

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Marcela Pinto Ferreira de Queiroz

**Testes de Hipóteses em Regressão Beta Baseados em
Verossimilhança Perfilada Ajustada e em Bootstrap**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Estatística do Departamento de Estatística da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito parcial para obten-
ção do grau de Mestre em Estatística.*

Orientador: *Prof. Dr. Francisco Cribari Neto*

Recife
25 de fevereiro de 2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Queiroz, Marcela Pinto Ferreira de
Testes de hipóteses em regressão beta baseados em
verossimilhança perfilada ajustada e em bootstrap / Marcela
Pinto Ferreira de Queiroz - Recife: O Autor, 2011.
ix, 61 p. : il., fig., tab.

Orientador: Francisco Cribari Neto.
Dissertação (mestrado) Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2011.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Análise de regressão. 2. Regressão Beta. 3. Máxima
verossimilhança. 4. Bootstrap. I. Cribari-Neto, Francisco
(orientador). II. Título.

519.536

CDD (22. ed.)

MEI2011 – 032

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

25 de fevereiro de 2011

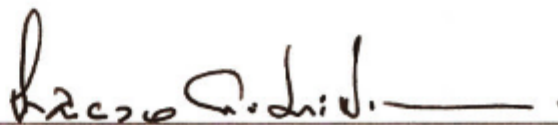
Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Marcela Pinto Ferreira de Queiroz

intitulada

“Testes de hipóteses em regressão Beta baseados em verossimilhança perfilada ajustada e em Bootstrap”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



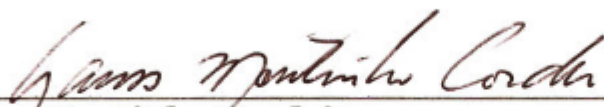
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:



Francisco Cribari Neto

orientador



Gauss Moutinho Cordeiro



Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Francisco Cribari Neto, pela dedicação, comprometimento e disponibilidade. Pela paciência e clareza na orientação. Pela cuidadosa leitura e pelas valiosas sugestões. Por inspirar, tanto no âmbito profissional quanto no pessoal, fazendo-se um exemplo a ser seguido.

Aos demais professores do Departamento de Estatística da UFPE, sobretudo às professoras Audrey Cysneiros e Patrícia Espinheira, pelos constantes incentivo, ajuda e comentários, e pelos puxões de orelha quando estes foram necessários.

A Valéria Bittencourt, pelo trabalho bem feito, pela atenção e por contagiar todos com sua alegria e positividade.

Aos meus amigos e colegas do Departamento de Estatística, por tudo que compartilhamos nestes últimos dois anos. Especialmente a Laércio Dias, pela amizade, por fazer parte do *dream team*, contribuindo diretamente para o meu crescimento acadêmico, e por ter me ensinado a recuperar minhas simulações, recurso sem o qual eu provavelmente não teria acabado esta dissertação; a Tatiane Souza e Tarciana Liberal, pelo apoio e por todas as dúvidas esclarecidas; a Fernanda De Bastiani, pelas incontáveis horas que estudamos juntas e, sobretudo, pela amizade.

A minha família e amigos, por estarem sempre por perto. Aos meus pais, pelo grande estímulo recebido desde a infância, por vibrarem a cada conquista, pelo apoio incondicional e pelo amor sem fim. A Natasha, por conseguir se fazer presente mesmo distante e por me incentivar e me acompanhar desde o início da graduação. A Maria Clara, pela paciência, por toda palavra de encorajamento, por acreditar e, sobretudo, por me convencer de que eu seria capaz de chegar até o fim desta etapa da minha vida acadêmica.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões e correções.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

*Many of life's failures are people who did not realize how close they were
to success when they gave up.*

—THOMAS EDISON

Resumo

A presente dissertação trata da realização de inferências por teste de hipóteses no modelo de regressão beta, que é empregado na modelagem de dados que assumem continuamente valores no intervalo $(0, 1)$ (Ferrari & Cribari-Neto, 2004; Simas, Barreto-Souza & Rocha, 2010). O foco do estudo reside na realização de inferências em pequenas amostras. São considerados os testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald usuais, além de dois testes da razão de verossimilhanças corrigidos propostos por Ferrari & Pinheiro (2011) e versões *bootstrap* dos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald. Os desempenhos dos testes em amostras finitas são avaliados numericamente através de simulações de Monte Carlo. Tais simulações contemplam modelos de regressão beta com dispersão variável e consideram testes sobre os parâmetros que indexam o submodelo da média e também testes sobre os parâmetros que se encontram no submodelo da dispersão.

Palavras-chave: Bootstrap, regressão beta, teste da razão de verossimilhanças, teste escore, teste Wald, verossimilhança perfilada.

Abstract

This thesis deals with testing inference in the class of beta regression models with variable dispersion. We focus on inference in small samples. We perform a numerical analysis in order to evaluate the size and power of different tests. We consider, in our analysis, the likelihood ratio test, two adjusted likelihood ratio tests proposed by Ferrari & Pinheiro (2011), the score test, the Wald test and bootstrap versions of the likelihood ratio, score and Wald tests. We consider tests on the parameters that index the mean submodel and also on the parameters in the linear predictor of the precision submodel.

Keywords: Beta regression, bootstrap, likelihood ratio test, profile likelihood, score test, Wald test.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Organização da Dissertação	2
1.3	Suporte Computacional	3
2	Modelo de Regressão Beta	4
2.1	Introdução	4
2.2	Distribuição Beta	4
2.3	Especificação do Modelo de Regressão Beta	6
3	Testes de Hipóteses	12
3.1	Introdução	12
3.2	Testes Baseados em Verossimilhança	12
3.2.1	Testes de Hipóteses em Regressão Beta Sobre o Vetor de Parâmetros β	15
3.2.2	Testes de Hipóteses em Regressão Beta Sobre o Vetor de Parâmetros γ	16
3.3	Ajustes para a Estatística da Razão de Verossimilhanças	17
3.3.1	Ajuste de Skovgaard	18
3.4	Testes de Hipóteses Baseados em Bootstrap	19
4	Avaliações Numéricas	22
4.1	Introdução	22
4.2	Resultados das Simulações	23
5	Aplicação	33
6	Considerações Finais	37
A	Programa de Simulação	39
	Referências Bibliográficas	58

Lista de Figuras

2.1	Densidades beta para diferentes valores de (p, q) .	5
3.1	Função de log-verossimilhança (θ escalar): teste da razão de verossimilhanças.	13
3.2	Funções de log-verossimilhança (θ escalar): teste Wald.	14
3.3	Funções de log-verossimilhança (θ escalar): teste escore.	15
5.1	Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos 1 e 2.	35

Lista de Tabelas

4.1	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($r = 1$).	23
4.2	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 2$).	24
4.3	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 3$).	25
4.4	Taxas de rejeição não-nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($r = 1$), $n = 40$, $\alpha = 5\%$.	25
4.5	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($r = 1$).	26
4.6	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 2$).	27
4.7	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 3$).	27
4.8	Taxas de rejeição não-nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($r = 1$), $n = 30$, $\alpha = 5\%$.	28
4.9	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ ($k = 2$).	29
4.10	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ ($k = 3$).	29
4.11	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($k = 4$).	30
4.12	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = 0$ ($q = 2$).	31
4.13	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = 0$ ($q = 3$).	31
4.14	Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($q = 4$).	32
5.1	Estimativas dos parâmetros, erros-padrão e valores- p ; modelo 1.	34
5.2	Estimativas dos parâmetros, erros-padrão e valores- p ; modelo 2.	34
5.3	Medidas de avaliação dos modelos 1 e 2.	35

Introdução

1.1 Introdução

Em muitas áreas de conhecimento, empregam-se modelos de regressão para análise de dados. Apesar de ser o modelo mais comumente aplicado, as suposições do modelo linear clássico não são válidas para grande parte dos dados com que se trabalha na prática. O modelo linear clássico não é apropriado, por exemplo, para o ajuste de variáveis que assumem valores continuamente no intervalo $(0, 1)$, tais como taxas e proporções, pois é possível que sejam gerados valores ajustados fora do suporte da resposta. Adicionalmente, este tipo de dados tipicamente apresenta heteroscedasticidade e assimetria, o que pode resultar em conclusões incorretas quando estas são resultado de inferências baseadas nas suposições do modelo linear clássico.

Neste contexto, Ferrari & Cribari-Neto (2004) propuseram um modelo para o ajuste de variáveis que assumem continuamente valores no intervalo unitário padrão supondo que as mesmas seguem distribuição beta. Os autores fazem uso de uma parametrização alternativa que permite a modelagem da média da resposta envolvendo um parâmetro de dispersão. Desta forma, através de uma função de ligação, a média fica relacionada a um preditor linear, de forma semelhante ao que se observa nos modelos lineares generalizados (ver McCullagh & Nelder, 1989). Há, ainda, uma extensão deste modelo que considera um submodelo para a média e um submodelo para a precisão, dando mais flexibilidade ao ajuste dos dados (Simas, Barreto-Souza & Rocha, 2010).

Após a estimação dos parâmetros, usualmente, são realizados testes sobre os parâmetros do modelo a fim de confirmar ou refutar hipóteses feitas sobre estes. Os testes mais comumente aplicados são o da razão de verossimilhanças, escore e Wald, pois suas estatísticas de testes baseiam-se na função de verossimilhança, que apresenta várias propriedades de otimalidade. Estes testes são realizados a partir de valores críticos válidos para grandes amostras, o que pode conduzir a probabilidades de erro tipo I distorcidas em amostras finitas.

Adicionalmente, havendo parâmetros de incômodo, tipicamente, são empregadas funções alternativas como, por exemplo, a função de verossimilhança perfilada. Entretanto, algumas características ótimas da função de verossimilhança não valem para a função de verossimilhança perfilada. Além disso, na presença de um número grande de parâmetros de perturbação relativamente ao tamanho amostral, a aproximação assintótica da distribuição nula de estatísticas de testes provenientes da verossimilhança perfilada pode ser pobre.

Neste contexto, são empregadas diversas alternativas aos testes assintóticos usuais, tais como testes baseados na função de verossimilhança perfilada ajustada (Barndorff-Nielsen, 1983, 1994; Cox & Reid, 1987, 1992; McCullagh & Tibshirani, 1990; Stern, 1997); correções de

Bartlett e do tipo-Bartlett aplicadas às estatísticas da razão de verossimilhanças e escore, respectivamente (ver Cribari-Neto & Cordeiro, 1996); testes que empregam as estatísticas da razão de verossimilhanças sinalizada e sinalizada modificada (Barndorff-Nielsen, 1986, 1991) para os casos em que o parâmetro de interesse é escalar. Essas correções, em geral, são de difícil derivação e podem exigir, ainda, ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e de incômodo.

Uma alternativa mais simples foi proposta por Skovgaard (2001), que obteve um ajuste de fácil obtenção e grande aplicabilidade, pois, além de contemplar casos em que o parâmetro de interesse é multidimensional, pode ser diretamente aplicado à estatística da razão de verossimilhanças. Esta estatística da razão de verossimilhanças corrigida foi obtida para modelos não-lineares da família exponencial por Ferrari & Cysneiros (2008) e por Melo, Vasconcellos & Lemonte (2009) para uma nova classe de modelos proposta pelos autores. Já na classe de modelos de regressão beta, Ferrari & Pinheiro (2011) derivaram o ajuste de Skovgaard (2001) e realizaram simulações de Monte Carlo para avaliar os desempenhos dos testes baseados na estatística corrigida em comparação àquele proveniente da estatística usual. As autoras concluíram que os primeiros têm melhor desempenho em termos de controle da probabilidade de erro de tipo I.

Por fim, outra opção reside no emprego de testes cujos valores críticos são obtidos a partir de um esquema de reamostragem *bootstrap*. A técnica *bootstrap* (Efron, 1979) permite obter medidas de interesse sem a necessidade de fazer suposições fortes ou de realizar cálculos analíticos complexos, sendo, portanto, um procedimento simples e automático, apesar de computacionalmente custoso. A partir do emprego de testes baseados em *bootstrap*, é possível obter uma menor distorção de tamanho comparativamente aos testes assintóticos usuais. Adicionalmente, quando o valor de réplicas de *bootstrap* é grande (a partir de 999), podem ser observados ganhos de poder.

Esta dissertação tem por objetivo avaliar o desempenho dos testes *bootstrap* em amostras finitas, comparativamente aos testes assintóticos usuais e aos testes da razão de verossimilhanças com estatísticas corrigidas pelo ajuste de Skovgaard (2001). Para tanto, serão realizadas simulações de Monte Carlo considerando testes sobre os parâmetros do submodelo da média e sobre os parâmetros que indexam o submodelo da dispersão.

1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação é constituída por cinco capítulos, incluindo esta introdução. No segundo capítulo, é introduzida a classe de modelos de regressão beta e são apresentadas, de forma breve, as estimativas pontual e intervalar de parâmetros.

No Capítulo 3, são apresentados os testes assintóticos da razão de verossimilhanças, escore e Wald através de uma abordagem geométrica e são discutidas as principais alternativas aos testes usuais: a realização de ajustes para a função de verossimilhança, correções da estatística da razão de verossimilhanças e o emprego do método *bootstrap* para obtenção de valores críticos.

Os resultados e análises do estudo de simulações de Monte Carlo para avaliar o comportamento dos testes da razão de verossimilhanças, escore, Wald assintóticos e *bootstrap*, assim como os testes da razão de verossimilhanças corrigidos pelo ajuste de Skovgaard (2001) para

realização de inferência em amostras finitas na classe de modelos de regressão beta com dispersão variável, são apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 5, é realizada uma aplicação dos testes apresentados no trabalho aos dados de habilidade de leitura de crianças disléxicas e não-disléxicas apresentados por Smithson & Verkuilen (2006). Por fim, no Capítulo 6, são expostas as principais conclusões do presente estudo.

1.3 Suporte Computacional

As avaliações numéricas apresentadas neste texto foram realizadas utilizando a linguagem matricial de programação Ox (versão 5.10) para o sistema operacional Windows. A linguagem Ox foi desenvolvida por Jurgen Doornik e está disponível gratuitamente para uso acadêmico em <http://www.doornik.com>. Para mais informações sobre o Ox, ver Doornik (2009).

As apresentações gráficas foram produzidas no ambiente de programação R (versão 2.12.0) para o sistema operacional Windows. R é um sistema integrado para computação estatística e geração de gráficos e encontra-se disponível gratuitamente em <http://www.r-project.org>. Para mais detalhes, ver Ihaka & Gentleman (1996), Cribari-Neto & Zarkos (1999) e Venables *et al.* (2009).

Para a digitação da presente dissertação, utilizou-se o sistema tipográfico L^AT_EX (Lamport, 1985), que consiste em uma série de macros e rotinas baseadas no sistema T_EX, criado por Donald Knuth. Particularmente, este volume foi tipografado na classe UFPETthesis, desenvolvida por Paulo G. S. da Fonseca e disponível em <http://www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis>.

Modelo de Regressão Beta

2.1 Introdução

A modelagem de variáveis aleatórias contínuas limitadas ao intervalo $(0, 1)$, tais como taxas e proporções, pode apresentar dificuldades quando realizada a partir do modelo de regressão linear clássico, uma vez que é possível que sejam gerados valores ajustados fora do suporte da resposta. Adicionalmente, devido à existência de heteroscedasticidade e de assimetria, que são típicas de medidas de taxas e proporções, inferências baseadas nas suposições do modelo linear clássico podem conduzir a conclusões incorretas.

Uma prática que costumava ser comum envolvia transformações na variável dependente de forma a corrigir os problemas supracitados. Os parâmetros estimados a partir desta abordagem, porém, deixam de ser interpretáveis em termos da resposta original. Adicionalmente, nem sempre uma transformação garante a estabilização da variância.

Neste contexto, Ferrari & Cribari-Neto (2004) propuseram um modelo baseado na suposição de que a variável resposta segue distribuição beta. A vantagem do emprego desta distribuição reside no fato de que, dependendo dos valores atribuídos aos parâmetros, sua função de densidade pode apresentar diferentes formas, sendo, portanto, bastante flexível. Johnson, Kotz & Balakrishnan (1995) apresentam exemplos em que o emprego da distribuição beta foi considerado o mais adequado para ajustar dados de taxas e proporções.

2.2 Distribuição Beta

Uma variável aleatória Y é dita seguir distribuição beta, denotado $Y \sim \mathcal{B}(p, q)$, se sua função de densidade é dada por

$$f(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (2.2.1)$$

onde $p > 0$, $q > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. A função de distribuição correspondente é definida por

$$F(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^y t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

O r -ésimo momento não-central de $\mathcal{B}(p, q)$ é

$$\mu_r = E(Y^r) = \int_0^1 y^r \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = \frac{B(p+r, q)}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+r)} = \frac{p(r)}{(p+q)_{(r)}},$$

onde $k_{(r)} = k \times (k+1) \times (k+2) \times \cdots \times (k+1-r)$. Assim, a média de $Y \sim (p, q)$ é dada por

$$E(Y) = \frac{p}{p+q} \quad (2.2.2)$$

e a variância é

$$Var(Y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \quad (2.2.3)$$

Através da escolha de diferentes valores para os parâmetros da função apresentada em (2.2.1), podem ser obtidas diferentes distribuições no intervalo unitário padrão. A Figura 2.1 apresenta algumas densidades beta juntamente com os valores de (p, q) correspondentes. Note que, se $p = q$, a função densidade é simétrica. Quando $q > p$, há assimetria à direita e, de forma análoga, quando $q < p$, existe assimetria à esquerda. Em particular, se $p = q = 1$, tem-se a distribuição uniforme padrão.

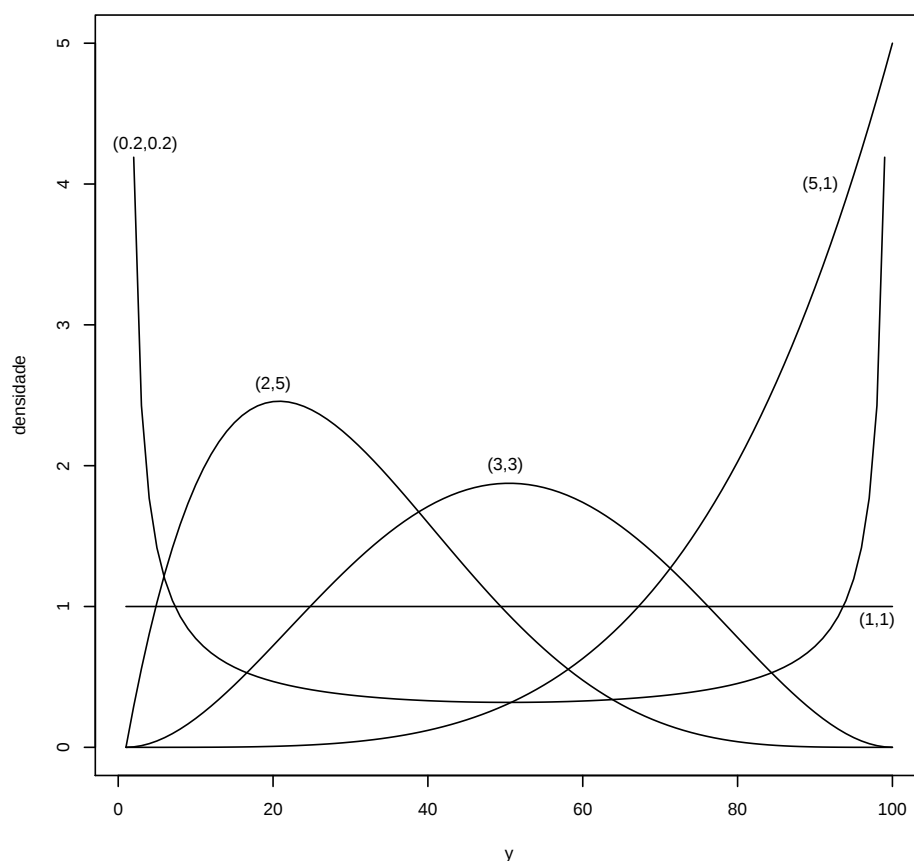


Figura 2.1 Densidades beta para diferentes valores de (p, q) .

2.3 Especificação do Modelo de Regressão Beta

Para a definição do modelo de regressão beta, Ferrari & Cribari-Neto (2004) consideraram uma parametrização alternativa para a função de densidade beta que permite a modelagem da média da resposta envolvendo um parâmetro de precisão, de forma semelhante aos modelos lineares generalizados (McCullagh & Nelder, 1989).

Sejam $\mu = p/(p+q)$ e $\phi = p+q$. Assim, $p = \mu\phi$ e $q = (1-\mu)\phi$. A partir de (2.2.2) e (2.2.3), segue que

$$E(Y) = \mu$$

e

$$\text{Var}(Y) = \frac{V(\mu)}{1+\phi},$$

sendo $V(\mu) = \mu(1-\mu)$ a função de variância. Portanto, μ é a média da variável aleatória Y e ϕ pode ser interpretado como parâmetro de precisão, pois, para μ fixo, quanto maior ϕ , menor será a variância de Y .

A densidade de Y pode, então, ser escrita como

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad y \in (0, 1), \quad \mu \in (0, 1), \quad \phi > 0. \quad (2.3.1)$$

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes e suponha que cada y_t , $t = 1, \dots, n$, segue distribuição beta reparametrizada, cuja densidade está apresentada em (2.3.1), com média μ_t e parâmetro de precisão dado por ϕ , desconhecido e constante para todo t . O modelo proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004) é obtido assumindo que uma função da média μ_t pode ser igualada ao preditor linear η_t , resultando em

$$g(\mu_t) = \eta_t = \sum_{i=1}^k x_{ti}\beta_i = x_t^\top \beta, \quad (2.3.2)$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é o vetor de parâmetros de regressão desconhecidos, $x_t^\top = (x_{t1}, \dots, x_{tk})$ é o vetor de observações de k variáveis explicativas, cujos valores são fixos e conhecidos com $k < n$, e a função de ligação $g : (0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ é estritamente monótona e duas vezes diferenciável.

Consequentemente, a partir deste modelo, tem-se que

$$\mu_t = g^{-1}(\eta_t) \quad (2.3.3)$$

e

$$\text{Var}(y_t) = \frac{V(g^{-1}(\eta_t))}{(1+\phi)}.$$

Note que a variância de y_t depende de μ_t , o que implica que esta não é constante para todas as observações. Ou seja, o modelo de regressão beta é naturalmente heteroscedástico, sendo mais adequado, portanto, a dados de taxas e proporções que, como foi anteriormente apontado, têm a heteroscedasticidade como característica inerente.

A função $g(\cdot)$ é denominada função de ligação e existem muitas possibilidades para a sua escolha, tais como a função logit $g(\mu_t) = \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right)$; probit $g(\mu_t) = \Phi^{-1}(\mu_t)$, onde $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão; log-log $g(\mu_t) = -\log\{-\log(\mu_t)\}$; complemento log-log $g(\mu_t) = \log\{-\log(1-\mu_t)\}$; e Cauchy $\tan(\pi(\mu-0.5))$.

Por estar definida continuamente no intervalo $(0, 1)$, a variável resposta tem sua média também limitada a este mesmo intervalo. A ideia do uso da função de ligação é, portanto, permitir que os parâmetros β_j estejam livres, sem restrições em $\mathbb{R}$. Ou seja, $\mu \in (0, 1)$, mas $g(\mu_t) = \eta_t$, e $\eta_t \in \mathbb{R}$, logo $g(\mu_t)$ tem domínio em $(0, 1)$ e contra-domínio na reta real, transformando valores do intervalo $(0, 1)$ em $\mathbb{R}$.

No modelo proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004), assumiu-se que o parâmetro de precisão, ϕ , é constante. É importante salientar, porém, que, em algumas aplicações, a dispersão (recíproco da precisão) não é constante para todas as observações. Em tais casos, o emprego de modelos que se baseiam nesta suposição pode conduzir a inferências incorretas.

Neste sentido, é necessário fazer uso de uma extensão do modelo de regressão beta formalmente introduzida por Simas, Barreto-Souza & Rocha (2010), em que, adicionalmente à modelagem da média, e de forma semelhante a esta, define-se uma estrutura de regressão para o parâmetro de precisão. Assume-se que $y_1, \dots, y_n$ são variáveis aleatórias independentes, em que cada y_t , $t = 1, \dots, n$, segue a densidade em (2.3.1) com média μ_t definida em (2.3.3) e precisão ϕ_t . Supõe-se ainda que

$$h(\phi_t) = \sum_{j=1}^q z_{tj} \gamma_j = \vartheta_t, \quad (2.3.4)$$

em que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos ($\gamma \in \mathbb{R}^q$), $z_{t1}, \dots, z_{tq}$ são observações de q covariáveis ($q < n$), assumidas fixas e conhecidas, e $h(\cdot) : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ é uma função estritamente monótona e duas vezes diferenciável. As funções de ligação mais comumente empregadas são o logaritmo, $h(\phi_t) = \log(\phi_t)$, e a raiz quadrada, $h(\phi_t) = \sqrt{\phi_t}$.

A estimação conjunta dos parâmetros no modelo de regressão beta é realizada por máxima verossimilhança. Para tanto, utiliza-se o logaritmo da função de verossimilhança, baseada numa amostra de n observações independentes, que pode ser expresso como

$$\ell(\beta, \gamma) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\mu_t, \phi_t), \quad (2.3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_t(\mu_t, \phi_t) = & \log \Gamma(\phi_t) - \log \Gamma(\mu_t \phi_t) - \log \Gamma((1 - \mu_t) \phi_t) + \\ & (\mu_t \phi_t - 1) \log y_t + \{(1 - \mu_t) \phi_t - 1\} \log(1 - y_t). \end{aligned}$$

Sejam

$$y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\} \quad (2.3.6)$$

e

$$\mu_t^* = \psi(\mu_t \phi_t) - \psi((1 - \mu_t) \phi_t), \quad (2.3.7)$$

em que $\psi(\cdot)$ é a função digama. A função escore, obtida pela diferenciação do logaritmo da função de verossimilhança com respeito aos parâmetros desconhecidos (β, γ) , é dada por $U = (U_\beta(\beta, \gamma), U_\gamma(\beta, \gamma))^\top$. A função escore de β pode ser escrita, em sua forma matricial, por

$$U_\beta(\beta, \gamma) = X^\top \Phi T(y^* - \mu^*),$$

em que X é uma matriz $n \times k$, onde $x_t^\top$ é a t -ésima linha dessa matriz, $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$, $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$,

$$\Phi = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}. \quad (2.3.8)$$

A função escore de γ , por sua vez, é dada por

$$U_\gamma(\beta, \gamma) = Z^\top H a,$$

em que Z é uma matriz $n \times q$, cuja t -ésima linha é $z_t^\top$, $H = \text{diag}\{1/h'(\phi_1), \dots, 1/h'(\phi_n)\}$ e $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$, em que $a_t = \mu_t(y_t^* - \mu_t^*) + \log(1 - y_t) - \psi((1 - \mu_t)\phi_t) + \psi(\phi_t)$.

Através da resolução do sistema

$$\begin{cases} U_\beta(\beta, \gamma) = 0 \\ U_\gamma(\beta, \gamma) = 0 \end{cases},$$

obtêm-se os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$. Estes estimadores não possuem forma fechada e, por isso, para obter as estimativas de máxima verossimilhança, faz-se necessário o emprego de algoritmos de otimização não-linear (Newton ou quasi-Newton); para mais detalhes, ver Nocedal & Wright (1999).

As segundas derivadas da função de log-verossimilhança com relação aos parâmetros desconhecidos resultam na matriz de informação observada, que é definida por

$$J = J(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} \\ J_{\gamma\beta} & J_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

em que

$$J_{\beta\beta} = X^\top \Phi Q X,$$

$$J_{\beta\gamma} = J_{\gamma\beta}^\top = X^\top F T H Z$$

e

$$J_{\gamma\gamma} = Z^\top \mathcal{V} Z,$$

sendo $\psi'(\cdot)$ a função trigama, Φ é a matriz definida em (2.3.8), $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$, com

$$q_t = \left\{ \phi_t [\psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t)\phi_t)] + (y_t^* - \mu_t^*) \frac{g''(\mu_t)}{g'(\mu_t)} \right\} \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2}.$$

Adicionalmente, $F = \text{diag}\{f_1, \dots, f_n\}$, com

$$f_t = c_t - (y_t^* - \mu_t^*)$$

e

$$c_t = \phi_t[\psi'(\mu_t\phi_t)\mu_t - \psi'((1-\mu_t)\phi_t)(1-\mu_t)]; \quad (2.3.9)$$

 $\mathcal{V} = \text{diag}\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, com

$$\nu_t = d_t + a_t \frac{h''(\phi_t)}{\{h'(\phi_t)\}^3}$$

e

$$d_t = [\psi'(\mu_t\phi_t)\mu_t^2 + \psi'((1-\mu_t)\phi_t)(1-\mu_t)^2 - \psi'(\phi_t)] \frac{1}{\{h'(\phi_t)\}^2}. \quad (2.3.10)$$

A matriz de informação de Fisher, por sua vez, é a esperança da matriz de informação observada, J , sendo dada por

$$K = K(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\gamma} \\ K_{\gamma\beta} & K_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

com

$$K_{\beta\beta} = X^\top \Phi W X,$$

$$K_{\beta\gamma} = K_{\gamma\beta}^\top = X^\top C T H Z$$

e

$$K_{\gamma\gamma} = Z^\top D Z,$$

em que $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$, com

$$w_t = \phi_t \{ \psi'(\mu_t\phi_t) + \psi'((1-\mu_t)\phi_t) \} \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2}; \quad (2.3.11)$$

$C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_n\}$, com c_t definido em (2.3.9); e $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, com d_t definido em (2.3.10).

No caso em que a dispersão é constante, ou seja, $\phi_1 = \dots = \phi_n = \phi$, as expressões em (2.3.9), (2.3.10) e (2.3.11) passam a ser, respectivamente,

$$c_t = \phi[\psi'(\mu_t\phi)\mu_t - \psi'((1-\mu_t)\phi)(1-\mu_t)],$$

$$d_t = [\psi'(\mu_t\phi)\mu_t^2 + \psi'((1-\mu_t)\phi)(1-\mu_t)^2 - \psi'(\phi)]$$

e

$$w_t = \phi[\psi'(\mu_t\phi) + \psi'((1-\mu)\phi)] \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2}.$$

É importante notar que, diferentemente do que ocorre na classe dos modelos lineares generalizados (McCullagh & Nelder, 1989), os parâmetros β e γ não são ortogonais no modelo de regressão beta.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros, sob condições de regularidade e quando a amostra é grande, têm distribuição aproximada dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} \sim N_{k+q} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, K^{-1} \right),$$

em que

$$K^{-1} = K^{-1}(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} K^{\beta\beta} & K^{\beta\gamma} \\ K^{\gamma\beta} & K^{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

é a inversa da matriz de informação de Fisher, obtida por Ferrari & Cribari-Neto (2004) utilizando uma expressão padrão para a inversa de matrizes particionadas (Rao, 1973). Seus blocos são dados por

$$\begin{aligned} K^{\beta\beta} &= (X^\top \Phi W X - X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1}Z^\top HTC^\top X)^{-1}, \\ K^{\beta\gamma} &= (K^{\gamma\beta})^\top = -K^{\beta\beta}X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

e

$$K^{\gamma\gamma} = (Z^\top DZ)^{-1} \{I_q + (Z^\top HTC^\top X)K^{\beta\beta}X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1}\}, \quad (2.3.13)$$

em que I_q é matriz identidade de ordem q .

Intervalos de confiança de cobertura $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, para β_i , $i = 1, \dots, k$, e γ_j , $j = 1, \dots, q$, têm limites dados, respectivamente, por

$$\widehat{\beta}_i \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \text{ep}(\widehat{\beta}_i)$$

e

$$\widehat{\gamma}_j \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \text{ep}(\widehat{\gamma}_j),$$

onde $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função quantil de uma variável aleatória normal padrão e $\text{ep}(\widehat{\beta}_i)$ e $\text{ep}(\widehat{\gamma}_j)$ são, respectivamente, os erros-padrão de $\widehat{\beta}_i$ e $\widehat{\gamma}_j$. Os erros-padrão das respectivas estimativas de máxima verossimilhança são obtidos pela raiz quadrada do i -ésimo elemento da diagonal da matriz $\widehat{K}^{\beta\beta} = K^{\beta\beta}(\widehat{\theta})$, com $K^{\beta\beta}$ definida em (2.3.12), e da raiz quadrada do j -ésimo elemento da diagonal da matriz $\widehat{K}^{\gamma\gamma} = K^{\gamma\gamma}(\widehat{\theta})$, com $K^{\gamma\gamma}$ definida em (2.3.13). Adicionalmente, regiões de confiança aproximadas para conjuntos de parâmetros de regressão podem ser obtidas invertendo um dos testes assintóticos apresentados na Seção 3 a seguir.

Por fim, um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ_t , a média da variável resposta para um dado vetor de covariáveis $x_t^\top$, pode ser obtido por

$$[g^{-1}(\widehat{\eta}_t - \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \text{ep}(\widehat{\eta}_t)), g^{-1}(\widehat{\eta}_t + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \text{ep}(\widehat{\eta}_t))],$$

sendo $\eta_t = x_t^\top \beta$ e o erro-padrão de $\widehat{\eta}_t$ é dado por $\text{ep}(\eta_t) = (x_t^\top \widehat{K}^{\beta\beta}(\widehat{\beta})x_t)^{\frac{1}{2}}$. Este intervalo é válido para funções de ligação estritamente crescentes.

Uma abordagem mais detalhada do processo de estimação dos parâmetros consta em Ferrari & Cribari-Neto (2004), enquanto que um estudo acerca do comportamento das estimativas e estratégias de estimação pontual e intervalar pode ser encontrado em Ospina, Cribari-Neto & Vasconcellos (2006).

No que tange à análise de diagnóstico para regressão beta, ver Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto (2008a), para análise de resíduos, e Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto (2008b), para um estudo sobre análise de influência.

Relativamente a extensões do modelo original proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004), destaca-se o trabalho de Simas, Barreto-Souza & Rocha (2010), que, além do modelo de regressão beta com dispersão variável, consideraram, também, modelos não-lineares e realizaram correção de viés.

No caso em que os dados assumem continuamente valores nos intervalos $[0, 1]$, $[0, 1)$ ou $(0, 1]$, a distribuição beta apresentada na Seção 2.2 não é adequada. Ospina & Ferrari (2010) propuseram a distribuição beta inflacionada, que permite a modelagem deste tipo de dados por meio de distribuições de mistura entre uma distribuição beta e uma distribuição de Bernoulli degenerada no ponto c ($c = 0$ ou $c = 1$). Como uma extensão natural do modelo proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004), Ospina (2008) introduziu modelos de regressão beta inflacionados e explorou seus aspectos inferenciais e de diagnóstico.

Testes de Hipóteses

3.1 Introdução

Após a estimação dos parâmetros populacionais, em geral, realizam-se testes a fim de determinar se hipóteses feitas sobre estes parâmetros são suportadas por evidências obtidas a partir de dados amostrais. Neste contexto, testes baseados na função de verossimilhança são amplamente empregados devido a suas propriedades de otimalidade. Os procedimentos mais frequentemente utilizados são os testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald, que são assintoticamente equivalentes sob a hipótese nula.

Estes testes, porém, são realizados com base em valores críticos obtidos a partir de aproximações assintóticas, o que, em geral, causa considerável distorção de tamanho em amostras finitas. Tal distorção pode ser reduzida através de refinamentos assintóticos, produzidos por ajustes realizados sobre a função de verossimilhança, por correções feitas diretamente à estatística da razão de verossimilhanças ou, alternativamente, por emprego de testes baseados em *bootstrap*.

No caso dos modelos de regressão beta, as estatísticas dos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald foram apresentadas por Ferrari & Cribari-Neto (2004). Um teste de erro de especificação, baseado no teste RESET (Ramsey, 1969), para o modelo com dispersão constante foi desenvolvido por Cribari-Neto & Lima (2007). Ferrari & Pinheiro (2011), visando realizar inferências mais precisas em amostras finitas, derivaram o ajuste de Skovgaard (2001) para esta classe de modelos. As autoras concluíram que as estatísticas ajustadas propostas, sob a hipótese nula, têm distribuição mais próxima da distribuição qui-quadrado de referência que a estatística original.

Neste capítulo, são apresentados os testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald, além do ajuste de Skovgaard (2001) para a estatística de razão de verossimilhanças derivado por Ferrari & Pinheiro (2011) para o modelo de regressão beta. Adicionalmente, é introduzido o conceito de *bootstrap* e é descrito o procedimento para a realização de testes de hipóteses baseados em *bootstrap* paramétrico.

3.2 Testes Baseados em Verossimilhança

A função de verossimilhança contém toda a informação relevante para fazer inferência acerca de um vetor de parâmetros de interesse. Portanto, dentre as técnicas para avaliação de modelos estatísticos, os testes baseados na função de verossimilhança são amplamente empregados. A função de verossimilhança “informa a ordem natural de preferência entre diversas possibili-

dades de θ (...) Generalizando, entre os possíveis candidatos para estimar o parâmetro verdadeiro (...) a partir dos mesmos dados y , o vetor de parâmetros mais plausível é aquele de maior verossimilhança” (Cordeiro, 1999, p. 5).

Seja Θ o espaço paramétrico e considere o teste de $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta^{(0)}$ versus $H_1 : \theta \neq \theta^{(0)}$, sendo $\theta^{(0)} \in \Theta_0$, o espaço paramétrico restrito, $\Theta_0 \subset \Theta$. A razão de verossimilhanças,

$$\frac{L(\theta; y)}{L(\theta^{(0)}; y)},$$

mensura o quanto as evidências estatísticas corroboram com valores para o vetor de parâmetros diferentes daqueles especificados em H_0 , ou seja, valores grandes da razão de verossimilhanças não apóiam a plausibilidade da hipótese nula. A estatística do teste da razão de verossimilhanças pode ser expressa por

$$RV = 2[\ell(\widehat{\theta}) - \ell(\theta^{(0)})],$$

em que $\ell(\theta)$ é o logaritmo da função de verossimilhança relativo ao vetor θ e $\widehat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro que indexa o modelo irrestrito. Sob condições de regularidade e sob a hipótese nula, RV se distribui, assintoticamente, como uma χ_r^2 , sendo r o número de parâmetros testados (Wilks, 1938).

Além da razão de verossimilhanças, as estatísticas escore (Rao, 1948) e Wald (Wald, 1943) são as mais comumente utilizadas para medir a distância entre as hipóteses nula e alternativa descritas anteriormente. Sejam $U(\theta)$ a função escore e $K(\theta)$ a informação esperada relacionadas ao vetor θ . As estatísticas escore e Wald são expressas, respectivamente, por

$$S_R = U^\top(\theta^{(0)})K^{-1}(\theta^{(0)})U(\theta^{(0)}) \quad (3.2.1)$$

e

$$W = (\widehat{\theta} - \theta^{(0)})^\top K(\widehat{\theta})(\widehat{\theta} - \theta^{(0)}). \quad (3.2.2)$$

Sob condições de regularidade e sob a hipótese nula, S_R e W seguem, assintoticamente, distribuição χ^2 com r graus de liberdade e são, assintoticamente, equivalentes a RV .

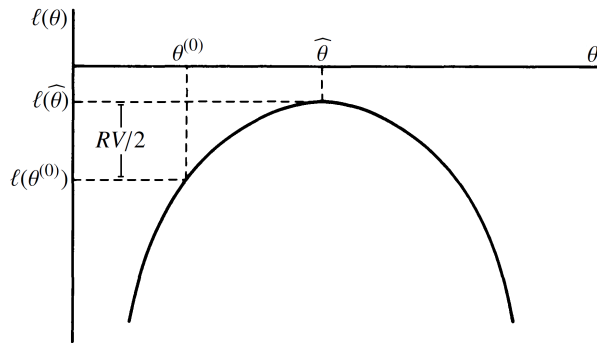


Figura 3.1 Função de log-verossimilhança (θ escalar): teste da razão de verossimilhanças.

Uma interpretação geométrica destas estatísticas foi apresentada por Buse (1982) para o caso em que θ é escalar. Esta abordagem, quando aplicada à estatística da razão de verossimilhanças e ao processo de derivação das estatísticas Wald e escore, pode ser bastante útil para a

compreensão destes testes. Pela observação da Figura 3.1, é possível perceber que o valor de $RV/2$ depende da diferença $\widehat{\theta} - \theta^{(0)}$ e da curvatura do logaritmo da função de verossimilhança, denotada por $C(\widehat{\theta})$ e definida como o valor absoluto de $\frac{d^2 \log L}{d\theta^2}$ avaliado em $\theta = \widehat{\theta}$. Para dado valor de $\widehat{\theta} - \theta^{(0)}$, quanto maior a curvatura, maior será a distância $RV/2$. Este mesmo comportamento é observado com a variação da diferença entre $\widehat{\theta}$ e $\theta^{(0)}$ no caso em que o valor da curvatura é dado.

O teste da razão de verossimilhanças é formulado em termos da diferença $L(\widehat{\theta}) - L(\theta^{(0)})$ e o teste Wald, por sua vez, considera o quadrado da distância entre $\widehat{\theta}$ e $\theta^{(0)}$. No entanto, como ilustrado pela Figura 3.2, conjuntos de dados distintos podem resultar em valores iguais para $(\widehat{\theta} - \theta^{(0)})^2$. Do ponto de vista do teste da razão de verossimilhanças, porém, devido à diferença de curvatura de suas funções de log-verossimilhança, um destes conjuntos de dados é menos favorável à hipótese nula e, portanto, é preciso que a distância quadrada seja ponderada por $C(\widehat{\theta})$. Assim, a estatística Wald é definida por

$$W = (\widehat{\theta} - \theta^{(0)})^2 C(\widehat{\theta}).$$

Usualmente, contudo, pondera-se $(\widehat{\theta} - \theta^{(0)})^2$ em termos da curvatura média $K(\widehat{\theta})$, em que $K(\theta) = E(d^2 \log L / d\theta^2)$, a matriz de informação esperada. Esta abordagem conduz à estatística apresentada em (3.2.2).

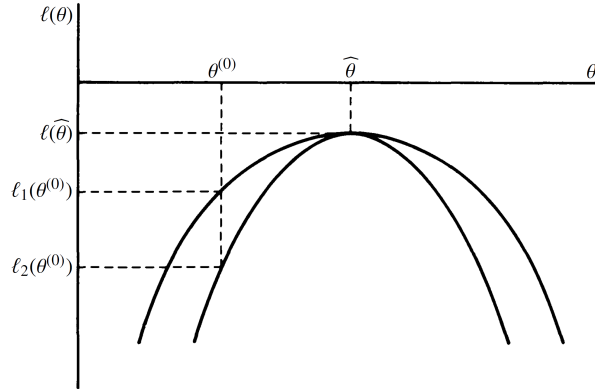


Figura 3.2 Funções de log-verossimilhança (θ escalar): teste Wald.

Enquanto o teste da razão de verossimilhanças compara as hipóteses nula e alternativa e o teste Wald considera a última, o teste escore baseia-se nas características da função de verossimilhança quando as restrições da hipótese nula são impostas. A lógica por trás deste teste é que a diferença entre as estimativas irrestrita e restrita será pequena quando a hipótese nula for verdadeira e, portanto, o quadrado de $U(\theta^{(0)})$ pode ser usado como uma medida da distância entre $\widehat{\theta}$ e $\theta^{(0)}$, pois $U(\widehat{\theta}) = 0$, com $U(\theta) = d \log L / d\theta$, a função escore associada ao parâmetro θ . De forma análoga ao que é observado na construção da estatística Wald, o mesmo valor para a função escore pode ser obtido para diferentes conjuntos de dados, porém a log-verossimilhança restrita de um deles será mais próxima do máximo (Figura 3.3). Aqui, novamente emprega-se a curvatura $C(\widehat{\theta})$ como ponderação. Neste caso, no entanto, quanto maior a curvatura, menor

a distância $\widehat{\theta} - \theta^{(0)}$ e, portanto, utiliza-se o inverso da curvatura, resultando na descrição da estatística escore por

$$S_R = (U(\theta^{(0)}))^2 C^{-1}(\widehat{\theta}).$$

Na prática, faz-se uso da versão assintoticamente equivalente definida em (3.2.1).

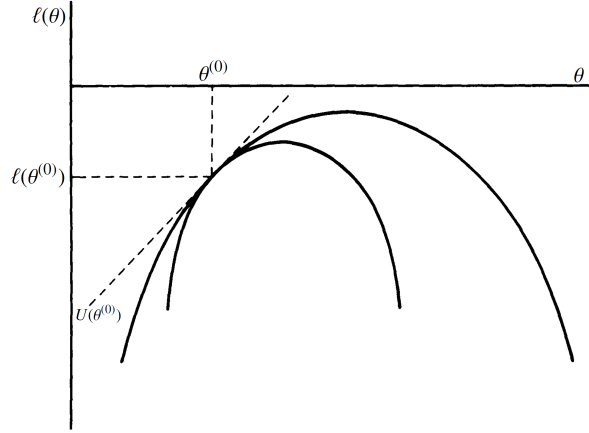


Figura 3.3 Funções de log-verossimilhança (θ escalar): teste escore.

Desta abordagem geométrica, é possível perceber que a estatística da razão de verossimilhanças fundamenta-se na diferença vertical entre $\widehat{\theta}$ e $\theta^{(0)}$, o teste Wald baseia-se na diferença horizontal e o teste escore, na inclinação da função de log-verossimilhança avaliada em $\theta^{(0)}$. Segundo Engle (1984, p. 782), "each is a reasonable measure of the distance between H_0 and H_1 and it is not surprising that when L is a smooth curve well approximated by a quadratic [likelihood function], they all give the same test".

As estatísticas da razão de verossimilhanças, escore e Wald foram apresentadas, nesta seção, para o caso em que não há parâmetros de perturbação. Este problema será abordado na Seção 3.3. Nas próximas duas subseções, as expressões das três estatísticas serão apresentadas para a realização de testes sobre os parâmetros β e γ do modelo de regressão beta especificado na Seção 2.3.

3.2.1 Testes de Hipóteses em Regressão Beta Sobre o Vetor de Parâmetros β

Seja o vetor $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, que contém n observações independentes, cada y_t seguindo a densidade definida em (2.3.1). Suponha que μ e ϕ relacionam-se, respectivamente, com β e γ por meio de (2.3.2) e (2.3.4). Considere o teste da hipótese nula

$$\mathcal{H}_0 : \beta_{(r)} = \beta^{(0)} \quad (3.2.3)$$

versus a hipótese alternativa

$$\mathcal{H}_1 : \beta_{(r)} \neq \beta^{(0)},$$

em que $\beta = (\beta_{(r)}^\top, \beta_{(k-r)}^\top)^\top$ e $\beta^{(0)}$ é um vetor r -dimensional cujos valores são conhecidos.

Neste contexto, a estatística da razão de verossimilhanças é dada por

$$RV = 2 \left\{ \ell(\widehat{\beta}, \widehat{\gamma}) - \ell(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \right\},$$

em que $\ell(\beta, \gamma)$ é o logaritmo da função de verossimilhança definido em (2.3.5), $(\widehat{\beta}, \widehat{\gamma})$ e $(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ são, respectivamente, os estimadores de máxima verossimilhança de (β, γ) irrestrito e restrito. O estimador restrito é obtido pela imposição da hipótese nula.

Sejam $U_{(r)\beta}$ um vetor coluna r -dimensional contendo os r elementos iniciais da função escore de β e $K_{(r)(r)}^{\beta\beta}$ a matriz $m \times m$ formada das r linhas iniciais e das r colunas iniciais da matriz K^{-1} , definida em (2.3). A estatística escore para testar a hipótese em (3.2.3) pode ser escrita como

$$S_R = \widetilde{U}_{(r)\beta}^\top \widetilde{K}_{(r)(r)}^{\beta\beta} \widetilde{U}_{(r)\beta},$$

em que til indica que as quantidades são avaliadas no estimador de máxima verossimilhança restrito.

A estatística Wald, por sua vez, pode ser definida, no modelo de regressão beta, como

$$W = (\widehat{\beta}_{(r)} - \beta^{(0)})^\top \left(\widehat{K}_{(r)(r)}^{\beta\beta} \right)^{-1} (\widehat{\beta}_{(r)} - \beta^{(0)}),$$

em que $\left(\widehat{K}_{(r)(r)}^{\beta\beta} \right)^{-1}$ é igual a $\left(K_{(r)(r)}^{\beta\beta} \right)^{-1}$ avaliado no estimador de máxima verossimilhança irrestrito e $\widehat{\beta}_{(r)}$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\beta_{(r)}$.

Sob condições usuais de regularidade e sob $\mathcal{H}_0$, RV , S_R e W convergem em distribuição para $\chi_{(r)}^2$. Assim, os testes acima podem ser realizados usando valores críticos aproximados obtidos como quantis da distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade.

3.2.2 Testes de Hipóteses em Regressão Beta Sobre o Vetor de Parâmetros γ

Aqui, o interesse reside em testar a hipótese nula

$$\mathcal{H}_0 : \gamma_{(r)} = \gamma^{(0)} \quad (3.2.4)$$

contra a hipótese alternativa

$$\mathcal{H}_1 : \gamma_{(r)} \neq \gamma^{(0)},$$

em que $\gamma = (\gamma_{(q-r)}^\top, \gamma_{(r)}^\top)^\top$ e $\gamma^{(0)}$ é um vetor r -dimensional cujos valores são conhecidos.

Sejam $U_{(r)\gamma}$ um vetor coluna r -dimensional contendo os r elementos finais da função escore de γ e $K_{(r)(r)}^{\gamma\gamma}$ a matriz $m \times m$ formada das r linhas finais e das r colunas finais da matriz K^{-1} , definida em (2.3). As estatísticas da razão de verossimilhanças (RV), escore (S_R) e Wald (W) são dadas, respectivamente, por

$$RV = 2 \left\{ \ell(\widehat{\beta}, \widehat{\gamma}) - \ell(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \right\},$$

$$S_R = \widetilde{U}_{(r)\gamma}^\top \widetilde{K}_{(r)(r)}^{\gamma\gamma} \widetilde{U}_{(r)\gamma}$$

e

$$W = (\widehat{\gamma}_{(r)} - \gamma^{(0)})^\top \left(\widehat{K}_{(r)(r)}^{\gamma\gamma} \right)^{-1} (\widehat{\gamma}_{(r)} - \gamma^{(0)}),$$

em que til indica que as quantidades são avaliadas no estimador de máxima verossimilhança restrito enquanto chapéu indica avaliação no estimador irrestrito.

Sob condições usuais de regularidade e sob $\mathcal{H}_0$, RV , S_R , W convergem em distribuição para $\chi^2_{(r)}$. Assim, os testes podem ser realizados usando valores críticos aproximados obtidos como quantis da distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade.

Note que testar a hipótese nula de dispersão fixa, isto é,

$$\mathcal{H}_0 : \phi_1 = \cdots = \phi_n = \phi,$$

é equivalente a testar $\mathcal{H}_0 : \gamma_{(q-1)} = 0$, em que $\gamma_{(q-1)} = (\gamma_2, \dots, \gamma_q)^\top$, no modelo definido em (2.3.4) com $z_{t1} = 1$, $t = 1, \dots, n$.

3.3 Ajustes para a Estatística da Razão de Verossimilhanças

Em amostras finitas, em geral, há considerável distorção do tamanho dos testes, uma vez que seus valores críticos são obtidos a partir de aproximações válidas em grandes amostras. Com o objetivo de melhorar tais aproximações, foram propostas várias correções para as estatísticas de testes assintóticos. Para uma revisão da literatura sobre o assunto, ver Cribari-Neto & Cordeiro (1996).

Adicionalmente, na presença de parâmetros de perturbação, a inferência pode basear-se em funções de verossimilhanças marginal ou condicional, que só podem ser obtidas para modelos com algumas estruturas particulares. Para os demais modelos, é possível obter uma pseudo-verossimilhança, denominada função de verossimilhança perfilada. Entretanto, algumas propriedades básicas da função de verossimilhança não valem para a função de verossimilhança perfilada. Por exemplo, o valor esperado da função escore não é necessariamente zero e a informação pode apresentar vies. Adicionalmente, a aproximação pela qui-quadrado da distribuição nula de estatísticas de testes provenientes da verossimilhança perfilada pode ser pobre, caso haja muitos parâmetros de incômodo relativamente ao tamanho amostral.

Visando reduzir a influência dos parâmetros de perturbação sobre a inferência realizada sobre os parâmetros de interesse, diversos ajustes à função de verossimilhança perfilada foram propostos na literatura (Barndorff-Nielsen, 1983, 1994; Cox & Reid, 1987, 1992; McCullagh & Tibshirani, 1990; Stern, 1997). Estas correções promovem a redução do grau da curvatura do logaritmo da função, que é tipicamente alto, uma vez que a incerteza inerente à estimação do parâmetro de perturbação é desprezada na verossimilhança perfilada. Alguns destes ajustes, como aquele proposto por Stern (1997), resultam, ainda, na diminuição dos vieses relacionados à função escore e à informação.

Quando o parâmetro de interesse é escalar, é possível recorrer à estatística da razão de verossimilhanças sinalizada dada por

$$R = \text{sinal}(\widehat{\omega} - \omega)[2\{\ell(\widehat{\omega}, \widehat{\psi}) - \ell(\omega, \widehat{\psi}_\omega)\}]^{1/2},$$

em que ω é o vetor r -dimensional de parâmetros de interesse e ψ , o vetor s -dimensional de parâmetros de perturbação. Note que há a substituição de ψ por $\widehat{\psi}_\omega$, a estimativa de máxima de verossimilhança de ψ para ω fixo.

A distribuição nula desta estatística pode ser aproximada pela distribuição normal padrão com erro de ordem $n^{-1/2}$. Esta aproximação, porém, pode ser bastante imprecisa em amostras de tamanho pequeno. Neste sentido, ajustes a esta estatística foram propostos.

Barndorff-Nielsen (1986, 1991) apresentou uma estatística sinalizada modificada definida como

$$R^* = R + R^{-1} \log(u/R), \quad (3.3.1)$$

em que u envolve quantidades resultantes de derivadas com respeito ao espaço amostral. Sob $\mathcal{H}_0$, esta estatística tem distribuição normal padrão com erro de ordem $n^{-3/2}$. A desvantagem do uso desta estatística é sua difícil derivação e a exigência da ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e de incômodo.

3.3.1 Ajuste de Skovgaard

Buscando um ajuste de obtenção mais simples, Skovgaard (1996) propôs aproximações para a modificação desenvolvida por Barndorff-Nielsen. Posteriormente, Skovgaard (2001) apresentou uma generalização a esta estatística de grande aplicabilidade, pois contempla o caso em que o parâmetro de interesse é multidimensional. Adicionalmente, este ajuste não exige que os parâmetros sejam ortogonais e pode ser aplicado diretamente à estatística da razão de verossimilhanças.

A estatística da razão de verossimilhanças corrigida pelo ajuste de Skovgaard (2001) foi empregada por Ferrari & Cysneiros (2008), que a aplicaram a modelos não-lineares da família exponencial. Através de avaliações numéricas, as autoras compararam o desempenho de testes baseados na função de verossimilhança usual ao teste cuja estatística é corrigida pelo ajuste de Skovgaard (2001) e a uma versão do teste da razão de verossimilhanças perfiladas modificadas com correção de Bartlett (Cysneiros & Ferrari, 2006). Os resultados favorecem os testes corrigidos.

Melo, Vasconcellos & Lemonte (2009), por sua vez, estudaram o comportamento da estatística corrigida quando são realizados testes de hipóteses simples em uma nova classe de modelos proposta pelos autores, em que a variável resposta segue distribuição Dirichlet e os parâmetros que indexam a distribuição se relacionam com covariadas e coeficientes de regressão desconhecidos. Por meio de simulações de Monte Carlo, os autores mostram que, comparativamente ao teste da razão de verossimilhanças usual, o teste corrigido é mais confiável em amostras finitas.

Para a classe de modelos de regressão beta, Ferrari & Pinheiro (2011) deduziram o ajuste proposto por Skovgaard (2001) para modelos lineares e não-lineares. As autoras realizaram simulações de Monte Carlo para avaliar os desempenhos dos testes baseados na estatística corrigida em comparação àquele proveniente da estatística usual e concluíram que os primeiros têm melhor desempenho em termos de controle da probabilidade de erro de tipo I.

Sejam U , J e K a função score e as informações observada e esperada, respectivamente. Adicionalmente, denote por $J_{\psi\psi}$ a matriz de informação observada correspondente a ψ , excluindo-se as linhas e colunas referentes ao parâmetro de interesse. Considere ainda a seguinte notação: $\widehat{J} = J(\widehat{\theta})$, $\widetilde{J} = J(\widetilde{\theta})$, $\widehat{K} = K(\widehat{\theta})$, $\widetilde{K} = K(\widetilde{\theta})$ e $\widetilde{U} = U(\widetilde{\theta})$, em que $\theta^\top = (\omega^\top, \psi^\top)$ e seus estimadores de máxima verossimilhança irrestrito e restrito são, respectivamente, $\widehat{\theta}$ e $\widetilde{\theta}$.

A estatística de teste corrigida proposta por Skovgaard (2001) é dada por

$$RV^c = RV - 2 \log \xi,$$

em que

$$\xi = \frac{\{\|\widehat{K}\|\widehat{K}\|\widehat{J}_{\psi\psi}\}\}^{1/2}}{|\widehat{Y}||[\widehat{K}\widehat{Y}^{-1}\widehat{J}\widehat{K}^{-1}\widehat{Y}]_{\psi\psi}|^{1/2}} \frac{\{\widehat{U}^\top \widehat{Y}^{-1} \widehat{K} \widehat{J}^{-1} \widehat{Y} \widehat{K}^{-1} \widehat{U}\}^{r/2}}{RV^{r/2-1} \widehat{U}^\top \widehat{Y}^{-1} \widehat{U}},$$

com $\widehat{Y}$ e $\widehat{U}$ sendo obtidos, respectivamente, de

$$\mathcal{Y} = E_{\theta_1}[U(\theta_1)U^\top(\theta)]$$

e

$$v = E_{\theta_1}[U(\theta_1)(\ell(\theta_1) - \ell(\theta))],$$

substituindo θ_1 por $\widehat{\theta}$ e θ por $\bar{\theta}$ depois que os valores esperados são calculados.

Uma versão assintoticamente equivalente é definida como

$$RV_2^c = RV \left(1 - \frac{1}{RV} \log \xi \right)^2.$$

Sob $\mathcal{H}_0$, RV^c e RV_2^c seguem distribuição χ_r^2 . Simulações de Monte Carlo apresentadas pelo autor mostram que, em algumas situações, RV^c tem desempenho melhor que RV_2^c . Esta última, contudo, é sempre não-negativa e se reduz a $(R^*)^2$ quando $r = 1$, com R^* definido em (3.3.1).

Considere, agora, o modelo apresentado na Seção 2.3 e que é definido por (2.3.2) e (2.3.4). Sejam y_t^* e μ_t^* como definidos em (2.3.6) e (2.3.7), respectivamente, e $v_t^* = \text{Var}(y_t^*) = \psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t)\phi_t)$. Defina $y_t^\dagger = \log(1 - y_t)$, $\mu_t^\dagger = E(y_t^\dagger) = \psi((1 - \mu_t)\phi_t) - \psi(\phi_t)$, $v_t^\dagger = \text{Var}(y_t^\dagger) = \psi'((1 - \mu_t)\phi_t) - \psi'(\phi_t)$ e $c_t^{*\dagger} = \text{cov}(y_t^*, y_t^\dagger) = -\psi'((1 - \mu_t)\phi_t)$. Os valores esperados que aparecem em v e $\mathcal{Y}$ podem ser obtidos em função dos dois primeiros momentos de y_t^* e $y_t^\dagger$ e das covariâncias entre estas duas variáveis, para $t = 1, \dots, n$. Desta forma, Ferrari & Pinheiro (2011) mostraram que

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} X^\top \widehat{\Phi} \widehat{T} \widehat{V}^* \widehat{T} \widehat{\Phi} X & X^\top \widehat{\Phi} \widehat{T} (\widehat{\mathcal{M}} \widehat{V}^* + \widehat{C}^{*\dagger}) \widehat{H} Z \\ Z^\top \widehat{H} (\widehat{\mathcal{M}} \widehat{V}^* + \widehat{C}^{*\dagger}) \widehat{T} \widehat{\Phi} X & Z^\top \widehat{H} [\widehat{\mathcal{M}} \widehat{V}^* \widehat{\mathcal{M}} + (\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{M}}) \widehat{C}^{*\dagger} + \widehat{V}^\dagger] \widehat{H} Z \end{bmatrix}$$

e

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} X^\top \widehat{\Phi} \widehat{T} [\widehat{V}^* (\widehat{\Phi} \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\Phi} \widehat{\mathcal{M}}) + \widehat{C}^{*\dagger} (\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi})] \iota \\ Z^\top \widehat{H} [(\widehat{\mathcal{M}} \widehat{V}^* + \widehat{C}^{*\dagger}) (\widehat{\Phi} \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\Phi} \widehat{\mathcal{M}}) + (\widehat{\mathcal{M}} \widehat{C}^{*\dagger} + \widehat{V}^\dagger) (\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi})] \iota \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{M} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mathcal{M}^* = \text{diag}(\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$, $y^\dagger = (y_1^\dagger, \dots, y_n^\dagger)$, $\mu^\dagger = (\mu_1^\dagger, \dots, \mu_n^\dagger)$ e $C^{*\dagger} = \text{diag}(c_1^{*\dagger}, \dots, c_n^{*\dagger})$. Aqui, ι denota um vetor coluna n -dimensional formado por uns.

3.4 Testes de Hipóteses Baseados em Bootstrap

Outra alternativa às aproximações assintóticas para as distribuições nulas das estatísticas da razão de verossimilhanças, escore e Wald apresentadas na Seção 3.2 é realizar esses testes com base em valores críticos obtidos a partir de um esquema de reamostragem *bootstrap*.

Seja $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ uma amostra de dados de uma população. Este conjunto de dados pode ser visto como composto de realizações das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $Y_1, \dots, Y_n$, cujas funções de distribuição e densidade são denotadas, respectivamente, por F e f . Quando o interesse reside em realizar inferências sobre uma determinada característica populacional, utiliza-se uma estatística $T(Y, F)$. Para tanto, porém, é preciso conhecer sua distribuição amostral, que pode ser aproximada por diversas técnicas, inclusive *bootstrap*.

O método *bootstrap* (Efron, 1979) estima F a partir de uma distribuição $\widehat{F}$ baseada em y e, então, a partir de reamostras $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ geradas de $\widehat{F}$, estima-se a distribuição amostral de $T(Y^*, \widehat{F})$, a qual, por sua vez, é utilizada para estimar a distribuição amostral de interesse. Em outras palavras, a técnica *bootstrap* consiste em aplicar um esquema de reamostragem com reposição à amostra original y , a fim de realizar inferências sobre uma estatística através de sua distribuição aproximada obtida a partir das reamostras y^* .

Suponha a existência de um modelo matemático cujas constantes e parâmetros θ determinam completamente f . Quando θ é estimado por $\widehat{\theta}$, sua substituição no modelo gera o modelo ajustado, com função de distribuição acumulada $\widehat{F}(y) = F_{\widehat{\theta}}(y)$, a qual pode ser utilizada para fazer inferências a partir de T . Nestes casos, o procedimento *bootstrap* é dito ser paramétrico. Por outro lado, quando $\widehat{F}$ é uma função que designa uma massa de probabilidade igual $1/n$ para cada ponto amostral y_i , denominada função de distribuição empírica, o método *bootstrap* é dito ser não-paramétrico.

A técnica *bootstrap* permite obter medidas de interesse sem a necessidade de fazer suposições fortes ou de realizar cálculos analíticos complexos, sendo, portanto, um procedimento simples e automático, apesar de computacionalmente custoso. Adicionalmente, esse método pode ser aplicado a diversos problemas estatísticos, como a estimação de erro-padrão e viés, a construção de intervalos de confiança, a correção de viés e a realização de testes de hipóteses; para mais detalhes, ver Efron & Tibshirani (1993) e Davison & Hinkley (1997).

Segundo Young (1994), porém, os procedimentos *bootstrap* desenvolvidos para lidar com problemas mais complexos geralmente não são automáticos, pois exigem a escolha da estatística de teste e da função $\widehat{F}$ a partir da qual será feita a reamostragem. Se esta escolha for feita de forma inadequada, pode haver inconsistência. Adicionalmente, o autor nota que, mesmo quando um esquema *bootstrap* produz inferência assintoticamente válida, não há garantias de bom comportamento em pequenas amostras. De maneira geral, Young (1994) considera que o método *bootstrap* pode ser uma abordagem potencialmente efetiva para muitos problemas de inferência estatística, contudo o desenvolvimento teórico desta técnica não foi acompanhado por um grande avanço de sua aplicação, uma vez que os trabalhos desenvolvidos não se têm voltado para servir às necessidades imediatas da prática estatística.

Existe uma vasta literatura acerca do método *bootstrap*, todavia apenas uma pequena parcela desta é dedicada ao estudo do esquema de *bootstrap* para testes de hipóteses, que consiste em obter uma aproximação para a distribuição da estatística de teste de interesse sob H_0 . Beran (1988) mostrou que, quando uma estatística de teste é assintoticamente pivotal, isto é, possui distribuição nula limite livre de parâmetros desconhecidos, a técnica *bootstrap* geralmente produz um refinamento assintótico, ou seja, é possível obter uma menor distorção de tamanho com teste *bootstrap* comparativamente aos testes assintóticos.

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes e suponha que $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi_t)$, com $t = 1, \dots, n$. Adicionalmente, suponha que cada y_t relaciona-se com as covariáveis x_t e z_t através de (2.3.2) e (2.3.4), respectivamente. Se o interesse for realizar o teste da hipótese nula definida em (3.2.3) ou (3.2.4), então o procedimento de teste *bootstrap* paramétrico, que será contemplado nas avaliações numéricas desta dissertação, pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Calcular a estatística de teste de interesse, τ , como descrito na Seção 3.2;
2. Construir a amostra de *bootstrap* y^* , em que $y_t^* \stackrel{ind}{\sim} \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t)$, com $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma})$. Aqui, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são os vetores de estimativas restritas de máxima verossimilhança, ou seja, sob a hipótese nula;
3. Estimar o modelo usando y_t^* como variável resposta, a fim de obter os estimadores de máxima verossimilhança irrestritos e restritos de *bootstrap* e calcular a estatística τ^* ;
4. Repetir os passos 2 e 3 um número grande de vezes, B ;
5. Calcular o quantil de interesse, $z_{1-\alpha}$, da distribuição empírica das B realizações da estatística τ^* obtidas usando os passos 2 até 4;
6. Realizar o teste utilizando a estatística τ calculada no passo 1 junto com o valor crítico de *bootstrap* obtido no passo 5.

A região de rejeição do teste pode ser definida com base no quantil $z_{1-\alpha}$, de forma que a hipótese nula H_0 é rejeitada quando a estatística é maior do que o quantil estimado, isto é, $\tau > z_{1-\alpha}$. A regra de decisão pode ser expressa, também, em termos do valor- p aproximado por *bootstrap*, dado por

$$p^* = \frac{\#\{\tau_b^* > \tau\}}{B},$$

em que $\#$ denota a cardinalidade de um conjunto, τ_b^* é a estatística de interesse obtida na b -ésima amostra *bootstrap*, $b = 1, \dots, B$, e τ é a estatística de interesse obtida da amostra original. Rejeita-se H_0 se p^* for menor do que o tamanho nominal selecionado.

Como cada estatística de teste tem suas características específicas e existem diversas escolhas para o procedimento *bootstrap* a ser adotado (ver MacKinnon, 2007, Seção 5), não é possível apontar um como sendo universalmente superior aos demais. Por esta razão, é possível que um esquema apresente bom desempenho em um teste e o mesmo não aconteça em outros contextos.

Avaliações Numéricas

4.1 Introdução

Os desempenhos em amostras finitas dos testes da razão de verossimilhanças (RV), escore (S_R), Wald (W), da razão de verossimilhanças corrigidos (RV^c e RV_2^c) e da razão de verossimilhanças, escore e Wald *bootstrap* (RV^* , S_R^* , W^* , respectivamente), apresentados no Capítulo 3, foram avaliados por meio de simulações de Monte Carlo. Para este estudo, considerou-se o modelo de regressão beta com componente sistemático dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \sum_{i=2}^k \beta_i x_{ti}$$

e especificação do parâmetro de dispersão dada por

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \sum_{j=2}^q \gamma_j z_{tj},$$

com $t = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, q$.

Os valores das variáveis explicativas x_{ti} e z_{tj} , com $x_{ti} = z_{tj}$, $\forall i = j$, são conhecidos e selecionados independentemente como realizações de uma variável aleatória que segue uma distribuição uniforme padrão, $\mathcal{U}(0, 1)$. Os parâmetros β e γ são desconhecidos e foram estimados por meio da maximização numérica do logaritmo da função de verossimilhança empregando o método quasi-Newton BFGS com primeiras derivadas analíticas.

Foram consideradas amostras de tamanho $n = 20, 30$ e 40 , porém foram geradas 10 observações da covariada $x_{ti} = z_{tj}$, as quais foram replicadas duas, três e quatro vezes a fim de obter os tamanhos amostrais. Este método de obtenção dos valores das variáveis explicativas tem por objetivo manter constante, à medida que o tamanho da amostra cresce, o grau de heterogeneidade da dispersão, dado por $\lambda = \max \phi_t / \min \phi_t$.

Para a avaliação numérica dos testes, foram realizadas 5000 réplicas de Monte Carlo e 1000 réplicas *bootstrap* e considerados três níveis nominais: $\alpha = 10\%, 5\%$ e 1% . Note que cada experimento numérico envolve um total de cinco milhões de réplicas. Em cada réplica de Monte Carlo, foi gerada uma amostra aleatória da variável resposta $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, com $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi_t)$. Em cada réplica *bootstrap*, por sua vez, gerou-se uma amostra aleatória da variável resposta $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ respeitando as restrições impostas pela hipótese nula, como descrito na Seção 3.4. Utilizou-se o gerador de números pseudo-aleatórios *multiply-with-carry*, de período aproximado 2^{60} , desenvolvido por George Marsaglia; para mais detalhes, ver Marsaglia (1997).

No presente capítulo, é realizada uma discussão dos resultados das simulações de tamanho e poder de testes sobre os parâmetros que indexam os submodelos da média e da precisão. Um programa na linguagem Ox (Doornik, 2009) utilizado para realização de tais simulações é apresentado no apêndice.

4.2 Resultados das Simulações

Para obter as taxas de rejeição nula dos testes sobre o vetor de parâmetros β , considerou-se $k = q = 4$ e realizou-se o teste das hipóteses $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($r = 1$), $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 2$) e $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 3$) contra alternativas bilaterais. No caso em que a hipótese nula impõe apenas uma restrição ($r = 1$), são os seguintes os valores dos parâmetros: $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = -4.0$, $\beta_3 = 3.5$, $\beta_4 = 0$, $\gamma_1 = 1.0$, $\gamma_2 = 2.8$, $\gamma_3 = -1.2$ e $\gamma_4 = 2.0$. Para a situação em que $r = 2$, tem-se que $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = -4.0$, $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Finalmente, quando $r = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

O comportamento de μ depende dos valores verdadeiros selecionados para os parâmetros β . Aqui, μ assume valores nos intervalos (0.44,0.98) e (0.13,0.73), quando $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e $\mu = 0.81$, quando $r = 3$. O grau de heterogeneidade da dispersão, $\lambda = \max(\phi_t)/\min(\phi_t)$, é aproximadamente 23 para todos os tamanhos amostrais, devido à replicação de uma amostra de tamanho $n = 10$.

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam os percentuais de rejeição da hipótese nula dos diferentes testes sobre o vetor de parâmetros do submodelo da média. É possível observar que, em geral, tamanhos amostrais maiores estão associados a taxas de rejeição nula mais próximas dos níveis nominais de significância. Adicionalmente, à medida que são impostas mais restrições pela hipótese nula, os desempenhos dos testes tendem a piorar. Este efeito é mais notável no caso do teste Wald, cujo o desempenho deteriora quando cresce o número de restrições. Por outro lado, a distorção de tamanho do teste escore pouco é afetada pela inclusão de mais parâmetros de interesse. O comportamento contrastante desses dois testes deve-se ao fato de que a estatística de teste Wald utiliza estimativas irrestritas enquanto a estatística do teste escore é calculada com base em estimativas restritas.

Tabela 4.1 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($r = 1$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	21.5	16.0	15.1	14.1	9.9	8.0	4.9	2.6	2.1
S_R	12.0	11.1	11.4	5.8	5.3	5.3	0.7	0.6	1.0
W	30.7	20.3	18.4	23.2	14.1	11.3	13.2	6.2	3.9
RV^c	15.5	11.4	10.6	9.0	5.5	5.2	2.7	1.3	1.1
RV_2^c	16.8	12.0	10.9	10.0	6.0	5.5	3.4	1.4	1.2
RV^*	10.0	10.3	10.3	5.0	5.0	5.2	1.0	0.8	1.1
S_R^*	9.2	9.5	10.6	4.7	4.8	5.0	0.9	0.8	1.1
W^*	10.5	10.7	10.4	5.1	5.1	5.0	1.0	0.9	1.2

Tome os testes baseados na estatística de razão de verossimilhanças corrigida. O ganho

obtido pelo emprego desses testes, comparativamente ao teste da razão de verossimilhanças assintótico, RV , é claro. Por exemplo, para $n = 30$, $r = 1$ e $\alpha = 10\%$, a probabilidade do erro tipo I do teste usual é 16%, enquanto os testes corrigidos RV^c e RV_2^c apresentam taxas de rejeição nula de 11.4% e 12%, respectivamente. O teste escore, S_R , por sua vez, apresenta melhor desempenho para todos os casos analisados em que $n = 20$ e desempenho equivalente para grande parte dos casos em que são testadas 1 ou 2 restrições, quando comparado aos testes RV^c e RV_2^c . O teste escore apresenta desempenho ligeiramente inferior ao desempenho dos testes baseados na estatísticas da razão de verossimilhanças corrigidas apenas para alguns casos de $n = 40$ e, sobretudo, quando $r = 3$.

Ainda no que tange ao controle da probabilidade de erro tipo I, os testes *bootstrap*, em geral, apresentam melhor desempenho do que os correspondentes testes assintóticos. Estes testes proporcionam uma redução considerável da distorção de tamanho, sobretudo para os testes Wald e da razão de verossimilhanças, que, em sua versão assintótica, são bastante liberais. Por exemplo, para $r = 2$, $n = 40$ e $\alpha = 5\%$, os testes da razão de verossimilhanças assintótico e *bootstrap* apresentam taxas de rejeição da hipótese nula iguais a 8.2% e 5.0%, respectivamente, enquanto os testes Wald usual e *bootstrap* apresentam probabilidades do erro tipo I de 13.2% e 5.0%, respectivamente. O teste escore usual rejeita a hipótese nula com menos frequência do que seria esperado com base no nível nominal quando $r = 3$ e em alguns casos em que $\alpha = 1\%$, tendo desempenho tipicamente inferior aos testes *bootstrap*.

Tabela 4.2 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 2$).

	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
n	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	25.1	18.8	15.4	16.7	10.9	8.2	6.4	3.6	2.3
S_R	11.4	10.8	10.2	4.9	5.3	4.5	0.5	0.7	0.7
W	40.5	26.2	20.9	32.0	19.1	13.2	20.3	8.9	5.3
RV^c	14.8	10.9	9.7	8.9	6.0	5.0	2.6	1.0	1.0
RV_2^c	15.9	11.2	10.0	9.8	6.4	5.1	3.1	1.2	1.0
RV^*	9.5	10.1	10.1	4.7	5.6	5.1	1.0	0.9	1.1
S_R^*	9.5	10.1	10.0	4.7	5.2	5.1	0.9	1.0	1.2
W^*	9.4	10.1	9.9	4.7	5.2	5.0	1.2	0.9	1.0

Cabe, aqui, destacar que o teste Wald apresentou o pior desempenho global no controle da probabilidade de erro tipo I, sendo acentuadamente liberal. Por exemplo, para o caso em que $n = 20$, $r = 3$ e $\alpha = 10\%$, o teste rejeita a hipótese nula em cerca de 50% das vezes. E mesmo com o aumento da amostra e a redução de restrições impostas pela hipótese nula, como no caso em que $n = 40$, $r = 1$ e $\alpha = 10\%$, o teste apresenta grande distorção de tamanho, com taxa de rejeição nula de aproximadamente 18.5%.

Por fim, os testes *bootstrap* são equivalentes entre si e apresentam menor distorção de tamanho do que os testes da razão de verossimilhanças corrigidos quando $n = 20$. Adicionalmente, os testes *bootstrap* apresentam desempenho ligeiramente superior àqueles dos testes RV^c e RV_2^c quando $n = 30$, e desempenho equivalente para o caso em que $n = 40$.

Para as simulações de poder, as taxas de rejeição foram obtidas sob as hipóteses alternativas

Tabela 4.3 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ ($r = 3$).

	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
n	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	27.7	19.3	16.7	19.0	11.9	9.2	7.1	3.9	2.5
S_R	8.6	9.3	9.5	3.5	4.1	4.1	0.3	0.4	0.8
W	48.9	31.7	24.8	40.8	23.5	17.3	29.0	12.7	7.5
RV^c	13.5	10.8	9.9	8.1	5.7	4.9	2.4	1.1	1.0
RV_2^c	15.2	11.3	10.1	9.1	5.9	5.1	2.8	1.4	1.1
RV^*	9.9	9.9	9.8	4.9	5.5	4.8	1.1	1.2	1.2
S_R^*	9.7	9.9	10.1	4.9	5.1	4.9	1.1	0.9	1.3
W^*	10.6	10.0	10.4	5.2	5.2	4.9	1.2	0.9	1.1

$H_1 : \beta_4 = \epsilon$ ($r = 1$), $H_1 : \beta_3 = \beta_4 = \epsilon$ ($r = 2$) e $H_1 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \epsilon$ ($r = 3$), para diferentes valores de ϵ . Adicionalmente, na avaliação dos testes da razão de verossimilhanças, escore, Wald e da razão de verossimilhanças corrigidos, empregaram-se valores críticos estimados obtidos a partir das simulações de tamanho desses testes ao invés de valores críticos assintóticos, o que permitiu que testes com tamanhos diferentes fossem comparáveis entre si no que tange ao poder. Por esse procedimento não poder ser aplicado aos testes *bootstrap*, a simulação de poder foi realizada para casos em que estes testes apresentaram tamanhos próximos ao nominal.

A Tabela 4.4 apresenta as taxas de rejeição não-nula quando $r = 1$, $n = 40$ e $\alpha = 5\%$. Através da análise dos resultados, é possível perceber que, à medida que o valor absoluto de ϵ aumenta (há um maior distanciamento da hipótese nula), os testes tornam-se mais poderosos. O teste escore (S_R) e sua vertente *bootstrap* (S_R^*) têm desempenhos equivalentes aos desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças corrigidos quando $\epsilon < 0$ e $\epsilon = 0.5$. Os testes da razão de verossimilhanças e Wald, em suas versões assintótica e *bootstrap*, são equivalentes em todos os casos. Adicionalmente, estes testes são ligeiramente superiores aos demais quando $\epsilon = -1.0$ e $\epsilon = -0.5$. Para $\epsilon = 1.0$ e $\epsilon = 2.0$, os testes da razão de verossimilhanças corrigida são os mais poderosos, enquanto que os testes escore usual e *bootstrap* apresentam taxas de rejeição não-nula menores.

Tabela 4.4 Taxas de rejeição não-nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($r = 1$), $n = 40$, $\alpha = 5\%$.

ϵ	-2.0	-1.0	-0.5	0.5	1.0	2.0
RV	99.56	57.76	18.82	13.10	34.92	66.76
S_R	99.32	55.52	17.24	15.70	36.38	62.58
W	99.58	57.42	19.10	12.20	34.48	69.24
RV^c	99.46	55.44	17.36	16.18	40.58	73.96
RV_2^c	99.48	55.50	17.26	15.90	40.12	73.52
RV^*	99.58	58.62	19.28	13.44	35.06	67.34
S_R^*	99.40	55.42	17.18	16.02	36.96	63.32
W^*	99.62	59.12	20.22	11.92	33.68	68.32

Como destacam Davison & Hinkley (1997), uma consequência adversa associada ao fato de

não empregar valores- p exatos é uma perda de poder do teste. Este efeito só é notável, porém, quando o número de réplicas *bootstrap* é pequeno. Para $B \geq 999$, é possível obter, inclusive, taxas de rejeição não-nula maiores a partir dos testes *bootstrap* comparativamente aos testes usuais. Nas simulações realizadas nessa dissertação, de forma geral, os testes escore, da razão de verossimilhanças e Wald baseados em valores críticos obtidos a partir de esquema *bootstrap* apresentam poderes ligeiramente mais elevados do que seus equivalentes assintóticos, como seria esperado, uma vez que o número de réplicas *bootstrap* realizadas foi grande ($B = 1000$).

De forma análoga ao que foi apresentado para o parâmetro que indexa o submodelo da média, também foram realizados testes sobre o vetor de parâmetros γ . Para testar as hipóteses nulas $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($r = 1$), $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 2$) e $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 3$) contra alternativas bilaterais, foram considerados como valores verdadeiros dos parâmetros: $\beta_1 = 3.5$, $\beta_2 = -3.0$, $\beta_3 = 2.4$, $\beta_4 = -2.1$, para todos os casos, e $\gamma_1 = 5.0$, $\gamma_2 = -2.0$, $\gamma_3 = 1.0$ e $\gamma_4 = 0.0$, para $r = 1$; $\gamma_1 = 5.0$, $\gamma_2 = -2.0$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 0.0$, para $r = 2$; e $\gamma_1 = 5.0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.0$, para $r = 3$. Aqui, μ assumiu valores no intervalo $(0.67, 0.99)$ e o grau de heterogeneidade da dispersão dos dados foi aproximadamente 5.

Os resultados das simulações de tamanho de testes sobre o vetor de parâmetros do submodelo da dispersão encontram-se apresentados nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7. Novamente, é possível observar a redução da distorção de tamanho dos testes corrigidos comparativamente àquele baseado na estatística da razão de verossimilhanças usual, sendo RV_2^c tipicamente mais liberal que RV^c .

Tabela 4.5 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($r = 1$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	23.3	17.5	14.7	15.7	10.2	8.4	6.3	2.7	2.0
S_R	8.5	9.4	8.9	3.9	4.2	4.6	0.8	0.9	0.8
W	39.2	27.2	20.4	31.1	19.7	14.0	19.3	8.6	5.5
RV^c	19.2	12.7	11.3	11.8	6.4	5.8	3.8	1.4	1.3
RV_2^c	20.7	13.2	11.5	12.9	6.8	6.0	4.3	1.5	1.4
RV^*	10.8	10.4	10.6	5.6	5.2	5.2	1.3	1.0	1.1
S_R^*	10.1	10.5	9.6	4.9	5.1	5.1	0.9	1.2	1.0
W^*	11.7	10.9	10.6	6.1	5.4	5.5	1.5	0.9	1.3

Exceto para $r = 3$, situação em que o teste escore usual, S_R , tem desempenho equivalente ao teste RV^c , em geral, o teste escore é superior a ambos os testes da razão de verossimilhanças cuja estatística foi corrigida pelo ajuste de Skovgaard (2001). Adicionalmente, o teste escore assintótico tipicamente apresenta tamanho menor do que o nível nominal, ou seja, é conservador.

Como destacado no caso de testes sobre os parâmetros que indexam o submodelo da média, aqui também o teste Wald teve desempenho muito pobre em amostras finitas, apresentando distorções de tamanho muito elevadas. Por exemplo, para testar a hipótese nula de dispersão constante, com nível nominal de significância igual a 5%, o teste Wald apresentou taxas de rejeição nula de aproximadamente 45%, 28% e 20% quando a amostra tem, respectivamente,

tamanho igual a 20, 30 e 40.

Tabela 4.6 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 2$).

	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
n	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	26.7	19.1	15.5	17.5	11.9	9.0	7.0	3.9	2.5
S_R	8.7	9.4	9.0	3.6	4.7	4.5	0.5	0.9	1.0
W	48.0	31.0	24.2	39.6	23.2	16.6	26.8	12.4	7.0
RV^c	14.2	11.6	10.1	8.2	6.3	5.2	2.3	1.5	1.0
RV_2^c	16.4	12.2	10.5	9.4	6.7	5.3	2.8	1.6	1.1
RV^*	10.0	10.7	9.9	5.0	5.8	5.0	1.1	1.3	1.1
S_R^*	10.0	10.4	9.8	4.8	5.4	5.0	1.3	1.2	0.9
W^*	10.6	10.8	10.2	5.1	6.1	4.7	1.1	1.4	1.2

A realização dos testes da razão de verossimilhanças, Wald e escore por meio de valores críticos obtidos a partir de um procedimento *bootstrap* proporciona uma considerável redução na distorção de tamanho, sobretudo para os dois primeiros testes. Comparativamente aos testes corrigidos, os testes *bootstrap* apresentam, em geral, melhor desempenho no controle da probabilidade de erro tipo I. Quando $n \neq 20$ e $r = 3$, os testes *bootstrap* têm desempenho equivalente ou ligeiramente inferior àquele apresentado pelo teste da razão de verossimilhanças corrigido RV^c .

Tabela 4.7 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ($r = 3$).

	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
n	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	28.1	20.7	16.8	19.0	12.66	9.7	6.8	3.7	2.9
S_R	8.4	10.1	9.8	4.4	5.0	4.8	0.9	1.0	1.0
W	54.3	36.4	27.2	45.4	27.9	19.6	31.1	14.9	9.0
RV^c	11.4	10.1	10.1	6.0	5.0	5.2	1.7	1.0	1.0
RV_2^c	13.3	11.0	10.7	7.5	5.6	5.4	2.0	1.1	1.0
RV^*	9.1	10.4	10.2	4.5	4.9	5.5	0.7	1.0	1.0
S_R^*	9.4	10.7	10.2	4.8	5.5	5.0	1.1	1.1	1.2
W^*	9.8	9.9	10.4	4.9	4.8	5.5	1.0	0.8	1.3

Os resultados das simulações de poder para o caso em que $r = 1$, $n = 30$ e $\alpha = 5\%$ estão apresentadas na Tabela 4.8. À medida que o valor do parâmetro sendo testado se afasta da hipótese nula, os testes tornam-se mais poderosos. Quando $\epsilon > 0$, os testes escore usual e *bootstrap* apresentam poder menos elevado relativamente aos demais. De forma geral, os testes usuais são ligeiramente menos poderosos que seus equivalentes *bootstrap*. Para $\epsilon > 0$, os testes da razão de verossimilhanças corrigidos são um pouco mais poderosos do que os testes da razão de verossimilhanças usual e *bootstrap* e do que os teste Wald usual e *bootstrap*.

Para os testes sobre o vetor de parâmetros que indexam o submodelo da dispersão, foram realizadas simulações de poder nos casos em que $\epsilon = -4$ e $\epsilon = -5$. Note que, comparativamente

ao que se observa para os testes sobre o vetor de parâmetros β , é preciso considerar hipóteses alternativas mais distantes de $\mathcal{H}_0$ para obter taxas de rejeição não-nula próximas de 100%.

Tabela 4.8 Taxas de rejeição não-nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($r = 1$), $n = 30$, $\alpha = 5\%$.

ϵ	-5.0	-4.0	-2.0	-1.0	-0.5	0.5	1.0	2.0
RV	88.02	75.14	28.80	11.16	6.86	5.30	8.28	21.06
S_R	84.56	73.36	31.56	13.52	8.02	4.40	6.02	15.72
W	85.00	69.42	22.50	8.92	6.08	5.60	8.90	19.92
RV^c	86.74	72.26	25.40	9.72	6.52	6.80	10.68	25.52
RV_2^c	86.82	72.34	25.56	9.88	6.56	6.74	10.30	24.92
RV^*	89.18	76.54	29.94	11.42	7.12	5.26	8.54	20.84
S_R^*	83.46	72.76	31.92	13.68	8.18	4.44	6.08	16.18
W^*	90.94	76.54	25.00	9.60	6.56	5.70	9.04	20.14

Nas simulações de tamanho apresentadas, foi investigado o comportamento dos testes à medida que o número de parâmetros de interesse (r) cresce. Adicionalmente, considerou-se o impacto, sobre o controle da probabilidade de erro tipo I, da inclusão de parâmetros de incômodo nos submodelos da média e da precisão.

Considere o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_k = 0$, contra uma hipótese alternativa bilateral. Aqui, k é o número de parâmetros do submodelo da média. Para a obtenção das taxas de rejeição nula dos testes sobre os parâmetros que indexam o submodelo da média, utilizou-se o modelo de regressão beta

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \sum_{i=2}^k \beta_i x_{ti},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2},$$

em que $t = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$ e $x_{ti} = z_{tj} \forall i = j$.

Assim, quando $k = 2$, está sendo realizado o teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$. Portanto, é imposta, pela hipótese nula, apenas uma restrição que é testada à medida que são incluídos parâmetros de perturbação no submodelo da média. No caso em que $k = 2$, são os seguintes os valores dos parâmetros: $\beta_1 = 1.0$ e $\beta_2 = 0$. Para $k = 3$, tem-se que $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.5$ e $\beta_3 = 0$. Finalmente, quando $k = 4$, os parâmetros assumem os valores $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.5$, $\beta_3 = -2.2$ e $\beta_4 = 0$. Em todos os casos, $\gamma_1 = 2.0$ e $\gamma_2 = 4.5$.

As Tabelas 4.9, 4.10 e 4.11 apresentam os percentuais de rejeição da hipótese nula dos diferentes testes sobre o vetor de parâmetros do submodelo da média. Novamente, é possível perceber que o tamanho do teste se aproxima do nível nominal de referência à medida que o tamanho da amostra cresce. Adicionalmente, observa-se uma piora no desempenho dos testes da razão de verossimilhanças, Wald e escore usuais com a inclusão de parâmetros de interesse. Note que, diferentemente do que é observado com o aumento do número de restrições impostas pela hipótese nula, o desempenho do teste escore sofre deterioração quando o número de parâmetros de incômodo aumenta.

Quando $k = 2$, o teste escore tem desempenho equivalente aos testes da razão de verossimilhanças corrigidos pelo ajuste de Skovgaard (2001) e aos testes *bootstrap*. Para os demais

Tabela 4.9 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ ($k = 2$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	12.4	11.8	10.8	6.6	6.1	5.7	1.8	1.3	1.2
S_R	9.9	10.3	9.5	4.6	4.8	4.9	0.6	0.6	0.9
W	14.7	13.3	11.9	8.9	7.3	6.6	3.0	2.3	1.9
RV^c	9.2	9.6	9.0	4.4	4.6	4.9	0.9	0.8	1.0
RV_2^c	9.4	9.8	9.1	4.6	4.7	4.9	1.0	0.9	1.1
RV^*	8.9	9.8	9.3	4.5	4.6	5.0	1.0	1.0	1.2
S_R^*	9.1	9.8	9.3	4.5	4.7	5.0	0.9	1.0	1.1
W^*	9.2	9.7	9.3	4.3	4.6	5.0	1.0	1.1	1.2

casos, porém, o teste escore apresenta ligeiras distorções de tamanho. Por exemplo, para $k = 2, n = 30, \alpha = 10\%$, o teste escore apresenta distorção de tamanho de 0.3%, enquanto os testes RV^c , RV_2^c , RV^* , S_R^* e W^* apresentam distorções de 0.4% a 0.2%. Quando $k = 3$ e $k = 4$, porém, o teste escore passa a rejeitar a hipótese nula, respectivamente, 1.6% e 2.0% a mais do que seria esperado com base no nível nominal de referência, enquanto os testes RV^c , RV_2^c , RV^* , S_R^* e W^* apresentam taxas de rejeição nula entre 10.0% e 10.3%, para $k = 3$, e entre 9.8% e 10.1%, para $k = 4$.

Tabela 4.10 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ ($k = 3$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	16.8	13.6	12.7	10.5	7.8	7.2	3.1	2.1	1.8
S_R	12.5	11.6	11.0	6.1	5.8	5.9	0.8	0.9	1.1
W	20.3	16.4	14.5	14.1	9.9	8.8	6.6	3.5	2.9
RV^c	10.1	10.0	9.9	5.1	4.9	5.4	1.1	0.9	1.1
RV_2^c	10.7	10.3	10.1	5.5	5.1	5.5	1.2	1.0	1.2
RV^*	10.2	10.1	10.0	5.2	4.7	5.6	1.1	1.0	1.2
S_R^*	9.8	10.2	9.9	5.0	5.0	5.5	1.0	1.1	1.1
W^*	10.5	10.0	10.1	5.1	4.9	5.4	1.1	0.9	1.3

Os testes da razão de verossimilhanças corrigidos apresentaram desempenho equivalente aos testes *bootstrap* em todos os testes realizados sobre o vetor de parâmetros β . Os procedimentos inferenciais alternativos aos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald usuais conduziram a uma considerável redução da distorção de tamanho observada para os últimos.

O teste Wald usual, apesar de ter pior desempenho global no que tange ao controle da probabilidade de erro tipo I, apresentou taxas de rejeição nula menos distorcidas, relativamente àquelas observadas para os testes da razão de verossimilhanças e escore assintóticos, quando comparadas àquelas obtidas quando eram testadas a inclusão de parâmetros de perturbação. Tome o caso em que $n = 20$, $\alpha = 10\%$ e $r = 1$ (Tabela 4.1). Aqui, os testes Wald, da razão de verossimilhanças e escore apresentam tamanhos aproximadamente iguais a 31%, 21% e 12%.

Tabela 4.11 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ ($k = 4$).

	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
n	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	15.6	13.5	12.8	8.8	7.1	6.7	2.5	1.6	1.7
S_R	13.0	12.0	11.9	6.6	5.7	5.8	1.0	0.8	1.2
W	17.7	15.0	13.7	11.2	8.2	7.5	4.0	2.3	2.2
RV^a	9.8	9.9	10.1	4.7	4.6	4.8	0.7	0.7	1.0
RV_2^a	10.5	10.1	10.3	4.9	4.7	4.9	0.8	0.7	1.1
RV^*	9.4	10.1	10.4	4.7	4.8	5.1	0.7	0.8	1.1
S_R^*	9.5	10.1	10.4	4.8	4.8	5.0	0.9	0.8	1.1
W^*	9.3	9.8	10.4	4.4	4.6	5.1	0.6	0.8	1.1

Contudo, por exemplo, quando $n = 20$, $\alpha = 10\%$ e $k = 4$ (Tabela 4.11), estes testes apresentam taxas de rejeição nula iguais a 17.7%, 15.6% e 13%, respectivamente.

De forma análoga, foram obtidas as taxas de rejeição nula dos testes sobre o vetor de parâmetros γ para diferentes números de parâmetros de incômodo no submodelo da precisão. Neste caso, foi testada a hipótese $\mathcal{H}_0 : \gamma_q = 0$, em que q é o total de parâmetros do submodelo da precisão. Considerou-se o modelo de regressão beta com componente sistemático dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2}$$

e estrutura de regressão para o parâmetro de precisão definida por

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \sum_{j=2}^q \gamma_j z_{tj},$$

em que $t = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, q$.

Em todos os casos, os valores assumidos pelos parâmetros que indexam o submodelo da média são $\beta_1 = 1.5$ e $\beta_2 = -2.8$. Quando $q = 2$, $\gamma_1 = 3.9$ e $\gamma_2 = 0$. Para $q = 3$, tem-se que $\gamma_1 = 3.9$, $\gamma_2 = 5.0$ e $\gamma_3 = 0$. Finalmente, quando $q = 4$, os parâmetros assumem os valores $\gamma_1 = 3.9$, $\gamma_2 = 5.0$, $\gamma_3 = -1.0$ e $\gamma_4 = 0$. Os resultados das simulações de tamanho dos testes sobre o vetor de parâmetros do submodelo da precisão encontram-se apresentados nas Tabelas 4.12, 4.13 e 4.14.

Diferentemente do que foi obtido para os testes sobre β , o teste escore não apresentou distorções de tamanho elevadas, apresentando desempenho mais próximo dos testes *bootstrap* e dos testes da razão de verossimilhanças corrigidos. Estes últimos são mais afetados pela inclusão de parâmetros de perturbação quando são realizados teste sobre o vetor de parâmetros que indexam o submodelo da precisão. Por exemplo, quando $q = 2$, eles têm desempenho equivalente aos testes *bootstrap*, porém, à medida que são acrescentados mais parâmetros de incômodo ao modelo, as taxas de rejeição nula vão se afastando dos níveis nominais, sobretudo quando $n = 20$.

Os testes *bootstrap* apresentam o melhor desempenho no que tange ao controle da probabilidade de erro tipo I, enquanto o teste Wald usual apresenta, mais uma vez, desempenho

Tabela 4.12 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = 0$ ($q = 2$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	13.4	12.0	12.3	7.6	6.5	6.6	1.8	1.7	1.2
S_R	9.8	9.5	10.2	4.1	4.6	4.7	0.5	0.9	0.7
W	16.5	14.7	13.9	10.2	8.5	8.1	3.7	2.8	2.0
RV^a	10.5	10.0	10.7	5.0	5.4	5.5	1.0	1.3	0.9
RV_2^a	10.6	10.0	10.8	5.1	5.5	5.6	1.1	1.4	0.9
RV^*	10.4	9.9	10.7	5.1	5.3	5.6	1.1	1.6	1.0
S_R^*	10.6	10.0	10.7	5.3	5.2	5.2	1.2	1.5	1.1
W^*	9.7	10.2	11.2	4.8	5.3	5.5	1.3	1.2	0.9

acentuadamente liberal. Por exemplo, quando há 3 parâmetros de incômodo no submodelo da precisão ($q = 4$), $n = 20$ e $\alpha = 10\%$, o teste Wald chega a rejeitar a hipótese nula cerca de 28%.

Tabela 4.13 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = 0$ ($q = 3$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	16.4	13.7	11.6	9.5	7.8	6.2	3.0	1.7	1.6
S_R	7.1	8.4	8.1	3.0	3.7	3.4	0.4	0.6	0.5
W	25.8	19.4	15.5	18.6	12.9	9.2	8.7	4.5	2.9
RV^a	12.0	11.1	9.5	6.1	5.5	4.8	1.4	1.0	1.1
RV_2^a	12.5	11.3	9.7	6.4	5.6	4.9	1.5	1.1	1.1
RV^*	10.1	10.6	9.4	5.3	5.1	4.8	1.2	1.0	1.0
S_R^*	9.9	10.4	9.5	4.9	5.2	4.5	1.2	0.9	0.7
W^*	10.8	10.7	9.6	5.3	5.2	4.6	1.3	1.0	1.0

De forma geral, os testes *bootstrap* apresentam as taxas de rejeição nula mais próximas dos níveis nominais, principalmente para $n = 20$. Os testes da razão de verossimilhanças corrigidos proporcionam considerável redução da distorção de tamanho comparativamente ao teste da razão de verossimilhanças usual, porém têm desempenho, de forma geral, inferior ao teste escore usual, exceto quando são impostas 3 restrições pela hipótese nula, tanto para testes sobre o vetor de parâmetros β quanto sobre γ , ou quando, ao realizar testes sobre os parâmetros que indexam o submodelo da média, são adicionados parâmetros de incômodo no modelo. Os testes *bootstrap* apresentam taxas de rejeição não-nula mais elevadas do que as de seus equivalentes assintóticos, porém, quando $\epsilon > 0$, são menos poderosos do que os testes da razão de verossimilhanças corrigidos.

Por fim, algumas conclusões importantes podem ser tiradas dos resultados apresentados acima. Primeiro, o teste Wald apresenta desempenho muito pobre em pequenas amostras, sendo acentuadamente liberal. Segundo, o teste da razão de verossimilhanças também é liberal. Terceiro, o teste escore apresenta bom desempenho em amostras de tamanho pequeno. Quarto, os dois testes ajustados construídos a partir de verossimilhanças perfiladas têm desem-

Tabela 4.14 Taxas de rejeição nula (%) do teste de $\mathcal{H}_0 : \gamma_4 = 0$ ($q = 4$).

n	$\alpha = 10\%$			$\alpha = 5\%$			$\alpha = 1\%$		
	20	30	40	20	30	40	20	30	40
RV	18.6	14.0	13.2	11.3	8.1	7.0	3.3	2.0	1.9
S_R	9.8	9.4	9.8	5.3	4.5	4.9	1.2	1.1	1.1
W	27.4	19.5	16.4	19.9	12.3	9.6	9.7	5.1	3.3
RV^a	13.0	10.4	10.2	7.2	5.5	5.4	2.0	1.4	1.2
RV_2^a	14.9	11.1	10.5	8.3	5.8	5.6	2.5	1.5	1.3
RV^*	10.5	10.0	9.6	5.2	5.0	5.0	1.3	1.3	1.2
S_R^*	10.3	9.6	10.2	5.3	4.8	5.2	1.3	1.2	1.2
W^*	10.8	9.9	9.3	5.2	5.3	4.7	1.2	1.1	1.0

penho superior ao teste original, mas inferior ao teste escore, na maior parte dos casos. Quinto, o uso de *bootstrap* se mostra muito efetivo no que tange ao controle da probabilidade de erro tipo I.

Aplicação

Neste capítulo, será realizada uma aplicação dos testes anteriormente avaliados a um conjunto de dados reais apresentado por Smithson & Verkuilen (2006). Trata-se de um conjunto de 44 observações de habilidade de leitura entre crianças disléxicas e não-disléxicas. A variável de interesse, y , é a pontuação em um teste de habilidade de leitura e as variáveis explicativas são o *status* de dislexia, x_1 , e o escore padronizado de QI não-verbal, x_2 . A covariada x_1 assume valor 1 se a criança é disléxica e -1 , caso contrário. A amostra inclui 19 crianças disléxicas e 25 não-disléxicas; seus escores médios no teste foram, respectivamente, 0.606 e 0.900.

Inicialmente, foi testada a hipótese nula de dispersão constante, que foi rejeitada (a 1% de significância) por todos os testes utilizados. Assim, seguindo-se Smithson & Verkuilen (2006) e Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto (2008a, 2008b), foi realizado o ajuste dos dados considerando um submodelo para a dispersão. Para tanto, foi utilizado o modelo 1, definido por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t1} x_{t2},$$

e

$$\log(\phi_t) = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t1} + \gamma_2 x_{t2},$$

com $t = 1, \dots, 44$.

As estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão, além dos valores- p dos testes aplicados ao modelo 1 são apresentados na Tabela 5.1. Dado que o tamanho da amostra é pequeno, o nível nominal escolhido para fins de análise da significância das variáveis explicativas do modelo foi $\alpha = 10\%$. Neste contexto, segundo todos os testes aplicados, as covariadas incluídas no submodelo da média mostraram-se significativas. No caso do submodelo da dispersão, porém, os testes escore usual e *bootstrap* levaram à conclusão de que a variável x_2 não é significativa para a explicação da dispersão, ou seja, a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = 0$ não foi rejeitada pelos referidos testes.

O teste escore e sua vertente *bootstrap* apresentaram bom desempenho nas avaliações numéricas cujos resultados encontram-se apresentados no Capítulo 4; por esta razão, buscou-se um novo ajuste para os dados. Primeiramente, recorreu-se à exclusão da variável representativa do QI não-verbal do submodelo da dispersão. Porém, quando ϕ é modelado sem considerar x_2 , a inferência baseada em qualquer um dos testes aplicados apontou para a não-significância das variáveis x_2 e x_3 no submodelo da média. A ajuste dos dados por meio de um modelo de regressão beta que emprega apenas o *status* de dislexia, x_1 , como covariada nos submodelos da média e da dispersão, por sua vez, mostrou-se pobre.

Chegou-se, então, ao modelo 2, cujas estruturas de regressão para os parâmetros da média

Tabela 5.1 Estimativas dos parâmetros, erros-padrão e valores- p ; modelo 1.

		β_0	β_1	β_2	β_3	γ_0	γ_1	γ_2
	estimativa	1.1230	-0.7420	0.4860	-0.5810	3.3040	1.7470	1.2290
	e.p.	0.1430	0.1430	0.1330	0.1330	0.2230	0.2620	0.2670
RV	valor- p	0.0000	0.0000	0.0066	0.0023	0.0000	0.0000	0.0105
S_R		0.0000	0.0022	0.0415	0.0318	0.0000	0.0001	0.1354
W		0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
RV^c		0.0000	0.0000	0.0133	0.0049	0.0000	0.0000	0.0179
RV_2^c		0.0000	0.0000	0.0129	0.0048	0.0000	0.0000	0.0179
RV^*		0.0020	0.0000	0.0120	0.0080	0.0000	0.0000	0.0270
S_R^*		0.0020	0.0010	0.0390	0.0370	0.0000	0.0000	0.1210
W^*		0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010

e da dispersão são dadas, respectivamente por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right)=\beta_0+\beta_1x_{t1}+\beta_2x_{t2}+\beta_3x_{t1}x_{t2},$$

e

$$\log(\phi_t) = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t1} + \gamma_2 x_{t2} + \gamma_3 (x_{t2})^2,$$

com $t = 1, \dots, 44$. Ou seja, relativamente ao modelo 1, foi acrescentado o quadrado da variável x_2 na especificação do submodelo da dispersão.

O resultado do ajuste e os valores- p dos diferentes testes do modelo 2 estão apresentados na Tabela 5.2. Pode ser observado que, no submodelo da dispersão, os valores- p relativos a β_2 resultantes dos testes escore usual e *bootstrap* foram iguais a 0.0691 e 0.0800, respectivamente. Ou seja, esta covariada pode ser considerada significativa ao nível nominal de 10%. No que tange ao parâmetro β_3 , o valor- p obtido pela aplicação do teste usual foi igual a 0.0682, enquanto o teste da hipótese $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ por meio do teste escore *bootstrap* resultou em valor- p igual a 0.0520.

Tabela 5.2 Estimativas dos parâmetros, erros-padrão e valores- p ; modelo 2.

[illegible]

Da mesma forma que é observado para os demais testes aplicados, a conclusão baseada no teste escore usual e em sua versão *bootstrap* é de que todas as covariadas consideradas nos submodelos da média e da dispersão do modelo 2 são significativas.

Neste contexto, procedeu-se à avaliação dos ajustes resultantes dos modelos 1 e 2. Primeiramente, foi realizado o teste RESET de erro de especificação (Cribari-Neto & Lima, 2007) sobre os dois modelos concorrentes. Foi adicionado, ao submodelo da média, o quadrado do preditor linear $\hat{\eta}$. A exclusão desta variável foi avaliada por meio dos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald usuais. Aos níveis usuais de significância, a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \hat{\eta}^2 = 0$ (o modelo está corretamente especificado) não é rejeitada por qualquer dos testes utilizados, o que indica que os dois modelos estão bem especificados.

Em seguida, foram calculados o pseudo- R^2 e os critérios de informação AIC e BIC, que estão apresentados na Tabela 5.3. Embora o pseudo- R^2 do modelo 1 seja mais elevado do que aquele alcançado pelo modelo 2, os critérios de informação favorecem o último em detrimento do primeiro. A análise realizada por meio dos gráficos de resíduos com envelopes simulados (Figura 5.1) aponta um ajuste ligeiramente melhor quando o modelo 2 é empregado.

Tabela 5.3 Medidas de avaliação dos modelos 1 e 2.

	pseudo- R^2	AIC	BIC
modelo 1	0.5756	-117.8040	-105.3144
modelo 2	0.5144	-131.3091	-117.0356

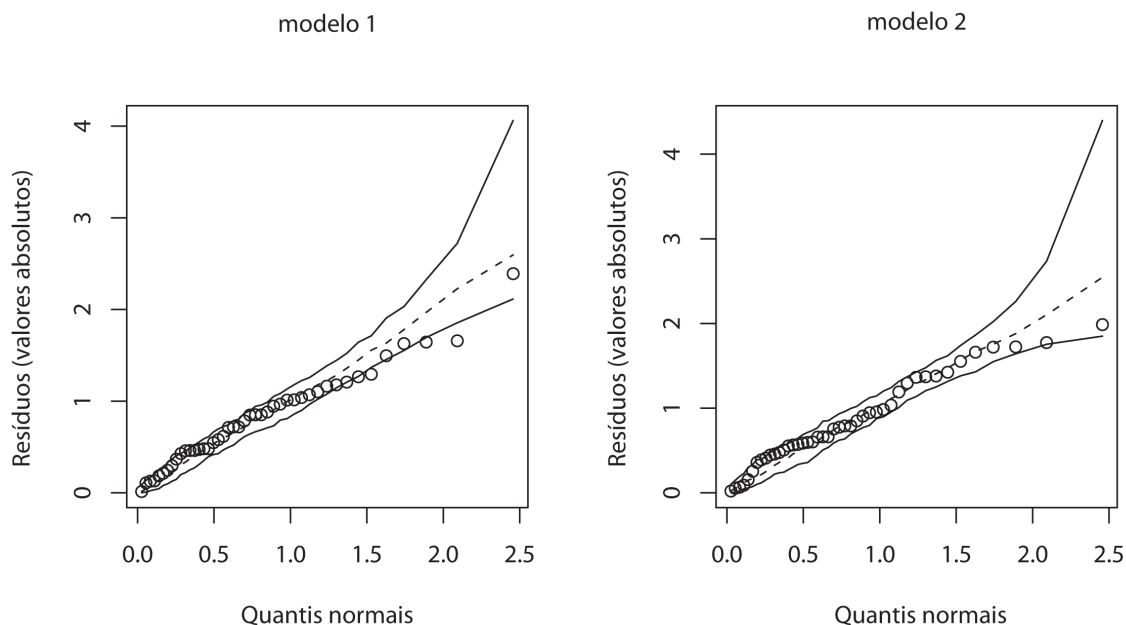


Figura 5.1 Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos 1 e 2.

Conclui-se, portanto, que os dois modelos produzem bons ajustes aos dados de habilidade

de leitura de crianças disléxicas e não-disléxicas. Em favor do modelo 2, porém, pesam os critérios de informação AIC e BIC e o gráfico de envelopes.

Considerações Finais

A classe regressão beta é um importante instrumento para modelar variáveis que assumem valores no intervalo unitário padrão, sendo, em geral, mais apropriada do que os demais modelos de regressão usuais, uma vez que respeita as características comuns a este tipo de dados, tais como suas heteroscedasticidade e assimetria naturais. A reparametrização da função de densidade beta proposta por Ferrari & Cribari-Neto (2004), a qual permite a modelagem da média da resposta envolvendo um parâmetro de precisão, faz destes modelos uma classe bastante flexível e, portanto, com ampla possibilidade de aplicação.

Usualmente, após a estimação, o interesse recai sobre a realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros. A inferência é realizada, tipicamente, a partir de aproximações assintóticas, as quais são válidas para grandes amostras, mas podem conduzir a consideráveis distorções na probabilidade de erro tipo I dos testes em amostras finitas. Uma estratégia para reduzir tais distorções é buscar refinamentos assintóticos, os quais podem ser produzidos por ajustes realizados sobre a função de verossimilhança, por correções feitas diretamente à estatística da razão de verossimilhanças ou, alternativamente, pelo emprego de testes baseados em *bootstrap*.

Na regressão beta, a inferência, em geral, baseia-se na teoria assintótica. A fim de obter resultados mais confiáveis para amostras de tamanhos pequeno e moderado, nesta classe de modelos, Ferrari & Pinheiro (2011) derivaram o ajuste de Skovgaard (2001) para a estatística da razão de verossimilhanças. Neste contexto, essa dissertação teve como objetivo avaliar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald usuais comparativamente aos testes da razão de verossimilhanças corrigidos e aos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald com valores críticos obtidos a partir de um procedimento *bootstrap*.

Considerou-se o modelo de regressão beta com dispersão variável e foram contemplados testes sobre os vetores de parâmetros que indexam os submodelos da média e da dispersão. De forma geral, pode-se observar o melhor desempenho dos testes *bootstrap* no que tange ao controle da probabilidade de erro tipo I. O teste escore assintótico apresentou distorções de tamanho tipicamente menores do que os testes da razão de verossimilhanças corrigidos, exceto para os casos nos quais foram impostas 3 restrições pela hipótese nula, situação em que o teste S_R foi equivalente ou ligeiramente inferior ao teste da razão de verossimilhanças ajustado RV^c , e também nos casos em que foram incluídos parâmetros de perturbação ao testar uma restrição sobre o vetor de parâmetros β .

Foi possível notar que os testes *bootstrap* conduziram a uma considerável redução da distorção de tamanho observada para os testes assintóticos, sobretudo para os testes da razão de verossimilhanças e Wald, cujas versões usuais são tipicamente liberais. Adicionalmente, os testes *bootstrap* também apresentaram melhor desempenho do que os testes da razão de verossimilhanças ajustados relativamente à probabilidade de erro tipo I, exceto quando se testou

a hipótese nula de dispersão fixa para amostras de tamanho 30 e 40 e para alguns casos em que $r = 2$ ou $n = 40$.

O ganho obtido pelo emprego da técnica *bootstrap* em amostras de tamanho finito relativamente à realização de inferências baseadas na teoria assintótica se mostrou substancial. Os testes da razão de verossimilhanças corrigidos também apresentam bom desempenho, porém mais próximo daquele observado para o teste escore usual, exceto quando o interesse residuiu em testar a hipótese nula de dispersão fixa, situação em que o teste RV^c apresentou desempenho global ligeiramente superior aos testes *bootstrap* para os tamanhos amostrais superiores a $n = 20$.

Quanto às taxas de rejeição não-nula, os testes *bootstrap* não apresentaram perda de poder relativamente aos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald usuais. Este resultado já era esperado, pois foi realizado um número grande de réplicas de *bootstrap* nas simulações deste estudo. Comparativamente aos testes da razão de verossimilhanças corrigidos, porém, os testes *bootstrap* se mostraram menos poderosos nos casos em que $\epsilon > 0$.

Cabe ressaltar, ainda, aspectos do desempenho dos testes mais usualmente aplicados. O teste escore tem bom desempenho em amostras finitas, tendo apresentado baixas distorções de tamanho, sobretudo para testes sobre o vetor de parâmetros que indexam o submodelo da precisão. O teste Wald, por sua vez, é acentuadamente liberal, podendo apresentar taxas de rejeição nula superiores a 50%, não sendo adequada sua aplicação em amostras pequenas. O teste da razão de verossimilhanças é menos liberal que o teste Wald, porém, seu desempenho ainda é pobre, quando comparado ao teste escore.

Diante das conclusões aqui apresentadas, sugere-se, preferencialmente, o emprego dos testes *bootstrap* para realização de inferência em pequenas amostras. No caso do custo computacional ser um empecilho à utilização do procedimento *bootstrap*, é recomendada a aplicação do teste escore usual para realização de testes de hipóteses em amostras finitas na classe de modelos de regressão beta.

Por fim, propõe-se como sugestão para pesquisas futuras a utilização da distribuição Kumaraswamy (Kumaraswamy, 1980) em substituição à distribuição beta. A distribuição Kumaraswamy é definida no intervalo $(0, 1)$ e tem função de densidade dada por

$$f(x; p, q) = pqx^{p-1}(1-x^p)^{q-1}, \quad p, q > 0.$$

Dado que suas funções de distribuição acumulada e de densidade têm forma fechada, a aplicação da distribuição Kumaraswamy é mais simples quando comparada ao emprego da distribuição beta.

Programa de Simulação

Neste apêndice, é apresentado um programa na linguagem Ox (Doornik, 2009) empregado nas simulações realizadas na presente dissertação. Foram utilizados dois programas para simulação, um para realizar testes sobre os parâmetros que indexam o submodelo da média e outro para realizar inferências sobre o vetor de parâmetros que indexam o submodelo da dispersão. Os dois programas foram desenvolvidos baseados no programa apresentado na dissertação de mestrado de Pinheiro (2009). Aqui é apresentado apenas o programa para realização de testes sobre o vetor β .

```

/*****
* PROGRAMA: testebeta_variavel.ox
*
* USO: Realiza simulação de Monte Carlo para avaliar numericamente os
* desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças, escore, Wald, da
* razão de verossimilhanças corrigidos pelo ajuste de Skovgaard (2001) e
* versões bootstrap dos testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald.
*
*
* Modelo: g(mu)=log(mu/(1-mu))=s_mX*beta, beta=(beta_1,...,beta_k)
* h(phi)=log(phi)=s_mZ*gama, gama=(gama_1,...,gama_m)
*
* Hipótese nula: (beta_(k-r),...,beta_m)=(beta0_(k-r),...,beta0_m)
*
* AUTOR: Marcela Pinto F. de Queiroz.
*
* OBS: Este programa foi desenvolvido a partir do programa apresentado na
* dissertação de mestrado de Pinheiro (2009).
*
* DATA: 05/12/2010.
*
*****/

#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>

/* Variáveis globais */
static decl s_vY; /* Amostra aleatória */
static decl s_mX; /* Matriz X */
static decl s_mXr; /* Matriz X restrita */
static decl s_mZ; /* Matriz Z */

```

```

static decl s_vYB; /* Amostra de bootstrap*/

/* Definindo Constantes */
const decl IREP = 5000; /* Número de réplicas de Monte Carlo */
const decl IBOOT = 1000; /* Número de amostras bootstrap */
const decl nobS = 20; /* Tamanho Amostral*/
const decl k = 4; /* Número de variáveis independentes no modelo para mu*/
const decl m = 4; /* Número de variáveis independentes no modelo para phi*/
const decl r = 1; /* Número de parâmetros que estão sendo testados para mu*/
const decl epsilon=1.5; /*Valor verdadeiro do parâmetro em H_1 */
const decl beta1 = <1.5,-4.0,3.5,epsilon>; /* valor de beta em H_1 */
const decl beta0 = <1.5,-4.0,3.5,0.0>; /* valor de beta em H_0 */
const decl gama1 = <1.0,2.8,-1.2,2.0>; /* valor de gama */
const decl PODER = 0; /*PODER=1:sob H_1
                        PODER!=1:sob H_0*/

decl continuation = 0;
decl stat; /* arquivo onde serão guardadas as
            estatísticas de teste para realização de gráficos*/

/* Função de log-verossimilhança */
floglik(const vtheta, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
decl eta = s_mX*vtheta[0:(k-1)];
decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
decl delta = s_mZ*vtheta[k:(k+m-1)];
decl phi = exp(delta);
decl ystar = log( s_vY ./ (1.0 - s_vY) );
decl mustar = polygamma(mu.*phi,0)-polygamma((1.0-mu).*phi,0);
decl ydag = log( 1.0 - s_vY );
decl mudag = polygamma((1.0 - mu) .* phi, 0) - polygamma(phi, 0) ;
decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 ); /*função de ligação logit,
            então 1/g'(mu) = mu*(1-mu)*/
decl F = diag( phi );
decl H = diag( phi ); /*função de ligação log,
            então 1/h'(phi_t) = phi_t*/
decl M = diag(mu);

adFunc[0] = double(sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu .* phi) -
loggamma((1.0 - mu) .* phi) + (mu .* phi - 1.0) .* log(s_vY) +
( (1.0 - mu) .* phi - 1.0 ) .* log(1.0 - s_vY) )); /*log-verossimilhança*/

if(avScore)
{
(avScore[0])[0:(k-1)] = s_mX'*T*F*(ystar-mustar);
(avScore[0])[k:(k+m-1)] = s_mZ'*H*(M*(ystar-mustar)+(ydag-mudag));
}

if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; /* 1 indica sucesso */
}

```

```

/* Função de log-verossimilhança restrita */
floglikr(const vtheta, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
  decl eta = s_mXr*vtheta[0:(k-r-1)];
  decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
  decl delta = s_mZ*vtheta[k:(k+m-1)];
  decl phi = exp(delta);
  decl ystar = log( s_vY ./ (1.0 - s_vY) );
  decl mustar = polygamma(mu.*phi,0)-polygamma((1.0-mu).*phi,0);
  decl ydag = log( 1.0 - s_vY );
  decl mudag = polygamma((1.0 - mu) .* phi, 0) - polygamma(phi, 0);
  decl T = diag( mu .* (1 - mu) ); /*função de ligação logit,
  então 1/g'(mu) = mu*(1-mu)*/
  decl F = diag( phi );
  decl H = diag( phi ); /*função de ligação log,
  então 1/h'(phi) = phi*/
  decl M = diag(mu);

  adFunc[0] = double(sumc(loggamma(phi)-loggamma(mu.*phi)-
  loggamma((1.0-mu).* phi)+ (mu.*phi-1.0).*log(s_vY)+
  ((1.0- mu).*phi-1.0).*log(1.0-s_vY))); /*log-verossimilhança*/

  if(avScore)
  {
    (avScore[0])[0:(k-1-r)] = s_mXr'*T*F*(ystar-mustar);
    (avScore[0])[k:(k+m-1)] = s_mZ'*H*(M*(ystar-mustar)+(ydag-mudag));
  }

  if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
  return 0;
  else
  return 1; /* 1 indica sucesso */
}

/*Função para obtenção da parte da matriz correspondente ao parâmetro
de incômodo para testar (beta_(k-r+1),...,beta_m), sendo
theta=(beta_1,...,beta_k,gama_1,...,gama_m)*/

nuisance(const matriz)
{
  decl ma = matriz;
  ma = ((ma[0:k-r-1][0:k-r-1]|ma[k:k+m-1][0:k-r-1])~
  (ma[0:k-r-1][k:k+m-1]|ma[k:k+m-1][k:k+m-1]));
  return ma;
}

/* Função de log-verossimilhança do Bootstrap*/
floglikB(const vtheta, const adFunc, const avScore, const amHess)
{

```

```

decl eta = s_mX*vtheta[0:(k-1)];
decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
decl delta = s_mZ*vtheta[k:(k+m-1)];
decl phi = exp(delta);
decl ystar = log( s_vYB ./ (1.0 - s_vYB) );
decl mustar = polygamma(mu.*phi,0)-polygamma((1.0-mu).*phi,0);
decl ydag = log( 1.0 - s_vYB );
decl mudag = polygamma((1.0 - mu) .* phi, 0) - polygamma(phi, 0) ;
decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 );
decl F = diag( phi );
decl H = diag( phi );
decl M = diag(mu);

adFunc[0] = double(sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu .* phi) -
loggamma((1.0 - mu) .* phi) +(mu .* phi - 1.0) .* log(s_vYB) +
( (1.0 - mu) .* phi - 1.0 ) .* log(1.0 - s_vYB) )); /*log-verossimilhança*/

if(avScore)
{
(avScore[0])[0:(k-1)] = s_mX'*T*F*(ystar-mustar);
(avScore[0])[k:(k+m-1)] = s_mZ'*H*(M*(ystar-mustar)+(ydag-mudag));
}

if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; /* 1 indica sucesso */
}

/* Função de log-verossimilhança restrita do Bootstrap*/
floglikrB(const vtheta, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
decl eta = s_mXr*vtheta[0:(k-r-1)];
decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
decl delta = s_mZ*vtheta[k:(k+m-1)];
decl phi = exp(delta);
decl ystar = log( s_vYB ./ (1.0 - s_vYB) );
decl mustar = polygamma(mu.*phi,0)-polygamma((1.0-mu).*phi,0);
decl ydag = log( 1.0 - s_vYB );
decl mudag = polygamma((1.0 - mu) .* phi, 0) - polygamma(phi, 0);
decl T = diag( mu .* (1 - mu) );
decl F = diag( phi );
decl H = diag( phi );
decl M = diag(mu);

adFunc[0] = double(sumc(loggamma(phi)-loggamma(mu.*phi)-
loggamma((1.0-mu).* phi)+ (mu.*phi-1.0).*log(s_vYB)+
((1.0- mu).*phi-1.0).*log(1.0-s_vYB))); /*log-verossimilhança*/

if(avScore)
{

```

```

(avScore[0])[0:(k-1-r)] = s_mXr'*T*F*(ystar-mustar);
(avScore[0])[k:(k+m-1)] = s_mZ'*H*(M*(ystar-mustar)+(ydag-mudag));
}

if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; /* 1 indica sucesso */
}

/*Função para transformar array em vetor, usada na estratégia montada
para retomar a simulação de qualquer ponto onde tenha sido interrompida*/

arrayToVec (const arr)
{
decl vect = new matrix[sizeof(arr)];
decl i;
for(i = 0; i < sizeof(arr); i++)
{
vect[i] = int(arr[i]);
}
return vect;
}

/* Função para transformar vetor em array.*/
vecToArray (const vect)
{
decl arr = new array[sizeof(vect)];
decl i;
for(i = 0; i < sizeof(arr); i++)
{
arr[i] = int(vect[i]);
}
return arr;
}

/* Início do Programa */
main()
{

/* Declaração das Variáveis Utilizadas no Programa */
/* Parâmetros de Sistema */
decl dExecTime, fail, falha, falhar, controle, ci, i, contador, auxiliar;
/* Parâmetros do Modelo */
decl beta, gama, theta, eta, delta, mu, phi ;
/* Parâmetros Auxiliares sem restrição */
decl ystar, ydag, betaols, etaols, muols, varols, phiols, gamaols,
vtheta0, converge, dfunc1;
/* Parâmetros Auxiliares com restrição */
decl nobsr, betaolsr, etaolsr, muolsr, varolsr, phiolsr, gamaolsr,

```

```

vtheta1, converger, dfunc2;
/* Parâmetros de Resultados */
decl vEMV, resul1, resul2, resul3, resul4, vsig, mStat, vquantil,
  cStat, gestimados;
/* Parâmetros do Bootstrap */
decl failB, falhaB, falharB, j, 1, EtesteB, Econt_1, cont_1,
  Econt_2, cont_2, Econt_3, cont_3;
decl ystarB, betaolsB, etaolsB, muolsB, phiolsB, gamaolsB, varolsB,
  vtheta0B, convergeB, dfunc1B, dfunc2B, ydagB, etaB, muB;
decl betaolsrB, etaolsrB, muolsrB, phiolsrB, varolsrB, gamaolsrB,
  vtheta1B, convergerB;
decl quantil_boot, auxiliar_1, cStat_1, auxiliar_2, cStat_2,
  auxiliar_3, cStat_3, auxiliar_4, cStat_4, auxiliar_5,
  cStat_5, quantil_t;
if(PODER==1)
{
  stat="statbetavar20_rlpoder.mat"; /* Arquivo onde serão guardadas as estatísticas
  para a produção do gráfico no R */
}
else
{
  stat="statbetavar20_rltam.mat";
}

/* Inicia o Relógio */
dExecTime = timer();

ranseed("GM"); // Gerador de números aleatórios
ranseed({1965,2001}); //Semente

/*Obtendo a matriz X */
s_mX = 1~(ranu(10,k-1));
s_mZ = s_mX[][(m-1)];
s_mXr = s_mZ[][0:(k-r-1)]; /* Matriz X restrita */

/* Replicando a amostra original para manter o grau de heterogeneidade constante */
if(nobs==20)
{
  s_mX = s_mX|s_mX;
  s_mZ = s_mZ|s_mZ;
  s_mXr = s_mXr|s_mXr;
}
if (nobs==30)
{
  s_mX = s_mX|s_mX|s_mX;
  s_mZ = s_mZ|s_mZ|s_mZ;
  s_mXr = s_mXr|s_mXr|s_mXr;
}
if (nobs==40)
{
  s_mX = s_mX|s_mX|s_mX|s_mX;

```

```

s_mZ = s_mZ|s_mZ|s_mZ|s_mZ;
s_mXr = s_mXr|s_mXr|s_mXr|s_mXr;
}
if (nobs==50)
{
s_mX = s_mX|s_mX|s_mX|s_mX|s_mX;
s_mZ = s_mZ|s_mZ|s_mZ|s_mZ|s_mZ;
s_mXr = s_mXr|s_mXr|s_mXr|s_mXr|s_mXr;
}

/* Valores verdadeiros dos parâmetros */
if(PODER != 1) /*sob H0*/
{
beta = beta0';
}
else /*sob H1*/
{
beta = beta1';
}
gama = gama1';
theta = beta | gama;
eta = s_mX * beta;
mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)); /* Vetor Coluna nobs x 1 */
delta = s_mZ * gama;
phi = exp(delta);
decl var = (mu.*(1.0-mu))./(1.0+phi);

/* Níveis de significância do teste */
vsig = <0.10; 0.05; 0.01>;

/* Quantis da distribuição Qui-Quadrado (r graus de liberdade) */
vquantil = (quanchi(1-vsig, r))';
if(PODER==1)
{
quantil_t = loadmat("quantisbetavar20_r1.mat");
println("quantil_t", quantil_t);
}

/* Inicialização de Algumas Quantidades */
vEMV = zeros(IREP, k+m); /* Inic. do Vetor dos EMV */
ci =0; /* Inic. do Contador de Laços de MC */
falha = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */
falhar = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */
fail = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */
mStat = zeros(IREP,5); /* Inic. do Vetor de Valores das Estatísticas do Teste */
decl ocorreu = 0;
if(PODER!=1)
{
auxiliar = zeros(5, columns(vsig)); /* Inic. do Cont. Auxiliar para
o Tamanho dos Testes */
cStat = zeros(5, columns(vsig)); /* Inic. do Contador dos Tamanhos dos Testes */
}

```

```

else
{
auxiliar_1 = zeros(3,1);
cStat_1 = zeros(3,1);
auxiliar_2 = zeros(3,1);
cStat_2 = zeros(3,1);
auxiliar_3 = zeros(3,1);
cStat_3 = zeros(3,1);
auxiliar_4 = zeros(3,1);
cStat_4 = zeros(3,1);
auxiliar_5 = zeros(3,1);
cStat_5 = zeros(3,1);
}
quantil_boot = zeros(columns(vsig), 3);

cont_1 = zeros(3, 1);
Econt_1 = zeros(3, 1);
cont_2 = zeros(3, 1);
Econt_2 = zeros(3, 1);
cont_3 = zeros(3, 1);
Econt_3 = zeros(3, 1);

/* Parâmetro de controle do processo */
controle = (IREP/100);

ranseed("GM"); // Gerador de números aleatórios
ranseed({1965,2001}); //Semente

if (continuation==1)
{
// Recupera o índice do laço de MC
ci = (loadmat("ci20r1.txt"))[0][0];
fail = (loadmat("fail20r1.txt"));
falha = (loadmat("falha20r1.txt"));
falhar = (loadmat("falhar20r1.txt"));

// Recupera demais valores de interesse
cStat = loadmat("cStat20r1.txt");
mStat = loadmat("mStat20r1.txt");
Econt_1 = loadmat("Econt_120r1.txt");
Econt_2 = loadmat("Econt_220r1.txt");
Econt_3 = loadmat("Econt_320r1.txt");

if(PODER==1)
{
cStat_1 = loadmat("cStat1_20r1.txt");
cStat_2 = loadmat("cStat2_20r1.txt");
cStat_3 = loadmat("cStat3_20r1.txt");
cStat_4 = loadmat("cStat4_20r1.txt");
cStat_5 = loadmat("cStat5_20r1.txt");
}
}

```

```

// Define a semente para o gerador de números aleatórios
ranseed(vecToArray(loadmat("seed20r1.txt")));
}

// Laço de Monte Carlo
for( ; ci < IREP+fail; ci++)
{
if(continuation!=1)
{
// Salva variáveis importantes a fim de tornar possível a recuperação
// em caso de falha, estratégia sugerida por Laércio Dias

savemat("seed20r1.txt", arrayToVec(ranseed(0)));
savemat("ci20r1.txt", ci);
    savemat("fail20r1.txt", fail);
    savemat("falha20r1.txt", falha);
savemat("falhar20r1.txt", falhar);

savemat("mStat20r1.txt", mStat);
savemat("Econt_120r1.txt", Econt_1);
    savemat("Econt_220r1.txt", Econt_2);
savemat("Econt_320r1.txt", Econt_3);

if(PODER==1)
{
savemat("cStat1_20r1.txt", cStat_1);
savemat("cStat2_20r1.txt", cStat_2);
savemat("cStat3_20r1.txt", cStat_3);
savemat("cStat4_20r1.txt", cStat_4);
savemat("cStat5_20r1.txt", cStat_5);
}
else
{
savemat("cStat20r1.txt", cStat);
}
}
else
{
// Muda o status de continuation para evitar recuperação indesejada
continuation = 0;
}

s_vY = zeros(nobs, 1); /* Inicialização do Vetor s_vY */
for(i = 0; i < nobs; i++)
{
s_vY[i] = ranbeta(1, 1, mu[i]*phi[i], (1-mu[i])*phi[i]); /* beta (mu,phi) */
}

/* Obtendo o Valor de y* = ystar */
ystar = log( s_vY ./ (1.0-s_vY) );

```

```

/* Obtendo o Valor de ydag */
ydag = log( 1.0-s_vY );

/***** Calculo sem restrição *****/
/*Calculando as Estimativas de Momentos sugeridas por Espinheira (2007)*/
if(k > 1){ols2c(ystar, s_mX, &betaols);} /* Retorna em betaols a
Estimativa de MQO*/
else if(k==1){betaols = meanc(ystar);}

/*Obtendo Algumas Quantidades para o Cálculo do Valor Inicial de gama*/
etaols = s_mX*betaols; /*  $X(X'X)^{-1}X'ystar$  */
muols = exp(etaols) ./ (1.0 + exp(etaols)); /*  $g^{-1}(X(X'X)^{-1}X'ystar)$  */
varols = ( (ystar-etaols)'*(ystar-etaols) )./
(nobs-k).*((1 ./ (muols.*(1.0-muols))) .^ 2);
phiols = ( muols .* (1.0-muols) ./ varols ) - 1.0; /*  $\phi(0)$  */

if(m > 1){ols2c(log(phiols), s_mZ, &gamaols);}/* Retorna em gamaolsr a
Estimativa de MQO */
else if(m==1){gamaols = meanc(phiols);}

/* Valores Iniciais para os Parâmetro (beta, gama) */
vtheta0 = betaols | gamaols;
MaxControl( 50, -1 );

/* Estimação de máxima verossimilhança */
converge = MaxBFGS(floglik, &vtheta0, &dfunc1, 0, 0);
/* Verificando a convergência */
if(converge != MAX_CONV && converge != MAX_WEAK_CONV)
{
falha++;
fail++;
continue;
}
decl etahat = s_mX * vtheta0[0:(k-1)];
decl muhat = exp(etahat) ./ (1.0+exp(etahat));
decl T = diag(muhat .* (1.0-muhat));
decl deltahat = s_mZ * vtheta0[k:(k+m-1)];
decl phihat = exp(deltahat);
decl H = diag(phiahat);
decl s_mYstar = diag(ystar);
decl s_mYdag = diag(ydag);
decl M = diag(muhat);
decl F = diag(phiahat);
decl Mstar = diag(polygamma(muhat .* phihat, 0) -
polygamma((1.0 - muhat).* phihat, 0));/*média de ystar=log(y/(1-y))*/
decl mustar= polygamma(muhat .* phihat, 0) -
polygamma((1.0 - muhat).* phihat, 0);
decl Vstar = diag(polygamma(muhat .* phihat, 1) +
polygamma((1.0 - muhat) .* phihat, 1));/*variância de ystar*/
decl Mdag = diag(polygamma((1.0 - muhat) .* phihat, 0)-

```

```

polygamma(phi_hat, 0)); /*média de ydag=log(1-y)*/
decl mudag = polygamma((1.0 - mu_hat) .* phi_hat, 0) - polygamma(phi_hat, 0);
decl Vdag = diag(polygamma((1.0 - mu_hat) .* phi_hat, 1) -
polygamma(phi_hat, 1)); /*variância de ydag*/
decl Cov = diag(-polygamma((1.0 - mu_hat) .* phi_hat, 1)); /*covariância
entre ystar e ydag*/
decl S = diag((2.0*mu_hat-1.0) ./ ((mu_hat .* (1.0-mu_hat)) .^ 2)); /*g''(mu)*/
decl Q = diag(-1.0 ./ (phi_hat .^ 2)); /*h''(phi)*/
decl Kbetabeta = s_mX'*F*T*Vstar*T*F*s_mX;
decl Kbetagama = s_mX'*F*(M*Vstar+Cov)*T*H*s_mZ;
decl Kgamabeta = Ibetagama';
decl Kgamagama = s_mZ'*H*(M*Vstar*M+(M+M)*Cov+Vdag)*H*s_mZ;
decl fisher = (Kbetabeta~Kbetagama)|(Kgamabeta~Kgamagama); /*informação de Fisher*/
decl fisherinv = invert(fisher); /*inversa da informação de Fisher*/
decl Jbetabeta = s_mX'*(F*T*Vstar + S*T^2*(s_mYstar-Mstar))*T*F*s_mX;
decl Jbetagama = -s_mX'*((s_mYstar-Mstar)- F*(M*Vstar+Cov))*T*H*s_mZ;
decl Jgamabeta = Jbetagama';
decl Jgamagama = s_mZ'*(H*(M*Vstar*M+(M+M)*Cov+Vdag)+
(M*(s_mYstar-Mstar)+(s_mYdag-Mdag))*Q*H^2)*H*s_mZ;
decl infobs = (Jbetabeta~Jbetagama)|(Jgamabeta~Jgamagama);
decl infobsinv = invert(infobs);
decl stderrors = sqrt(diagonal(fisherinv));

/***** Calculo com restrição *****/
/*Calculando as Estimativas de Momentos sugeridas por Espinheira (2007)*/
/*Obtendo Algumas Quantidades para o Cálculo do Valor Inicial de gama*/
if(k > 1){ols2c(ystar, s_mXr, &betaolsr);}
else if(k==1){betaolsr = meanc(ystar);}
betaolsr = betaolsr|zeros(r,1);

/* Valores Iniciais para os Parâmetros (beta, gama) */
vtheta1 = betaolsr | gamaols;

MaxControl( 50, -1 );

/* Estimação de máxima verossimilhança restrita */
converger = MaxBFGS(floglikr, &vtheta1, &dfunc2, 0, 0);
if (dfunc1-dfunc2 < 0){ocorreu++;}

/* Verificando a convergência */
if(converger != MAX_CONV && converger != MAX_WEAK_CONV)
{
falhar++;
fail++;
continue;
}

decl etatil = s_mX*(vtheta1[0:(k-r-1)]|zeros(r,1));
decl mutil = exp(etatil) ./ (1.0+exp(etatil));
decl Ttil = diag( mutil .* (1.0-mutil) );
decl deltatil = s_mZ*(vtheta1[k:(k+m-1)]);
decl phitil = exp(deltatil);

```

```

decl Htil = diag(phitil);
decl Mtil = diag(mutil);
decl Ftil = diag(phitil);
decl mustartil = polygamma(mutil .* phitil, 0) -
  polygamma((1.0 - mutil) .* phitil, 0);
decl Mstartil = diag(mustartil);
decl mudagtil = polygamma((1.0 - mutil) .* phitil, 0) -
  polygamma(phitil, 0);
decl Mdagtil = diag(mudagtil);
decl Vstartil = diag(polygamma(mutil .* phitil, 1) +
  polygamma((1.0 - mutil) .* phitil, 1));
decl Vdagtil = diag(polygamma((1.0 - mutil) .* phitil, 1) -
  polygamma(phitil, 1));
decl Covtil = diag(-polygamma((1.0 - mutil) .* phitil, 1));
decl Stil = diag((2.0*mutil-1.0) ./ ((mutil .* (1.0-mutil)).^ 2));
decl Qtil = diag(-1.0 ./ (phitil .^ 2));
decl Kbetabetatil = s_mX'*Ftil*Ttil*Vstartil*Ttil*Ftil*s_mX;
decl Kbetagamatil = s_mX'*Ftil*(Mtil*Vstartil+Covtil)*Ttil*Htil*s_mZ;
decl Kgamabetatil = Ibetagamatil';
decl Kgamagamatil = s_mZ'*Htil*(Mtil*Vstartil*Mtil+
  (Mtil+Mtil)*Covtil+Vdagtil)*Htil*s_mZ;
decl fishertil = (Kbetabetatil ~ Kbetagamatil) | (Kgamabetatil ~ Kgamagamatil);
decl fisherinvtil = invert(fishertil);
decl Jbetabetatil = s_mX'*(Ftil*Ttil*Vstartil +
  Stil*Ttil^2*(s_mYstar-Mstartil))*Ttil*Ftil*s_mX;
decl Jbetagamatil = -s_mX'*((s_mYstar-Mstartil)- Ftil*
  (Mtil*Vstartil+Covtil))*Ttil*Htil*s_mZ;
decl Jgamabetatil = Jbetagamatil';
decl Jgamagamatil = s_mZ'*(Htil*(Mtil*Vstartil*Mtil+(Mtil+Mtil)*Covtil+Vdagtil)+
  (Mtil*(s_mYstar-Mstartil)+(s_mYdag-Mdagtil))*Qtil*Htil^2)*Htil*s_mZ;
decl infobsttil = (Jbetabetatil~Jbetagamatil)|(Jgamabetatil~Jgamagamatil);
decl infobsinvtil = invert(infobsttil);
decl escorebetatil = (s_mX'*Ftil*Ttil)*(ystar-mustartil);
decl escoregamatil = s_mZ'*Htil*(Mtil*(ystar-mustartil)+(ydag-mudagtil));
decl escoretil = escorebetatil | escoregamatil; /* função escore */

/*Obtendo as quantidades restantes para o cálculo do ajuste de Skovgaard*/
decl iota = ones(nobs,1);
decl q1 = s_mX'*T*F*(Vstar*(M*F-Mtil*Ftil)+ Cov*(F-Ftil))*iota;
decl q2 = s_mZ'*H*((M*F-Mtil*Ftil)*(M*Vstar+Cov)+(F-Ftil)*(M*Cov+Vdag))*iota;
decl q = q1|q2;
decl upsilon1 = s_mX'*F*T*Vstar*Ttil*Ftil*s_mX;
decl upsilon2 = s_mX'*T*F*(Mtil*Vstar+Cov)*Htil*s_mZ;
decl upsilon3 = s_mZ'*H*Ftil*(M*Vstar+Cov)*Ttil*s_mX;
decl upsilon4 = s_mZ'*H*(M*Vstar*Mtil+(M+Mtil)*Cov+Vdag)*Htil*s_mZ;
decl upsilon = (upsilon1~upsilon2)|(upsilon3~upsilon4);
decl upsiloninv = invert(upsilon);
decl nuiinfobsttil = nuisance(infobsttil);
decl nuisance2 = nuisance(fishertil*upsiloninv*infobs*fisherinv*upsilon);

/* Vetores das EMVs */
vEMV[ci-fail][] = vtheta0';

```

```

/* Estatísticas do Teste: RV, Escore, Wald e Skovgaard*/
mStat[ci-fail][0] = 2*(dfunc1-dfunc2); /* Razão de Verossimilhança */
mStat[ci-fail][1] = (escorebetatil[k-r:][])'*
(fisherinvtil[k-r:k-1][k-r:k-1])*(escorebetatil[k-r:][]); /* Escore */
mStat[ci-fail][2] = (vtheta0[k-r:k-1])'*(fisherinv[k-r:k-1][k-r:k-1])^(-1)*
(vtheta0[k-r:k-1]); /* Wald */

decl nu = fabs(fabs(determinant(fishertil))^((1.0/2.0)*
fabs(determinant(fisher))^((1.0/2.0)*
fabs(determinant(upsilon))^(-1)*
fabs(determinant(nuiinfobstil))^((1.0/2.0)*
fabs(determinant(nuisance2))^(-1.0/2.0)*
fabs(escoretil'*upsiloninv*fisher*infoobsinv*
upsilon*fisherinvtil*escoretil)^(r/2.0)/
fabs(fabs(mStat[ci-fail][0])^((r/2.0)-1.0)*
escoretil'* upsiloninv*q));

mStat[ci-fail][3] = mStat[ci-fail][0]-2.0*log(nu); /* Skovgaard 1 */
mStat[ci-fail][4] = mStat[ci-fail][0]*(1.0-(log(nu)/
mStat[ci-fail][0]))^2.0; /* Skovgaard 2 */

/* Cálculo das taxas de rejeição */
if(PODER!=1) // Taxas de rejeição nula (tamanho)
{
auxiliar = ((mStat[ci-fail][0])' .> vquantil);
cStat = cStat + auxiliar;
}
else //Taxas de rejeição não-nula (poder), quantis estimados da simulação de tamanho
{
auxiliar_1 = ((mStat[ci-fail][0])' .> quantil_t[][0]);
cStat_1 = cStat_1 + auxiliar_1;
auxiliar_2 = ((mStat[ci-fail][1])' .> quantil_t[][1]);
cStat_2 = cStat_2 + auxiliar_2;
auxiliar_3 = ((mStat[ci-fail][2])' .> quantil_t[][2]);
cStat_3 = cStat_3 + auxiliar_3;
auxiliar_4 = ((mStat[ci-fail][3])' .> quantil_t[][3]);
cStat_4 = cStat_4 + auxiliar_4;
auxiliar_5 = ((mStat[ci-fail][4])' .> quantil_t[][4]);
cStat_5 = cStat_5 + auxiliar_5;
}

/*Iniciando contadores e matrizes para o loop de Bootstrap*/
failB=0;
falhaB=0;
falharB=0;
EtesteB = zeros(IBOOT, 3);

//Início loop bootstrap
for(j=0; j<IBOOT+failB; j++)
{

```

```

/*Obtendo os valores de Y de uma distribuição beta reparametrizada
Beta(mu, phi) respeitando a hipótese nula*/

s_vYB=zeros(nobs,1);
etaB = s_mX*(vtheta1[0:(k-r-1)]|zeros(r,1));
muB=exp(etaB)./(1.0+exp(etaB)); //função de ligação logit
;
for(l=0; l<nobs;l++)
{
s_vYB[l] = ranbeta(1, 1, muB[l]*phitil[l], (1-muB[l])*phitil[l]);
}

//Obtendo os valores de y*
ystarB = log( s_vYB ./ (1.0-s_vYB) );
/*Obtendo o valor de ydag*/
ydagB = log(1.0 -s_vYB);

/***** Calculo sem restrição *****/
/*Calculando as Estimativas de Momentos sugeridas por Espinheira (2007)*/
if(k > 1){ols2c(ystarB, s_mX, &betaolsB);}
else if(k==1){betaolsB = meanc(ystarB);}

/*Obtendo Algumas Quantidades para o Cálculo do Valor Inicial de gama*/
etaolsB = s_mX*betaolsB; /* X(X'X)^-1*X'*ystar */
muolsB = exp(etaolsB) ./ (1.0 + exp(etaolsB)); /* g^-1(X(X'X)^-1*X'*ystar) */
varolsB =((ystarB-etaolsB)'*(ystarB-etaolsB) )./
(nobs-k).*((1 ./(muolsB.*(1.0-muolsB))) .^ 2);
phiolsB = ( muolsB .* (1.0-muolsB) ./ varolsB ) - 1.0; /* phi^(0) */
//phiolsB = ( muolsB .* (1.0-muolsB) ./ varolsB ); /* phi^(0) */

if(m > 1){ols2c(log(phiolsB), s_mZ, &gamaolsB);}
else if(m==1){gamaolsB = meanc(phiolsB);}

/* Valores Iniciais para os Parâmetro (beta, gama) */
vtheta0B = betaolsB | gamaolsB;
MaxControl( 50, -1 );

/* Estimação de máxima verossimilhança */
convergeB = MaxBFGS(floglikB, &vtheta0B, &dfunc1B, 0, 0);

/* Verificando a convergência */
if(convergeB != MAX_CONV && convergeB != MAX_WEAK_CONV)
{
falhaB++;
failB++;
continue;
}
decl etahatB = s_mX * vtheta0B[0:(k-1)];
decl muhatB = exp(etahatB) ./ (1.0+exp(etahatB));
decl TB = diag(muhatB .* (1.0-muhatB));
decl deltahatB = s_mZ * vtheta0B[k:(k+m-1)];

```

```

decl phihatB = exp(deltahatB);
decl HB = diag(phihatB);
decl MB = diag(muhatB);
decl FB = diag(phihatB);
decl VstarB = diag(polygamma(muhatB .* phihatB, 1) +
polygamma((1.0 - muhatB) .* phihatB, 1));
decl VdagB = diag(polygamma((1.0 - muhatB) .* phihatB, 1)-
polygamma(phihatB, 1));
decl CovB = diag(-polygamma((1.0 - muhatB) .* phihatB, 1));
decl KbetabetaB = s_mX'*FB*TB*VstarB*TB*FB*s_mX;
decl KbetagamaB = s_mX'*FB*(MB*VstarB+CovB)*TB*HB*s_mZ;
decl KgamabetaB = Ibetagama';
decl KgamagamaB = s_mZ'*HB*(MB*VstarB*MB+(MB+MB)*CovB+VdagB)*HB*s_mZ;
decl fisherB = (KbetabetaB~KbetagamaB)|(KgamabetaB~KgamagamaB);
decl fisherinvB = invert(fisherB);
decl stderrorsB = sqrt(diagonal(fisherinvB));

/***** Calculo com restrição *****/
/*Obtendo Algumas Quantidades para o Cálculo do Valor Inicial de gama*/
if(k > 1){ols2c(ystarB, s_mXr, &betaolsrB);}
else if(k==1){betaolsrB = meanc(ystarB);}
betaolsrB = betaolsrB|zeros(r,1);

/* Valores Iniciais para os Parâmetros (beta, gama) */
vtheta1B = betaolsrB | gamaolsB;

MaxControl( 50, -1 );

/* Estimação de máxima verossimilhança restrita */
convergerB = MaxBFGS(floglikrB, &vtheta1B, &dfunc2B, 0, 0);

/* Verificando a convergência */
if(converger != MAX_CONV && converger != MAX_WEAK_CONV)
{
falharB++;
failB++;
continue;
}

decl etatilB = s_mX*(vtheta1B[0:(k-r-1)]|zeros(r,1));
decl mutilB = exp(etatilB) ./ (1.0+exp(etatilB));
decl TtilB = diag( mutilB .* (1.0-mutilB) );
decl deltatilB = s_mZ*(vtheta1B[k:(k+m-1)]);
decl phitilB = exp(deltatilB);
decl HtilB = diag(phitilB);
decl MtilB = diag(mutilB);
decl FtilB = diag(phitilB);
decl mustartilB = polygamma(mutilB .* phitilB, 0) -
polygamma((1.0 - mutilB) .* phitilB, 0);
decl MstartilB = diag(mustartilB);
decl mudagtilB = polygamma((1.0 - mutilB) .* phitilB, 0) -

```

```

polygamma(phitilB, 0);
decl MdagtilB = diag(mudagtilB);
decl VstartilB = diag(polygamma(mutilB .* phitilB, 1) +
polygamma((1.0 - mutilB) .* phitilB, 1));
decl VdagtilB = diag(polygamma((1.0 - mutilB) .* phitilB, 1)-
polygamma(phitilB, 1));
decl CovtilB = diag(-polygamma((1.0 - mutilB) .* phitilB, 1));
decl KbetabetatilB = s_mX'*FtilB*TtilB*VstartilB*TtilB*FtilB*s_mX;
decl KbetagamatilB = s_mX'*FtilB*(MtilB*VstartilB+CovtilB)*TtilB*HtilB*s_mZ;
decl KgamabetatilB = IbetagamatilB';
decl KgamagamatilB = s_mZ'*HtilB*(MtilB*VstartilB*MtilB+(MtilB+MtilB)
*CovtilB+VdagtilB)*HtilB*s_mZ;
decl fishertilB = (KbetabetatilB ~ KbetagamatilB) | (KgamabetatilB ~ KgamagamatilB);
decl fisherinvtilB = invert(fishertilB);
decl escorebetatilB = s_mX'*TtilB*FtilB*(ystarB-mustartilB);
decl escoregamatilB = s_mZ'*HtilB*(MtilB*(ystarB-mustartilB)+(ydagB-mudagtilB));
decl escoretilB = escorebetatilB | escoregamatilB; /* função escore */

/*****Fim*****/

/*Calculando as estatísticas de teste para obtenção do valor crítico*/
EtesteB[j-failB][0] = 2*(dfunc1B-dfunc2B); //Razão de verossimilhanças
EtesteB[j-failB][1] = (escorebetatilB[k-r:][])'*
(fisherinvtilB[k-r:k-1][k-r:k-1])*(escorebetatilB[k-r:][]); //Escore
EtesteB[j-failB][2] = (vtheta0B[k-r:k-1])'*
(fisherinvB[k-r:k-1][k-r:k-1])^(-1)*(vtheta0B[k-r:k-1]); //Wald
} //Fim do loop Bootstrap

/*Obtenção dos valores críticos a partir do bootstrap */
quantil_boot = quantilec(EtesteB, 1 - vsig');

cont_1= ((mStat[ci-fail][0]) .> quantil_boot[][0]);
Econt_1 = Econt_1 + cont_1;
cont_2= ((mStat[ci-fail][1]) .> quantil_boot[][1]);
Econt_2 = Econt_2 + cont_2;
cont_3= ((mStat[ci-fail][2]) .> quantil_boot[][2]);
Econt_3 = Econt_3 + cont_3;

/* Controle do processo */
if(imod(ci-fail + 1, controle) == 0)
println("\n", ci-fail + 1, " amostras realizadas : ",
(ci-fail + 1)*100/IREP, " % das replicas");
} /* Final do Loop de Monte Carlo */

/* ORGANIZAÇÃO DOS RESULTADOS - Estimção de Máxima Verossimilhança */
resul1 = zeros(k+m, 6); /* Inicialização da Matriz de Resultados */

```

```

/* Média das Estimativas */
resul1[][0] = (meanc(vEMV))';
/* Desvio Padrão das Estimativas */
resul1[][1] = sqrt((sumsqrc(vEMV) ./ IREP)' - sqr(resul1[][0]));
/* Viés da Média das Estimativas */
resul1[][2] = (resul1[][0] - theta);
/* Raiz do Erro Quadrático Médio Estimado */
resul1[][3] = sqrt((resul1[][1]) .^ 2 + sqr(resul1[][2]));
/* Coeficiente de assimetria */
resul1[][4] = (sumc((standardize(vEMV)) .^ 3) ./ IREP)';
/* Coeficiente de curtose */
resul1[][5] = (sumc((standardize(vEMV)) .^ 4) ./ IREP - 3)';

/* ORGANIZAÇÃO DOS RESULTADOS - Tamanhos dos Testes */
resul2 = zeros(columns(vsig), 8);
if (PODER!=1)
{
resul2 = ((cStat' ./IREP) .*100)~((Econt_1 ./IREP) .*100)~
((Econt_2 ./IREP) .*100)~((Econt_3 ./IREP) .*100);
}
else
{
resul2 = ((cStat_1 ./IREP) .*100)~((cStat_2 ./IREP) .*100)~
((cStat_3 ./IREP) .*100)~((cStat_4 ./IREP) .*100)~
((cStat_5 ./IREP) .*100)~((Econt_1 ./IREP) .*100)~
((Econt_2 ./IREP) .*100)~((Econt_3 ./IREP) .*100);
}

/* Momentos das Estatísticas de Teste */
resul3 = zeros(5, 6); /* Inicialização da Matriz de Resultados */
resul3 = moments(mStat);
resul3 = resul3|minc(mStat)|maxc(mStat);

/* Quantis Amostrais das Estatísticas de Teste */
resul4 = zeros(columns(vsig), 6); /* Inicialização da Matriz de Resultados */
resul4 = quanchi(1-vsig, r) ~ quantilec(mStat, 1 - vsig')~quantil_boot;

/*Salvando em arquivo RV, SR, W, Skov1 e Skov2 para produção de gráficos no R*/
decl Statgraf = mStat[][0:2] ~ mStat[][3:4];
savemat(stat , Statgraf);

/*Obtendo os quantis estimados da simulação de tamanho para emprego na
simulação de poder*/
if(PODER!=1)
{
qestimados= quantilec(mStat, 1.0 - vsig');
decl quantis_tam = "quantisbetavar20_r1.mat";
savemat(quantis_tam, qestimados);
}

/*Valores para acessar heteroscedasticidade da amostra*/
decl lambda1 = max(phi)/min(phi);

```

```

decl lambda2 = max(var)/min(var);

/* Impressão dos Resultados: */
print( "\n PROGRAMA OX: ", oxfilename(0) );
print( "\n VERSAO OX: ", oxversion() );
print( "\n DISTRIBUICAO: beta " );
print( "\n TAMANHO DAS AMOSTRAS: ", nobs );
print( "\n NUMERO DE REPLICAS MC: ", ci );
print( "\n NUMERO DE COVARIADAS: ", k+m);
print( "\n\t NUM. REPLICAS MC COM CONVERGENCIA: ", IREP );
print( "\n\t NUM. REPLICAS MC SEM CONVERGENCIA: ", fail );
print( "\n\t\t Sem restricao: ", falha );
print( "\n\t\t Com restricao: ", falhar);
print( "\n\t\t Ocorreu floglik<floglikr: ", ocorreu);
print("\n\n#####");
print("\nSkov1 = RV - 2*log(nu)");
print("\nSkov2 = RV*(1- (1/RV * log(nu)))^2");
print("\n#####");
print( "\n\nValores Verdadeiros dos Parametros: ");
print( "\n", "%8.3f",
"%c", {"beta_1", "beta_2", "beta_3", "beta_4", "beta_5",
"beta_6", "beta_7", "beta_8", "beta_9", "beta_10"},
"%r", {"-", "(theta[: (k-1)])"});
print("%8.3f",
"%c", {"gama_1", "gama_2", "gama_3", "gama_4", "gama_5",
"gama_6", "gama_7", "gama_8", "gama_9", "gama_10"},
"%r", {"-", "(theta[k: (k+m-1)])"});
print("\n\nNumero de parametros testados = r = ", r);
print( "\n\nHipotese Nula: Ho: (beta_", k-r+1, "... ,beta_m)=", beta0[(k-r):]);
println("\nGrau de Heterogeneidade da Dispersao: ", lambda1);
println("\nmax(var[y_t])/min(var[y_t]): ", lambda2);
println("\nIntervalo de mu: (" , min(mu), " , " , max(mu), ")");

/* Resultados da Estimacao dos Parâmetros */
print( "\n\nResultados da Estimacao dos Parametros (beta, gama)");
print( "\n", "%8.2f",
"%c", {"Media", "DP", "Vies", "REQM", "Assim", "Curt."},
"%r", {"beta_1", "beta_2", "beta_3", "beta_4", "beta_5",
"beta_6", "beta_7", "beta_8", "beta_9", "beta_10"},
resul1[0:(k-1)][]);
print( "%8.2f",
"%r", {"gama_1", "gama_2", "gama_3", "gama_4", "gama_5",
"gama_6", "gama_7", "gama_8", "gama_9", "gama_10"},
resul1[k:(k+m-1)][]);
if(PODER != 1)
{
/* Resultados do Tamanho dos Testes */
print( "\n\nResultados do Tamanho dos Testes");
}
else
{

```

```

/* Resultados do Poder dos Testes */
print( "\n\nHipotese alternativa: H1: beta = ", beta1);
print( "\n\nResultado do Poder dos Testes");
}
print( "\n", "%10.4f",
"%c", {"RV", "Escore", "Wald", "Skov1", "Skov2", "RV_Boot", "SR_Boot", "W_Boot"},
"%r", {"10%", "5%", "1%"}, resul2);

/* Resultados das medidas resumo das estatísticas de Teste */
print("\n\nResultados das medidas resumo das Estatísticas de Teste");
print( "\n", "%10.2f", "%c", {"RV", "Escore", "Wald", "Skov1", "Skov2"},
"%r", {"Sample Size", "Media", "DP", "Assimetria", "Curtose", "Minimo", "Maximo"}, resul3);

/* Resultados dos Quantis amostrais das Estatísticas de Teste */
print("\n\nResultados dos Quantis amostrais das Estatísticas de Teste");
print( "\n\ngraus de liberdade: ", r);
print( "\n", "%9.2f", "%c", {"Chi_gl", "RV", "Escore", "Wald",
"Skov1", "Skov2", "RV_Boot", "SR_Boot", "W_Boot"},
"%r", {"90%", "95%", "99%"}, resul4);

/* Data, Hora e Tempo de Execução */
print( "\nDATA: ", date() );
print( "\nHORA: ", time(), "\n" );
print( "\n\n\t\t TEMPO TOTAL DE EXECUCAO: ", timespan(dExecTime) );
print( "\n" );

}
/*----- Fim do Programa -----*/

```

Referências Bibliográficas

- [1] BARNDORFF-NIELSEN, O. E. On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator. *Biometrika* 70 (1983), 343–365.
- [2] BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Inference on full or partial parameters based on the standardized signed log likelihood ratio. *Biometrika* 73 (1986), 307–322.
- [3] BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Modified signed log likelihood ratio. *Biometrika* 78 (1991), 557–563.
- [4] BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Adjusted versions of profile likelihood and directed likelihood, and extended likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society B* 56 (1994), 125–140.
- [5] BERAN, R. Prepivoting test statistics: A bootstrap view of asymptotic refinements. *Journal of the American Statistical Association* 83 (1988), 687–697.
- [6] CORDEIRO, G. M. *Introdução à Teoria Assintótica*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.
- [7] COX, D. R.; REID, N. Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society B* 49 (1987), 1–39.
- [8] COX, D. R.; REID, N. A note on the difference between profile and modified profile likelihood. *Biometrika* 79 (1992), 408–411.
- [9] CRIBARI-NETO, F.; CORDEIRO, G. M. On Bartlett and Bartlett-type corrections. *Econometric Reviews* 15 (1996), 339–367.
- [10] CRIBARI-NETO, F.; LIMA, L. B. A misspecification test for beta regressions. Texto para discussão, 2007.
- [11] CRIBARI-NETO, F.; ZARKOS, S. G. R: Yet another econometric programming environment. *Journal of Applied Econometrics* 14 (1999), 319–329.
- [12] CYSNEIROS, A. H. M. A.; FERRARI, S. L. P. An improved likelihood ratio test for varying dispersion in exponential family nonlinear models. *Statistics and Probability Letters* 76 (2006), 255–265.
- [13] DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

- [14] DOORNIK, J. A. *Ox: an Object-Oriented Matrix Language*, 4th ed. London: Timberlake Consultants Press and Oxford: <http://www.doornik.com>, 2009.
- [15] EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics* 7 (1979), 1–26.
- [16] EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall, 1993.
- [17] ENGLE, R. F. Wald, likelihood, and Lagrange multiplier tests in econometrics. In *Handbook of Econometrics*, Z. Griliches; M. Intriligator, Eds., vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 1984, pp. 775–826.
- [18] ESPINHEIRA, P. L.; FERRARI, S. L. P.; CRIBARI-NETO, F. On beta regression residuals. *Journal of Applied Statistics* 35 (2008a), 407–419.
- [19] ESPINHEIRA, P. L.; FERRARI, S. L. P.; CRIBARI-NETO, F. Influence diagnostics in beta regression. *Computational Statistics & Data Analysis* 52 (2008b), 4417–4431.
- [20] FERRARI, S. L. P.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics* 31 (2004), 799–815.
- [21] FERRARI, S. L. P.; CYSNEIROS, A. H. M. A. Skovgaard’s adjustment to likelihood ratio tests in exponential family nonlinear models. *Statistics and Probability Letters* 78 (2008), 3049–3057.
- [22] FERRARI, S. L. P.; PINHEIRO, E. C. Improved likelihood inference in beta regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 81, 4 (2011), 431–443.
- [23] IHAKA, R.; GENTLEMAN, R. R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 5 (1996), 299–314.
- [24] JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions*, 2nd ed., vol. 2. New York: Wiley, 1995.
- [25] KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology* 46 (1980), 79–88.
- [26] LAMPORT, L. *LaTeX: A Document Preparation System*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Professional, 1986.
- [27] MACKINNON, J. G. Bootstrap hypothesis testing. Working Paper 1127, Department of Economics at Queen’s University, 2007.
- [28] MARSAGLIA, G. A random number generator for C. Discussion paper, posting on Usenet newsgroup sci.stat.math, September 1997.
- [29] McCULLAGH, P.; NELDER, J. A. *Generalized Linear Models*, 2nd ed. London: Chapman and Hall, 1989.

- [30] McCULLAGH, P.; TIBSHIRANI, R. A simple method for the adjustment of profile likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society B* 52 (1990), 325–344.
- [31] MELO, T. F. N.; VASCONCELLOS, K. L. P.; LEMONTE, A. J. Some restriction tests in a new class of regression models for proportions. *Computational Statistics & Data Analysis* 53 (2009), 3972–3979.
- [32] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [33] OSPINA, R. *Modelos de Regressão Beta Inflacionados*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2008.
- [34] OSPINA, R.; CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. P. Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis* 51 (2006), 960–981.
- [35] OSPINA, R.; FERRARI, S. L. P. Inflated beta distributions. *Statistical Papers* 51 (2010), 111–126.
- [36] PINHEIRO, E. C. Ajustes para o teste da razão de verossimilhanças em modelos de regressão beta. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2009.
- [37] RAMSEY, J. B. Tests for specification errors in classical linear least squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society B* 31 (1969), 350–371.
- [38] RAO, C. R. Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 44 (1948), 50–57.
- [39] RAO, C. R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. New York: Wiley, 1973.
- [40] SIMAS, A. B.; BARRETO-SOUZA, W.; ROCHA, A. V. Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis* 54 (2010), 348–366.
- [41] SKOVGAARD, I. M. An explicit large-deviation approximation to one-parameter tests. *Bernoulli* 2 (1996), 145–165.
- [42] SKOVGAARD, I. M. Likelihood asymptotics. *Scandinavian Journal of Statistics* 28 (2001), 3–32.
- [43] STERN, S. E. A second-order adjustment to the profile likelihood in the case of a multi-dimensional parameter of interest. *Journal of the Royal Statistical Society B* 59 (1997), 653–665.
- [44] VENABLES, W. N.; SMITH, D. M.; THE R DEVELOPMENT CORE TEAM. *An Introduction to R*, 2nd ed. Network Theory Limited, 2009.

- [45] WALD, A. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical Society* 54 (1943), 426–482.
- [46] WILKS, S. S. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics* 9 (1938), 60–62.
- [47] YOUNG, G. A. Bootstrap: More than a stab in the dark? *Statistical Science* 9 (1994), 382–415.