



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

TESE DE DOUTORADO

**MODELO DINÂMICO HIERÁRQUICO ESTOCÁSTICO
PARA INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA E
EM OUTROS SISTEMAS COMPLEXOS**

por

Domingos Sávio Pereira Salazar

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador-UFPE)
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF - UFPE)
Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (DF - UFPE)
Profa. Célia Beatriz Anteneodo de Porto (DF-PUC-RIO)
Prof. Luca Moriconi (IF-UFRJ)

Recife - PE, Brasil
Novembro - 2010

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Salazar, Domingos Sávio Pereira.

Modelo dinâmico hierárquico estocástico para intermitência em turbulência e em outros sistemas complexos / Domingos Sávio Pereira Salazar. - Recife: O Autor, 2010.

xiii, 149 folhas : il. fig.

Orientador: Giovani Lopes Vasconcelos
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1.Mecânica dos fluidos. 2.Turbulência. 3.Equações diferenciais estocásticas.I. Vasconcelos, Giovani Lopes (orientador). II. Título.



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Domingos Sávio Pereira Salazar

**MODELO DINÂMICO HIERÁRQUICO ESTOCÁSTICO
PARA INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA E
EM OUTROS SISTEMAS COMPLEXOS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovani Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Maurício Domingues Coutinho Filho, Antônio Murilo Santos Macêdo, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Célia Beatriz Anteneodo de Porto, do Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e Luca Moriconi, do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, consideram o candidato:

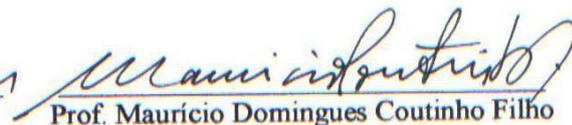
Aprovado

Reprovado

Em Exigência

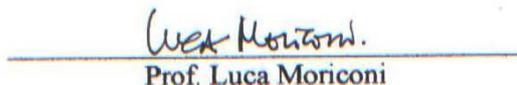
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em dezoito de novembro de dois mil e dez.


Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Presidente e Orientador


Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho


Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo


Profa. Célia Beatriz Anteneodo de Porto


Prof. Luca Moriconi

Agradecimentos

Agradeço de forma especial aos meus pais, Alfredo e Fátima, por acreditarem incondicionalmente no meu potencial durante toda minha vida. Agradeço ao meu irmão, Guilherme, por tornar minha caminhada mais divertida.

Gostaria também de expressar minha gratidão ao meu orientador, Giovani Vasconcelos, pelo profissionalismo e pela confiança investida em mim durante os últimos quatro anos. Aproveito também para agradecer a todos os professores e funcionários do DF pelo apoio e reconhecimento. Agradeço também aos vários amigos que fiz durante esses anos de graduação e pós-graduação no departamento.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro essencial para a realização desta tese.

Resumo

Nesta tese, propomos um modelo dinâmico estocástico para intermitência em turbulência completamente desenvolvida. O modelo é baseado na noção fenomenológica da cascata de energia em turbulência, segundo a qual a energia é injetada na escala integral do sistema por um fluxo externo, formando estruturas coerentes (vórtices) grandes que eventualmente se dividem em vórtices menores, que por sua vez se dividem em vórtices ainda menores, até atingirem a escala de dissipação, onde a energia é dissipada por efeitos de viscosidade. Desta maneira, a energia é transferida essencialmente sem dissipação pela cascata através de uma hierarquia de vórtices de tamanhos cada vez menores. Em nosso modelo, a dinâmica dos fluxos de energia (i.e., as taxas de transferência de energia) entre escalas sucessivas é descrita por um sistema de equações diferenciais estocásticas acopladas que são deduzidas a partir de condições fisicamente razoáveis. Sob a hipótese adicional de que as escalas de tempo característico para a dinâmica em escalas sucessivas são bem separadas, é possível calcular a função densidade de probabilidade (fdp) do fluxo de energia em um dado nível N da cascata de energia como uma integral múltipla que envolve os fluxos de energia de todas as escalas acima. Os momentos da taxa de dissipação de energia em uma dada escala r são encontrados e exibem comportamento de lei de potência cujos expoentes foram calculados analiticamente. Também mostramos que o modelo Log-Normal de Kolmogorov de intermitência é obtido do nosso modelo no limite de uma cascata infinita. Usando a fdp do fluxo de energia, a distribuição de probabilidade dos incrementos de velocidade é calculada explicitamente e expressa em termos de funções hipergeométricas generalizadas do tipo ${}_N F_0$. Estas distribuições são generalizações naturais das distribuições gaussiana e da chamada q -gaussiana, correspondendo aos casos ${}_0 F_0$ e ${}_1 F_0$, respectivamente, e representando (para $N > 0$) uma grande classe de distribuições de probabilidade com caudas de lei de potência e variância finita. As predições do modelo estão em excelente acordo com experimentos de turbulência Euleriana e turbulência Lagrangeana. O modelo também é aplicado para descrever flutuações dos preços de ativos financeiros. No contexto da analogia entre turbulência e mercados financeiros, nosso modelo de intermitência é reformulado como um modelo de volatilidade estocástica, descrevendo quantitativamente pela primeira vez a chamada cascata de informação dos mercados financeiros. Mostramos que as distribuições teóricas ajustam muito bem as distribuições empíricas dos retornos do Ibovespa para registros de alta frequência (cotações *intraday*). Uma aplicação do modelo à precificação de opções também é discutida brevemente. Finalmente, uma generalização do nosso modelo é apresentada, a qual resulta em toda a família de distribuições baseadas nas funções hipergeométricas generalizadas ${}_N F_M$. Possíveis aplicações desta classe geral de distribuições são mencionadas

brevemente.

Palavras-chave: Turbulência, Intermitência, Equações Diferenciais Estocásticas, Distribuições com Lei de Potência, Econofísica, Volatilidade Estocástica

Abstract

In this dissertation, a stochastic dynamical model is proposed for intermittency in fully developed turbulence. The model is based upon the phenomenological notion of the energy cascade in turbulence, whereby energy is injected at the integral scale by an externally driving mechanism, forming large coherent structures (eddies) that eventually break up into smaller eddies, which then split into even smaller eddies, and so on, all the way down to the dissipative scale, where energy is dissipated by viscous effects. In this way, energy is transferred essentially without dissipation along the cascade through a hierarchy of eddies of decreasing size. In our model, the dynamics of the energy fluxes (i.e., the rates of energy transfer) between successive scales in the energy cascade is described by a system of coupled stochastic differential equations that is derived from physically reasonable assumptions. Under the additional hypothesis that the characteristic time scales for the dynamics at the successive scales are well separated apart, it is possible to compute the probability density function (pdf) for the energy flux at a given step N of the energy cascade as a multiple integral involving the energy fluxes at all scales above. The moments of the rate of energy dissipation at a given scale r are found to exhibit power-law behavior and the scaling exponents are computed analytically. It is also shown that the Kolmogorov lognormal model of intermittency is obtained from our model in the limit of an infinite cascade. Using the pdf of the energy flux, the probability distribution of velocity increments is then calculated explicitly and expressed in terms of generalized hypergeometric functions of the type ${}_N F_0$. Such distributions are a natural extension of the Gaussian and the so-called q -Gaussian distributions, corresponding to ${}_0 F_0$ and ${}_1 F_0$, respectively, and represent (for $N > 0$) a large class of probability distributions with power-law tails and finite variance. The model predictions are found to be in excellent agreement with experiments on both Eulerian and Lagrangean turbulence. The model is also applied to describe fluctuations in financial asset prices. In view of the analogy between turbulence in fluids and price fluctuations in financial markets, our intermittency model is reformulated as a stochastic volatility model, thus quantitatively describing for the first time the so-called information cascade in financial markets. The theoretical pdfs are shown to fit extremely well the empirical distribution of the Ibovespa returns for high-frequency data (intraday quotes). An application of the model for option pricing is also briefly discussed. Finally, a generalization of our model is presented which yields the entire family of distributions based on the generalized hypergeometric functions ${}_N F_M$. Possible applications of this general class of distributions are briefly mentioned.

Keywords: Turbulence, Intermittency, Stochastic Differential Equations, Power- Law

Distributions, Econophysics, Stochastic Volatility.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Turbulência	1
1.2	Breve Introdução Histórica à Turbulência	6
1.3	Objetivos e Organização da Tese	12
1.3.1	Capítulo 2	12
1.3.2	Capítulo 3	13
1.3.3	Capítulo 4	13
1.3.4	Capítulo 5	14
1.3.5	Capítulo 6	14
1.3.6	Capítulo 7	15
2	Equação de Navier-Stokes e Modelos de Turbulência	17
2.1	As Equações de Navier-Stokes e suas Simetrias	18
2.1.1	Simetrias	18
2.1.2	Leis de Conservação	19
2.2	Equação do Balanço de Energia	22
2.3	Teoria de Kolmogorov K41	27
2.4	Modelo Log-Normal de Kolmogorov-Obukhov (K62)	29
2.5	Modelos de Intermitência	32
2.5.1	Modelo β	32
2.5.2	Modelo Bifractal	34
2.5.3	Modelo Multifractal	35
2.5.4	Dissipação Multifractal	37
2.5.5	Modelos de cascata aleatória	38
2.5.6	Modelos de She-Lévêque e Dubrulle	39
2.5.7	Modelos de Sawford e de Reynolds	40
2.5.8	Modelos de Cascas	42
3	Modelo Dinâmico Hierárquico para Intermitência	45
3.1	Modelo Dinâmico Estocástico para o Fluxo de Energia	46
3.2	Dedução do Modelo	47
3.2.1	Termos Determinísticos	47
3.2.2	Inserindo Ruído	51
3.3	Auto-Correlação Temporal do Fluxo de Energia	55
3.4	Flutuações de Energia	58

3.5	Solução Exata	61
4	As Distribuições de Equilíbrio Modelo	65
4.1	Distribuições de Probabilidade para o Fluxo de Energia	66
4.1.1	Modelo de Uma Escala	66
4.1.2	Modelo de Duas Escalas	67
4.1.3	Modelo Geral com N Escalas	69
4.2	Turbulência Lagrangeana	76
4.3	Distribuição de Probabilidade dos Incrementos de Velocidade	79
4.3.1	Incrementos de Velocidade no Modelo de Uma Escala	79
4.3.2	Incrementos de Velocidade no Modelo de Duas Escalas	81
4.3.3	Incrementos de Velocidade no Modelo de N Escalas	82
4.4	Aplicação a Dados de Turbulência Lagrangeana	86
4.5	Aplicação a Dados de Turbulência Euleriana	88
4.6	Cascata Contínua de Energia e o Modelo Log-Normal	95
5	Aplicações à Econofísica	101
5.1	Opções e Modelo de Black-Scholes	101
5.2	Mercados Reais : o “Sorriso” da Volatilidade e Leis de Potência	107
5.3	Modelos de Volatilidade Estocástica	109
5.4	Precificação de Opções com o MHG de Duas Escalas	111
5.5	Modelo Hipergeométrico Generalizado para os Retornos	115
6	Modelo Hipergeométrico Generalizado: Caso Geral	121
6.1	Modelo com Distribuição Beta	122
6.2	MHG: Caso Geral	124
6.2.1	Caso $M F_M$	124
6.2.2	Caso $N+M F_M$	128
7	Conclusões e Perspectivas	131
A	Lema de Itô	135
B	Demonstração do Teorema 4.1	137
C	Demonstração da eq. (4.67)	141
D	Demonstração do Teorema 4.2	143

Lista de Figuras

1.1	Desenho de Leonardo da Vinci (1452-1519) representando um escoamento turbulento.	2
1.2	Escoamento de um fluido passando por uma esfera. (a) $R = 9.15$, (b) $R = 25.5$, (c) $R = 37.7$, (d) $R = 118$; do livro “Album of Fluid Motion” de Milton Van Dyke [2].	4
1.3	Escoamento de um fluido passando por uma esfera, $R = 15000$; do livro “Album of Fluid Motion” de Milton Van Dyke [2].	4
1.4	Construção de um histograma a partir da série temporal de velocidades [4].	5
1.5	Histograma dos incrementos de velocidade de um experimento de turbulência lagrangeana vs. distribuição Normal.	6
1.6	Três realizações estocásticas do fluxo de energia no nosso Modelo Hipergeométrico Generalizado de duas escalas ($N = 2$), que será explorado nos capítulos seguintes.	11
2.1	Expoente das funções de estrutura do modelo Log-Normal para turbulência Lagrangeana	32
2.2	Expoente das funções de estrutura para o modelo Bifractal	35
4.1	Distribuições $p_n(\epsilon)$ com $n = 1, 2, 3$ e 4 . Parâmetros $\beta_i = 5$ para todo i .	73
4.2	Distribuição $p_1(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.	74
4.3	Distribuição $p_2(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.	74
4.4	Distribuição $p_3(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.	75
4.5	Distribuição $p_4(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.	75
4.6	Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de uma escala ($N = 1$), com $\beta = 0.5$, que é idêntica à distribuição q -gaussiana.	87
4.7	Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de uma escala ($N = 1$), com $\beta = 0.9$, que é idêntica à distribuição q -gaussiana.	87

- 4.8 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de cinco escalas ($N = 5$), com $\beta = 2.1$. 89
- 4.9 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de cinco escalas ($N = 5$), com $\beta = 2.1$ e o modelo de seis escalas ($N = 6$), com $\beta = 2.5$. 89
- 4.10 Esquema do aparato experimental utilizado para medir velocidades em turbulência euleriana [74]. 92
- 4.11 Exemplo de série temporal dos incrementos de velocidade para turbulência euleriana como medida na Ref. [74]. O eixo vertical está normalizado pelo desvio padrão σ da série. Para este experimento, temos $Re = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. 92
- 4.12 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 0$ e $N = 1, \beta = 1.8$. 94
- 4.13 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 1, \beta = 1.8$; $N = 2, \beta = 3.4$; $N = 3, \beta = 5.0$; $N = 4, \beta = 6.5$; $N = 5, \beta = 7.9$. Mostramos apenas o semi-eixo positivo de $\delta_{r_0}v$. 94
- 4.14 Turbulência Euleriana. $R = 8500$ e $r_0 = 4,0 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 12$; $N = 4, \beta = 10$; $N = 3, \beta = 8.8$; $N = 2, \beta = 7.8$; $N = 1, \beta = 5.4$. 96
- 4.15 Turbulência Euleriana. $R = 29830$ e $r_0 = 1,8 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.7$; $N = 4, \beta = 7.3$; $N = 3, \beta = 6.3$; $N = 2, \beta = 5.7$; $N = 1, \beta = 4.7$. 96
- 4.16 Turbulência Euleriana. $R = 58300$ e $r_0 = 1,5 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 6.8$; $N = 4, \beta = 5.5$; $N = 3, \beta = 5.2$; $N = 2, \beta = 5.0$; $N = 1, \beta = 4.4$. 97
- 4.17 Turbulência Euleriana. $R = 115000$ e $r_0 = 0,8 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.0$; $N = 4, \beta = 6.4$; $N = 3, \beta = 6.2$; $N = 2, \beta = 5.8$; $N = 1, \beta = 3.6$. 97
- 4.18 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.0$; $N = 4, \beta = 7.0$; $N = 3, \beta = 6.0$; $N = 2, \beta = 5.0$; $N = 1, \beta = 4.0$. 98
- 4.19 Turbulência Euleriana. $R = 757000$ e $r_0 = 0,6 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.4$; $N = 4, \beta = 8.0$; $N = 3, \beta = 7.0$; $N = 2, \beta = 6.0$; $N = 1, \beta = 3.7$. 98
- 5.1 Volatilidade implícita das ações da Vodafone (VOD) em função da razão K/S . A concavidade desta curva representa o chamado “sorriso da volatilidade”. 108
- 5.2 Sorriso da Volatilidade previstos pelo MHG_N , com $N = 1$ e $N = 2$. Parâmetros: $r = 0.1$, $T = 0.2$, $S_0 = 30$, $\beta = 1.33$, $v_0 = 4,5 \times 10^{-4}$. 114

- 5.3 Série real de preços da opção de compra PETRH34 com os ajustes dos modelos de Black-Scholes e MHG_1 . Data do vencimento: 16/08/10. Início do experimento: 13/05/10 ($T = 65$ dias). Preço de exercício $K = 33.77$. Taxa livre de risco $r = 0.1$. Parâmetros obtidos da série temporal PETR4: $\beta = 1.19$, $v_0 = 0.11$. 116
- 5.4 Ajuste ao Histograma de retornos da série histórica do IBOVESPA. Todas as curvas do MHG foram selecionadas com o mesmo parâmetro $\beta = 3.0$. 119

Introdução

1.1 Turbulência

Considerado um dos maiores problemas em aberto da física clássica, as flutuações irregulares do movimento dos fluidos ganharam importância em várias áreas do conhecimento nas últimas décadas. Por um lado, acredita-se que as equações de Navier-Stokes contenham toda a informação necessária para explicar a complexidade da turbulência. Neste caso, estaríamos diante de um problema puramente matemático cuja solução colocaria um novo marco na teoria de equações diferenciais parciais não-lineares. O interesse da comunidade é tamanho que um prêmio foi instituído para quem conseguir realizar esta façanha [1], consagrando o problema também como um dos maiores problemas matemáticos em aberto. Por outro lado, há os que perceberam que uma teoria bem sucedida de turbulência pode resolver problemas práticos na simulação de escoamentos de fluidos passando por veículos, aeronaves e até reatores nucleares. Além disso, o fenômeno da turbulência é o responsável pela mistura rápida de ar e fluido no motor de combustão, pela dissipação de energia em linhas de escoamento de água e está relacionada com a dispersão de poluentes na atmosfera e oceanos. Ele está relacionado até com a distorção na propagação de sinais eletromagnéticos. Mas, definitivamente, foram suas manifestações mais corriqueiras as responsáveis pelo fascínio criado nas mentes dos pensadores. Seja pela forma estranha que fica desenhada na água quando um corpo passa rapidamente ou pelas curvas que emergem da fumaça que corta o céu, os cientistas foram atraídos desde cedo por este mistério que ronda a dinâmica dos fluidos. Registros que ilustram este fascínio podem ser encontrados em antigos desenhos de Leonardo da Vinci (Figura 1.1), que esboçou o movimento errático de escoamentos turbulentos. Porém, uma situação atípica surgiu quando os físicos tentaram atacar o fenômeno de um ponto de vista mais quantitativo: quando o assunto é turbulência, não sabemos exatamente qual problema devemos resolver.

Pode-se imaginar que a resposta imediata é que devemos tratar diretamente as equações de Navier-Stokes na tentativa de encontrarmos uma solução que explique a complexidade



Figura 1.1 Desenho de Leonardo da Vinci (1452-1519) representando um escoamento turbulento.

encontrada nos experimentos. Esta é uma abordagem ambiciosa e possui muitos adeptos. Este é o caminho da linha de pesquisa que tenta extrair a turbulência de um ponto de vista puramente determinístico, em que as flutuações irregulares são causadas pelo caos que surge das equações diferenciais não lineares e não de hipóteses sobre um ruído emergente no sistema. Nessa abordagem determinística, estuda-se o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares inspirados nas equações de Navier-Stokes, muitas vezes com ajuda de simulações computacionais.

Outra linha principal de pesquisa em turbulência considera que algumas variáveis do escoamento são aleatórias e tenta-se modelar suas distribuições de probabilidade. Este caminho segue os passos de Kolmogorov, considerado o pesquisador mais influente na área, cujas hipóteses e resultados são revisitados e refinados em busca de maior adequação aos experimentos. Contudo, existem outras formas mais recentes de modelar a turbulência, com a utilização de conceitos de sistemas complexos, multifractalidade e renormalização.

É possível que estejamos em uma posição análoga ao surgimento da física estatística: apesar de não ser possível calcular as propriedades de um gás a partir das leis de Newton, as variáveis relevantes para a descrição experimental do sistema ainda podem ser tratadas. Os cálculos necessários se tornaram a mecânica estatística, donde surgiram os conceitos de equilíbrio, calor, temperatura, entropia, distribuição de Maxwell-Boltzmann, etc. As

leis de Newton continuaram respeitadas, mas uma nova fenomenologia teve que entrar em cena. Uma fenomenologia apropriada para a escala do experimento que gostaríamos de explicar. De forma análoga, precisamos fazer a pergunta certa para o fenômeno de turbulência, a fim de descartar, se necessário, abordagens que requeiram um esforço matemático descomunal para modelar partes do fenômeno que talvez não sejam contempladas pelos experimentos.

Quando um fluido escoar lentamente passando por um objeto sólido, como a esfera da Figura 1.2, podemos perceber as linhas de corrente do fluido desenhando suavemente o contorno do corpo. Neste caso, dizemos que o escoamento é laminar. Ao aumentarmos progressivamente a velocidade do fluido, as linhas de corrente separam-se da esfera na parte posterior da mesma e forma-se uma zona de recirculação (com dois vórtices atrás da esfera). Aumentando-se ainda mais a velocidade, a zona de recirculação aumenta até eventualmente tornar-se instável. Em seguida, um aumento da velocidade do fluido causa uma quebra da uniformidade do escoamento e o fluido passa a apresentar comportamento oscilante e periódico no tempo. Finalmente, após atingir um determinado limiar do número de Reynolds, parâmetro definido a seguir, perceberemos que o escoamento apresenta-se de forma errática logo atrás da esfera, como mostra a Figura 1.3. O campo de velocidades passa a oscilar de maneira caótica e aparentemente imprevisível e dizemos que este escoamento está em regime turbulento.

Quando visto de uma escala apropriada, o que parece apenas ruído mostra uma hierarquia de estruturas (chamadas de *eddies*, em inglês, ou turbilhões, em português) que evoluem no tempo e espaço. Elas se esticam, dobram-se, aglomeram-se e apresentam grande sensibilidade às condições iniciais do experimento. Obter indícios da existência desses turbilhões a partir das equações de Navier-Stokes é uma tarefa muito difícil e ainda não foi concretizada. Entretanto, a partir das equações de Navier-Stokes pode-se definir um parâmetro adimensional, o chamado número de Reynolds, que serve para caracterizar o estágio de desenvolvimento da turbulência. Mais especificamente,

$$R = \frac{LV}{\nu}, \quad (1.1)$$

onde L e V são respectivamente a escala característica e a velocidade do fluido, e ν é a viscosidade cinemática do fluido, definida por η/ρ , onde η é a viscosidade dinâmica e ρ é a densidade do fluido. Fisicamente, o número de Reynolds representa a razão entre as forças inerciais e forças viscosas, ou seja, é a razão entre os termos não linear e linear das equações de Navier-Stokes. Pelo princípio de similaridade [2] para fluidos incompressíveis, o número de Reynolds é o único parâmetro de controle dos experimentos. Portanto, as

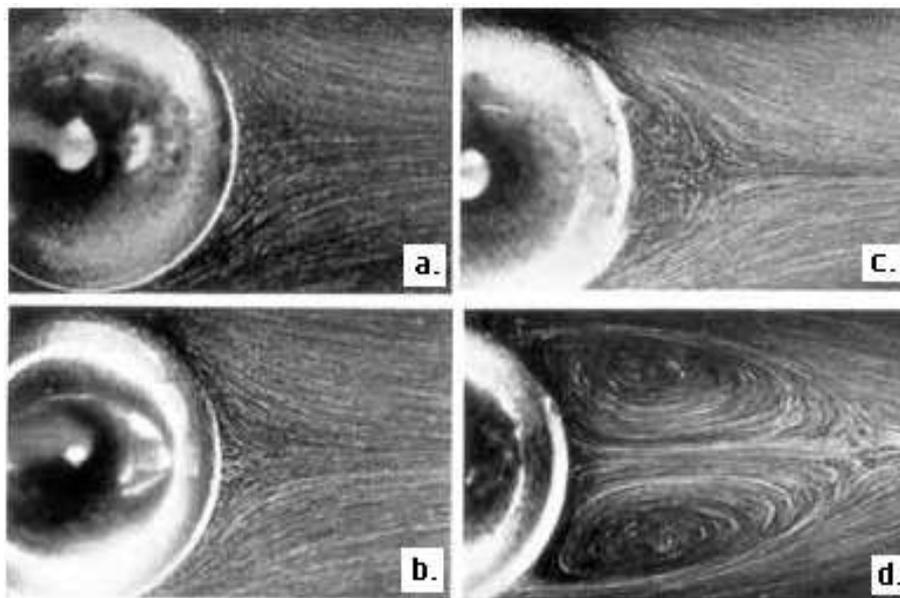


Figura 1.2 Escoamento de um fluido passando por uma esfera. (a) $R = 9.15$, (b) $R = 25.5$, (c) $R = 37.7$, (d) $R = 118$; do livro “Album of Fluid Motion” de Milton Van Dyke [2].

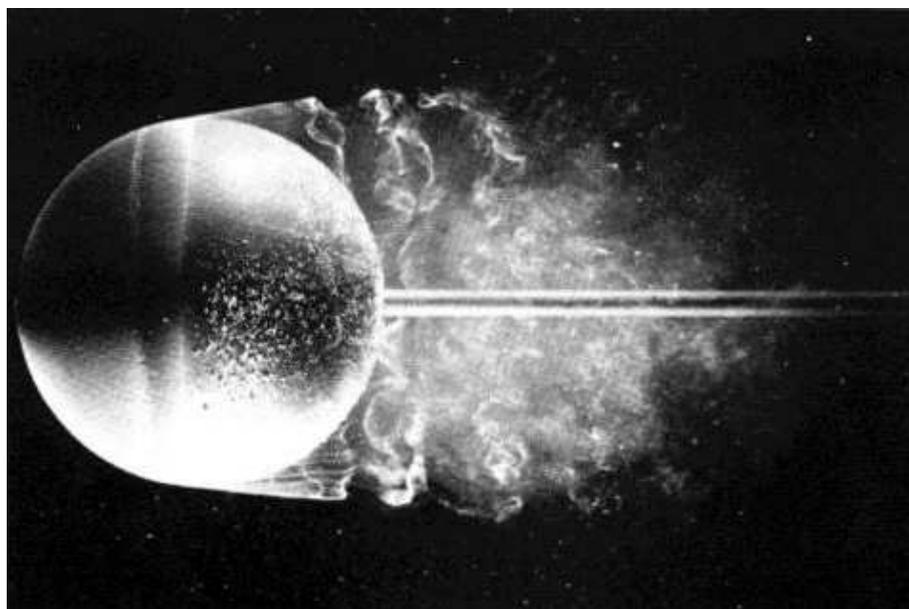


Figura 1.3 Escoamento de um fluido passando por uma esfera, $R = 15000$; do livro “Album of Fluid Motion” de Milton Van Dyke [2].

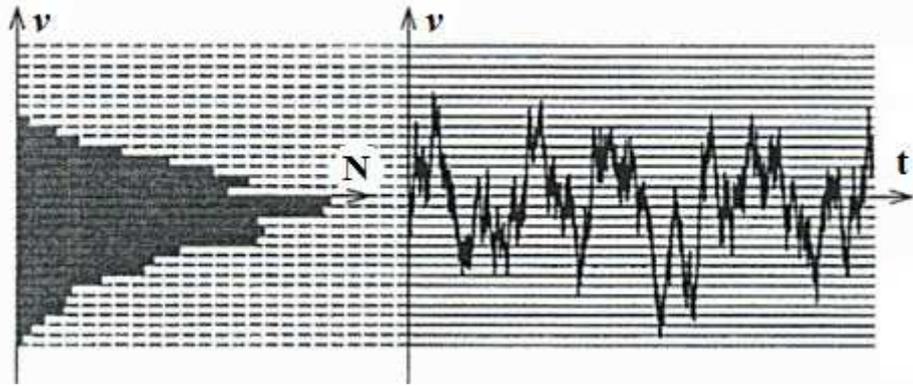


Figura 1.4 Construção de um histograma a partir da série temporal de velocidades [4].

medidas de turbulência deveriam variar monotonicamente com este parâmetro, o que acontece de fato nos experimentos. Neste aspecto, no limite de número de Reynolds infinito, a chamada turbulência completamente desenvolvida pode ser descrita apenas por variáveis aleatórias. Alternativamente, pode-se dizer, de um ponto de vista emergentista, que um modelo de variáveis aleatórias consegue capturar de forma satisfatória a física necessária para explicar uma dada classe de experimentos e, portanto, merece ser explorado. Nesse contexto, podemos dizer que um dos objetivos da pesquisa em turbulência é quantificar as flutuações de velocidade observadas em pontos distintos em um mesmo instante de tempo (turbulência euleriana) ou para uma mesma partícula em instantes de tempos distintos (turbulência lagrangeana). Estas flutuações são registradas como séries temporais a partir de experimentos e usualmente estudadas através da função densidade de probabilidade (fdp). A Figura 1.4 mostra uma série temporal típica de incrementos de velocidade medidos em um escoamento turbulento. Como mostra a figura, esta série pode ser imediatamente associada a um histograma dos incrementos de velocidades, que será nosso objeto de estudo.

Encontrar um modelo de turbulência para as flutuações de velocidade consiste, em última instância, em obter uma forma funcional para esta fdp. Existem várias propostas de modelos para os incrementos de velocidade, o que resulta em uma grande variedade de possíveis fdp's. Contudo, uma característica é marcante nos dados experimentais: a distribuição empírica dos incrementos de velocidade não é uma gaussiana para escalas observacionais pequenas. A Figura 1.5 mostra um histograma para incrementos de velocidade de turbulência lagrangeana, normalizado pelo desvio padrão, e uma distribuição Normal de mesma média e variância que os dados. Os dados foram obtidos da Ref. [3]. As curvas sofreram uma translação para uma melhor visualização. Note que a distribuição

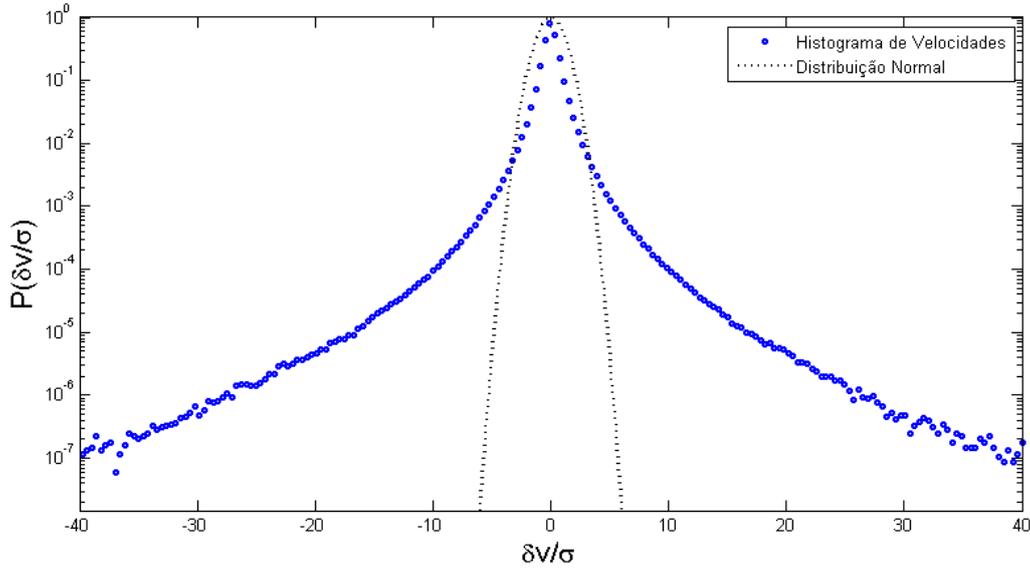


Figura 1.5 Histograma dos incrementos de velocidade de um experimento de turbulência lagrangeana vs. distribuição Normal.

Normal falha completamente no ajuste aos dados, sobretudo na região das caudas.

Além da forma funcional da fdp para os incrementos de velocidade, procura-se estabelecer uma relação entre os momentos estatísticos das distribuições encontradas em escalas espaciais (ou temporais) distintas. Será que existe alguma relação entre a fdp dos incrementos de velocidade para experimentos realizados em escalas observacionais diferentes? A resposta é contemplada de diferentes maneiras pelos diversos modelos de turbulência. Vamos revisá-los brevemente, começando com uma exposição histórica das contribuições encontradas para o fenômeno de turbulência.

1.2 Breve Introdução Histórica à Turbulência

O problema de um sistema livre, no qual não há forças externas, é trivial em algumas teorias físicas, pois resultam em equações diferenciais cujas soluções são relativamente simples. A dinâmica de fluidos, por outro lado, é descrita por uma equação diferencial não linear difícil de ser resolvida. Ao aplicar as leis de Newton e a conservação da massa a um fluido (tratado como meio contínuo) e lançar mão de uma relação constitutiva linear, surge uma equação aparentemente simples, a equação de Navier-Stokes, conhecida há cerca de 150 anos. O problema é que, como mencionamos, sua solução geral, particular-

mente no regime turbulento, ainda não foi encontrada. Apesar dos esforços iniciais, até o final do séc. XIX não se tinha noção clara do que era turbulência. Apenas notava-se que os escoamentos poderiam ser laminares ou turbulentos e que estes últimos conseguiam transportar calor, matéria e momento bem melhor que os escoamentos laminares. Percebeu-se a partir de observações de canais de água que existia uma analogia entre as moléculas de gás e turbilhões no sentido de carregar e transportar momento.

Foi o físico inglês Reynolds quem começou o estudo sistemático de turbulência [4]. A partir da visualização de escoamentos em canos, ele conseguiu estimar o critério para a ocorrência de turbulência a partir de um parâmetro de controle adimensional, hoje conhecido como Número de Reynolds, que introduzimos acima. Ele também introduziu a chamada “Decomposição de Reynolds”, em que separa a parte média da parte flutuante do movimento do fluido. As equações de Reynolds para a velocidade média demonstraram o chamado “*closure problem*” em turbulência: se, a partir da equação de Navier-Stokes, for gerada uma equação auxiliar para um momento estatístico de ordem menor da velocidade (como a média, por exemplo), a equação resultante contém momentos de ordem mais alta (e.g. a variância) de forma que, em qualquer nível na hierarquia de momentos estatísticos existe sempre uma variável a mais que o número de equações. Este tipo de característica não é observada em processos gaussianos, por exemplo.

Posteriormente, um número maior de cientistas se dedicaram ao estudo de turbulência, tanto teoricamente quanto através de experimentos. Apesar de Reynolds possuir um trabalho relevante sobre o problema de fechamento das equações dos momentos das velocidades, os fundamentos deste problema parecem ter sido explorados pela primeira vez por Keller e Friedmann [5]. Eles deduziram uma equação dinâmica geral para os momentos e mostraram que, na equação de cada momento, surgia momentos de ordem superior. Desta forma, não há maneira de resolver a equação sem a adição de alguma hipótese sobre a estatística das velocidades. Várias tentativas foram feitas no sentido de fechar as equações dos momentos.

Em 1922, a descrição fenomenológica da turbulência ganhou uma nova ferramenta com a introdução do conceito de cascata de energia por Richardson [6]. Segundo essa proposta, quando inserimos energia em um escoamento turbulento, os maiores turbilhões são criados e transferem sua energia para turbilhões menores. Este processo se repete em várias escalas até que a energia seja dissipada. Como veremos, esta idéia é de grande utilidade em trabalhos clássicos na área de turbulência.

Em 1935, Taylor introduziu o conceito de turbulência isotrópica e homogênea [7]. Como as equações de Navier-Stokes podem ser vistas como aplicações das Leis de Newton

aos fluidos, as transformações Galileanas preservam a forma das equações. Não podemos falar exatamente em simetrias da velocidade em um escoamento turbulento pois ela não é uma função bem comportada do tempo, mas podemos falar das simetrias no sentido estatístico. Isto é, as simetrias, que são quebradas quando aumentamos o número de Reynolds e saímos de um escoamento laminar para um turbulento, são reestabelecidas em um sentido estatístico no limite do número de Reynolds muito grande [8]. Na prática, isto significa que podemos esperar algumas propriedades gerais a serem obedecidas pelo campo de velocidades (e por sua distribuição de probabilidade). Por exemplo, as distribuições de velocidade (e seus momentos) em turbulência são invariantes sob o efeito de translações, rotações e reflexões nos eixos coordenados. Além disso, herdamos invariâncias por transformações de escala deduzidas a partir das equações de Navier-Stokes.

Taylor também foi o responsável pela introdução de uma hipótese muito importante que leva seu nome. A hipótese de Taylor relaciona as flutuações na diferença instantânea de velocidades que existe entre dois pontos fixos do escoamento (turbulência euleriana) com flutuações que existem na velocidade medida em instantes diferentes para um mesmo ponto fixo do escoamento. Desta maneira, experimentos de turbulência euleriana podem ser feitos a partir de apenas um único sensor capaz de medir velocidade do escoamento localmente, obtendo-se assim uma série temporal das medidas de velocidade. Em seguida, os dados podem ser tratados e, de posse da velocidade média do escoamento, podemos acessar diferentes escalas espaciais da turbulência a partir de uma mesma série temporal.

Em 1941, Kolmogorov entra em cena e, sem referência direta às equações de Navier-Stokes, postula que as menores escalas da turbulência são estatisticamente isotrópicas, não importando como a turbulência é produzida [9, 10]. Juntamente com outras hipóteses, a teoria de Kolmogorov, que ficou conhecida como K41, conseguiu deduzir alguns resultados que se mostraram em concordância com os experimentos. Ele mostrou que a densidade espectral de energia varia com o número de onda, k , de acordo com $\phi(k) = c_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$, onde ϵ é a taxa na qual a energia é dissipada nas escalas menores da cascata de energia e c_k é uma constante universal, mas desconhecida. Esta lei ficou conhecida como a “Lei dos 5/3” e ajustou de maneira considerável os dados experimentais. A noção de Kolmogorov, de que a energia é injetada nas escalas maiores do experimento e, em seguida, é transferida para escalas intermediárias até atingir as escalas menores e ser dissipada é uma descrição aproximada da idéia de cascata de energia introduzida por Richardson [6]. Esta visão captura grande parte da fenomenologia da turbulência. Como veremos mais adiante, pode-se obter parte da abordagem de Kolmogorov para a cascata de energia a partir das equações de Navier-Stokes, com a dedução da equação de balanço detalhado

da energia.

A partir da década de 50, uma linha de argumentação baseada em similaridade ganhou certa notoriedade. Usando idéias de análise dimensional e simetrias das equações de Navier-Stokes, alguns resultados foram obtidos desta maneira, que pode ser considerada aproximada [11]. Por exemplo, a própria teoria de Kolmogorov pode ser introduzida, como veremos mais adiante, no sentido de análise dimensional e seus maiores resultados podem ser deduzidos de maneira heurística. Contudo, a maior problemática deste tipo de abordagem é que as constantes adimensionais que aparecem nas expressões não podem ser obtidas. Por isso, este tipo de análise funciona como uma ponte entre a fenomenologia e as teorias mais robustas, inclusive em pesquisas modernas.

Em 1962, Kolmogorov propôs uma modificação em sua teoria, com idéias também atribuídas a Obukhov [12]. Esta teoria, muitas vezes chamada de K62, surgiu inicialmente a partir de uma crítica de Landau [13] com respeito à taxa de dissipação de energia, ϵ , considerada constante em K41. Kolmogorov contornou o problema assumindo que esta variável poderia flutuar em torno de um valor médio e propôs uma distribuição de probabilidade Log-Normal para governar as flutuações desta grandeza. Com esta proposta, os momentos estatísticos dos incrementos de velocidade, calculados anteriormente em K41, sofreram alterações. Este resultado tornou-se mais um marco na área de turbulência e possibilitou um melhor ajuste aos dados experimentais que surgiram anos mais tarde. Assim, dizemos que a teoria K62 modela o fenômeno da intermitência, pois considera flutuações na taxa de dissipação de energia. No contexto de sistemas dinâmicos, dizemos que intermitência é uma alternância entre fases de dinâmica aparentemente periódica e dinâmica caótica. Neste trabalho, usaremos o termo intermitência no contexto de turbulência para indicar flutuações na dissipação de energia, fato que resulta imediatamente em distribuições não-gaussianas para os incrementos de velocidade, em oposição ao modelo K41.

Dado o sucesso obtido por Kolmogorov em suas duas teorias principais, além da noção natural herdada de mecânica dos fluidos de que número de Reynolds é o único parâmetro ajustável, passou-se a acreditar que o fenômeno da turbulência seja universal. Isto significa que não importa a forma geométrica do escoamento ou o tipo de fluido que seja utilizado. Se olharmos em escalas muito pequenas, as estatísticas relacionadas à flutuação de velocidades ou ao fluxo de energia devem ser as mesmas. As técnicas experimentais estão evoluindo no sentido de testar a universalidade dos resultados teóricos. O refinamento experimental expôs algumas falhas dos modelos teóricos e alguns fundamentos precisaram ser revistos. Atualmente, alguns grupos conseguem obter o histograma dos incrementos

de velocidade de uma única partícula do fluido com medições que correspondem a até 60σ , onde σ é o desvio padrão dos dados [14]. Estes experimentos de turbulência lagrangeana são precisos e não fazem uso da hipótese de Taylor. A forma da densidade de probabilidade encontrada mostra claramente seu caráter não-gaussiano (Figura 1.5), com caudas que podem ser interpretadas como exponenciais esticadas ou leis de potência [15, 16]. O problema não é simplesmente saber se a distribuição Log-Normal, exponencial esticada ou lei de potência, ajusta melhor os dados. Importa também a validade dos princípios que cada argumento emprega [11].

Os procedimentos experimentais também revelaram novas estimativas dos momentos da distribuição em função da escala de observação. A teoria de Kolmogorov (K41), como veremos no capítulo 2, estima os expoentes de escala a partir de argumentos simples. Como mencionamos, considerar a taxa de dissipação constante resulta em expoentes que variam linearmente com a ordem dos momentos. Os dados claramente mostram que isto não é verdade e a intermitência, primeiramente modelada em K62, tem um papel fundamental nos modelos mais modernos de turbulência.

Paralelamente ao desenvolvimento desta linha de pesquisa, surgiram as formalizações matemáticas de variáveis que se comportam de maneira aleatória. O ruído utilizado por Bachelier e Einstein para modelar o movimento dos preços de ativos [17] e movimento browniano [18], respectivamente, passaram por um estudo mais aprofundado que deu origem ao cálculo estocástico. Modelos em que as variáveis poderiam flutuar aleatoriamente ganharam um formalismo matemático cujo tratamento passou a ser possível. Wiener formalizou o conceito de movimento browniano [19, 20], possibilitando a generalização de processos estocásticos por Itô [21] e Doebelin [22], gerando ramo da matemática que ficou conhecido como Cálculo de Itô-Doebelin. Entretanto, existem outras formulações do cálculo estocástico. Todas elas possuem vantagens de aplicabilidade e o cálculo de Itô-Doebelin foi escolhido como ferramenta para o presente trabalho por questões de conveniência na demonstração dos resultados. Todos esses esforços permitiram que os modelos (sejam de física ou economia) pudessem considerar variáveis cujas flutuações são relevantes para a dinâmica do sistema. Estas variáveis são funções contínuas do tempo, mas não são diferenciáveis em nenhum ponto. Na Figura 1.6, estão exemplificadas algumas realizações estocásticas de um processo que será o centro desta tese. Note que seu aspecto de ruído impossibilita qualquer tratamento do cálculo usual. Perde-se a noção de derivada, mas uma generalização da noção de integral (e de diferencial) permitirá a realização dos cálculos. Por isso, faremos uso constante desta ferramenta neste trabalho.

Na física, é comum propor equações diferenciais que contenha todas as simetrias pos-

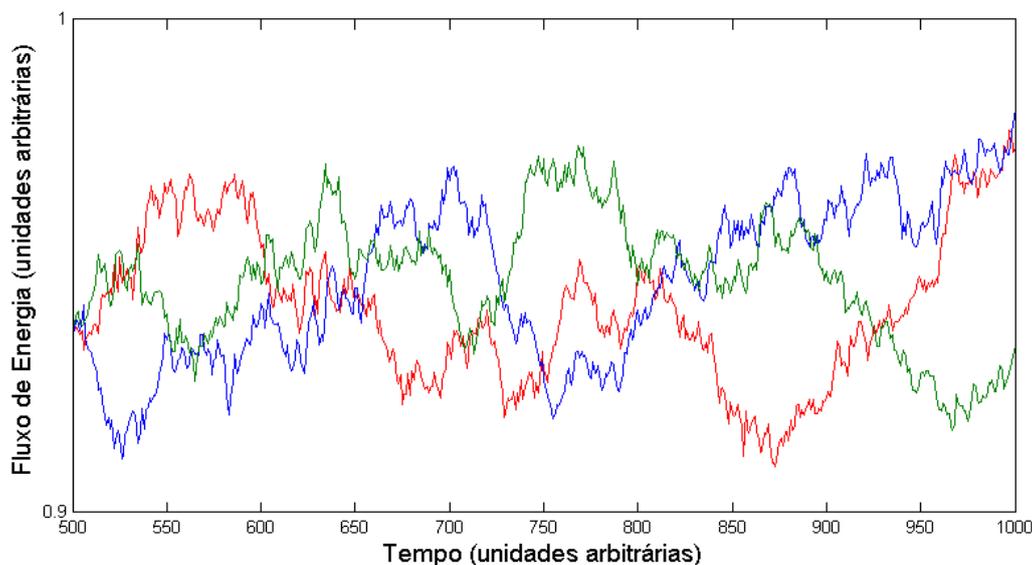


Figura 1.6 Três realizações estocásticas do fluxo de energia no nosso Modelo Hipergeométrico Generalizado de duas escalas ($N = 2$), que será explorado nos capítulos seguintes.

síveis e capturam toda a fenomenologia de um sistema. Em seguida, deve-se tentar resolvê-las. Para o caso das equações de Navier-Stokes, ainda não foi possível encontrar uma solução que explique melhor o fenômeno da turbulência. Então, os cientistas tomaram a liberdade de começar a estudar o problema a partir de uma etapa intermediária: propor equações diferenciais que capturem explicitamente mais detalhes fenomenológicos da turbulência. O problema é que as variáveis interessantes nesta estratégia não são variáveis determinísticas, que variam de maneira suave no tempo, e sim são variáveis que flutuam de maneira brusca, de modo que a única maneira de representá-las é com o uso do cálculo estocástico.

Este mesmo cálculo, a partir da década de 70, entrou na economia de maneira mais intensa e passou a ser uma maneira padrão de modelagem para preços de ativos e precificação de derivativos [23]. Como veremos, nosso modelo também encontrará aplicabilidade nesta área de pesquisa.

1.3 Objetivos e Organização da Tese

De uma maneira geral, o presente trabalho é uma tentativa original de modelar, de forma dinâmica e estocástica, o fenômeno de intermitência em turbulência. Esta forma, que será explorada nos capítulos seguintes, não é a maneira padrão de tratar este fenômeno. Na verdade, a pluralidade de modelos de intermitência nos leva a afirmar que não existe maneira canônica de atacar este assunto. Este campo é competitivo e os resultados teóricos são difíceis de serem obtidos, mas os modelos possuem características gerais e podem frequentemente ser generalizados e aplicados em outras áreas de pesquisa, como ficará claro para nosso modelo no capítulo 5. Nosso modelo tenta capturar a intermitência de maneira dinâmica, propondo um sistema de equações diferenciais estocásticas acopladas para os fluxos de energia ao longo da cascata.

Nesta tese, estaremos interessados inicialmente em obter um modelo simples para o fluxo de energia entre as sucessivas escalas da cascata de energia em um fluido no regime turbulento. Deste modelo, obteremos a auto-correlação do fluxo de energia, calcularemos a flutuação da energia total do sistema e a solução exata. Em seguida, introduziremos a hipótese de separação dos tempos característicos das escalas de energia e resolveremos o modelo nesta aproximação, obtendo a distribuição de probabilidade de equilíbrio para o fluxo de energia em uma dada escala. A partir desse resultado, obteremos a distribuição de probabilidades dos incrementos de velocidade, para a respectiva escala, em uma forma analítica em termos de funções hipergeométricas generalizadas. Até onde sabemos, essa família de distribuições de probabilidade é inédita na literatura. Aplicaremos estes resultados a dados de turbulência euleriana e lagrangeana, onde encontramos um excelente ajuste. Em seguida, aplicaremos o modelo à econofísica e ajustaremos os dados de retornos financeiros também de maneira notável. O efeito do modelo sobre a volatilidade implícita é calculado e fórmulas de precificação de opções são encontradas. Finalmente, mostramos como uma modificação do modelo pode gerar a família geral de distribuições hipergeométricas generalizada e comentamos possíveis aplicações. Uma descrição mais detalhada do conteúdo de cada um dos capítulos desta tese será apresentada a seguir.

1.3.1 Capítulo 2

Neste capítulo, vamos explorar algumas consequências das equações de Navier-Stokes (NS). Inicialmente, vamos discutir quais tipos de simetrias essas equações possuem. Vamos então deduzir, a partir das equações de NS, a equação do balanço detalhado de

energia. Em seguida, abordaremos a teoria de Kolmogorov (K41) e discutiremos seus principais resultados do ponto de vista fenomenológico. A teoria modificada de Kolmogorov (K62), chamado de modelo Log-Normal, também é explorada. Em seguida, faremos uma breve revisão dos vários modelos de intermitência considerados na literatura.

1.3.2 Capítulo 3

Neste capítulo, vamos partir da descrição fenomenológica de Kolmogorov (K41) e propor uma hipótese sobre as flutuações do fluxo de energia no regime de turbulência altamente desenvolvida. A partir da equação do balanço de energia, deduziremos heurísticamente um sistema de equações diferenciais ordinárias para a dinâmica do fluxo de energia. Mostraremos que o resultado de equilíbrio é o mesmo previsto por Kolmogorov. Encontraremos condições necessárias e suficientes obedecidas pelo sistema de equações dos fluxos de energia e aplicaremos essas mesmas condições a um sistema geral de equações estocásticas. Introduziremos nosso modelo estocástico como sendo o único que obedece a este conjunto de condições fisicamente razoáveis. Demonstraremos que o modelo prevê uma auto-correlação que cai no tempo como uma soma de exponenciais. Verificaremos a conservação de energia média no modelo e calcularemos a flutuação da energia do sistema em torno dessa média. Resolveremos ainda o modelo exatamente em termos de processos de Wiener.

1.3.3 Capítulo 4

Neste capítulo, vamos encontrar explicitamente a distribuição de probabilidade de equilíbrio para o fluxo de energia no nosso modelo. Demonstraremos um teorema que diz como calcular a distribuição de equilíbrio de uma variável que faz parte de um sistema de equações diferenciais estocásticas acopladas no limite de grande separação temporal entre as variáveis. Primeiramente, resolvemos o nosso modelo de uma cascata de apenas um nível, para encontrarmos a distribuição de probabilidade do fluxo de energia $p(\epsilon_1)$. Aplicamos o teorema deste capítulo no nosso modelo de duas escalas e calculamos explicitamente a fdp do fluxo de energia $p(\epsilon_2)$. Passamos para o caso geral do modelo com N escalas e encontramos a fdp $p(\epsilon_N)$ do fluxo de energia na última escala da cascata. A partir do conhecimento de $p(\epsilon_N)$, encontramos a fdp dos incrementos de velocidade e encontramos uma nova distribuição explicitamente que pode ser escrita em termos de

funções hipergeométricas generalizadas (${}_N F_0$). Em face desse resultado, vamos nos referir ao nosso modelo (para a distribuição de probabilidade dos incrementos de velocidade) como Modelo Hipergeométrico Generalizado (MHG). Mostraremos que o MHG ajusta de maneira excelente os dados experimentais tanto de turbulência lagrangeana quanto de turbulência euleriana. Finalmente, vamos mostrar que o MHG reproduz o modelo Log-Normal em um limite de cascata contínua.

1.3.4 Capítulo 5

Iniciaremos este capítulo fazendo uma breve revisão da literatura dos modelos estocásticos para a dinâmica de preços de ativos negociados no mercado financeiro. Estamos interessados no modelo de Black-Scholes (BS) de precificação de opções e suas modificações em que a volatilidade dos retornos é uma variável estocástica. Apresentaremos inicialmente um novo modelo de volatilidade estocástica de duas escalas, fortemente baseado no MHG. Este modelo, como mostraremos, é uma generalização do modelo de Hull-White [24] e prevê uma auto-correlação com decaimento exponencial com dois tempos de relaxação diferentes, a depender da escala temporal considerada, concordando com observações dos preços reais de bolsas de valores, inclusive a brasileira [25]. Utilizaremos uma fórmula de Merton para corrigir os preços de derivativos a partir de um modelo de volatilidade estocástica para duas escalas, onde a fdp da volatilidade foi calculada explicitamente no capítulo 4. Traçamos a curva que representa o sorriso da volatilidade (“*volatility smile*”) implícita pelo modelo de Black-Scholes a partir do nosso modelo de uma e duas escalas. Mostramos ainda uma série de preços de opções dados pelo modelo de uma escala, em comparação com Black-Scholes. Em seguida, aplicaremos o MHG com N escalas para descrever a distribuição de probabilidade dos retornos para dados financeiros de alta frequência (em contações “*intraday*”). Encontramos um bom ajuste do modelo à distribuição empírica dos retornos do IBOVESPA para diversos incrementos temporais.

1.3.5 Capítulo 6

Neste capítulo estamos interessados em possíveis generalizações do MHG para obtermos distribuições baseadas em outras funções hipergeométricas generalizadas do tipo ${}_p F_q$. A generalização que estudaremos aqui consiste em propor novas equações diferenciais estocásticas para o “fluxo”, ϵ , de alguma variável relevante do sistema, preservando algumas

características fundamentais do modelo. Mostramos que para uma dinâmica específica, a cascata resulta em uma fdp de equilíbrio do tipo ${}_{N+M}F_M$, generalizando assim nosso modelo para toda a família de funções hipergeométricas generalizadas ${}_pF_q$. Possíveis aplicações deste modelo geral serão brevemente mencionadas.

1.3.6 Capítulo 7

Neste capítulo fazemos uma revisão dos principais resultados obtidos nesta tese. Apresentamos também algumas perspectivas para continuidade da pesquisa e outras possíveis aplicações do modelo que não foram contempladas ao longo deste trabalho.

Equação de Navier-Stokes e Modelos de Turbulência

Neste capítulo, vamos explorar algumas consequências das equações de Navier-Stokes (NS). Inicialmente, estamos interessados em verificar quais tipos de simetrias essas equações possuem, pois acreditamos que o ponto de partida para um modelo que englobe a fenomenologia do escoamento turbulento é que ele respeite de alguma forma as equações de NS, ou que, pelo menos, possua certas características baseadas nestas equações. Por isso, antes de introduzir nosso modelo, vamos deduzir, a partir das equações de NS, a equação do balanço detalhado de energia, que relaciona o fluxo de energia que entra e o fluxo de energia que sai de uma determinada escala espacial. Esta equação será utilizada para justificar nosso modelo para a dinâmica do fluxo de energia, o qual será apresentado no capítulo 3. Em seguida, abordaremos a teoria de Kolmogorov para turbulência (K41) e discutiremos seus principais resultados do ponto de vista fenomenológico. As hipóteses desta teoria servirão como fundamentos para nosso modelo. Já os resultados obtidos por Kolmogorov funcionarão como metas a serem atingidas pelo modelo no limite de não intermitência. Introduziremos a crítica de Landau ao modelo original de Kolmogorov, que levou Kolmogorov à reformulação da sua teoria (K62) e introdução do modelo Log-Normal para as flutuações da taxa de energia dissipada (intermitência). Mostraremos os principais resultados deste tipo de consideração sobre a intermitência, que é a chave para entender a turbulência e um dos pontos centrais desta tese.

A partir da evidência de intermitência, faremos uma breve revisão dos modelos que capturam este fenômeno. De maneira geral, eles podem ser divididos em modelos baseados na velocidade e modelos baseados na dissipação. Esta revisão tem o objetivo de expor os trabalhos relevantes de intermitência que generalizam a teoria de Kolmogorov, apesar de possuírem origens bastante distintas. Além disso, o capítulo tem o objetivo de deixar claro que não existe uma maneira padrão de modelar a intermitência, o que torna o assunto difícil de ser tratado.

2.1 As Equações de Navier-Stokes e suas Simetrias

Para fluidos incompressíveis, as equações de Navier-Stokes (NS) podem ser obtidas se aplicarmos a mecânica newtoniana ao escoamento de um fluido, considerando o termo de viscosidade como atrito [26]. Da equação de NS será deduzida a equação do balanço detalhado de energia. Para encontrar a equação do balanço de energia e justificar de uma forma mais quantitativa o processo físico da cascata de energia, precisamos dedicar um esforço considerável em sua demonstração. Inicialmente, nesta seção, vamos discutir as simetrias e principais leis de conservação exibidas pelas equações de NS. Na seção seguinte, deduziremos então a equação do balanço detalhado de energia.

2.1.1 Simetrias

As equações de NS são

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.2)$$

onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ é o campo de velocidades em 3 dimensões, $p = p(x, y, z, t)$ é a pressão (grandeza escalar), ν é a viscosidade cinética do fluido ($\nu = \frac{\eta}{\rho}$). Por simplicidade, vamos redefinir a pressão como sendo a razão $\frac{p}{\rho}$, de modo que a eq. (2.1) torna-se

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (2.3)$$

Seguindo a Ref. [8], apresentamos abaixo uma lista das simetrias conhecidas, observadas nas equações de NS. São elas

- Translação espacial: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (t, \vec{r} + \vec{\rho}, \vec{v})$, com $\vec{\rho} \in \mathbf{R}^3$.
- Translação Temporal: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (t + \tau, \vec{r}, \vec{v})$, com $\tau \in \mathbf{R}$.
- Transformação de Galileu: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (t, \vec{r} + \vec{U}t, \vec{v} + \vec{U})$, com $\vec{U} \in \mathbf{R}^3$.
- Paridade: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (t, -\vec{r}, -\vec{v})$.

- Rotação: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (t, \mathbf{A}\vec{r}, \mathbf{A}\vec{v})$, com $\mathbf{A} \in \mathbf{SO}^3(\mathbf{R}^3)$.
- Invariância de Escala: $(t, \vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (\lambda^{1-h}t, \lambda\vec{r}, \lambda^h\vec{v})$, com $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $h \in \mathbf{R}$.

Na expressão acima, $\mathbf{SO}^3(\mathbf{R}^3)$ é o grupo de rotações no espaço euclidiano de 3 dimensões. A pressão não consta nas transformações acima pois ela pode ser eliminada das equações de NS e suas transformações podem ser vistas como a mesma transformação observada para a variável escalar $v^2 = \vec{v}^2$ [8]. As demonstrações de algumas das propriedades de simetria acima são óbvias. Por exemplo, as simetrias de translação espacial e temporal são imediatas pois os termos não dependem explicitamente do tempo nem das coordenadas espaciais. Para a transformação de Galileu, quando fazemos a substituição de $\vec{v}(t, \vec{r})$ por $\vec{v}(t, \vec{r} - \vec{U}t) + \vec{U}$, ocorre um cancelamento entre os termos originados de $\partial_t \vec{v}$ e $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$. A paridade, por sua vez, provoca uma multiplicação por -1 em todos os termos da equação, deixando, portanto, a equação invariante. Para a transformação de escala, quando efetuamos as mudanças de escala de tempo, espaço e velocidade da maneira indicada, todos os termos da equação são multiplicados por λ^{2h-1} , exceto o termo de viscosidade que aparece multiplicado por λ^{h-2} . Portanto, para viscosidade finita, o único h permitido, ou seja, que permite o cancelamento dos fatores envolvendo λ , é $h = -1$. Esta transformação de escala faz com que o número de Reynolds R permaneça o mesmo, pois $R' = U'L'/\nu = \lambda^{h+1}R = R$, para $h = -1$. Podemos afirmar que esta simetria é equivalente ao princípio de similaridade em mecânica dos fluidos, segundo o qual soluções das equações de NS para diferentes escalas de comprimento e velocidade, mas com mesmo número de Reynolds, são 'similares', ou seja, relacionadas entre si por uma mera transformação de escala. O limite de número de Reynolds muito grande possibilita a escolha de qualquer expoente h , pois o termo de viscosidade é eliminado neste limite. Note também que todas as simetrias, exceto a de escala, são consequências diretas das simetrias das equações de Newton da mecânica clássica.

2.1.2 Leis de Conservação

Nosso objetivo aqui é obter algumas importantes leis de conservação a partir das equações de NS. Os físicos, motivados pelo teorema de Noether [27] e pela formulação lagrangeana da mecânica, tendem a relacionar leis de conservação a simetrias mesmo quando esta relação não é inteiramente justificada. No nosso caso, as equações de NS

formam um sistema dissipativo e não teríamos, portanto, uma lei de conservação de energia no senso estrito. Contudo a energia total presente no sistema pode ser conservada se adicionarmos um fluxo de energia constante externo ao sistema, que compense a taxa de energia dissipada. Para obter tal equação, que chamaremos do balanço de energia, vamos fazer algumas definições.

Vamos considerar, como em [8], condições de contorno periódicas e denotaremos as médias sobre o volume B_L relevante por $\langle \cdot \rangle$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{B_L} f(\vec{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Como sabemos, qualquer função periódica bem comportada pode ser escrita como uma série de Fourier [28]. Por outro lado, as componentes de Fourier de uma função periódica possuem média zero, já que a média é uma integral em um domínio que contém um número inteiro de períodos. Logo, a média de uma função periódica é apenas o seu modo constante (o modo $k = 0$), já que a média dos outros modos se anula. Quando derivamos uma função periódica, as componentes continuam sendo obviamente modos de Fourier, pois derivamos uma série de exponenciais oscilantes. Além disso, o modo constante ($k = 0$) anula-se pela ação da derivada. Por isso, podemos afirmar que

$$\langle \partial_i f \rangle = 0, \quad (2.5)$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Pelo mesmo motivo, temos que

$$\langle (\partial_i f)g + (\partial_i g)f \rangle = \langle \partial_i (fg) \rangle = 0, \quad (2.6)$$

donde segue que

$$\langle (\partial_i f)g \rangle = -\langle (\partial_i g)f \rangle. \quad (2.7)$$

Em notação vetorial, temos

$$\langle (\vec{\nabla} f)g \rangle = -\langle (\vec{\nabla} g)f \rangle. \quad (2.8)$$

Mais adiante, vamos precisar da identidade

$$\langle \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \rangle = \langle \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \rangle, \quad (2.9)$$

que pode ser facilmente verificada aplicando-se o argumento anterior ao termo $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

Outra relação útil é

$$\langle \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{v}) \rangle = -\langle (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \rangle, \quad (2.10)$$

que pode ser deduzida a partir da identidade vetorial (2.9) e usando a condição de incompressibilidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Vamos agora aplicar as identidades obtidas acima para deduzir a conservação do momento linear. Para isso, vale notar que o termo não linear das equações de NS pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j (v_j v_i) = \sum_{j=1}^3 [v_i (\partial_j v_j) + v_j (\partial_j v_i)] = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_j v_i = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_i, \quad (2.11)$$

onde utilizamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ na segunda passagem.

Tomando a média espacial ($\langle \rangle$) em ambos os lados da equação de NS dada em (2.3), os termos podem ser vistos como médias de derivadas espaciais, exceto o termo de derivada temporal. Como vimos acima, derivadas espaciais possuem média zero e tais termos resultam nulos, logo o único termo não nulo é o da derivada temporal:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Esta é a lei de conservação do momento linear, onde a massa (densidade) é omitida por simplicidade, já que estamos trabalhando com as equações de NS normalizadas pela densidade.

Para a conservação de energia, vamos multiplicar a componente i das equações de NS por v_i para obter

$$v_i \partial_t v_i + v_i v_j \partial_j v_i = -v_i \partial_i p + \nu v_i \nabla^2 v_i, \quad (2.13)$$

onde o primeiro termo pode ser escrito como a derivada $\partial_t (v_i^2)$, pela regra do produto. O segundo termo pode ser obtido a partir da relação

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \partial_j (v_j v_i v_i) = \frac{v_i^2}{2} \sum_{j=1}^3 \partial_j (v_j) + \frac{v_j}{2} \sum_{j=1}^3 \partial_j (v_i v_i) = v_i \sum_{j=1}^3 v_j \partial_j v_i, \quad (2.14)$$

onde utilizamos novamente a eq. (2.2) na segunda passagem. Assim, ficamos com a equação para a energia

$$\partial_t \frac{v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \partial_j v_i^2 v_j = -v_i \partial_i p + \nu v_i \nabla^2 v_i. \quad (2.15)$$

Tomando a média da equação acima e utilizando a eq. (2.5), cancelamos os termos de derivadas. O termo de pressão pode ser escrito na forma $\langle v_i \partial_i p \rangle = -\langle p \partial_i v_i \rangle$, com o uso da eq. (2.6). Finalmente, com o uso da eq. (2.9), podemos escrever o termo de viscosidade na forma $\langle (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \rangle$ e obter

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \nu \left\langle \sum_{i,j} (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 \right\rangle = -\nu \langle |\vec{\omega}|^2 \rangle, \quad (2.16)$$

onde $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$. Na equação acima, a igualdade entre o termo do somatório e a definição de ω pode ser mostrada facilmente. A eq. (2.16) expressa a conservação de energia total do sistema e nos diz que a existência de viscosidade implica na dissipação de energia cinética, como já era esperado.

Se utilizarmos a notação de [8], podemos escrever a conservação de energia de uma forma muito simples:

$$\frac{d}{dt} E = -2\nu\Omega, \quad (2.17)$$

onde

$$E = \left\langle \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right\rangle, \quad (2.18)$$

$$\Omega = \left\langle \frac{1}{2} |\vec{\omega}|^2 \right\rangle. \quad (2.19)$$

Chamaremos E de energia total média, ou simplesmente energia. A grandeza Ω definida acima é chamada de enstrofia. A partir das equações de NS é possível deduzir outras leis de conservação, como a conservação da helicidade. Entretanto, não faremos esta discussão aqui uma vez que tais grandezas não serão necessárias para o presente trabalho.

2.2 Equação do Balanço de Energia

Nesta etapa, estamos interessados em utilizar as definições da seção anterior e obter a partir das equações de NS uma relação importante que servirá como base para a apresentação do nosso modelo. Esta equação, que será chamada de equação do balanço detalhado de energia, relaciona a energia total acumulada em todas as escalas de comprimento, até uma determinada escala, com o fluxo de energia através desta escala.

É notável que a relação para a energia encontrada na seção anterior não dependa do termo não linear das equações de NS. Este termo, responsável pela complexidade das equações de NS, foi cancelado quando tomamos a média espacial da eq. (2.17) e

passou a ser desnecessário para a conservação de energia total. Esta última afirmação é verdadeira quando tratamos da energia total do fluido. Por outro lado, o termo não linear é responsável pela distribuição da energia entre as diferentes escalas espaciais, sem afetar a energia total do escoamento, como ficará claro nesta seção. Em outras palavras, apesar de a energia total não ser afetada pelo termo não linear, a maneira como a energia é distribuída pelos diferentes modos de Fourier depende deste termo não linear. Este acoplamento entre modos de Fourier é característico de sistemas não lineares. Como veremos, ele nos possibilitará a definição do fluxo de energia responsável por transferir energia de uma escala espacial para a escala seguinte.

Considere a decomposição em série de Fourier da forma

$$f(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (2.20)$$

onde \vec{k} denota os vetores de onda dos respectivos modos, a soma em \vec{k} deve ser entendida como soma em todos os possíveis modos (k_x, k_y, k_z) e $k = |\vec{k}|$. Se truncarmos a série de Fourier acima até um determinado número de onda, estaremos descartando os modos com números de onda maiores que um determinado valor. Desta maneira, a função resultante é uma atenuação da função original, sem as flutuações observadas nas menores escalas de comprimento. Dizemos então que a função passou por um filtro passa baixa. Formalmente, podemos escrever o filtro passa baixa como

$$f_K^<(\vec{r}) = \sum_{k \leq K} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (2.21)$$

e o filtro passa alta é definido analogamente

$$f_K^>(\vec{r}) = \sum_{k > K} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.22)$$

A decomposição acima foi utilizada primeiramente por Obukhov [29]. Para cada filtro, existe uma escala espacial relacionada ao número de onda de corte (máximo ou mínimo) dada pela expressão $\ell \sim K^{-1}$.

Seguindo a notação da Ref. [8], podemos definir o operador de filtro passa baixa P_K

$$P_K : f(\vec{r}) \mapsto f_K^<. \quad (2.23)$$

Nosso objetivo agora é aplicar este operador nas equações de NS e, em seguida, tirar

médias espaciais no sentido da seção anterior. Para isso, precisamos utilizar algumas identidades. Inicialmente, note o efeito dos operadores $\vec{\nabla}$ e ∇^2 em uma função $f(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} (i\vec{k}) f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} (-k^2) f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.25)$$

Podemos então afirmar que o operador P_K comuta com $\vec{\nabla}$ e ∇^2 , pois ao aplicarmos o filtro passa baixa às equações acima obtemos a mesma função que a aplicação de ∇ e ∇^2 a $P_K f$.

Outra propriedade que será importante precisa da identidade de Parseval [30]:

$$\langle fg \rangle = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} g_{-\vec{k}}. \quad (2.26)$$

Para verificar esta relação, basta observar que, ao decompor f e g em modos de Fourier e fazer o produto, obtemos um somatório duplo em todos os modos possíveis. Quando aplicamos a média espacial, todos os modos (que são funções periódicas) serão anulados, exceto os modos que possuem número de onda zero, pois são constantes. Estes modos são os que anulam a exponencial do termo $f_{\vec{k}}$ com a exponencial do termo $g_{-\vec{k}}$. Portanto, se considerarmos o produto de uma função g com a versão filtrada da função f , ou vice-versa, e calcularmos a média, teremos que truncar o somatório até um número de onda máximo

$$\langle g P_K(f) \rangle = \langle f P_K(g) \rangle \sum_{\vec{k} \leq \vec{K}} f_{\vec{k}} g_{-\vec{k}}. \quad (2.27)$$

Finalmente, a próxima relação é simples e dada por

$$\langle f_K^> g_K^< \rangle = 0, \quad (2.28)$$

cuja demonstração é imediata, visto que todos os modos harmônicos deste produto são funções periódicas. Além disso, não existem modos de número de onda zero, pois o corte em K permite que $f_K^>$ possua modos com vetores de onda que obedecem $k > K$, enquanto $g_K^<$ possui modos que obedecem $k \leq K$. Desta maneira, as duas funções não possuem modos simétricos para serem cancelados. Em outras palavras, estamos considerando o produto interno de vetores ortogonais no espaço das funções periódicas.

Vamos agora aplicar o filtro passa baixa P_K às equações de NS. Considere as equações de NS com o termo de força externa \vec{f} ,

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}, \quad (2.29)$$

onde \vec{f} é considerado uma força periódica. Aplicando P_K à equação acima, obtemos

$$\partial_t \vec{v}_K^< + P_K(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) = -\vec{\nabla} p_K^< + \nu \nabla^2 \vec{v}_K^< + \vec{f}_K^<, \quad (2.30)$$

onde utilizamos a identidade $f(\vec{r}) = f_K^<(\vec{r}) + f_K^>(\vec{r})$. Tomando o produto escalar de $\vec{v}_K^<$ com a equação acima e fazendo médias espaciais, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_K^< \cdot \partial_t \vec{v}_K^< \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot P_K(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \rangle = \\ -\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} p_K^< \rangle + \nu \langle \vec{v}_K^< \cdot \nabla^2 \vec{v}_K^< \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{f}_K^< \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Utilizando as propriedades da função P_K obtidas acima, podemos escrever a expressão anterior na forma

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \frac{1}{2} |\vec{v}_K^<|^2 \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot [(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>)] \rangle = \\ -\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} p_K^< \rangle + \nu \langle \vec{v}_K^< \cdot \nabla^2 \vec{v}_K^< \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{f}_K^< \rangle, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Vamos cancelar alguns termos da equação acima. Primeiro, note que $\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} p_K^< \rangle = 0$, pois a média considera apenas os modos de número de onda zero, mas a derivada anula o modo zero da pressão, resultando na igualdade proposta. Também temos a seguinte igualdade para o termo de viscosidade: $\nu \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^< \cdot \nabla^2 \vec{v}_K^<) \rangle = -\nu \langle |\vec{\omega}_K^<|^2 \rangle$. Esta igualdade é uma consequência imediata da eq. (2.9) e da definição da vorticidade $\vec{\omega}$. Note que o termo não linear pode ser escrito como:

$$\langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^<) \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^>) \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^<) \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^>) \rangle. \quad (2.33)$$

Dois termos desta equação são nulos:

$$\langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^<) \rangle = \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^<) \rangle = 0. \quad (2.34)$$

Esta igualdade pode ser demonstrada usando a condição de incompressibilidade das equações de NS. Reescrevendo a eq. (2.32) com as condições descritas acima, obtemos um

resultado para a dinâmica da energia que é a chamada de equação de balanço detalhado. Neste caso, a equação é definida para cada escala ($\ell \sim K^{-1}$) e assume a forma

$$\partial_t E_K + \Pi_K = -2\nu\Omega_K + F_K, \quad (2.35)$$

onde a energia total, E_K , acumulada até o número de onda K é definida por

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} |\vec{v}_k|^2. \quad (2.36)$$

A enstrofia total acumulada até o número de onda K é definida por

$$\Omega_K = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} k^2 |\vec{v}_k|^2. \quad (2.37)$$

A taxa de energia injetada entre os modos 0 e K é definida por

$$F_K = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} \vec{f}_k \cdot \vec{v}_{-\vec{k}}. \quad (2.38)$$

Finalmente, o fluxo de energia através da escala K^{-1} é definido por

$$\Pi_K = \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^< \cdot \nabla \vec{v}_K^>) \rangle + \langle \vec{v}_K^< \cdot (\vec{v}_K^> \cdot \nabla \vec{v}_K^>) \rangle \quad (2.39)$$

Podemos interpretar a eq. (2.35) como uma lei de conservação local de energia, com a presença de dissipação dada pela viscosidade. Ao considerarmos um número de onda K , que corresponde a uma escala espacial $\ell \sim K^{-1}$, a taxa de variação da energia total contida nas escalas maiores que ℓ é igual a taxa de energia injetada no sistema menos a energia dissipada por forças dissipativas e menos um termo correspondente ao fluxo de energia da escala ℓ para as escalas menores que ℓ . Este termo de fluxo de energia é resultado do termo não linear das equações de NS. Como vimos, a energia total não depende deste termo, mas quando escrevemos o balanço de energia detalhado para cada escala específica, o termo não linear aparece como um distribuidor de energia interna do sistema, ou seja, um termo de interação entre escalas espaciais sucessivas, ou entre os sucessivos modos de Fourier do campo de velocidades. Este resultado é interessante pois combina a descrição precisa das equações de NS com a idéia qualitativa da cascata de energia. Como veremos no capítulo 3, vamos partir desta equação do balanço de energia para propor um modelo dinâmico estocástico para o fluxo de energia ao longo da cascata.

Antes de prosseguir, faz-se necessário discutir a teoria fenomenológica para turbulência proposta por Kolmogorov em 1941, usualmente conhecida como K41, bem como outros modelos posteriores.

2.3 Teoria de Kolmogorov K41

Após dar contribuições à teoria dos conjuntos, análise de Fourier e aos processos estocásticos, Andrey Kolmogorov voltou sua atenção à turbulência de fluidos e, em 1941, propôs um conjunto de hipóteses simples que resultariam na maior contribuição para a área até então [9, 10]. Essa teoria corresponde às hipóteses de similaridade e universalidade de Kolmogorov e suas consequências. Esta teoria, além de servir diretamente para a obtenção de pelo menos dois resultados experimentais conhecidos, é um ponto de partida para os modelos fenomenológicos que pretendem capturar maiores detalhes do fenômeno. Vamos formular as hipóteses de Kolmogorov seguindo a Ref. [8], que traz uma versão adaptada às pesquisas modernas, cujo conceito permanece idêntico ao original.

Hipótese 1 *No limite de número de Reynolds infinito, todas as possíveis simetrias das equações de Navier-Stokes (geralmente quebradas pelo mecanismo de produção do escoamento turbulento) são restauradas de uma maneira estatística nas pequenas escalas e longe das fronteiras.*

A escala utilizada como referência para a definição das escalas menores é a chamada escala integral do sistema ℓ_0 que, no nosso caso, pode ser relacionada às dimensões típicas das paredes do sistema em que o fluido está escoando. As escalas pequenas obedecem a relação $\ell \ll \ell_0$. Estamos interessados na estatística dos incrementos de velocidade, $\delta\vec{v}$, entre dois pontos do espaço que estão separados por uma distância ℓ :

$$\delta\vec{v}(\vec{r}, \vec{\ell}) = \vec{v}(\vec{r} + \vec{\ell}) - \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.40)$$

Estes incrementos, por hipótese, não deveriam depender da posição em que foram calculados, pois como a simetria translacional é verificada nas equações de NS, então a função distribuição de probabilidade dos incrementos de velocidade não deveria depender de posição. Da mesma maneira, a isotropia encontrada nas equações de NS significa que não existe direção preferencial no cálculo dos incrementos de velocidade, se considerarmos medições suficientemente distantes das fronteiras do sistema.

Hipótese 2 *Sob as mesmas condições que a Hipótese 1, o escoamento turbulento é*

auto-similar nas escalas menores. Ou seja, existe um único expoente h tal que

$$\delta\vec{v}(\lambda\ell) = \lambda^h \delta\vec{v}(\ell) \quad (2.41)$$

O expoente é $\frac{1}{3}$ para turbulência euleriana e $\frac{1}{2}$ para turbulência lagrangeana. O valor destes expoentes pode ser obtido com o postulado sobre a dissipação de energia que será apresentado ainda nesta seção. Vale ressaltar que o expoente da turbulência lagrangeana é o esperado para um movimento browniano. Portanto, espera-se que uma equação diferencial estocástica semelhante à equação de Langevin governe este processo estocástico.

Hipótese 3 *Sob as mesmas condições que a Hipótese 1, o escoamento turbulento tem uma taxa de dissipação de energia, ϵ , por unidade de massa constante e positiva.*

Existe uma hipótese adicional de universalidade de Kolmogorov. Esta hipótese não é necessária para a demonstração dos resultados da teoria K41, que podem ser deduzidos de maneira rigorosa a partir da relação de Kármán-Howarth-Monin [31]. Contudo, o apelo desta hipótese é bastante intuitivo e pode ser utilizado qualitativamente para a obtenção dos momentos estatísticos dos incrementos de velocidade:

Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov *No limite em que o número de Reynolds tende para infinito, todas as propriedades estatísticas nas escalas menores ($\ell \ll \ell_0$) são unicamente determinadas pela escala em questão ℓ e pela taxa média de dissipação de energia ϵ .*

A partir desta hipótese, podemos deduzir heurísticamente uma relação para a função de estrutura de segunda ordem (ou segundo momento) das flutuações de velocidade $\langle \delta\vec{v}(\ell)^2 \rangle$. Esta grandeza possui dimensão de $[L]^2[T]^{-2}$ e a única combinação das variáveis ℓ e ϵ que pode resultar em uma grandeza com mesma dimensão é $\epsilon^{2/3}\ell^{2/3}$, assim podemos escrever

$$\langle \delta\vec{v}(\ell)^2 \rangle = C\epsilon^{2/3}\ell^{2/3}, \quad (2.42)$$

onde C é uma constante adimensional. A questão sobre a universalidade da constante C permanece alvo de investigação experimental [32]. De posse da equação (2.42), podemos obter os expoentes para os demais momentos da distribuição de velocidade. Na notação da Hipótese 2, esta Hipótese de Similaridade implica que $h = \frac{1}{3}$ para a turbulência euleriana. Temos então que

$$\langle \delta\vec{v}(\ell)^p \rangle = C_p \epsilon^{p/3} \ell^{p/3}. \quad (2.43)$$

O expoente de ℓ na equação acima traz a conhecida fórmula dos expoentes de escala, $\zeta_p =$

$\frac{p}{3}$, dos incrementos de velocidade na teoria K41. Kolmogorov apresentou uma fórmula exata para o terceiro momento de velocidades, conhecida como lei dos 4/5. Contudo, os demais momentos são obtidos apenas de maneira heurística, a partir da Hipótese de Universalidade. Vamos enunciar abaixo a lei dos 4/5 [10], mas optamos por omitir sua dedução, pois ela não será explorada ou modificada pelo nosso modelo, por não tratar diretamente do fenômeno da intermitência. A intuição desta fórmula já foi dada acima de maneira simplória com base apenas em argumentos dimensionais, mas o valor da constante multiplicativa é encontrado apenas na dedução completa.

Lei dos 4/5 *Em turbulência homogênea e isotrópica, no limite de número de Reynolds infinito, o momento de terceira ordem dos incrementos de velocidade, avaliado para distâncias ℓ muito menores que a escala integral do sistema, é dado pela taxa de dissipação média de energia (positiva e constante) vezes a escala ℓ pela fórmula*

$$\langle \delta \vec{v}(\ell)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon \ell. \quad (2.44)$$

Este resultado é notável e introduz a idéia de universalidade da constante multiplicativa dos momentos dos incrementos de velocidade. Como ressaltado em [8], as teorias de turbulência devem obedecer a esta lei ou explicitamente violar alguma das condições utilizadas em sua dedução.

A teoria K41 apresentou um bom ajuste aos dados experimentais em um primeiro momento. Contudo, conforme a resolução das medições experimentais aumentou, observou-se uma discrepância entre as previsões da teoria e os dados experimentais. Em particular, o expoente ζ_p calculado a partir dos dados não apresenta o perfil linear proposto em K41 e esta teoria precisou de uma modificação. Basicamente, os resultados experimentais indicavam que taxa de dissipação de energia, ϵ , não pode ser considerada constante. Modelos que consideram flutuações do fluxo de energia são considerados modelos de intermitência e generalizam de alguma maneira o expoente ζ_p de K41. Em 1962, surgiu uma proposta de Kolmogorov e Obukhov para modificar a teoria original de 1941 que ficou conhecida como K62, a qual será abordada na próxima seção.

2.4 Modelo Log-Normal de Kolmogorov-Obukhov (K62)

Em 1962, no Colloque International de Mécanique de la Turbulence, em Marseille, Kolmogorov apresentou sua teoria sobre a intermitência (K62) e deu o crédito à Lan-

dau pela alteração fundamental da teoria K41 que resultou na nova teoria. A crítica de Landau à teoria K41 foi em relação ao fato de a taxa de dissipação de energia ser considerada constante. Landau argumentou que, devido ao caráter essencialmente aleatório do mecanismo de transferência de energia para escalas menores, a variação da dissipação de energia deveria aumentar sem limites com a diminuição da razão ℓ/ℓ_0 . O contexto histórico por trás da nova teoria de Kolmogorov possui ainda um ponto de destaque. O trabalho experimental realizado por Gurvitch [33] no Instituto de Física Atmosférica de Moscou indicou que a amplitude das flutuações temporais do campo de velocidades sofre variações bruscas. Obukhov, que foi aluno de doutorado do próprio Kolmogorov, afirmou que estas variações na intensidade poderiam ser explicadas se a taxa de dissipação ϵ possuir uma certa variância em torno da média [29]. Como o fluxo de energia entre escalas não é uma grandeza facilmente mensurável (ou que possa ser definida precisamente, em geral), Obukhov propôs como grandeza alternativa a taxa de dissipação de energia média,

$$\epsilon_\ell = \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{B_\ell} d^3r' \epsilon(\vec{r}_0 + \vec{r}'), \quad (2.45)$$

em uma esfera de raio ℓ , centrada em \vec{r}_0 . Na expressão acima, a grandeza ϵ corresponde à taxa local de dissipação de energia dada por

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (2.46)$$

A dependência em \vec{r}_0 foi omitida no lado esquerdo da eq. (2.45) pois em um sistema isotrópico, a dissipação média não deve depender da posição. A idéia de Obukhov é que a taxa média de dissipação em um volume de tamanho característico ℓ corresponde ao fluxo de energia para as escalas menores. Obukhov propôs ainda que para pequenas escalas, $\ell \ll \ell_0$, o logaritmo da taxa de dissipação média ϵ_ℓ deveria ter uma distribuição normal.

De acordo com o artigo original da conferência, Kolmogorov escreve que é “natural assumir” que a variância de $\ln \epsilon_\ell$ varia em função da escala ℓ do experimento de acordo com a fórmula

$$\sigma_\ell^2 = A + \mu \ln\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right), \quad (2.47)$$

onde μ é uma constante universal. Kolmogorov estava interessado em distribuições do tipo Log-Normal desde a publicação de seu trabalho, em 1941, sobre a distribuição dos tamanhos de minerais pulverizados aleatoriamente [34]. Um modelo de cascata para este

tipo de fenômeno foi invocado por ele, e Obukhov, ao propor a distribuição Log-Normal para a dissipação de energia, fez referência ao trabalho original de Kolmogorov sobre esta aplicação à fragmentação.

Podemos agora introduzir a segunda hipótese de similaridade refinada de Kolmogorov, que diz que, sob as mesmas condições da hipótese original, os momentos estatísticos dos incrementos de velocidade são dados como função apenas de ϵ_r e da escala r . Assim, podemos escrever

$$\langle \delta_r v^p \rangle = C_p \epsilon_r^{\frac{p}{3}} r^{\frac{p}{3}}. \quad (2.48)$$

As funções que caracterizam a estrutura do regime turbulento são os momentos da taxa de dissipação de energia e das flutuações de velocidade e suas respectivas relações de escala, definidos como

$$\langle \epsilon_\ell^q \rangle = \epsilon_0^q (\ell/L)^{\tau_q}, \quad (2.49)$$

$$\langle \delta v_\ell^p \rangle = (\epsilon_0 \ell)^{\frac{p}{3}} (\ell/L)^{\zeta_p}. \quad (2.50)$$

Pode-se mostrar que o modelo Log-Normal implica nos expoentes de escala

$$\tau_q = \frac{\mu}{2}(q - q^2), \quad (2.51)$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu}{18}(3p - p^2). \quad (2.52)$$

Por outro lado, em turbulência lagrangeana, os momentos dos incrementos de velocidade são escritos em função da escala temporal τ em que os incrementos são medidos, de acordo com a equação

$$\langle \delta v_\tau^p \rangle = (\epsilon_0 \tau)^{\frac{p}{3}} (\tau/T)^{\zeta_p}. \quad (2.53)$$

Nesse contexto, o expoente ζ_p para o modelo Log-Normal é dado por

$$\zeta_p = \frac{p}{2} + \frac{\lambda^2}{2}(2p - p^2), \quad (2.54)$$

onde λ^2 é um parâmetro livre do modelo. O gráfico desta função de estrutura está representado na Figura 2.1, retirada do trabalho de Beck [35], na tentativa de ajustar dados medidos por Xu *et al.* [3].

O modelo Log-Normal para intermitência apresenta duas inconsistências conhecidas. Ele viola a desigualdade de Novikov [36], formulada como $\tau_q + 3q \geq 0$ (para $q > 0$), e implica em velocidades supersônicas para números de Reynolds muito altos, pois ζ_p não é uma função monotônica de p [8]. Apesar desses problemas, o modelo atingiu

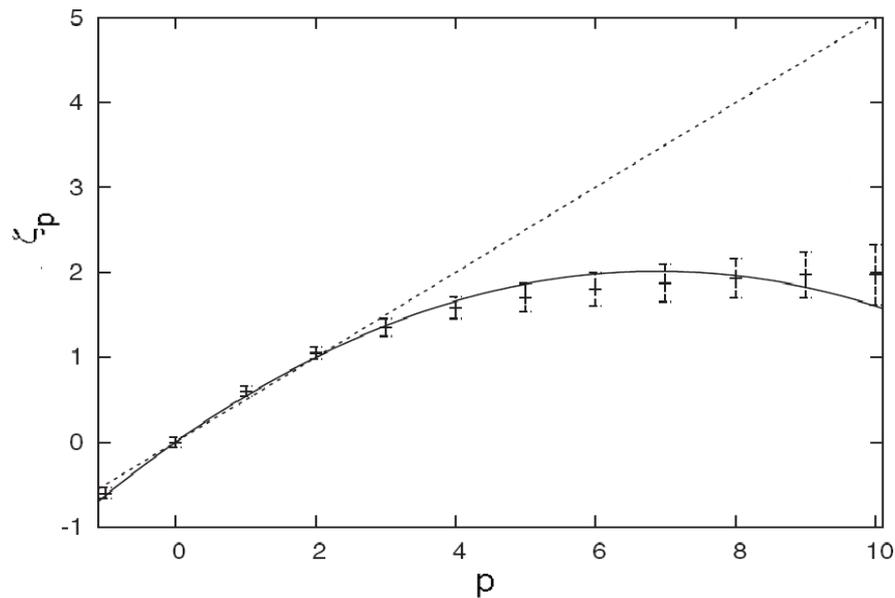


Figura 2.1 Expoente das funções de estrutura do modelo Log-Normal para turbulência Lagrangeana

grande popularidade e foi o responsável pelo surgimento de diversas generalizações, como discutiremos a seguir.

Os modelos de intermitência mais discutidos na literatura da área farão parte, por questão de completeza, de uma breve revisão neste capítulo. Entretanto, esses modelos não serão diretamente relevantes para o trabalho descrito nesta tese, de modo que o restante deste capítulo pode ser lido superficialmente em um primeiro momento, sem comprometer o entendimento dos capítulos seguintes.

2.5 Modelos de Intermitência

2.5.1 Modelo β

Uma maneira diferente de incorporar o fenômeno da intermitência em um modelo fenomenológico de cascata de energia é assumir que um determinado turbilhão pode dividir-se em outros turbilhões menores, os quais ocuparão apenas uma fração β (com $\beta < 1$) do volume do turbilhão original [37]. A fração β é um parâmetro ajustável do modelo. Definindo a porção ativa do espaço $p_\ell = \beta^n$ (ativa no sentido de estar fazendo

parte de um turbilhão), após uma sequência de n divisões, temos

$$p_\ell = \beta^n = \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{3-D}, \quad (2.55)$$

onde

$$3 - D = \frac{\ln \beta}{\ln r}. \quad (2.56)$$

Como os turbilhões ativos de tamanho ℓ ocupam apenas uma fração p_ℓ do volume total, então a energia total acumulada em uma escala ℓ é dada por

$$E_\ell \sim v_\ell^2 p_\ell = v_\ell^2 \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{3-D}, \quad (2.57)$$

e o fluxo de energia é

$$\Pi'_\ell = \frac{E_\ell}{\tau} \sim \frac{v_\ell^3}{\ell} \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{3-D}. \quad (2.58)$$

A maneira original como D é escolhida é equivalente a inserir o resultado do terceiro momento de Kolmogorov ($\langle \delta v^3 \rangle \sim \epsilon \ell$) como condição de contorno. Gostaríamos de enfatizar que esta etapa de fazer com que novos modelos reproduzam resultados tidos como exatos é, neste modelo β e em muitos outros modelos, implementada como condição de contorno. Assim, temos

$$\Pi'_\ell \sim \epsilon \sim \frac{v_0^3}{\ell_0}. \quad (2.59)$$

Comparando (2.58) e (2.59), podemos encontrar o expoente de escala para as funções de estrutura previsto por este modelo:

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + (3 - D)\left(1 - \frac{p}{3}\right), \quad (2.60)$$

onde o caso ζ_1 , chamado de expoente de escala da velocidade no conjunto de dimensão fractal D , é denotado por h e dado por

$$h = \frac{1}{3} - \frac{3 - D}{3}. \quad (2.61)$$

Uma consequência do expoente ζ_p é que o espectro de energia é ligeiramente diferente do introduzido por Kolmogorov

$$E(k) \sim k^{-\left(\frac{5}{3} + \frac{3-D}{3}\right)}, \quad (2.62)$$

que é consistente com a lei de 4/5 por construção. A teoria de Kolmogorov (K41) é recuperada com $D = 3$, escolha essa que elimina a correção devido a intermitência. Um

dos problemas deste modelo é que, apesar de gerar expoentes diferentes de K41 para a velocidade, o expoente ζ_p ainda é linear em p . Quando obtido experimentalmente, este expoente é ligeiramente côncavo e não aparenta ser uma função linear de p [38].

O modelo β apresentado acima é um tipo de modelo que surge a partir da fenomenologia de turbulência, sem fazer referência direta às equações de Navier-Stokes. Uma interpretação do modelo pode ser feita segundo o conceito de dimensão fractal desenvolvido por Mandelbrot [39] e esta aplicação em turbulência não teve aceitação imediata por utilizar matemática considerada exótica para a época [8].

2.5.2 Modelo Bifractal

Uma generalização natural do modelo β (ou monofractal) é o modelo bifractal. A modificação consiste em assumir que existem dois conjuntos φ_1 e φ_2 (do espaço físico) nos quais os momentos da velocidade tem expoentes h_1 e h_2 respectivamente. Os conjuntos considerados possuem dimensões fractal D_1 e D_2 . Assim, utilizando a relação entre h e a dimensão fractal do conjunto D encontrada no modelo β , podemos calcular a função de estrutura como a média ponderada entre dois modelos β diferentes. Isto implica que o momento de $\delta_\ell v$, no modelo bifractal, é dado por

$$\frac{\delta v_\ell^p}{v_0^p} = \mu_1 \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{ph_1} \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{3-D_1} + \mu_2 \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{ph_2} \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{3-D_2}, \quad (2.63)$$

onde as constantes μ_1 e μ_2 são da ordem da unidade. Note que este modelo implica em uma função de estrutura como combinação de leis de potência. A depender da escala considerada, um dos expoentes vai dominar. Considerando o limite $\ell \ll \ell_0$, o expoente será:

$$\zeta_p = \min(ph_1 + 3 - D_1, ph_2 + 3 - D_2). \quad (2.64)$$

O gráfico deste expoente possui um análogo a uma transição de fase em $p = 3$, como pode ser visto na Figura 2.2, para $D = 2.5$.

Apesar de não parecer um expoente natural, dada a forma brusca com que ocorre a variação de ζ_p , vale ressaltar que existem maneiras conhecidas de um modelo bifractal surgir em sistemas físicos. Por exemplo, a equação de Burgers [40]

$$\partial_t v + v \partial_x v = \nu \partial_{xx}^2 v, \quad (2.65)$$

que é um análogo unidimensional das equações de Navier-Stokes, possui bifractalidade

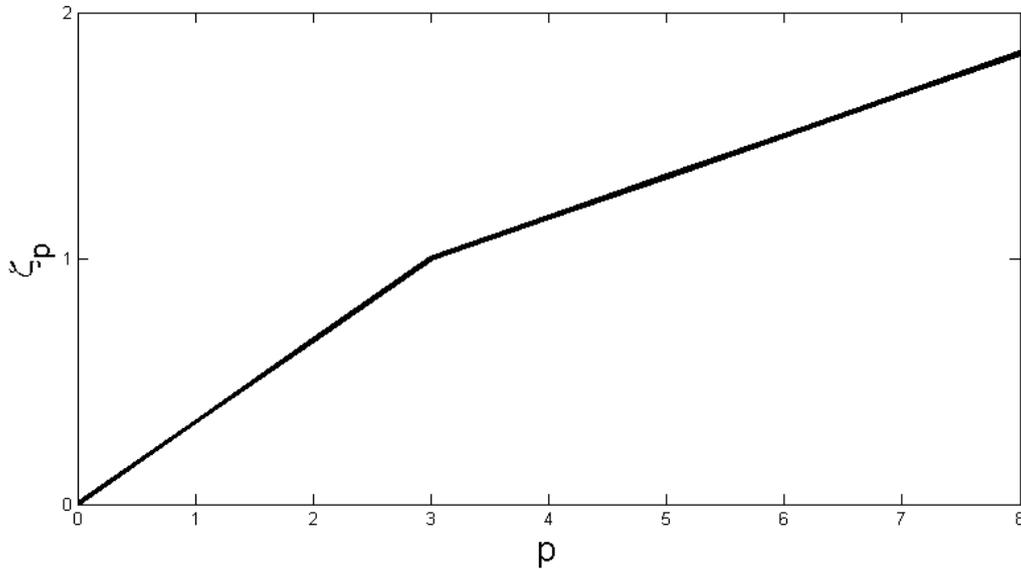


Figura 2.2 Expoente das funções de estrutura para o modelo Bifractal

no sentido dos expoente dos momentos da velocidade v . Para $p \geq 1$, temos $\zeta_p = 1$ e para $0 \leq p \leq 1$, temos $\zeta_p = p$. Desta forma, não é um absurdo intuir que sistemas não lineares de dimensões superiores possam conter certas transições de fase nos expoentes das funções de estrutura.

2.5.3 Modelo Multifractal

Um problema do modelo bifractal (ou monofractal) é que os expoentes da função de estrutura são localmente lineares. Isto não é observado nos dados experimentais, apesar da crítica que existe contra os métodos de estimação destes expoentes a partir das medições experimentais, sobretudo os expoentes dos momentos mais altos ($p \geq 8$, por exemplo). Para ajustar os expoentes estimados de maneira mais adequada, uma generalização do modelo bifractal foi proposta, em que uma infinidade de expoentes h são considerados, dando origem ao modelo multifractal [41].

Esta idéia é parcialmente justificada com base nas simetrias estudadas das equações de Navier-Stokes. Vimos que existem um contínuo de expoentes h que deixam as equações de NS invariantes no limite de ausência de viscosidade. Esta propriedade é implementada no modelo da seguinte maneira: considera-se que existem invariâncias de escala obedecidas localmente no sistema. Todos os h são permitidos, sendo que para cada h existe um

conjunto fractal do espaço físico com dimensão fractal $D(h)$ no qual a lei de escala vale com expoente h .

A hipótese de multifractalidade, assumindo o mesmo que a hipótese H1 da teoria K41, diz que existe um intervalo de expoentes $I = (h_{min}, h_{max})$, e que para cada h neste intervalo, existe um conjunto do espaço físico $\varphi_h \subset \mathbf{R}^3$ com dimensão fractal $D(h)$ de forma que, quando $\ell \rightarrow 0$, temos

$$\frac{\delta v_\ell(\vec{r})}{v_0} \sim \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^h, \quad r \in \varphi_h. \quad (2.66)$$

Assim como no modelo bifractal, em que foi tomada uma média ponderada entre dois expoentes, pode-se tomar uma média ponderada entre os infinitos expoentes que compõem o contínuo do intervalo I . Desta forma, obtemos

$$\frac{\delta v_\ell^p}{v_0^p} \sim \int_I d\mu(h) \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{ph+3-D(h)}, \quad (2.67)$$

onde $d\mu(h)$ dá o peso do conjunto de expoente h . No limite de $\ell \rightarrow 0$, a fórmula da medida $d\mu(h)$ não faz diferença, pois a lei de potência com menor expoente domina e podemos obter

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln S_p(\ell)}{\ln(\ell)} = \zeta_p. \quad (2.68)$$

Na verdade, isto significa que estamos calculando a inclinação (derivada) de uma função em um ponto bem particular. Afirmar que o valor encontrado é um expoente de escala não implica que as funções de estrutura escalam com a distância, pois é um resultado obtido apenas em um limite especial. Neste sentido, o expoente pode ser escrito como

$$\zeta_p = \inf_h (ph + 3 - D(h)). \quad (2.69)$$

Novamente, utilizando o terceiro momento da lei de 4/5 de Kolmogorov como condição de contorno, obtemos

$$\zeta_3 = \inf_h (3h + 3 - D(h)) = 1. \quad (2.70)$$

Pode-se considerar a fórmula do expoente ζ_p deste modelo como uma transformada de Legendre [42]. Desta maneira, podemos construir uma fórmula de inversão que extrai a função $D(h)$ (algo que não é observado diretamente no sistema) em função dos expoentes ζ_p , calculados a partir dos dados.

Na próxima seção, veremos que é possível construir modelos de intermitência em que

se modela diretamente a taxa de dissipação de energia, sem fazer menção aos incrementos de velocidade na etapa inicial.

2.5.4 Dissipação Multifractal

A quantidade relevante na descrição do modelo multifractal baseado na dissipação de energia é a média espacial da taxa de dissipação de energia (ϵ_ℓ), definida em uma bola de raio ℓ , definida na eq. (2.45).

Vamos denotar por $P_\ell^{diss}(\epsilon)$ como a função densidade de probabilidade de ϵ_ℓ . Neste modelo, assume-se o equilíbrio e número de Reynolds muito grande. A multifractalidade é inserida da mesma maneira que fizemos para os incrementos de velocidade, mas agora para a taxa de dissipação ϵ_ℓ .

Definição *A dissipação é dita multifractal se existe uma função $F(\alpha)$ que mapeia os expoentes α à dimensão $F(\alpha)$, com $F(\alpha) \leq 3$. De forma que, para qualquer α , temos*

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln C_\ell^{diss}(\ell^{\alpha-1})}{\ln \ell} = 3 - F(\alpha), \quad (2.71)$$

onde C_ℓ^{diss} é a distribuição de probabilidade acumulada de ϵ_ℓ .

A definição de multifractalidade em termos da dissipação de energia pode ser escrita como

$$\frac{\epsilon_\ell(\vec{r})}{v_0^3/\ell_0} \sim \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{\alpha-1}, \quad (2.72)$$

com $\ell \rightarrow 0$ e $\vec{r} \in D_\alpha \subset \mathbf{R}^3$. Utilizando o mesmo argumento da seção anterior, podemos fazer uma combinação de vários expoentes e tomar o limite de $\ell \rightarrow 0$ para obter

$$\langle \epsilon_\ell^q \rangle \sim \left(\frac{v_0^3}{\ell_0}\right)^q \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{\tau_q}, \quad (2.73)$$

onde

$$\tau_q = \min_\alpha [q(\alpha - 1) + 3 - F(\alpha)]. \quad (2.74)$$

Este tipo de modelo levou alguns grupos de pesquisa [11] a estudarem a série temporal de dissipação de energia. A partir da fórmula considerada por Kolmogorov-Obukhov, modificações de uma dimensão foram utilizadas para acessar as informações da dissipação a partir da série de incrementos de velocidade. As derivadas temporais, por outro lado, são substituídas por diferenças temporais entre os intervalos de medição de uma sonda de alta frequência. A hipótese de Taylor é utilizada para transformar as medições (feitas

por uma sonda fixa) em dados de turbulência euleriana, correspondendo a diferenças de velocidades entre dois pontos.

2.5.5 Modelos de cascata aleatória

Os primeiros modelos a implementarem o conceito de dissipação multifractal foram os modelos de cascata aleatória multiplicativa. Estes modelos funcionam de maneira análoga ao modelo β e podem ser construídos diretamente para os incrementos de velocidade ou para a dissipação.

Nesses modelos, considera-se que a energia contida em um cubo de lado ℓ_0 é dividida entre cubos menores de lado $\ell_0/2$. Para cada passagem, o fluxo de energia sofre uma perda (ou ganho) modelado por uma variável aleatória W . A fração de perda W possui as seguintes características gerais

$$W \geq 0, \quad \langle W \rangle = 1, \quad \langle W^q \rangle < \infty \quad \forall q > 0. \quad (2.75)$$

Não precisamos fazer nenhuma suposição adicional sobre a distribuição de W . Daí vem a universalidade do modelo. Mesmo que exista uma distribuição específica para W , como faremos a suposição de um número muito grande de níveis, o teorema do limite central transformará o fluxo final em uma variável aleatória distribuída de maneira Log-Normal. O fluxo final de energia em uma escala é dado pelo fluxo inicial (da escala integral) vezes uma sequência perdas (ou ganhos), ou seja,

$$\epsilon_\ell = \epsilon W_1 W_2 \dots W_n. \quad (2.76)$$

Os processos W_i são independentes e identicamente distribuídos. Podemos mostrar que, em média, como os processo são independentes, temos

$$\langle \epsilon_\ell \rangle = \epsilon, \quad (2.77)$$

mas isso não significa que a energia é conservada, pois a soma da dissipação de 8 cubos de lado $\ell/2$ não é igual à dissipação de entrada. Isto significa que a cascata é não conservativa. A partir do teorema do limite central, o logaritmo de ϵ é dado pela soma de variáveis independentes e igualmente distribuídas. Como o número de níveis é infinito, é imediato o cálculo dos expoentes da função de estrutura, obtendo-se

$$\zeta_p = \frac{p}{3} - \log_2 \langle W^{\frac{p}{3}} \rangle. \quad (2.78)$$

Um limite bem particular é obtido quando fazemos $W = 1/\beta$, com probabilidade β , e $W = 0$, com probabilidade $1 - \beta$. Este modelo foi proposto por Novikov e Stewart [43]. Os momentos da dissipação e os expoentes da função de estrutura são dados por

$$\tau_q = -(1 - q) \log_2 \beta, \quad (2.79)$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} - \left(1 - \frac{p}{3}\right) \log_2 \beta. \quad (2.80)$$

Note que a correção no expoente de Kolmogorov da função de estrutura é linear. Como mencionamos anteriormente, os dados mostram que existe uma curvatura nos dados que não é ajustada por um ζ_p linear em p .

Benzi e colaboradores [44] propuseram um modelo análogo a este, com a alteração de permitir que β assumia valores aleatoriamente. Este modelo funciona como o modelo de cascata aleatória com um ruído adicional advindo do fato de a taxa de transferência do fluxo entre os níveis flutuar entre certos valores permitidos. Em seguida, os autores propuseram uma escolha simples de apenas um parâmetro livre: β pode assumir dois valores possíveis apenas. O expoente τ_q , que era uma linha reta na escolha de Novikov, assume uma forma côncava e, por isso, pode-se dizer que o modelo de cascata aleatória geral possui características multifractais.

2.5.6 Modelos de She-Lévêque e Dubrulle

O modelo de She e Lévêque [45] propõe uma hipótese obedecida pelas funções de estrutura, como se as diferentes funções fizessem parte de uma hierarquia da forma

$$\frac{S_{p+2}(r)}{S_{p+1}(r)} = A_{p+1} \left[\frac{S_{p+1}(r)}{S_p(r)} \right]^\beta [S^\infty(r)]^{1-\beta}, \quad (2.81)$$

onde $S^\infty(r) = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{p+1}(r)/S_p(r)$ e $0 < \beta < 1$ é uma constante. Esta hipótese, que pode ser feita de maneira similar para a dissipação de energia, concorda com observações experimentais [46]. Se os valores dos incrementos de velocidade forem limitados, a existência de S^∞ é garantida e pode-se mostrar que $S^\infty(r) = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p^{1/p}$, que por sua vez é igual a $|\delta_r v|_{max}$, o valor máximo de $\delta_r v$ [47]. Pode-se mostrar que este modelo prevê um expoente para a função de estrutura que não depende de nenhum parâmetro do escoamento, ou seja,

$$\langle \delta v_\ell^p \rangle \sim \ell^{\zeta_p}, \quad (2.82)$$

com

$$\zeta_p = \frac{p}{9} + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{p/3} \right]. \quad (2.83)$$

Este modelo foi logo generalizado por Dubrulle [48], que representou a cascata de energia do escoamento turbulento como um processo do tipo log-poisson infinitamente divisível. Ele também relacionou a dimensionalidade das estruturas dissipativas do escoamento, que ocupam uma fração do espaço, $D < 3$, com os expoentes da função de estrutura

$$\frac{\zeta_p}{\zeta_3} = (1 - \Delta)\Theta p + \frac{\Delta}{1 - \beta}(1 - \beta^{\Theta p}), \quad (2.84)$$

onde $\beta = 1 - \Delta/(3 - \Delta)$, com $\beta \in (0, 1)$, está relacionado ao grau de não intermitência da dissipação de energia. Os outros dois parâmetros, Θp e Δ , representam respectivamente o expoente não intermitente dos incrementos de velocidade, $\delta_\ell v \sim \ell^\Theta$, e o expoente do tempo característico de um turbilhão da escala espacial ℓ , $t_\ell \sim \ell^\Delta$, que é definido como período temporal das estruturas que fazem parte desta escala.

Para a cascata de Kolmogorov, temos $\Theta = 1/3$ e $\Delta = 2/3$. No limite de $\beta \rightarrow 1$, o regime não intermitente de K41 é obtido naturalmente. Os filamentos de vórtice em turbulência são caracterizados por $D = 1$ e a última equação fica reduzida à eq. (2.83), que é o modelo original de She e Lévéque.

2.5.7 Modelos de Sawford e de Reynolds

Seguindo a evolução das técnicas experimentais, alguns modelos foram criados especificamente para a turbulência lagrangeana, onde a estatística dos incrementos de velocidade de uma partícula do escoamento em sucessivos instantes de tempo é estudada. O modelo introduzido por Sawford [49] para turbulência lagrangeana é baseado em uma equação diferencial estocástica para a aceleração das partícula em um escoamento turbulento. A aceleração é dada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais

$$dA = -(T_L^{-1} + t_\eta^{-1})A dt - T_L^{-1}t_\eta^{-1}u dt + \sqrt{2\sigma^2(T_L^{-1} + t_\eta^{-1})T_L^{-1}t_\eta^{-1}}dW, \quad (2.85)$$

$$du = A dt, \quad (2.86)$$

$$dx = u dt. \quad (2.87)$$

onde dW é conhecido entre os físicos como um ruído branco com média zero e variância dt . Mais formalmente, dW é o incremento do processo de Wiener, $W(t)$, em um intervalo

dt [20]. As duas escalas de tempo que aparecem nestas equações são $T_L = 2\sigma_u^2/C_0\epsilon$ e $t_\eta^{-1} = C_0/2a_0t_\eta^E$, relacionadas com as escalas inerciais e de dissipação, respectivamente. Os parâmetros σ_u^2 e $\sigma_A^2 = a_0\epsilon/t_\eta^E$ são as variâncias da velocidade e da aceleração, onde ϵ é a taxa de dissipação média da energia cinética do fluido dividida pela sua densidade, $t_\eta^E = \sqrt{\nu/\epsilon}$ é escala de tempo da dissipação euleriana usual e ν é a viscosidade cinemática. De acordo com a teoria de similaridade de Kolmogorov, a constante C_0 e o parâmetro a_0 devem ser universais para um número de Reynolds (R) muito grande. Contudo, em número de Reynolds elevados, simulações numéricas mostraram que a_0 é uma função de R .

O modelo de Sawford é consistente com as formas das funções de estrutura lagrangeanas obtidas pela teoria de similaridade de Kolmogorov, tanto no regime inercial quanto no regime de dissipação. O modelo também é consistente com o fato de os incrementos da aceleração e velocidade possuírem distribuições independentes, mas a previsão é que sejam gaussianas [49]. Como veremos explicitamente no capítulo 4, as distribuições experimentais da aceleração apresentam caudas mais gordas do que a cauda da distribuição normal. O modelo de Sawford pode, entretanto, ser modificado para capturar estas características dos dados.

Uma modificação proposta por Reynolds [50, 51] introduz uma não linearidade na equação diferencial estocástica da aceleração, resultando em uma fdp para a aceleração com caudas em forma de lei de potência, apesar desta afirmação ser possível apenas do ponto de vista numérico, visto que o modelo é muito difícil de ser resolvido analiticamente. As equações do modelo de Reynolds são

$$dA = -\frac{4}{1 + A^2/\sigma_A^2}(T_L^{-1} + t_\eta^{-1})Adt - \frac{1}{2}(1 + A^2/\sigma_A^2)T_L^{-1}t_\eta^{-1}udt + \sqrt{2\sigma^2(T_L^{-1} + t_\eta^{-1})T_L^{-1}t_\eta^{-1}}dW, \quad (2.88)$$

$$du = Adt, \quad (2.89)$$

$$dx = udt. \quad (2.90)$$

A curva obtida pela simulação numérica deste sistema de equações possui uma boa ajuste aos dados experimentais [51]. Partindo de uma proposta de Beck [16], Reynolds calculou a função de autocorrelação da velocidade para seu novo modelo. Ele utilizou a mesma construção utilizada por Beck para obter uma distribuição q -gaussiana a partir de superposição de gaussianas. Dito de forma resumida, esta abordagem, que recebeu o nome de superestatística, considera que a distribuição de probabilidade, $P(A)$, da aceleração

pode ser obtida como uma mistura de gaussianas, da forma

$$P(A) = \int \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta A^2} f(\beta) d\beta. \quad (2.91)$$

No caso do modelo de Reynolds, a variável $\beta = \epsilon^{-3/2}$ está distribuída de acordo com

$$f(\beta) = \gamma \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} (2\beta_0)^{-\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\beta/2\beta_0). \quad (2.92)$$

A função densidade de probabilidade resultante deste modelo é a integral da probabilidade condicionada $P(A|\beta)$, que é uma gaussiana, vezes a frequência $f(\beta)$ de ocorrência de cada valor da variável β . A forma final é semelhante ao modelo de Beck [35] para turbulência lagrangeana.

2.5.8 Modelos de Cascas

Todos os modelos tratados anteriormente neste capítulo não fazem referência direta às equações de NS. Os modelos de cascas (“*shell models*”), por outro lado, são modelos que partem de um sistema de equações diferenciais acopladas, com termos semelhantes aos da equação de NS. Nestes modelos, a intermitência não é introduzida no sentido de probabilidade, mas deve emergir naturalmente da dinâmica determinística.

O modelo de cascas mais simples [52] consiste em um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas:

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n\right) u_n = \alpha(k_n u_{n-1}^2 - k_{n+1} u_n u_{n+1}) + f_n, \quad (2.93)$$

onde as variáveis $u_n(t)$ são funções reais e $u_{-1} = 0$. O termo de força externa é restrito apenas a um dos níveis e pode ser escrito como $f_n = f \delta_{n,n_0}$. Esta última condição é justificada pois, geralmente, o regime turbulento é criado em laboratório com um fluxo constante de energia que está relacionado a apenas um dos modos do espectro de Fourier. No espaço físico, isto corresponde à escala integral do sistema. As demais escalas inferiores não sofrem efeito direto deste termo de força externa, mas sentem sua influência de maneira indireta pelo efeito dos termos inerciais (não lineares) que são responsáveis pela distribuição da energia pelas diferentes escalas.

Os números de onda usados na eq. (2.93) obedecem à relação

$$k_n = k_0 2^n. \quad (2.94)$$

Esta relação pode ser modificada pois não existem argumentos muito robustos com respeito ao fator multiplicativo entre as escalas, $b = 2$, em modelos de cascata. O parâmetro $\nu > 0$ é a viscosidade e α e β são parâmetros de controle que podem ser nulos. Este modelo, assim como os demais modelos de cascas, possui a propriedade de conservar energia. Além disso, o termo não linear das equações é quadrático em u e existem invariâncias de escala do tipo:

$$n \rightarrow n + 1, \quad u_n \rightarrow (1/2)^h u_n, \quad t \rightarrow (1/2)^{1-h} t. \quad (2.95)$$

Este tipo de modelo pode ser visto como uma aproximação das equações de Navier-Stokes em que apenas as escalas (números de onda) mais próximas estão acopladas. Os primeiros modelos de cascas foram originados com Lorenz [53] em 1972 e ganharam novas formulações. Em particular, notou-se que alguns deles podem apresentar comportamento caótico e intermitência. Em 1973, foi proposta uma modificação complexa do modelo de Gledzer [54], chamado de modelo GOY (Gledzer-Ohkitani-Yamada). Foi mostrado numericamente que este modelo era intermitente e caótico. Já em 1991, Jensen, Paladin e Vulpiani [55] calcularam a função de estrutura,

$$S_p(n) = \langle |u_n|^p \rangle, \quad (2.96)$$

e mostraram que ela se comporta como

$$S_p(n) \sim k_n^{-\zeta_p}, \quad (2.97)$$

no regime inercial, definido como o intervalo $\eta \ll \ell \ll \ell_0$, onde η é o comprimento de Kolmogorov e ℓ_0 a escala integral do sistema. Como o expoente ζ_p possui uma dependência não trivial em p , isto sugere multifractalidade (em referência aos resultados dos modelos multifractais já comentados, apesar das hipóteses serem completamente diferentes). Este resultado foi confirmado por diversas simulações numéricas [56], mas considera-se que a intermitência é um assunto ainda pouco entendido com base nestes modelos [8]. Em 1993, Benzi *et. al* [57] estudaram uma maneira de obter analiticamente os expoentes (com dependência não trivial em p) para modelos de cascas. Eles construíram um processo multiplicativo relacionado com o modelo de GOY e calcularam analiticamente ζ_p .

Modelo Dinâmico Hierárquico para Intermitência

Neste capítulo, vamos partir da descrição fenomenológica compartilhada por diversas teorias sobre turbulência e, em especial, partir dos avanços pioneiros de Kolmogorov ao tentar explicar o fenômeno com um conjunto de poucas hipóteses de universalidade e similaridade. Motivados pela simplicidade dos argumentos encontrados nas teorias originais de K41 e K62, vamos explorar quais as implicações de uma hipótese adicional sobre interações locais entre as escalas espaciais da cascata de energia. Combinaremos esta hipótese com a equação do balanço de energia e deduziremos heurísticamente uma equação simples para a dinâmica do fluxo de energia. Como vimos no capítulo anterior, esta variável é a peça chave do fenômeno de intermitência.

Apesar de considerarmos uma dinâmica para o fluxo de energia, mostraremos que o resultado de equilíbrio é o mesmo previsto pela teoria K41, que considera o fluxo de energia constante. Faremos, então, uma proposta de generalização da dinâmica determinística do fluxo de energia: deduziremos condições necessárias e suficientes obedecidas pelo sistema de equações dos fluxos de energia e aplicaremos as mesmas condições a um sistema geral de equações estocásticas. Desta maneira, construiremos um modelo de equações diferenciais estocásticas que possui uma série de condições fisicamente razoáveis para o fluxo de energia, obtidas inicialmente da equação do balanço de energia e da mencionada hipótese de interação local.

Neste capítulo, também calculamos a auto-correlação do fluxo de energia, obtida diretamente a partir das equações do modelo. Demonstramos que o modelo prevê uma auto-correlação que decai temporalmente como uma soma de exponenciais, cada uma com seu próprio tempo de relaxação. Em seguida, verificamos a conservação de energia no modelo e calculamos a flutuação da energia total do sistema para mostrar que, apesar da energia se conservar na média, existem flutuações medidas por um parâmetro do modelo que fará ligação com o limite de ausência de flutuações (como no caso de K41).

Calculamos também a solução geral exata do modelo em termos de processos de Wiener. A aplicabilidade desta solução exata será deixada em segundo plano, pois, em

termos de densidade de probabilidade, um método que explora a separação temporal entre os níveis se mostrou muito eficaz na obtenção das distribuições de probabilidade do fluxo de energia e, portanto, será intensamente explorado no próximo capítulo. Contudo, como explicaremos ao longo deste capítulo, caso o fluxo de energia ganhe uma maior importância experimental e teórica, perguntas sobre propriedades do fluxo de energia do modelo poderão ser respondidas de posse das soluções exatas, que, por virem de um sistema linear, são relativamente simples.

3.1 Modelo Dinâmico Estocástico para o Fluxo de Energia

Nesta seção, vamos, por razões didáticas, apresentar nosso modelo para a cascata de energia e discutir brevemente suas motivações físicas, deixando para a próxima seção uma fundamentação teórica mais rigorosa do mesmo. Vamos utilizar o conceito de cascata de energia na construção do nosso modelo. Inicialmente, para que a turbulência seja mantida, vamos considerar que a energia é injetada no sistema a uma taxa constante, ϵ_0 , na escala integral, ℓ_0 , do sistema. Em seguida, esta energia é transferida para a escala seguinte da cascata, denotada por ℓ_1 , a uma taxa (por unidade de massa) denotada por ϵ_1 . Este processo de transferência de energia se repete entre as escalas consecutivas, ℓ_{i-1} e ℓ_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, sendo ϵ_i o fluxo correspondente de energia entre essas escalas, até as menores escalas, onde ocorre a dissipação da energia. Como é esperado em uma cascata, os comprimentos característicos das escalas são relacionados por

$$\ell_i = \ell_0/2^i. \quad (3.1)$$

A escolha do fator multiplicativo de 2 entre as escalas espaciais foi feita por simplicidade. Como veremos, esta escolha pode ser facilmente generalizada em nosso modelo.

O modelo proposto para o fluxo de energia ϵ_N em uma dada escala $\ell_N = \frac{\ell_0}{2^N}$ será dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas

$$d\epsilon_1 = -\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon_0)dt + \kappa_1\epsilon_1dW_1(t), \quad (3.2)$$

$$d\epsilon_2 = -\gamma_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)dt + \kappa_2\epsilon_2dW_2(t), \quad (3.3)$$

$$\vdots \quad (3.4)$$

$$d\epsilon_N = -\gamma_N(\epsilon_N - \epsilon_{N-1})dt + \kappa_N\epsilon_NdW_N(t). \quad (3.5)$$

Os parâmetros γ_i e κ_i são constantes positivas do modelo. Os dW_i são ruídos brancos independentes. Como mencionamos, a variável ϵ_0 , que aparece na eq. (3.2) é considerada constante. Uma fundamentação mais detalhada (a partir da equação do balanço de energia) para a escolha do modelo acima será apresentada na próxima seção. Convém mencionar, contudo, neste momento que a escolha dos termos no modelo é fisicamente razoável. Por exemplo, a parte determinística representa o acoplamento unidirecional entre as diferentes escalas espaciais da cascata. Se considerarmos apenas este termo e omitirmos o termo aleatório da equação (3.5), todas as variáveis ϵ_i relaxariam para um valor constante ϵ_0 , recuperando a teoria original K41, em que não há intermitência. Este modelo também implica que a média do fluxo de energia independe da escala, pois podemos escrever no equilíbrio a relação

$$\langle \epsilon_i \rangle = \epsilon_0, \quad (3.6)$$

onde $\langle \rangle$ significa média estatística. A escolha do termo de ruído nas eqs. (3.2)-(3.5) também é natural, pois espera-se um ruído multiplicativo em um processo de cascata. Como veremos adiante, essa escolha será responsável pelo fato de as distribuições de probabilidade das variáveis ϵ_i possuírem comportamento de lei de potência. Outra propriedade do modelo é que a energia segue sempre das escalas maiores para as menores e não ocorre transferência no sentido inverso. Ou seja, todos os fluxos de energia ϵ_i são não negativos.

Após ter apresentado as principais características das equações estocásticas (4.20)-(3.5), vamos apresentar a seguir uma dedução heurística deste modelo.

3.2 Dedução do Modelo

3.2.1 Termos Determinísticos

Inicialmente, considere a equação do balanço detalhado de energia

$$\partial_t E_K = -2\nu\Omega_K - \Pi_K + F_K, \quad (3.7)$$

onde, relembramos, E_K é a energia total acumulada nas escalas $\ell > K^{-1}$, Ω_K é a enstrofia total acumulada das escalas $\ell > K^{-1}$, F_K é a taxa total de injeção de energia no sistema nas escalas $\ell > K^{-1}$ e Π_K é o fluxo da energia que sai da escala K^{-1} e passa para as escalas menores, vide eq. (2.35). No limite de número de Reynolds infinito, a contribuição do termo de viscosidade torna-se desprezível, como vimos no capítulo 2. Portanto, neste

limite, temos

$$\partial_t E_K = -\Pi_K + F_K. \quad (3.8)$$

Como discutido anteriormente, para a manutenção do regime turbulento é necessário que exista injeção de energia no sistema. Vamos supor aqui que esta energia externa é injetada a uma taxa aproximadamente constante, o que corresponde à maioria das situações experimentais de interesse. Isto significa que o período de oscilação da taxa de energia injetada ao sistema é infinito, logo a única componente harmônica desta taxa é o modo com número de onda $K = 0$. Do ponto de vista da cascata de energia, isto significa que estamos inserindo energia no sistema apenas na escala integral e esta energia será transmitida para as escalas inferiores através de um mecanismo existente no próprio fluido (termos não lineares), para ser dissipada nas escalas menores (termo de viscosidade). Para este regime de injeção de energia, teremos

$$\partial_t E_K = -\Pi_K, \quad K > 0. \quad (3.9)$$

Até agora, estamos considerando um número infinito de possíveis números de onda. Queremos limitar nosso modelo a um conjunto finito de escalas de comprimento de forma consistente com a idéia de cascata de energia. Vamos, portanto, considerar números de onda discretos da forma

$$K_i = \frac{1}{\ell_i}, \quad (3.10)$$

onde $\ell_i = \ell_0/2^i$. Assim, a eq. (3.9) torna-se

$$\partial_t E_{K_i} = -\Pi_{K_i}, \quad (3.11)$$

com $i = 1, \dots, N$, onde N é o número total de escalas (níveis da cascata). A escolha da quantidade de níveis utilizados em uma cascata deve ser determinado a partir dos dados experimentais, como será visto no capítulo 4.

Agora, vamos construir a energia total acumulada entre duas escalas espaciais, que será identificada como a energia total de um nível da cascata ξ_i , definida pela relação

$$\xi_i = E_{K_i} - E_{K_{i-1}}, \quad (3.12)$$

com $i = 1, 2, \dots, N$. Para encontrar o comportamento dinâmico da variável ξ_i , vamos

subtrair duas equações de balanço de energia consecutivas, $i - 1$ e i , como dadas em (3.11), obtendo assim

$$\partial_t \xi_i = -(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}). \quad (3.13)$$

Onde definimos

$$\epsilon_i \equiv \Pi_{K_i}, \quad (3.14)$$

de modo que ϵ_i representa o fluxo de energia que sai da escala i e passa à escala seguinte $i + 1$.

Vimos no capítulo 2 que Kolmogorov propôs uma lei a partir da qual foi possível deduzir uma simples hipótese de similaridade que considerava a dissipação de energia constante. Na teoria K62, flutuações no fluxo de energia foram consideradas, mas não houve uma proposta para a dinâmica dessas flutuações. A distribuição de equilíbrio (Log-Normal) foi introduzida como um axioma, como mencionamos no capítulo 2. Na dedução do nosso modelo, vamos assumir uma hipótese adicional para o fluxo de energia, com o objetivo de encontrar uma equação dinâmica fisicamente razoável para esta variável.

Hipótese de Interações Locais *No limite de número de Reynolds infinito, a flutuação de energia $\delta\xi_i$ definida por*

$$\delta\xi_i = \xi_i - \langle \xi_i \rangle, \quad (3.15)$$

de uma dada escala i da cascata é unicamente determinada pela escala espacial l_i e pelo fluxo total de energia através desta escala, representado pela diferença, $\epsilon_i - \epsilon_{i-1}$, entre o fluxo que sai e o fluxo que entra nessa escala.

Esta hipótese relaxa a condição de ϵ constante usada em K41 e permite a existência de alguma diferença entre o fluxo de energia na entrada e na saída de uma dada escala. Queremos, a partir da hipótese acima, deduzir heurísticamente uma forma funcional para a dinâmica do fluxo de energia. Primeiramente, notamos que ao multiplicarmos os dois lados da equação de balanço de energia, eq. (3.13), por um número real λ , obtemos

$$\partial_t(\lambda\delta\xi_i) = -(\lambda\epsilon_i - \lambda\epsilon_{i-1}). \quad (3.16)$$

Isto significa que $\lambda(\delta\xi_{i+1})$ é a flutuação da energia total associada a uma dada escala, que possui um fluxo da energia incidente dado por $\lambda\epsilon_{i-1}$ e um fluxo de energia que sai da escala dado por $\lambda\epsilon_i$. Agora, de acordo com nossa hipótese sobre a natureza local das

interações, a flutuação de energia pode ser escrita como uma função do tipo

$$\delta\xi_i = f(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}), \quad (3.17)$$

onde a dependência de f na escala ℓ_i foi omitida por simplicidade da notação e será recuperada mais adiante. Portanto, como $\lambda(\delta\xi_i)$ também satisfaz à equação de balanço de energia (3.13), devemos ter

$$\lambda(\delta\xi_i) = f(\lambda(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})), \quad (3.18)$$

que combinada com eq. (3.17) nos dá

$$f(\lambda(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})) = \lambda f(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}). \quad (3.19)$$

Como esta relação vale para todo λ real e supomos que $f(x)$ é uma função analítica em $x = 0$, segue que

$$f(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}, \ell_i) = C_{\ell_i}(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}), \quad (3.20)$$

onde C_{ℓ_i} depende apenas da escala espacial. A partir das equações (3.17) e (3.20), obtemos que a flutuação de energia passa a ser dada por

$$\delta\xi_i = C_{\ell_i}(\epsilon_i - \epsilon_{i-1}). \quad (3.21)$$

Finalmente, aplicando uma derivada temporal à eq. (3.21) e utilizando a eq. (3.13), obtemos

$$\epsilon_{i-1} - \epsilon_i = C_{\ell_i}(\partial_t \epsilon_i - \partial_t \epsilon_{i-1}) \quad (3.22)$$

Encontramos assim uma equação que relaciona variações temporais do fluxo de energia com os próprios fluxos de energia.

Vamos supor agora que as variações do fluxo de energia na escala i possuem uma magnitude muito maior que as variações da escala $i - 1$. Isto significa dizer que o fluxo de energia varia de maneira muito mais rápida à medida que a escala de comprimento (nível da cascata) diminui (aumenta), o que é fisicamente razoável no regime de turbulência altamente desenvolvida. Assim, a relação (3.22) pode ser escrita da seguinte forma aproximada

$$\partial_t \epsilon_i = -\gamma_i (\epsilon_i - \epsilon_{i-1}), \quad (3.23)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Lembre que, como partimos apenas da equação do balanço de energia e a hipótese de interações locais, ainda não adicionamos o componente estocástico à dinâmica dos fluxos de energia. Como mencionamos anteriormente, este componente se faz necessário para a existência de intermitência, pois do contrário o sistema de equações (3.23) relaxa exponencialmente para a solução de equilíbrio $\epsilon_i = \epsilon_0$. Ou seja, na ausência de ruído, a dinâmica dada em (3.23) reproduz a teoria K41 em que o fluxo de energia é constante, como já mencionamos. Na próxima seção, vamos inserir ruído nas equações de modo a gerar intermitência no modelo. A partir do sistema que já temos, vamos deduzir qual seria a forma mais natural de um ruído para os fluxos de energia que obedeça às mesmas condições física do nosso sistema determinístico (3.23).

3.2.2 Inserindo Ruído

Nesta subseção, vamos procurar introduzir no sistema dinâmico (3.23) termos de ruído que tenham certas propriedades físicas compartilhadas pelos termos determinísticos. Para tanto, vamos primeiro listar condições físicas necessárias e suficientes a partir das quais podemos deduzir o sistema de equações (3.23). Em seguida, vamos aplicar essas mesmas condições a um sistema de equações diferenciais estocásticas, determinando assim o tipo de ruído que preserva estas características.

Inicialmente, note que para um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\frac{d}{dt} \epsilon_i = F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t), \quad (3.24)$$

com $i = 1, \dots, N$, ficar no formato da (3.23), ele precisa satisfazer as seguintes condições:

1) Simetria de translação temporal

$$\partial_t F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = 0. \quad (3.25)$$

2) Interações locais

$$F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N) = F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i). \quad (3.26)$$

3) Invariância de escala

$$F_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \lambda F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i). \quad (3.27)$$

4) Condição de equilíbrio

$$F_i(\epsilon, \epsilon) = 0. \quad (3.28)$$

5) Fluxo de energia unidirecional

$$\epsilon_i \geq 0 \quad \forall t. \quad (3.29)$$

A condição 1 foi herdada das equações de Navier-Stokes. As condições 2 e 5 surgiram a partir da fenomenologia da cascata, enquanto as condições 3 e 4 surgiram a partir da combinação da equação de balanço de energia a nossa da hipótese de interação local. Pode-se mostrar facilmente que o único sistema de equações, com F_i analítica, que satisfaz as cinco condições acima é idêntico à eq. (3.23). A demonstração será dada mais adiante, quando também inserirmos o termo estocástico. Nossa estratégia de modelagem é simples: a partir de uma variável determinística que gostaríamos de promover a variável estocástica, resgatamos condições necessárias e suficientes satisfeitas por sua dinâmica e obrigamos a parte aleatória da dinâmica a satisfazer condições análogas.

No entanto, um comentário precisa ser feito sobre esta estratégia. Dividir um sistema de equações em um conjunto de condições necessárias e suficientes e aplicá-lo a um sistema estocástico pode ser feito de mais de uma maneira. A maneira que escolhemos possui uma certa arbitrariedade. Por exemplo, a condição 4 poderia ser aplicada tanto para a função F quanto para o termo de ruído, mas resolvemos interpretá-la como uma condição válida apenas para o termo determinístico por possuir maior apelo fenomenológico. Esta relativa liberdade que surge quando generalizamos um modelo determinístico para um modelo estocástico precisa ser trabalhada com cuidado para que o modelo estocástico continue trazendo soluções fisicamente razoáveis. Em termos matemáticos, poderíamos começar a introdução do modelo a partir da proposição (3.1) abaixo, mas perderíamos toda a base fenomenológica que é fisicamente relevante, sobretudo nesta área de pesquisa.

Aplicando nossa estratégia, vamos começar escrevendo novamente as condições anteriores do ponto de vista estocástico. Seja um sistema de equações diferenciais estocásticas do tipo

$$d\epsilon_i = F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dt + G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dW, \quad (3.30)$$

onde queremos satisfazer as condições:

1) Simetria de translação temporal

$$\partial_t F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = \partial_t G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = 0. \quad (3.31)$$

2) Interações Locais

$$F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N) = F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i); \quad G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N) = G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i). \quad (3.32)$$

3) Invariância de escala

$$F_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \lambda F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i), \quad (3.33)$$

$$G_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \lambda G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i). \quad (3.34)$$

4) Condição de Equilíbrio

$$\epsilon_i = \epsilon_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{d}{dt} \epsilon_i \right\rangle = 0. \quad (3.35)$$

5) Fluxo de energia unidirecional

$$P(\epsilon_i < 0) = 0, \quad \forall t > 0, \text{ se } \epsilon_i(t=0) \geq 0. \quad (3.36)$$

Onde “ $\langle \rangle$ ” significa média estatística e $P(X)$ significa probabilidade do evento X acontecer. Podemos agora demonstrar a proposição que relaciona as condições acima a um único modelo estocástico.

Proposição 3.1. *Um sistema de equações diferenciais estocásticas do tipo*

$$d\epsilon_i = F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dt + G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dW_i, \quad (3.37)$$

com $i = 1, \dots, N$ e com F_i e G_i analíticas, satisfaz as condições (1) – (5) se, e somente se, ele for da forma

$$d\epsilon_i = -\gamma_i(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i \epsilon_i dW_i, \quad (3.38)$$

onde γ_i e κ_i são constantes reais positivas.

Demonstração. Da simetria de translação temporal e das interações locais, o sistema de equações passa a ser escrito como

$$d\epsilon_i = F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i)dt + G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i)dW_i. \quad (3.39)$$

Da analiticidade das funções F e G , aplicamos uma derivada em λ na condição de invariância de escala e calculamos o valor da equação em $\lambda = 0$, obtendo

$$F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) = \partial_\lambda F_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \epsilon_{i-1} [\partial_{\epsilon_{i-1}} F_i]_{\epsilon_{i-1}=\epsilon_i=0} + \epsilon_i [\partial_{\epsilon_i} F_i]_{\epsilon_{i-1}=\epsilon_i=0}, \quad (3.40)$$

o que implica em

$$F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) = A_i\epsilon_i + B_i\epsilon_{i-1}. \quad (3.41)$$

O mesmo pode ser mostrado para a função G :

$$G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) = C_i\epsilon_i + D_i\epsilon_{i-1}. \quad (3.42)$$

Inserindo a condição de equilíbrio que é equivalente à expressão $F_i(\epsilon, \epsilon) = 0$, obtemos

$$A_i + B_i = 0. \quad (3.43)$$

Com essas condições, nosso sistema (3.39) ficou da forma

$$d\epsilon_i = B_i(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)dt + [C_i\epsilon_i + D_i\epsilon_{i-1}]dW_i. \quad (3.44)$$

Finalmente, vamos utilizar a condição do fluxo de energia unidirecional, ou ausência de refluxo de energia, $\epsilon_i \geq 0$, que garante que temos uma cascata direta, isto é, o fluxo de energia se dá das maiores para as menores escalas. Para obter as condições que garantem que $\epsilon_i \geq 0$, note que como o processo é contínuo, se a variável ϵ_i atingisse um valor menor que zero, ela deveria ter passado pelo zero em algum instante de tempo anterior. Suponha então que $\epsilon_i = 0$ em algum momento. Neste instante, de acordo com (3.44), seu incremento é dado por

$$d\epsilon_i = B_i\epsilon_{i-1}dt + D_i\epsilon_{i-1}dW_i \quad (3.45)$$

$$= \epsilon_{i-1}[B_i dt + D_i dW_i]. \quad (3.46)$$

Lembremos agora que o incremento $dW_i(t)$ de um processo de Wiener é uma variável aleatória gaussiana com variância dt . Vemos assim que a única maneira de garantir que o termo entre colchetes em (3.46) seja sempre (i.e., com probabilidade 1) não negativo é se escolhermos

$$D_i = 0; \quad B_i > 0. \quad (3.47)$$

Nessas condições, temos então que $\epsilon_i \geq 0$ com probabilidade 1. Usando (3.47) em (3.44), obtemos o seguinte sistema

$$d\epsilon_i(t) = -\gamma_i(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i\epsilon_i dW_i(t), \quad (3.48)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, que corresponde ao nosso modelo proposto em (3.5).

□

Vamos discutir a seguir algumas propriedades gerais do modelo. No próximo capítulo, faremos uma hipótese sobre a separação dos tempos característicos das flutuações em cada escala, a partir da qual será possível obter a densidade de probabilidade $p(\epsilon_N)$.

3.3 Auto-Correlação Temporal do Fluxo de Energia

O fluxo de energia no nosso modelo possui uma dinâmica bem particular, que obriga que as flutuações do fluxo de energia ϵ , em cada escala espacial, possuam correlação temporal. A quantidade que mensura este tipo de fenômeno é chamada de auto-correlação e funciona de maneira idêntica à correlação estatística entre variáveis aleatórias. A única diferença é que as variáveis aleatórias consideradas no caso de auto-correlação são as mesmas, só que medidas em instantes diferentes.

Mais especificamente, definimos a auto-correlação, $C(\tau)$, de um processo estocástico $\epsilon(t)$ através da seguinte fórmula

$$C(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \epsilon(t + \tau)\epsilon(t) \rangle - \langle \epsilon(t + \tau) \rangle \langle \epsilon(t) \rangle}{\langle \epsilon(t) \rangle^2}. \quad (3.49)$$

Com $\tau > 0$. Antes de demonstrarmos uma proposição sobre a auto-correlação do fluxo de energia no nosso modelo, precisamos de um lema que será útil na demonstração:

Lema 3.1 *A função de correlação $D_{j,k}(\tau)$ entre as variáveis ϵ_{j-k} e ϵ_j é definida por*

$$D_{j,k}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle \epsilon_{j-k}(t + \tau)\epsilon_j(t) \rangle - \langle \epsilon_{j-k}(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_j(t) \rangle], \quad (3.50)$$

onde $\epsilon_j(t)$ obedece à eq. (3.5), $j - k$ é um número inteiro positivo e $k > 0$, é dada por

$$D_{j,k}(\tau) = \sum_{i=1}^{j-k} \alpha_i e^{-\gamma_i \tau}. \quad (3.51)$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução em $j - k \equiv k'$. Inicialmente, para

$k' = 1$, ao tomarmos o incremento em relação a τ da eq. (3.50), obtemos

$$dD_{j,j-1}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle d\epsilon_1(t + \tau)\epsilon_j(t) \rangle - \langle d\epsilon_1(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_j(t) \rangle]. \quad (3.52)$$

Inserindo (3.48) na equação acima, temos

$$dD_{j,j-1}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \langle [-\gamma_1(\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)d\tau + \kappa_1\epsilon_1 dW_1(t + \tau)]\epsilon_j(t) \rangle - \langle -\gamma_1(\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)d\tau + \kappa_1\epsilon_1 dW_1(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_j(t) \rangle \}. \quad (3.53)$$

Usando que $\langle dW_i(t + \tau) \rangle = 0$ e a independência entre os incrementos dos processos de Wiener e o processo ϵ_i , $\langle dW_i(t)\epsilon_j \rangle = 0$, temos

$$dD_{j,j-1}(\tau) = -\gamma_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \langle [\epsilon_1(t + \tau)\epsilon_j(t) - \epsilon_1(t + \tau)\langle \epsilon_j(t) \rangle] d\tau + \gamma_1 (\langle \epsilon_0\epsilon_j(t) \rangle - \epsilon_0\langle \epsilon_j(t) \rangle) \} d\tau. \quad (3.54)$$

Podemos identificar o termo entre colchetes como $D_{j,j-1}(\tau)$, definido em (3.50). Além disso, os dois últimos termos da equação acima obviamente se cancelam. Assim, a eq. (3.54) reduz-se a

$$\frac{dD_{j,j-1}}{d\tau} = -\gamma_1 D_{j,j-1}. \quad (3.55)$$

Assim, temos que $D_{j,j-1}(\tau)$ obedece a uma equação diferencial de decaimento exponencial, cuja solução é dada por

$$D_{j,j-1}(\tau) = Ae^{-\gamma_1\tau}, \quad (3.56)$$

e isso completa o caso $k' = 1$ da hipótese de indução.

Para completar o argumento de indução, suponha que o resultado vale para $k' > 1$. Vamos tomar o incremento em relação a τ de $D_{j,k}(\tau)$ definido em (3.50) para $k' > 1$. A equação resultante é análoga à eq. (3.52) e pode ser escrita como

$$dD_{j,k'+1}(\tau) = -\gamma_{j-k'-1} D_{j,k'+1}(\tau) d\tau + \gamma_{j-k'-1} \lim_{t \rightarrow \infty} (\langle \epsilon_{j-k'}(t + \tau)\epsilon_j(t) \rangle - \langle \epsilon_{j-k'}(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_j(t) \rangle) d\tau, \quad (3.57)$$

onde se nota que último termo é proporcional a $D_{j,k'}(\tau)$ e pode ser escrito como a soma de exponenciais por hipótese de indução. Isto implica que $D_{j,k'+1}(\tau)$ satisfaz uma equação do tipo

$$\frac{dD_{j,k'+1}}{d\tau} = -\gamma_{j-k'-1} D_{j,k'+1} + \sum_{i=1}^{k'} \alpha'_i e^{-\gamma_i\tau}. \quad (3.58)$$

Logo, é imediato que $D_{j,k'+1}(\tau)$ pode ser escrito como a soma

$$D_{j,k'+1}(\tau) = \sum_{i=1}^{k'+1} \alpha_i e^{-\gamma_i \tau}, \quad (3.59)$$

para constantes reais α_i , com $i = 1, \dots, k' + 1$, como queríamos demonstrar.

Proposição 3.2. *A auto-correlação definida em (3.49) da variável $\epsilon_j(t)$ cuja dinâmica é dada pela eq. (3.48) pode ser escrita na forma*

$$C_j(\tau) = \sum_{i=1}^j c_i e^{-\gamma_i \tau} \quad (3.60)$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução. Inicialmente, faremos o caso $j = 1$. Vamos tomar a derivada da auto-correlação na eq. (3.49) em relação a τ

$$dC_1(\tau) \sim \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle d\epsilon_1(t + \tau)\epsilon_1(t) \rangle - \langle d\epsilon_1(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_1(t) \rangle], \quad (3.61)$$

onde \sim significa proporcionalidade. Usando (3.38), a relação acima resulta em

$$\begin{aligned} dC_1(\tau) \sim \lim_{t \rightarrow \infty} \{ & \langle (-\gamma_1(\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)d\tau + \kappa_1\epsilon_1 dW_1(t + \tau))\epsilon_1(t) \rangle \\ & - \langle -\gamma_1(\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)d\tau + \kappa_1\epsilon_1 dW_1(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_1(t) \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Usando a independência entre os incrementos dos processos de Wiener e as demais variáveis, ficamos com

$$dC_1(\tau) \sim -\gamma_1 \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle (\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)\epsilon_1(t) \rangle - \langle (\epsilon_1(t + \tau) - \epsilon_0)d\tau \rangle \langle \epsilon_1(t) \rangle]. \quad (3.63)$$

Utilizando a definição (3.49), obtemos

$$dC_1(\tau) \sim -\gamma_1 C_1(\tau) d\tau + \gamma_1 \lim_{t \rightarrow \infty} (\langle \epsilon_0 \epsilon_1(t) \rangle - \langle \epsilon_0 \rangle \langle \epsilon_1(t) \rangle) d\tau. \quad (3.64)$$

Como o último termo da equação acima é zero, dado que ϵ_0 é constante, isto implica em um decaimento exponencial para $C_1(\tau)$ na forma

$$C_1(\tau) = A e^{-\gamma_1 \tau}, \quad (3.65)$$

onde A é uma constante real. Para a etapa seguinte da indução, considere que a fórmula

é válida para um dado $j > 1$. Vamos mostrar que ela será válida para $j + 1$. Para isso, tomamos o incremento em relação a τ da definição (3.49) e obtemos de maneira análoga ao caso $j = 1$

$$dC_j(\tau) = -\gamma_j C_1(\tau) d\tau + \gamma_j \lim_{t \rightarrow \infty} (\langle \epsilon_{j-1}(t + \tau) \epsilon_j(t) \rangle - \langle \epsilon_{j-1}(t + \tau) \rangle \langle \epsilon_j(t) \rangle) d\tau. \quad (3.66)$$

Podemos identificar o último termo da equação acima como $D_{j,1}(\tau)$ e utilizar o Lema 3.1 para obter

$$\frac{dC_j}{d\tau} = -\gamma_j C_j + \sum_{i=1}^{j-1} c'_i e^{-\gamma_i \tau}, \quad (3.67)$$

cuja solução é

$$C_j(\tau) = \sum_{i=1}^j c_i e^{-\gamma_i \tau}, \quad (3.68)$$

com c_i constantes reais. Note que para valores de τ grande, apenas um termo da soma (3.68) será relevante. Em outras palavras, o termo que possui o menor γ_i dominará a soma no limite de tempo infinito. \square

3.4 Flutuações de Energia

Nesta seção, mostraremos que, apesar da energia total do sistema ser conservada em média durante a passagem das escalas maiores para a escala de dissipação, existem flutuações no valor desta grandeza.

Considere nosso modelo dinâmico hierárquico de N escalas para o fluxo de energia

$$d\epsilon_i = -\gamma_i(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i \epsilon_i dW_i, \quad (3.69)$$

para $i = 1, \dots, N$. De acordo com esta visão da cascata de energia, a energia total do sistema é dada pela soma das energias individuais em cada uma das escalas.

$$E = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N. \quad (3.70)$$

Logo, a taxa de variação temporal da energia é dada por

$$\partial_t E = \partial_t \xi_1 + \partial_t \xi_2 + \dots + \partial_t \xi_N. \quad (3.71)$$

Substituindo a (3.13) na equação acima, obtemos

$$\partial_t E = (\epsilon_0 - \epsilon_1) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \dots + (\epsilon_{N-1} - \epsilon_N), \quad (3.72)$$

o que implica em

$$\partial_t E = \epsilon_0 - \epsilon_N, \quad (3.73)$$

que é a diferença entre a potência injetada, ϵ_0 , no sistema e o fluxo de energia dissipada. Sabemos que o fluxo de energia da escala integral é aproximadamente constante, pois é controlado experimentalmente. O fluxo na última escala, por outro lado, muda com o tempo e possui uma distribuição de equilíbrio. Nossa primeira tarefa é mostrar que a média das flutuações de energia é zero, logo não precisamos nos preocupar com a distribuição completa de ϵ_N neste primeiro cálculo.

Considere a equação do fluxo para a última escala espacial

$$d\epsilon_N = -\gamma_N(\epsilon_N - \epsilon_{N-1})dt + \kappa_N \epsilon_N dW_N. \quad (3.74)$$

Nosso objetivo é encontrar a média desta variável. Tomando a média em ambos os lados da equação e aplicando a definição do incremento do processo de Wiener para anular o último termo, ficamos com

$$\left\langle \frac{d\epsilon_N}{dt} \right\rangle = -\gamma_N \langle \epsilon_N - \epsilon_{N-1} \rangle. \quad (3.75)$$

O caso $N = 1$ da equação acima possui solução imediata dada por

$$\langle \epsilon_1(t) \rangle = \epsilon_0 + e^{-\gamma_1 t} (\epsilon_1(0) - \epsilon_0). \quad (3.76)$$

cuja solução de equilíbrio ($t \rightarrow \infty$) é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \epsilon_1(t) \rangle = \epsilon_0. \quad (3.77)$$

Assim, a variável $\epsilon_1(t)$ tende a ϵ_0 no equilíbrio. Por indução, se a variável ϵ_{N-1} tende a ϵ_0 no equilíbrio, então a eq. (3.75), no limite $t \rightarrow \infty$, se reduz a

$$\left\langle \frac{d\epsilon_N}{dt} \right\rangle = -\gamma_N (\langle \epsilon_N \rangle - \epsilon_0), \quad (3.78)$$

cuja solução é imediata

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \epsilon_N(t) \rangle = \epsilon_0. \quad (3.79)$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Finalmente, utilizamos este resultado em 3.73, obtemos a média da taxa de variação da energia total do sistema como

$$\langle \partial_t E \rangle = 0. \quad (3.80)$$

Ou seja, em média, a energia armazenada no sistema é constante. Vamos agora mostrar que a energia deste modelo flutua em torno de um valor médio. Para isso, vamos calcular o segundo momento da grandeza $\partial_t E$:

$$\langle (\partial_t E)^2 \rangle = \langle (\epsilon_0 - \epsilon_N)^2 \rangle. \quad (3.81)$$

Antes de escrevermos o resultado geral, que precisará de considerações sobre a densidade de probabilidade, vamos começar pelo caso particular de $N = 1$. Neste caso, o cálculo da variância no equilíbrio pode ser obtido usando a fórmula de Itô (Apêndice A) para a função $f = \epsilon_1^2$:

$$d\epsilon_1^2 = 2(-\gamma_1(\epsilon_1^2 - \epsilon_0\epsilon_1)dt + \kappa_1\epsilon_1^2 dW_1) + (\kappa_1\epsilon_1)^2 dt. \quad (3.82)$$

Tomando a média, temos

$$\left\langle \frac{d\epsilon_1^2}{dt} \right\rangle = 2\gamma_1 \left[\left(\frac{\kappa_1^2}{2\gamma_1} - 1 \right) \langle \epsilon_1^2 \rangle - \epsilon_0^2 \right]. \quad (3.83)$$

No equilíbrio, ($t \rightarrow \infty$), obtemos

$$\langle \epsilon_1^2 \rangle = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right) \epsilon_0^2. \quad (3.84)$$

onde

$$\beta_1 = \frac{2\gamma_1}{\kappa_1^2}. \quad (3.85)$$

Substituindo (3.84) na (3.81), ficamos com

$$\langle (\partial_t E)^2 \rangle = \frac{\epsilon_0^2}{\beta_1 - 1}. \quad (3.86)$$

Vemos assim que o parâmetro β_1 é responsável pela flutuação em torno da média da energia acumulada no sistema. Ele deve ser maior que 1 para que o fluxo tenha

variância finita. Note que o limite de $\beta \rightarrow \infty$ leva a ausência de flutuações de energia e, portanto, voltamos para o caso de K41. Este limite é intuitivo pois o parâmetro β mede a razão entre a parte determinística da dinâmica do fluxo de energia em relação à parte estocástica. O limite de β_1 infinito implica que a distribuição do fluxo de energia tende a um delta de Dirac centrado no fluxo constante ϵ_0 e, portanto, terá variância zero, como ficará claro no capítulo seguinte ao considerarmos a equação de Fokker-Planck. Veremos também que para um número de níveis N qualquer, a flutuação da energia total é dada por

$$\langle (\partial_t E)^2 \rangle = \left[\left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^N - 1 \right] \epsilon_0^2, \quad (3.87)$$

A fórmula acima, entretanto, só poderá ser mostrada com o auxílio da distribuição para o fluxo de energia, que será o ponto principal do próximo capítulo.

3.5 Solução Exata

Nesta seção, vamos resolver exatamente o sistema de equações do nosso modelo hierárquico dado em (3.5). Vamos começar pelo caso de uma escala ($N = 1$), cuja solução é amplamente conhecida. Vamos seguir a dedução e a notação da Ref. [58]. A equação diferencial estocástica considerada,

$$d\epsilon_1 = (-\gamma_1 dt + \kappa_1 dW)\epsilon_1 + \gamma_1 \epsilon_0 dt, \quad (3.88)$$

é do tipo inhomogênea, pois existe um termo que não depende da variável considerada. A solução da equação acima é imediata. Para encontrá-la, precisamos da equação estocástica acima escrita no caso homogêneo, dada por

$$d\epsilon_1 = (-\gamma_1 dt + \kappa_1 dW)\epsilon_1, \quad (3.89)$$

cuja solução exata é

$$\phi_1(t) = \exp \left(\int_0^t \left[-\gamma_1 - \frac{\kappa_1^2}{2} \right] dt' + \int_0^t \kappa_1 dW \right). \quad (3.90)$$

Resolvendo as integrais explicitamente, obtemos

$$\phi_1(t) = \exp\left(-\left[\gamma_1 + \frac{\kappa_1^2}{2}\right]t + \kappa_1 W\right). \quad (3.91)$$

Agora, vamos relacionar este resultado homogêneo com o caso geral do modelo (3.5). Definindo a variável $z(t)$ como

$$z(t) = \epsilon_1(t)[\phi(t)]^{-1}, \quad (3.92)$$

Vamos derivar $z(t)$ e, utilizando as regras de Itô, obtemos,

$$\frac{dz}{dt} = \gamma_1 \epsilon_0 \phi_t^{-1}, \quad (3.93)$$

que é diretamente integrável. Portanto, a solução da equação acima é

$$z = \int_0^t \gamma_1 \epsilon_0 \phi_t^{-1} dt. \quad (3.94)$$

Vamos agora substituir a (3.92) na equação acima e obter

$$\epsilon_1(t) = \phi(t)\left[\epsilon_1(0) + \int_0^t \phi_{t'}^{-1} \gamma_1 \epsilon_0 dt'\right]. \quad (3.95)$$

Esta é a solução exata do processo estocástico $\epsilon_1(t)$, com $\phi(t)$ dada por (3.91). A dedução acima foi feita com a hipótese de que as funções dependentes do tempo que aparecem no processo estocástico não são aleatórias. Esta hipótese é satisfeita pelo caso $N = 1$, visto que o termo não homogêneo é constante. Para os casos seguintes, $N > 1$, em que aparecem processos estocásticos com o termo não-homogêneo, ϵ_{N-1} , podemos repetir a mesma dedução. A única diferença é que a integração no tempo da eq. (3.95) será mais difícil de resolver. O resultado final pode ser escrito na forma

$$\epsilon_i(t) = \phi(t) \left[\epsilon_i(0) + \int_0^t \phi_{t'}^{-1} \gamma_i \epsilon_{i-1}(t') dt' \right] \quad (3.96)$$

$$\phi_i(t) = \exp\left(\int_0^t \left[-\gamma_i - \frac{\kappa_i^2}{2}\right] dt' + \int_0^t \kappa_i dW_i\right), \quad (3.97)$$

A solução fica dada iterativamente em termos do fluxo da camada imediatamente anterior. Podemos substituir as soluções anteriores pela mesma fórmula até chegarmos

à maior escala, em que o passo seguinte será desnecessário pois o nível zero possui fluxo constante. Como argumentamos anteriormente, não há praticidade desta solução geral na obtenção da distribuição de ϵ_N , que é um dos nossos objetivos neste trabalho. Diante deste problema, decidimos lançar mão de uma hipótese de separação entre as escalas temporais, e permite reduzir o cálculo da distribuição de equilíbrio para um sistema de N níveis a uma sequência de integrações. Este assunto será explorado no próximo capítulo.

As Distribuições de Equilíbrio do Modelo

Neste capítulo, vamos inicialmente calcular explicitamente a fdp do fluxo de energia do nosso modelo dinâmico para intermitência com uma escala ($N = 1$). Este cálculo não faz uso de nenhuma aproximação e assemelha-se a um resultado já conhecido na literatura, obtido a partir de uma equação de Fokker-Planck. Mostraremos que a distribuição de probabilidade desta variável é uma gama invertida. Em seguida, apresentaremos um teorema que diz como calcular a distribuição de equilíbrio de uma variável que faz parte de um sistema de equações diferenciais estocásticas acopladas, como é o caso do nosso modelo, no limite de grande separação temporal entre as variáveis. Este resultado é aplicado diretamente ao nosso modelo, transformando nosso sistema de equações dinâmicas em um modelo de equilíbrio para os fluxos de energia de cada escala. Por questões didáticas e para manter o trabalho fiel à sequência histórica das descobertas, aplicamos esta idéia de separação temporal ao modelo de uma escala para encontrarmos a distribuição de probabilidade dos incrementos de velocidade. A curva resultante deste procedimento é uma q -gaussiana [59] e já foi encontrada na literatura anteriormente no contexto de econofísica [60] e até mesmo turbulência [16]. Mostramos que esta conhecida função pode ser escrita em termos de uma função hipergeométrica generalizada (${}_1F_0$).

Para o modelo de duas escalas ($N = 2$), calculamos explicitamente a fdp do fluxo de energia $p_2(\epsilon_2)$. Esta fdp, apesar de escrita como uma função conhecida, não foi encontrada na literatura. Similarmente, calculamos a fdp dos incrementos de velocidade e encontramos uma nova distribuição explicitamente que pode ser escrita como uma função hipergeométrica generalizada (${}_2F_0$). Passamos para o caso geral do modelo e encontramos a fdp dos incrementos de velocidade para um número de escalas N qualquer. Estas novas distribuições (${}_NF_0$) formam uma família de fdps com caudas de lei de potência, cujos momentos podem ser calculados facilmente e são generalizações naturais da gaussiana (${}_0F_0$) e da q -gaussiana (${}_1F_0$). Mostraremos que elas ajustam de maneira excelente os dados experimentais de turbulência lagrangeana e euleriana.

Finalmente, vamos mostrar que nosso modelo com N escalas, no limite em que $N \rightarrow \infty$, reproduz uma densidade Log-Normal para o fluxo de energia, assim como pro-

posto por Kolmogorov (K62) para turbulência euleriana e, mais recentemente, aplicado à turbulência lagrangeana [35].

4.1 Distribuições de Probabilidade para o Fluxo de Energia

4.1.1 Modelo de Uma Escala

Nesta seção, partiremos do nosso modelo dinâmico para intermitência e vamos calcular a distribuição de equilíbrio do fluxo de energia para o caso de uma modelo com apenas um nível, ou seja, $N = 1$. Este caso pode ser resolvido analiticamente a partir da equação de Fokker-Planck e, portanto, será abordado inicialmente para ilustrar a teoria.

Considere nossa cascata de energia com apenas uma escala. Fazendo $N = 1$ na eq. (3.2), obtemos a seguinte equação diferencial estocástica para o fluxo de energia ϵ_1 :

$$d\epsilon_1 = -\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon_0)dt + \kappa_1\epsilon_1 dW(t). \quad (4.1)$$

A equação de Fokker-Planck associada a este processo estocástico é uma equação diferencial parcial de segunda ordem para a função densidade de probabilidade, $p_1(\epsilon_1, t)$, dependente do tempo, que pode ser escrita como [58]

$$\partial_t p_1 + \partial_\epsilon [\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon_0)p_1] + \frac{1}{2} \partial_{\epsilon_1}^2 [\kappa_1^2 \epsilon_1^2 p_1] = 0 \quad (4.2)$$

Como estamos interessados na distribuição de equilíbrio, vamos definir

$$p_1(\epsilon_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(\epsilon_1, t), \quad (4.3)$$

e resolver a equação de Fokker-Planck independente do tempo, que resulta em

$$\beta_1 \partial_\epsilon [(\epsilon_1 - \epsilon_0)p_1(\epsilon_1)] + \partial_{\epsilon_1}^2 [\epsilon_1^2 p_1(\epsilon_1)] = 0, \quad (4.4)$$

onde o parâmetro β_1 é definido como

$$\beta_1 = \frac{2\gamma_1}{\kappa_1^2}. \quad (4.5)$$

A solução desta equação particular já é conhecida na literatura. Trata-se de uma distribuição gama invertida [61]

$$p_1(\epsilon_1) = \frac{(\beta\epsilon_0)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \epsilon_1^{-\beta-2} e^{-\frac{\beta\epsilon_0}{\epsilon_1}}, \quad (4.6)$$

Esta fdp vai a zero muito rápido, quando ϵ_1 tende a zero, e cai como uma lei de potência quando ϵ_1 tende a infinito. Esta lei de potência, como veremos, será responsável pelo relativo sucesso em explicar a intermitência nas flutuações de velocidade.

Pode-se verificar diretamente que os momentos desta distribuição são dados por

$$\langle \epsilon_1^p \rangle = \epsilon_0^p \prod_{i=1}^{p-1} \frac{\beta_1}{\beta_1 - i}. \quad (4.7)$$

É imediato verificar que a expressão acima é finita apenas se $\beta_1 > p - 1$, o que concorda com o comportamento assintótico dado por uma lei de potência. Desta forma, a distribuição não possui todos os momentos finitos. Esta fórmula será fundamental no cálculo dos momentos da distribuição para o caso mais geral $N > 1$, pois ela sofrerá apenas uma modificação que será deduzida mais adiante neste capítulo.

4.1.2 Modelo de Duas Escalas

Nesta seção, vamos calcular a fdp do fluxo de energia $p_2(\epsilon_2)$ para o modelo de duas escalas espaciais ($N = 2$). Este cálculo não foi encontrado anteriormente na literatura e o resultado é uma distribuição de probabilidade em termos de funções tabeladas, como veremos.

Considere o nosso modelo estocástico com duas escalas espaciais para o fluxo de energia

$$d\epsilon_2 = -\gamma_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)dt + \kappa_2\epsilon_2 dW_2(t), \quad (4.8)$$

$$d\epsilon_1 = -\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon_0)dt + \kappa_1\epsilon_1 dW_1(t), \quad (4.9)$$

onde ϵ_0 é o fluxo constante de energia injetado no sistema. A distribuição do fluxo ϵ_1 é dada pela eq. (4.6) e esta variável atinge o equilíbrio independentemente de ϵ_2 . Neste trabalho, utilizaremos a notação $p(x_t|y_t)$ para denotar a fdp da variável aleatória x_t dado que o valor da variável y_t é mantido constante. A fdp para o fluxo ϵ_2 , dado um valor constante do fluxo ϵ_1 , é dada também por uma distribuição gama invertida.

$$p(\epsilon_2|\epsilon_1) = \frac{(\beta_2\epsilon_1)^{\beta_2+1}}{\Gamma(\beta_2+1)} \epsilon_2^{-\beta_2-2} e^{-\frac{\beta_2\epsilon_1}{\epsilon_2}}, \quad (4.10)$$

Uma vez que a eq. (4.8), considerando ϵ_1 constante, tem a mesma forma da eq. (4.1), que como vimos resulta em uma distribuição gama invertida. Vamos agora utilizar uma hipótese de grande separação temporal entre as constantes

$$\gamma_2 \gg \gamma_1, \quad \kappa_2 \gg \kappa_1. \quad (4.11)$$

Esta hipótese é equivalente a dizer que os processos das escalas espaciais menores da cascata ocorrem com uma velocidade muito mais rápida que os processos das escalas maiores. Em outras palavras, o tempo característico γ_2^{-1} para a dinâmica do fluxo ϵ_2 é muito menor que o tempo característico γ_1^{-1} associado às flutuações de ϵ_1 . Desta maneira, podemos considerar que o fluxo de energia da escala menor, ϵ_2 , atinge o equilíbrio tão rápido que o fluxo de energia da escala anterior, ϵ_1 , pode ser aproximado por uma constante. Essa aproximação é análoga à aproximação de Bohr-Oppenheimer usada na mecânica quântica [61]. Nesse caso, a distribuição de quase-equilíbrio do fluxo ϵ_2 é dada pela probabilidade $p(\epsilon_2|\epsilon_1)$. Quando somamos todos os valores de equilíbrio da variável ϵ_1 , obtemos

$$p_2(\epsilon_2) = \int_0^\infty p(\epsilon_2|\epsilon_1)p_1(\epsilon_1)d\epsilon_1. \quad (4.12)$$

Esta equação é um caso particular de um teorema que será demonstrado mais adiante neste capítulo. Inserindo (4.10) em (4.12) e realizando uma sequência de mudança de variáveis, pode-se mostrar que a equação acima reduz-se a

$$p_2(\epsilon_2) = C\epsilon_2^{-2-\frac{\beta_2+\beta_1}{2}} K_{\beta_2-\beta_1} \left(2\sqrt{\frac{\beta_2\beta_1\epsilon_0}{\epsilon_2}} \right), \quad (4.13)$$

onde $K_a(x)$ é a função de Bessel Modificada de segunda espécie e C é uma constante de normalização dada por

$$C = 2 \left(\frac{\beta_1\epsilon_0}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2-\beta_1}{2}} \left[\frac{\beta_2^{\beta_2+1}}{\Gamma(\beta_2+1)} \right] \left[\frac{(\beta_1\epsilon_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \right]. \quad (4.14)$$

Esta distribuição pode ser considerada uma generalização da distribuição gama invertida. Seus momentos são calculados a partir da eq. (4.12)

$$\langle \epsilon_2^p \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty (\epsilon_2)^p p(\epsilon_2|\epsilon_1)p_1(\epsilon_1)d\epsilon_1d\epsilon_2. \quad (4.15)$$

Resolvendo a integral na variável ϵ_2 e utilizando a eq.(4.10), obtemos

$$\langle \epsilon_2^p \rangle = \left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{\beta_2}{\beta_2 - i} \right) \int_0^\infty \epsilon_1^p p(\epsilon_1) d\epsilon_1, \quad (4.16)$$

onde a integral resultante pode ser resolvida de maneira análoga, resultando em

$$\langle \epsilon_2^p \rangle = \epsilon_0^p \left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{\beta_2}{\beta_2 - i} \right) \left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{\beta_1}{\beta_1 - i} \right), \quad (4.17)$$

onde p é um número natural. Como vimos acima, momentos desta distribuição podem ser escritos como o produto dos momentos das distribuições individuais das variáveis, $p_2(\epsilon_2|\epsilon_1)$ e $p_1(\epsilon_1|\epsilon_0)$. Esta propriedade não é uma característica apenas do modelo de duas escalas. Como veremos, esta regra do produto será encontrada também no modelo geral para um N qualquer.

Para obter a cauda da distribuição $p_2(\epsilon_2)$, vamos utilizar o comportamento assintótico da função de Bessel de segundo espécie, dado por [62]

$$K_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^{-\nu} - (z/2)^\nu}{\sin(\pi\nu)}. \quad (4.18)$$

Substituindo a equação acima em (4.13), obtemos o comportamento da distribuição para valores grandes de ϵ_2

$$p_2(\epsilon_2) \sim \epsilon_2^{-2-\beta_1} (\epsilon_0 \beta_1 \beta_2)^{-\frac{\beta_2+\beta_1}{2}} - \epsilon_2^{-2-\beta_2} (\epsilon_0 \beta_1 \beta_2)^{-\frac{-\beta_1+\beta_2}{2}}, \quad \epsilon_2 \gg 1. \quad (4.19)$$

Ou seja, a distribuição $p_2(\epsilon_2)$ possui caudas do tipo lei de potência. Esta propriedade também será verdadeira para toda a família de distribuições $p_N(\epsilon_N)$.

4.1.3 Modelo Geral com N Escalas

Nesta seção, vamos calcular $p(\epsilon_N)$ no limite de grande separação temporal entre as escalas espaciais, da mesma maneira que fizemos para o caso $N = 2$, na subseção anterior. Considere nossa cascata de energia com N escalas, onde relembremos o seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas apresentados em (3.5):

$$d\epsilon_1 = -\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon_0)dt + \kappa_1 \epsilon_1 dW_1, \quad (4.20)$$

$$d\epsilon_2 = -\gamma_2(\epsilon_2 - \epsilon_1)dt + \kappa_2 \epsilon_2 dW_2, \quad (4.21)$$

$$\vdots \quad (4.22)$$

$$d\epsilon_N = -\gamma_N(\epsilon_N - \epsilon_{N-1})dt + \kappa_N \epsilon_N dW_N. \quad (4.23)$$

Definindo o tempo característico $\tau_i = \gamma_i^{-1}$ para a dinâmica do fluxo ϵ_i , vamos agora inserir no modelo a condição de separação temporal entre as escalas, que pode ser escrita como

$$\tau_1 \gg \tau_2 \gg \dots \gg \tau_N. \quad (4.24)$$

Esta condição significa que o tempo característico da dinâmica nas escalas menores é muito pequeno quando comparado ao tempo característico das escalas maiores. Na prática, esta condição permite que a fdp de equilíbrio do fluxo de energia da menor escala, ϵ_N , possa ser escrita em uma forma integral simples, a exemplo do que fizemos para o caso $N = 2$.

A idéia por trás desta aproximação é simples. Considere uma variável estocástica lenta ϵ_1 . A variável ϵ_2 , por ser muito mais rápida, atinge o equilíbrio antes que a variável ϵ_1 tenha tido tempo para variar apreciavelmente. Assim, a distribuição de equilíbrio $p_2(\epsilon_2)$ é dada pela expressão (4.12). De maneira análoga, se um processo ϵ_3 é muito mais rápido que o processo ϵ_2 , ele atingirá o equilíbrio para um dado valor da variável ϵ_2 . Como os valores de ϵ_2 possuem uma distribuição $p(\epsilon_2)$, obtemos a distribuição aproximada $p_3(\epsilon_3)$

$$p_3(\epsilon_3) = \int p_3(\epsilon_3|\epsilon_2)p(\epsilon_2)d\epsilon_2. \quad (4.25)$$

Substituindo a fórmula de $p_2(\epsilon_2)$ dada na eq. (4.12) na equação acima, obtemos

$$p_3(\epsilon_3) = \int \int p_3(\epsilon_3|\epsilon_2)p_2(\epsilon_2|\epsilon_1)p_1(\epsilon_1)d\epsilon_2d\epsilon_1. \quad (4.26)$$

Esta idéia pode ser generalizada para o caso de N escalas, resultando na fórmula

$$p_N(\epsilon_N) = \int \dots \int \prod_{i=1}^N p_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1})d\epsilon_i, \quad (4.27)$$

que será formalizada com a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Seja $X_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) um conjunto de processos estocásticos da forma*

$$dX_i(t) = a_i f(X_i, X_{i-1})dt + b_i g(X_i, X_{i-1})dW(t), \quad (4.28)$$

onde a_i e b_i são números reais e $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções reais contínuas. Então

$$\lim_{\left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \rightarrow \infty\right) \left(\frac{b_i}{b_{i-1}} \rightarrow \infty\right) \left(\frac{a_i^2}{b_i} = \text{cte}\right)} P_N(X_N) = \int \dots \int \prod_{i=1}^N P_i(X_i|X_{i-1}) dX_i, \quad (4.29)$$

onde X_0 é constante, $P_i(X_i|X_{i-1})$ é a distribuição de equilíbrio da variável X_i dado que a variável X_{i-1} é mantida constante e $P_N(X_N)$ é a distribuição marginal de equilíbrio da variável X_N .

A demonstração é dada no Apêndice B. Vamos comentar a demonstração de uma maneira informal. Queremos mostrar que, em uma sequência de processos estocásticos acoplados um a um, a fdp de equilíbrio da variável que está no final da hierarquia pode ser escrita na forma integral mencionada acima, caso cada processo seja muito mais rápido que o processo imediatamente anterior. Para isso, mostramos que podemos dividir a reta real do tempo de uma dada variável como a união de vários intervalos abertos. Estes intervalos foram escolhidos de forma a obedecer a seguinte regra: em cada um deles, a variável anterior X_{N-1} é aproximadamente constante. Colecionamos todos os intervalos que possuem o mesmo valor para essa variável ϵ_{N-1} . Assim, construímos uma série de novos processos estocásticos com saltos (coleção de intervalos abertos) para a variável X_N e, para cada um deles, a variável anterior do sistema, X_{N-1} , é aproximadamente constante. Descobrir a fdp deste processo com saltos é praticamente impossível, a menos que a dinâmica seja muito rápida. Fazendo uso deste limite, em cada intervalo individual, a variável X_N atinge o equilíbrio para um valor constante de X_{N-1} . Somamos as fdps de equilíbrio de cada variável e completamos nosso argumento de indução.

Com a aplicação direta deste teorema, verificamos que a fdp de equilíbrio para o fluxo de energia da menor escala, $p(\epsilon_N)$, pode ser escrita na forma

$$p_N(\epsilon_N) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(\epsilon_N|\epsilon_{N-1})p(\epsilon_{N-1}|\epsilon_{N-2})\dots p(\epsilon_1|\epsilon_0)d\epsilon_{N-1}\dots d\epsilon_1, \quad (4.30)$$

onde $p(\epsilon_i|\epsilon_{i-1})$ é a distribuição gama invertida:

$$p(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) = \frac{(\beta_i \epsilon_{i-1})^{\beta_i+1}}{\Gamma(\beta_i + 1)} \epsilon_i^{-\beta_i-2} e^{-\frac{\beta_i \epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}}. \quad (4.31)$$

A integral em (4.30) foi calculada explicitamente para o caso $N = 2$ eq. (4.13), resultando em uma distribuição envolvendo funções de Bessel modificadas de segunda espécie. A fórmula explícita para o caso $N > 2$, tanto quanto saibamos, não pode ser obtida

analiticamente, entretanto a mesma pode ser facilmente calculada numericamente, como mostraremos adiante.

Algumas propriedades notáveis da distribuição $p_N(\epsilon_N)$ podem ser obtidas. Por exemplo, os seguintes valores esperados podem ser calculados explicitamente, de maneira análoga ao que fizemos para o caso $N = 2$ na eq. (4.15)

$$\langle \epsilon_N^s \rangle = \epsilon_0^s \prod_{i=1}^N \frac{\beta_i^s \Gamma(\beta_i - s + 1)}{\Gamma(\beta_i + 1)}, \quad (4.32)$$

onde s é real, com $s > 1$, e relembramos que $\beta_i = 2\gamma_i/\kappa_i^2$. Esta propriedade pode ser escrita de uma forma mais simples, caso o expoente s seja um inteiro. Neste caso, usando a seguinte propriedade das funções gama:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad (4.33)$$

obtemos a fórmula dos momentos

$$\langle \epsilon_N^p \rangle = \epsilon_0^p \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta_i}{\beta_i - j}, \quad (4.34)$$

com p número natural. Pode-se obter da fórmula acima que os momentos serão finitos se p obedecer à desigualdade

$$p < \min_{\beta_i}(\beta_i + 1). \quad (4.35)$$

Em particular, para a média, temos imediatamente

$$\langle \epsilon_N \rangle = \epsilon_0, \quad (4.36)$$

e para o segundo momento, fazemos $p = 2$ em (4.34), obtemos

$$\langle \epsilon_N^2 \rangle = \epsilon_0^2 \prod_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\beta_i - 1}. \quad (4.37)$$

Podemos combinar as duas equações anteriores para calcular a variância da distribuição $p_N(\epsilon_N)$

$$\text{var}(\epsilon_N) = \langle \epsilon_N^2 \rangle - \langle \epsilon_N \rangle^2 = \epsilon_0^2 \left(\prod_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\beta_i - 1} - 1 \right). \quad (4.38)$$

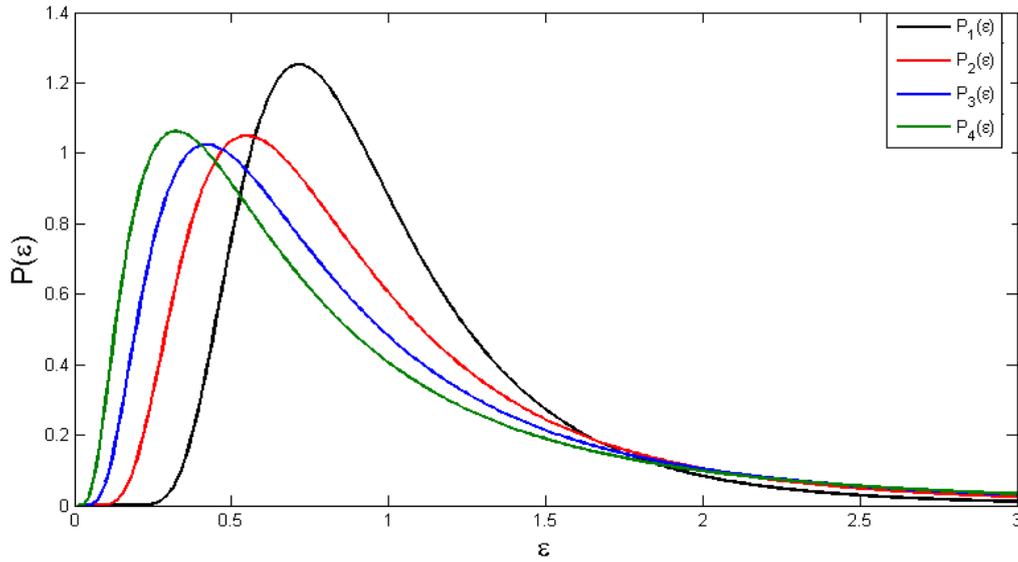


Figura 4.1 Distribuições $p_n(\epsilon)$ com $n = 1, 2, 3$ e 4 . Parâmetros $\beta_i = 5$ para todo i .

Representamos na Figura 4.1 as quatro primeiras distribuições da família $p_N(\epsilon_N)$, tomando $\beta_i = \beta = 5$, para todo i . Perceba que para um mesmo valor de β_i , as distribuições p_N apresentam caudas mais gordas quanto maior o valor de N . Da Figura 4.2 à Figura 4.5, mostramos os gráficos isolados de cada uma das distribuições $p_N(\epsilon_N)$, com $N = 1, 2, 3$ e 4 , ao lado de uma distribuição Log-Normal de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância, para efeitos de comparação. Note que, conforme aumentamos o valor de N , a distribuição p_N se aproxima da distribuição Log-Normal, sendo que as duas serão iguais apenas em um limite especial de cascata contínua ($N \rightarrow \infty$) e ($\beta \rightarrow \infty$), que será considerado mais adiante neste capítulo.

Uma vez obtida a distribuição de equilíbrio $p_N(\epsilon_N)$ do fluxo de energia ϵ_N na última escala da nossa cascata de energia, passaremos agora à discussão dos efeitos da intermitência sobre a distribuição de probabilidade dos incrementos de velocidade. Inicialmente, vamos apresentar na próxima seção alguns argumentos fisicamente razoáveis para mostrar qual a contribuição do fluxo de energia nas flutuações de velocidade da turbulência lagrangeana. O caso da turbulência euleriana será tratado posteriormente.

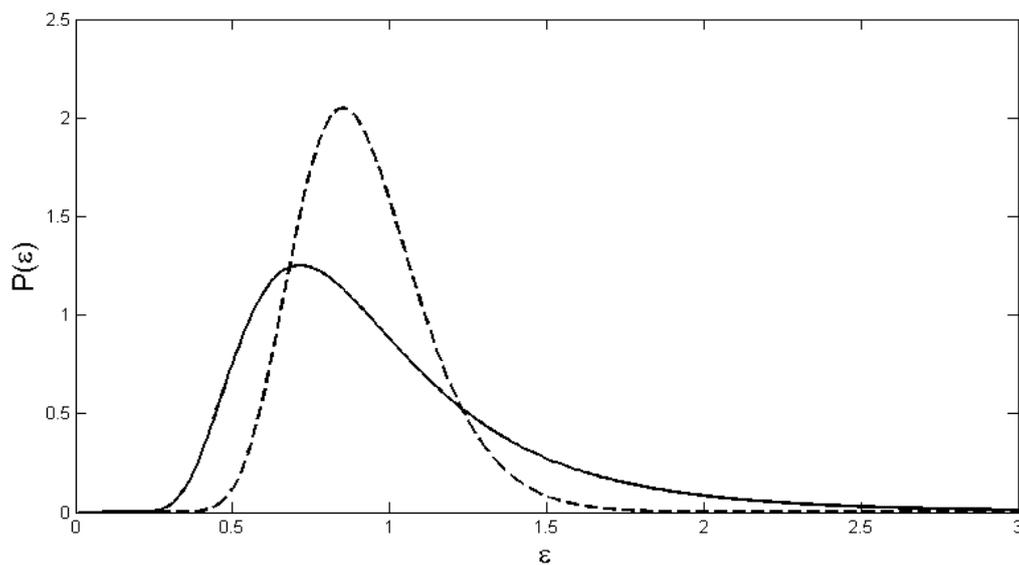


Figura 4.2 Distribuição $p_1(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.

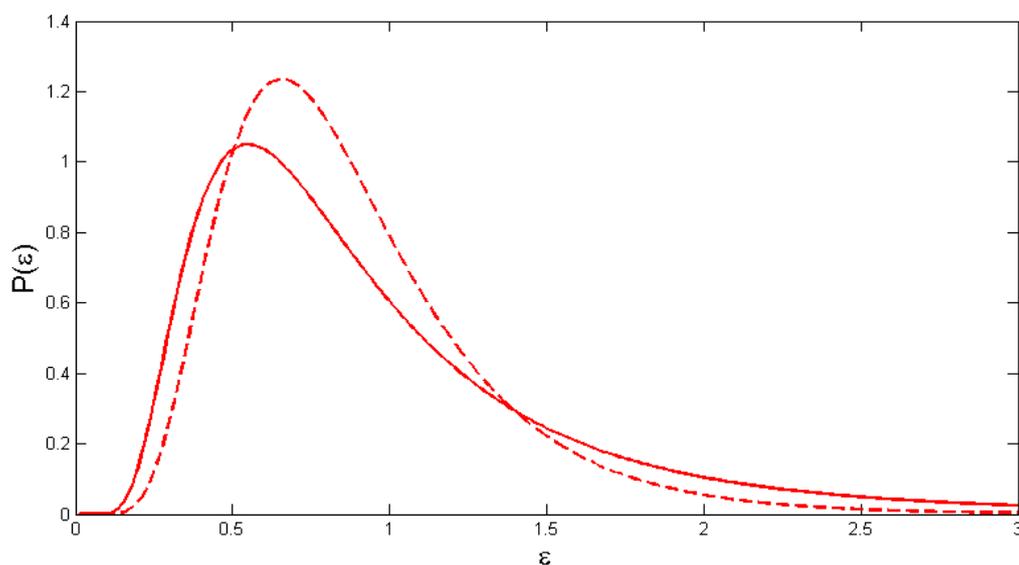


Figura 4.3 Distribuição $p_2(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.

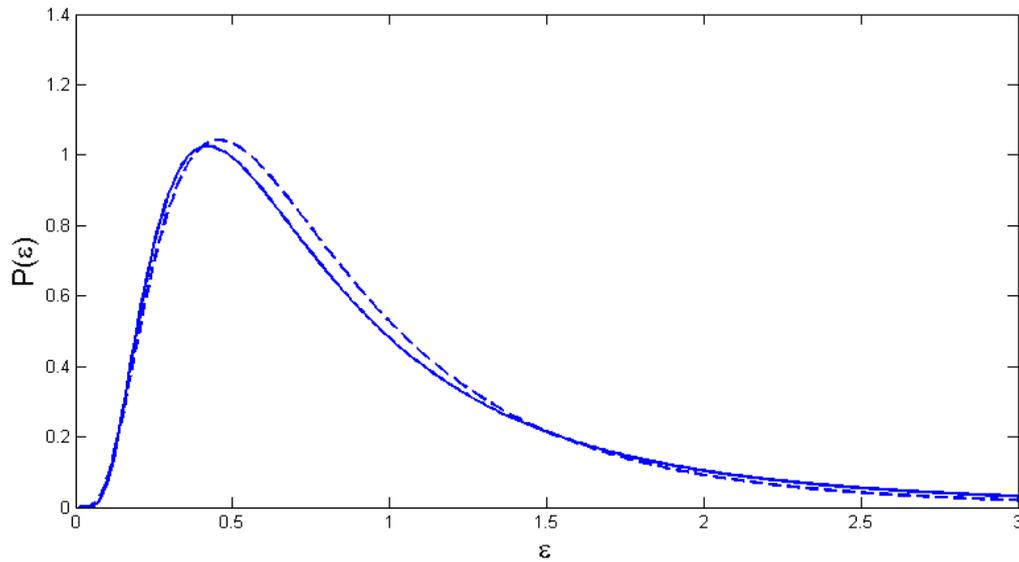


Figura 4.4 Distribuição $p_3(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.

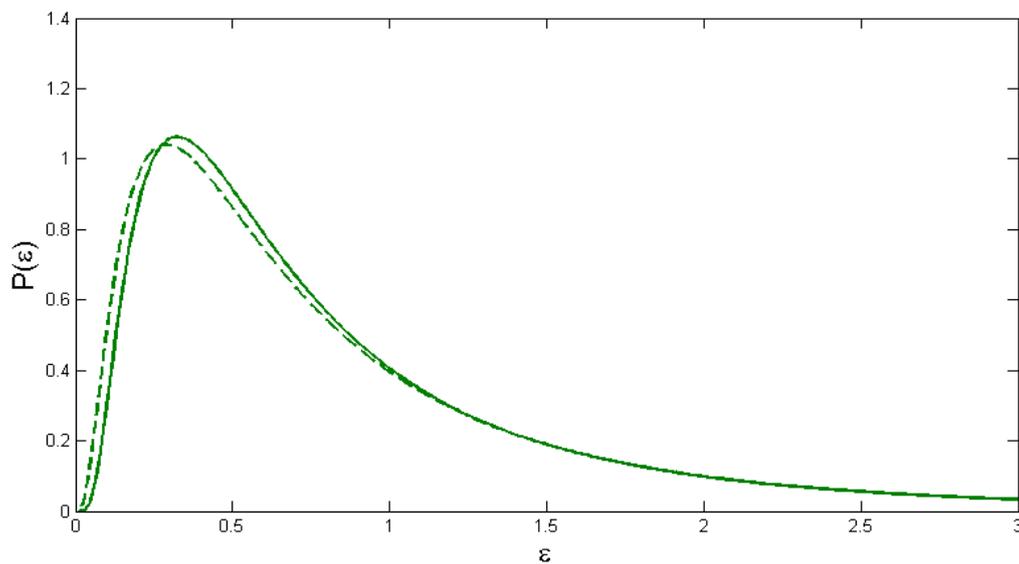


Figura 4.5 Distribuição $p_4(\epsilon)$ (curva contínua), $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 5$ e $\epsilon_0 = 1$, e Log-Normal (curva tracejada) de mesma média, $\langle \epsilon \rangle = 1$, e variância.

4.2 Turbulência Lagrangeana

Nesta etapa, vamos mostrar, no contexto da turbulência lagrangeana, como as variações do fluxo de energia em uma dada escala temporal afetam as flutuações de velocidade nessa escala. Optamos por iniciar o tratamento deste tipo de turbulência pois o formalismo do modelo é mais intuitivo que no caso da turbulência euleriana, na qual a aplicabilidade do modelo também é válida. Inicialmente, vamos considerar o incremento temporal da velocidade de uma partícula do fluido

$$\delta_\tau v(t) = v(t + \tau) - v(t), \quad (4.39)$$

onde $v(t)$ é a velocidade da partícula no instante t . Na verdade, esta é a velocidade de uma microesfera inserida no escoamento. Consideramos um regime especial, chamado regime de Stokes, no qual as microesferas de massa pequena possuem a mesma velocidade que o fluido. Como a velocidade da partícula flutua no tempo, vamos modelar esta variável como um processo estocástico. A parte determinística deste processo será um termo de atrito proporcional à velocidade, pois sabemos que este atrito é razoável para modelar a perda de energia devido a existência de viscosidade,

$$\frac{d}{dt} \delta_\tau v = -\gamma \delta_\tau v. \quad (4.40)$$

Note que o termo de tendência da velocidade não aparece nesta equação, visto que estamos interessados apenas nos incrementos de velocidade. Portanto, o resultado que esperamos obter independe do “*drift*” do fluido e pode ser aplicado a uma grande variedade de experimentos com diferentes velocidades médias. Agora, queremos descobrir a componente aleatória dos incrementos de velocidade. A proposta mais comum, a exemplo da equação de Langevin [63], é um ruído aditivo, que resulta em

$$d\delta_\tau v = -\gamma \delta_\tau v dt + \kappa dW, \quad (4.41)$$

onde κ é uma constante real positiva e dW é um ruído branco, que obedece $\langle dW \rangle = 0$ e $\langle dW_{t_1} dW_{t_2} \rangle = \delta_{12} dt$.

Apesar das equações de Navier-Stokes serem determinísticas, elas são não lineares e podem apresentar soluções caóticas. Como estamos interessados em modelar os experimentos do ponto de vista fenomenológico, temos que formular modelos que descrevem os dados experimentais com alguma precisão a partir de poucas hipóteses. Por isso, optamos por um modelo probabilístico que, se bem fundamentado, pode explicar uma grande

quantidade de experimentos até na presença de ruído externo, mesmo que as flutuações não periódicas dos incrementos de velocidade tenham sido causadas por caos determinístico. Além disso, um ruído gaussiano é razoável de se esperar, a exemplo da equação de Langevin, dado que um número grande de forças aleatórias de mesma natureza, quando somadas, produzem uma variável aleatória gaussiana pelo Teorema do Limite Central [64].

Agora, queremos inserir parte da fenomenologia de turbulência à equação de Langevin. O modelo de Kolmogorov (K41), formalmente elaborado para turbulência euleriana, possui uma hipótese facilmente adaptada à turbulência lagrangeana. Esta hipótese, chamada “Hipótese de Similaridade de Kolmogorov”, será revisitada.

Hipótese de Similaridade *No limite de número de Reynolds infinito, todas as propriedades estatísticas das pequenas escalas de tempo são unicamente determinadas pela respectiva escala τ e pela taxa, ϵ , de dissipação média de energia por unidade de massa.*

Por pequenas escalas, nos referimos às escalas de tempo cuja escala espacial ℓ associada, obtida pela hipótese de Taylor, é muito maior que o comprimento característico de Kolmogorov η e muito menor que a escala macroscópica (integral) do sistema:

$$\eta \ll \ell \ll \ell_0, \quad (4.42)$$

onde o comprimento η de Kolmogorov é definido como

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad (4.43)$$

onde ϵ é a taxa média de dissipação de energia por unidade de massa e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Desta maneira, a partir da equação eq. (4.41), podemos resolver a equação de Fokker-Planck associada e encontrar que a distribuição de probabilidade de equilíbrio dos incrementos de velocidade é uma distribuição normal $N(0, \sigma)$ [63], a qual é definida unicamente pelos momentos

$$\langle \delta_\tau v \rangle = 0, \quad (4.44)$$

$$\sigma^2 = \langle \delta_\tau v^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{2\gamma}. \quad (4.45)$$

Utilizando a hipótese de Kolmogorov e análise dimensional, podemos expressar o segundo momento na forma

$$\langle \delta_\tau v^2 \rangle \sim [L]^2 [T]^{-2} \sim \tau^\alpha \epsilon^\beta \sim [T]^\alpha \left[\frac{L^2}{T^3} \right]^\beta, \quad (4.46)$$

Donde segue imediatamente que $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Portanto, o parâmetro κ fica determinado em função da dissipação de energia e da escala temporal dos incrementos. Logo, a eq. (4.41) pode ser escrita na forma

$$d\delta_\tau v = -\gamma \delta_\tau v dt + \sqrt{2\gamma\epsilon\tau} dW, \quad (4.47)$$

cujas fdp de equilíbrio é dada por

$$P(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\tau}} \exp\left(-\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\epsilon\tau}\right). \quad (4.48)$$

Este modelo simples, estilo K41, não contempla a intermitência pois a taxa de dissipação de energia ϵ é constante. Como a distribuição dos incrementos de velocidade deste modelo é uma gaussiana, podemos calcular os diversos momentos e encontrar a relação

$$\langle \delta_\tau v^p \rangle = C_p \epsilon^{p/2} \tau^{p/2}, \quad (4.49)$$

com p sendo um número par (os momentos ímpares de uma gaussiana de média zero são obviamente nulos). Apesar deste expoente não concordar com os dados para todo valor de p , a lei de potência para o segundo momento ($p = 2$) é verificada experimentalmente para uma grande quantidade de dados. Nosso objetivo aqui é propor um modelo que, partindo da hipótese de Kolmogorov e da equação de Langevin, concorde com K41 no segundo momento dos incrementos de velocidade e, de maneira natural, forneça correções para os expoentes dos demais momentos da distribuição. Existem diferentes maneiras de alterar o modelo fenomenológico padrão de Kolmogorov para o aparecimento de intermitência. Nossa abordagem consiste em modelar as flutuações do fluxo de energia, que é a quantidade central em K41 e foi o motivo da crítica de Landau quanto à simplicidade da teoria [13].

A segunda proposta de Kolmogorov (K62) faz uma hipótese sobre a densidade de probabilidade do fluxo de energia [12], antes tido como constante. Este modelo prevê uma correção ao expoente da equação (4.49), mas a proposta da distribuição Log-Normal não veio de um modelo dinâmico para o fluxo de energia. Ele fez uma hipótese sobre a distribuição de equilíbrio de ϵ , sem considerações sobre a dinâmica do mesmo. Nossa proposta é diferente neste sentido, pois obtivemos a distribuição de ϵ a partir de consid-

erações sobre sua dinâmica.

4.3 Distribuição de Probabilidade dos Incrementos de Velocidade

Nesta seção, vamos encontrar a fdp de equilíbrio dos incrementos de velocidade do nosso modelo estocástico no limite de grande separação temporal entre as escalas. A justificativa física para este limite já foi dada na seção anterior, onde argumentamos que as escalas maiores da cascata de energia são mais lentas, enquanto escalas menores são mais rápidas. Neste sentido, podemos repetir o mesmo argumento utilizado no Teorema 4.1 para encontrar a fdp dos incrementos de velocidade como uma superposição de distribuições. Este cálculo já existe na literatura, apesar de ter surgido de uma maneira diferente da nossa [61, 16]. No nosso caso, a variável mais rápida é o incremento de velocidade, que atinge um estado de quase-equilíbrio para um dado valor do fluxo de energia antes que esse valor tenta tempo de sofrer variações. Nesta aproximação, temos:

$$P_N(\delta_\tau v) = \int_0^\infty P(\delta_\tau v | \epsilon_N) p_N(\epsilon_N) d\epsilon_N, \quad (4.50)$$

onde a distribuição $p_N(\epsilon_N)$ depende do número N de escalas do modelo. Inicialmente, vamos resolver a integral acima para o caso $N = 1$ e encontrar um resultado já conhecido na literatura. Em seguida, resolveremos os casos gerais, com $N > 1$, e apresentaremos uma nova família de distribuições de probabilidade com cauda de lei de potência.

4.3.1 Incrementos de Velocidade no Modelo de Uma Escala

Para o modelo de uma escala, basta utilizar a aproximação definida na eq. (4.50) com $N = 1$:

$$P_1(\delta_\tau v) = \int_0^\infty P(\delta_\tau v | \epsilon_1) p_1(\epsilon_1) d\epsilon_1. \quad (4.51)$$

Substituindo a distribuição gaussiana, eq. (4.48), no lugar de $P(\delta_\tau v | \epsilon_1)$, obtemos

$$P_1(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty p_1(\epsilon_1) \epsilon_1^{-1/2} e^{-\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\tau\epsilon_1}} d\epsilon_1. \quad (4.52)$$

Agora, usando a eq. (4.6), ficamos com

$$P_1(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{(\beta\epsilon_0)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \right] \int_0^\infty \epsilon_1^{-\beta-\frac{5}{2}} e^{\frac{-\beta\epsilon_0}{\epsilon_1}} e^{-\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\tau\epsilon_1}} d\epsilon_1. \quad (4.53)$$

A integral acima pode ser resolvida exatamente [62], resultando em

$$P_1(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1\epsilon_0\tau}} \frac{\Gamma(\beta_1+3/2)}{\Gamma(\beta_1+1)} \left(1 + \frac{\delta_\tau v^2}{2\beta_1\epsilon_0\tau} \right)^{-(\beta_1+3/2)}. \quad (4.54)$$

Esta distribuição de probabilidade é conhecida como q -gaussiana [59], a qual tem sido muito utilizada no contexto da Mecânica Estatística Não-Extensiva. Seu surgimento nesta tese não faz referência a essa generalização da mecânica estatística, pois foi deduzida como o equilíbrio de variáveis dinâmicas. Como discutido em outros trabalhos [61], o surgimento desta curva a partir de uma dinâmica é uma alternativa à necessidade de invocar argumentos de entropia não-extensiva. Na verdade, o cálculo que resultou na eq. (4.54) era conhecido há muito tempo [65], a partir do trabalho de William Gosset. Ele propôs uma distribuição para uma variável aleatória construída a partir de uma soma de variáveis gaussianas dividida pela soma dos quadrados destas variáveis. O resultado é uma variável aleatória distribuída de acordo com uma distribuição do tipo T-Student, pseudônimo do W. Gosset que, por trabalhar em pesquisa quantitativa de uma empresa de cervejaria, não podia publicar com seu nome verdadeiro [66]. A diferença fundamental é que os graus de liberdade da distribuição do tipo T-Student, relacionada ao parâmetro β_1 do nosso modelo (ou ao parâmetro q da q -gaussiana), é um número natural. Como os parâmetros (β_1 ou q) da distribuição P_1 acima ou da q -gaussiana são reais, podemos dizer que houve uma generalização da distribuição T-Student. O ajuste desta curva a dados de retornos financeiros de ativos e índices já era conhecido na literatura [60]. Aplicação da distribuição P_1 a dados de turbulência lagrangeana serão discutidos mais adiante neste capítulo.

Finalmente, gostaríamos de escrever a distribuição (4.54) encontrada nesta seção de uma outra maneira, que será útil para entender o caso geral. Mais especificamente, vamos escrever $P_1(\delta_\tau v)$ da seguinte forma

$$P_1(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1\epsilon_0\tau}} \frac{\Gamma(\beta_1+3/2)}{\Gamma(\beta_1+1)} {}_1F_0\left(\beta_1 + \frac{3}{2}, -\frac{\delta_\tau v^2}{2\beta_1\epsilon_0\tau}\right), \quad (4.55)$$

onde ${}_1F_0$ é a função hipergeométrica generalizada de ordem (1,0) [67], que pode ser

escrita explicitamente em termos da chamada q -exponencial:

$${}_1F_0\left(\frac{1}{1-q}, x\right) = \exp_q(x), \quad (4.56)$$

onde

$$\exp_q(x) = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (4.57)$$

é a chamada função q -exponencial. A partir da identificação de ${}_1F_0$ com uma q -exponencial, fica claro que nossa distribuição $P_1(\delta_\tau v)$ é uma q -gaussiana com parâmetro q dado em função de β_1 de acordo com a relação

$$\beta_1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{1-q}. \quad (4.58)$$

Veremos a seguir que as fdp's encontradas para um sistema de mais escalas serão funções hipergeométricas generalizadas de ordem $(N, 0)$. Optamos por seguir a ordem histórica das descobertas, por isso vamos passar a estudar com detalhe o modelo de duas escalas, $N = 2$, antes de discutir o caso geral para N qualquer.

4.3.2 Incrementos de Velocidade no Modelo de Duas Escalas

Vamos agora usar a fdp de equilíbrio $p_2(\epsilon_2)$ do fluxo de energia ϵ_2 em uma cascata de energia com dois níveis e combiná-la com a distribuição condicional (gaussiana) dos incrementos de velocidade para calcular a respectiva distribuição marginal $P_2(\delta_\tau v)$. Inicialmente, temos

$$P_2(\delta_\tau v) = \int_0^\infty P(\delta_\tau v | \epsilon_2) p_2(\epsilon_2) d\epsilon_2. \quad (4.59)$$

Inserindo (4.13) e (4.48) em (4.59), e fazendo uma série de mudanças de variável, é possível expressar a integral acima em termos de funções transcendentais conhecidas:

$$P_2(\delta_\tau v) = \frac{D}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{\delta_\tau v^2}{2\tau} \right]^{-\beta_2 - 3/2} U\left(3/2 + \beta_2; 1 + \beta_2 - \beta_1; \frac{2\beta_2\beta_1\epsilon_0\tau}{\delta_\tau v^2}\right), \quad (4.60)$$

onde D é uma constante de normalização que será obtida posteriormente e $U(a, b, z)$ é a função hipergeométrica confluyente de segundo tipo [68]. Da mesma forma que na seção anterior, percebemos aqui também que a distribuição de probabilidade $P_2(\delta_\tau v)$ pode ser escrita em termos de uma função hipergeométrica generalizada. Neste caso, vamos fazer

uso da seguinte identidade [68]:

$${}_2F_0(a, b, z) = (-1/z)^a U(a, 1 + a - b, -1/z), \quad (4.61)$$

onde ${}_2F_0$ é a função hipergeométrica generalizada de ordem $(2, 0)$. A expressão acima, válida para $z < 0$, pode ser aplicada na fórmula da distribuição dos incrementos, eq. (4.60), resultando em

$$P_2(\delta_\tau v) \propto {}_2F_0\left(\beta_2 + \frac{3}{2}, \beta_1 + \frac{3}{2}; -\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\beta_2\beta_1\epsilon_0\tau}\right). \quad (4.62)$$

A constante multiplicativa pode ser calculada pela condição de normalização, a partir da seguinte relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_2F_0(a, b; -cx^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \frac{\Gamma(a - \frac{1}{2})\Gamma(b - \frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (4.63)$$

Portanto, a forma final da fdp dos incrementos de velocidade do modelo de duas escalas fica dada pela expressão

$$P_2(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_2\beta_1\epsilon_0\tau}} \frac{\Gamma(\beta_2 + \frac{3}{2})\Gamma(\beta_1 + \frac{3}{2})}{\Gamma(\beta_2 + 1)\Gamma(\beta_1 + 1)} {}_2F_0\left(\beta_2 + \frac{3}{2}, \beta_1 + \frac{3}{2}; -\frac{\delta_\tau v^2}{2\beta_2\beta_1\epsilon_0\tau}\right). \quad (4.64)$$

Note a semelhança desta expressão com a eq. (4.55). O modelo de uma escala espacial, cuja fdp dos incrementos é uma q -gaussiana, conseguimos escrevê-lo como a função ${}_1F_0$. O modelo de duas escalas, de forma análoga e após um esforço muito maior, foi relacionado à função ${}_2F_0$. Como mostraremos na seção seguinte, o modelo de N escalas resulta na função hipergeométrica generalizada de ordem $(N, 0)$.

4.3.3 Incrementos de Velocidade no Modelo de N Escalas

Nesta seção, nosso objetivo é encontrar a forma da fdp dos incrementos de velocidade para o nosso modelo com N escalas. Para isso, vamos partir da eq.(4.50) e usar a gaussiana para a distribuição condicionada dos incrementos de velocidade, de modo a obter

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty p_N(\epsilon_N) \epsilon_N^{-1/2} e^{-\frac{\delta_\tau v^2}{2\tau\epsilon_N}} d\epsilon_N. \quad (4.65)$$

Substituindo a eq. (4.30) na eq. (4.65), obtemos

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \epsilon_N^{-1/2} e^{\frac{-\delta_\tau v^2}{2\tau\epsilon_N}} p(\epsilon_N|\epsilon_{N-1})p(\epsilon_{N-1}|\epsilon_{N-2})\dots p(\epsilon_1|\epsilon_0)d\epsilon_N\dots d\epsilon_1. \quad (4.66)$$

É possível mostrar (vide Apêndice C) que a integral acima, após uma sequência de mudanças de variáveis, pode ser expressa em termos de funções transcendentais conhecidas:

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1\dots\beta_N\epsilon_0\tau}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\beta_i + 3/2)}{\Gamma(\beta_i + 1)} {}_N F_0(\beta_1 + \frac{3}{2}, \dots, \beta_N + \frac{3}{2}; -\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\epsilon_0\tau\beta_1\dots\beta_N}), \quad (4.67)$$

onde ${}_N F_0$ é a função hipergeométrica generalizada de ordem $(N, 0)$. Por esta razão, vamos nos referir ao modelo acima para a distribuição dos incrementos de velocidade como modelo hipergeométrico generalizado (MHG_N).

Os dois primeiros membros da família de funções ${}_N F_0$ correspondem a funções simples. Para $N = 0$ temos a função exponencial,

$${}_0 F_0(x) = e^x, \quad (4.68)$$

ao passo que para $N = 1$ temos a q -exponencial, como mostrado na eq. (4.56). Para esses casos, segue portanto que a distribuição $P_N(\delta_\tau v)$ dada em (4.67) corresponde a distribuições conhecidas: a gaussiana para $N = 0$ e a q -gaussiana para $N = 1$. Por outro lado, as distribuições baseadas em ${}_N F_0$, com $N > 1$, não foram encontradas anteriormente na literatura, sendo este trabalho, ao que nos consta, a primeira vez que elas foram deduzidas e aplicadas a problemas físicos.

Pode-ser mostrar que a função hipergeométrica generalizada ${}_N F_0$ possui a seguinte forma assintótica:

$${}_N F_0(\alpha_1, \dots, \alpha_N; -x) = \sum_{i=1}^N C_i x^{-\alpha_i} [1 + O(\frac{1}{x})], \quad (4.69)$$

onde C_i são constantes, $\alpha_i = \beta_i + 3/2$, e a fórmula é válida para $x \gg 1$. Desta maneira, verificamos que a distribuição P_N da eq. (4.67) possui, no limite de $\delta_\tau v \rightarrow \infty$, cauda de lei de potência dada por

$$P_N(\delta_\tau v) \cong \sum_{i=1}^N C_i (\delta_\tau v)^{-2\beta_i-3}. \quad (4.70)$$

Os momentos pares desta distribuição podem ser calculados explicitamente a partir da

seguinte relação

$$\langle (\delta_\tau v)^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \tau^p \langle \epsilon_N^p \rangle, \quad (4.71)$$

como pode ser facilmente verificada a partir de (4.65). Substituindo agora a eq. (4.34) na equação acima, obtemos

$$\langle (\delta_\tau v)^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \epsilon_0^p \tau^p \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta_i}{\beta_i - j}, \quad (4.72)$$

com p um número natural. Como a função é par, os momentos ímpares são zero. Isto está de acordo com nossa idéia de turbulência lagrangeana pois, quando tomamos os incrementos de velocidade, estamos nos livrando de qualquer tendência que exista no experimento. Desta maneira, a distribuição experimental também é par, pois não há sentido preferencial.

Por simplicidade, vamos assumir a partir de agora que a dinâmica de todas as escalas da cascata de energia se comporta da mesma maneira, a menos de uma escala temporal. Isto significa dizer que as flutuações do fluxo de energia da escala $i + 1$ dependem do fluxo da escala i da mesma maneira que as flutuações da escala i dependem da escala $i - 1$, e assim sucessivamente. Esta afirmação corresponde à igualdade dos parâmetros β_i :

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = \beta. \quad (4.73)$$

Como os β_i 's são parâmetros livres do modelo, esta condição não é contraditória à separação das escalas ($\gamma_1 \ll \gamma_2 \ll \dots \gamma_N$), pois basta assumir que as constantes responsáveis pelo ruído do modelo também possuem grande separação ($\kappa_1 \ll \kappa_2 \ll \dots \kappa_N$) de forma a preservar o valor dos β 's constantes. Esta condição equivale a fazer a escolha

$$\gamma_i \sim \kappa_i^2. \quad (4.74)$$

Usando a identidade (4.73) na fórmula dos momentos (4.72), obtemos

$$\langle \delta_\tau v^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \epsilon_0^p \tau^p \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta}{\beta - j} \right)^N. \quad (4.75)$$

A partir da expressão acima, poderemos estimar qual a variação dos momentos conforme mudamos a escala de tempo τ do experimento. Para isso, precisamos lembrar que a escala espacial de um dado nível da cascata de energia está relacionada à escala de

comprimento do nível imediatamente anterior por uma razão b (tipicamente $b = 2$, como já mencionado). O mesmo pode ser dito em relação aos tempos característicos de cada escala, e a razão entre as escalas de tempo pode ser escrita assim da forma $T_i/T_{i+1} = b$, resultando em

$$\tau = \frac{T}{b^N}, \quad (4.76)$$

onde T é a escala de tempo integral do sistema. Pela hipótese de Taylor, ela é dada por $T = L/U_0$, onde L é a escala espacial integral do sistema e U_0 é a velocidade média do fluido (necessária para que haja turbulência a partir da injeção de fluxo externo). Desta forma, os momentos (4.75) podem ser escritos em função de τ

$$\langle (\delta_\tau v)^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \epsilon_0^p \tau^p \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta}{\beta - j} \right)^{\frac{1}{\ln b} \ln(T/\tau)}, \quad (4.77)$$

que implica em

$$\langle (\delta_\tau v)^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \epsilon_0^p \tau^p \left(\frac{T}{\tau} \right)^{\frac{1}{\ln b} (-\sum_{j=1}^{p-1} \ln(1-j/\beta))}. \quad (4.78)$$

Ou seja,

$$\langle (\delta_\tau v)^{2p} \rangle \sim \tau^{\zeta_{2p}}, \quad (4.79)$$

onde o expoente de escala ζ_{2p} é da forma

$$\zeta_{2p} = p + \frac{1}{\ln b} \sum_{j=1}^{p-1} \ln(1 - j/\beta) \quad (4.80)$$

O limite de $\beta \rightarrow \infty$ é interessante pois a densidade de probabilidade do fluxo de energia passa a delta de Dirac e a distribuição do incrementos de velocidade tende a uma gaussiana, retornando ao caso da teoria de Kolmogorov (K41). Para fazer contato com esta teoria e descobrir qual o expoente previsto por este modelo, vamos expandir o logaritmo natural em sua série de Taylor na eq. (4.80) para obter

$$\zeta_{2p} = p - \frac{1}{\ln b} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k}{k\beta^k}. \quad (4.81)$$

Em primeira ordem de $1/\beta$, o resultado acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\zeta_{2p} = p - \frac{1}{\ln b} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j}{\beta}, \quad (4.82)$$

onde a soma em j pode ser realizada facilmente ($\sum_{j=1}^{p-1} j = p(p-1)/2$). Finalmente, ficamos com

$$\zeta_{2p} = p - \frac{p(p-1)}{2\beta \ln b} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (4.83)$$

O segundo termo acima, que dá a correção ao expoente de Kolmogorov (para turbulência lagrangeana), corresponde exatamente à previsão do modelo Log-Normal [35]. Portanto, podemos afirmar que, em ordem zero, nosso modelo reproduz o caso K41 e, em primeira ordem de $1/\beta$, reproduz a correção do expoente do modelo Log-Normal. Note que a correção do modelo depende de b e β , que são os únicos parâmetros do nosso modelo no equilíbrio, mas o expoente não prevê alteração para o segundo momento ($\zeta_2 = 1$). Esta propriedade é notável, pois sabe-se que o segundo momento é o caso mais confiável dos dados experimentais e concordam com a teoria K41. Algumas teorias intermitentes utilizam o segundo momento de K41 como condição de contorno para obtenção dos demais expoentes. Por exemplo, em [35], o segundo momento é colocado de maneira *ad hoc*, enquanto o nosso modelo implica esta condição naturalmente.

4.4 Aplicação a Dados de Turbulência Lagrangeana

Nesta seção, vamos utilizar a fdp resultante do nosso modelo estocástico para ajustar dados de turbulência lagrangeana. Os dados foram fornecidos pelo grupo do Prof. Eberhard Bodenschatz e correspondem ao histograma de incrementos de velocidade obtidos a partir da medição das trajetórias de microesferas em um escoamento turbulento com o uso de lasers. A série temporal dos incrementos de velocidade é obtida a partir das trajetórias, que foram registradas em três dimensões, e transformadas em um histograma. Detalhes sobre o aparato experimental podem ser encontrados na Ref. [14]. Um ajuste da distribuição P_1 (correspondendo à q -gaussiana) normalizada pela variância dos dados é mostrado na Figura 4.7. Percebe-se que o ajuste da curva não é tão bom: a curva não captura as caudas da distribuição experimental. Se, por outro lado, variarmos o parâmetro β_1 na tentativa de ajustar melhor as caudas, perdemos o ajuste da região intermediária, como visto na Figura 4.6. .

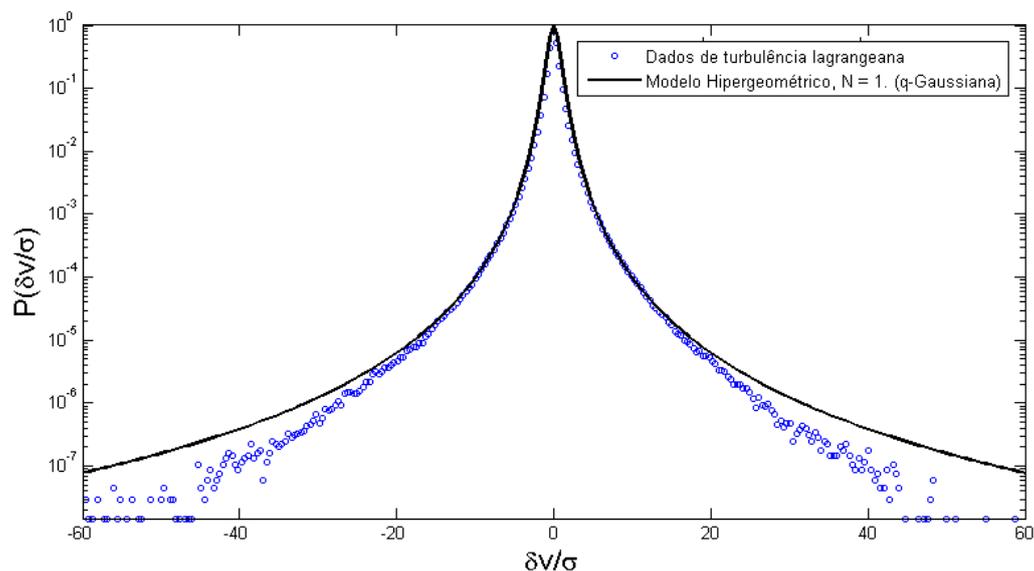


Figura 4.6 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de uma escala ($N = 1$), com $\beta = 0.5$, que é idêntica à distribuição q -gaussiana.

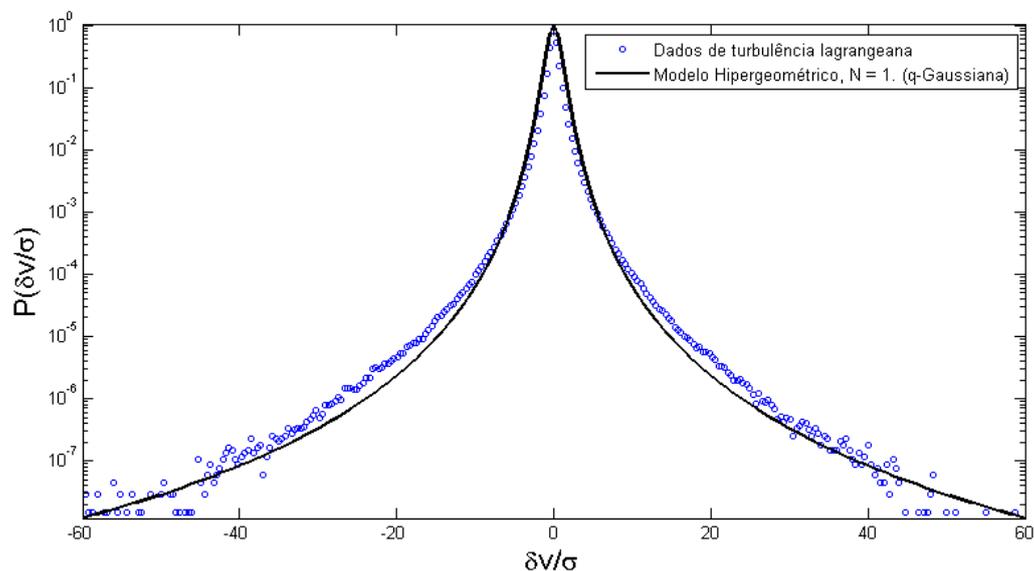


Figura 4.7 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de uma escala ($N = 1$), com $\beta = 0.9$, que é idêntica à distribuição q -gaussiana.

Os mesmos dados foram então ajustados com as distribuições P_N , com $N > 1$. A escolha do parâmetro N da distribuição foi feita selecionando o menor N que ajusta os dados de maneira satisfatória. A Figura 4.8 representa a distribuição teórica do nosso modelo com $N = 5$ e $\beta = 2.1$. Escalas adicionais podem ser inseridas no modelo, mas não há mudança significativa no ajuste a partir de um dado valor de N , como fica ilustrado na Figura 4.9, em que nosso modelo com $N = 6$ apresenta um ajuste aparentemente tão bom quanto o caso $N = 5$. Note que, ao contrário do que acontece com a q -gaussiana (Figura 4.7), as curvas ($N = 5$ e $N = 6$) teóricas na Figura 4.9 ajustam os dados de maneira excelente, tanto na região central quanto nas caudas. Assim, podemos atribuir a relativa falta de sucesso da curva q -gaussiana, no ajuste aos dados de turbulência lagrangeana, à escolha insuficiente do número de escalas.

4.5 Aplicação a Dados de Turbulência Euleriana

Nesta seção, vamos utilizar a fdp resultante do nosso modelo estocástico para ajustar dados de turbulência euleriana. A partir da eq. (4.30) para o fluxo de energia da menor escala ϵ_N , podemos construir a distribuição $P(\delta_r v)$ para incrementos de velocidade $\delta_r v = v(x+r) - v(x)$, medidos com separação espacial r , da seguinte forma. Inicialmente, vamos expressar a distribuição marginal de probabilidade $P(\delta_r v)$ como

$$P(\delta_r v) = \int_0^\infty P(\delta_r v | \epsilon_r) p(\epsilon_r) d\epsilon_r, \quad (4.84)$$

onde $P(\delta_r v | \epsilon_r)$ é a distribuição de probabilidade condicional de $\delta_r v$ para um valor fixo de ϵ_r . Como a intermitência está relacionada com a flutuação de ϵ_r , é razoável assumir que a estatística dos incrementos de velocidade para um ϵ_r fixo é descrita por uma distribuição gaussiana. Esta hipótese está em concordância com experimentos [69, 70]. Então, podemos escrever

$$P(\delta_r v | \sigma_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} \exp \left[-\frac{(\delta_r v)^2}{2\sigma_r^2} \right], \quad (4.85)$$

onde σ_r^2 é a variância aleatória de $\delta_r v$ para um valor fixo de ϵ_r . Em geral, pode-se associar σ_r^2 com a taxa local de dissipação de energia ϵ_r [71]. Mais formalmente, podemos escrever

$$\sigma_r^2 \equiv \langle \delta_r v^2 | \epsilon_r \rangle = \langle \delta_r v^2 \rangle \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0}. \quad (4.86)$$

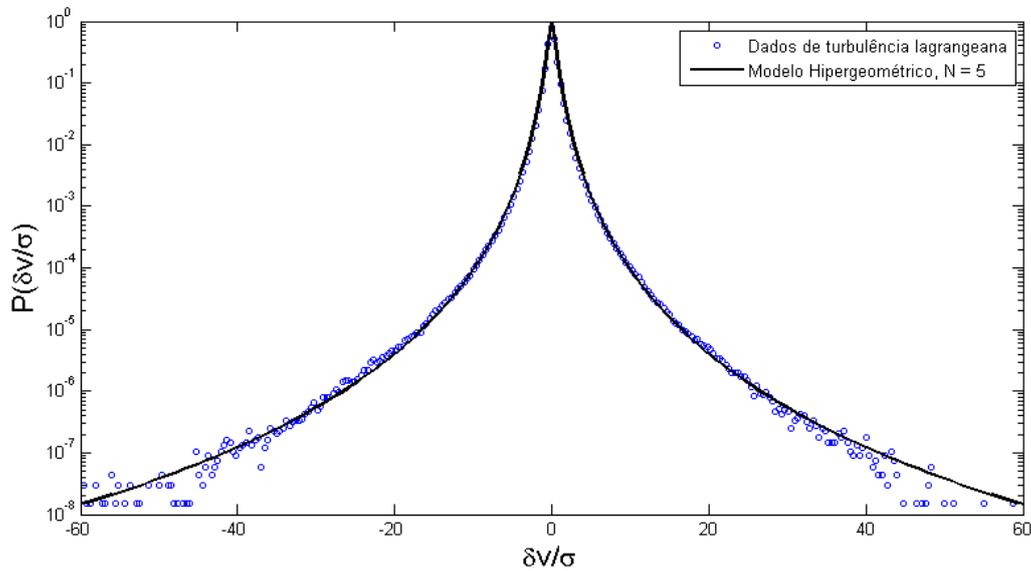


Figura 4.8 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de cinco escalas ($N = 5$), com $\beta = 2.1$.

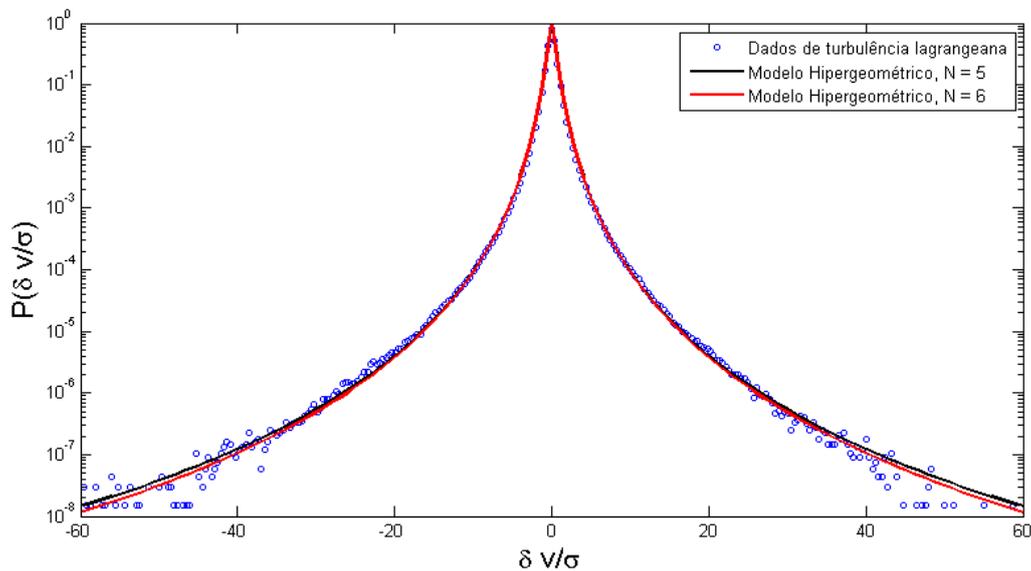


Figura 4.9 Histograma normalizado dos incrementos de velocidade em turbulência lagrangeana reportado por Bodenschatz et al. [15]. Ajuste dado pela curva teórica do nosso modelo dinâmico de cinco escalas ($N = 5$), com $\beta = 2.1$ e o modelo de seis escalas ($N = 6$), com $\beta = 2.5$.

Das equações (4.85) e (4.86), segue que a fdp normalizada para $\delta_r v$ pode ser escrita na forma

$$P(\delta_r \tilde{v}) = \int_0^\infty \frac{p(\tilde{\epsilon}_r)}{\sqrt{2\pi\tilde{\epsilon}_r}} \exp\left[-\frac{(\delta_r \tilde{v})^2}{2\tilde{\epsilon}_r}\right] d\tilde{\epsilon}_r, \quad (4.87)$$

onde $\delta_r \tilde{v} = \delta_r v / \sqrt{\langle \delta_r v^2 \rangle}$ é o incremento de velocidade normalizado e $\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r / \epsilon_0$ é o fluxo de energia normalizado da escala r . Note que, como escolhemos uma gaussiana de média zero em (4.85), nosso modelo descreve apenas a parte simétrica da fdp dos incrementos de velocidade, cuja forma não gaussiana é uma assinatura da intermitência. A parte assimétrica da fdp pode estar relacionada com o movimento dos vórtices, que se dobram e se esticam, e será por enquanto deixada de fora do modelo.

Substituindo a eq. (4.30) em (4.87), e aplicando a mesma sequência de mudanças de variável mencionada na seção anterior, obtemos

$$P_N(\delta_r \tilde{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1 \dots \beta_N}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\beta_i + 3/2)}{\Gamma(\beta_i + 1)} {}_N F_0(\beta_1 + \frac{3}{2}, \dots, \beta_N + \frac{3}{2}; -\frac{(\delta_r \tilde{v})^2}{2\beta_1 \dots \beta_N}). \quad (4.88)$$

Esta distribuição é a forma normalizada da distribuição dada pela eq. (4.67). Nesse caso, a fórmula dos momentos análoga a (4.72) torna-se

$$\langle (\delta_r \tilde{v})^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta_i}{\beta_i - j}. \quad (4.89)$$

Novamente aplicamos a condição $\beta_i = \beta$ para todo i e ficamos com

$$\langle (\delta_r \tilde{v})^{2p} \rangle = (2p - 1)!! \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{\beta}{\beta - j} \right)^N. \quad (4.90)$$

Repetindo os passos da dedução da eq. (4.79), com $r = L/b^N$, obtemos a seguinte relação de escala:

$$\langle (\delta_r \tilde{v})^{2p} \rangle \sim \left(\frac{r}{L} \right)^{-\zeta_{2p}}, \quad (4.91)$$

onde

$$\zeta_{2p} = \frac{1}{\ln b} \sum_{j=1}^{p-1} (j/\beta). \quad (4.92)$$

Desta forma, a eq. (4.92) mostra uma correção ao expoente de escala dos momentos da distribuição dos incrementos de velocidade devido à intermitência. Como a variável $(\delta_r \tilde{v})^{2p}$ é normalizada pelo desvio padrão, a dependência de $\langle \delta_r v^2 \rangle$ em r é também uma

parâmetro livre do modelo. Mais explicitamente temos

$$\langle (\delta_r \tilde{v})^{2p} \rangle \sim \langle \delta_r v^2 \rangle^p \left(\frac{r}{L} \right)^{-\zeta_{2p}}. \quad (4.93)$$

Vamos agora aplicar nosso modelo a um conjunto de dados de turbulência euleriana. As medições foram publicadas na Ref. [72] e gentilmente fornecidas pelo grupo do Prof. Benoit Chabaud. O experimento consiste na medição da velocidade do escoamento ao longo do eixo no qual um fluxo de hélio gasoso a baixa temperatura é injetado em um cilindro. O fluxo de injeção, mantido constante, atinge um sensor e, na base do cilindro, faz o caminho de volta para o tanque, como reproduzido na Figura 4.10. Neste experimento, existe apenas um sensor que registra dados de voltagem a serem transformados em uma série de velocidades. Detalhes sobre o aparato experimental podem ser encontrados em [73]. Seguimos as recomendações para transformar os dados de voltagem em dados de velocidade, gerando uma série temporal (com cerca de 10^7 pontos) para cada número de Reynolds. Cada série temporal foi registrada com uma dada frequência, $1/\tau_0$, de forma que sabemos qual o intervalo de tempo a que corresponde um dado incremento de velocidade. Definimos a série de incrementos de velocidade como

$$\delta_{r_0} v(j) = v(j+1) - v(j), \quad (4.94)$$

com j variando de 1 até o final da série de medições de velocidade e r_0 correspondendo à menor escala do experimento. Esta escala pode ser estimada utilizando a hipótese de Taylor

$$r_0 = U_0 \tau_0, \quad (4.95)$$

onde U_0 é a velocidade média do escoamento e τ_0 é o inverso da frequência temporal dos registros. Desta forma, obtemos uma série temporal estacionária, $\delta_{r_0} v(i)$, e calculamos seu desvio padrão. Em seguida, dividimos os dados pelo desvio padrão e distribuímos os valores em intervalos de mesmo comprimento cuja posição variou tipicamente de -15σ a $+15\sigma$, em um total de 100 intervalos. Contamos a ocorrência de cada intervalo e construímos o histograma empírico normalizado, $P(\delta_r \tilde{v})$. Na Figura 4.11 mostramos um exemplo da série temporal dos incrementos de velocidade para um dos experimentos de turbulência euleriana. Note que a série possui um comportamento aparentemente aleatório.

Como o experimento possui um fluxo injetado para baixo, existe uma direção preferencial dos incrementos de velocidade e o histograma obtido não é simétrico, apesar de ter

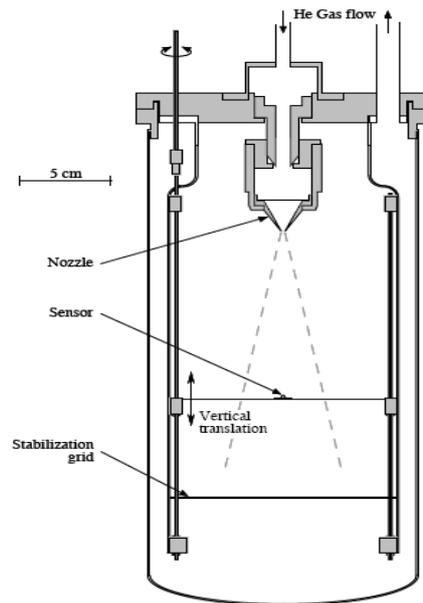


Figura 4.10 Esquema do aparato experimental utilizado para medir velocidades em turbulência euleriana [74].

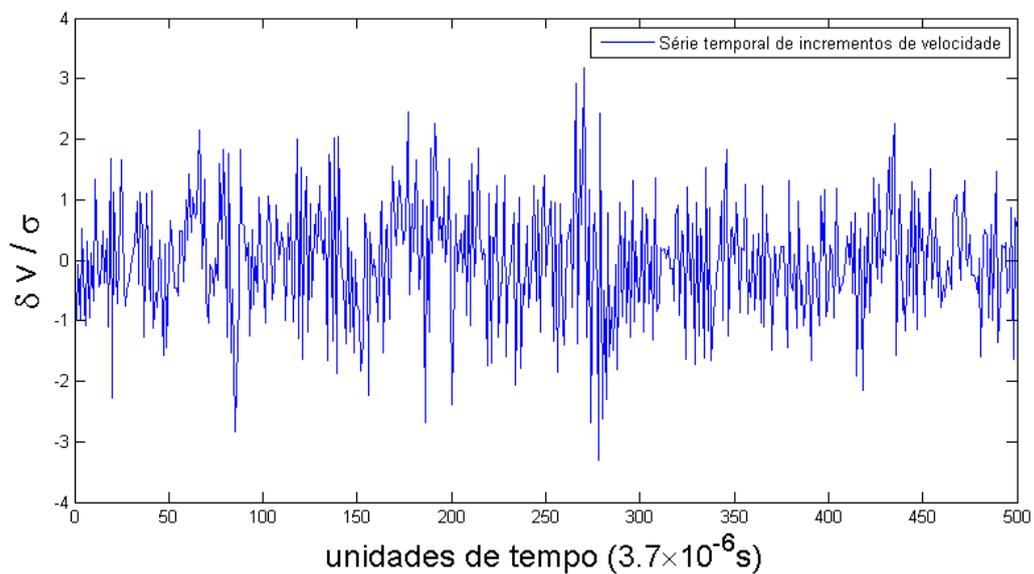


Figura 4.11 Exemplo de série temporal dos incrementos de velocidade para turbulência euleriana como medida na Ref. [74]. O eixo vertical está normalizado pelo desvio padrão σ da série. Para este experimento, temos $Re = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5} m$.

média zero. Visto que estamos interessados em ajustar apenas a parte simétrica da fdp, tomamos apenas a parte par do histograma, $P^+(\delta_{r_0}\tilde{v})$, definida como

$$P^+(\delta_{r_0}\tilde{v}) = \frac{1}{2} [P(\delta_{r_0}\tilde{v}) + P(-\delta_{r_0}\tilde{v})]. \quad (4.96)$$

Escolhemos a menor escala dos experimentos, r_0 , para um determinado número de Reynolds e comparamos com a fdp resultante do nosso modelo, dada por (4.88). A primeira fdp a ser considerada é a função ${}_1F_0$ (q -gaussiana) e possui um ajuste bem melhor que a gaussiana (${}_0F_0$), como já é de conhecimento na literatura [16], e como pode ser visto na Figura 4.12. Note que a distribuição gaussiana falha no ajuste das caudas, enquanto a distribuição ${}_1F_0$ ajusta melhor os dados. Então, resolvemos inserir mais níveis na cascata de energia para verificar o ajuste das funções ${}_NF_0$ com $N > 1$. Neste sentido, inserimos mais uma escala no modelo e percebemos que o ajuste com a função ${}_2F_0$ é ainda melhor. Damos continuidade ao processo até chegar ao modelo com menor número de escalas que forneça uma boa concordância com os dados. Esse procedimento está ilustrado na Figura 4.13 para o caso $R = 295000$. Note que para poucos níveis, $N = 4$ e $N = 5$, nosso modelo consegue ajustar de maneira excelente o histograma tanto na região central quanto na região das caudas. Modelos com mais escalas possuem também um ajuste tão bom ou ligeiramente superior aos considerados, mas o ganho no ajuste é praticamente imperceptível e o custo computacional não é compensado.

Resolvemos testar a fdp do modelo em séries temporais com escalas maiores, para acessar outro nível da cascata. Para isso vamos definir escalas sucessivas pela fórmula

$$r_i = 2^i r_0, \quad (4.97)$$

onde o fator 2 foi escolhido por conveniência. A partir desta transformação, podemos definir as séries $\delta_{r_i}v$ por

$$\delta_{r_i}v(j) = v(j + 2^i - 1) - v(j - 1), \quad (4.98)$$

de maneira análoga à eq. (4.94). Com estas novas séries, podemos construir o histograma normalizado para cada uma delas e ajustar uma sequência de funções ${}_NF_0$ da seguinte forma: descobrimos qual o menor valor de N que ajusta bem os dados da menor escala r_0 . Em seguida, passamos a ajustar a escala seguinte, r_1 , com $N - 1$. Continuamos o procedimento até atingirmos o caso $N = 1$. Repetimos esta sequência de ajustes para diversos números de Reynolds. As figuras mostram dados e ajustes com

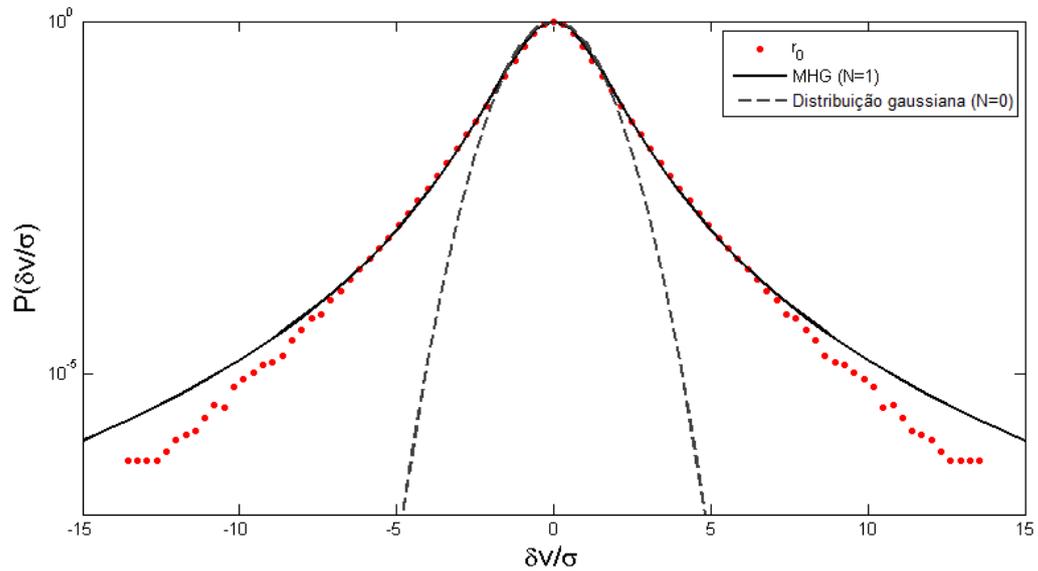


Figura 4.12 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 0$ e $N = 1, \beta = 1.8$.

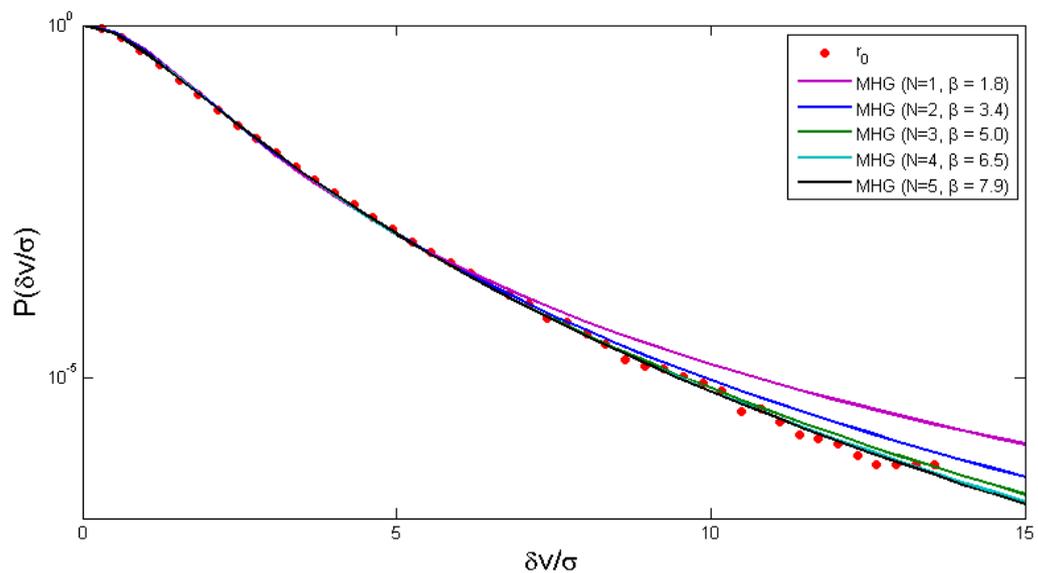


Figura 4.13 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 1, \beta = 1.8$; $N = 2, \beta = 3.4$; $N = 3, \beta = 5.0$; $N = 4, \beta = 6.5$; $N = 5, \beta = 7.9$. Mostramos apenas o semi-eixo positivo de $\delta_{r_0}v$.

$R = 8500$ (Figura 4.14), $R = 29830$ (Figura 4.15), $R = 58300$ (Figura 4.16), $R = 115000$ (Figura 4.17), $R = 295000$ (Figura 4.18), $R = 757000$ (Figura 4.19). As escalas r_0 de observação estão registradas em cada gráfico. As curvas sofreram uma translação vertical para uma melhor visualização. Note que as fdps do modelo ajustam os dados de maneira considerável na região central e nas caudas, tanto para as menores escalas quanto para as maiores escalas, em que os histogramas já apresentam um formato aproximadamente retilíneo, correspondendo a uma distribuição exponencial, indicando que as escalas seguintes terão um comportamento mais próximo do gaussiano, como esperado em nosso modelo.

Como mencionamos anteriormente, o número exato de escalas de uma cascata para uma certa experiência não é uma informação que pode ser obtida a partir dos dados, pois um número ainda maior de escalas pode ser sempre considerado, gerando um ajuste cuja melhoria no ajuste é irrelevante. Contudo, não estamos dispostos a responder esse tipo de questionamento, já que a própria cascata de energia é um artefato teórico que não pode ser medido diretamente nos experimentos. A pergunta que deve ser feita é: um modelo de cascata com N escalas descreve uma dada classe de experimentos? Se a resposta for positiva, então ficaremos com o modelo mais simples dentre eles. Esta argumentação é necessária, pois veremos que o modelo Log-Normal pode ser interpretado como uma cascata contínua na próxima seção.

4.6 Cascata Contínua de Energia e o Modelo Log-Normal

O modelo Log-Normal foi introduzido no capítulo 2 como um dos modelos básicos de intermitência. Ele surgiu da necessidade de inserir flutuações no fluxo de energia para tentar contornar a crítica levantada por Landau [13] sobre a intermitência. Uma explicação razoável para o modelo Log-Normal é que a energia, quando passa de uma escala para outra, sofre um ganho ou perda mensurado por uma variável aleatória. Quando consideramos diversas escalas, a energia sofre este efeito diversas vezes e chega na escala menor alterada por um produto destas variáveis aleatórias. Estas variáveis podem ser consideradas como identicamente distribuídas e independentes. Logo, o produto de muitas delas se aproxima a uma distribuição Log-Normal, visto que o log do fluxo de energia é uma soma de muitas variáveis e, pelo Teorema do Limite Central [64], sabe-se que a distribuição resultante desta soma é uma Normal. Curiosamente, este argumento foi empregado por Kolmogorov ainda em 1941 para justificar o modelo Log-Normal da dis-

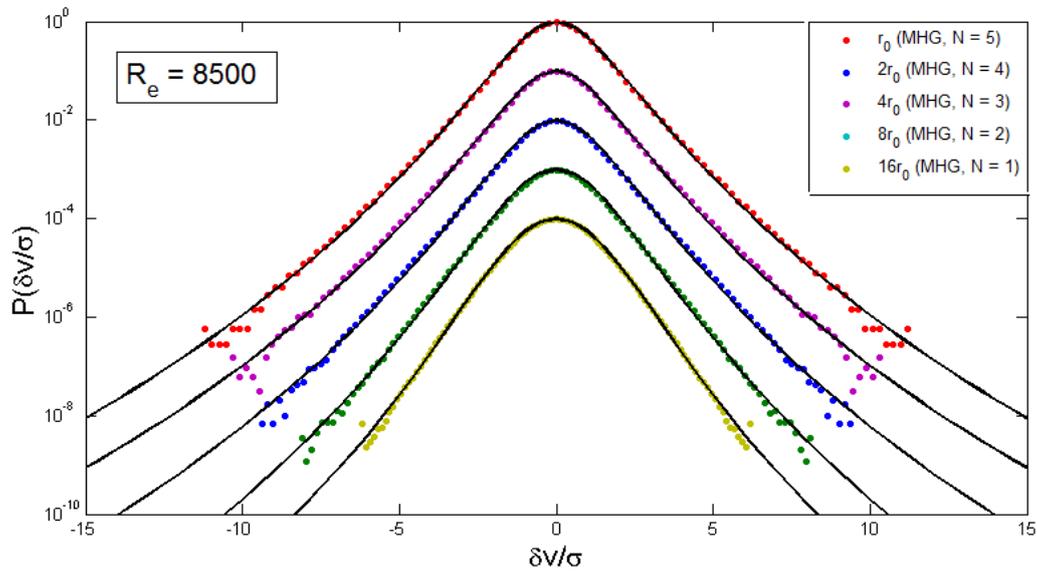


Figura 4.14 Turbulência Euleriana. $R = 8500$ e $r_0 = 4,0 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5$, $\beta = 12$; $N = 4$, $\beta = 10$; $N = 3$, $\beta = 8.8$; $N = 2$, $\beta = 7.8$; $N = 1$, $\beta = 5.4$.

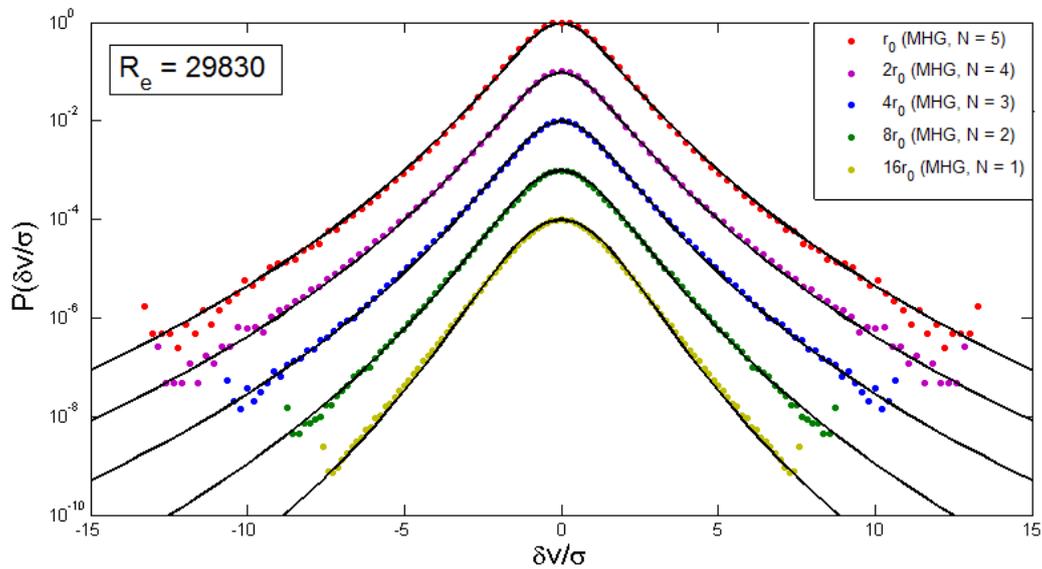


Figura 4.15 Turbulência Euleriana. $R = 29830$ e $r_0 = 1,8 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5$, $\beta = 8.7$; $N = 4$, $\beta = 7.3$; $N = 3$, $\beta = 6.3$; $N = 2$, $\beta = 5.7$; $N = 1$, $\beta = 4.7$.

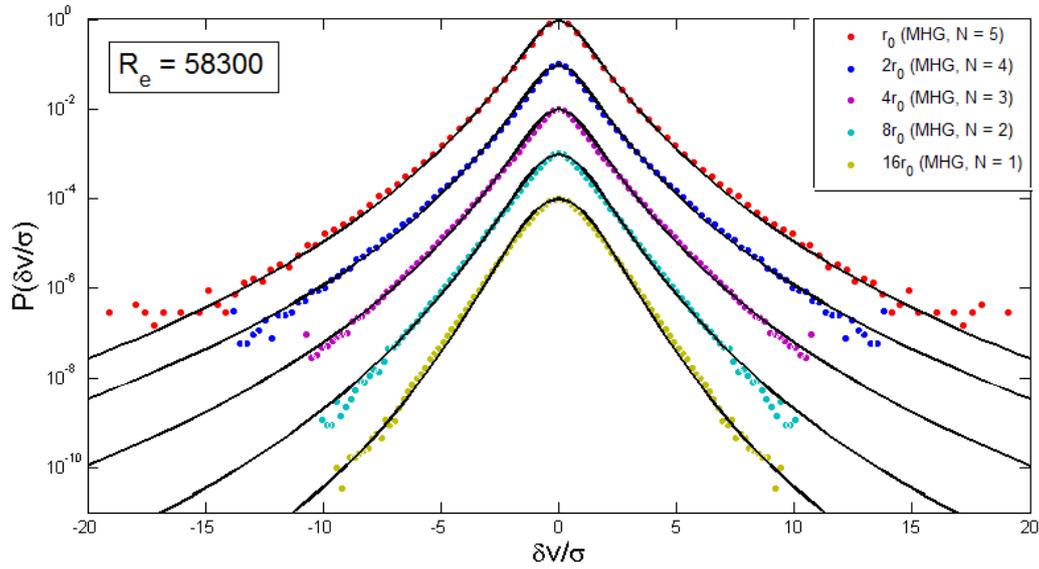


Figura 4.16 Turbulência Euleriana. $R = 58300$ e $r_0 = 1,5 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5$, $\beta = 6.8$; $N = 4$, $\beta = 5.5$; $N = 3$, $\beta = 5.2$; $N = 2$, $\beta = 5.0$; $N = 1$, $\beta = 4.4$.

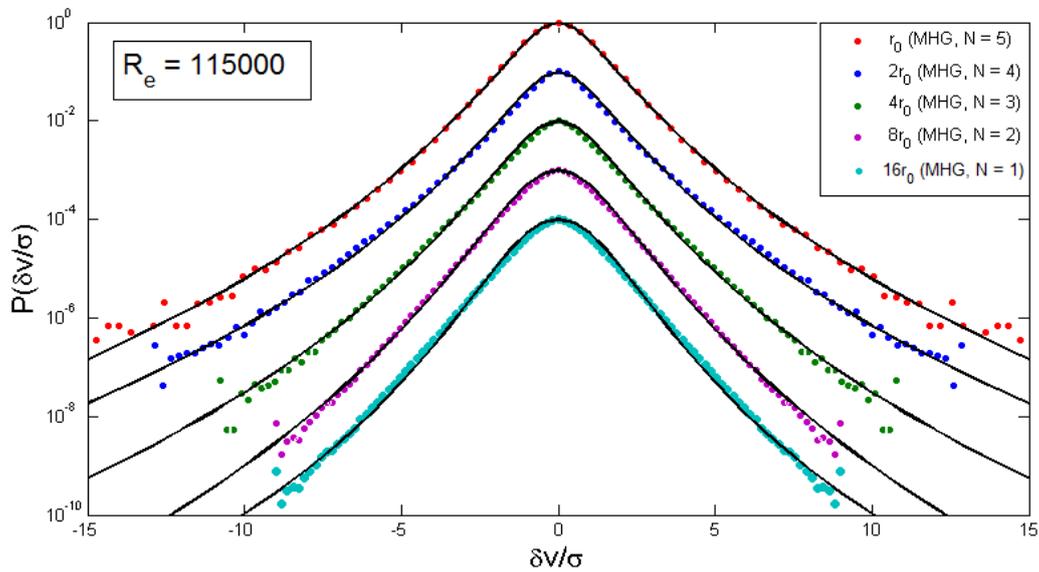


Figura 4.17 Turbulência Euleriana. $R = 115000$ e $r_0 = 0,8 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5$, $\beta = 8.0$; $N = 4$, $\beta = 6.4$; $N = 3$, $\beta = 6.2$; $N = 2$, $\beta = 5.8$; $N = 1$, $\beta = 3.6$.

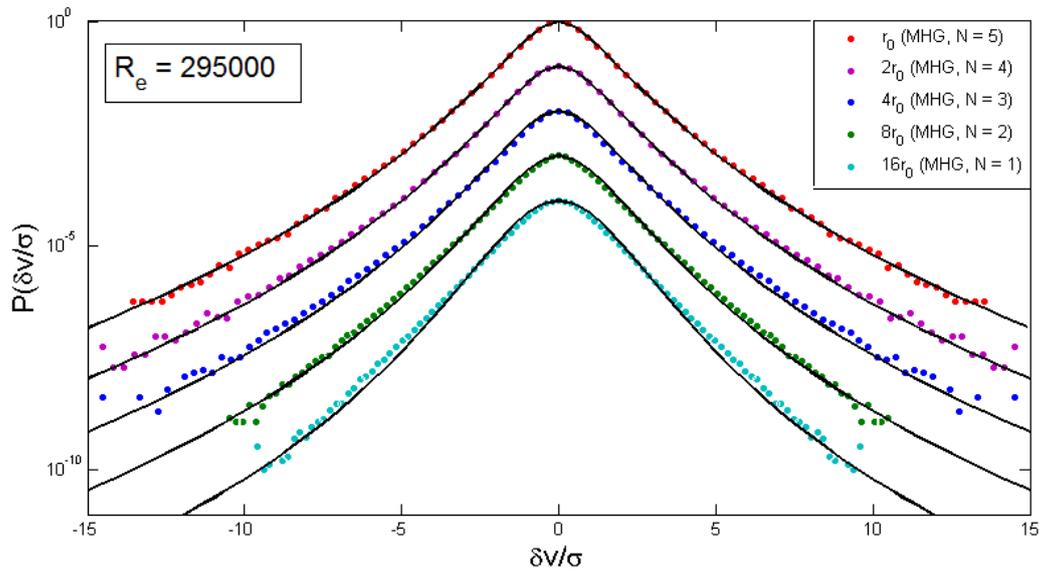


Figura 4.18 Turbulência Euleriana. $R = 295000$ e $r_0 = 0,7 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.0$; $N = 4, \beta = 7.0$; $N = 3, \beta = 6.0$; $N = 2, \beta = 5.0$; $N = 1, \beta = 4.0$.

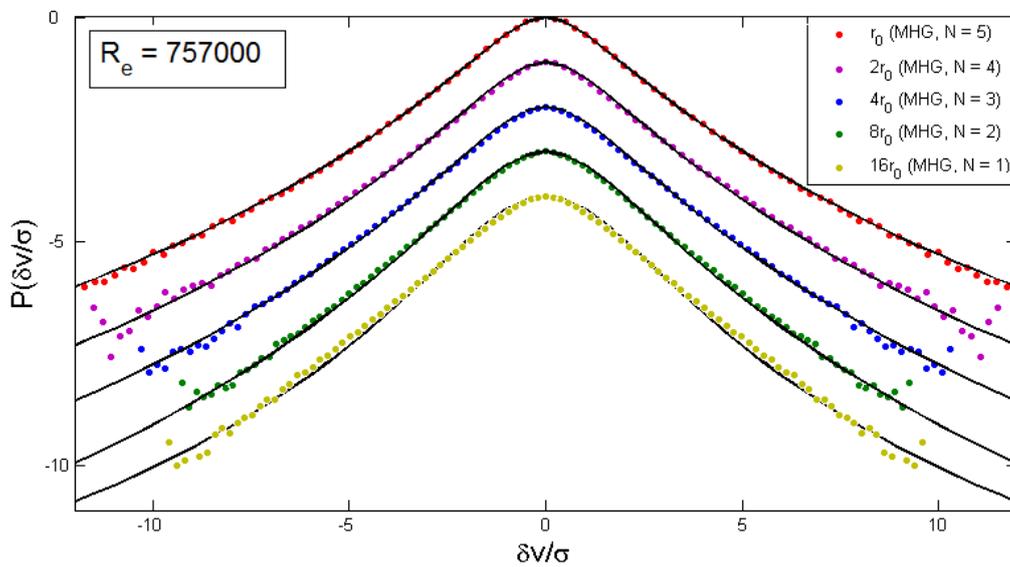


Figura 4.19 Turbulência Euleriana. $R = 757000$ e $r_0 = 0,6 \times 10^{-5}m$. Ajustes dados pelas curvas teóricas do nosso modelo com parâmetros dados por $N = 5, \beta = 8.4$; $N = 4, \beta = 8.0$; $N = 3, \beta = 7.0$; $N = 2, \beta = 6.0$; $N = 1, \beta = 3.7$.

tribuição dos tamanhos de rochas [34]. A distribuição foi resgatada em 1962 no contexto de turbulência, mas Kolmogorov e Obukhov não ousaram invocar a mesma argumentação por parecer bastante especulativa quando aplicada à cascata de energia, do ponto de vista matemático. Alguns anos mais tarde, Gurvich e Yaglom [74] propuseram um modelo Log-Normal como resultante de um produtório de fatores aleatórios, com o uso do Teorema do Limite Central.

Queremos mostrar que o nosso modelo dinâmico estocástico reproduz a mesma distribuição Log-Normal para o fluxo de energia quando consideramos uma cascata infinita. Como o modelo fornece um procedimento para calcular a fdp do fluxo de energia como uma sequência de integrais, precisamos mostrar que uma sequência infinita de integrações, no sentido da eq. (4.65), converge para a distribuição Log-Normal. Para isso, poderíamos considerar os momentos desta distribuição Log-Normal e mostrar que podem ser reproduzidos pela distribuição limite ($N \rightarrow \infty$). Esta condição é necessária, mas não é suficiente para dizer que as duas distribuições são iguais. A distribuição Log-Normal não é definida unicamente pelos seus momentos [75] e a demonstração deste teorema será feita de forma mais cuidadosa com o uso do TLC (Apêndice D).

Teorema 4.2 *Seja*

$$P_N(\epsilon) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P(\epsilon|\epsilon_{N-1}) \dots P(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_{N-1} \dots d\epsilon_1, \quad (4.99)$$

onde $P(\epsilon_i|\epsilon_{i-1})$ é dado pela eq. (4.2). Então, se $\beta/N = \frac{1}{\sigma^2}$, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty; \beta \rightarrow \infty} P_N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \epsilon - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.100)$$

A demonstração é dada no Apêndice B. Alternativamente, podemos verificar de forma mais imediata que os momentos da distribuição limite descrita no teorema são os mesmos de uma Log-Normal. Note que, utilizando a eq. (4.32) para os momentos de ϵ_N ,

$$\langle \epsilon^p \rangle = \langle \epsilon_0^p \rangle \prod_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\beta}{\beta - j} \right)^N, \quad (4.101)$$

e fazendo $\beta = N/\sigma^2$, podemos escrever o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty; \beta \rightarrow \infty} \langle \epsilon^p \rangle = \epsilon_0^p \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{j\sigma^2}{N} \right)^{-N}. \quad (4.102)$$

Reconhecendo no limite da expressão acima a definição da função exponencial, ficamos

com

$$\lim_{N \rightarrow \infty; \beta \rightarrow \infty} \langle \epsilon^p \rangle = \epsilon_0^p e^{\sum_{j=0}^{p-1} j \sigma^2}. \quad (4.103)$$

Aplicando a fórmula da soma, $\sum_{j=1}^{p-1} j = p(p-1)/2$, obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty; \beta \rightarrow \infty} \langle \epsilon^p \rangle = \epsilon_0^p e^{p(p-1)\sigma^2/2}. \quad (4.104)$$

Assim, encontramos os momentos de uma curva Log-normal de média $\epsilon_0 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ e segundo momento dado por $e^{\sigma^2} \epsilon_0^2$. O modelo Log-Normal para turbulência consiste também em uma prescrição de como σ^2 deve depender da escala r do experimento. Por exemplo, Kolmogorov em K62 escolheu uma dependência logarítima para σ^2 como mostrado em (2.47). Mais recentemente, outros autores [41] propuseram uma lei de potência do tipo

$$\sigma^2 \sim \frac{1}{r^\alpha}, \quad (4.105)$$

com $\alpha > 0$.

Um detalhe precisa ser esclarecido nesta etapa. Apesar de o nosso modelo resultar no modelo Log-Normal, precisamos tomar um número infinito de níveis de modo que, para a expressão $L/r = b^N$ ser satisfeita para comprimentos finitos, teríamos que fazer $b \rightarrow 1$. Neste caso, não seria tão justificável a separação de escalas temporais, já que as escalas estariam muito próximas, de forma que a aproximação de separação temporal usada no Teorema 4.1 não deveria ser aplicada. Portanto, apesar de existir matematicamente o limite contínuo para o nosso modelo e este limite resultar no conhecido modelo Log-Normal, ainda não temos uma visão clara de como isto pode ser realizado experimentalmente para afirmar quando o modelo Log-Normal (N infinito) seria mais apropriado do que os demais modelos de N finito.

Em resumo, conseguimos ligar o nosso modelo estocástico ao modelo K41 e ao modelo K62, no limite de uma cascata contínua, $\beta \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$. Além disso, verificamos que o modelo q -gaussiano pode também ser obtido no caso $N = 1$. Portanto, temos o nosso modelo como um modelo que não fixa o número de escalas da uma cascata de energia a priori. O número de escalas é encontrado de acordo com os dados experimentais e, como vimos na seção anterior, temos um número diferente de escalas na cascata conforme variamos a escala de observação.

Aplicações à Econofísica

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão da literatura dos modelos estocásticos para a dinâmica de preços de ativos negociados no mercado financeiro. Estamos interessados no modelo de Black-Scholes (BS) de precificação de opções e suas modificações em que a volatilidade dos retornos é uma variável estocástica. Apresentaremos um novo modelo de volatilidade estocástica de duas escalas, fortemente baseado no MHG. Este modelo é uma generalização do modelo de Hull-White [24] e prevê uma auto-correlação dada pela soma de dois decaimentos exponenciais, cada um com um tempo de relaxação diferente. Isto concorda com observações dos preços reais de bolsas de valores, inclusive a brasileira [25]. Aplicamos a fdp do modelo de duas escalas (${}_2F_0$) aos dados da série histórica do IBOVESPA e encontramos um ótimo ajuste. Mostramos que mais escalas podem ser consideradas e aplicamos a fdp geral do nosso modelo (${}_NF_0$) à série histórica do IBOVESPA para diferentes escalas temporais de observação.

Utilizaremos uma fórmula de Merton para corrigir os preços de derivativos a partir de um modelo de volatilidade estocástica para duas escalas, em que fazemos uma analogia entre volatilidade e fluxo de energia. Traçamos a curva que representa o chamado sorriso da volatilidade implícita (“*volatility smile*”) a partir do nosso modelo de duas escalas. Estimamos também a mesma curva para o modelo de um nível, a título de comparação, visto que este é semelhante ao modelo proposto com base na distribuição q -gaussiana para os retornos [60]. Selecionamos os parâmetros que melhor ajustam a fdp do modelo de uma escala a dados reais de fechamento de um ativo e mostramos um gráfico de precificação do modelo em função do tempo em comparação aos preços reais de uma opção sobre este ativo e ao modelo de Black-Scholes.

5.1 Opções e Modelo de Black-Scholes

No mercado financeiro, empresas que resolvem abrir seu capital podem ter seus papéis, ou ações (que são frações da empresa), negociados diariamente. O detentor de uma ação

é dono de parte da empresa e pode vender esta parte pelo preço de mercado quando tiver interesse. Contudo, as várias ordens de compra e venda são submetidas à bolsa em quantidades diferentes. Como o número de negócios é muito alto, esta diferença entre oferta e demanda altera o preço de uma ação ao longo do tempo. Isto significa que o valor de mercado de uma empresa não depende diretamente do seu balanço contábil, mas depende sobretudo do interesse das pessoas em comprar e vender suas ações.

A cada período de tempo, que pode ser de segundos, a bolsa de valores registra o preço de mercado com que determinado papel está sendo negociado. Assim, depois de vários registros, os preços do ativo podem ser vistos como uma série temporal. Aqui, o preço de uma ação, que depende do tempo, será representado por $S(t)$. Contudo, esta série temporal não parece universal pois existem tendências que são diferentes a depender da empresa negociada. Para obtermos uma série temporal universal, no sentido de ser semelhante para todas as empresas, devemos aplicar uma transformação à série dos preços. Em termos de turbulência, é como se estivéssemos diante de uma série de velocidades. Esta série depende de uma velocidade média do escoamento e não pode ser comparada a experimentos distintos. Quando extraímos apenas a série dos incrementos de velocidade, que não possui tendência, obtemos uma série estacionária. O mesmo pode ser feito para os preços através da transformação que define os retornos financeiros, $r_\tau(t)$, calculados para uma dada escala de tempo τ , como sendo a variação logarítmica do preço

$$r_\tau(t) = \ln S(t) - \ln S(t - \tau). \quad (5.1)$$

O estudo da série temporal dos retornos mostra que, para um período de algumas horas, os retornos possuem auto-correlação aproximadamente nula para qualquer ativo financeiro. Isto pode ser entendido a partir da hipótese do mercado eficiente [76], que supõe a existência de um mecanismo auto-regulador no mercado, de forma que todas as oportunidades de ganhar “dinheiro certo” (chamadas no jargão do mercado de “arbitragem”) são rapidamente exploradas pelos participantes e deixam de existir. A auto-correlação dos retornos é uma dessas oportunidades que, se existisse, seria rapidamente explorada até um ponto que seria de conhecimento público e que ninguém conseguiria aproveitá-la para obter lucro.

A série de retornos também parece auto-similar. Se reescalarmos o tempo (que pode ser feito recalculando a série de preços com outro período de tempo τ) obtemos uma série com movimentos semelhantes à anterior, apenas com variância diferente. A partir de uma simples inspeção visual, é notável a semelhança desta série de retornos com o Movimento Browniano. Na verdade, em respeito a ordem dos acontecimentos, um comportamento do

tipo Movimento Browniano já tinha sido estudado no contexto de finanças por Bachelier em 1900 [17], cinco anos antes de Einstein (1905), que estudou o problema do movimento aleatório de partículas macroscópicas flutuando na água [18]. Bachelier utilizou de forma pioneira matemática avançada no estudo de precificação de derivativos em sua tese, que resultou na primeira modelagem matemática do Movimento Browniano.

Apenas em 1973 houve uma formalização matemática adequada do problema de precificação de certos contratos derivativos, chamados de opções, que resultou no famoso modelo de Black-Scholes [23]. Os contratos de opções possuem um preço ajustado pela oferta e demanda, mas este preço depende sensivelmente da ação a que se refere a opção. Pelo fato de o preço desses contratos derivar do preço da ação, tais instrumentos são chamados de derivativos.

Especificamente, uma opção de compra (*call*) é um contrato em que um dos participantes, chamados de comprador da opção, paga pelo direito de poder comprar uma determinada ação S por um preço K combinado, ou preço de exercício, no dia do vencimento T . O participante que está na outra ponta da operação, chamado o lançador da opção, terá que honrar seu compromisso de vender a ação, caso seja solicitado pelo comprador, pelo preço K combinado. No dia do vencimento, caso a ação tenha um valor de mercado menor que o valor de exercício K , o comprador da opção não vai exercer seu direito, pois será mais barato comprar a ação no mercado, e dizemos que a opção “virou pó”. Porém, se a ação tiver um valor de mercado maior que o preço de exercício, o comprador da opção exercerá seu direito e comprará a ação pelo preço K . Assim, ele poderá vender o mesmo papel no mercado pelo preço S e lucrar $S - K$.

Similarmente, uma opção de venda (*put*) é um contrato em que um participante paga pelo direito de vender uma determinada ação por um preço combinado em um dia futuro [77]. Estes instrumentos foram inventados inicialmente com o intuito de oferecer aos participantes do mercado uma maneira de evitar riscos a um preço razoável. Contudo, diversos participantes do mercado perceberam que a própria definição das opções implica em uma dinâmica rápida cujos ganhos (e perdas) percentuais são extremamente elevados. Desta forma, opções tornaram-se também um objeto de investimento (e especulação) e uma fórmula que indique o seu preço teórico (ou justo), em um determinado dia, é uma oportunidade de negócio interessante.

O modelo de Black-Scholes (BS) tem como objetivo utilizar uma equação diferencial estocástica para modelar o preço dos ativos e a hipótese de não arbitragem para deduzir uma fórmula para o preço justo de uma opção. O preço justo, por definição, seria o preço pelo qual a opção pode ser negociada sem favorecer nenhuma das partes e, portanto,

deveria ser o preço de mercado. Desta maneira, se alguém precisar de uma opção de compra ou de venda para proteger-se do risco do mercado, ele pode aplicar o modelo de Black-Scholes para saber se está com vantagem ou desvantagem ao assumir uma dada posição no mercado de opções. Similarmente, pode-se utilizar esta fórmula para descobrir má precificação de opções e explorar arbitragens estatísticas, ou seja, oportunidades cujo ganho não é garantido, mas é provável.

Tecnicamente, o modelo de Black-Scholes consiste em uma equação para a dinâmica dos preços

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad (5.2)$$

onde μ e k são parâmetros reais positivos do modelo e dW é um ruído branco (incremento do processo de Wiener) de média zero e variância dt . O processo estocástico que governa $S(t)$, definido em (5.2), é conhecido como Movimento Browniano Geométrico e apresenta uma tendência exponencial. Portanto, não é um proceso estacionário. Isto significa que os preços são distribuídos segundo uma distribuição Log-Normal, ou seja, os retornos são distribuídos segundo uma curva normal, como pode ser facilmente verificado. De fato, definindo o retorno $r(t)$ como

$$r(t) = \ln S(t) \quad (5.3)$$

e aplicando o lema de Itô (Apêndice A), obtemos

$$dr = \frac{dS}{S} - \frac{dS^2}{2S^2}. \quad (5.4)$$

Inserindo (5.2) na equação acima resulta

$$dr = \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dW, \quad (5.5)$$

que é a equação para um movimento browniano, cuja distribuição é uma gaussiana com média $m = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ e variância $\text{var}[r] = \sigma^2 t$.

O valor de uma opção também é uma função do tempo que chamaremos de $V(S, t)$. Esta opção vence no instante T e o preço de exercício é K . A dedução original da fórmula de Black-Scholes para o preço da opção consiste em construir uma estratégia de investimento que combina compra de ações e opções. Este portfólio será formado com a compra de uma opção de compra sobre uma determinada ação S e a venda simultânea de Δ unidades desta mesma ação S . O valor deste portfólio no instante t é denotado por

Π e sua fórmula é dada por

$$\Pi(S, t) = -S\Delta(S, t) + V(S, t), \quad (5.6)$$

onde o sinal de $-$ no termo S significa que vendemos a ação. Suponha agora que o número de ações na carteira é mantido com o valor

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (5.7)$$

que será sempre ajustado com o passar do tempo. Note que nesse caso uma variação infinitesimal do preço do portfólio é dada por

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) dS + dV. \quad (5.8)$$

Aplicando agora o lema de Itô (Apêndice A) diretamente à variável V , obtemos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2. \quad (5.9)$$

Inserindo a equação acima em (5.8), obtemos

$$d\Pi = -\frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2. \quad (5.10)$$

Inserindo a eq. (5.2) na equação acima, chegamos na equação para a evolução de Π ,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (5.11)$$

A passagem crucial agora é perceber que este processo não é estocástico. Isto significa que o portfólio Π é livre de risco e, pela hipótese do mercado eficiente, ele deveria render o mesmo que qualquer outro processo livre de risco (como poupança ou CDB). Caso tivesse um retorno maior que a taxa r de retorno de um ativo livre de risco, os participantes poderiam pegar dinheiro emprestado a uma taxa r , assumindo a posição da carteira montada em (5.6), ou seja, comprariam o portfólio Π pois o lucro seria suficiente para pagar o empréstimo. Caso o portfólio rendesse menos que r , os participantes optariam por uma posição inversa à definida em (5.6), ou seja, venderiam o portfólio Π e emprestariam o dinheiro obtido na venda a um juro dado por pela taxa livre de risco r . Assim, a única maneira do portfólio criado no modelo de BS satisfazer a hipótese do mercado eficiente

(ausência de arbitragem) é que seu retorno seja exatamente r , ou seja,

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (5.12)$$

Podemos utilizar a condição acima em (5.11) para obter

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (5.13)$$

Esta equação diferencial parcial de segunda ordem é a chamada equação de Black-Scholes. Aplicando as seguintes condições de contorno para o preço de uma opção de compra (*call*)

$$C(0, t) = 0, \quad \forall t, \quad (5.14)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = S, \quad (5.15)$$

$$C(S, T) = \max(S - K, 0), \quad (5.16)$$

é possível resolver a eq. (5.13). Após fazer os respectivos cálculos, obtemos a fórmula final para o preço de uma opção de compra (*call*) [23]

$$C_{BS}(S, t; \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (5.17)$$

onde os parâmetros d_1 e d_2 são dados por

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (5.18)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \quad (5.19)$$

e $N(x)$ é a distribuição normal padrão acumulada

$$N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz. \quad (5.20)$$

Na equação (5.17), usamos o subscrito *BS* para denotar o preço de uma opção de compra (*call*) dado pelo modelo de Black-Scholes e, por conveniência, explicitamos a dependência na volatilidade σ . Uma observação precisa ser feita quanto ao tipo de opção que obedece a este modelo. Consideramos que a opção só pode ser exercida no dia do vencimento. Este

tipo de opção faz parte de uma categoria chamada de opções Europeias, ao contrário das opções Americanas, que podem ser exercidas a qualquer momento, até o dia do vencimento.

O modelo de precificação de Black-Scholes foi deduzido de uma maneira alternativa por Merton [78]. Alguns anos depois, o modelo ganhou grande popularidade entre acadêmicos e profissionais do mercado, ainda que haja alguma crítica na aplicação prática do modelo [79]. O fato é que o modelo passou a ser uma referência no estudo de precificação de qualquer derivativo financeiro e recebeu diversas modificações nos últimos anos. Em 1997, Merton e Scholes receberam o prêmio Nobel da Economia pelo seus trabalhos na precificação de opções. Black não foi agraciado com o prêmio, pois viera a falecer em 1995, mas foi mencionado como colaborador pelo comitê de premiação.

5.2 Mercados Reais : o “Sorriso” da Volatilidade e Leis de Potência

No final dos anos 80, a partir da crise de 1987, as opções negociadas nos mercados dos Estados Unidos começaram a apresentar características inéditas [77]. Quando substituimos os preços reais negociados no mercado de opções no modelo de Black-Scholes, obtemos a volatilidade, que é único parâmetro que não é observado diretamente. Esta constante do modelo de Black-Scholes pode ser calculada desta forma para cada preço de exercício K , possibilitando a construção de uma curva σ_{BS} vs. K , onde σ_{BS} é a volatilidade que, por ser calculada de maneira indireta a partir do modelo, é chamada de volatilidade implícita. De acordo com o modelo de BS, este gráfico deveria mostrar apenas uma função constante, visto que por definição σ_{BS} é um parâmetro fixo do modelo, mas a curva real possui concavidade para cima. Este fenômeno é conhecido como “sorriso da volatilidade” (*volatility smile*) como ilustrado na Figura 5.1. Na prática, significa que o modelo de Black-Scholes não funciona da mesma maneira para todos os preços de exercício. Ou seja, σ não pode ser uma constante.

Além disso, a abundância de dados observacionais do mercado para intervalos de tempo cada vez mais curtos revelou que a hipótese de Black-Scholes (de que os retornos eram distribuído segundo uma curva gaussiana) não é verdade. Escalas de horas, minutos e segundos mostram que a distribuição dos retornos financeiros se distancia cada vez mais de uma curva normal e passa a apresentar caudas gordas, estilo lei de potência [80]. Isto significa que eventos considerados raros pelo modelo de BS acontecem com

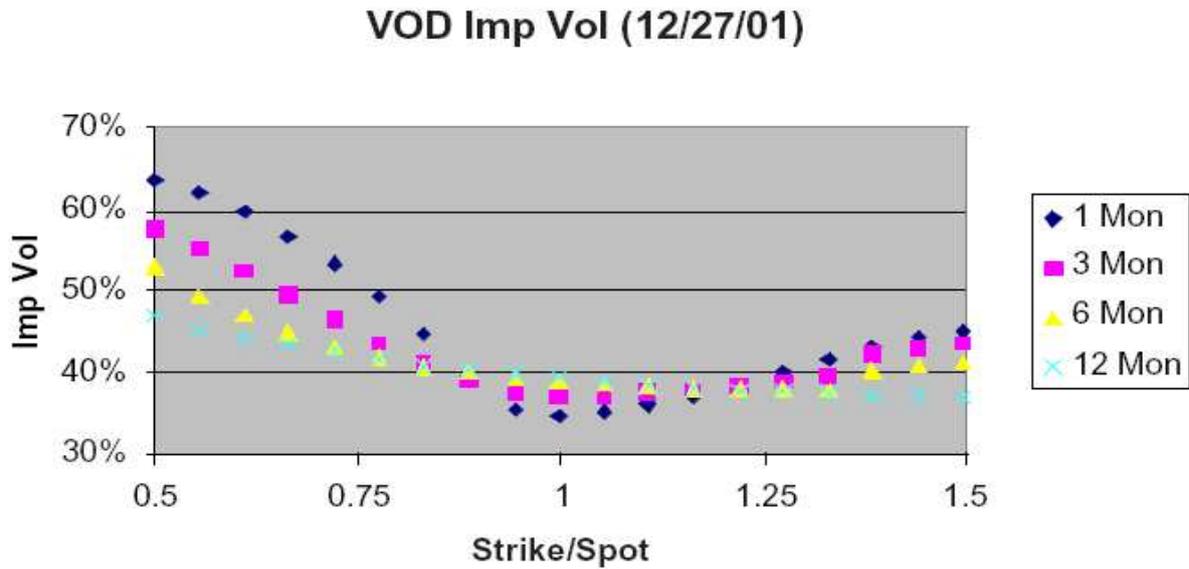


Figura 5.1 Volatilidade implícita das ações da Vodafone (VOD) em função da razão K/S . A concavidade desta curva representa o chamado “sorriso da volatilidade”.

mais frequência do que se imaginava. Isto também pode estar relacionado ao fato da volatilidade dos preços variar de forma intermitente com o tempo.

Existem diversas maneiras de modelar a volatilidade. Os modelos discretos incluem modelos tipo ARCH [81] e suas generalizações naturais, GARCH [82], EGARCH [83], etc. Estes modelos assumem que as flutuações (incrementos quadráticos) presentes são funções das flutuações imediatamente anteriores. A forma desta função vai de um modelo de combinação linear (ARCH) até generalizações mais sofisticadas. Neste caso, dizemos que o modelo prevê a volatilidade realizada, pois está estudando a série temporal da volatilidade e não o valor implícito a partir de um modelo de precificação de derivativos. Uma abordagem interessante para previsão de volatilidade é a utilização de inteligência artificial (Redes Neurais e Algoritmos Genéticos) [84], onde a volatilidade é estudada também como uma série temporal. Neste caso, a rotina tenta mapear os valores passados em um valor futuro a partir de uma combinação não linear com alguns parâmetros livres (pesos) que serão ajustados conforme a rede neural passe por um treinamento exaustivo (tentativa e erro).

Especificamente nesta tese, estamos interessados apenas em modelos de volatilidade estocástica, como o modelo de Hull-White [24] e o modelo de Heston [85], pela semelhança que estes modelos possuem com o Modelo Hipergeométrico Generalizado para

flutuações de velocidade em um escoamento turbulento. Esses modelos consideram que a volatilidade obedece a um determinado processo estocástico, sendo que a diferença entre os modelos é a forma funcional do respectivo termo estocástico. Vamos revisar a seguir alguns modelos de volatilidade estocástica mais relevantes para nosso estudo antes de introduzirmos nosso modelo MHG no contexto de finanças.

5.3 Modelos de Volatilidade Estocástica

Vamos apresentar e comentar rapidamente alguns modelos de volatilidade estocástica para entender qual o cenário acadêmico no qual o MHG será inserido e em que sentido podemos dizer que ele é uma generalização natural de modelos anteriores. Inicialmente, temos o modelo de Heston [85]

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v} S dW_1, \quad (5.21)$$

$$dv = -\gamma(v - \theta)dt + \kappa\sqrt{v}dW_2, \quad (5.22)$$

$$E[dW_1 dW_2] = \rho dt. \quad (5.23)$$

A primeira equação é idêntica à equação de BS, mas o termo de volatilidade passa a ser também modelado por uma equação diferencial estocástica que possui reversão à média (isto é, a volatilidade tende a voltar para seu valor médio após grandes flutuações, uma propriedade observada nos mercados em geral) e um ruído com amplitude proporcional a \sqrt{v} , resultando em flutuações que crescem com magnitude do presente valor da volatilidade. A volatilidade no modelo de Heston pode atingir o valor zero mas, neste caso, ela volta rapidamente a um valor positivo. É possível mostrar que, no equilíbrio, a volatilidade do modelo de Heston atinge uma distribuição do tipo gama, que possui uma cauda que cai exponencialmente [85]. A equação (5.23) representa uma dependência entre os ruídos do modelo que pode ser observada ($\rho \neq 0$) ou não ($\rho = 0$) no mercado. Geralmente, existe uma dependência entre o retorno anterior e a volatilidade seguinte, mas o inverso não é verdade. Este efeito é chamado de *Leverage* [86] e, caso houvesse dependência entre a volatilidade passada e o retorno futuro, seria rapidamente explorado pelos participantes do mercado. Então, esta observação dos dados é consistente com a idéia de mercado eficiente.

O modelo de Stein [87, 88] apresenta para a equação da volatilidade um ruído aditivo, diferentemente do modelo de Heston que prescreve um ruído multiplicativo. Mais

especificamente, o modelo de Stein corresponde ao seguinte conjunto de equações.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1, \quad (5.24)$$

$$d\sigma = -\gamma(\sigma - \theta)dt + \alpha dW_2, \quad (5.25)$$

$$E[dW_1 dW_2] = \rho dt, \quad (5.26)$$

onde a distribuição de σ tende a uma gaussiana no equilíbrio. O termo de ruído altera completamente a distribuição de equilíbrio para a volatilidade e, conseqüentemente, tem influência sobre a distribuição dos retornos e fórmulas de precificação.

O modelo de Hull-White [24] possui uma equação linear para a dinâmica da volatilidade:

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v} S dW_1, \quad (5.27)$$

$$dv = -\gamma(v - v_0)v dt + \kappa v dW_2, \quad (5.28)$$

$$E[dW_1 dW_2] = \rho dt. \quad (5.29)$$

O modelo original de Hull-White consiste em fazer $v_0 = 0$, caso em que a distribuição da volatilidade é uma Log-Normal, que possui caudas que caem mais rápido que uma lei de potência e, como vimos, produzem distribuições de equilíbrio para o retorno com cauda que também cai mais rápido que lei de potência. Sabe-se que uma modificação deste modelo ($v_0 > 0$) resulta em uma distribuição de equilíbrio tipo gama invertida para a volatilidade [61]. De fato, a eq. (5.28) é equivalente à eq. (4.1) para a dinâmica do fluxo de energia em um modelo de cascata com um único nível, cuja fdp é uma distribuição gama invertida com mostrado na eq. (4.6). Em sua forma geral, dada nas eqs. (5.27) e (5.28), o modelo de Hull-White não permite, tanto quanto se saiba, calcular a distribuição de probabilidade de equilíbrio dos retornos de maneira exata. Entretanto, lançando-se mão de uma hipótese de separação temporal, semelhante àquela formalizada no capítulo 4 pode-se obter a distribuição de equilíbrio dos retornos [61]. Nesse caso, como vimos no capítulo anterior, a distribuição resultante é uma q -gaussiana (relacionada à função ${}_1F_0$), que possui caudas do tipo lei de potência.

Os modelos considerados acima apresentam auto-correlação positiva na volatilidade, tendência também observada em dados observacionais [25]. De uma forma geral, as diversas equações diferenciais estocásticas (sobretudo a forma do ruído) possuem impacto direto na fórmula de precificação de opções. Por isso, vamos precisar de um resultado que permite o cálculo do preço de uma opção com base em um modelo de volatilidade

estocástica.

Heston [85] encontrou uma fórmula fechada para a precificação de opções europeias a partir de seu modelo. A dedução utiliza o cálculo de Itô e equações de Fokker-Planck, de maneira análoga à demonstração que fizemos para o caso de Black-Scholes. Não faremos a demonstração do caso geral para precificação de opções, mas utilizaremos uma abordagem devida a Merton [89] que relaciona a fórmula de BS com o preço real que se espera, caso a volatilidade não seja constante. Nesse caso, o preço da opção, C , será dado por uma média ponderada dos preços do modelo de Black-Scholes, C_{BS} , com pesos dados pela fdp da volatilidade. Podemos escrever esta fórmula em termos de valor esperado

$$C(S, t) = E[C_{BS}(S, t; \bar{\sigma}(t))], \quad (5.30)$$

onde $C(S, t)$ é o preço da opção de compra no instante t , $C_{BS}(S, t; \sigma)$ é a fórmula de BS para o preço da opção de compra no instante t , para um dado preço da ação S para uma dada volatilidade do modelo σ . A variável $\bar{\sigma}(t)$ usada na equação acima é a média temporal da volatilidade definida como

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_t dt. \quad (5.31)$$

Note que em termos da variável v definida em (5.28) a volatilidade σ é dada pela relação $\sigma^2 = v$. A partir da fórmula acima, se considerarmos o caso original de BS em que a volatilidade é constante, teremos que a média da volatilidade é apenas σ e a eq. (5.30) reduz-se à fórmula de Black-Scholes. No caso de volatilidade estocástica, existe uma distribuição para a variável $\bar{\sigma}(t)$ e, como veremos, esta distribuição será responsável por uma precificação diferente da fórmula de BS, resultando em uma curva semelhante aos dados observacionais para o sorriso da volatilidade implícita.

5.4 Precificação de Opções com o MHG de Duas Escalas

A aplicação do MHG à modelagem de preço de ativos para o caso $N = 1$ já era conhecida na literatura como uma aproximação do modelo de Hull-White original [24], historicamente o primeiro trabalho a propor uma volatilidade estocástica. Como comentamos, o modelo de Hull-White resulta na q -gaussiana como distribuição de equilíbrio para os retornos [61]. Contudo, o modelo prevê uma auto-correlação positiva para a volatilidade como um único decaimento exponencial, que não parece ser a função mais

adequada [25]. Além disso, a distribuição q -gaussiana não ajusta muito bem a distribuição empírica dos retornos registrados para períodos de tempo muito curtos (alta frequência). Motivados por estas evidências, resolvemos aplicar o MHG com $N > 1$ a dados financeiros. No caso de duas escalas, o modelo possui uma fórmula fechada para a fdp de equilíbrio da volatilidade e por isso será explorado isoladamente para produzir uma fórmula de precificação de opções. O modelo já foi proposto no contexto de turbulência no capítulo 4 e será reparametrizado no contexto de econofísica da seguinte maneira:

$$dr_\tau = \sqrt{v_2}dW, \quad (5.32)$$

$$dv_2 = -\gamma_2(v_2 - v_1)dt + k_2v_2dW_2, \quad (5.33)$$

$$dv_1 = -\gamma_1(v_1 - v_0)dt + k_1v_1dW_1, \quad (5.34)$$

onde v_0 é uma constante. A equação dos retornos é semelhante ao modelo de Black-Scholes dado em (5.2), exceto que assumimos um termo de tendência igual a zero para os retornos. Essa simplificação é fisicamente justificável, uma vez que os retornos para dados de alta frequência possuem tendência aproximadamente zero. A equação para a volatilidade v_2 é semelhante ao modelo de Hull-White com média positiva v_1 . Esta média v_1 , que corresponde a uma volatilidade de mais longo prazo, adquire agora uma dinâmica e passa a flutuar com o tempo de forma semelhante à volatilidade v_2 de mais curto prazo. Os incrementos dos processos de Wiener (dW, dW_1, dW_2) são descorrelacionados. A correlação pode, em princípio, ser inserida para dar o efeito de *leverage* comentado anteriormente, mas não será discutida aqui. Podemos dizer que o nosso modelo para volatilidade estocástica possui duas escalas temporais distintas. A volatilidade v_2 possui um tempo de relaxação, γ_2^{-1} , bem maior que o dos retornos (sua auto-correlação pode durar dias antes de atingir o zero, enquanto o retorno dura apenas minutos). De maneira análoga, modelamos a volatilidade v_1 de mais longo prazo com um tempo de relaxação ainda maior que o da volatilidade v_2 , ou seja $\gamma_1^{-1} \gg \gamma_2^{-1}$. Esta escolha é justificada pela observação da função de auto-correlação da volatilidade, estudada no capítulo 3 no contexto de fluxo de energia para o modelo de duas escalas (3.49), apresenta um decaimento com dupla exponencial

$$C_\tau = Ae^{-\gamma_1\tau} + Be^{-\gamma_2\tau}, \quad (5.35)$$

onde A e B são constantes. Observa-se uma inclinação da curva de auto-correlação para intervalos τ curtos e outra inclinação para intervalos longos. Esta fórmula funcional para a

auto-correlação já tinha sido proposta e deduzida para outros modelos que compartilham a mesma parte determinística do MHG, já que o cálculo da auto-correlação não depende do termo de ruído. Por isso, o modelo de Heston modificado (para dois níveis) também possui esta característica [25].

A volatilidade de longo prazo v_1 , que era considerada constante no modelo de Hull-White, passa, de acordo com a dinâmica (5.34), a ser distribuída segundo uma gama invertida. Como vimos no capítulo 4, o MHG com $N = 2$ resulta em uma fórmula fechada para a fdp de equilíbrio para a variável mais rápida que é uma generalização da distribuição gama invertida. Podemos então escrever a distribuição $p_2(v_2)$, para a volatilidade v_2 de maneira análoga à eq. (4.13)

$$p_2(v_2) = C \epsilon_2^{-2 + \frac{-\beta_2 - \beta_1}{2}} K_{\beta_2 - \beta_1} \left(2 \sqrt{\frac{\beta_2 \beta_1 v_0}{v_2}} \right), \quad (5.36)$$

onde $K_a(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie, as constantes são definidas da maneira usual por $\beta_i = \frac{2\gamma_i}{\kappa_i^2}$ ($i = 1, 2$) e C é uma constante de normalização, dada por

$$C = 2 \left(\frac{\beta_1 v_0}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}} \left[\frac{(\beta_2)^{\beta_2 + 1}}{\Gamma(\beta_2 + 1)} \right] \left[\frac{(\beta_1 v_0)^{\beta_1 + 1}}{\Gamma(\beta_1 + 1)} \right]. \quad (5.37)$$

Esta distribuição pode ser também utilizada para modelar o volume financeiro associado aos negócios de um determinado ativo que é uma variável que possui relação com a volatilidade, de maneira análoga aos estudos das Refs. [90, 91]. Contudo, nosso interesse maior é aplicar esta fórmula na precificação de opções para obtermos o sorriso da volatilidade e encontrar uma fórmula fechada para a fdp de equilíbrio para os retornos.

Aplicar a eq. (5.30) para o modelo de duas escalas no caso geral resulta em um esforço computacional grande, pois temos que estimar numericamente a fdp dependente do tempo da volatilidade v_2 . Contudo, podemos estimar esta fórmula no limite em que a volatilidade é muito mais lenta que os retornos. Nesta aproximação, a média temporal da volatilidade é uma variável aleatória com distribuição dada pela fdp de equilíbrio de v_2 . Assim, denotando por C_{MHG_2} o preço de uma opção de compra no modelo MHG com duas escalas, temos

$$C_{MHG_2}(S, t) = \int_0^\infty C_{BS}(S, t; v_2) p(v_2) dv_2, \quad (5.38)$$

onde a fórmula de BS foi parametrizada em função de $v = \sigma^2$, por conveniência. Esta

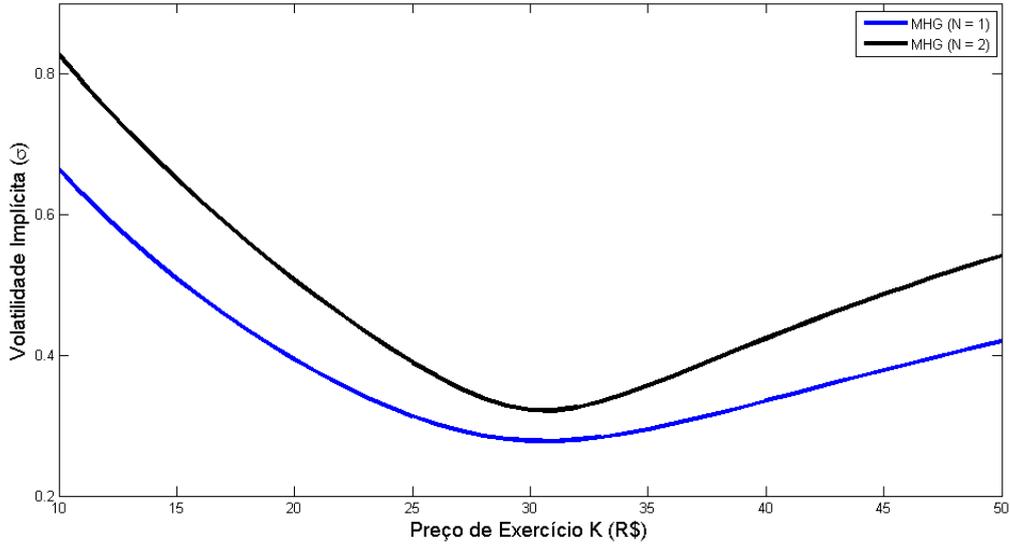


Figura 5.2 Sorriso da Volatilidade previstos pelo MHG_N , com $N = 1$ e $N = 2$. Parâmetros: $r = 0.1$, $T = 0.2$, $S_0 = 30$, $\beta = 1.33$, $v_0 = 4,5 \times 10^{-4}$.

integral não possui uma fórmula fechada mas foi integrada numericamente. A curva que desejamos obter é a volatilidade implícita σ_{BS} definida a partir da fórmula de Black-Scholes, em função do preço de exercício K . Para isso, vamos supor que o mercado seja descrito pelo MHG_2 . Um participante do mercado resolve utilizar os preços obtidos do MHG_2 para estimar a volatilidade implícita do modelo de Black-Scholes. Então, ele faz a seguinte identidade:

$$C_{BS}(S, T - t, K, r, \sigma) = C_{MHG_2}(S, T - t, K, r, \beta_1, \beta_2, v_0), \quad (5.39)$$

onde os parâmetros β_1 , β_2 e v_0 podem ser obtidos a partir do ajuste da distribuição ${}_2F_0$ ao histograma empírico dos retornos. Após substituir todos os dados disponíveis no mercado $(S, T - t, K, r)$, a única variável restante é a volatilidade, que pode ser obtida desta equação. Desta maneira, encontra-se a volatilidade implícita σ_{BS} e, ao plotarmos σ_{BS} para diversos valores do preço de exercício K , chegamos ao sorriso da volatilidade, mostrado na Figura 5.2. Nessa figura também mostramos, para efeito de comparação, o sorriso da volatilidade calculado para o modelo MHG_1 .

Resolvemos não fazer o caso geral de precificação (N qualquer) pois as fdps de equilíbrio para a volatilidade no caso $N > 2$ não são conhecidas em uma forma fechada, ainda que possam ser expressa facilmente em forma integral. Outro motivo foi pelo apelo à sim-

plicidade, visto que o caso $N = 2$ já contempla uma fdp original na forma fechada cujo impacto na precificação é bastante ilustrativo. Vale ressaltar que este tipo de generalização da fórmula de precificação de opções de Black-Scholes já foi estudada para a distribuição q -gaussiana [60] e também para outras distribuições, como a distribuição exponencial [92].

Na Figura 5.3 está representada uma parte da série temporal para o preço de mercado da opção de compra PETRH34, comparadas com preços teóricos previstos pelo modelo de Black-Scholes e o MHG_1 . Aqui, por simplicidade, estamos considerando apenas o modelo MHG com $N = 1$, cujos cálculos demandam um esforço computacional menor. De acordo com a notação oficial de opções, PETRH34 é uma opção de compra sobre a ação PETR4 que vence no mês de agosto, com preço de exercício $K = 34$. Os preços teóricos do MHG_1 foram calculados utilizando nosso modelo com os parâmetros β_1 e v_0 obtidos a partir do ajuste da função ${}_1F_0$ ao histograma dos retornos da ação PETR4 (período de 2005 a 2010). Este ajuste poderia ter sido feito com modelos mais gerais $N > 1$, mas o caso $N = 1$ é suficiente para ilustrar bem nossa proposta de precificação. Mostraremos como o demais MHG_N se ajustam aos histogramas empíricos de retornos financeiros mais adiante. Os preços teóricos de BS foram obtidos a partir do cálculo da volatilidade histórica dos retornos da ação PETR4. De posse dos parâmetros da curva teórica, determinamos a curva $p_1(v_1)$ da volatilidade e aplicamos na equação equivalente à eq. (5.38) para o caso $N = 1$. Caso o modelo seja utilizado por praticantes do mercado, note que existem regiões do gráfico em que o modelo indica que a opção está com um preço maior do que o preço justo, momento em que o modelo indicaria venda. Similarmente, as regiões em que o modelo indicaria compra são aquelas em que o preço real está abaixo do preço considerado justo. É necessário, contudo, validar (e.g, usando uma série histórica de dados) o modelo, com o objetivo de verificar se essa estratégia de investimento baseada no modelo MHG produz ganhos relevantes. Note que próximo do vencimento, o preço previsto pelo MHG_1 está sempre acima do preço de mercado (bem como preço de BS). Isso pode ser indicativo da falta de liquidez da opção nesta região ou que para modelar melhor o preço da opção nesse período talvez seja necessário considerar mais escalas no modelo de volatilidade.

5.5 Modelo Hipergeométrico Generalizado para os Retornos

Nesta seção, vamos apresentar o MHG_N em seu caso geral (N qualquer) para descrever as flutuações dos retornos de um ativo financeiro. Vale lembrar aqui que o

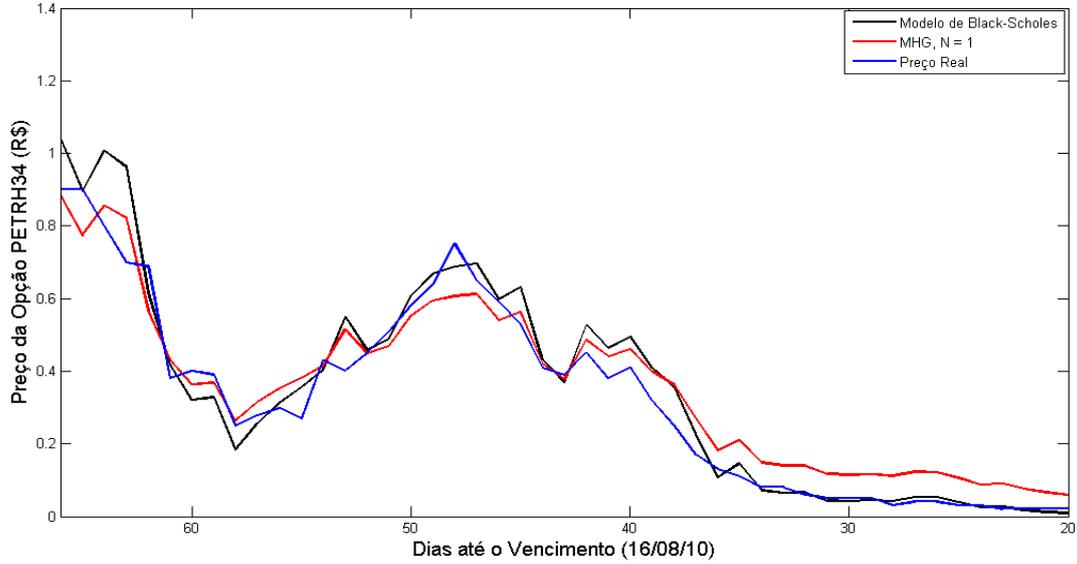


Figura 5.3 Série real de preços da opção de compra PETRH34 com os ajustes dos modelos de Black-Scholes e MHG_1 . Data do vencimento: 16/08/10. Início do experimento: 13/05/10 ($T = 65$ dias). Preço de exercício $K = 33.77$. Taxa livre de risco $r = 0.1$. Parâmetros obtidos da série temporal PETR4: $\beta = 1.19$, $v_0 = 0.11$.

modelo MHG foi introduzido (capítulo 3) para descrever o fenômeno de intermitência em turbulência. por outro lado, recentemente foi proposta na literatura [93] uma analogia entre o fenômeno de turbulência em fluidos e as flutuações de preços em ativos financeiros comercializados em bolsa. Segundo essa analogia, pode-se descrever os momentos estatísticos dos retornos financeiros e das flutuações de velocidade através da mesma função de estrutura. O fluxo de energia pode ser relacionado a um “fluxo de informação”, pois a volatilidade de longo prazo, causada por participantes do mercado que operam em períodos mais longos de tempo, passa a influenciar os participantes que operam em períodos mais curtos, a exemplo da cascata de energia em turbulência. Contudo, até onde sabemos, o modelo que vamos descrever a seguir é a primeira proposta quantitativa para explorar a semelhança entre as cascatas de energia e de informação.

O modelo MHG_N no contexto de econofísica é dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais estocásticas:

$$dr_\tau = \sqrt{v_N} dW, \quad (5.40)$$

$$dv_N = -\gamma_N(v_N - v_{N-1})dt + k_N v_N dW_N, \quad (5.41)$$

$$\vdots$$

$$dv_1 = -\gamma_2(v_1 - v_0)dt + k_1v_1dW_1, \quad (5.42)$$

com v_0 constante. Note que r_τ permanece com a dinâmica de BS e as demais variáveis (volatilidades) possuem o mesmo tipo de dinâmica seguida pelo fluxo de energia no modelo de cascata de energia com N escalas discutido no capítulo 4. Por outro lado, a dinâmica de cada uma das volatilidades v_i é a mesma que a utilizada no modelo de Hull-White. Desta maneira, podemos considerar o MHG_N para os retornos como uma generalização natural do modelo de Hull-White. O número de escalas, por outro lado, dependerá da escala temporal de observações utilizadas. Períodos de tempo da ordem de segundo precisarão de algumas escalas para descrever uma fdp que possui caudas mais gordas do que as de uma gaussiana. Por outro lado, períodos de tempo longos, da ordem de dias, serão descritos por apenas uma escala ou até mesmo nenhuma, que é o modelo gaussiano. Não podemos, assim como em turbulência, estipular a priori o número de escalas do modelo. O que faremos é descobrir o número mínimo de níveis na cascata necessário para descrever uma determinada escala temporal.

A auto-correlação da volatilidade v_N no nosso modelo pode ser calculada utilizando a eq. (3.49)

$$C_\tau = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\gamma_i \tau}. \quad (5.43)$$

Note que esta expressão é uma generalização da proposta encontrada na literatura [25] da auto-correlação como soma de duas exponenciais. Esta é uma vantagem comum a qualquer modelo de cascata que possua um termo determinístico de reversão à média. Contudo, modelos com mais de um nível tendem a ser analiticamente intratáveis e encontrar a fdp dos retornos torna-se uma tarefa impossível. O modelo de Heston, cuja fdp de equilíbrio pode ser obtida analiticamente [94] é uma rara exceção entre os modelos de volatilidade estocástica. Isto se dá pois um dos termos na equação de Fokker-Planck que normalmente é não linear torna-se linear para o caso de Heston ($\sim \sqrt{v^2}$) e não linear para os demais casos. O próprio caso de Hull-White já traz esta não linearidade e a fdp de equilíbrio dos retornos não pode ser obtida analiticamente, sem a hipótese de grande separação temporal invocada aqui e em outros trabalhos. Mesmo assim, ao estudarmos o modelo de Heston de dois níveis, no limite de grande separação temporal, não encontramos fdps fechadas para os retornos por uma dificuldade inerente na integração de

uma sequência de distribuições gama, que resultava em funções transcendentais cada vez mais complicadas. Desta forma, a vantagem do MHG_N é que ele permite rapidamente o cálculo da auto-correlação da volatilidade, possui uma fórmula para os momentos da distribuição da volatilidade e dos retornos de maneira imediata e fornece uma distribuição para os retornos em termos de funções transcendentais conhecidas (para qualquer nível), as funções hipergeométricas generalizadas.

As distribuições P_N do MGH_N já foram apresentadas na eq. (4.67) e serão utilizadas aqui novamente para os retornos financeiros. Por simplicidade, vamos escolher uma versão da distribuição em que todos os parâmetros livres, β_i , são iguais. Isto significa que a dinâmica de cada escala é essencialmente a mesma, exceto pela rapidez com que se dá o processo. Assumir que todos os β_i são iguais, $\beta_i = \beta$, não implica dizer que as diferentes equações para as volatilidades v_i possuem o mesmo tempo característico, o que invalidaria nossa hipótese de separação das escalas temporais. O parâmetro β_i pode ser constante e obedecer a hipótese de separação temporal se a constante do ruído κ_i também crescer com i , como vimos no capítulo 4. Outra maneira imediata de perceber este fato é notar que β_i é um parâmetro da distribuição de equilíbrio de v_i e, portanto, não pode depender de escala temporal.

Vamos agora aplicar a fdp do MHG_N para retornos financeiros, a partir da expressão (4.67), com $\beta_i = \beta$

$$P_N(r_\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^N v_0}} \left(\frac{\Gamma(\beta_i + 3/2)}{\Gamma(\beta_i + 1)} \right)^N {}_N F_0 \left(\beta + \frac{3}{2}, \dots, \beta + \frac{3}{2}; -\frac{r_\tau^2}{2v_0\tau\beta^N} \right). \quad (5.44)$$

Para o ajuste aos dados, recebemos as cotações do IBOVESPA, fornecido pela própria Bovespa, para medições na escala de 30 segundos. Em seguida, calculou-se os retornos a partir da transformação mostrada na eq. (5.1), para diversas janelas de tempo τ_i .

$$r_{\tau_i}(j) = \ln S(j + \tau_i) - \ln S(j), \quad (5.45)$$

onde fizemos uma escolha motivada pelo modelo de turbulência, com $\tau_{i-1} = b\tau_i$, com $b = 2$ (escolhido arbitrariamente) e $\tau_N = 30s$, que corresponde à menor escala temporal das observações. Portanto, fazemos uma analogia desta escala τ_N com a menor escala espacial dos experimentos em turbulência. O parâmetro N foi escolhido como o menor valor possível que oferece melhor ajuste aos dados. De posse da série de retornos, que é estacionária, calculamos o histograma para cada escala temporal τ_i e ajustamos simul-

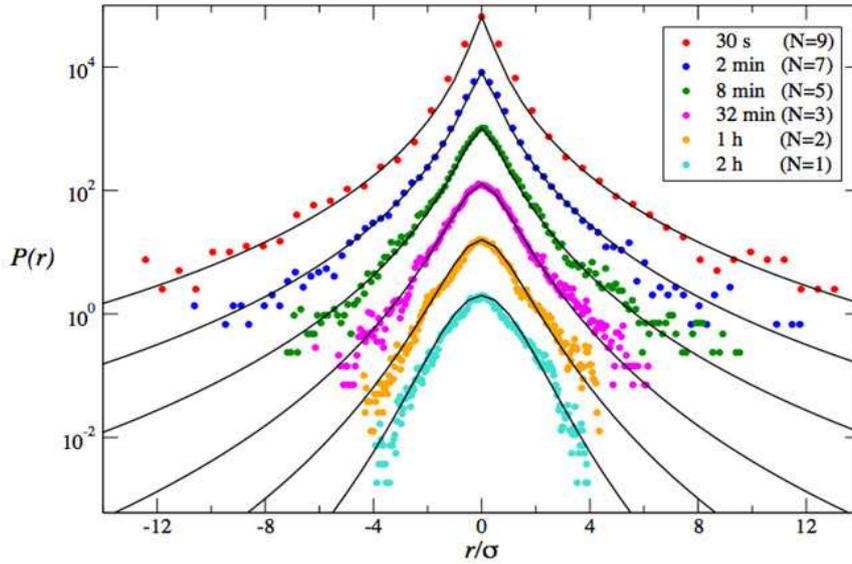


Figura 5.4 Ajuste ao Histograma de retornos da série histórica do IBOVESPA. Todas as curvas do MHG foram selecionadas com o mesmo parâmetro $\beta = 3.0$.

taneamente todas as curvas com único parâmetro que restou livre, β , como mostrado na Figura 5.4 para alguns valores de τ_i . As curvas foram transladadas verticalmente para uma melhor visualização.

O modelo ajusta de maneira excelente os dados para as diversas escalas consideradas. A hipótese de $\beta_i = \beta$ somada ao fato que encontramos o mesmo valor de β para todas as escalas equivale a dizer que todas as curvas ($N > 0$) possuem uma mesma lei de potência (ver o comportamento assintótico de ${}_N F_0$ no capítulo 4) e este fato não pode ser deduzido facilmente dos dados. A forma funcional da fdp é alterada de maneira sutil (os momentos da curva aumentam, apesar da lei de potência ser a mesma) conforme passamos das escalas menores para escalas maiores, em que a curva toma um formato mais côncavo, passa pela escala $N = 1$, o último vestígio da lei de potência, e atinge o formato gaussiano para uma grande escala de tempo.

Modelo Hipergeométrico Generalizado: Caso Geral

Neste capítulo, estamos interessados em possíveis extensões do MHG para obtermos fdp's mais gerais que as funções ${}_N F_0$. A generalização que estudaremos aqui consiste em propor novas equações diferenciais estocásticas para a magnitude das flutuações da grandeza física relevante (como fluxo de energia em turbulência e volatilidade em econofísica), preservando algumas características fundamentais do modelo, a saber:

- 1) Existência de um processo de cascata em que há um fluxo da grandeza relevante através de diferentes escalas espaciais ou temporais.
- 2) Uma dinâmica para os fluxos entre as escalas com a mesma forma independentemente da escala considerada.
- 3) Grande separação entre os tempos característicos das dinâmicas em cada escala.

Estas propriedades são muito gerais e podem dar origem a uma quantidade infinita de modelos. Uma simplificação razoável, e que ainda mantém o caráter ilustrativo da nossa abordagem, é considerar apenas dinâmicas estocásticas simétricas por translação temporal. Por definição, uma equação diferencial estocástica com as características citadas e com tal simetria é dada por

$$dx_i = \gamma_i \mu(x_i, x_{i-1}) dt + \alpha_i \sigma(x_i, x_{i-1}) dW_i, \quad (6.1)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, onde γ_i e α_i são constantes do modelo, $\mu(x_i, x_{i-1})$ é o termo determinístico que acopla duas variáveis da cascata e $\sigma(x_i, x_{i-1})$ o termo de ruído.

Adotaremos para o termo determinístico, $\mu(x_i, x_{i-1})$, uma condição de reversão à média para que a média das variáveis (que são positivas) seja finita no equilíbrio. A depender da escolha do tipo de ruído, $\sigma(x_i, x_{i-1})$, o modelo pode gerar diversos tipos de fdp's. Por exemplo, no caso dos preços dos ativos (capítulo 5), o modelo de Black-Scholes utilizou um ruído multiplicativo do tipo $\sigma(x) = x$, pois observa-se nos dados que a flutuação do preço de ativo era proporcional ao preço atual deste ativo, resultando

em uma distribuição Log-Normal. Outro tipo de modelo é a equação de Langevin, que considera simplesmente um ruído branco (aditivo), $\sigma(x) = \sigma = \text{constante}$. Um tipo distinto de modelo é encontrado em sistemas sociais, para modelar o problema de pesquisa de opinião, onde a variável relevante é fração da população que apóia um determinado líder do país (x) e o termo de flutuação é dado por $\sigma(x) = \sqrt{x(1-x)}$ [95]. Neste caso, as flutuações mais altas acontecem quando a população está com opinião dividida ($x = 0.5$), enquanto as flutuações são mais baixas quando a população está bem decidida ($x \simeq 0$ ou $x \simeq 1$).

Contudo, nem sempre é possível obter uma fdp de equilíbrio exatamente para um dado sistema dinâmico estocástico simples de N escalas, a exemplo da dificuldade encontrada no modelo de Heston (comentado também no capítulo 5). Desta maneira, para generalizarmos o modelo desta tese, temos que buscar variações que não fujam de uma certa fenomenologia da área, mas que possuam fdp de equilíbrio analiticamente tratáveis. No sentido de visualizar um modelo estocástico e uma fdp diferentes, gerados também a partir de uma equação estocástica com termo determinístico linear de reversão à média, vamos explorar rapidamente um modelo aplicado no contexto de polarização política, cuja distribuição de equilíbrio é a distribuição beta [95]. Em seguida, apresentaremos uma versão mais completa do nosso modelo hipergeométrico generalizado, cujas distribuições de probabilidade serão dadas em termos da classe geral de funções hipergeométricas generalizadas ${}_N F_M$.

6.1 Modelo com Distribuição Beta

Nesta seção, vamos estudar um modelo dinâmico estocástico cuja variável relevante do sistema possui uma distribuição beta como fdp de equilíbrio. Seja x_t a opinião política (“unidimensional”) de uma pessoa, onde $x = 0$ é uma visão política extremamente liberal e $x = 1$ é uma visão extremamente conservadora. Segundo este modelo, a opinião pode variar no tempo. Não há uma forma determinística de prever a mudança de opinião, que é uma soma de vários acontecimentos aleatórios, então o modelo propõe uma equação diferencial estocástica. O termo de tendência (*drift*) é o nosso conhecido termo de reversão à média, pois espera-se que a opinião de uma pessoa tenha uma tendência natural de seguir à opinião média da população. No contexto da eq. (6.1), escolhemos $\mu(x) = x_0 - x$. Por outro lado, o termo de flutuação deve ser tal que assegure que uma pessoa extremista seja muito convicta. Em outras palavras, uma pessoa com opinião muito forte (próxima

a 0 ou próxima a 1) dificilmente mudará de opinião (ou seja, possui uma chance muito pequena de mudar de opinião). Neste caso, atribui-se um ruído que se anula nas duas extremidades: $\sigma^2(x) = x(1-x)$. Desta maneira, o modelo para dinâmica da opinião $x(t)$ pode ser escrito como

$$dx = -\gamma(x - x_0)dt + \alpha\sqrt{x(1-x)}dW, \quad (6.2)$$

onde γ e α são parâmetros do modelo e x_0 é a média constante da variável x no equilíbrio. Note que uma vez que confinamos a variável x dentro em um intervalo limitado $[0, 1]$, o termo de ruído deveria anular-se nas extremidades. A maneira como ele foi anulado em $\sigma^2(x)$ foi escolhendo-se o polinômio de menor ordem, por simplicidade. O parâmetro γ está relacionado à força que a opinião geral impõe no indivíduo e podemos assumir um valor constante. O coeficiente α está relacionado às flutuações de opinião devido a mudanças aleatórias que podem acontecer na opinião política do indivíduo. Esta constante α pode ser pequena em tempos de tranquilidade política [95]. A distribuição de equilíbrio deste processo estocástico pode ser encontrada a partir da equação de Fokker-Planck independente do tempo, um resultado já conhecido na literatura, cuja solução é a distribuição beta

$$P(x) = \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}, \quad (6.3)$$

onde os parâmetros μ e ν são definidos como

$$\nu = \frac{\gamma}{\alpha^2} x_0, \quad (6.4)$$

$$\mu = \frac{\gamma}{\alpha^2} (1 - x_0). \quad (6.5)$$

A razão α^2/γ controla a polarização do modelo. Situações “bipolares” estão relacionadas a uma razão $\alpha^2/\gamma > 0.5$ e possuem um potencial de aplicações em sistemas sociais. Vale ressaltar que também encontramos exatamente a mesma equação estocástica para modelar exposição a doenças [96]. Com isso, julgamos que formas mais sofisticadas de ruído (neste caso, não-monotônico) merecem ser exploradas. Neste contexto, vamos fazer uma ligação do MHG a modelos com distribuição tipo beta invertida (vide abaixo) e mostrar como esta distribuição é capaz de generalizar nosso modelo, originando uma família mais completa de distribuições hipergeométricas generalizadas do tipo ${}_N F_M$.

6.2 MHG: Caso Geral

6.2.1 Caso ${}_M F_M$

Nesta subseção vamos apresentar uma generalização do nosso modelo de cascata em que a fdp da variável física relevante, aqui denotada genericamente por x , será dada em termos de funções hipergeométricas generalizadas do tipo ${}_M F_M$. Na próxima subseção vamos considerar o caso geral de distribuições envolvendo as funções ${}_N F_M$, para quaisquer N e M .

Assim como no modelo MHG_N discutido anteriormente (Capítulos 4 e 5), aqui também a fdp da variável x será escrita como uma “superposição” de distribuições gaussianas, cuja variância ϵ é uma variável aleatória. Entretanto, como veremos adiante, a distribuição $p(\epsilon)$ relevante para gerar fdp’s em termos das funções ${}_M F_M$ é a distribuição beta invertida. Por isso, nossa apresentação começa com uma discussão sobre essa distribuição.

A distribuição beta invertida é dada por

$$P(\epsilon) = \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\nu+1} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\mu-1}, \quad (6.6)$$

onde ϵ_0 é o valor mínimo da variável aleatória ϵ , ou seja, $\epsilon \geq \epsilon_0$. A denominação de distribuição beta invertida para a distribuição acima vem do fato de que ϵ_0/ϵ possui uma distribuição tipo beta com os parâmetros μ e ν . A distribuição (6.6) também possui uma cauda lei de potência, a exemplo da distribuição gama invertida utilizada nos capítulos anteriores, mas a variável aleatória, ϵ , neste caso, possui um limite inferior. A eq. (6.6) acima será a distribuição de cada uma das variáveis da nossa cascata, em função da variável imediatamente anterior.

Como o MHG foi proposto em termos de equações diferenciais estocásticas, precisamos inicialmente descobrir qual equação diferencial estocástica é responsável pelo surgimento da distribuição beta invertida que mostramos acima. Para isso, vamos partir da equação diferencial estocástica

$$dx = -\gamma'(x - x_0)dt + \alpha' \sqrt{x(1-x)}dW, \quad (6.7)$$

onde γ' e α' são parâmetros do modelo e x_0 é a média da variável x no equilíbrio. Sabemos que esta variável possui uma distribuição de equilíbrio do tipo beta. Portanto, o inverso desta variável possui uma distribuição beta invertida, que é nossa distribuição

de interesse. Para obtermos a dinâmica do inverso da variável x , vamos definir $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{1}{x}$ e utilizar o lema de Itô (Apêndice C) para obter

$$d\epsilon = -\frac{\epsilon_0}{x^2}dx + \frac{\epsilon_0}{x^3}dx^2. \quad (6.8)$$

Substituindo a eq. (6.7) na equação acima, obtemos

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -\gamma(\epsilon - \epsilon_m)dt + \alpha\sqrt{\epsilon - \epsilon_0}dW, \quad (6.9)$$

onde os parâmetros γ , α e ϵ_m são dados em função dos parâmetros do processo original (6.7) por

$$\gamma = \frac{-\gamma'x_0 + \alpha'^2}{\epsilon_0}, \quad (6.10)$$

$$\epsilon_m = \frac{\gamma' - \alpha'^2}{\gamma'x_0 - \alpha'^2}\epsilon_0, \quad (6.11)$$

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\sqrt{\epsilon_0}}. \quad (6.12)$$

Note que ϵ_0 é o valor mínimo da variável ϵ e ϵ_m é o valor médio da variável ϵ no equilíbrio. Por construção, a variável ϵ possui uma distribuição de equilíbrio do tipo beta invertida, dada pela eq. (6.6). A dinâmica para a variável ϵ , como dada na eq. (6.9) não possui uma interpretação física evidente. Entretanto como o objetivo deste capítulo é sobretudo registrar um modelo matemático geral de cascata, deixaremos uma discussão das possíveis aplicações do modelo para trabalhos futuros.

Para gerar a versão do nosso modelo MHG baseada nas funções do tipo ${}_M F_M$, vamos supor como feito nos capítulos anteriores que a variável x relevante para nosso problema é “localmente gaussiana”, mas com uma variância aleatória ϵ_M com fdp $p(\epsilon_M)$. Sendo assim, a distribuição marginal para x será

$$P(x) = \int_{\epsilon_0}^{\infty} p_M(\epsilon_M) \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_M}} e^{-x^2/2\epsilon_M} d\epsilon_M. \quad (6.13)$$

Vamos agora supor um modelo cascata para a dinâmica da variável (“fluxo”) ϵ_M , em que essa grandeza acopla-se ao “fluxo”, ϵ_{M-1} , do nível da cascata, o qual se acopla ao fluxo ϵ_{M-2} , e assim sucessivamente até primeiro nível da cascata. Mais especificamente, vamos supor uma cascata em que as variáveis ϵ_i são descritas pelo seguinte conjunto de EDE's:

$$\frac{d\epsilon_i}{\epsilon_i} = -\gamma_i(\epsilon_i - f\epsilon_{i-1})dt + \alpha_i\sqrt{\epsilon_i - \epsilon_{i-1}}dW_i, \quad (6.14)$$

para $i = 1, \dots, M$. Na equação acima, ϵ_0 é constante, ϵ_{i-1} é o menor valor possível para a variável ϵ_i e $f\epsilon_{i-1}$ é a média de ϵ_i ($f > 1$) no equilíbrio. O sistema acima é considerado no regime de grande separação temporal entre as variáveis, no qual a variável ϵ_i é muito mais rápida que a variável ϵ_{i-1} . De acordo com essa hipótese de equilíbrio, a fdp da variável ϵ_M pode ser escrita como

$$p_M(\epsilon_M) = \int_{\epsilon_{M-1}}^{\infty} \dots \int_{\epsilon_1}^{\infty} P(\epsilon_M|\epsilon_{M-1}) \dots P(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_{M-1} \dots d\epsilon_1. \quad (6.15)$$

Como vimos acima, a distribuição da variável ϵ_i condicionada ao valor de ϵ_{i-1} é dada por uma distribuição beta invertida

$$P(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) = \frac{1}{\epsilon_{i-1}} \left(\frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i} \right)^{\nu_i+1} \left(1 - \frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i} \right)^{\mu_i-1}, \quad (6.16)$$

para $i = 1, \dots, M$, onde

$$\nu_i = \left(\frac{\gamma_i}{\alpha_i^2} - 1 \right) x_i, \quad (6.17)$$

$$\mu_i = \left(\frac{\gamma_i}{\alpha_i^2} - 1 \right) (1 - x_i), \quad (6.18)$$

com

$$x_i = \frac{\frac{\gamma_i}{\alpha_i^2} + f - 2}{f \left(\frac{\gamma_i}{\alpha_i^2} - 1 \right)} \quad (6.19)$$

Agora vamos calcular a fdp da variável x . Inserindo (6.15) em (6.13), uma integral múltipla que pode ser resolvida em algumas passagens. Vamos deduzir a forma geral dessa integral a partir de uma indução finita. Para isso, vamos descrever um procedimento iterativo a partir da seguinte integral:

$$I = \int_{\epsilon_0}^{\infty} P_1(\epsilon|\epsilon_0) \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} {}_N F_M(a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_M, -\frac{x^2}{2\epsilon}) d\epsilon, \quad (6.20)$$

onde $P(\epsilon|\epsilon_0)$ é como dado em (6.16) e a função ${}_N F_M$ é a função hipergeométrica generalizada de ordem (N, M) . A introdução desta integral tem como objetivo descobrir qual o efeito da distribuição beta invertida quando convoluída com uma função hipergeométrica generalizada, no mesmo sentido do que fizemos para a distribuição gama invertida. Fazendo uma mudança de variáveis, $y = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$, ficamos com

$$I = \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 \frac{1}{\epsilon_0} y^{\nu+1} (1-y)^{\mu-1} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\epsilon_0}} {}_N F_M(a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_M, -\frac{x^2 y}{2\epsilon_0}) \left(\frac{\epsilon_0}{y^2}\right) dy, \quad (6.21)$$

que pode ser simplificada para a expressão

$$I = \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \int_0^1 y^{(\nu+1/2)-1} (1-y)^{\mu-1} {}_N F_M(a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_M, -\frac{x^2 y}{2\epsilon_0}) dy. \quad (6.22)$$

Esta última integral é conhecida [62] e nossa expressão para I resulta em

$$I = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu + \mu + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)} {}_{N+1} F_{M+1}(a_1, \dots, a_N, \nu + \frac{1}{2}; b_1, \dots, b_M, \mu + \nu + \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{2\epsilon_0}). \quad (6.23)$$

Portanto, mostramos que a integração do produto de uma distribuição beta invertida por uma distribuição hipergeométrica generalizada resulta em uma distribuição hipergeométrica generalizada de ordem superior.

Note agora que aplicar a fórmula (6.15) da distribuição $p_M(\epsilon_M)$ na integral (6.13) consiste em repetir M vezes o seguinte processo iterativo:

$$P(x|\epsilon) \rightarrow \int_{\epsilon_0}^{\infty} p(\epsilon|\epsilon_0) P(x|\epsilon) d\epsilon. \quad (6.24)$$

Com a eq. (6.23), mostramos que se $P(x)$ é uma função hipergeométrica generalizada de ordem (N, M) , então a distribuição definida pela transformação acima também será da mesma família, com ordem $(N+1, M+1)$. Como a primeira função do processo iterativo é a distribuição gaussiana, que pode ser escrita em termos da função ${}_0F_0$, concluímos a indução e podemos escrever $P(x)$ na forma

$$P(x) = C {}_M F_M(a_1, \dots, a_M; b_1, \dots, b_M; -\frac{x^2}{2\epsilon_0}), \quad (6.25)$$

onde a constante de normalização é dada por

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0}} \prod_{i=1}^M \frac{\Gamma(\nu_i + \mu_i)}{\Gamma(\nu_i + \mu_i + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\nu_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_i)}. \quad (6.26)$$

os coeficientes a_i e b_i da distribuição são dados por:

$$a_i = \nu_i + \frac{1}{2}, \quad (6.27)$$

$$b_i = \nu_i + \mu_i + \frac{1}{2}, \quad (6.28)$$

com ν_i e μ_i dados em (6.17) e (6.18).

6.2.2 Caso $N+M F_M$

Agora, vamos introduzir o caso geral do modelo MHG, em que uma dada variável x possui um “fluxo” modelado por uma cascata de N equações diferenciais estocásticas de um tipo que se acoplam a outras M equações diferenciais estocásticas de um tipo diferente. Considere um sistema de EDE’s dado por

$$d\epsilon_N = -\gamma_N(\epsilon_N - \epsilon_{N-1})dt + \kappa_N \epsilon_N dW_N, \quad (6.29)$$

⋮

$$d\epsilon_1 = -\gamma_1(\epsilon_1 - \epsilon'_1)dt + \kappa_1 dW_1, \quad (6.30)$$

$$\frac{d\epsilon'_1}{\epsilon'_1} = -\gamma'_1(\epsilon'_1 - f_1 \epsilon'_2)dt + \alpha'_1 \sqrt{\epsilon'_1 - \epsilon_2} dW'_1, \quad (6.31)$$

⋮

$$\frac{d\epsilon'_M}{\epsilon'_M} = -\gamma'_M(\epsilon'_M - f_M \epsilon'_{M+1})dt + \alpha'_M \sqrt{\epsilon'_M - \epsilon'_{M+1}} dW'_M, \quad (6.32)$$

onde $\epsilon'_{M+1} = \epsilon_0 = \text{constante}$, com $\gamma_i, \gamma'_j, \kappa_i, \kappa'_j, f_j$ parâmetros constantes do modelo para todo $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$. No regime de grande separação temporal entre as escalas, podemos escrever a fdp de equilíbrio de uma variável x cujo “fluxo” é descrito pelo sistema de equações acima na forma

$$P(x) = \int_{\epsilon_0}^{\infty} p(\epsilon_N) \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_N}} e^{-x^2/2\epsilon_N} d\epsilon_N, \quad (6.33)$$

onde a variável ϵ_{M+N} possui distribuição $p_{N,M}$ dada por

$$p(\epsilon_N) = \int_{\epsilon_M}^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N P(\epsilon'_j | \epsilon'_{j+1}) P(\epsilon_i | \epsilon_{i-1}) d\epsilon'_j d\epsilon'_i. \quad (6.34)$$

Inserindo a eq. (6.34) em (6.33) e utilizando as fórmulas (6.25) e (4.67), obtemos a fdp do caso geral

$$P(x) = C_{M+N} F_M(a_1, \dots, a_M, \beta_1 + 3/2, \dots, \beta_N + 3/2; b_1, \dots, b_M; -\frac{x^2}{2\beta_1 \dots \beta_N \epsilon_0}), \quad (6.35)$$

com $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$. Os parâmetros a_j e b_j dados por (6.27) e (6.28). O parâmetro β_i é definido como $\frac{2\gamma_i}{\kappa_i^2}$ e C é uma constante de normalização que pode ser calculada facilmente a partir das constantes anteriores obtidas em (6.25) e (4.67).

Este modelo considera uma cascata com N variáveis aleatórias distribuídas no equilíbrio por uma gama invertida e M variáveis aleatórias distribuídas por uma beta invertida. A variável ϵ_1 , que possui uma dinâmica dada por (6.29), está acoplada à variável ϵ'_1 que possui uma dinâmica de outro tipo (6.32). A distribuição marginal de equilíbrio de x é a distribuição hipergeométrica generalizada $_{N+M}F_M$, de ordem $(N + M, M)$. Este resultado é uma consequência imediata do tipo de “superposição” de gaussianas que fizemos neste capítulo e no capítulo 4, quando mostramos as integrais resultantes da mistura de gaussianas de forma iterativa, para distribuições gama invertida e beta invertida, respectivamente. A distribuição completa $(N + M, M)$, como já ficou claro neste trabalho, é uma generalização da distribuição normal ($N = 0, M = 0$) e da distribuição q -gaussiana ($N = 1, M = 0$). Nesta tese, escolhemos adicionar este resultado completo pelo seu caráter original do ponto de vista matemático, além de acreditarmos em sua potencial aplicação a diversas áreas onde a distribuição beta possua uma interpretação fenomenológica aceitável, a exemplo do que foi explorado para turbulência e econofísica.

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, apresentamos um modelo dinâmico e estocástico para o fenômeno de intermitência na turbulência em fluidos. A variável utilizada na modelagem foi o fluxo de energia, que está relacionado à intensidade das flutuações de velocidade em um escoamento turbulento. Estudamos como a fenomenologia aplicada à equação do balanço detalhado de energia pode resultar em modelos dinâmicos para o fluxo de energia e, ao assumir que o fluxo de energia em cada escala espacial varia no tempo de maneira aleatória, construímos um modelo estocástico para a cascata, em que a energia, inserida na escala integral do sistema passa para as escalas menores com uma dinâmica governada por um sistema de equações diferenciais estocásticas lineares. Mostrou-se que esse sistema pode ser resolvido exatamente. As auto-correlações temporais do fluxo de energia também foram calculadas. Mostramos ainda que a média da energia total do sistema é conservada e possui uma flutuação em torno da média caracterizada por uma variância que também foi calculada.

Na segunda parte da tese, a partir do capítulo 4, nós fizemos uma hipótese de grande separação entre os tempos característicos da dinâmica dos fluxos em cada escala de energia, para calcular a fdp dos incrementos de velocidade. Mostramos que em sistemas dinâmicos estocásticos acoplados, no estilo de cascata, se houver grande separação temporal entre as variáveis, a fdp de equilíbrio da variável mais rápida pode ser escrita como uma hierarquia Bayesiana. Inicialmente, aplicamos este resultado para o caso de uma cascata de apenas um nível $N = 1$, em que a fdp encontrada para o fluxo de energia é a gama invertida. Nesse caso, obtivemos uma fdp para os incrementos de velocidade do tipo q -gaussiana, quando ressaltamos ser esse um resultado já conhecido, apesar da nossa nova parametrização em termos da função hipergeométrica generalizada ${}_1F_0$. Esta última maneira de representarmos a distribuição q -gaussiana nos indicou que casos mais gerais poderiam ser obtidos, caso mais escalas fossem adicionadas à cascata. Investigamos em seguida o caso $N = 2$ e encontramos uma forma fechada para a fdp do fluxo de energia em termos de uma função de Bessel modificada de segunda espécie, que pode ser entendida como uma generalização natural da distribuição gama invertida. Aplicamos o

mesmo procedimento para os incrementos de velocidade e encontramos a uma distribuição baseada na função ${}_2F_0$. A partir deste caso, tivemos a intuição que funções da mesma família com ordem superior apareceriam, caso adicionássemos mais escalas à cascata. Assim, conseguimos demonstrar o caso geral, em que a cascata possui N escalas e a fdp é baseada na função ${}_NF_0$. Calculamos os momentos desta distribuição e encontramos a correção ao expoente previsto pelo modelo K41. Em seguida, mostramos que nosso modelo reproduz o modelo Log-Normal caso um número infinito de escalas seja considerado na cascata. A partir de medições experimentais de turbulência euleriana, transformamos a série temporal de velocidades em um histograma empírico normalizado e escolhemos os parâmetros da nossa distribuição P_N que melhor ajusta os dados experimentais. Repetimos o procedimento para vários números de Reynolds e diferentes escalas espaciais do experimento e obtivemos para todos eles um excelente ajuste aos dados experimentais. Utilizamos também nossa fdp para a dados de turbulência lagrangeana e mostramos que nosso modelo fornece uma ótima aproximação ao histograma empírico com poucos níveis na cascata de energia (tipicamente $N = 4$ ou $N = 5$) e que a relativa falta de sucesso da distribuição q -gaussiana aplicada a este conjunto de dados se dá pela escolha incorreta do número de níveis da cascata ($N = 1$).

Em face da existência de uma analogia entre turbulência em fluidos e a flutuação de preços de ativos financeiros, aplicamos também nosso modelo ao campo da econofísica. Nesse caso, fizemos uma proposta para modelar a dinâmica da volatilidade em uma dada escala de tempo em termos de um sistema hierárquico de equações diferenciais estocásticas (i.e., uma cascata) envolvendo as volatilidades nas escalas de tempo anteriores. Mostramos que a fdp encontrada ajusta os dados observacionais do Ibovespa e encontramos o impacto que este modelo possui na precificação de opções, a partir de um argumento de Black-Scholes generalizado. Encontramos uma curva para a volatilidade implícita que demonstra o sorriso da volatilidade, como esperado para mercados reais. Apresentamos também uma maneira de generalizar nossa idéia de cascata para outras dinâmicas, resultando em um modelo mais completo, onde surge naturalmente uma extensa família de distribuições baseadas nas funções hipergeométricas generalizadas do tipo ${}_{M+N}F_N$. Embora não tenhamos discutido nenhuma aplicação concreta dessas distribuições mais gerais, especulamos uma possível aplicação para a distribuição ${}_MP_M$ no campo das ciências sociais, para dinâmica de opinião, onde a distribuição beta (usada na obtenção de ${}_{M+N}F_N$) possui uma fenomenologia adequada. É curioso ressaltar que a ordem da apresentação dos assuntos nesta tese não seguiu a ordem cronológica da nossa pesquisa. Este modelo de cascata para a econofísica foi estudado inicialmente no caso

$N = 2$ em nossa pesquisa e, ao percebermos a analogia com a cascata de energia, resolvemos estudá-lo no contexto de turbulência. Podemos dizer que houve uma grande influência dos modelos de econofísica no nosso modelo de cascata de energia, sobretudo sua característica estocástica e dinâmica.

A busca por sistemas dinâmicos estocásticos de várias escalas se mostrou uma poderosa ferramenta na obtenção de novas distribuições de probabilidade que generalizaram de maneira natural algumas distribuições conhecidas. Essas novas distribuições foram obtidas como uma mistura de distribuições gaussianas com variância aleatória. Escolhendo-se a fdp da variância de uma maneira apropriada (com base em um modelo de cascata), pode-se gerar, como já mencionado, uma nova classe de distribuições hipergeométricas generalizadas. Entretanto, como estamos fazendo uma mistura de gaussianas de média zero, naturalmente a distribuição resultante será simétrica, independentemente da escolha da fdp usada como “peso” na mistura. Desta forma, as fdp’s encontradas em nossos modelos, por serem necessariamente simétricas, não explicam a assimetria encontrada nas distribuições empíricas obtidas em alguns experimentos de turbulência, particularmente de turbulência euleriana, apesar de que uma transformação *ad hoc* possa ser feita para ajustá-las aos dados [72]. Pretendemos dar continuidade à pesquisa com uma investigação de como este modelo pode reproduzir distribuições assimétricas. Uma maneira natural seria considerarmos mistura de gaussianas com médias variáveis. Entretanto, nesse caso as integrais resultantes são de difícil cálculo, não sendo claro nesse momento se seria possível obter formas analíticas (em termos de funções transcendentais de ordem superior) para as distribuições correspondentes. Além disso, estaremos interessados em descobrir quais situações reais implicam que nosso modelo será semelhante ao Log-Normal. Ou seja, gostaríamos de investigar qual o significado real de uma cascata infinita de energia. Conjecturamos que esta situação é realizada na prática em um escoamento cuja escala integral é muito grande (limite termodinâmico) e para turbulência completamente desenvolvida (limite de número de Reynolds indo para infinito), mas temos que investigar esta relação matemática dos modelos de um ponto de vista mais físico.

Ainda em relação ao limite da cascata contínua de energia, estamos estudando uma possível analogia entre este cálculo particular e a integral de trajetória de Feynman [97]. Como obtivemos um resultado analítico para nossa integral, temos esperança de entender melhor esta analogia e tirar algum proveito prático dela para modelar algum sistema especial. Vale ressaltar também que nosso modelo poderá servir como uma ferramenta de generalização da quantização estocástica de Parisi-Wu [98]. Esta teoria, que não é intermitente, pode ser modificada no mesmo sentido que generalizamos K41, de maneira

dinâmica. Inclusive a própria quantização estocástica já introduz um tempo “fictício” em que um determinado processo estocástico atinge o equilíbrio instantaneamente, em relação ao tempo físico, o que implica no mesmo limite de grande separação temporal que assumimos aqui, apesar de o tempo “fictício” ser um artefato matemático desprovido de significado físico até o momento. A possível aplicação do MHG a esta teoria de quantização estocástica não foi introduzida nesta tese dado seu caráter ainda altamente especulativo. Da maneira que nosso modelo está formulado, a aplicação direta seria equivalente a propor um modelo em que a constante de Planck (\hbar) flutua rapidamente no tempo em torno de um valor médio constante, pois é ela que faz o papel de “fluxo de energia” para a magnitude das flutuações de partículas quânticas. Estamos estudando uma maneira de interpretar a aplicação de outra forma, como por exemplo em termos de partículas em meios inhomogêneos.

Compartilhamos da idéia de que, nesta área de intermitência, talvez por ainda ser relativamente nova e bastante competitiva, os modelos bem sucedidos conseguem ser extrapolados para outras áreas do conhecimento. É nesse sentido que abordamos a econofísica e comentamos brevemente as possíveis aplicações em outras áreas, como sistemas sociais. De uma forma geral, estamos também interessados nas diferentes fdp’s de equilíbrio geradas a partir de uma certa cascata dinâmica, cujos termos determinístico e estocástico surgem a partir de uma fenomenologia, a depender do problema e da área do conhecimento em questão. Acreditamos que este procedimento de partir de um sistema determinístico, encontrar as simetrias e propor um modelo estocástico que satisfaça todas elas, a exemplo do que fizemos aqui, tem potencial de generalizar muitos resultados em física, sobretudo em sistemas complexos. As fdp’s encontradas são generalizações naturais, do ponto de vista da cascata, de distribuições conhecidas, mas possuem uma forma não trivial e acreditamos que a descoberta de tais fdp’s dificilmente seria possível sem invocar os argumentos que utilizamos aqui.

Lema de Itô

Lema de Itô: *Seja o processo de Itô [21] com dinâmica dada por*

$$dX(t) = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dW, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mu(X, t)$ e $\sigma(X, t)$ são de X e t . Seja $f(X, t)$ uma função duplamente diferenciável de X e t . Então, $f(X, t)$ é um processo de Itô com dinâmica dada por

$$df(X, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Primeiro, vamos expandir $f(X, t)$ em série de Taylor até segunda ordem em X para obter

$$df(X, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a eq. (A.1) na equação acima e somando apenas os termos de primeira ordem dt e dW , obtemos

$$df(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} f dt + \frac{\partial}{\partial x} f (\mu(X, t) dt + \sigma(X, t) dW) +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f (\mu(X, t)^2 dt^2 + 2\mu(X, t)\sigma(X, t) dt dW + \sigma^2(X, t) dW^2).$$

No limite de $dt \rightarrow 0$, os termos $dt dW$ e dt^2 são desprezados, pois são de ordem maior que dt . Contudo, o termo dW^2 tende a dt . Desta maneira, podemos reescrever a equação acima como

$$df(X, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW. \quad (\text{A.4})$$

Ou ainda, em termos de dX , podemos escrever:

$$df(X, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW. \quad (\text{A.5})$$

Demonstração do Teorema 4.1

Teorema 4.1 *Seja $X_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) um conjunto de processos estocásticos da forma*

$$dX_i(t) = a_i f(X_i(t), X_{i-1}(t))dt + b_i g(X_i(t), X_{i-1}(t))dW(t), \quad (\text{B.1})$$

onde a_i e b_i são números reais e $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções reais contínuas. Então

$$\lim_{\left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \rightarrow \infty\right)\left(\frac{b_i}{b_{i-1}} \rightarrow \infty\right)\left(\frac{a_i^2}{b_i} = \text{cte}\right)} P_N(X_N) = \int \dots \int \prod_{i=1}^N P_i(X_i|X_{i-1})dX_i, \quad (\text{B.2})$$

onde X_0 é constante, $P_i(X_i|X_{i-1})$ é a distribuição de equilíbrio da variável X_i condicionada à variável X_{i-1} e $P_N(X_N)$ é a distribuição marginal de equilíbrio da variável X_N .

Demonstração. Vamos demonstrar por indução. O caso $N = 1$ é trivial e não pode ser usado na hipótese de indução pois a variável X_0 não possui coeficientes a_0 e b_0 utilizados no limite. Mesmo assim, vamos escrever a fórmula para o caso $N = 1$, a título de ilustração,

$$P_1(\epsilon_1) = \int_0^\infty P(\epsilon_1|y)P_0(y)dy, \quad (\text{B.3})$$

onde $P_0(y) = \delta(y - \epsilon_0)$. O cálculo da integral acima é imediato e resulta na distribuição gama invertida para ϵ_1 que foi obtida no capítulo 4 e o resultado é exato pois ϵ_0 é uma constante. A hipótese de indução começa com o caso $N = 2$. Para isso, vamos calcular os momentos de ordem k do processo $\epsilon_2(t)$ no equilíbrio ($\tau/T \rightarrow \infty$). Considere uma realização discreta do processo estocástico $X_2(t)$ calculada no tempo discreto $t_j = j\tau$. Podemos escrever uma identidade que relaciona a definição da integral de Riemann à integral de Lebesgue:

$$\lim_{\frac{\tau}{T} \rightarrow 0} \frac{\tau}{T} \sum_{j=1}^{T/\tau} (X_2(t_j))^k \sim \int_0^\infty x^k P_2(x)dx. \quad (\text{B.4})$$

Queremos redefinir a integral acima da seguinte maneira: como $X_1(t)$ é contínuo (obedece

a condição de Lindeberg), suas realizações são curvas contínuas. Portanto, para todo $\eta > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|t - t'| < \delta$ implica em $|X_1(t) - X_1(t')| < \eta$. Como a curva é contínua, existe um conjunto enumerável de raízes para a equação $X_1(t) - X_1(t') = 0$ [99]. Então, dado um t_j , existe apenas um $X_1(t_j)$ e existe um conjunto enumerável de intervalos disjuntos, Ω_j , tal que, para todo t elemento de Ω_j , temos $|X_1(t) - X_1(t_j)| < \eta$. Então, podemos reescrever a eq. (B.4) na forma

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_2(t_j))^k = \frac{1}{N} \sum_j \sum_i \phi(t_j, i) (X_2(t_j))^k = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \phi(t_j, i) (X_2(t_j))^k, \quad (\text{B.5})$$

onde $N = T/\tau$, $\phi(t_j, \Omega_i)$ é 1, caso t_j seja elemento de Ω_i , e zero, caso contrário. Vamos calcular o que representa o somatório no índice j . Ou seja, para um dado conjunto Ω_i , queremos calcular o somatório em j dado por

$$\frac{1}{N} \sum_j \phi(t_j, \Omega_i) (X_2(t))^k. \quad (\text{B.6})$$

Para isso, perceba que calcular esse somatório é calcular o momento de uma variável aleatória cuja variável anterior da cascata (X_1) é aproximadamente constante ($|X_1 - X_1(t_i)| < \eta$), cuja correção, que depende de η , será tão pequena quanto quisermos (pois escolhemos um $\eta > 0$ qualquer). Este cálculo é extremamente mais fácil que o cálculo geral. Podemos reescrever este último somatório como

$$\sum_s \sum_{t_j \in I_s} \int_0^\infty P_2(t_j; \lambda a'_2; \sqrt{\lambda} b'_2; x_2) (x_2)^k dx_2, \quad (\text{B.7})$$

onde I_s são os intervalos disjuntos que fazem parte do conjunto Ω_i . A dependência temporal, assim como a dependência nas constantes a e b , foi colocada explicitamente na função $P_2(t_j; \lambda a'_2; \sqrt{\lambda} b'_2; x_2)$. A variável λ foi introduzida através das transformações $a_2 = \lambda a'_2$ e $b_2 = \sqrt{\lambda} b'_2$, pois queremos tomar o limite $\lambda \rightarrow \infty$. Vamos usar uma transformação da variável que reescala o tempo para λt

$$t \rightarrow \lambda t, \quad a_2 \rightarrow a_2/\lambda, \quad b_2 \rightarrow b_2/\sqrt{\lambda}, \quad (\text{B.8})$$

e obter

$$\sum_s \sum_{t_j = \text{sup}(I_s)} \int_0^\infty P_2(\lambda t_j; a_2; b_2; x_2) (x_2)^k dx_2. \quad (\text{B.9})$$

Agora, vamos tomar o limite de $\lambda \rightarrow \infty$ e obter a distribuição de equilíbrio $P_2(a_2, b_2, x_2)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_s \sum_{t_j \in I_s} \int_0^\infty P_2(\lambda t_j, a_2, b_2, x_2)(x_2)^k dx_2 = \sum_s \sum_{t_j \in I_s} \int_0^\infty P_2(a'_2, b'_2, x_2)(x_2)^k dx_2. \quad (\text{B.10})$$

onde as integrais são independentes dos intervalos I_s e podem ser resolvidas. A expressão acima resulta em

$$m(\Omega_i) \langle (X_2)^k | X_1 \rangle_{\text{equil.}}, \quad (\text{B.11})$$

onde $m(\Omega_i)$ é a medida do conjunto Ω_i no sentido de Lebesgue [100]. Inserindo esta fórmula no somatório duplo da eq. (B.5), ficamos com

$$\frac{1}{N} \sum_i \sum_j \phi(t_j, \Omega_i) X_2(t_j)^k = \int (x_2)^k P_2(x_2|x_1) P_1(x_1) dx_1. \quad (\text{B.12})$$

Como este cálculo vale para qualquer expoente k , a distribuição fica unicamente determinada. Isto completa o caso $N = 2$ da hipótese de indução, com distribuição marginal dada por

$$P_2(x_2) = \int P_2(x_2|x_1) P_1(x_1) dx_1. \quad (\text{B.13})$$

A demonstração é análoga para o caso N , em relação ao caso $N - 1$ para alguma distribuição de equilíbrio P_{N-1} . Portanto, para completar a indução, precisamos mostrar que, se o teorema é válido para N , então ele vale para $N + 1$. Esta passagem é direta, pois mostramos que (no limite considerado para as constantes do sistema)

$$P_{N+1}(x_{N+1}) \sim \int P_N(x_{N+1}|x_N) P_1(x_N) dx_N. \quad (\text{B.14})$$

Se o teorema vale para N , então

$$P_N(X_N) = \int \dots \int \prod_{j=1}^N P_j(X_j|X_{j-1}) dX_j. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo esta equação na eq. (B.14), obtemos

$$P_{N+1}(X_{N+1}) = \int \dots \int \prod_{i=1}^{N+1} P_i(X_i|X_{i-1}) dX_i. \quad (\text{B.16})$$

Completando a indução.

Demonstração da eq. (4.67)

Para resolver a integral (4.66), vamos inicialmente integrar na variável ϵ_N , inserindo a distribuição para $p(\epsilon_N|\epsilon_{N-1})$, dada na eq.(4.31) [vide p. 67].

$$P_N(\delta_\tau v) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{(\beta_N \epsilon_{N-1})^{\beta_N+1}}{\Gamma(\beta_N+1)} P(\delta_\tau v|\epsilon_N) \epsilon_N^{-\beta_N-2} e^{-\frac{\beta_N \epsilon_{N-1}}{\epsilon_N}} p_{N-1}(\epsilon_{N-1}|\epsilon_{N-2}) \dots p_1(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_N \dots d\epsilon_1,$$

onde a distribuição $P(\delta_\tau v|\epsilon_N)$ na equação acima será substituída pela eq. (4.48), resultando em

$$P_N(\delta_\tau v) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{(\beta_N \epsilon_{N-1})^{\beta_N+1}}{\Gamma(\beta_N+1)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_N\tau}} e^{-\frac{(\delta_\tau v)^2}{2\epsilon\tau}} \epsilon_N^{-\beta_N-2} e^{-\frac{\beta_N \epsilon_{N-1}}{\epsilon_N}} d\epsilon_N \right] \prod_{i=1}^{N-1} p_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) d\epsilon_i.$$

Vamos definir a variável x_i como

$$x_i = \beta_i \frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}, \quad (C.1)$$

e reescrevendo a última integral em termos da variável x_N , obtemos

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\Gamma(\beta_N+1)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_N\epsilon_{N-1}\tau}} e^{-\frac{x_N(\delta_\tau v)^2}{2\beta_N\epsilon_{N-1}\tau}} \left(x_N^{\beta_N+\frac{1}{2}} e^{-x_N} dx_N \right) \right] \prod_{i=1}^{N-1} p_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) d\epsilon_i.$$

Definindo a medida de Euler, $d\lambda_\alpha(x)$, como:

$$d\lambda_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \quad (C.2)$$

Podemos reescrever a última integral em termos da medida de Euler e obter

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{\Gamma(\beta_N+3/2)}{\Gamma(\beta_N+1)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_N\epsilon_{N-1}\tau}} e^{-\frac{x_N(\delta_\tau v)^2}{2\beta_N\epsilon_{N-1}\tau}} d\lambda_{\alpha_N}(x_N) \right] \prod_{i=1}^{N-1} p_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) d\epsilon_i.$$

onde $\alpha_i = \beta_i + \frac{3}{2}$. Note que esta mudança de variável definida em (C.1) pode ser utilizada novamente com a variável ϵ_{N-1} e assim sucessivamente até a última variável ϵ_1 . Desta

maneira, a última equação fica escrita na forma

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1\dots\beta_N\epsilon_0\tau}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\beta_i + 3/2)}{\Gamma(\beta_i + 1)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\frac{\delta_\tau v^2 x_1 \dots x_N}{2\epsilon_0\tau\beta_1 \dots \beta_N}} d\lambda_{\alpha_1}(x_1) \dots d\lambda_{\alpha_N}(x_N). \quad (\text{C.3})$$

Esta última integral (C.3) pode ser escrita em termos de funções hipergeométricas generalizadas ${}_N F_0$, na forma [67]

$$P_N(\delta_\tau v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1\dots\beta_N\epsilon_0\tau}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\beta_i + 3/2)}{\Gamma(\beta_i + 1)} {}_N F_0\left(\beta_1 + \frac{3}{2}, \dots, \beta_N + \frac{3}{2}; -\frac{\delta_\tau v^2}{2\epsilon_0\tau\beta_1 \dots \beta_N}\right). \quad (\text{C.4})$$

Demonstração do Teorema 4.2

Teorema 4.2 *Seja*

$$P_N(\epsilon) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P(\epsilon|\epsilon_{N-1}) \dots P(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_{N-1} \dots d\epsilon_1, \quad (\text{D.1})$$

onde $P(\epsilon_i|\epsilon_{i-1})$ é dado pela fórmula

$$P(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) = \frac{(\beta\epsilon_{i-1})^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \epsilon_i^{-\beta-2} e^{-\frac{\beta\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}}. \quad (\text{D.2})$$

Então, se $\beta/N = \frac{1}{\sigma^2}$, teremos

$$\lim_{N \rightarrow \infty; \beta \rightarrow \infty} P_N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \epsilon - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{D.3})$$

Demonstração. Podemos escrever a fração ϵ_N/ϵ_0 como o produto

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_N}{\epsilon_{N-1}} \frac{\epsilon_{N-1}}{\epsilon_{N-2}} \dots \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}. \quad (\text{D.4})$$

Definindo a variável aleatória

$$x_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{i-1}} | \epsilon_{i-1} \text{ constante}, \quad (\text{D.5})$$

onde $X|Y$ significa o valor da variável X dado que aconteceu o evento Y . Temos que a distribuição de probabilidade $P(x_i)$ é uma gama invertida com média 1 e parâmetro $\beta_i = \beta$ para todo i . Como a distribuição de x_i não depende de i explicitamente, as variáveis deste tipo são identicamente distribuídas, além de serem independentes pois o valor aleatório de cada variável x_i não depende da escolha de ϵ_{i-1} , como pode ser visto a partir da fdp de x_i dada por

$$P(x_i) = \frac{\beta^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} x_i^{-\beta-2} e^{-\frac{\beta}{x_i}}. \quad (\text{D.6})$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_0} = x_N x_{N-1} \dots x_1, \quad (\text{D.7})$$

e, aplicando o logaritmo natural na expressão acima, obtemos

$$\ln \frac{\epsilon_N}{\epsilon_0} = \sum_{i=1}^N \ln(x_i). \quad (\text{D.8})$$

Pelo TLC, o lado direito da equação acima é distribuído segundo uma Normal. Logo, ϵ_N possui uma distribuição Log-Normal no limite $N \rightarrow \infty$. Para isso, o segundo momento não pode divergir. Isso significa que β precisa ir a infinito, pois o segundo momento escala com $[\beta/(\beta-1)]^N$. A partir do cálculo explícito dos momentos dessa distribuição feito no capítulo 4, temos que $\beta/N = \frac{1}{\sigma^2}$.

Referências Bibliográficas

- [1] C. L. Fefferman, “Existence and smoothness of the navier-stokes equation,” <http://www.claymath.org/millennium/>.
- [2] A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [3] H. Xu, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz, “High order lagrangian velocity statistics in turbulence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 114503, 2006.
- [4] O. Reynolds, “On dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion,” *Philos. Trans. R. Soc. London*, vol. 186, p. 123, 1894.
- [5] L. V. Keller and A. Friedmann in *Proceedings of the First International Congress on Applied Mechanics*, 1924.
- [6] L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, England, 1922.
- [7] G. I. Taylor, “Statistical theory of turbulence,” *Proc. R. Soc. London*, vol. 151, p. 421, 1935.
- [8] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 32, p. 19, 1941.
- [10] A. N. Kolmogorov, “On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 30, p. 299, 1941.
- [11] K. R. Sreenivasan, “Fluid turbulence,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, p. 384, 1999.
- [12] A. N. Kolmogorov, “A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number,” *J. Fluid Mech.*, vol. 13, p. 82, 1962.
- [13] L. D. Landau and Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2^a Edição. Pergamon Press, Oxford, 1987.

- [14] N. Mordant, A. Crawford, and E. Bodenschatz, “Three-dimensional structure of the lagrangian acceleration in turbulent flows,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, 2004.
- [15] L. Chevillard, S. Roux, E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, and A. Arneodo, “Lagrangian velocity statistics in turbulent flows: Effects of dissipation,” *Physical Review Letters*, vol. 91, p. 214502, 2003.
- [16] C. Beck, “Dynamical foundations of nonextensive statistical mechanics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 180601, 2001.
- [17] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*. PhD thesis, l’École Normale Supérieure, 1900.
- [18] A. Einstein, “On the motion required by the molecular kinetic theory of heat of small particles suspended in a stationary liquid,” *Annalen der Physik*, vol. 17, p. 549, 1905.
- [19] N. Wiener, “The average of an analytical functional and the brownian movement,” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, vol. 7, p. 294, 1921.
- [20] N. Wiener, *Norbert Wiener: Collected Works - Vol. 1*. MIT Press, 1976.
- [21] K. Itô, “On stochastic differential equations,” *American Mathematical Society*, 1951.
- [22] W. W. Doeblin, “Sur l’équation de kolmogoroff,” *C. R. Ser. I.*, vol. 331, p. 1059, 1940.
- [23] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, vol. 81, p. 637, 1973.
- [24] J. Hull and A. White, “The pricing of options on assets with stochastic volatilities,” *J. Finance*, vol. 42, p. 281, 1987.
- [25] R. Vicente, C. M. de Toledo, V. B. Leite, and N. Caticha, “Underlying dynamics of typical fluctuations of an emerging market price index: The heston model from minutes to months,” *Physica A*, vol. 361, p. 272, 2006.
- [26] C. L. M. H. Navier, “Mémoire sur les lois du mouvement des fluides,” *Mém. Acad. Roy. Sci.*, vol. 6, p. 369, 1823.
- [27] E. Noether, “Invariante variationsprobleme,” *Nachr. D. König. Gesellsch. Math-phys. Klasse*, 1918.
- [28] J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*. Cambridge University Press, 1878.
- [29] A. M. Obukhov, “Spectral energy distribution in a turbulent flow,” *Izv. Akad. Nauk SSSR*, vol. 5, p. 453, 1941.

- [30] M. A. Parseval, “Mémoire sur les séries et sur l’intégration complète d’une équation aux différences partielles linéaire du second ordre, à coefficients constants,” *Mémoires présentés à l’Institut des Sciences, Lettres et Arts*, vol. 1, p. 638, 1806.
- [31] T. von Kármán and L. Howarth, “On the statistical theory of isotropic turbulence,” *Proc. R. Soc. London A*, vol. 164, p. 192, 1938.
- [32] P. K. Yeung and Y. Zhou, “Universality of the kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence,” *Phys. Rev. E*, vol. 56, p. 1746, 1997.
- [33] A. S. Gurvitch, “Experimental research on frequency spectra of atmospheric turbulence,” *Izv. Akad. Nauk SSSR*, vol. geofiz. ser., p. 1042, 1960.
- [34] A. N. Kolmogorov, “On the logarithmically normal law of distribution of the size of particles under pulverization,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 31, p. 99, 1941.
- [35] C. Beck, “Statistics of three-dimensional lagrangian turbulence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 064502, 2007.
- [36] E. A. Novikov, “Intermittency and scale similarity of the structure of turbulent flow,” *Prikl. Math. Mekh.*, vol. 35, p. 266, 1970.
- [37] U. Frisch, P. Sulem, and M. Nelkin, “A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence,” *J. Fluid Mech.*, vol. 87, p. 719, 1978.
- [38] F. Anselmetti, Y. Gagne, E. J. Y. Hopfinger, and R. A. Antonia, “High order velocity structure functions in turbulent shear flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 140, p. 63, 1984.
- [39] B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*. Freeman & Co., 1977.
- [40] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*. D. Ridell, Dordrecht, 1974.
- [41] G. Parisi and U. Frisch, “On the singularity structure of fully developed turbulence,” *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceed. Intern. School of Physics E. Fermi*, p. 84, 1983.
- [42] M. J. Sewell, *Maximum and Minimum Principles*. Cambridge University Press, 1987.
- [43] E. A. Novikov and R. W. Stewart, “The intermittency of turbulence and the spectrum of energy dissipation,” *Akad. Nauk SSSR*, p. 408, 1964.
- [44] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, and A. Vulpiani, “On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems,” *J. Phys.*, vol. 17, p. 3521, 1984.
- [45] Z.-S. She and E. Lévêque, “Universal scaling laws in fully developed turbulence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, p. 336, 1994.

- [46] G. R. Chavarria, C. Baudet, and S. Ciliberto, "Hierarchy of the energy dissipation moments in fully developed turbulence," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 1986, 1995.
- [47] E. S. Ching, Z.-S. She, W. Su, and Z. Zou, "Extended self-similarity and hierarchical structure in turbulence," *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 066303, 2002.
- [48] B. Dubrulle, "Intermittency in fully developed turbulence: Log-poisson statistics and generalized scale covariance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, p. 959, 1994.
- [49] B. L. Sawford, "Reynolds number effect in lagrangian stochastic models of turbulent dispersion," *Phys. Fluids A*, vol. 3, p. 1577, 1991.
- [50] A. M. Reynolds, "On the formulation of lagrangian stochastic models for heavy-particle trajectories," *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 232, p. 260, 2000.
- [51] A. M. Reynolds, "Superstatistical mechanics of tracer-particles motion in turbulence," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 084503, 2003.
- [52] V. N. Desnyansky and E. A. Novikov, "The evolution of turbulence spectra to the similarity regime," *Izv. Akad. Nauk SSSR*, vol. 10, p. 127, 1974.
- [53] E. N. Lorenz, "Low order models representing realizations of turbulence," *J. Fluid Mech.*, vol. 55, p. 545, 1972.
- [54] E. B. Gledzer, "System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion," *Sov. Phys, Dkl.*, vol. 18, p. 216, 1973.
- [55] M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, "Intermittency in a cascade model for three-dimensional turbulence," *Phys. Rev. A*, vol. 43, p. 798, 1991.
- [56] D. Pisarenko, L. Biferale, D. Courvoisier, U. Frisch, and M. Vergassola, "Further results on multifractality in shell models," *Phys. Fluids A*, vol. 5, p. 2533, 1993.
- [57] R. Benzi, L. Biferale, and G. Parisi, "On intermittency in a cascade model for turbulence," *Physica D*, vol. 65, p. 163, 1993.
- [58] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, 2004.
- [59] C. Tsallis, "Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics," *J. Stat. Phys.*, vol. 52, p. 479, 1988.
- [60] L. Borland, "Option pricing formulas based on a non-gaussian stock price model," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 098701, 2002.
- [61] T. S. Birô and R. Rosenfeld, "Microscopic origin of non-gaussian distributions of financial returns," *Physica A*, vol. 387, p. 1603, 2008.

- [62] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.
- [63] P. Langevin, "On the theory of brownian motion," *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, vol. 146, p. 530, 1908.
- [64] J. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Duxbury Press, 1995.
- [65] W. S. Gosset, "The probable error of a mean," *Biometrika*, vol. 6(1), p. 1, 1908.
- [66] R. M. R. Walpole and K. Ye, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Pearson Education, 2002.
- [67] <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedHypergeometricFunction.html>.
- [68] <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheSecondKind.html>.
- [69] G. Stolovitzky, P. Kailasnath, and K. R. Sreenivasan, "Kolmogorovs refined similarity hypotheses," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, p. 1178, 1992.
- [70] A. Naert, B. Castaing, B. Chabaud, B. Hébral, and J. Peinke, "Conditional statistics of velocity fluctuations in turbulence," *Physica D*, vol. 113, p. 73, 1998.
- [71] L. C. Andrews, R. L. Phillips, B. K. Shivamoggi, J. K. Beck, , and M. L. Joshi, "A statistical theory for the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence," *Phys. Fluids A*, vol. 1, p. 999, 1989.
- [72] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, and B. Hébral, "Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet," *Eur. Phys. J. B*, vol. 17, p. 309, 2000.
- [73] O. Chanal, B. Baguenard, O. Béthoux, and B. Chabaud, "Micronic-size cryogenic thermometer for turbulence measurements," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 68, p. 2442, 1997.
- [74] A. S. Gurvitch and A. M. Yaglom, "Breakdown of eddies and probability distribution for small-scale turbulence," *Physics of Fluids*, vol. 87, p. 719, 1967.
- [75] J. Aitchison and J. Brown, *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, 1957.
- [76] E. Fama, "The behavior of stock market prices," *Journal of Business*, vol. 38, p. 34, 1965.
- [77] J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice-Hall, 2005.
- [78] R. C. Merton, "Theory of rational option pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, p. 141, 1973.

- [79] N. Taleb and E. G. Haug, “Why we have never used the black-scholes-merton option pricing formula,” http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1012075, 2009.
- [80] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics - Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [81] R. F. Engle, “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of united kingdom inflation,” *Econometrica*, vol. 50, p. 987, 1982.
- [82] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, vol. 31, p. 307, 1986.
- [83] D. B. Nelson, “Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach,” *Econometrica*, vol. 59, p. 347, 1991.
- [84] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, 1998.
- [85] S. L. Heston, “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options,” *Rev. Financial Stud.*, vol. 6, p. 327, 1993.
- [86] J. P. Bouchaud, A. Matacz, and M. Potters, “Leverage effect in financial markets: The retarded volatility model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 228701, 2001.
- [87] E. M. Stein and J. C. Stein, “Stock price distribution with stochastic volatility : An analytic approach,” *Review of Financial Studies*, vol. 4, p. 727, 1991.
- [88] R. Schobel and J. Zhu, “Stochastic volatility with an ornstein uhlenbeck process: An extension,” *European Finance Review*, vol. 3, p. 23, 1999.
- [89] R. C. Merton, “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, vol. 3, p. 125, 1976.
- [90] J. M. Karpoff, “The relation between price changes and trading volume,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, p. 109, 1987.
- [91] S. M. D. Queiros and L. G. Moyano, “Yet on statistical properties of traded volume: correlation and mutual information at different value magnitudes,” *Physica A*, vol. 383, p. 10, 2007.
- [92] A. M. d. T. Ramos, “Modelo exponencial para precificação de opções: Aplicações ao Índice ibovespa.” Master’s thesis, Departamento de Física - UFPE, 2007.
- [93] T. Lux, “Turbulence in financial markets: the surprising explanatory power of simple cascade models,” *Quantitative Finance*, vol. 1, p. 632, 2001.
- [94] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, “Probability distribution of returns in the heston model with stochastic volatility,” *Quantitative Finance*, vol. 2, p. 443, 2002.

- [95] L. Cobb and R. M. Thrall, *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences, Cap. 2*. Westview Press, 1981.
- [96] M. R. Flynn, “A stochastic differential equation for exposure yields a beta distribution,” *Ann. occup. Hyg.*, vol. 48, p. 491, 2004.
- [97] J. Z. Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 2004.
- [98] M. Namiki, *Lecture Notes in Physics - Stochastic Quantization*. Springer-Verlag, 1992.
- [99] E. L. Lima, *Análise Real*. IMPA, 2004.
- [100] H. Lebesgue, “Intégrale, longueur, aire,” *Université de Paris*, 1902.

