnético aplicado e se acomodam inicialmente no plano equatorial do filme, onde minimizam sua energia. Com o posterior aumento do campo se forma uma rede triangular de vórtices paralelos às superfícies [113]. Guimpel e colaboradores [114]

mostraram experimentalmente que em filmes com espessura  $d \approx \lambda$  existia uma transição de fase onde esta cadeia se partia em duas cadeias com o conseqüente aparecimento de um pico extra na curva de magnetização. Posteriormente, vários trabalhos experimentais [115,116] e teóricos [117] mostraram que em filmes finos com  $d \leq \lambda$  estas duas cadeias se dividiam em três para campos mais altos e a medida que se aumentava o campo apareciam novas cadeias, estabelecendo-se assim, que para filmes finos existia uma seqüência de entrada de uma cadeia de vórtices por vez em determinados valores de campo, denominados de campos de *matching*.

Experimentalmente tem se preparado amostras mesoscópicas com superfícies e bordas com alto grau de pureza [42,118]. Estes sistemas apresentam um ciclo de histerese nas curvas de magnetização [119] relacionado a uma barreira que causa um atraso na entrada de vórtices quando o campo aplicado é aumentado e um atraso na saída quando o campo é diminuído [120,121]. Os estados obtidos são, portanto, estados metaestáveis.

Observando a curva de magnetização na Figura 4.6, os picos representam a transição entre diferentes cadeias de vórtices nos chamados campos de *matching*, semelhantes aos que acontecem em cilindros infinitos com seção transversal quadrada, como no caso anterior ou seção reta retangular [122] ou circular [123]. A primeira cadeia de vórtices entra de uma vez, igual que a segunda, mas esta última fica mais densa aos poucos, com a posterior entrada de vórtices individuais. Neste processo, a formação de uma nova cadeia permite a entrada de mais vórtices no filme, já que a densidade de vórtices em cada cadeia diminui. Tal fato pode ser observado na queda de  $|M|$  nas curvas de magnetização. Em toda amostra finita os vórtices têm que superar a barreira de superfície para atingir o interior da amostra. Esta barreira pode ser suficientemente alta para impedir que o vórtice chegue ao

mínimo energético no interior da amostra. Deste modo, existe um atraso na penetração dos vórtices quando o campo aumenta. Os estados gerados são estados metaestáveis saturados, ou seja, quando uma transição finalmente ocorre, o novo estado já se encontra saturado dificultando a penetração dos vórtices. Agora, se o campo magnético decresce, a saída de vórtices faz com que o sistema minimize sua energia. Agora a barreira superficial atua contrária à saída dos vórtices atrasando o processo. Assim para um campo magnético determinado, se obtém um número de cadeias maior que para o caso de equilíbrio termodinâmico. Este estado se chama de estado metaestável superresfriado [110, 120]. Pelo exposto anteriormente, podemos dizer que qualitativamente nossos cálculos estão em boa concordância com a literatura existente.

## 4.6 Resumo

Analizamos teoricamente a configuração de vórtices e a magnetização em função do campo magnético aplicado para duas geometrias: um prisma supercondutor e um filme fino. Constatamos que nossos resultados estão em boa concordância com aqueles reportados na literatura permitindo-nos usar o programa computacional para os próximos trabalhos. Poderíamos ter ainda determinado estados estacionários nestas amostras incluindo centros de aprisionamento ou incluir flutuações térmicas suficientemente grandes.

Notamos que o arranjo dos vórtices ocorre de forma diferente nas diferentes geometrias. No caso da amostra quadrada, se começamos desde um estado de Meissner perfeito, aumentando o campo gradativamente, o número de vórtices e suas configurações de equilíbrio são governadas pela simetria quadrada da amostra. Podemos dizer que as configurações encontradas em nosso cálculo, em muitos casos,

são verdadeiros estados estacionários, já que para determinados intervalos de campo magnético não observamos mudanças no parâmetro de ordem supercondutor. A entrada dos vórtices ocorre com  $\Delta L = 4$  devido a simetria quádrupla da amostra, ao seu tamanho e à superfície perfeitamente livre de defeitos.

No caso do filme, os vórtices se arranjam em cadeias paralelas à sua superfície. À medida que aumentamos o campo magnético a cadeia fica cada vez mais densa, levando ao aparecimento de uma segunda cadeia e a uma posterior depreciação do parâmetro de ordem no interior da amostra para  $H_e = 0.5H_c(0)$ , permanecendo somente uma supercondutividade superficial para  $H_e > 0.5H_c(0)$ .

## Capítulo 5

# Configurações de vórtices em amostras quadradas multiplamente conexas

*“E agora, José? A festa acabou, a luz apagou, o povo sumiu, a noite esfriou, e agora, José? E agora, você?”*

Carlos Drummond de Andrade - José

Neste Capítulo estudaremos o estado supercondutor de uma amostra quadrada com um ou dois defeitos na presença de um campo magnético uniforme. Estas geometrias favorecerão diferentes arranjos de vórtices e farão com que certas configurações de vórtices sejam mais estáveis que no caso de uma amostra livre de defeitos.

## 5.1 Breve introdução

A teoria de Ginzburg-Landau prevê a nucleação de linhas de fluxo magnético em um supercondutor homogêneo do tipo II. Cada linha carrega um quantum de fluxo  $\Phi_0$  caracterizada pela presença de um centro normal do tamanho da ordem do comprimento de coerência  $\xi(T)$ . Para aplicações práticas em materiais supercondutores é conveniente controlar o movimento dos vórtices, ou também, fixar sua posição. Isto pode ser feito incluindo defeitos no material, por exemplo: rede de buracos mesoscópicos, rede de dipolos magnéticos ou de inclusões metálicas. Estas estruturas aumentam consideravelmente a corrente crítica de filmes supercondutores [24, 124]. Em supercondutores mesoscópicos, os vórtices podem ser confinados pela própria geometria da amostra, ou seja, mesmo sem defeitos ou inclusões, a corrente crítica pode ser alta (ver capítulo 4).

## 5.2 Formalismo teórico

No presente Capítulo, estudaremos a configuração de vórtices para um prisma com seção transversal quadrada para três diferentes geometrias: um quadrado supercondutor com (a) dois defeitos quadrados iguais, (b) um defeito retangular preenchido de material metálico e (c) um anel supercondutor. As amostras estão imersas em um meio isolante e na presença de um campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$ . Consideraremos o parâmetro de ordem e o campo magnético invariantes na direção do eixo  $z$ . A função de onda supercondutora satisfaz à condição de contorno  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})\psi|_{s1} = i/b|_{s1}$  na borda dos defeitos ( $s1$ ). Consideraremos os casos em que  $b \rightarrow \infty$  e  $b > 0$ . A condição de contorno para  $\mathbf{A}$ , pode ser escrita como  $\mathbf{h}|_z = \nabla \times \mathbf{A}|_z = H_e$  na superfície externa e  $\mathbf{h}_{zi} = \nabla \times \mathbf{A}_i|_z = H_i$  na superfície dos

defeitos.  $H_i$  indica o campo magnético dentro dos defeitos. As variáveis são inicializadas no estado Meissner perfeito, com  $\psi(\mathbf{r}, t = 0) = 1$  no material supercondutor e  $\psi(\mathbf{r}, t = 0) = 0$  nos buracos.  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = 0) = 0$  para cada ponto no domínio. Usamos valores de  $\kappa = 2$  e uma temperatura  $T = 0.5$  para as geometrias (a) e (b). Para a geometria (c), obtivemos curvas isotérmicas de magnetização para diferentes valores de  $\kappa$  e de temperatura.

### 5.3 Configuração de vórtices para uma amostra com dois defeitos

G. R. Berdiyrov e colaboradores [125] estudaram o estado de vórtices e suas transições para um quadrado mesoscópico contendo entre um e quatro defeitos. Eles observaram que devido aos diferentes tipos de geometria (dependendo do número de defeitos) existia uma diferença qualitativa na nucleação do estado supercondutor e um comportamento oscilatório no diagrama de fase  $H - T$  causado pelas diferentes configurações estáveis de vórtices nos centros de aprisionamento. Além disso, reportaram o fato interessante que, para um quadrado com quatro defeitos (quadrados de lado  $L = 7\xi$  com buracos de tamanho  $W = 2\xi$ ) cada segundo vórtice é localizado no defeito oposto, onde o primeiro vórtice se localizou. Esta regra se repete até ter um vórtice com  $L = 3$  em cada buraco. O 13<sup>o</sup> fluxóide se posiciona no centro do quadrado. Quando aparece o 14<sup>o</sup> fluxóide os dois vórtices se posicionam nos dois buracos, repetindo a regra para a futura entrada de fluxóides até que, em  $L = 17$ , a supercondutividade na região central é destruída e em  $L = 19$  a amostra passa para o estado inteiramente normal.

Em nosso caso, a amostra está rodeada por um meio isolante ou pelo vácuo

e cada buraco é preenchido de igual forma pelo vácuo. Logo usamos as condições de contorno (3.28). Neste caso, a amostra é dividida em uma malha quadrada de  $N_x = N_y = 160$  células com espaçamento entre elas  $a_x = a_y = 0.2$ . Portanto, analisamos uma amostra quadrada de dimensões  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ . Cada buraco tem dimensões  $10\xi(0) \times 10\xi(0)$ , estando localizados em  $x_1^1 = 26a_x$ ,  $x_2^1 = 76a_x$ ,  $x_1^2 = 86a_x$ ,  $x_2^2 = 136a_x$  e  $y_1^1 = y_1^2 = 26a_y$ ,  $y_1^2 = y_2^2 = 76a_y$ . Onde  $(x_j^i, y_j^i)$  é a posição do defeito  $i$ .  $H_e$  varia desde 0 até 1 com pequenos intervalos  $\Delta H = 2.5 \times 10^{-7}$ . Para garantir a convergência do método numérico escolhemos um passo temporal  $\Delta t = 0.0005$ . Examinaremos o desenvolvimento temporal do estado supercondutor integrando as equações TDGL a partir do estado de Meissner perfeito.

A magnitude do parâmetro de ordem  $\psi$  e sua fase  $\Delta\phi$  são ilustrados na Figura 5.1 para o supercondutor com dois buracos. Quando uma porção supercondutora é retirada da amostra, a simetria quadrada é destruída e os buracos formados atuam como centros de aprisionamento. Nas Figuras 5.1(a-f), os valores da fase próximos a zero estão dados por regiões azuis e próximos a  $2\pi$  por regiões vermelhas. A fase nos permite determinar o número de vórtices em uma determinada região, através do cálculo da variação da fase em um caminho fechado contornando esta região. Se a vorticidade nessa região é  $L$ , então a fase muda um valor  $\Delta\phi = 2\pi L$ . Na Figura 5.1 (a) não temos vórtices, a amostra se encontra no estado Meissner. Na Figura 5.1 (b), os quatro primeiros fluxóides se posicionam simetricamente nos buracos sendo dois em cada buraco. Embora os vórtices não sejam visíveis no desenho da magnitude do parâmetro de ordem, existe uma variação na fase ao redor de cada buraco igual a  $\Delta\phi = 4\pi$ , já que existem duas transições de vermelho para azul, mostrando que cada buraco tem um vórtice duplamente quantizado (ou um vórtice gigante, cada um com  $L = 2$ ). A entrada dos vórtices ocorre através dos pontos da superfície exterior da

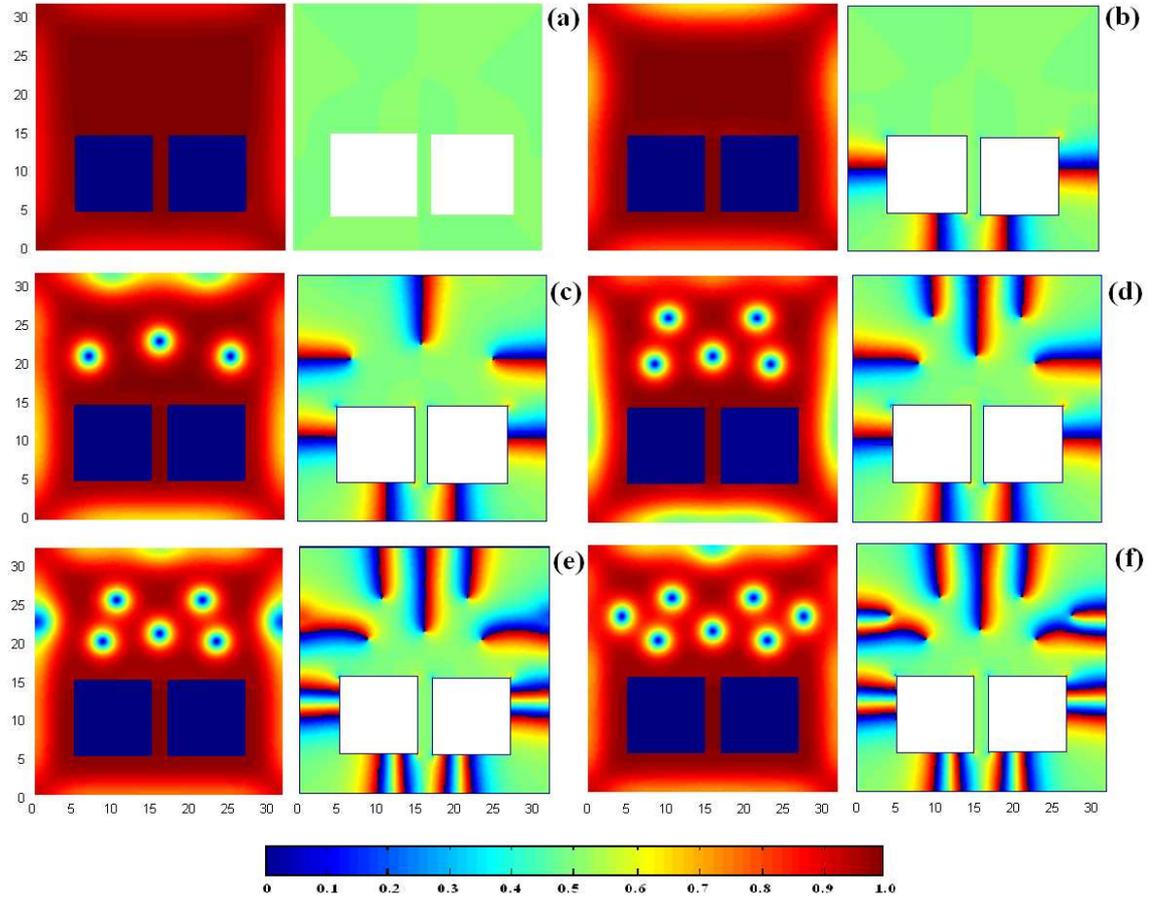


Figura 5.1: Magnitude do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para um quadrado mesoscópico com dois buracos com (a)  $L = 0$ , (b)  $L = 4$ , (c)  $L = 7$ , (d)  $L = 9$ , (e)  $L = 13$ , (f)  $L = 15$  respectivamente para  $H_e = 0.150, 0.200, 0.225, 0.235, 0.245$  e  $0.250$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores.

amostra mais próximos dos buracos. Se aumentamos o campo magnético, mais três vórtices, com um quantum de fluxo cada, aparecem na amostra, tal como é mostrado na Figura 5.1(c), desta vez localizados na região supercondutora oposta à posição dos buracos. Para  $L = 9$ , Figura 5.1(d), dois vórtices adicionais se posicionam na

região supercondutora. Para  $L = 13$ , Figura 5.1(e), dois vórtices a mais entram na amostra. Mas, desta vez, um em cada buraco. Na Figura 5.1(f) quatro fluxóides estão em cada buraco e sete na região supercondutora. Vemos portanto que o número de saturação  $L_s$  de vórtices aprisionados por buraco depende fortemente do campo externo. Isto está em contraste com o valor  $n_s$  conhecido para buracos isolados em filmes supercondutores infinitos [126]. De acordo com esta referência, os vórtices entram nos buracos até o limite  $n_s = r/2\xi(T)$ , onde  $r$  é o raio do buraco. Para  $H = n_s\phi_0$  existem  $L = n_s$  vórtices em cada buraco. Para  $H \geq n_s\phi_0$  os vórtices adicionais se localizam nas regiões intersticiais (supercondutoras). Na tabela abaixo, mostramos, para um determinado campo magnético, o número de vórtices dentro dos buracos e na região supercondutora (ver Figura 5.1).

$H_e$	fluxóides no buraco	vórtices fora
0.200	L=2	L=0
0.225	L=2	L=3
0.235	L=2	L=5
0.245	L=4	L=5
0.250	L=4	L=7

Note que, considerando  $r \sim 5\xi(0)$ , teríamos  $n_s \cong 2-3$  vórtices por buraco. Contudo, observamos  $L = 4$ , por exemplo, em  $H_e = 0.245$ . A diferença entre este resultado e o esperado para supercondutores infinitos se dá devido esta amostra ter dimensões da ordem de  $\xi(0)$ . Isto modifica a barreira de potencial ao redor de cada buraco, alternando, conseqüentemente, o número de saturação de fluxóides por buraco.

Berdiyrov e colaboradores [125] encontraram para uma geometria igual a do presente trabalho, mas de menor tamanho, as seguintes configurações: os dois

primeiros vórtices se localizam dentro dos buracos como era de se esperar, o terceiro na região supercondutora e a entrada do quarto vórtice forma uma configuração simétrica deles, dois dentro dos buracos e dois na região supercondutora. O quinto e o sexto vórtices se posicionam em cada buraco; o sétimo, o oitavo e o nono na região supercondutora; para  $L = 10$  existem dois vórtices em cada buraco e os outros na região supercondutora. Existem diferenças com relação as nossa configurações, isto devido ao tamanho da amostra e em ambos estudos o número de vórtices aumenta com o campo magnético. Na Figura (5.2), apresentamos resultados para valores de campo ainda maiores. Para  $H_e = 0.315$ , (ver Figura 5.2(a)) temos 17 vórtices na região supercondutora, estando 14 deles na região supercondutora de maior área e três vórtices na região supercondutora embaixo dos defeitos. Além disso, temos seis vórtices em cada buraco (ver Figura 5.2(a)). Incrementando um pouco mais o campo magnético encontramos uma nova configuração com o mesmo número de vórtices,  $L = 29$ . Mas desta vez 14 vórtices estão localizados na região supercondutora de maior área, um vórtice com  $L = 7$  em um buraco e outro com  $L = 8$  no outro buraco (ver Figura 5.2(b)). Nas Figuras 5.2 (d-e) podemos observar que os vórtices que se posicionam na região supercondutora formam uma região normal retangular.

Os vórtices ainda podem ser claramente distinguidos um do outro (ver Figuras 5.2(c-d)) na região supercondutora menor abaixo dos defeitos. Para estados com vorticidade maior, Figuras 5.2(d-f), os vórtices estão muito próximos uns dos outros na região oposta à posição dos buracos. Um retângulo gigante de supercondutividade desprezível é observado, com uma região de grande vorticidade dentro dele, já que os vórtices estão sobrepostos (estado normal). Para campos magnéticos próximos a  $H_{c2}(0)$ , a amostra alcança o estado normal, exceto para a região supercondutora entre os buracos e nos cantos do quadrado. É obvio que se aumentamos

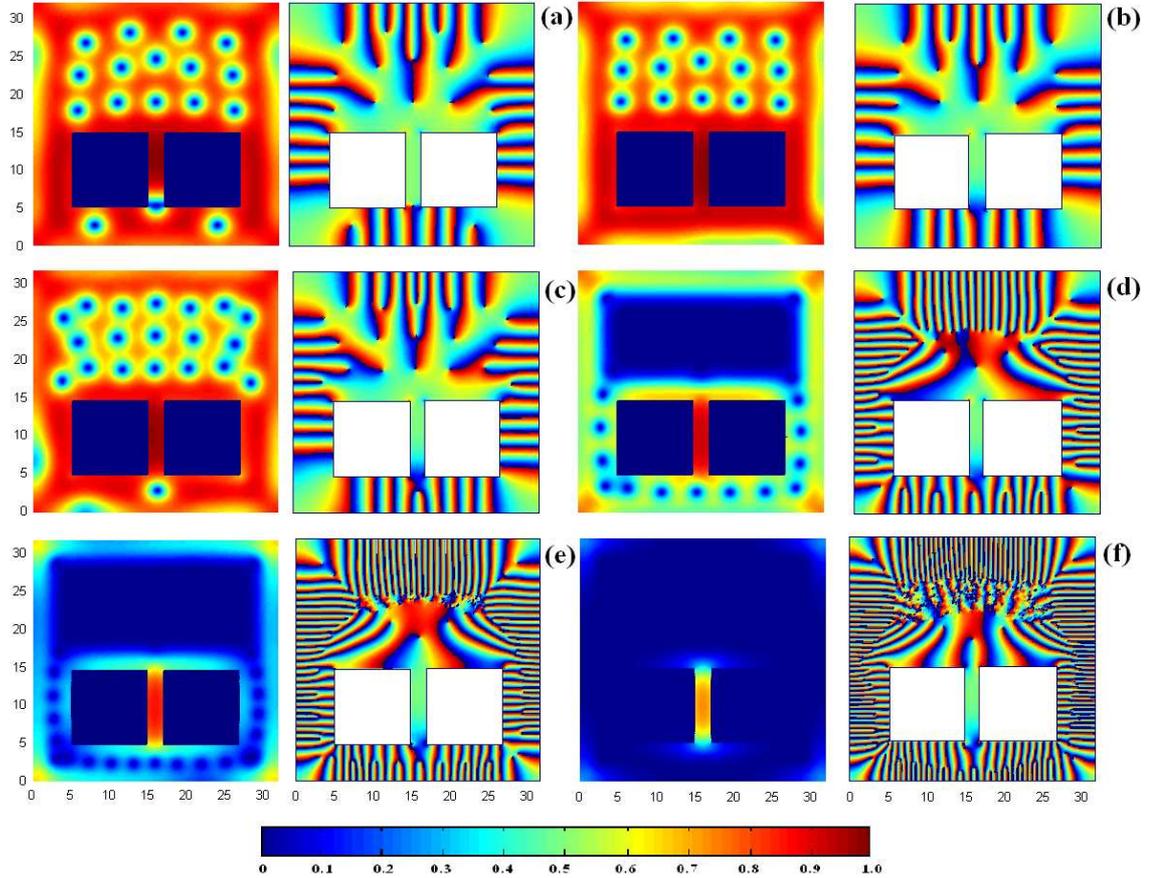


Figura 5.2: Magnitude do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para um quadrado mesoscópico com dois buracos com (a)  $H_e = 0.315$ , (b) 0.336, (c) 0.360, (d) 0.585, (e) 0.750 e (f) 0.965. A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores.

mais o campo próximo ao campo de transição, os cantos e a região entre os defeitos, também serão normais. O fato pelo qual  $|\psi|^2 \neq 0$  na região entre os defeitos nesta geometria, pode ser devido ao igual número de vórtices em cada buraco. Portanto, a corrente supercondutora originada pelo vórtice dentro de cada buraco, tem igual intensidade e sentido oposto na região entre eles, obtendo assim uma corrente re-

sultante igual a zero,  $j \sim 0$ , entre os defeitos e, por sua vez,  $j \sim \nabla\phi - \mathbf{A}$ , então  $|\psi|^2 \neq 0$ . Para campos magnéticos maiores é de se esperar que a supercondutividade fosse destruída na região entre estes defeitos. Além disso, se a simetria dos defeitos fosse quebrada, exemplo, defeitos de tamanho ou geometria diferente, se esperaria que a supercondutividade seja destruída na região entre os defeitos, já que poderia não existir um igual número de vórtices em cada defeito com a resultante supercorrente não nula nessa região.

É interessante notar que o supercondutor quadrado livre de defeitos passa para o estado normal em campos um pouco maiores que  $H_e \sim 0.60$  (ver Figura 4.3) somente permanecendo a supercondutividade superficial. No caso da amostra com dois defeitos, isto ocorre em campos  $H_e \sim 0.96$  (excetuando a região entre os defeitos, ver Figura 5.2). Assim, a inclusão de defeitos na amostra aumenta o campo de transição supercondutor/normal [125].

## 5.4 Configuração de vórtices para uma amostra com uma inclusão metálica

É bem conhecido que dois filmes supercondutores, com temperaturas críticas diferentes, depositados em dupla camada podem, por efeito de proximidade<sup>1</sup> [54], apresentar respostas magnéticas diferentes daquelas que exibiriam na temperatura em que se encontram, quando isolados.

<sup>1</sup>Podemos explicar brevemente este efeito da seguinte maneira, os elétrons estão correlacionados em pares de Cooper devido ao alcance da interação atrativa entre eles. O alcance da interação atrativa é da ordem do tamanho da célula unitária da rede cristalina ( $\sim 1\text{\AA}$ ) e a distância de correlação para os pares de Cooper é da ordem de  $10^4\text{\AA}$ . Assim, os pares de Cooper podem estender-se dentro de uma região na qual a interação entre elétrons não é atrativa. Assim, quando um filme de material supercondutor está em contato com um filme de material no estado normal, a formação de pares de Cooper pode estender-se em ambas camadas.

Na presente geometria a amostra está rodeada por um meio isolante e o defeito é preenchido por um material metálico ( $b > 0$ ). Logo usamos as condições de contorno dadas pelas equações (3.29). A amostra é dividida em uma malha quadrada de  $N_x \times N_y = 64 \times 64$  células com espaçamento entre elas  $a_x = a_y = 0.5$ . Portanto, temos um quadrado com dimensões  $32\xi(0) \times 32\xi(0)$ . O defeito retangular tem dimensões  $15\xi(0) \times 20\xi(0)$ , localizado em  $x_1 = 23a_x$ ,  $x_2 = 53a_x$ ,  $y_1 = 13a_y$ ,  $y_2 = 53a_y$ .  $H_e$  varia desde 0 até 1 com pequenos intervalos iguais a  $\Delta H = 10^{-6}$ . Escolhemos um passo temporal  $\Delta t = 0.015$  e o tempo de relaxação neste caso é de  $t_f = 10.000$  passos temporais.

A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase são graficados na figura 5.3 para o intervalo de campo entre  $H_e = 0.10$  e  $H_e = 0.17$ . O buraco é preenchido por um material metálico caracterizado pelo valor  $b = 0.1$ . A Figura 5.3 (a) mostra  $|\psi|$  para o intervalo  $H_e = 0.10$  e  $H_e = 0.17$ . Para todos os campos dentro deste intervalo a distribuição de  $|\psi|$  se assemelha à mostrada na Figura 5.3(a). Ou seja,  $|\psi|$  não nos fornece qualquer informação sobre a presença de vórtices no sistema.

Vemos claramente que neste diagrama não temos informação qualquer do número de fluxóides que possam estar dentro da inclusão. Agora, as Figuras 5.3 (b)-(f) mostram claramente as transições de estados de vorticidade  $L$  para  $L + 1$  dentro da amostra. Quando o defeito é colocado na amostra, a simetria quadrada é desfeita e o buraco atua como um centro de aprisionamento, havendo preferência pela ocupação de vórtices no buraco. Se aumentamos um pouco mais o campo magnético aplicado, observamos que vórtices aparecem na região supercondutora. Nas Figuras 5.4 (a)-(f) ilustramos o aparecimento de um vórtice adicional na região supercondutora, embora mais vórtices entrem no defeito. O número de vórtices dentro do defeito é muito grande e poderíamos ter informação a respeito de quantos

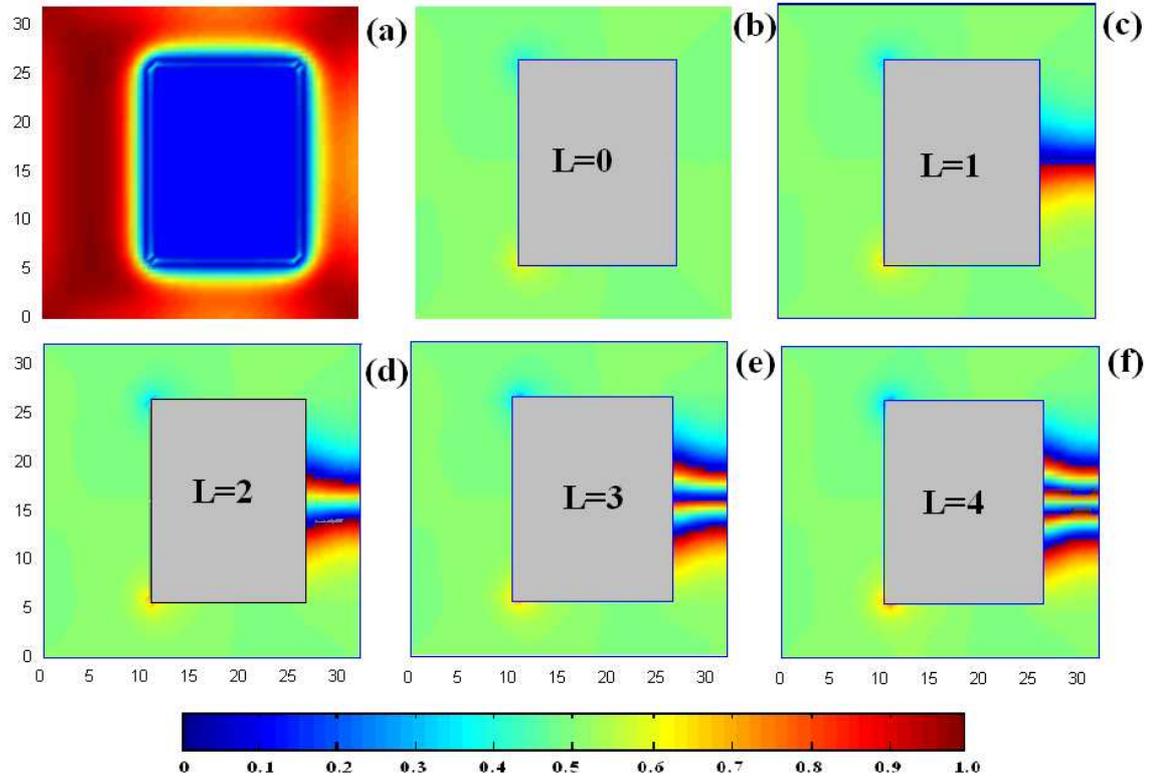


Figura 5.3: (a) Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem e de sua fase para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ . (a) módulo do parâmetro de ordem para o intervalo  $H_e = 0.10 - 0.17$  e a fase do parâmetro de ordem para (b)  $H_e = 0.10$  (c)  $H_e = 0.14$ , (d)  $H_e = 0.15$ , (e)  $H_e = 0.16$  e (f)  $H_e = 0.17$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores.

deles existem medindo a variação da fase em um caminho aoredor dos buracos. Fazendo a malha mais fina talvez possamos conseguir uma melhor visualização dos vórtices. Vale notar aqui que nosso interesse consiste em conhecer a configuração dos vórtices na região supercondutora e não dentro do defeito. Por outro lado, os efeitos da inclusão metálica sobre as propriedades da região supercondutora são levados

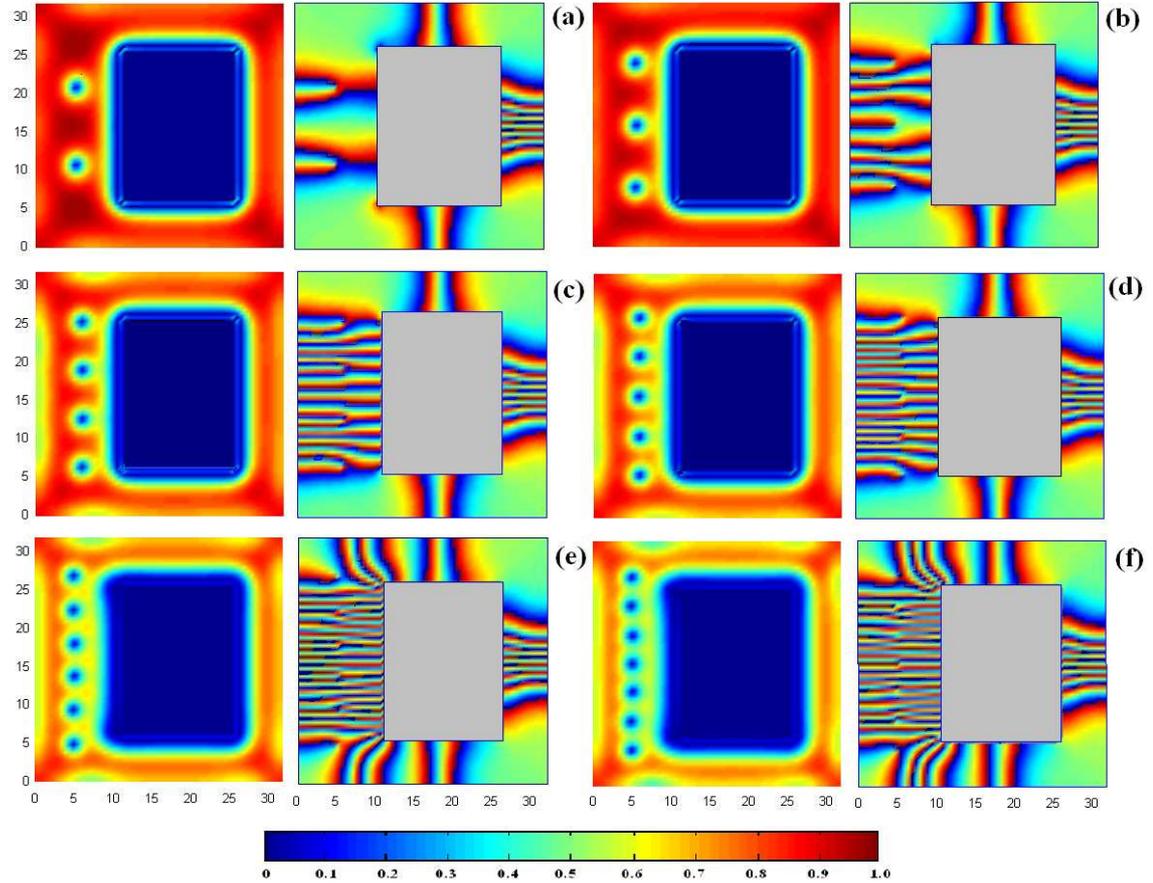


Figura 5.4: Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem (esquerda) e de sua fase (direita) para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ , para (a)  $H_e = 0.24$ , (b) 0.26, (c) 0.31, (d) 0.33, (e) 0.39 e (f) 0.41. A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase está dada pela barra de cores.

em conta na fronteira defeito/supercondutor por meio do parâmetro  $b$ . Neste caso, consideramos a inclusão metálica como um supercondutor de menor temperatura crítica  $T_{c2} < T_{c1}$  onde  $T_{c2} < T < T_{c1}$ . Em outro caso, também poderíamos resolver as equações TDGL dentro da inclusão para  $T < T_{c2} < T_{c1}$ , e assim possivelmente enxergaríamos estados de multivórtices ou vórtices gigantes dentro da inclusão.

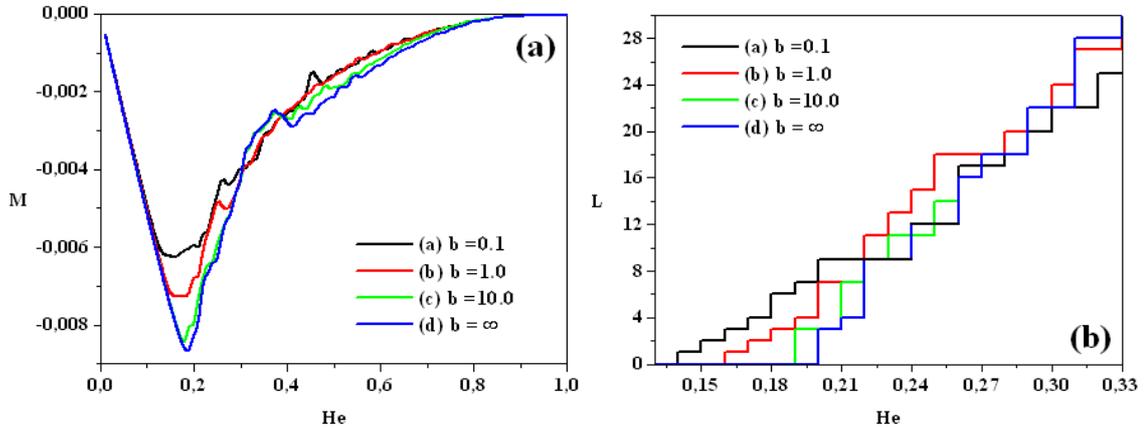


Figura 5.5: (a) Curva de magnetização  $M$  e (b) número de vórtices  $L$  na amostra para (a)  $b = 0.1$ , (b)  $b = 1.0$ , (c)  $b = 10.0$ , (d)  $b = \infty$ .

O número de vórtices e a magnetização como função do campo magnético aplicado são mostrados na Figura 5.5. O primeiro valor de penetração do campo magnético ocorre para  $H_e = 0.186, 0.178, 0.168, 0.155$  para  $b = \infty, b = 10, b = 1.0$  e  $b = 0.1$ , respectivamente. Podemos notar também que o número de vórtices é afetado pelos valores de  $b$ . Observamos que quando diminuimos o valor de  $b$ , se reduz o campo magnético no qual a entrada do primeiro vórtice ocorre e o número de vórtices dentro do defeito cresce para um mesmo campo magnético aplicado. Além disso, observamos uma depreciação do parâmetro de ordem nas bordas do buraco (supressão da supercondutividade). Valores de  $b$  cada vez maiores simulam fronteiras entre supercondutores e metais cada vez menos condutores.

Na Figura 5.6(a) 9 vórtices estão na amostra, todos eles dentro do defeito. Embora não sejam visíveis no diagrama do módulo do parâmetro de ordem existe uma mudança na fase ao redor do defeito igual a  $\Delta\phi = 18\pi$ . Observamos que o arranjo dos vórtices é fortemente afetado pelos valores de  $b$ . Como mostramos na

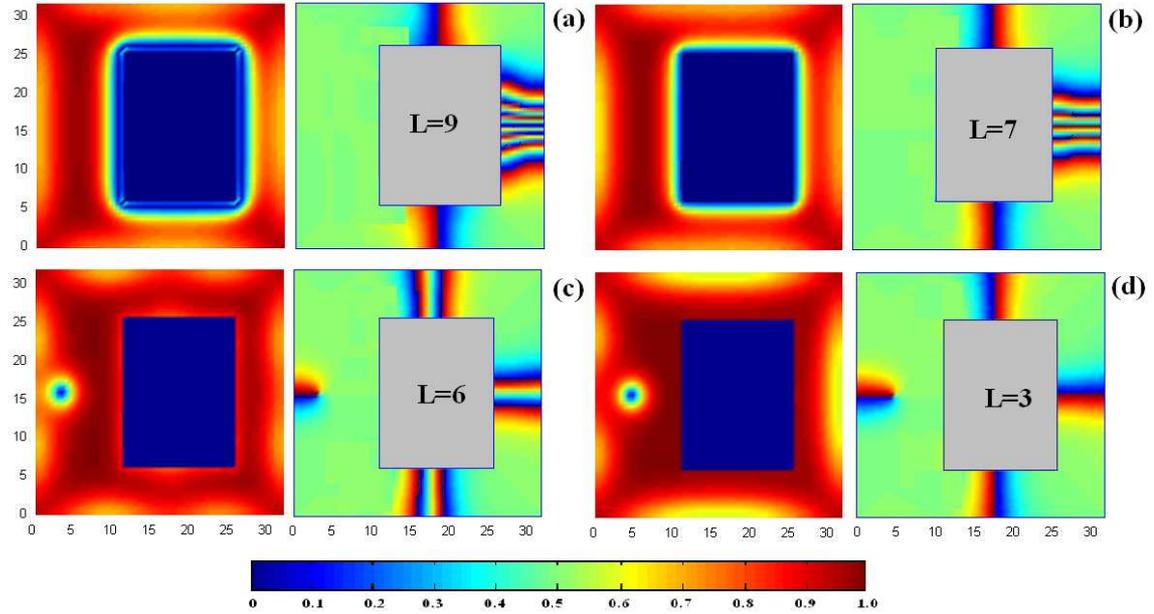


Figura 5.6: Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem (esquerda) e sua fase (direita) para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com vários materiais metálicos caracterizados com (a)  $b = 0.1$ , (b)  $b = 1.0$ , (c)  $b = 10.0$ , (d)  $b = \infty$ , para  $H_e = 0.21$ . A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores.

Figura 5.6(b), existe um vórtice  $L = 7$  na amostra localizado dentro da inclusão. Analisando a Figura 5.6(c) para o caso  $b = 10.0$ , temos igualmente dois vórtices dentro da amostra, mas neste caso, um vórtice  $L = 1$  se localiza na região supercondutora próximo à borda exterior do supercondutor, e outro  $L = 6$  na inclusão. Na Figura 5.6(d) temos quatro vórtices, três dentro do defeito e um na região supercondutora, mas, neste caso, um pouco mais próximo à superfície interna do defeito. Como podemos observar, vórtices dentro da região metálica repelem os vórtices dentro da região supercondutora. Esta repulsão é maior com o decréscimo de  $b$  para um campo magnético constante  $H_e$ .

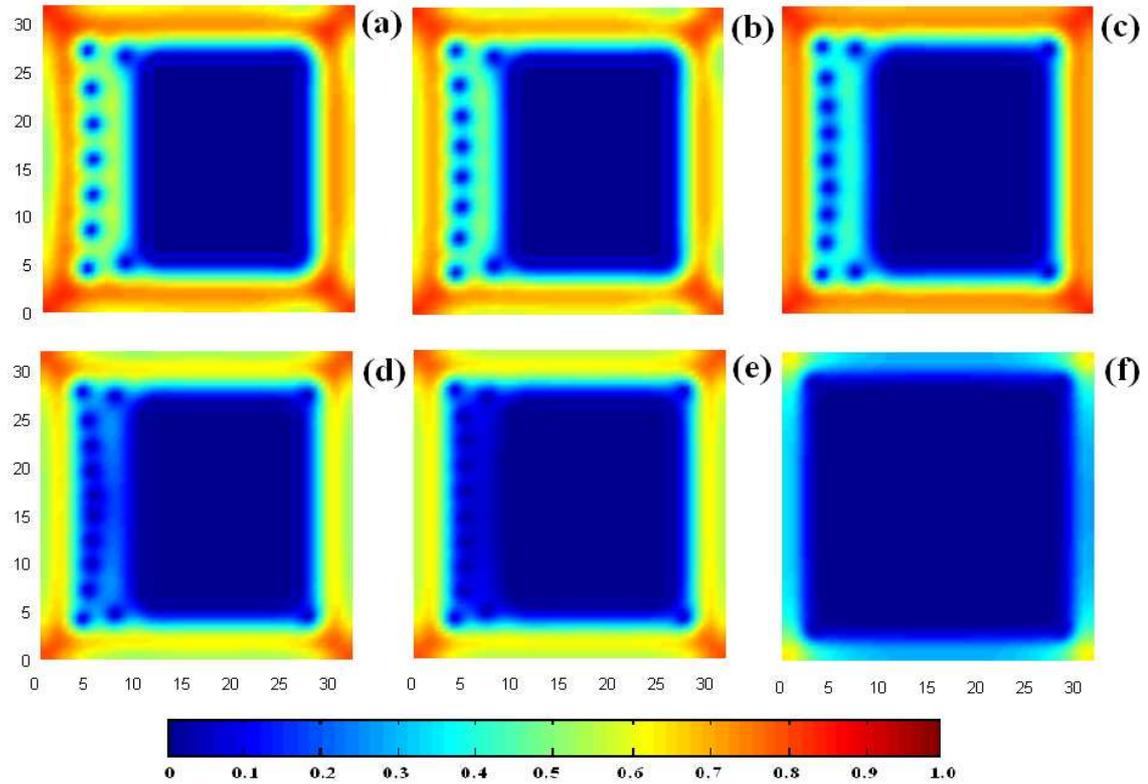


Figura 5.7: Distribuição espacial do módulo do parâmetro de ordem para o quadrado mesoscópico com um defeito retangular preenchido com um material metálico caracterizado por  $b = 0.1$ , para (a)  $H_e = 0.42$ , (b) 0.44, (c) 0.46, (d) 0.50, (e) 0.52 e (f) 0.80. A magnitude do parâmetro de ordem e sua fase ( $\Delta\phi/2\pi$ ) estão dados pela barra de cores.

A Figura 5.6 mostra uma depreciação da supercondutividade em uma pequena região próxima à borda da inclusão. Isto pode ser visto como uma consequência do comprimento de extrapolação positivo  $b > 0$ . Se considerássemos a inclusão metálica como um supercondutor de temperatura crítica mais baixa, poderíamos esperar que existisse um aumento da supercondutividade no contorno da inclusão (como se verá no capítulo 6). Além disso, notamos um decréscimo do número de

fluxóides dentro do buraco a medida que  $b$  aumenta. Podemos dizer que à medida que o valor de  $b$  diminui, a depreciação da supercondutividade nas bordas da inclusão aumenta a região normal, resultando em um área normal maior e conseqüentemente mais favorável ao ingresso dos vórtices.

Para campos  $H_e > 0.41$  (ver Figura 5.7), temos uma completa perda de informação do número de vórtices dentro da inclusão. A região supercondutora é preenchida por vórtices formando uma geometria quadrada do defeito, persistindo uma região supercondutora nas bordas da amostra.

## 5.5 Configuração de vórtices em um anel quadrado

Sardella e colaboradores [111] estudaram a entrada dos vórtices dentro de uma amostra mesoscópica quadrada simplesmente conexa formando estados de um vórtice, de multivórtices e de vórtices gigantes, observando em geral uma entrada de vórtices com transições de  $L$  a  $L + 2$  e de  $L$  a  $L + 1$  dependendo dos valores de temperatura. Também observaram que à medida que se aumenta a temperatura um número menor de vórtices entra na amostra, isto devido ao fato que o tamanho do vórtice aumenta para  $T$  próximas a  $T_c$ . Baelus e colaboradores [127] pesquisaram, teórica e experimentalmente, os campos magnéticos de expulsão e penetração de vórtices em função da temperatura, encontrando que os campos de penetração decrescem com o aumento da temperatura, enquanto que os campos de expulsão para uma vorticidade em particular podem ser independentes da temperatura.

Examinaremos aqui o processo de nucleação como função do campo magnético aplicado para vários valores de temperatura em um anel mesoscópico. Estudaremos

também curvas isotermas de magnetização para diferentes valores do parâmetro de Ginzburg-Landau.

O anel está rodeado e preenchido por um meio isolante. A amostra é dividida em uma malha quadrada de  $N_x = N_y = 50$  células com espaçamento entre elas  $a_x = a_y = 0.5$ . Portanto, temos um quadrado com dimensões  $25\xi(0) \times 25\xi(0)$  e o buraco tem dimensões  $24\xi(0) \times 24\xi(0)$ . Esta amostra corresponde a um anel quadrado de largura  $\xi(0)$ . Igualmente aos casos anteriores  $H_e$  varia desde 0 até 1 em pequenos intervalos  $\Delta H = 10^{-6}$ . Escolhemos um passo temporal  $\Delta t = 0.015$ .

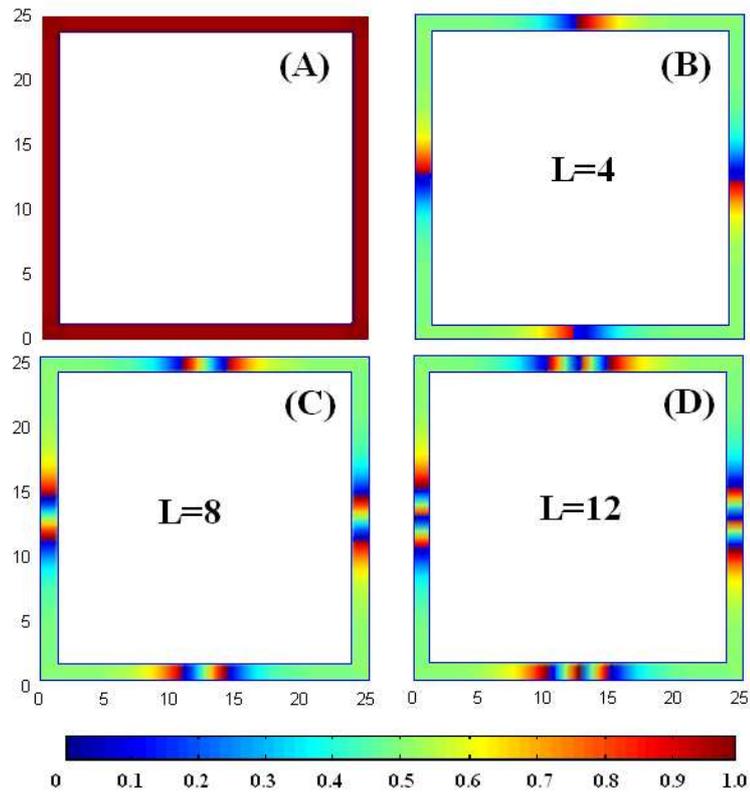


Figura 5.8: (A) Esquema da geometria da amostra. Fase do parâmetro de ordem para (B)  $T = 0$ , (C)  $T = 0.375$ , (D)  $T = 0.875$  respectivamente, para  $H_e = 0.15$ . A diferença de fase do parâmetro de ordem ( $\Delta\phi/2\pi$ ) está dada pela barra de cores

A Figura 5.8(A) mostra somente a geometria da amostra. Nas Figuras 5.8(B)-(D) ilustramos a fase do parâmetro de ordem e podemos notar que o número de vórtices aumenta para um campo magnético constante quando a temperatura é aumentada. Esta dependência com a temperatura está melhor ilustrada na Figura 5.10 onde mostramos o número de vórtices  $L$  para várias temperaturas como uma função de  $H_e$ . Observamos que a primeira entrada de vórtices corresponde a uma transição de fase do estado  $L = 0$  a  $L = 4$ . Em geral, temos transições de  $L$  a  $L + 4$ , independentemente da temperatura.

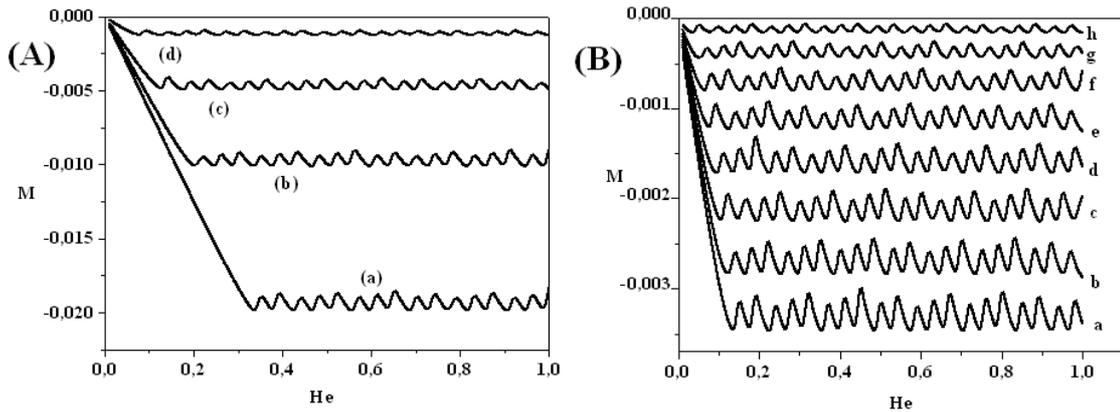


Figura 5.9: Curvas de magnetização em função de  $H_e$  para: (A)  $T = 0.5$  e (a)  $\kappa = 0.5$ , (b)  $\kappa = 0.7$ , (c)  $\kappa = 1.0$ , e (d)  $\kappa = 2.0$ ; (B)  $\kappa = 2.0$  e (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 0.125$ , (c)  $T = 0.250$ , (d)  $T = 0.375$ , (e)  $T = 0.50$ , (f)  $T = 0.625$ , (g)  $T = 0.750$ , (h)  $T = 0.875$ .

Podemos dizer que, devido à largura do anel ( $d = \xi(0)$ ) as correntes de Meissner são praticamente constantes dentro da amostra. Utilizando a segunda equação GL com  $|\psi| \neq |\psi_\infty| = \text{constante}$ , temos,  $j \sim \exp(-x/\lambda)$  e como  $d \ll \lambda(T)$ ,  $j = \text{constante}$  no anel. Além disso, com apenas dois pontos na largura do anel, nosso sistema corresponde na verdade a um anel unidimensional. Sendo assim,  $H_{c3} \rightarrow \infty$ ,

fazendo com que a magnetização apenas oscile em torno de um valor constante, sem tendência a se anular (ver Figura 5.9).

As curvas de magnetização resultantes (ver Figura 5.9(A)) exibem os picos correspondentes aos pontos de máxima penetração de fluxo magnético. Ilustramos os casos para vários valores de  $\kappa$ . O comportamento qualitativo das curvas de magnetização é praticamente independente dos valores escolhidos de  $\kappa$ . Além disso, a magnetização decresce consideravelmente quando aumentamos  $\kappa$ , o que indica pequenas expulsões de campo magnético do supercondutor. As curvas de magnetização resultantes em função do campo magnético são mostradas na Figura 5.9(B), para diferentes temperaturas. Devido ao efeito Meissner ser mais completo para baixas temperaturas, devido a  $\lambda(T) = \lambda(0) (1 - t)^{-1/2}$ , é mais difícil para o campo penetrar a amostra em temperaturas menores. Neste caso, temos transições entre estados de vorticidade de  $L$  a  $L + 4$  independentes da temperatura (ver Figura 5.10).

Desta vez temos cinco pontos na espessura do anel de modo que este não pode ser mais considerado unidimensional. Deste modo podemos estudar efeitos da largura infinita do anel. Então, aumentando o campo magnético até  $H_e = 5H_{c2}$  e o tamanho da malha para garantir melhor convergência no método numérico (ver Figura 5.11). Podemos observar na Figura 5.11 (b) que para campos baixos a transição entre estados de vorticidade diferentes ocorre de  $L$  a  $L + 4$  para  $T = 0.5$  e de  $L$  a  $L + 12$  para  $T = 0$ . Vale notar que, para  $T = 0$ , 8 vórtices entram na primeira transição, sem obter o estado  $L = 4$ , talvez devido à necessidade de um maior tempo de relaxação do sistema ou ao tamanho da amostra. Similarmente ao caso do quadrado supercondutor, não conseguimos transições entre estados de vorticidade  $L$  a  $L + 2$ . Também calculamos a magnetização para vários valores de temperatura, desde  $T = 0$  até  $T = 0.85$ .

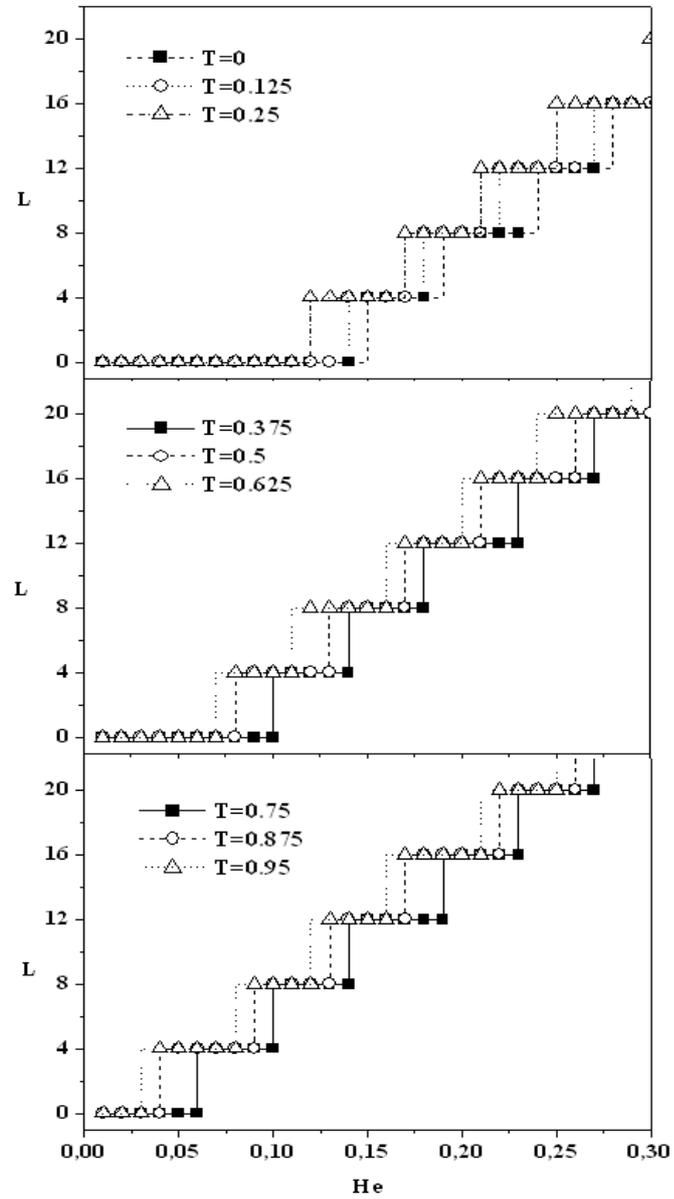


Figura 5.10: Número de vórtices no anel como função do campo magnético aplicado para diferentes valores da temperatura.

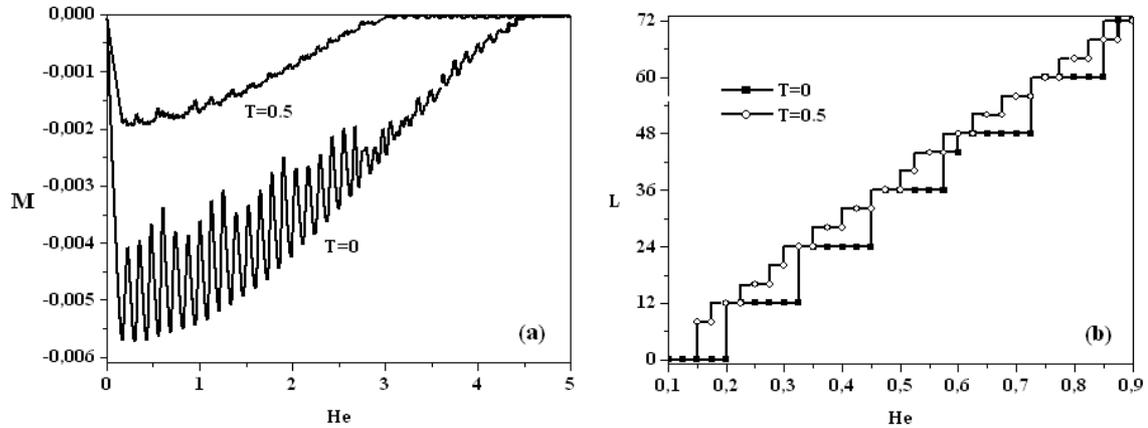


Figura 5.11: (a) Curva de magnetização e (b) número de vórtices em função de  $H_e$  para  $T = 0.5$  e  $T = 0$  para o anel.

Em nossos cálculos para o anel encontramos um comportamento de “avalanche” de vórtices observado na curva de magnetização (ver Figura 5.11(a)). Este fenômeno foi reportado teoricamente por Vodolazov e colaboradores [128] e experimentalmente por Pedersen e colaboradores [129] em anéis finitos. Este fluxo de “avalanche” é mais pronunciado para baixos campos e ocorre quando o sistema está em um estado metaestável. A transição entre diferentes estados  $\Delta L$  depende do tamanho do anel e a sua largura. Para discos de raio  $R = 10\xi(T)$ ,  $\Delta L$  pode ter valores entre 1 e 6 e para  $R = 15\xi(T)$ , entre 1 e 9. Além disso, o número de estados metaestáveis diminui quando aumentamos o campo. Para grandes campos magnéticos existe só supercondutividade superficial onde o anel pode ser considerado unidimensional com  $\Delta L$  pequeno.

É bom notar que, em nosso caso temos transições de  $L$  para  $L + 4$  a campos baixos. Mudando a geometria poderíamos obter diferentes valores para a entrada do número de vórtices na amostra.

## 5.6 Resumo

Investigamos teoricamente a distribuição espacial dos vórtices em um quadrado supercondutor com dois defeitos quadrados. A presença dos dois defeitos afeta tanto a distribuição, como a entrada dos vórtices, e aumenta o campo de transição supercondutor/metal devido à sobrevivência de uma região supercondutora no espaço entre os defeitos. Além disso, os centros de aprisionamento capturam os fluxóides levando a uma menor dissipação da energia e a um aumento das correntes e campos críticos. Os vórtices que não estão nos buracos se localizam preferivelmente na região oposta a estes defeitos, com uma primeira entrada de dois vórtices em cada defeito. Logo depois da segunda entrada de vórtices temos um estado  $L = 4$  em cada defeito. A terceira entrada de vórtices é composta por três fluxóides localizados na região supercondutora. Para altos campos magnéticos aparece uma região retangular de grande vorticidade simétrica ao retângulo formado pelos dois defeitos. Como é de se esperar, para campos magnéticos próximos a  $H_{c2}$  a supercondutividade sobrevive somente em uma região entre os dois defeitos e nas bordas onde a densidade de corrente é maior; observar-se que o material é completamente normal em campos próximos a  $H_{c3}$ .

Para o anel supercondutor quadrado, consideramos a existência de estados de vórtices gigantes dentro do anel. Devido a sua largura não é possível observar a ocorrência de estados de multivórtices ou vórtices isolados na região supercondutora. A escolha do tamanho da malha tem um papel importante na observação dos vórtices. Como sabemos, o tamanho do vórtice diminui com o decréscimo da temperatura sendo conveniente aumentar o número de pontos da malha para estes casos. Como é bem conhecido, o tamanho do vórtice é da ordem de  $\xi(T)$ , que é aproximadamente a largura do anel  $d = \xi(0)$ , o que nos impede ter vórtices na

região supercondutora, já que para todas as temperaturas  $d \leq \xi(T)$ . O fluxo de “avalanche” é mais pronunciado para baixos campos e temperaturas. Além disso, o número de estados metaestáveis diminui quando aumentamos o campo, existe só supercondutividade superficial, já que o anel é considerado unidimensional.

Por outro lado, ao investigar teoricamente a distribuição espacial dos vórtices dentro da amostra quadrada com uma inclusão metálica, o número de vórtices dentro do buraco aumenta à medida que  $b$  diminui, ou seja, a inclusão metálica faz a supercondutividade diminuir na fronteira com o supercondutor, tendo assim uma maior área para a nucleação da supercondutividade. Por conseguinte, o campo para a primeira entrada de vórtices decresce à medida que  $b$  diminui.

## Capítulo 6

# O Papel das Condições de Contorno de De Gennes nas Propriedades de um Filme Supercondutor

*“as entidades não devem ser multiplicadas além do necessário, a natureza é por si econômica e não se multiplica em vão”*

William Ockham - A navalha de Ockham.

Neste capítulo, estudaremos o estado supercondutor de um filme fino na presença de um campo magnético uniforme. Assumimos que o material está em contato com outro material cujas propriedades são levadas em conta mediante o parâmetro de De Gennes nas condições de fronteira. Consideramos os casos  $b \neq 0$ ,  $b = 0$  e  $b \rightarrow \infty$ . A densidade de elétrons supercondutores, a magnetização e o

número de vórtices são analisados como função do parâmetro  $b$ , assim como do campo magnético e da temperatura.

## 6.1 Breve introdução

Em muitas das aplicações em materiais supercondutores é necessário o controle da densidade e/ou movimento dos vórtices. Isto pode ser feito escolhendo o material adequado para preencher o meio no qual o supercondutor está imerso. Teoricamente, podemos simular vários tipos de materiais variando o parâmetro de De Gennes  $b$  nas condições de contorno do parâmetro de ordem.

Existem muitos trabalhos teóricos e experimentais que mostram a dependência de grandezas termodinâmicas, como campos de nucleação, correntes críticas, temperatura crítica, número de vórtices na amostra, com o valor escolhido de  $b$ . Baelus e colaboradores [130], usando a equação de Ginzburg-Landau linearizada, estudaram as linhas de transição de um filme supercondutor nanoestruturado com camadas de pequena largura supercondutoras a uma maior temperatura crítica na sua superfície, o que corresponde a valores negativos de  $b$ . Assim, obtiveram uma modulação unidimensional da supercondutividade na superfície do filme. Reportaram ainda que, devido ao aumento local da densidade dos pares de Cooper próximo à superfície onde estão localizadas as camadas supercondutoras de maior  $T_c$ , existia um aumento na temperatura crítica do filme com  $\xi/b$ , para valores negativos de  $b$ .

Hernández e Domínguez [109] analisaram a barreira de superfície em supercondutores mesoscópicos, estudando a magnetização e os campos de penetração para amostras de diferentes tamanhos e para um filme fino, para as condições de contorno  $b \rightarrow \infty$  e  $b = 0$ . No caso da condição de contorno  $\psi = 0$  na fronteira ( $b = 0$ ), as correntes Meissner são as responsáveis pela barreira de superfície e o

campo de penetração é dado pelo modelo de Bean-Livingston. Para interfaces supercondutor/vácuo ou isolante, o campo de entrada é maior que para a fronteira cheia de defeitos, e depende de  $\kappa$ .

Em outro trabalho, Pogosov [54] estudou a configuração de vórtices em cilindros mesoscópicos para a condição de contorno supercondutor/metal. Encontrou que a função  $H_{c3}(R)$  depende apreciavelmente do valor de  $b$ , decrescendo quando  $b$  aumenta. Para  $R \rightarrow \infty$ ,  $H_{c3}(\infty) = 1.69$ , valor conhecido para um supercondutor semi-infinito. Além disso, encontrou que o estado supercondutor não nucleia para cilindros com raio menor que certo raio crítico, e a amostra permanece no estado normal para qualquer campo aplicado. Por outro lado, Geim e colaboradores [131] mostraram experimentalmente que sistemas mesoscópicos podem ter uma resposta paramagnética na curva de magnetização em um processo de *field cooling*, relacionada à captura do fluxo magnético devido às fronteiras da amostra [131] (barreira de Bean-Livingston). Este resultado tem sido usado para explicar o chamado efeito Meissner paramagnético em supercondutores granulares, onde a captura e confinamento geométrico do fluxo em cada grão contribui para uma resposta paramagnética macroscópica de toda a amostra.

## 6.2 Formalismo teórico

Neste capítulo, estudaremos a magnetização, densidade de portadores de carga e número de vórtices em função do parâmetro  $b$  em um filme fino. O filme é recoberto por uma película composta por: material metálico ( $b > 0$ ), material isolante ( $b \rightarrow \infty$ ), supercondutor a maior temperatura crítica ( $b < 0$ ). Além desses casos, consideramos a amostra com sua superfície completamente normal ( $\psi = 0 \Rightarrow b = 0$ ) em todos os pontos da fronteira (isto devido à presença de defeitos nas bordas).

O campo magnético  $\mathbf{H}_e = H_e \hat{\mathbf{z}}$  é aplicado perpendicularmente à superfície  $xy$ . A função de onda supercondutora satisfaz a condição de contorno (3.29) para  $b \neq 0$ , e  $\psi_{i,j}|_s = 0$  para  $b = 0$ . O eixo maior tem condições de contorno periódicas (relação (3.30)) e o eixo menor tem condições de contorno fechadas (relação (3.28)). Assim, simulamos um filme de largura  $d = 12\xi(0)$  e infinito no plano  $zy$  (ver Figura 4.1 (b)). Construímos uma malha retangular de  $N_x = 48$  e  $N_y = 320$ ; as células tem espaçamento  $a_x = a_y = 0.25$  com  $\Delta H = 10^{-7}$ ,  $\Delta t = 0.0015$ .

### 6.3 Estado supercondutor de um filme mesoscópico

As equações TDGL foram resolvidas de acordo com o método descrito no Capítulo 3, com o objetivo de obter a magnetização  $M$ , o número de vórtices dentro da amostra  $L$  e a média do módulo quadrado do parâmetro de ordem  $\langle |\psi|^2 \rangle$  como função do parâmetro de De Gennes. É conveniente lembrar o significado físico do comprimento de De Gennes. O caso  $b = 0$  caracteriza uma interface supercondutor/material ferromagnético ou uma interface com muitos defeitos; escolhemos o último caso para evitar complicações numéricas ao considerar a magnetização própria do ferromagneto. Assim, temos uma superfície completamente cheia de defeitos na qual o parâmetro de ordem supercondutor é totalmente suprimido. Para satisfazer esta condição usamos  $\psi = 0$  em todos os pontos da fronteira. O caso limite  $b \rightarrow \infty$  representa uma interface supercondutor/isolante ou vácuo. Esta condição impõe a não transposição da corrente através das interfaces. Para o caso  $b > 0$  consideramos uma interface supercondutor/metal, na qual temos que, para valores cada vez menores de  $b$ , simulamos metais cada vez mais condutores, o que acarreta em, efeito de proximidade torna-se mais acentuado, resultando em uma maior supressão da supercondutividade superficial. Para o último caso  $b < 0$ , consideramos

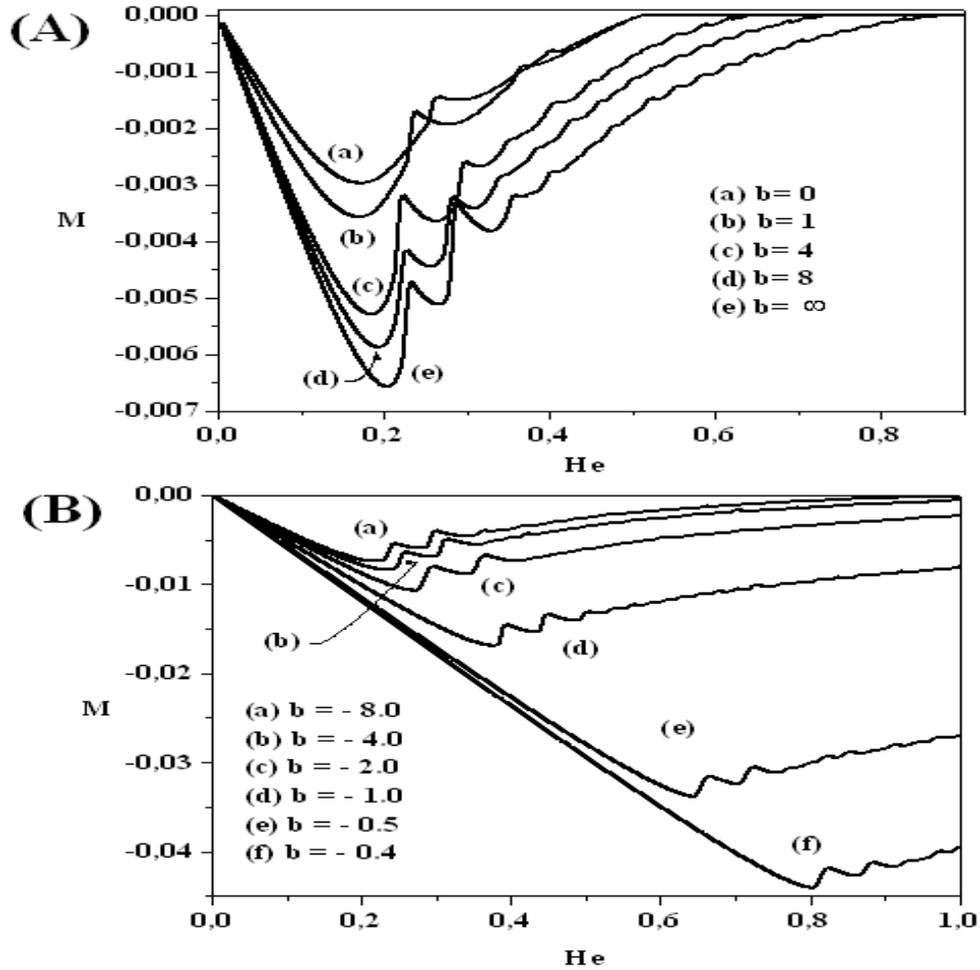


Figura 6.1: Curvas de magnetização em função do campo aplicado para (A)  $b = 0,0, 1,0, 4,0, 8,0, \infty$  e (B)  $b = -8,0, -4,0, -2,0, -1,0, -0,5, -0,4$ , a  $T = 0,5$ .

uma interface de supercondutor com um outro supercondutor de temperatura crítica mais alta. Também por efeito de proximidade, este contato fará com que apareça um aumento da supercondutividade superficial na amostra. Assim, quanto menor o valor de  $|b|$ , com  $b < 0$ , maior será o aumento da supercondutividade superficial.

As Figuras 6.1 e 6.2, mostram a curva da magnetização  $M(H_e)$  para  $b = 0$ ,

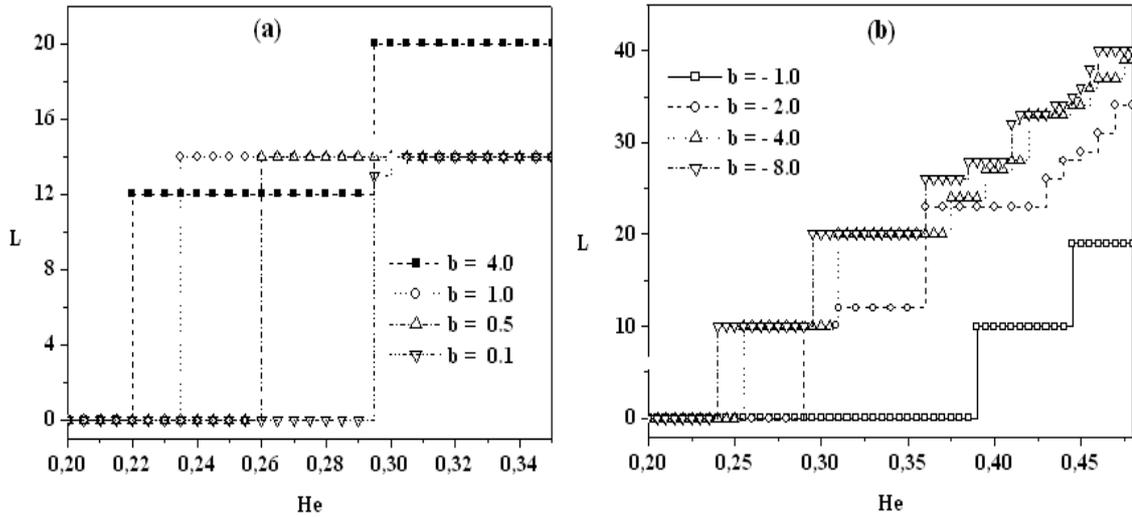


Figura 6.2: Número de vórtices como uma função do campo aplicado para (b)  $b = -8.0, -4.0, -2.0, -1.0$ , (a)  $b = 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$ , para  $T = 0.5$ .

$b \rightarrow \infty$ ,  $b > 0$  e  $b < 0$  e o número de vórtices na amostra  $L(H_e)$  para  $b > 0$  e  $b < 0$ . Podemos observar que para o caso  $b = 4.0$  a amostra permanece no estado de Meissner para um campo  $H_e < 0.22$ . Logo após, com um pequeno acréscimo do campo, 12 vórtices entram no filme. Para o caso de  $b = 1.0$ , ocorre a primeira entrada dos vórtices em  $H_e = 0.235$  com  $L = 14$ . Igual número de quanta de fluxo entram para  $b = 0.5$ , mas o estado de Meissner ocorre até um campo maior  $H_e = 0.26$ . Finalmente, quando  $b = 0.1$ , existe a primeira entrada de 20 vórtices em  $H_e = 0.295$ . O número de vórtices que entram pela primeira vez aumenta com o decréscimo de  $b$  pois quando  $b$  é pequeno o metal diminui a barreira de superfície. Na Figura 6.2 (b), vemos que os campos onde ocorrem entradas de vórtices crescem com o aumento de  $|b|$ . A Figura 6.3 mostra uma diferença marcante na supercondutividade superficial ao variarmos o parâmetro  $b$  a baixos campos magnéticos. Para ver isto melhor, obtemos a relação existente entre a distância média entre as cadeias de

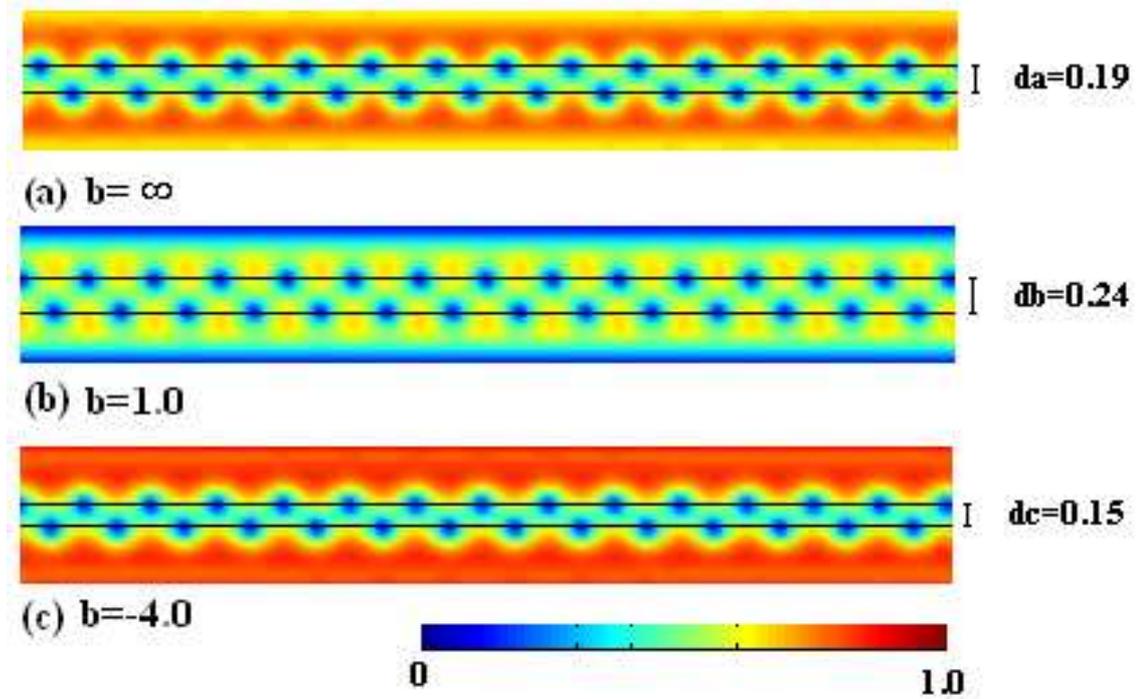


Figura 6.3: Módulo do parâmetro de ordem  $|\psi|$  para  $L = 28$ ,  $H_e = 0.40 - 0.42$  e (a)  $b = \infty$ , (b)  $b = 1$ , (c)  $b = -4$  para  $T = 0.5$ . As linhas nas figuras são só guias para uma melhor identificação da distância média entre as cadeias de vórtices. A magnitude do parâmetro de ordem está dada pela barra de cores.

vórtices e a largura do filme, encontrando (a)  $d_a = 0.19$  para  $b \rightarrow \infty$ , (b)  $d_b = 0.24$  para  $b = 1.0$  e (c)  $d_c = 0.15$  para  $b = -4.0$ . Na interface supercondutor/vácuo ou isolante (ver Figura 6.3 (a)) vemos que  $|\psi|$  é levemente suprimido devido às correntes de blindagem. Para a interface supercondutor/metal ( $b = 1.0$ , Figura 6.3 (b)), o parâmetro de ordem é fortemente suprimido numa região próxima à superfície devido à “contaminação” com os elétrons normais vindos do metal. Por conseguinte, as cadeias de vórtices sofrem menor compressão dentro da amostra. Ao contrário, para  $b = -4$  (ver Figura 6.3 (c)), há menor depreciação das propriedades

supercondutoras próxima à interface, devido aos pares de Cooper provenientes do material supercondutor, levando a uma maior compressão das cadeias de vórtices. É bom notar aqui que, para o valor de  $b = 0$ , não atingimos uma configuração de duas cadeias de vórtices para nenhum campo magnético.

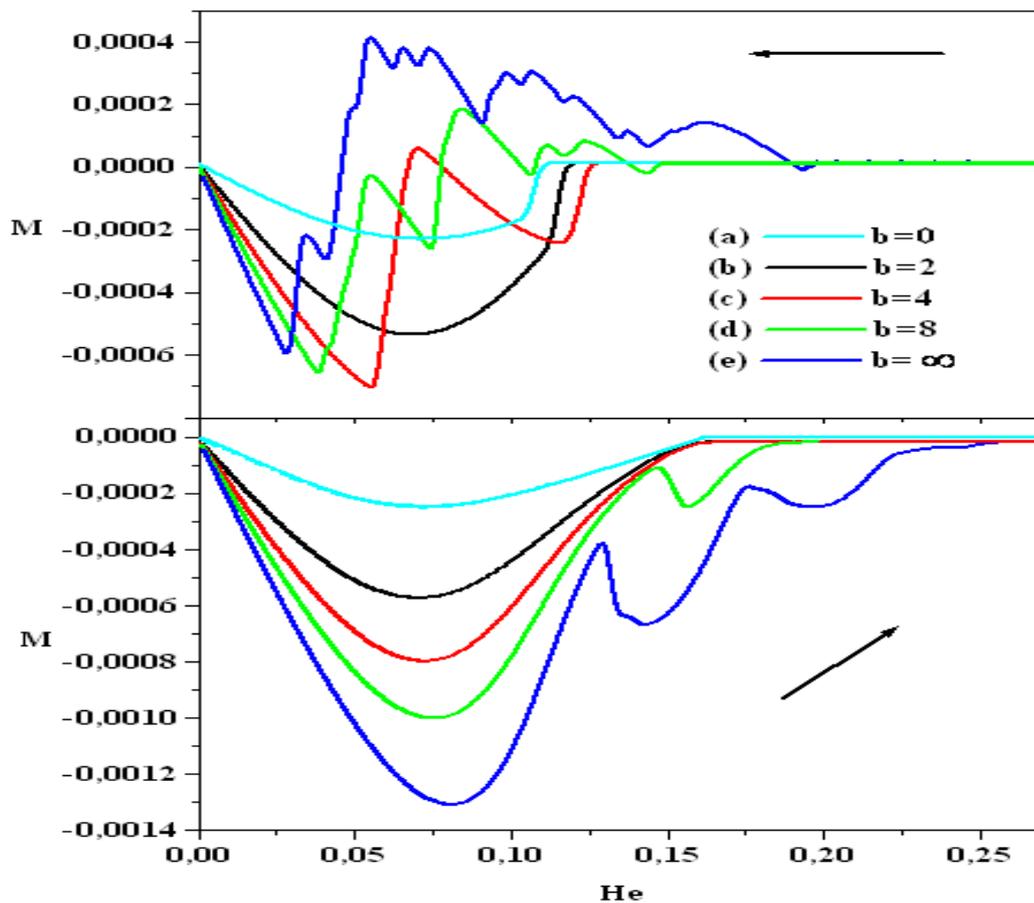


Figura 6.4: Curvas de magnetização com histerese em função do campo aplicado para  $b = \infty, 8.0, 4.0, 2.0, 0.0$ , em  $T = 0.85$ .

As Figuras 6.4 mostram curvas da magnetização (e as respectivas histereses)  $M(H_e)$  para  $b$  positivo e  $T = 0.85$ . Para  $b > 2$  o sistema tem uma resposta pa-

ramagnética na curva de magnetização, relacionada à captura do fluxo magnético devido às fronteiras da amostra [131]. Assim, quanto menor o valor de  $b$  (materiais mais metálicos), maior será a depreciação da supercondutividade nas bordas da amostra; os vórtices estarão menos comprimidos no interior da amostra resultando em uma histerese menor, já que será mais fácil extraí-los da amostra quando o campo for diminuído. Por outro lado, para valores de  $b$  negativos com  $|b|$  diminuindo (supercondutividade superficial cada vez maior), maior será a compressão dos vórtices no filme. Isto se explica devido ao aumento da supercondutividade na superfície e assim será mais difícil a saída dos vórtices do filme quando o campo for diminuído, resultando em uma histerese maior (ver Figura 6.5).

Podemos ver que o número de máximos na curva de magnetização diminuíam à medida que  $b$  diminui, seja para  $H_e$  diminuindo ou aumentando. Isto se justifica pelo discutido anteriormente, ou seja,  $b$  menor implica em uma depreciação mais acentuada da supercondutividade permitindo um número menor de vórtices no sistema e, portanto, um número menor de picos associados a transições entre diferentes estados de vórtices. Além disso, as curvas de magnetização tornam-se cada vez mais suaves e o sistema atinge o estado normal a campos magnéticos menores.

Para valores de  $b$  negativos, com  $|b|$  decrescendo, temos um crescimento no valor do campo para o qual ocorre o primeiro ingresso de vórtices. Também observamos um aumento no campo de transição supercondutor/normal (ver Figura 6.1 (B)). Isto pode significar que para valores cada vez menores de  $|b|$  é mais difícil para o campo magnético penetrar a amostra, devido ao aumento da supercondutividade na fronteira.

Na Figura 6.6 ilustramos o comportamento da Magnetização, Número de vórtices e o valor medio de  $\langle |\psi| \rangle^2$  em função de  $b$ . Mostramos que o valor de  $b$

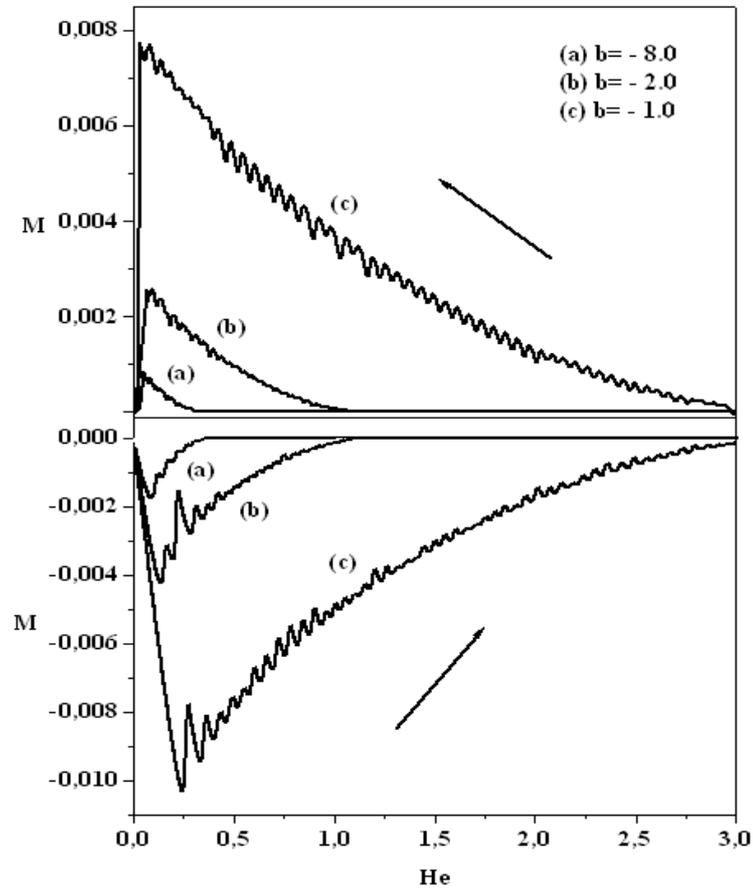


Figura 6.5: Curvas de magnetização com histerese em função do campo aplicado para (a)  $b = -8.0$ , (b)  $b = -2.0$  e (c)  $b = -1.0$ , para  $T = 0.85$ .

afeta o número de vórtices, a magnetização e o módulo do parâmetro de ordem para um mesmo campo magnético. Para os casos  $b = -1.0, -2.0, -4.0, -8.0$ , a primeira cadeia de 10 vórtices ocorre em  $He = 0.39, 0.29, 0.25, 0.24$  (ver Figura 6.2). Para  $b = 0$  entram 14 vórtices em  $He = 0.26$ . Se  $b \geq 0$ , o módulo da magnetização é menor para  $b = 0$ , aumentando gradativamente, atingindo um valor máximo para  $b \rightarrow \infty$  para um mesmo campo magnético.

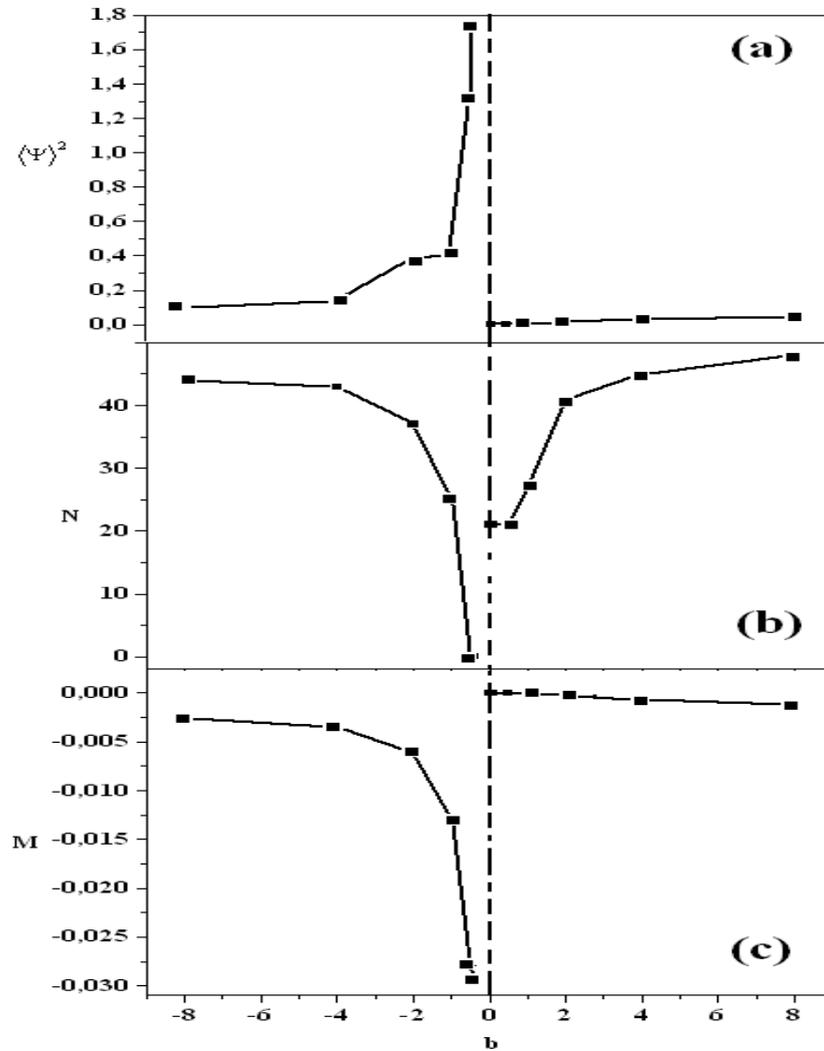


Figura 6.6: (a) média do módulo quadrado do parâmetro de ordem  $\langle |\psi|^2 \rangle^2$ , (b) vorticidade  $L$ , (c) magnetização  $M$ , para  $H_e = H_{c2}(T = 0.5) = 0.5H_{c2}(0)$ .

Quando diminuímos  $|b|$  para  $b < 0$ , os campos de transição supercondutor/normal aumentam (Figuras 6.1), resultando em efeito Meissner mais pronunciado, ou seja, a expulsão do campo magnético é mais completa. Para expulsar o campo magnético o supercondutor precisa induzir mais supercorrentes na superfície.

Por conseguinte, as correntes Meissner estarão mais concentradas na superfície. Igual comportamento podemos notar para outros valores de  $b$  (ver Figura 6.6).

Simular as propriedades da interface de um material metálico com um valor de  $b = 0$ , seria o equivalente a ter uma película de um material ferromagnético ou uma superfície completamente no estado normal nas bordas do supercondutor. Embora a magnetização, o número de vórtices e a densidade de elétrons supercondutores apresentam um valor finito no caso  $b = 0$ , existe uma divergência nestas grandezas termodinâmicas no limite de  $b \rightarrow 0$  pela esquerda, ou seja,  $b \rightarrow 0^-$  (ver Figuras 6.6). Este limite corresponde a ter a interface de um supercondutor com outro supercondutor de temperatura crítica cada vez mais alta, de modo que  $|\psi|^2 \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow -\infty$  e  $L \rightarrow 0$ . Por tanto, para sistemas físicos reais  $b = 0$  devem ser aqueles obtidos da extrapolação  $b \rightarrow 0^+$ .

## 6.4 Resumo

Observamos marcantes diferenças na supercondutividade superficial ao variar o parâmetro  $b$  a baixos campos magnéticos. Para a interface supercondutor/vácuo ou isolante o parâmetro de ordem é levemente suprimido devido às correntes de blindagem. Para a interface supercondutor/metal, o parâmetro de ordem é fortemente suprimido em uma região próxima à superfície devido à “contaminação” com os elétrons normais vindos do metal. Por conseguinte, os vórtices estarão menos comprimidos dentro da amostra. Finalmente, para uma interface supercondutor/supercondutor à temperatura crítica mais alta, a supercondutividade é melhorada devido aos pares de Cooper provenientes do material supercondutor, levando a uma maior compressão dos vórtices.

Para uma interface supercondutor/supercondutor à temperatura crítica mais

alta e para valores  $b > 2$  na interface supercondutor/metal, o sistema apresenta uma resposta paramagnética na curva de magnetização relacionada à captura do fluxo magnético devido às fronteiras da amostra. Assim, para interfaces com materiais cada vez mais metálicos existirá uma depreciação cada vez maior da supercondutividade nas bordas da amostra diminuindo este efeito paramagnético. Os vórtices estarão menos comprimidos resultando em uma histerese menor, já que será mais fácil extraí-los da amostra quando o campo for diminuído. Por outro lado, para filmes com supercondutividade superficial cada vez maior, existirá uma maior compressão dos vórtices, devido ao aumento da supercondutividade na superfície, e assim será mais difícil a saída dos vórtices do filme quando o campo for diminuído, resultando em uma histerese maior.

# Capítulo 7

## Conclusões

*“Um grama de ação vale mais do que uma tonelada de teoria.”*

Friedrich Engels.

Nesta tese, estudamos teoricamente algumas grandezas termodinâmicas como magnetização e densidade de portadores de carga para filmes finos submersos em diferentes tipos de materiais como metais, outros supercondutores e isolantes e com uma alta densidade de defeitos na sua interface. Investigamos ainda as configurações de vórtices em quadrados mesoscópicos com dois defeitos assimétricos ou com um defeito preenchido de material metálico, e em anéis mesoscópicos. O estudo foi realizado mediante resolução numérica das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) utilizando o método de campos de calibre com variáveis de ligação.

A presença dos dois defeitos na amostra quadrada afeta, tanto a distribuição, como a entrada dos vórtices, e aumenta o campo de transição supercondutor/normal devido à permanência de uma região supercondutora no espaço entre os defeitos. Além disso, os centros de aprisionamento capturam os fluxóides conduzindo a um

aumento das correntes e campos críticos. Para campos magnéticos altos aparece uma região retangular de grande vorticidade simétrica ao retângulo formado pelos dois defeitos. Como é de se esperar, para campos magnéticos próximos a  $H_{c2}$  a supercondutividade sobrevive somente em uma região entre os dois defeitos e nas bordas onde a densidade de corrente é menor; se espera que o material seja completamente normal em campos próximos a  $H_{c3}$ . Por outro lado, ao investigar teoricamente a distribuição espacial dos vórtices dentro da amostra quadrada com uma inclusão metálica, o número de vórtices dentro do buraco aumenta à medida que consideramos materiais mais metálicos, ou seja, a inclusão metálica faz a supercondutividade diminuir na fronteira com o supercondutor, tendo assim uma maior área para a nucleação da de vórtices. Por conseguinte, o campo para a primeira entrada de vórtices decresce com o decréscimo de  $b$ .

Consideramos a existência de estados de vórtices gigantes dentro de um anel supercondutor que, devido a sua largura, não é possível observar a ocorrência de estados de multivórtices ou vórtices isolados na região supercondutora. A escolha do tamanho da malha tem um papel importante na observação dos vórtices. Por outro lado, observamos um fenômeno de “avalanche” de vórtices quando o sistema está em estados metaestáveis. Este fluxo de “avalanche” é mais pronunciado para baixos campos. A entrada dos vórtices ocorre em números diferentes dependendo de vários aspectos. Por exemplo, temos entrada de vórtices de  $L$  a  $L + 4$  para campos baixos. Para altos campos magnéticos existe só supercondutividade superficial onde o anel é considerado unidimensional, levando a uma diminuição em  $\Delta L$ . Isto indica que o número de estados metaestáveis diminui quando aumentamos o campo, o que está em boa concordância com os resultados experimentais [129] e teóricos [128].

Para uma interface supercondutor/supercondutor à maior temperatura crítica

e para uma interface supercondutor metal com ( $b > 2$ ), o sistema apresenta uma resposta paramagnética na curva de magnetização relacionada à captura do fluxo magnético devido às fronteiras da amostra. Assim, para interfaces com materiais cada vez mais condutores, existirá uma depreciação cada vez maior da supercondutividade nas bordas da amostra devido à “contaminação” com os elétrons normais vindos do metal. Os vórtices estarão menos comprimidos resultando em uma histerese menor, já que será mais fácil extraí-los da amostra quando o campo for diminuído. Por outro lado, para filmes com supercondutividade superficial cada vez maior, existirá uma maior compressão dos vórtices, devido aos pares de Cooper provenientes do material supercondutor, e assim será mais difícil a saída dos vórtices do filme quando o campo for diminuído, resultando em uma histerese maior.

Esta tese tem como perspectiva estender estes estudos para analisar as propriedades de vórtices em outros sistemas mesoscópicos e em filmes supercondutores macroscópicos com nanoestruturas isolantes e/ou magnéticas. Temos interesse particular em explorar o comportamento dinâmico e de equilíbrio de vórtices, assim como de fazer um estudo comparativo das propriedades de aprisionamento de vórtices entre estes sistemas. No caso das nanoestruturas magnéticas, analisaremos como os vórtices interagem com os domínios magnéticos e como se dá a nucleação espontânea de pares vórtice-antivórtice.

### Artigos Publicados durante o doutorado

*Vortex Configurations on Mesoscopic Square*, José J. Barba, L. R. E Cabral and J. Albino Aguiar. **Brazilian Journal of Physics**. **36** 3B 1029, (2006).

*Vortex arrays in superconducting cylinders*, José J. Barba, L. R. E Cabral and J. Albino Aguiar. **Physica C** - (2007). -<http://dx.doi.org/10.1016/j.physc.2007.03.311>.

*Magnetization in superconducting square ring*, José J. Barba, L. R. E Cabral and J. Albino Aguiar. Aceito para publicação na **Revista Mexicana de Física**, (Julho 2007).

### Artigo em preparação

*Role of De Gennes boundary conditions on superconducting properties of thin mesoscopic films*, José J. Barba, Clécio C. de Souza Silva, L. R. E Cabral and J. Albino Aguiar.

*Tese de Doutorado*

# Bibliografia

- [1] Heike Kamerling Onnes. *Communications from the Physical Laboratory at University of Leiden*, 122B, 1911.
- [2] P. L. Kapitza. Viscosity of Liquid Helium below the  $\lambda$  Point. *Nature*, 141:74, 1938.
- [3] Frank Allen and Austin Donald Meissner. Flow of Liquid Helium II. *Nature*, 141:75, 1938.
- [4] J. G. Bednorz and K. A. Muller. *Zeitschrift fur Physik B*, 64:189, 1986.
- [5] V. V. Moshchalkov, M. Baert, V. V. Metlushko, E. Rosseel, M. J. Van Bael, K. Temst, Y. Bruynseraede, and R. Jonckheere. Pinning by an Antidot Lattice: The Problem of the Optimum Antidot Size. *Physical Review B*, 57(6):3615, 1998.
- [6] V. V. Moshchalkov, V. Bruyndoncx, L. Van Look, M. J. Van Bael, and Y. Bruynseraede. *Quantization and Confinement Phenomena in Nanostructured Superconductors*, in *Handbook of Nanostructured Materials and Nanotechnology*, volume 3. H. S. Nalwa.

- [7] J. I. Martin, M. Velez, J. Nogues, and Ivan K. Schuller. Flux Pinning in a Superconductor by an Array of Submicrometer Magnetic Dots. *Physical Review Letter*, 79(10):1929, 1997.
- [8] Hong Yin Liao, Shi Ping Zhou, Xiao Yun Shi, and Bao He Zhu. Vortex Dynamics in Superconductors with Periodical Pinning Arrays. *Physica C*, 408:603, 2004.
- [9] G. R. Berdiyrov, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Novel Commensurability Effects in Superconducting Films with Antidot Arrays. *Physical Review Letters*, 96:207001, 2006.
- [10] G. R. Berdiyrov, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Vortex Configurations and Critical Parameters in Superconducting thin Films Containing Antidot Arrays: Nonlinear Ginzburg-Landau Theory. *Physical Review B*, 74:174512, 2006.
- [11] G. R. Berdiyrov, M. V. Milošević, B. J. Baelus, and F. M. Peeters. Superconducting Vortex State in a Mesoscopic Disk Containing a Blind Hole. *Physical Review B*, 70:024508, 2004.
- [12] Xiaobin Zhua, P. Grutter, V. Metlushko, and B. Ilic. Magnetization Reversal and Configurational Anisotropy of Dense Permalloy Dot Arrays. *Applied Physics Letters*, 80(25):4789, 2002.
- [13] Clécio C. de Souza Silva, Joris Van de Vondel, Mathieu Morelle, and Victor V. Moshchalkov. Controlled Multiple Reversals of a Ratchet Effect. *Nature*, 440:651, 2006.

- [14] J. Van de Vondel, C. C. de Souza Silva, M. Morelle B.Y. Zhu, and V.V. Moshchalkov. Vortex-rectification Effects in Films with Periodic Asymmetric Pinning. *Physical Review Letters*, 94:057003, 2005.
- [15] C. C. de Souza Silva, A.V. Silhanek, J. Van de Vondel, W. Gillijns, V. Metlushko, B. Ilic, and V.V. Moshchalkov. Dipole-induced Vortex Ratchets in Superconducting Films with Arrays of Micromagnets. *Physical Review Letters*, 98:117005, 2007.
- [16] J. E. Villegas, Sergey Savelev, Franco Nori, E. M. Gonzalez, J. V. Anguita, R. García, and J. L. Vicent. A Superconducting Reversible Rectifier that Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta. *Science*, 302:1188, 2003.
- [17] Erham Coskum. Computational Simulation of Flux Trapping and Vortex Pinning in Type - II Superconductors. *Applied Mathematical and Computation*, 106:31, 1999.
- [18] Gilson Carneiro. Pinning and Creation of Vortices in Superconducting Films by a Magnetic Dipole. *Physical Review B*, 69:214504, 2004.
- [19] Gilson Carneiro. Tunable Interactions between Vortices and a Magnetic Dipole. *Physical Review B*, 72:144514, 2005.
- [20] Gilson Carneiro. Tunable Ratchet Effects for Vortices Pinned by Periodic Magnetic Dipole Arrays. *Physica C*, 432:206, 2005.
- [21] D. Y. Vodolazov and F. M. Peeters. Superconducting Rectifier Based on the Asymmetric Surface Barrier Effect. *Physical Review B*, 72:172508, 2005.

- [22] M. J. Van Bael, J. Bekaert, K. Temst, L. Van Look, V.V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, G. D. Howells, A. N. Grigorenko, S. J. Bending, and G. Borghs. Local Observation of Field Polarity Dependent Flux Pinning by Magnetic Dipoles. *Physical Review Letters*, 86(1):155, 2001.
- [23] A. V. Silhanek, A. W. Gillijns, V. V. Moshchalkov, V. Metlushko, and B. Ilic. Tunable Pinning in Superconducting Films with Magnetic Microloops. *Applied Physics Letters*, 89:182505, 2006.
- [24] M. V. Milošević, G.R. Berdiyrov, and F. M. Peeters. Mesoscopic Field and Current Compensator Based on a Hybrid Superconductor-Ferromagnet Structure. *Physical Review Letter*, 95:147004, 2005.
- [25] M. V. Milošević and F. M. Peeters. Vortex-Antivortex Lattices in Superconducting Films with Magnetic Pinning Arrays. *Physical Review Letter*, 93:267006, 2004.
- [26] M. V. Milošević and F. M. Peeters. Vortex-Antivortex Nucleation in Magnetically Nanotextured Superconductors: Magnetic-Field-Driven and Thermal Scenarios. *Physical Review Letter*, 94:227001, 2005.
- [27] D. Y. Vodolazov. Effect of Surface Defects on the First Field for Vortex Entry in Type - II Superconductors. *Physical Review B*, 62(13):8691, 2000.
- [28] Carlos Carballeira, V. V. Moshchalkov, Liviu F. Chibotaru, and Arnout Ceulemans. Multiquanta Vortex Entry and Vortex-Antivortex Pattern Expansion in a Superconducting Microsquare with a Magnetic Dot. *Physical Review Letters*, 95:237003, 2005.

- [29] Liviu F. Chibotaru, Arnout Ceulemans, Vital Bruyndoncx, and Victor V. Moshchalkov. Symmetry-induced Formation of Antivortices in Mesoscopic Superconductors. *Nature*, 408:833, 2000.
- [30] Mauro M. Doria and Sarah C. B. de Andrade. Magnetic Properties of the Transition to Localized Superconductivity Around Columnar Defects. *Physical Review B*, 60:13164, 1999.
- [31] Mauro M. Doria and Gilney Figueira Zebende. Vortex Configurations on Mesoscopic Cylinders with Square Cross Section. *Brazilian Journal of Physics*, 32(3):690, 2002.
- [32] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, and V.V. Moshchalkov. Vortex Entry and Nucleation of Antivortices in a Mesoscopic Superconducting Triangle. *Physical Review Letters*, 86(7):1323, 2001.
- [33] L.F. Chibotaru, A. Ceulemans, G. Teniers, and V.V. Moshchalkov. Nucleation of Superconductivity in Regular Polygons: Superconducting Vector Potential Gauge Approach. *Physica C*, 369:149, 2002.
- [34] M. Morelle, G. Teniers, L.F. Chibotaru, A. Ceulemans, and V.V. Moshchalkov. Nucleation of Superconductivity in a Mesoscopic Triangle. *Physica C*, 369:351, 2002.
- [35] A. S. Melnikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, and P. P. Vysheslavtsev. Vortex States and Magnetization Curve of Square Mesoscopic Superconductors. *Physical Review B*, 65:140503, 2002.

- [36] Mathieu Morelle, Dusan S. Golubovic, and Victor V. Moshchalkov. Nucleation of Superconductivity in a Mesoscopic Loop of Varying Width. *Physical Review B*, 70:144528, 2004.
- [37] Jorge Berger and Jacob Rubinstein. Flux-induced Vortex in Mesoscopic Superconducting Loops. *Physical Review B*, 59(13):8896, 1999.
- [38] V. M. Fomin, V. R. Misko, J. T. Devreese, and V. V. Moshchalkov. Superconducting Mesoscopic Square Loop. *Physical Review B*, 58(17):11703, 1998.
- [39] V. M. Fomin, V. R. Misko, J. T. Devreese, and V. V. Moshchalkov. On the Superconducting Phase Boundary for a Mesoscopic Square Loop. *Solid State Communications*, 101(5):303, 1997.
- [40] V. M. Fomin, J. T. Devreese, V. Bruyndoncx, and V. V. Moshchalkov. Superconductivity in a Mesoscopic Double Square Loop: Effect of Imperfections. *Physical Review B*, 62(13):9186, 2000.
- [41] V. Bruyndoncx, L. Van Look, M. Verschuere, and V. V. Moshchalkov. Dimensional Crossover in a Mesoscopic Superconducting Loop of Finite Width. *Physical Review B*, 60(14):10468, 1999.
- [42] A. K. Geim, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, J. C. Maan, A. E. Filippov, and F. M. Peeters. Phase Transitions in Individual Sub-micrometre Superconductors. *Nature*, 390:259, 1997.
- [43] P. Singha Deo, V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and A. K. Geim. Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks. *Physical Review Letters*, 79(23):4653, 1997.

- [44] V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. Singha Deo. Phase Transitions in Thin Mesoscopic Superconducting Disks. *Physical Review B*, 57(21):13817, 1998.
- [45] B. J. Baelus, L. R. E. Cabral, and F. M. Peeters. Vortex Shells in Mesoscopic Superconducting Disks. *Physical Review B*, 69:064506, 2004.
- [46] L. R. E. Cabral, B. J. Baelus, and F. M. Peeters. From Vortex Molecules to the Abrikosov Lattice in Thin Mesoscopic Superconducting Disks. *Physical Review B*, 70:144523, 2004.
- [47] L. R. E. Cabral and F. M. Peeters. Elastic Modes of Vortex Configurations in Thin Disks. *Physical Review B*, 70:214522, 2004.
- [48] A. I. Buzdin and J. P. Brison. Vortex Structure in Small Superconducting Disk. *Physics Letters A*, 196:267, 1994.
- [49] Sangbum Kim, Chia-Ren Hu, and Malcolm J. Andrews. Steady-state and Equilibrium Vortex Configurations, Transitions, and Evolution in a Mesoscopic Superconducting Cylinder. *Physical Review B*, 69:094521, 2004.
- [50] V. A. Schweigert and F. M. Peeters. Influence of the Confinement Geometry on Surface Superconductivity. *Physical Review B*, 60(5):3084, 1999.
- [51] V. A. Schweigert and F. M. Peeters. Flux Penetration and Expulsion in Thin Superconducting Disks. *Physical Review Letters*, 83(12):2409, 1999.
- [52] J. J. Palacios. Vortex Matter in Superconducting Mesoscopic Disks: Structure, Magnetization, and Phase Transitions. *Physical Review B*, 58(10):5948, 1998.

- [53] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka. Experimental Evidence for Giant Vortex States in a Mesoscopic Superconducting Disk. *Physical Review B*, 93:257002, 2004.
- [54] W. V. Pogosov. Vortex Phases in Mesoscopic Cylinders with Suppressed Surface Superconductivity. *Physical Review B*, 65:224511, 2002.
- [55] S. V. Yampolskii and F. M. Peeters. Vortex Structure of Thin Mesoscopic Disk with Enhanced Surface Superconductivity. *Physical Review B*, 62(14):9663, 2000.
- [56] Emma Montecvecchi and Joseph O. Indekeu. Effects of Confinement and Surface Enhancement on Superconductivity. *Physical Review B*, 62(21):14359, 2000.
- [57] A. F. Slachmuylders, B. Partoens, and F. M. Peeters. Geometry and Magnetic-field-induced Vortices and Antivortices in Mesoscopic Two-dimensional Systems. *Physical Review B*, 71:245405, 2005.
- [58] Bao-He Zhu, Shi-Ping Zhou, Yao-Ming Shi, Guo-Qiao Zha, and Kui Yang. Influence of De Gennes Boundary Conditions on the Charge Distributions of the Meissner State and the Single-vortex State in Thin Mesoscopic Rings. *Physical Review B*, 74:014501, 2006.
- [59] Xing Bin Pan. Superconducting Films in Perpendicular Fields and the Effects of the De Gennes Parameter. *Journal of Mathematical Analysis*, 34(4):957, 2003.
- [60] H. J. Fink and W. C. H. Joiner. Surface Nucleation and Boundary Condition in Superconductors. *Physical Review Letters*, 23(3):120, 1969.

- [61] Mauro M. Doria, Antonio R. de C. Romaguera, and F. M. Peeters. Effect of the Boundary Condition on the Vortex Patterns in Mesoscopic Three-dimensional Superconductors: Disk and Sphere. *Physical Review B*, 75:064505, 2007.
- [62] C. Trenkel and C. C. Speake. An Alternative Boundary Condition for Superconductors. *Superconductor Science and Technology*, 14:190, 2001.
- [63] G. W. Crabtree, D. O. Gunter, H. G. Kaper, A. E. Koshelev, G. K. Leaf, and V. M. Vinokur. Numerical Simulations of Driven Vortex Systems. *Physical Review B*, 61(2):1446, 2000.
- [64] Elihu Abrahams and Toshihiko Tsuneto. The Variation of the Ginzburg-Landau Parameter. *Physical Review*, 152(1):416, 1966.
- [65] Masahiko Machida and Hideo Kaburaki. Direct Simulation of the Time Dependent Ginzburg-Landau Equations for Type - II Superconducting Thin Film: Vortex Dynamics and V-I Characteristic. *Physical Review Letters*, 71(19):3206, 1993.
- [66] T. Winiecki and C. S. Adams. A Fast Semi-Implicit Finite-Difference Method for the TDGL Equations. *Journal of Computational Physics*, 179:127, 2002.
- [67] R. S. Thompson and C. R. Hu. Dynamic Structure of Vortices in Superconductors. *Physical Review Letters*, 27(20):1352, 1971.
- [68] D. Vodolazov, B.J. Baelus, and F.M. Peeters. Dynamics of the Superconducting Condensate in the Presence of a Magnetic Field. Channelling of Vortices in Superconducting Strips at High Currents. *Physica C*, 404:400, 2004.

- [69] D.Y. Vodolazov, F.M. Peeters, L. Piraux, S. Mátéfi-Tempfli, and S. Michotte. Current-Voltage Characteristics of Quasi-One-Dimensional Superconductors: An S-shaped Curve in the Constant Voltage Regime. *Physical Review Letters*, 91(15):172508, 2003.
- [70] E. Akkermans, D. M. Gangardt, and K. Mallick. Mesoscopic Superconductors in the London Limit: Equilibrium Properties and Metastability. *Physical Review B*, 63:064523, 2001.
- [71] Qiang Du and Paul Gray. High  $\kappa$  Limits of Time Dependent Ginzburg-Landau Model. *Journal on Applied Mathematics*, 56(4):1060, 1996.
- [72] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein Neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21:787, 1933.
- [73] F. London and H. London. The Electromagnetic Equations of the Supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71, 1935.
- [74] Vitaly L. Ginzburg and L. Landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 20:1064, 1950.
- [75] Alexei A. Abrikosov. Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. *Soviet Physics - Journal of Experimental and Theoretical Physics, JETP*, 5:1174, 1957.
- [76] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 108(5):1175, 1957.
- [77] León N. Cooper. Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas. *Physical Review*, 104(4):1189, 1956.

- [78] S. N. Putilin, E. V. Antipov, A. M. Abakumov, M. G. Rozova, K. A. Lokshin, D. A. Pavlov, A. M. Balagurov, D. V. Sheptyakov, and M. Marezio. Effect of Fluorination and High Pressure on the Structure and Properties of the Hg-bearing Superconducting Cu Mixed Oxides. *Physica C*, 338:52, 2000.
- [79] H. Frohlich. Theory of the Superconducting State. The Ground Sstate at the Absolute Zero of Temperature. *Physical Review*, 79(5):845, 1950.
- [80] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975.
- [81] P. G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. W. A. Benjamin, Inc., 1966.
- [82] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Introduction to Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.
- [83] L. P. Gor'kov and G. M. Éliashber. *Soviet Physics. Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 27:328, 1968.
- [84] Albert Schmid. *Condens. Matter*, 5:302, 1966.
- [85] Ryuzo kato, Yoshihisa Enomoto, and Sadamichi Maekawa. Effects of the Surface Boundary on the Magnetization Process in Type - II Superconductors. *Physical Review B*, 47(13):8016, 1993.
- [86] L. Kramer and R. J. Watts-Tobin. Theory of Dissipative Current-Carrying States in Superconducting Filaments. *Physical Review Letters*, 40:1041, 1978.
- [87] A. P. van Gelder. Nucleation of Superconductivity Near  $h_{c3}$ . *Physical Review Letters*, 20(25):1435, 1968.

- [88] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler. Bulk Solutions of Ginzburg-Landau Equations for Type - II Superconductors: Upper Critical Field Region. *Physical Review*, 133(5A):A1226, 1964.
- [89] Clecio Clemente Souza Silva. *Propriedades de Equilíbrio e de Transporte da Matéria de Vórtices em Nanoestruturas Supercondutoras*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Julho 2003.
- [90] Ernst Helmut Brandt. The Flux-line Lattice in Superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 58:1465, 1995.
- [91] A. Yaouanc, P. Dalmas de Rétier, and E. H. Brandt. Effect of the Vortex Core on the Magnetic Field in Hard Superconductors. *Reports on Progress in Physics*, 55(17):11 107, 1997.
- [92] Isaías G. de Oliveira and A. M. Thompson. Cutoff Parameters in London Theory. *Physical Review B*, 57(13):7477, 1998.
- [93] Qiang Du, Max D. Gunzburger, and Janet S. Peterson. Computer Simulation of Type-II Superconductivity Including Pining Phenomena. *Physical Review B*, 51(22):16194, 1995.
- [94] Qiang Du, Max D. Gunzburger, and Janet S. Peterson. Analysis and Aproximation of the Ginzburg-Landau Model of Superconductivity. *SIAM Review*, 34(1):54, 1992.
- [95] Qiang Du, Max D. Gunzburger, and Janet S. Peterson. Solving the Ginzburg-Landau Equation by Finite Element Methods. *Physical Review B*, 46(14):9027, 1992.

- [96] Arjen Doelman. Finite Dimensional Models of the Ginzburg-Landau Equations. *Nonlinearity*, 4:231, 1991.
- [97] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Physical Review D*, 10:2445, 1974.
- [98] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press., 1983.
- [99] William D. Groop, Hans G. Kaper, Gary K. Leaf, David M. Levine, Mario Palumbo, and Valerii M. Vinokur. Numerical Simulation of Vortex Dynamics in Type - II Superconductors. *Journal of Computational Physics*, 123:254, 1996.
- [100] G. C. Buscaglia, C. Bolech, and A. López. *Connectivity and Superconductivity*. J. Berger and J. Rubinstein, Springer, Berlin, 2000.
- [101] W. Press, B. Flannery, S. Tenkolshy, and W. Vetterling. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ., 1988.
- [102] I. Aranson, B. Ya. Shapiro, and V. Vinokur. Nucleation and Growth of the Normal Phase in Thin Superconducting Strips. *Physical Review Letters*, 76(1):142, 1996.
- [103] Mauro M. Doria, J. E. Gubernatis, and D. Rainer. Solving the Ginzburg-Landau Equations by Simulated Annealing. *Physical Review B*, 41(10):6335, 1990.
- [104] Mauro M. Doria, J. E. Gubernatis, and D. Rainer. Virial Theorem of Ginzburg-Landau Theories with Potentials Applications to Numerical Studies of Type - II Superconductors. *Physical Review B*, 39(13):9573, 1989.

- [105] C. P. Bean and J. B. Livingston. Surface Barrier in Type - II Superconductors. *Physical Review Letters*, 12(1):14, 1964.
- [106] P. Singha Deo, V. A. Schweigert, and F. M. Peeters. Hysteresis in Mesoscopic Superconducting Disks: The Bean-Livingston Barrier. *Physical Review B*, 59(9):6039, 1999.
- [107] Elihu Abrahams and Toshihiko Tsuneto. Ginzburg-Landau Equations, Interphase Surface Energy, and the Intermediate State of Superconductors with a Paramagnetic Normal State. *Physical Review B*, 27(17):4157, 1983.
- [108] G. R. Berdiyrov, L. R. E. Cabral, and F. M. Peeters. Surface Barrier for Flux Entry and Exit in Mesoscopic Superconducting Systems. *Journal of Mathematical Physics*, 46:0951058, 2005.
- [109] Alexander D. Hernández and Daniel Domínguez. Surface Barrier in Mesoscopic Type- I and Type - II Superconductors. *Physical Review B*, 65:144529, 2002.
- [110] Clecio C. de Souza Silva, Leonardo R. E. Cabral, and J. Albino Aguiar. Vortex Configuration and Metastability in Mesoscopic Superconductors. *Physica C*, 404:11, 2004.
- [111] Edson Sardella, André Luiz Malvezzi, Paulo Noronha Lisboa-Filho, and Wilson Aires Ortiz. Temperature-dependent Vortex Motion in a Square Mesoscopic Superconducting Cylinder: Ginzburg-Landau Calculations. *Physical Review B*, 74:041512, 2006.
- [112] B. J. Baelus and F. M. Peeters. Dependence of the Vortex Configuration on the Geometry of Mesoscopic Flat Samples. *Physical Review B*, 65:104515, 2002.

- [113] Rusinov, A. I., and G. S. Mkrtchan. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 61:773, 1971.
- [114] J. Guimpel, L. Civale, F. de la Cruz, J. M. Murdock, and I. K. Schuller. Dimensional Phase Transitions in Superconductors with Short Coherence Length. *Physical Review B*, 38(4):2342, 1998.
- [115] S. H. Brongersma, E. Verweij, N. J. Koeman, D. G. de Groot, R. Griessen, and B. I. Ivlev. Series of Maxima in the Field Dependent Magnetic Moment of Layered Superconductors. *Physical Review Letters*, 71(4):2319, 1993.
- [116] M. Ziese, P. Esquinazi, P. Wagner, H. Adrian, S. H. Brongersma, and R. Griessen. Matching and Surface Barrier Effects of the Flux-line Lattice in Superconducting Films and Multilayers. *Physical Review B*, 53(413):8658, 1996.
- [117] Gilson Carneiro. Equilibrium Vortex-line Configurations and Critical Currents in Thin Films under a Parallel Field. *Physical Review B*, 57(10):6077, 1998.
- [118] V.V. Moshchalkov, L. Gielen, C. Strunk, R. Jonckheere, X. Qiu, C. van Haesendonck, and Y. Bruynseraede. Effects of Sample Topology on the Critical Fields of Mesoscopic Superconductors. *Nature*, 373:319, 1995.
- [119] A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, and V. A. Schweigert. Non-quantized Penetration of Magnetic Field in the Vortex State of Superconductors. *Nature*, 407:55, 2000.
- [120] C. C. de Souza Silva, Leonardo R. E. Cabral, and J. Albino Aguiar. Flux Penetration, Matching Effect, and Hysteresis in Homogeneous Superconducting Films. *Physical Review B*, 63:134526, 2001.

- [121] Clecio C. de Souza Silva and J. Albino Aguiar. Irreversible Matching Effects in Homogeneous and Layered Superconducting Films. *Physica C*, 354:232, 2001.
- [122] Edson Sardella, M. M. Doria, and P. R. S. Neto. Matching Fields of a Long Superconducting Film. *Physical Review B*, 64:13158, 1999.
- [123] Pablo A. Venegas and Edson Sardella. Vortex Lattice and Matching Fields for a Long Superconducting Wire. *Physical Review B*, 58:5789, 1998.
- [124] M. Baert, V. V. Metlushko, R. Jonckheere, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede. Composite Flux-line Lattice Stabilized in Superconducting Films by a Regular Array of Artificial Defects. *Physical Review Letters*, 74(16):3269, 1995.
- [125] G. R. Berdiyrov, B. J. Baelus, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Stability and Transition Between Vortex Configurations in Square Mesoscopic Samples with Antidots. *Physical Review B*, 68:174521, 2003.
- [126] G. S. Mkrtchyan and V.V. Schmidt. *JETP - Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 634, 1972.
- [127] B. J. Baelus, A. Kanda, N. Shimizu, K. Tadano, Y. Ootuka, K. Kadowaki, and F. M. Peeters. Multivortex and Giant Vortex States near the Expulsion and Penetration Fields in Thin Mesoscopic Superconducting Squares. *Physical Review B*, 73:024514, 2006.
- [128] D. Y. Vodolazov and F. M. Peeters. Dynamic Transitions Between Metastable States in a Superconducting Ring. *Physical Review B*, 66:54537, 2002.

- 
- [129] S. Pedersen, J. C. Hollingbery G. R. Kofod, C. B. Sorensen, and P. E. Lindelof. Dilation of the Giant Vortex State in a Mesoscopic Superconducting Loop. *Physical Review B*, 64:104522, 2001.
- [130] B. J. Baelus, B. Partoens, and F. M. Peeters. One-dimensional Modulation of the Superconducting Boundary Condition for Thin Superconducting Films. *Physical Review B*, 73:212503, 2006.
- [131] A. K. Geim, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, M. Henini, and J. C. Maan. Paramagnetic Meissner Effect in Small Superconductors. *Nature*, 396:144, 1998.