



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI EM SISTEMAS
COSMOLÓGICOS

por

Maury Duarte Correia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Orientador-UFPE)

Prof. Antonio Murilo dos Santos Macêdo (DF - UFPE)

Prof. Dionísio Bazeia Filho (DF - UFPB)

Recife - PE, Brasil
Abril - 2009

Correia, Maury Duarte

Formalismo de Hamilton-Jacobi em sistemas cosmológicos /
Maury Duarte Correia. - Recife : O Autor, 2009.
vi, 64 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2009.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Cosmologia. 2. Formalismo Hamilton-Jacobi. 3. Relatividade
geral. 4. Inflação cosmológica. 5. Modelo FLRW. I. Título.

523.1 CDD (22.ed.) FQ2009-22



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Maury Duarte Correia

FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI EM SISTEMAS COSMOLÓGICOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Presidente e Orientador), Antônio Murilo dos Santos Macêdo, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Dionísio Bazeia Filho, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato:

☒ Aprovado

() Reprovado

() Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e quatro de abril de 2009.


Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Presidente e Orientador


Prof. Antônio Murilo dos Santos Macêdo


Prof. Dionísio Bazeia Filho

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Bruno C. Cunha pela orientação, a CAPES pelo apoio financeiro, ao df-UFPE pelo fornecimento da infra-estrutura, e a todos meus amigos pela convivência ao longo desses dois anos de mestrado.

Porque eu sou do tamanho do que vejo

E não do tamanho da minha altura...

Alberto Caeiro em “O guardador de rebanhos”, poema VII.

O Universo não é uma idéia minha.

A minha idéia do Universo é que é uma idéia minha.

Alberto Caeiro em “Poemas Inconjuntos”

Resumo

Neste trabalho estudamos características do universo primitivo, que ocorre logo após a era de Planck. Mostraremos o paradigma atual da cosmologia moderna baseado na teoria da inflação cosmológica. Essa teoria foi proposta na década de 80 e explica alguns problemas associados a teoria do Big Bang, como o da platitude e do horizonte. Resolvemos as equações de movimento associadas a evolução dinâmica do fator de escala do universo que emergem da teoria da relatividade geral com a métrica de FLRW. A equação de Hamilton-Jacobi para o campo escalar acoplado minimamente a gravidade será apresentada como uma via alternativa de resolução das equações de Friedmann. Vamos analisar alguns tipos de potenciais inflacionários, como o exponencial, o trigonométrico e polinomial. Nesse último veremos que a inflação não elimina completamente a escolha de condições iniciais.

Palavras chaves: 1. Cosmologia; 2. Relatividade Geral; 3. Teoria de Campos; 4. Inflação; 5. Universo de FLRW

Abstract

In this work we study some aspects of early universe that is immediately after Planck era. We present the actual standard model of modern cosmology basis on inflation theory. This theory, proposed in 80's, explain some problems about Big Bang theory, like flatness and horizon. We solve the equations of motion for dynamical evolution of universe scale factor that emerge of general relativity theory with FLRW metric. We present the Hamilton-Jacobi equation for scalar field minimally coupled with gravity like a alternative way for solve Friedmann equations. We work with some inflationary potentials, like exponential, trigonometric and polinomials. In the last we show that inflation do not eliminate completely the choice of inicial conditions.

Keywords: 1. Cosmology; 2. General Relativity; 3. Field theory; 4. Inflation; 5. FLRW universe

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	vi
1 Teoria da Relatividade Geral	1
1.1 Revisão histórica	1
1.2 Aspectos matemáticos	5
2 O modelo cosmológico padrão	11
2.1 Revisão histórica	11
2.2 Modelo de FLRW	13
2.2.1 Equações de movimento	14
2.2.2 Universos dominados por matéria e radiação	18
2.2.3 Red-shift cosmológico	20
3 Cosmologia inflacionária	22
3.1 Problemas com o modelo padrão	22
3.1.1 O problema da platitude	23

3.1.2	O problema do Horizonte	26
3.2	Inflação	27
4	Método de Hamilton-Jacobi e resultados	35
4.1	Equação de Hamilton-Jacobi em Mecânica Relativística	36
4.2	Equação de Hamilton-Jacobi quântica e variáveis de ação-ângulo	38
4.3	Equação de Hamilton-Jacobi em Cosmologia	41
4.4	Formulação hamiltoniana das Equações de Friedmann	43
4.4.1	Inflação com lei de potência: $V = V_0 e^{-\sqrt{\frac{2}{p}}(\phi - \phi_0)}$	46
4.4.2	Potencial trigonométrico: $V(\phi) = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$	49
4.4.3	Potenciais polinomiais	51
5	Conclusão	54
A	Unidades geométricas	57
	Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

- 1.1 Parte inicial da p. 14L do caderno de Zurique (Zurich Notebook). Na primeira equação Einstein escreve o símbolo de Christoffel de primeira ordem, a segunda o tensor de Riemann covariante (ik, lm) , que ele chama de “tensor de quadri-variedade” (*Tensor vierter Mannigfaltigkeit*; abaixo do nome Grossmann), e a terceira a contração do tensor de Riemann com a metrica covariante γ_{kl} . © Universidade Hebraica de Jerusalém, Arquivos Albert Einstein. 3
- 1.2 A figura da esquerda mostra o transporte paralelo de um vetor sobre uma curva fechada em uma esfera, observe que o vetor final é diferente do inicial. A figura da direita mostra um *loop* infinitesimal numa variedade. 8
- 3.1 Retrato de fase do parâmetro de densidade de energia do universo, $x = \frac{\Omega-1}{\Omega}$, com sua derivada, $y = x'$, com relação ao número de *e-folds*, N , numa expansão FLRW com $w > -1/3$. Vemos que qualquer perturbação com relação a $x = 0$ teremos $x \rightarrow \pm\infty$, o que significa um universo não-plano. . 25

3.2	A figura da esquerda mostra a evolução, qualitativa, do fator de escala e do horizonte previsto pelas equações de Friedmann sem o período inflacionário, mostrando que em tempos anteriores ao atual, o horizonte era menor que o fator de escala do universo observável. A figura da direita mostra como a inflação resolve o problema do horizonte colocando um período de expansão acelerada que leva o horizonte a sempre ser maior que o fator de escala.	27
3.3	Retrato de fase do parâmetro de densidade de energia do universo, $x = \frac{\Omega-1}{\Omega}$, com sua derivada, $y = x'$, com relação ao número de <i>e-folds</i> , N , na inflação ($w \simeq -1$). Vemos que $x = 0$ (universo plano) é um atrator estável.	29
3.4	Forma do potencial $V(\phi)$ para gerar o período inflacionário. O campo inicial está numa posição em que o potencial tem um valor grande e sua forma é praticamente constante, então o campo vai relaxando suavemente, atendendo as condições de slow-roll, e quando chega ao mínimo o campo oscila dando fim a inflação e começando o reaquecimento.	32
3.5	Representação pictórica de nosso Universo. O eixo vertical representa o tempo e as seções horizontais alguns eventos importantes na história do universo segundo o paradigma atual.	33
4.1	Plano complexo da coordenada X de um movimento oscilatório para o caso clássico, ou estados ligados para o caso quântico; (a) <i>Ground-state</i> , nenhum pólo entre X_1 e X_2 ; (b) Primeiro estado excitado, 1 pólo; (c) Segundo estado excitado, 2 pólos; (d) Décimo terceiro estado excitado, 13 pólos; (e) Limite clássico, corte de ramificação.	40

4.2	Gráfico da dependência temporal do fator de escala, $a(t)$, definido na equação (4.35) para $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$ e $p \rightarrow \infty$	48
4.3	Gráfico da função $\phi(f)$ definido na equação (4.40) para $p = 2$, $p = 3$ e $p = 4$	49
4.4	A figura da esquerda mostra a dependência temporal do campo $\phi(t)$, do potencial $V(t)$ e do parâmetro de Hubble $H(t)$ para o potencial $V = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$. A figura da direita mostra a solução para o fator de escala $a(t)$, bem como a aceleração $\ddot{a}(t)$. Os parâmetros V_0 , ϕ_0 e t_0 foram escolhidos para se obter uma boa visualização das curvas.	51

Lista de Tabelas

A.1	Tabela de conversão entre unidades ordinárias e unidades geométricas. . . .	58
A.2	Tabela com os valores das grandezas de Planck.	58

Capítulo 1

Teoria da Relatividade Geral

1.1 Revisão histórica

Nesta seção apresentaremos uma breve e sucinta revisão histórica sobre o desenvolvimento da teoria da relatividade geral [1][2][3].

O físico alemão A. Einstein publicou a forma definitiva da teoria da relatividade geral em 1916 [4], num processo que se iniciou em 1907 quando ele escrevia um artigo de revisão sobre a teoria da relatividade especial publicada em 1905. Einstein adotou o princípio da equivalência para generalizar a relatividade especial em referenciais acelerados. Este princípio diz que a aceleração produzida por um campo gravitacional estático e uniforme gera os mesmos efeitos que um referencial (sistema de coordenadas) acelerado. Isso porque é assumido uma identidade entre a massa gravitacional e a massa inercial. Em seu famoso *Gedankenexperiment*¹, ele ilustra esse princípio através de um elevador sendo acelerado por um foguete no espaço, com aceleração igual a aceleração gravitacional da Terra. Um

¹expressão latino-germânica para denotar um experimento imaginado.

observador dentro desse elevador não poderia distinguir a aceleração feita pelo foguete da aceleração do campo gravitacional da Terra, no regime em que consideramos esse campo homogêneo e uniforme. Posteriormente, em 1920, Einstein descreveu o princípio da equivalência como o pensamento mais feliz de sua vida: “the happiest thought of my life” [5].

A teoria da relatividade geral vem substituir a teoria da gravitação universal de Newton, desenvolvida no final do século XVII. Na teoria newtoniana a força gravitacional atua instantaneamente e a distância. Esse comportamento contradiz um dos postulados da relatividade especial que diz que nenhuma informação pode viajar com uma velocidade mais rápida que a velocidade da luz. Foi Hermann Minkowski e Henri Poincaré que propuseram a generalização da covariância de Lorentz para a lei gravitacional de Newton. O princípio da equivalência é também uma generalização da lei de Galileu dos corpos em queda livre, formulada no início do séc. XVII, que diz que o movimento dos corpos em queda livre independe de suas massas, ou seja, dois corpos com diferentes massas chegam ao chão ao mesmo tempo, se forem soltos de uma mesma altura.

O matemático Marcel Grossmann colaborou intensamente com Einstein. Juntos eles descobriram a conexão matemática entre o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e a invariância de um elemento de linha infinitesimal quadridimensional: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, nessa equação índices repetidos indicam soma (contração). Grossmann generalizou o cálculo vetorial desenvolvido por Minkowski, Sommerfeld, Laue e outros com a requisição de haver independência de coordenadas. Para tal utilizou conceitos matemáticos como variedades n-dimensionais [6], formas diferenciais quadráticas [7] e o chamado cálculo diferencial

$$[\mu\nu]_{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} \right)$$

$$(ik, lm) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x_i \partial x_l} \right) + \sum_{\epsilon\delta} \gamma_{\epsilon\delta} \left([im][\kappa l] - [il][\kappa m] \right)$$

$$\sum \gamma_{\kappa l} (ik, lm)$$

Grossmann
tensor vierter
Mannigfaltigkeit

Figura 1.1: Parte inicial da p. 14L do caderno de Zurique (Zurich Notebook). Na primeira equação Einstein escreve o símbolo de Christoffel de primeira ordem, a segunda o tensor de Riemann covariante (ik, lm) , que ele chama de “tensor de quadri-variedade” (*Tensor vierter Mannigfaltigkeit*; abaixo do nome Grossmann), e a terceira a contração do tensor de Riemann com a métrica covariante γ_{kl} . © Universidade Hebraica de Jerusalém, Arquivos Albert Einstein.

absoluto [8]. Veja na figura 1.1 um manuscrito de Einstein na época de colaboração com Grossmann.

Juntamente com Michele Besso (1873-1955), em manuscritos não publicados em 1913, Einstein calculou o movimento do periélio de Mercúrio. A mecânica newtoniana atende bem a primeira lei de Kepler para o movimento planetário que diz: os planetas se movem ao longo de uma elipse e tem o sol ocupando um dos focos dessa elipse. Porém devido a interação com os outros planetas do sistema solar, há uma pequena precessão no movimento dessa elipse, que pode ser observado através do avanço do periélio planetário. Esse avanço do periélio de Mercúrio é predito pela mecânica newtoniana como sendo $570''$ de arco por século. Contudo, desde 1859, Le Verrier, um astrônomo francês, já apontava um erro de $38''$ entre o valor newtoniano e suas observações. No final do ano de 1915, Einstein obteve a correção de $43''$ de arco por século no avanço do periélio de Mercúrio, com excelente concordância com o valor experimental atual, que é $43''$ [9].

Finalmente, em 1916 [4], Einstein publica um artigo de revisão na revista *Annalen der Physik*, onde organiza a forma definitiva da teoria da relatividade geral. Discutindo os postulados de sua teoria, os aspectos técnico-matemáticos, a teoria do campo gravitacional, a fenomenologia da matéria e o limite newtoniano, bem como consequências observáveis. A interpretação geométrica da relatividade geral, em termos de transporte paralelo de vetores tangentes, foi elaborada nos anos subsequentes por Levi-Civita e Hermann Weyl.

A forma definitiva da equação de Einstein, que é uma equação para a métrica, pode ser escrita da seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

essa equação relaciona, do lado esquerdo, a curvatura do espaço-tempo devido ao campo métrico, $g_{\mu\nu}$, com o conteúdo de matéria presente, lado direito. Na próxima seção explanaremos mais a respeito dessa equação.

Houve um grande interesse na teoria da relatividade geral no meio científico a partir da década de 50 [10]. Algumas descobertas astronômicas, como os quasares e fontes compactas de raio-x, e o interesse teórico de quantização da gravitação foram responsáveis por esse aumento na visibilidade da teoria. Nos objetos astronômicos citados, o colapso gravitacional e fortes campos gravitacionais desempenham um papel fundamental no entendimento dessas estruturas, fazendo-se necessário o uso da teoria da relatividade geral.

1.2 Aspectos matemáticos

A teoria da relatividade geral (RG) utiliza a noção matemática de variedade diferencial. A variedade é um conjunto de subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ que podem ser costurados suavemente de forma que possa recobrir toda variedade. Um exemplo disso é uma esfera que globalmente é um objeto 3D mas pode ser recoberta por objetos 2D, como uma bola de futebol; costurando um conjunto de peças hexagonais e pentagonais, que são objetos 2D, cobre-se toda a bola. Isso significa que o espaço-tempo quadri-dimensional de Minkowski da relatividade restrita é localmente válido, podendo a dimensão da estrutura global do universo ser de dimensão superior.

O conceito de métrica é bastante importante na RG, e nos diz como determinar a menor distância entre dois pontos num espaço de curvatura arbitrária, além de ter várias outras implicações na teoria [11]. A métrica, g , numa variedade M , é um campo tensorial simétrico, não-degenerado e construído com dois vetores ordinários. Isso, respectivamente, significa que $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$, $g(v, v_1) = 0$, $\forall v$ se $v_1 = 0$. Geralmente a métrica é escrita na notação ds^2 em lugar de g , e é expandida da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

onde os índices repetidos indicam soma. Um vetor no ponto p , de uma variedade M , é definido no espaço tangente ao ponto p , V_p , e se transforma de maneira contravariante, ou seja:

$$v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} v'^\nu.$$

Os vetores duais são análogos aos vetores, porém estão definidos no espaço dual (ou cotangente), V_p^* , e se transformam de forma covariante:

$$v_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v'_\nu.$$

A definição de índices em cima e em baixo para designar vetores e vetores duais é arbitrária.

Com os conceitos de variedade e métrica podemos definir um espaço-tempo curvo, que nada mais é que uma variedade n -dimensional M onde está definido uma métrica $g_{\mu\nu}$. O fato de trabalharmos num espaço curvo implica que a noção de derivada deve contemplar essa curvatura. Definimos o operador derivada, que chamaremos de derivada covariante, de forma unívoca, da seguinte maneira:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} v^\rho, \quad (1.3)$$

onde, no segundo membro, o primeiro termo é uma derivada ordinária e o segundo termo contém o símbolo de Christoffel, definido como

$$\Gamma^\nu_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho}). \quad (1.4)$$

O símbolo de Christoffel é uma conexão sem-torção e compatível com a métrica, definido de maneira unívoca.

Num espaço plano a translação de um vetor independe do caminho que se toma, mas num espaço curvo existe essa dependência. A forma de se fazer a translação nesse último caso é por meio do transporte paralelo. Qualitativamente o transporte paralelo se procede da seguinte maneira: escolhe-se a curva em que o transporte será feito e transporta-se o vetor de forma que este fique sempre paralelo nessa curva, ver figura (1.2). Geralmente o transporte paralelo de um vetor num caminho fechado não retorna o mesmo vetor, pois o vetor transportado volta ao mesmo ponto e com a mesma norma, porém faz um ângulo não nulo com o vetor original. Dessa forma, num *loop* infinitesimal, ver figura (1.2), esperaríamos que a variação de um vetor v^ρ , δv^ρ , dependesse dos incrementos infinitesimais e do próprio vetor v^ρ da seguinte maneira [11]

$$\delta v^\rho = (\delta a)(\delta b)A^\nu B^\mu R_{\sigma\mu\nu}{}^\rho v^\sigma, \quad (1.5)$$

em que introduzimos o tensor de Riemann, $R_{\sigma\mu\nu}{}^\rho$, que nos fornece a curvatura da variedade e pode ser escrito da seguinte maneira

$$R_{\sigma\mu\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.6)$$

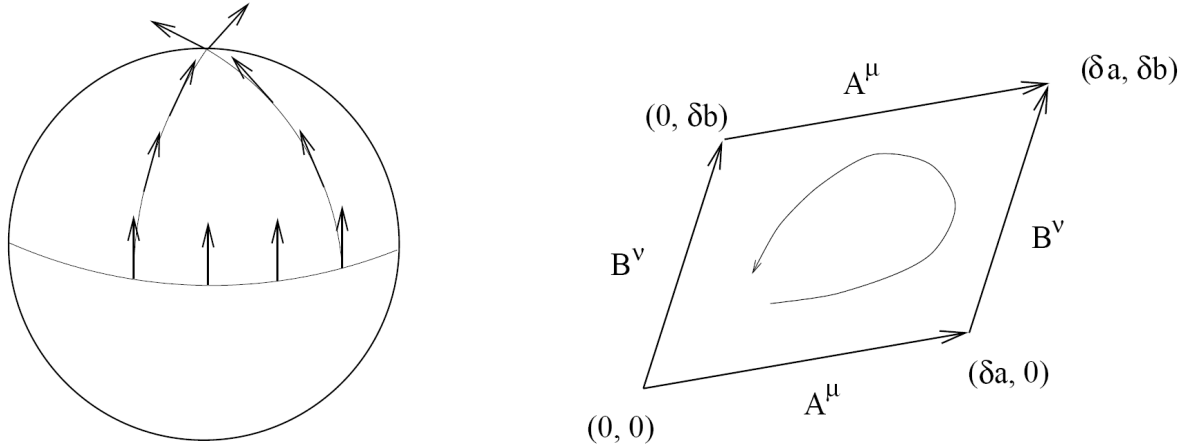


Figura 1.2: A figura da esquerda mostra o transporte paralelo de um vetor sobre uma curva fechada em uma esfera, observe que o vetor final é diferente do inicial. A figura da direita mostra um *loop* infinitesimal numa variedade [11].

A contração do segundo e quarto índice do tensor Riemann se chama tensor de Ricci. Com a métrica podemos contrair o tensor de Ricci e gerar o escalar de curvatura, bem como construir o tensor de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho} \quad (1.7)$$

$$R = R_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

A curva que fornece o menor caminho entre dois pontos, num espaço curvo, é chamada geodésica. É considerado que todas as partículas livres descrevem geodésicas no espaço-tempo. Na RG a gravidade, por exemplo a da Terra sobre nós, nada mais é que um desvio em nossa geodésica afim de acompanhar a curvatura do espaço-tempo, e esta última é causada pela massa (energia) da Terra. Isso significa que a gravitação é um

efeito puramente geométrico; a energia curva o espaço-tempo e isso afeta a geodésica de corpos vizinhos. A equação de Einstein consiste em relacionar a energia com a curvatura do espaço-tempo, ela nos diz como essa energia encurva o espaço-tempo.

A generalização tensorial da densidade de massa é feita através do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$. Neste tensor está incluído a informação a respeito da energia do corpo, seja ela devido a sua massa ou a seu momento. Posto dessa forma, a equação de Einstein é a equação (1.1), que repetimos aqui

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (1.10)$$

Observe que o lado esquerdo da equação acima encontra-se o tensor de Einstein definido em (1.9), e do lado direito temos o tensor energia-momento, em que G é a constante de gravitação universal. O tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, depende da derivada segunda da métrica, $g_{\mu\nu}$, pela contração da equação (1.6). Portanto este tensor é não-linear com a métrica, e a equação tensorial de Einstein (1.10) é um sistema de equações diferenciais parciais acopladas de segunda ordem.

Nas seções posteriores vamos analisar algumas implicações cosmológicas da eq. de Einstein, vamos definir a métrica e calcular o lado esquerdo da equação de Einstein (1.10) e para computarmos o lado direito, $8\pi GT_{\mu\nu}$, consideraremos o tensor energia-momento de

um fluido perfeito no referencial de um observador co-móvel². Dessa maneira a quadri-velocidade desse fluido só terá a componente temporal não-nula. Escrevemos então

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (1.11)$$

em que ρ e p são a densidade e pressão, respectivamente, do conteúdo de matéria presente no Universo, e u_μ é a quadri-velocidade do fluido, que no referencial co-móvel é $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, e as componentes do tensor são $T^{00} = \rho$, e $T_j^i = \delta_j^i p$, em que δ_j^i é a função delta de Kronecker³.

²Observador co-móvel é aquele que se desloca junto com o fluido, de maneira a ficar estacionário com este.

³Delta de Kronecker: $\delta_j^i = 1$, se $i = j$, e $\delta_j^i = 0$, se $i \neq j$.

Capítulo 2

O modelo cosmológico padrão

2.1 Revisão histórica

Einstein obteve soluções cosmológicas de suas equações, onde introduziu uma constante cosmológica para obter um universo estático. Porém o físico russo, A. A. Friedmann, publicou, em 1922, um artigo na revista alemã “Zeitschrift fur Physik”, com o título: “Uber die Krümmung des Raumes”; em inglês: “On the curvature of space”, em que analisa a possibilidade de existir universos não-estacionários, encontrando uma solução de universo em expansão para as equações de Einstein.

O universo dinâmico de Friedmann teve forte apoio observacional a partir do trabalho publicado em 1925 por E. Hubble [12], um astrônomo americano. Entre 1922 e 1923, Hubble observou galáxias com tamanho comparado a Via Láctea, e descobriu que estas galáxias se afastam de nós com uma velocidade proporcional à distância delas até nós, o que hoje é conhecido como lei de Hubble. Observado então a expansão do universo,

Einstein se referiu à sua constante cosmológica como o maior erro de sua vida: “the biggest blunder of my life” [13].

O também russo G. Gamow, em 1948, predisse a existência da radiação cósmica de fundo na faixa de microondas (RCF) [14][15], e R. A. Alpher e R. Herman [16] estimaram sua temperatura em 5K . Porém somente em 1965, com o trabalho A. Penzias e R. Wilson [17] é que a RCF foi medida, com um valor próximo de 3K de temperatura. Penzias e Wilson foram agraciados com o prêmio nobel de física em 1978 por essa descoberta. Atualmente, com medidas mais precisas, como do projeto COBE (Cosmic Background Explorer), e do WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), sabemos que a temperatura da RCF vale 2.7K.

A RCF é interpretada como sendo um resquício do Big Bang. Ela é proveniente da superfície de último espalhamento, que foi quando o Universo se tornou transparente a luz. É uma radiação eletromagnética na faixa de microondas, com frequência de 160,2 GHz e 1,9mm de comprimento de onda, o que corresponde a radiação emitida por um corpo negro a uma temperatura de aproximadamente 2,7K. Essa radiação é aproximadamente homogênea, ou seja, não importa em qual direção do universo o experimento é feito, a radiação é aproximadamente igual. Com experimentos sensíveis é possível detectar as anisotropias da RCF que são da ordem de 10^{-5} . Isso significa que a frequência da RCF flutua 1 parte em 100 mil.

A uniformidade da RCF dá força ao princípio cosmológico, que é uma generalização do princípio copernicano. Assim como N. Copérnico propôs que a Terra não se encontrava no centro do “universo”, ou seja, não haveria motivo para considerar a Terra numa

posição privilegiada em relação aos outros planetas, o princípio cosmológico nos diz que não há motivo para que nós sejamos observadores privilegiados da expansão do universo. Dessa forma, somos forçados a crer que o universo é homogêneo e isotrópico em escalas suficientemente grandes, que é da ordem de centenas de mega parsec¹.

2.2 Modelo de FLRW

Quando olhamos para outras galáxias vemos que elas estão se afastando de nós, logo se invertemos o tempo veríamos que as mesmas estão se aproximando de nós. Isto significa que existe uma evolução dinâmica do nosso Universo e a direção do tempo é importante. Dessa maneira a prescrição de homogeneidade e de isotropia do Universo é apenas espacial. Apesar de nosso Universo se organizar em galáxias e aglomerado de galáxias, a distribuição destas, em escala suficientemente grande, é homogênea, dessa forma não importa o lugar em que o observador esteja situado, ou a direção que ele olhe, o Universo sempre parece o mesmo.

No âmbito da RG consideramos que o espaço-tempo pode ser folheado em seções espaciais homogêneas e isotrópicas, isso significa que dado uma hipersuperfície do tipo espaço a t constante, que nada mais é que o Universo olhado num instante de tempo, existe uma isometria que leva um ponto p em um ponto q , ou seja, existe uma simetria com relação a translações espaciais. Já a isotropia é uma consequência da simetria rotacional.

Existem três tipos de espaços maximalmente simétricos, e a classificação destes está relacionada com o sinal de sua curvatura. Para espaços com curvatura positiva temos

¹ $1pc = 3,086.10^{16}m = 3,26anos-luz$. As ordens de grandeza da Via Láctea, aglomerado de Virgem e Universo observável são, respectivamente 10kpc, 10Mpc e 10Gpc.

simetria esférica, para curvatura negativa temos simetria hiperbólica e para espaços com curvatura nula temos o caso euclidiano com simetria plana.

A métrica que contempla os três espaços acima descritos é a métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, que pode ser representada da seguinte maneira:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2, \quad (2.1)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala do Universo que depende do tempo e $d\Sigma$ é a seção espacial com uma das três configurações já descritas, mais a frente explicitaremos a forma dessa diferencial. A sigla FLRW dá mérito aos quatro cientistas que trabalharam com a mesma. Friedmann era um matemático e publicou seus resultados em 1922; Lemaître, que era astrônomo, obteve resultados semelhantes e independentes de Friedmann, enquanto Robertson e Walker publicaram na década de trinta trabalhos com respeito as características geométricas dessa métrica.

2.2.1 Equações de movimento

Para o caso da geometria espacial plana, a métrica pode ser escrita como $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, então o nosso tensor energia-momento é $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. Nós teremos dois tipos de símbolos de Christoffel não-nulos, eq. (1.4). As três dimensões espaciais são idênticas, de tal forma que ao calcularmos os símbolos para x obteremos o mesmo resultado para y e z . Então temos:

$$\Gamma_{xx}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(-\partial_t g_{xx}) = \frac{\partial_t a^2}{2} = a\dot{a}, \quad (2.2)$$

$$\Gamma_{tx}^x = \frac{1}{2}g^{xx}(\partial_t g_{xx}) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial_t a^2}{2} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.3)$$

em que o ponto em $\dot{a}$ significa derivada com relação ao tempo. Para o cálculo do escalar de curvatura, eq. (1.8), os termos não-nulos são

$$R = R_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -R_{tt} + 3a^{-2}R_{xx}, \quad (2.4)$$

devemos então calcular R_{tt} e R_{xx} , que dão respectivamente

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 3R_{txt}{}^x \\ &= -\partial_t \Gamma_{xt}^x - \Gamma_{tx}^x \Gamma_{xt}^x \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e

$$\begin{aligned} R_{xx} &= R_{xtx}{}^x + R_{xyx}{}^y + R_{xzx}{}^z \\ &= \partial_t \Gamma_{xx}^t - \Gamma_{\lambda x}^t \Gamma_{tx}^{\lambda} + \Gamma_{y\lambda}^y \Gamma_{xx}^{\lambda} + \Gamma_{z\lambda}^z \Gamma_{xx}^{\lambda} \\ &= a\ddot{a} + 2\dot{a}^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Obtemos então para o escalar de curvatura

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (2.7)$$

Com os cálculos acima podemos resolver a equação tensorial de Einstein, eq. (1.10). A princípio obteríamos dez equações diferenciais acopladas devido aos dez termos independentes do tensor simétrico energia-momento, porém devido as simetrias já discutidas, obteremos apenas duas equações linearmente independentes. A primeira delas é a componente tt dos tensores, $G_{tt} = 8\pi GT_{tt}$, que dá

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (2.8)$$

a componente xx da equação, $G_{xx} = 8\pi GT_{xx}$, dá

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi Gp. \quad (2.9)$$

Podemos utilizar a primeira destas equações para reescrever a segunda

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.10)$$

Para generalizar as equações (2.8) e (2.10) para as geometrias esférica e hiperbólicas, devemos escrever a métrica da seguinte maneira

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.11)$$

em que $d\Omega$ é o ângulo sólido e a constante k é o parâmetro que nos fornece a curvatura do espaço, para $k = -1$ temos simetria hiperbólica, para $k = 0$ temos simetria plana e para $k = 1$ temos a simetria esférica. Dessa maneira obtemos as equações de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.13)$$

O parâmetro que caracteriza a taxa de expansão é o parâmetro de Hubble,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.14)$$

Manipulando as duas equações de Friedmann e utilizando (2.14) obtemos a equação da continuidade

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (2.15)$$

Podemos reescrever a primeira equação de Friedmann (2.12) com o parâmetro de Hubble e obter a densidade crítica do Universo fazendo $k = 0$, que é a densidade tal que o Universo é plano

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.16)$$

Essa equação será importante quando falarmos sobre o problema da platitude no próximo capítulo.

2.2.2 Universos dominados por matéria e radiação

Para fazer algum progresso com as equações de Friedmann, devemos definir uma equação de estado para o conteúdo de matéria presente no Universo, pois assim conseguimos relacionar a pressão com a densidade. Sabemos da mecânica estatística que um gás de fótons tem uma equação de estado $p = \rho/3$, e para o caso da matéria ordinária não esperamos que ela exerça alguma pressão, pois a tratamos como poeira, assim obtemos $p = 0$. Uma equação de estado simples, relação entre pressão e densidade de energia, pode ser definida como

$$p = w\rho, \tag{2.17}$$

assim para $w = 0$ obtemos um Universo dominado por matéria bariônica e para $w = 1/3$ obtemos um Universo dominado por fótons. Para esses dois casos temos que $\rho > 0$ e $p \geq 0$ o que nos fornece uma aceleração negativa $\ddot{a} < 0$, ver eq. (2.13). Através de observações cosmológicas sabemos que o Universo está expandindo, ou seja, $\dot{a} > 0$. Assim os dois tipos de matéria nos fornecem um Universo que se expande desaceleradamente, o que significa que quanto mais voltamos no tempo, mais acelerada é a expansão do Universo, e assim acabamos encontrando uma singularidade, que é quando $a \rightarrow 0$ e $H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \infty$. Isso significa que Universos com densidade e pressão positivas, devem ter tido um início, que é o Big Bang.

Utilizando a equação de estado (2.17) podemos resolver facilmente as equações de Friedmann para o caso em que $k = 0$ [18]. A equação (2.13) pode ser escrita como $\dot{H} = -4\pi(1+w)\rho$, que substituindo em (2.12) pode ser integrada

$$H = \frac{2}{3(1+w)(t-t_0)}. \quad (2.18)$$

Pela definição do parâmetro de Hubble ($H = \dot{a}/a$), podemos calcular o fator de escala

$$a(t) = a_0(t-t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (2.19)$$

Para o caso de um Universo dominado por poeira, $w = 0$, temos $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, $\dot{a} \propto t^{-\frac{1}{3}}$ e $\ddot{a} \propto -t^{-\frac{4}{3}}$, demonstrando que o fator de escala expande desaceleradamente, pois $a(t)$ é uma função crescente com o tempo, enquanto que a velocidade dessa expansão, $\dot{a}$, decresce com o tempo com uma aceleração, $\ddot{a}$, negativa. Para o caso de um Universo dominado por radiação, $w = 1/3$, temos $a \propto t^{\frac{1}{2}}$, $\dot{a} \propto t^{-\frac{1}{2}}$ e $\ddot{a} \propto -t^{-\frac{3}{2}}$, que qualitativamente tem o mesmo comportamento do caso de poeira, ou seja expansão desacelerada.

Alguns modelos cosmológicos que tentam explicar a atual expansão acelerada do Universo, consideram que este está preenchido por um tipo de matéria exótica (energia escura ou quintessência como modelos mais famosos) que tenha uma equação de estado com $w < -1/3$ [18].

2.2.3 Red-shift cosmológico

O desvio espectral para o vermelho das galáxias, conhecido como red-shift, observado por E. Hubble [12] é devido a expansão do universo, o que significa que o fator de escala do universo hoje é maior do que era quando a luz saiu das galáxias. Podemos definir um parâmetro que compara o fator de escala atual com o fator de escala de tempos anteriores da seguinte maneira [19]

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a_0}{a} \equiv 1 + z, \quad (2.20)$$

em que λ_{obs} é o comprimento de onda observado, λ_{em} é o comprimento de onda emitido, a_0 é o fator de escala atual, a o fator de escala anterior e z é o parâmetro desejado. A velocidade de afastamento das galáxias, para z pequeno, é $v = cz$, em que c é a velocidade da luz². Podemos expandir o fator de escala $a(t)$ em série de Taylor e substituir na equação (2.20) para obtermos a lei de Hubble

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \approx \frac{a_0}{a_0(1 + (t - t_0)(\dot{a})_0/a_0)} - 1 \approx \frac{(\dot{a})_0}{a_0}(t_0 - t) = H_0 L, \quad (2.21)$$

em que H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble³ e $L \approx (t_0 - t)c$ é a distância das galáxias.

Podemos usar o parâmetro de red-shift z para medir a distância temporal que o objeto está de nós. Por exemplo, considerando $(a_0 = 1, t_0 = 1)$ para os valores atuais do fator

²Usaremos $c = 1$.

³ $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, em que h é um parâmetro adimensional de incerteza na medida e está entre 0,4 – 1.

de escala e tempo, em um universo dominado por matéria ($a \sim t^{\frac{2}{3}}$), e utilizando (2.20), o tempo em função de z é

$$t = \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.22)$$

Isso significa que quanto mais distante o objeto está de nós maior será seu red-shift, pois se a distância do objeto é muito grande, significa que quando sua luz chega até nós, ela partiu há muito tempo do objeto. Segundo a lei de Hubble quanto mais distante está o objeto, mais no passado ele está. A formação de estruturas, como galáxias e estrelas, situa-se num tempo correspondente a um parâmetro de red-shift, z , entre 2 – 10, que é cerca de $\sim 1 - 10$ bilhões de anos desde o início do universo, o que corresponde a cerca de $\sim 3 - 12$ bilhões de anos atrás.

Capítulo 3

Cosmologia inflacionária

Existem alguns problemas com o modelo FLRW, em que os principais são o da flatness e do horizonte. A inflação proposta por Alan H. Guth em 1981 [20] tenta resolvê-los, afirmando que o Universo deve ter passado, em seu início, por um período inflacionário, que pode ser definido como uma expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$) [21]. Adotando esse modelo, devemos dizer qual entidade física causou essa expansão. A forma padrão de gerar o período inflacionário é acoplar a gravitação a um campo escalar, onde esse campo, chamado dilaton ou inflaton, é o responsável pela inflação. Nesse capítulo iremos discorrer a respeito desse período inflacionário do início do Universo.

3.1 Problemas com o modelo padrão

As equações de Friedmann nos levam a soluções dinâmicas para o fator de escala do universo, além de prever uma singularidade quando $t \rightarrow 0$, o Big Bang. Vamos analisar nesse capítulo dois problemas com a teoria do Big Bang, e os dois estão de certa forma

relacionados com a idade do universo, pois o universo só chegaria a ter aproximadamente 12 bilhões de anos, idade atual do universo, se o valor para a densidade de energia tivesse sido muito bem ajustado, e o segundo problema é que apesar do universo ter essa idade, não houve tempo suficiente para termalização de algumas regiões.

3.1.1 O problema da platitude

O problema da platitude está relacionado com o valor da densidade de energia do Universo, ρ , que é muito próximo do valor crítico ρ_c , eq. (2.16). Para nosso Universo chegar a ter 13 bilhões de anos, evoluindo de maneira a atender o modelo de FLRW, ele tem que ser muito plano, ou seja $\rho \approx \rho_c$.

Podemos escrever a primeira equação de Friedmann (2.12) em função do parâmetro de densidade, Ω , definido como $\Omega = \rho/\rho_c$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.1)$$

Vemos da equação acima que a curvatura está relacionada com o desvio de Ω da unidade. De tal maneira que se tivermos uma densidade de energia maior que o valor crítico ($\rho > \rho_c$), consequentemente $\Omega > 1$, $k = 1$, temos um universo fechado, ou seja, a atração gravitacional vence a expansão cósmica e o futuro do Universo caminha para um grande colapso. Do lado oposto temos o caso em que a quantidade de matéria é insuficiente para que a atração gravitacional vença a expansão cósmica ($\rho < \rho_c$, $\Omega < 1$, $k = -1$), o que significa que temos um universo aberto, e caso $\ddot{a} > 0$, que é quando $w < -\frac{1}{3}$, as galáxias perderão o contato causal entre si e ficarão solitárias, vagando pelo vazio cósmico.

Finalmente temos o caso em que a densidade de energia, ρ , é exatamente igual a densidade de energia crítica, ρ_c , e o Universo é plano ($k = 0$), nesse caso há um balanço entre as forças atrativas e repulsivas.

Da equação (3.1) vemos que o desvio de Ω com relação a unidade é uma função que vai com $(aH)^{-2}$. No final do capítulo anterior calculamos o fator de escala e o parâmetro de Hubble para um Universo plano, podemos agora analisar a função $|\Omega - 1|$. Respectivamente para poeira e radiação obtemos $|\Omega_{w=0} - 1| \propto t^{\frac{2}{3}}$ e $|\Omega_{w=\frac{1}{3}} - 1| \propto t^{\frac{1}{2}}$, que são duas funções crescentes com o tempo. O fato de nosso Universo ter aproximadamente 13 bilhões de anos, revela que um desvio mínimo de ρ com relação a ρ_c já deveria ter sido pronunciado, gerando um Universo aberto ou fechado. Vemos que a solução de Universo plano no modelo de FLRW é uma solução instável, e o problema da platitude está então estabelecido, pois não há um motivo *a priori* na teoria para que a densidade do Universo seja tão próxima do valor crítico.

Podemos ilustrar o problema da platitude definindo um parâmetro x , tal que $x \equiv \frac{\Omega-1}{\Omega}$. Pela equação de Friedmann (2.8) vemos que podemos escrever a curvatura k como

$$k = \frac{8\pi G}{3} \rho a^3 \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right), \quad (3.2)$$

ou seja,

$$x = \frac{8\pi G \rho - 3H^2}{8\pi G \rho} = \frac{cte}{\rho a^2}. \quad (3.3)$$

Vamos agora derivar o parâmetro x com relação ao número de *e-fold* N , que é um número que nos diz quantas ordens de grandeza o fator de escala, a , cresceu na inflação, $N =$

$\ln(a_{final}/a_{inicial})$. A diferencial do número de *e-fold* é $dN = Hdt$, de tal maneira que $x' = dx/dN = H^{-1}dx/dt$. Assim obtemos

$$x' = (1 + 3w)x, \quad (3.4)$$

em que utilizamos a equação da continuidade (2.15). O espaço de fase ($y = x', x$) está plotado na figura (3.1) para $w = 0$, porém teremos um comportamento semelhante para qualquer $w > -1/3$. É possível ver da figura (3.1) que qualquer perturbação $\pm\delta w$ com relação a $w = 0$ ou nos levará a um universo aberto ou fechado, apenas com um ajuste muito fino das condições iniciais é que poderíamos ter um universo plano por muito tempo. Veremos mais adiante que a inflação resolve esse problema transformando o ponto instável em $x = 0$ em um atrator.

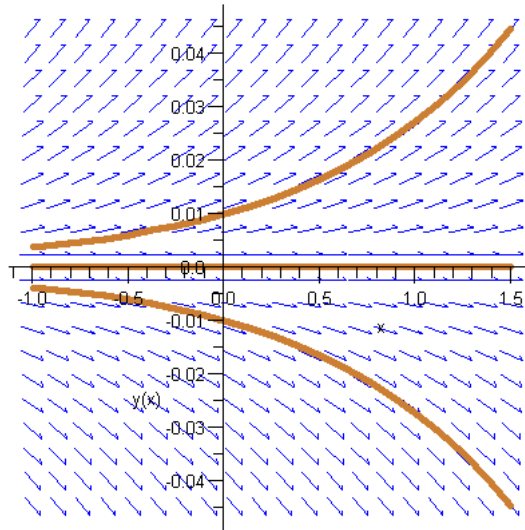


Figura 3.1: Retrato de fase do parâmetro de densidade de energia do universo, $x = \frac{\Omega-1}{\Omega}$, com sua derivada, $y = x'$, com relação ao número de *e-folds*, N , numa expansão FLRW com $w > -1/3$. Vemos que qualquer perturbação com relação a $x = 0$ teremos $x \rightarrow \pm\infty$, o que significa um universo não-plano.

3.1.2 O problema do Horizonte

Um dos postulados da teoria da relatividade especial é que nenhuma informação física pode viajar mais rápido que a velocidade da luz, de tal forma que para termos contato causal com regiões do Universo, estas regiões devem estar dentro do nosso cone de luz. Devem ser regiões que estejam próximo suficiente para que um sinal luminoso tenha tempo para chegar até nós. Para que haja termalização, por exemplo, é necessário que as regiões troquem informação, ou seja, as regiões devem ter contato causal entre si. Porém quando olhamos para regiões que estão nos limites espacialmente opostos de nosso cone de luz, vemos que elas tem praticamente a mesma temperatura, o que nos faz pensar que houve algum tipo de termalização entre as mesmas, mas essas regiões não estão em contato causal entre si.

O problema do horizonte ocorre devido a idade finita de nosso universo e o fato da velocidade da luz também ser finita. A distância do horizonte pode ser definida como a máxima distância que a luz viajou desde o início do universo até hoje [21]

$$d_H \equiv a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \sim H^{-1}(t), \quad (3.5)$$

em que $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. Para um universo dominado por radiação, por exemplo, o horizonte cresce mais rápido que o fator de escala, pois $d_H \sim t$ e $a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$. O nosso universo observável é toda região que está dentro de nosso cone de luz, dessa maneira o volume do espaço que nós temos acesso hoje é o tamanho do horizonte que observamos. Porém como o horizonte cresce mais rápido que o fator de escala, então se voltarmos no

tempo significa que o horizonte diminui mais rápido que o volume do espaço, dessa forma as regiões diametralmente opostas que observamos hoje não estavam em contato causal entre si em tempos anteriores, porém elas tem a mesma temperatura. Esse fato peculiar do modelo do Big Bang constitui o problema do horizonte, ou causalidade. Podemos ver qualitativamente na figura (3.2) como que o período inflacionário resolve o problema do horizonte.

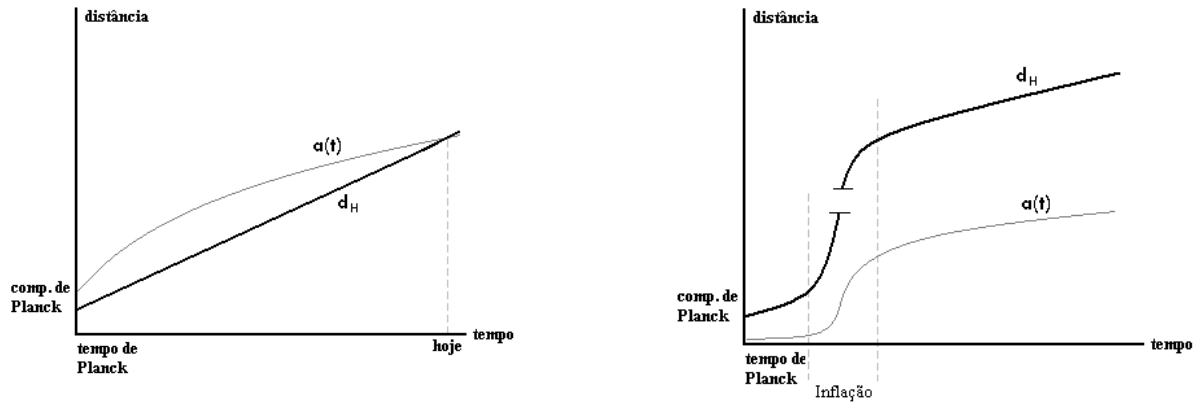


Figura 3.2: A figura da esquerda mostra a evolução, qualitativa, do fator de escala e do horizonte previsto pelas equações de Friedmann sem o período inflacionário, mostrando que em tempos anteriores ao atual, o horizonte era menor que o fator de escala do universo observável. A figura da direita mostra como a inflação resolve o problema do horizonte colocando um período de expansão acelerada que leva o horizonte a sempre ser maior que o fator de escala.

3.2 Inflação

Na década de 80 surgiu o paradigma inflacionário, proposto por A. Guth [20], A. Linde [22] e A. Albrecht e P. Steinardt [23]. A inflação prediz um período de expansão exponencial do fator de escala no universo primitivo, produzido por um campo escalar com densidade de energia aproximadamente constante chamado inflaton, ou dilaton. O

campo escalar tem associado a ele uma grande densidade de energia potencial que é responsável pela expansão exponencial. Sabemos da relatividade geral que matéria com equação de estado com $w > -\frac{1}{3}$, como a poeira cósmica, gera uma expansão desacelerada do universo. No caso do inflaton, a grande densidade de energia, praticamente constante, permeando todo o espaço, faz com que a distância entre dois pontos do universo cresça exponencialmente.

A inflação implica na existência de pontos que se separam com velocidade acima da velocidade da luz. Não há nenhuma violação dos postulados da relatividade restrita, pois nenhuma informação é carregada entre esses dois pontos, apenas o espaço-tempo está sendo esticado. Essa expansão é capaz de explicar porque que o universo é tão homogêneo e porque que a RCF parece tão isotrópica. Qualquer inomogeneidade, anisotropia e curvatura que exista antes de uma tremenda expansão é suavizada.

Veremos na próxima seção que nas condições impostas ao campo escalar para gerar a inflação, obteremos uma equação de estado $p \simeq -\rho$, de tal maneira que $w \simeq -1$, o que é necessário para gerar uma expansão acelerada, ver eq. (2.10). Essa equação de estado para o conteúdo de matéria dominante no universo muda radicalmente o espaço de fase (x, x') da figura (3.1), tornando o ponto instável, $x = 0$, em um atrator estável, ver figura (3.3).

O tensor energia-momento de um campo escalar pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \quad (3.6)$$

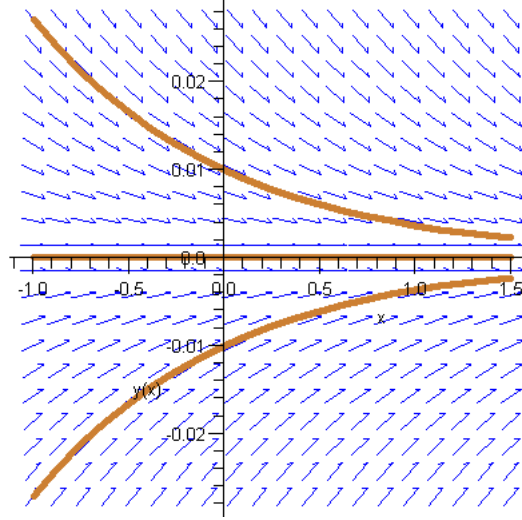


Figura 3.3: Retrato de fase do parâmetro de densidade de energia do universo, $x = \frac{\Omega-1}{\Omega}$, com sua derivada, $y = x'$, com relação ao número de e -folds, N , na inflação ($w \simeq -1$). Vemos que $x = 0$ (universo plano) é um atrator estável.

Podemos calcular com (3.6) a densidade de energia e a pressão do campo, pois $\rho = T_{00}$ e

$p = T_i^i$. Obtemos

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V, \quad (3.7)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V. \quad (3.8)$$

Vemos de (3.8) que para $\dot{\phi} < \sqrt{2V}$ obtemos pressão negativa, o que é necessário para gerar um período de expansão. Utilizando as expressões (3.7) e (3.8) na equação da continuidade (2.15), obtemos a equação de movimento de um campo escalar acoplado minimamente¹ com a gravidade

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (3.9)$$

¹O acoplamento mínimo entre gravitação e campo escalar fica claro quando escrevermos a lagrangeana desse sistema, onde veremos que a lagrangeana total é a soma da lagrangeana gravitacional com a lagrangeana do campo.

em que V' é a derivada do potencial com relação ao campo. Se a energia potencial do campo é muito grande e praticamente constante, de tal maneira que domine o termo de energia cinética, $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, vemos que $p \simeq -\rho$, $\rho \simeq cte$ e $H(\phi) \simeq cte$, que nos leva a um fator de escala exponencial

$$a(t) \sim e^{Ht}, \quad (3.10)$$

e uma expansão acelerada $\ddot{a}/a > 0$.

A equação de movimento para o campo, em geral, não pode ser resolvida analiticamente, assim para formalizar a descrição inflacionária, vamos introduzir a aproximação de slow-roll [24] definindo seus parâmetros

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \ll 1 \quad (3.11)$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \ll 1, \quad (3.12)$$

podemos verificar que quando $\varepsilon < 1$ temos uma expansão acelerada $\ddot{a}/a > 0$. A primeira equação de Friedmann (2.8) e a equação de movimento (3.9) escritas em termos dos parâmetro de slow-roll ficam

$$H^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \simeq H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (3.13)$$

$$3H\dot{\phi} \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \simeq 3H\dot{\phi} = V'(\phi), \quad (3.14)$$

essa aproximação corresponde a uma redução na dimensionalidade do espaço de fase, pois vemos de (3.13) que $H(\phi, \dot{\phi}) \rightarrow H(\phi)$. Assim, supondo que $H = H(\phi)$, podemos reescrever os parâmetros de slow-roll em termos da energia potencial, pois $H'(\phi) = -4\pi G \dot{\phi}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2 \simeq \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \ll 1, \quad (3.15)$$

$$\delta = \frac{1}{4\pi G} \frac{H''(\phi)}{H(\phi)} \simeq \frac{1}{8\pi G} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} - \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \equiv \eta - \varepsilon \ll 1, \quad (3.16)$$

em que na última equação definimos um novo parâmetro η que depende do potencial. O valor pequeno dos parâmetros de slow-roll, eq. (3.11) e (3.12), justificam a retirada do termo cinético da eq. (2.8) e a segunda derivada temporal do campo na eq. (3.9), e como vimos na seção anterior podemos obter um período inflacionário.

A restrição impostas aos parâmetros (3.11) e (3.12) implicam em restrições ao parâmetro de Hubble, porém como vimos em (3.15) e (3.16), essa restrição pode ser feita no próprio potencial da teoria. Na verdade esses parâmetros são uma primeira aproximação, pode-se definir uma hierarquia infinita de parâmetros de slow-roll e construir uma expansão de slow-roll, que nos leva a solução exata [25]. A relação entre o parâmetro de Hubble e o potencial será dado pela equação de Hamilton-Jacobi como veremos no próximo capítulo.

A forma do potencial inflacionário, $V(\phi)$, é importante. Do parâmetro de *slow-roll* ε , eq. (3.15), vemos que o potencial deve ser praticamente constante com relação ao campo. A figura (3.4) mostra o estado inicial e final do campo no potencial. Para que ocorra a inflação o campo deve começar em uma região em que o potencial é praticamente constante e vai deslizando suavemente, como uma partícula que se desloca num meio viscoso, até o

mínimo do potencial, onde o campo oscila e transforma sua energia em partículas, período conhecido como reaquecimento. O campo escalar inflaton pode ser uma manifestação efetiva de uma teoria mais fundamental ou realmente um campo fundamental da natureza.

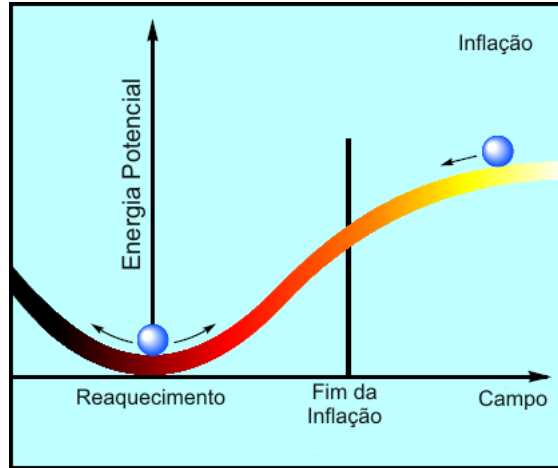


Figura 3.4: Forma do potencial $V(\phi)$ para gerar o período inflacionário [19]. O campo inicial está numa posição em que o potencial tem um valor grande e sua forma é praticamente constante, então o campo vai relaxando suavemente, atendendo as condições de slow-roll, e quando chega ao mínimo o campo oscila dando fim a inflação e começando o reaquecimento.

Fazendo uma conexão com a termodinâmica, através da equação da continuidade, é possível mostrar que a temperatura é uma função do inverso do fator de escala, $T \sim a^{-1}$ [19]. De tal maneira que próximo a singularidade inicial, $a \rightarrow 0$, a temperatura do universo vai a infinito, $T \rightarrow \infty$. Espera-se efeitos quânticos-gravitacionais na era de Planck do universo, que é o tempo entre zero e o tempo de Planck² ($10^{19}\text{GeV}, 10^{-43}\text{s}$), ver figura (3.5). Logo depois da era de Planck temos a era GUT (Grand Unified Theory, 10^{16}GeV , 10^{-35}s) onde começa a inflação cosmológica. Na era GUT acredita-se que três forças, das quatro conhecidas, eram indistinguíveis, a saber, as forças forte, fraca e eletromagnética.

²Massa de Planck $M_{Pl} = 1/\sqrt{G} = 1,22 \cdot 10^{19}\text{GeV}$; $1\text{seg} = 1,519 \cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$; Tempo de Planck $t_{Pl} = 1/M_{Pl} = 5,4 \cdot 10^{-44}\text{seg}$ [20].

ocorre a última superfície de espalhamento, que é quando o universo fica neutro e transparente a radiação, a RCF é proveniente dessa superfície. Mesmo a inflação suavizando as flutuações quânticas-gravitacionais da era de Planck, que geram inomogeneidades no universo, podemos medir anisotropias na RCF, acredita-se que essas anisotropias são responsáveis pela formação de estruturas do universo (galáxias e aglomerado de galáxias).

Capítulo 4

Método de Hamilton-Jacobi e resultados

O método de Hamilton-Jacobi para as equações de Friedmann, foi utilizado por Salopek e Bond [27], e Muslimov [28] em 1990. O método consiste em olhar para o campo escalar como a variável dinâmica do sistema, assim o parâmetro de Hubble é uma função do campo. Chega-se então a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, em que uma delas é integrável, enquanto a outra, que é a equação de Hamilton-Jacobi, não é integrável em geral devido ao tipo de sua não-linearidade. Em modelos de campos escalares acoplados esse método de primeira ordem também foi utilizado [29, 30], bem como em supergravidade [31].

O parâmetro de Hubble como função do campo, $H(\phi)$, pode ser olhado como um superpotencial, $W(\phi)$. Esse método foi proposto para construir potenciais correspondentes a partir de soluções exatas de modelos gravitacionais de 5-dimensões [32]. Esse método

é amplamente utilizado em cosmologia [33, 34, 35, 36, 37] e é uma generalização natural dos métodos comentados acima.

4.1 Equação de Hamilton-Jacobi em Mecânica Relativística

A equação de Hamilton-Jacobi (H-J) é um método poderoso tanto em mecânica clássica quanto em mecânica relativística [38, 39, 40], além de ser uma extensão natural entre mecânica clássica e mecânica quântica, pois o limite semi-clássico é claro nesse formalismo. Essa equação é especialmente útil para se determinar a frequência e o período de movimento em sistemas periódicos como o oscilador harmônico, o problema de Kepler e o movimento de cargas em campos magnéticos. A teoria de H-J é um método construtivo que permite produzir uma transformação canônica que simplifica as equações de movimento, fazendo com que a integração das equações transformadas se tornem bem mais simples.

A função geradora das transformações canônicas em H-J é a própria ação S , e o momento canônico é $p = \partial S / \partial q$, dessa forma a equação de H-J é

$$H \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (4.1)$$

que nada mais é que a equação da hamiltoniana transformada, $H \rightarrow K$, porém a transformação é tal que torna a hamiltoniana transformada nula $K = 0$.

Vamos ilustrar como é possível com H-J resolver o problema de uma partícula relativística submetida a um potencial polinomial do tipo $V = \alpha q^n$, que no limite de baixas velocidades, $\dot{q} \ll c$, temos o caso clássico [40]. A lagrangeana de interesse é

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}} - \alpha q^n. \quad (4.2)$$

Resolver a equação de movimento da lagrangeana acima através da equação de Euler-Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$, é complicado devido a forma relativística da energia cinética. A Hamiltoniana associada é

$$\mathcal{H} = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + \alpha q^n, \quad (4.3)$$

em que p é o momento canônico. A equação de H-J é

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 c^2 + m^2 c^4 - \left(\alpha q^n + \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = 0, \quad (4.4)$$

da equação (4.1) vemos que se a hamiltoniana não depender do tempo, a derivada temporal da ação é a energia total, E , do sistema que é conservada. Assim podemos escrever a ação S como sendo $S(q, E, t) = W(q, E) - Et$, de tal maneira que a ação se torna

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{(\alpha q^n + E)^2 - m^2 c^4} dq - Et. \quad (4.5)$$

Se olharmos para a energia, que é conservada, como uma variável canônica, sua variável canonicamente conjugada também será conservada, assim obtemos $\beta = cte = \partial S / \partial E$, que nos fornece a seguinte integral

$$\beta = \frac{1}{c} \int \frac{\alpha q^n + E}{\sqrt{(\alpha q^n + E)^2 - m^2 c^4}} dq - t. \quad (4.6)$$

Resolver a equação de movimento significa resolver a integral acima e inverter para acharmos a forma explícita de $q(t)$, o que não é possível para esse caso tão geral, pois para n qualquer essa integral pode ser escrita como uma composição de funções hipergeométricas, e para o oscilador harmônico, $n = 2$, uma composição de funções elípticas.

4.2 Equação de Hamilton-Jacobi quântica e variáveis de ação-ângulo

As variáveis de ação-ângulo em mecânica clássica descrevem movimentos periódicos, ou seja fornecem as frequências características do movimento sem necessariamente resolver as equações de movimento. Na mecânica quântica é possível obter o espectro energético de potenciais que geram estados ligados, através dessas variáveis. Porém no caso quântico precisamos definir a função momento quântico, que é diferente do operador momento, assim a variável ação é definida como a integral da função momento [41].

A equação de Hamilton-Jacobi quântica, para o caso unidimensional, é postulada como sendo

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 W(x, E)}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial W(x, E)}{\partial x} \right]^2 = E - V(x), \quad (4.7)$$

em que $W(x, E)$ é a função geradora da transformação canônica. A equação de Hamilton-Jacobi quântica é definida da maneira acima pois ela é equivalente a equação de Schroedinger independente do tempo. A Equação de Hamilton-Jacobi para a função principal de Hamilton, S , fornece a equação de Schroedinger dependente do tempo e é escrita como

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial S}{\partial x} \right]^2 = -\frac{\partial S}{\partial t} - V(x). \quad (4.8)$$

A relação entre a função característica e principal de Hamilton é

$$S = W - Et. \quad (4.9)$$

A função momento quântico é definido como

$$p(x, E) \equiv \frac{\partial W(x, E)}{\partial x}, \quad (4.10)$$

e como $E - V(x) = p_c^2(x, E)$, em que p_c é o momento clássico, a equação (4.7) se torna

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial p(x, E)}{\partial x} + p^2(x, E) = p_c^2(x, E). \quad (4.11)$$

Vemos que no limite em que $\hbar \rightarrow 0 \Rightarrow p(x, E) \rightarrow p_c(x, E)$. As raízes do momento clássico, $p_c = \sqrt{E - V}$, definem os pontos de retorno da partícula, X_1 e X_2 , e são representados como um corte de ramificação no plano complexo devido a raiz quadrada (figura (4.1e)), ou seja por baixo do corte o momento tem valor negativo e por cima valor positivo, ou vice-versa, o que significa que a partícula realiza movimento periódico trocando o sinal de seu momento nos pontos de retorno. Para o caso quântico vemos que cada estado excitado representa um pólo entre os pontos X_1 e X_2 , e para o limite clássico esses pólos se torna um corte de ramificação. Na figura (4.1) está representado o *ground-state* em (a), que não tem nenhum pólo; o primeiro estado excitado em (b), com um pólo; o segundo estado excitado em (c); o décimo terceiro estado excitado em (d), com 13 pólos e o limite clássico (e), um corte de ramificação, que está de acordo com o princípio da correspondência.

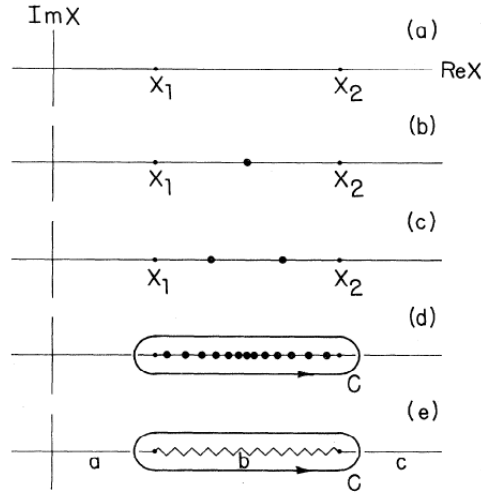


Figura 4.1: Plano complexo da coordenada X de um movimento oscilatório, para o caso clássico, ou estados ligados, para o caso quântico; (a) *Ground-state*, nenhum pólo entre X_1 e X_2 ; (b) Primeiro estado excitado, 1 pólo; (c) Segundo estado excitado, 2 pólos; (d) Décimo terceiro estado excitado, 13 pólos; (e) Limite clássico, corte de ramificação. [41].

A variável ação é definida como sendo a integral da função momento no contorno C representado na figura (4.1):

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \int_C p(x, E) dx, \quad (4.12)$$

vemos que a variável ação conta o número de resíduos, em que cada resíduo tem valor $\hbar/i$, assim obtemos a quantização do sistema $J = n\hbar$, em que $n = 0, 1, 2, \dots$. Veremos mais a frente que a equação de Hamilton-Jacobi cosmológica não permite escrever variável do tipo ação na inflação.

4.3 Equação de Hamilton-Jacobi em Cosmologia

A equação de Hamilton-Jacobi em cosmologia [42, 43] pode ser facilmente obtida a partir das equações de Friedmann, (2.12) e (2.13), aqui reproduzidas utilizando o parâmetro de Hubble (2.14) e a densidade e pressão do campo (3.7) e (3.8)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V). \quad (4.14)$$

Derivando o parâmetro de Hubble H , não confundir com a hamiltoniana, com relação ao tempo encontramos que $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$. Para o caso plano, $k = 0$, ficamos então com o sistema de equações

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right), \quad (4.15)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (4.16)$$

Agora fazemos o parâmetro de Hubble ser função do campo, supomos então

$$H = W(\phi), \quad (4.17)$$

que derivando com relação ao tempo temos

$$\dot{H} = W'(\phi)\dot{\phi}, \quad (4.18)$$

em que a linha em W' significa derivada com relação ao campo. Assim podemos utilizar a equação acima em (4.16) e substituir em (4.15), que nos dá

$$V = \frac{3}{8\pi G}H^2 - \frac{1}{32\pi^2 G^2}H'^2, \quad (4.19)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi. Na próxima seção faremos a formulação hamiltoniana das equações de Friedmann e poderemos ver a relação $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = -\frac{\partial S}{\partial t}$. Em coordenadas geométricas ($8\pi G = c = \hbar = 1$, ver tabela A.1) obtemos o seguinte sistema de equações

$$H' = -\frac{1}{2}\dot{\phi}, \quad (4.20)$$

$$V = 3H^2 - 2H'^2. \quad (4.21)$$

4.4 Formulação hamiltoniana das Equações de Friedmann

Para construirmos a formulação hamiltoniana da relatividade geral, devemos folhear o espaço-tempo, definido por uma variedade diferencial M e uma métrica $g_{\mu\nu}$, em hipersuperfícies espaciais Σ em que há uma métrica espacial h_{ij} e uma curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$. É possível provar (ver cap. 10 de [10]) que se a dupla $(M, g_{\mu\nu})$ satisfaz as equações de Einstein, então existe uma descrição com a tripla (Σ, h_{ij}, K_{ij}) que é equivalente. Como essa folheação a princípio pode ser arbitrária, então o parâmetro t da teoria não necessariamente é o tempo próprio, ele pode ser um parâmetro sem qualquer significado físico. Podemos então introduzir uma função de *lapso* N que mede a variação do tempo próprio com o parâmetro t , ou seja $\frac{d\tau}{dt} = N$. Também é interessante escrever o fator de escala numa forma exponencial, da seguinte maneira $a(t) = e^{\alpha\varphi}$. Assim o elemento de linha com a métrica FLRW se torna

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.22)$$

em que a métrica induzida é $h_{ij} = \text{diag}(e^{2\alpha\varphi}, e^{2\alpha\varphi}, e^{2\alpha\varphi})$ e consideramos o vetor de deslocamento (*shift vector*) N^a como sendo nulo. Nessa formulação o elemento de volume se torna $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$, em que g e h significam o determinante de $g_{\mu\nu}$ e h_{ij} respectivamente.

Como a folheação é arbitrária, então a hamiltoniana é nula em cada hipersuperfície para t constante. Porém o fator de escala pode mudar de uma hipersuperfície para outra, dessa maneira podemos olhar para uma única hipersuperfície e considerar que a métrica

induzida h_{ij} é uma função dinâmica na mesma. A curvatura extrínseca é $K_{ij} = \frac{1}{2N}\dot{h}_{ij}$, e o escalar de curvatura R escrito em termos da curvatura extrínseca é

$$R = {}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K_{ij}, \quad (4.23)$$

em que ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura em $3D$ calculado com o seguinte símbolo de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}h^{kl}(\partial_i h_{lj} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij})$, e K é o traço da curvatura extrínseca. Como a dependência do campo métrico φ é apenas temporal, então o escalar de curvatura em $3D$ é nulo ${}^{(3)}R = 0$.

A ação do campo escalar acoplado minimamente a gravidade é

$$S = \int dx^3 N \sqrt{h} ({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K_{ij} + \mathcal{L}_m), \quad (4.24)$$

em que $\mathcal{L}_m$ é a lagrangeana do campo escalar massivo. Para calcular a hamiltoniana devemos calcular os momentos canonicamente conjugados e fazer uma transformação de Legendre. Introduzindo a métrica (4.22) na ação acima, encontramos a seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = N e^{\frac{3}{2}\varphi} \left(-\frac{\dot{\varphi}^2}{2N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V \right). \quad (4.25)$$

Os momentos canonicamente conjugados são $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ e $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$, que dão

$$\pi = -N^{-1} e^{\frac{3}{2}\varphi} \dot{\varphi}, \quad (4.26)$$

$$p = N^{-1} e^{\frac{3}{2}\varphi} \dot{\phi}. \quad (4.27)$$

A transformação de Legendre que devemos fazer para o cálculo da hamiltoniana é $\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + p\dot{\phi} - \mathcal{L}$, que dá

$$\mathcal{H} = Ne^{-\frac{3}{2}\varphi} \left(\frac{p^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + e^{3\varphi}V \right). \quad (4.28)$$

O momento associado a N deve ser nulo, pois a função de *lapso* não gera dinâmica ($p_N = 0$), isso significa que o parêntese no segundo membro da equação (4.28) deve ser nulo, ou seja

$$\frac{p^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + e^{3\varphi}V = 0. \quad (4.29)$$

O método de Hamilton-Jacobi consiste em olhar para os momentos canônicos como sendo a derivada da função característica de Hamilton, no caso a própria ação, com relação a sua variável canonicamente conjugada, ou seja

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + e^{3\varphi}V = 0. \quad (4.30)$$

Com as normalizações adequadas podemos encontrar a solução para a equação (4.30), que é $S \sim e^{\frac{3}{2}\varphi}W$, em que $W = W(\phi)$ é o fator de expansão. A equação de Hamilton-Jacobi separada, ou seja para o campo escalar ϕ , é a equação (4.21), aqui reproduzida fazendo $H = W(\phi)$

$$V = 3W^2 - 2W'^2. \quad (4.31)$$

Essa é uma equação diferencial não-linear de primeira ordem e não há um método para integrá-la sem uma escolha do potencial $V(\phi)$, porém ao se definir o potencial pode-se achar soluções para a função $W(\phi)$. Fixar o potencial não significa que a função $W(\phi)$ seja

unívoca. Vamos analisar dois casos, o potencial exponencial, que é conhecido na literatura e gera uma inflação com lei de potência, e o caso do potencial trigonométrico do tipo cosseno. Depois analisaremos o caso do potencial polinomial e veremos que singularidades do potencial não geram singularidades em W . Por fim faremos considerações sobre o parâmetro de *slow-roll* para achar uma aproximação de W .

4.4.1 Inflação com lei de potência: $V = V_0 e^{-\sqrt{\frac{2}{p}}(\phi-\phi_0)}$.

Para ilustrar vamos escolher um potencial exponencial $V = V_0 e^{-\sqrt{\frac{2}{p}}(\phi-\phi_0)}$ [27][44]. A solução para W é basicamente a raiz do potencial

$$W(\phi) = \sqrt{\frac{V_0 p}{3p-1}} e^{\frac{-1}{\sqrt{2p}}(\phi-\phi_0)}, \quad (4.32)$$

em que $p > \frac{1}{3}$ para que a ação seja real.

A equação (4.16) pode ser reescrita como $\dot{\phi} = -2W'$, de tal maneira que podemos calcular a solução analítica para o campo ϕ com o potencial exponencial

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2}{\beta} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)}} (t - t_0) \right), \quad (4.33)$$

O fator de escala também pode ser obtido através da expressão

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{W}{W'} d\phi}, \quad (4.34)$$

e obtemos

$$a(t) = a_0 \left(1 + \sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)}}(t - t_0) \right)^p, \quad (4.35)$$

que é uma solução polinomial. No limite em que $p \rightarrow \infty$ obtemos uma expansão exponencial

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{V_0}{3}}(t-t_0)}. \quad (4.36)$$

Para obtermos a solução inflacionária, queremos que o fator de escala expanda aceleradamente, isso significa que queremos $\ddot{a} > 0$. Da equação (4.36) podemos calcular a aceleração

$$\ddot{a}(t) = a_0 V_0 \frac{p-1}{3p-1} \left(1 + \sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)}}(t - t_0) \right)^{p-2}. \quad (4.37)$$

Vemos que $p > 1$ para que haja inflação. Encontramos um fator de escala $a \sim t^p$, e no limite de $p \rightarrow \infty$ temos $a \sim e^t$. Esse modelo conhecido como inflação com lei de potência foi resolvido em 1985 por F. Lucchin e S. Matarrese [45] e desenvolvido posteriormente por J. J. Halliwell [46]. Na figura (4.2) plotamos a função $a(t)$ para vários valores de p , observe que todas as curvas crescem de tal maneira que suas derivadas primeira e segunda sejam positivas, ou seja tem concavidade pra cima.

A solução apresentada para inflação com lei de potência é uma solução particular, uma solução mais geral na forma paramétrica foi dada por D. S. Salopek e J. R. Bond em 1990 [27], em que eles supuseram uma solução do tipo

$$W(\phi) = \sqrt{\frac{V_0}{3}} e^{\frac{1}{\sqrt{2p}}\phi} f(\phi), \quad (4.38)$$

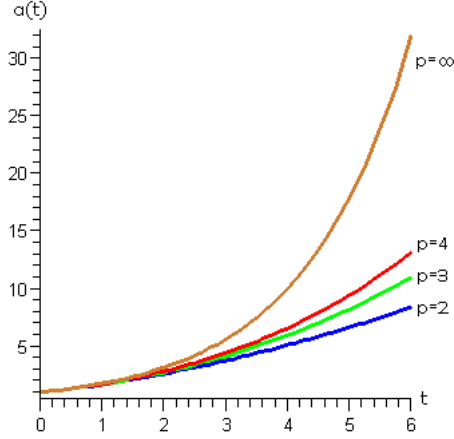


Figura 4.2: Gráfico da dependência temporal do fator de escala, $a(t)$, definido na equação (4.35) para $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$ e $p \rightarrow \infty$.

chega-se numa equação diferencial para $f(\phi)$ que é possível integrar

$$\sqrt{\frac{2}{3}}f' = \frac{f}{\sqrt{3p}} \pm \sqrt{f^2 - 1}. \quad (4.39)$$

Não podemos, contudo, achar uma solução explícita para a função $f(\phi)$, mas apenas sua inversa $\phi(f)$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3p}{3p-1} \right) \left[\cosh^{-1} f \mp \frac{1}{\sqrt{3p}} \log \left| f \pm \sqrt{3p(f^2 - 1)} \right| \right]. \quad (4.40)$$

Plotamos o gráfico $\phi(f)$ na figura (4.3) para alguns valores de p , vemos que se fixarmos ϕ para os valores em que $f < 0$ temos dois valores correspondentes para $W(\phi)$, eq. (4.38), isso revela a possibilidade da função W ser multivalente ao fixarmos o potencial V . A solução para o parâmetro de Hubble, eq. (4.32), define o atrator de Halliwell [46], em que todas as soluções tendem assintoticamente para ela [27].

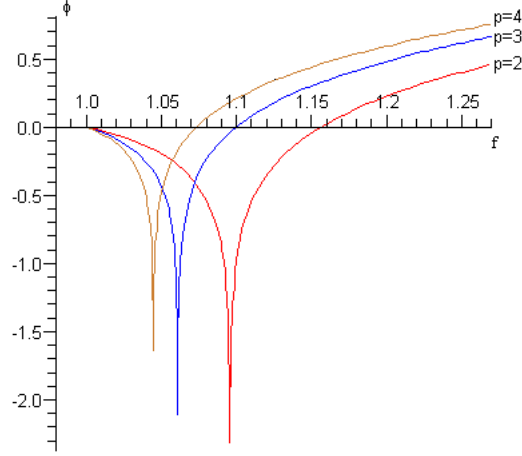


Figura 4.3: Gráfico da função $\phi(f)$ definido na equação (4.40) para $p = 2$, $p = 3$ e $p = 4$.

O potencial exponencial não tem vácuo, o que sugere que a inflação nunca acaba, o campo fica eternamente relaxando e nunca chega a um mínimo do potencial. Nesse caso nunca ocorre o processo de reaquecimento, que é quando o campo oscila próximo ao vácuo do potencial e transforma sua energia em partículas. Por isso que os potenciais inflacionários devem ter o comportamento mostrado na figura (3.4). Dessa maneira o potencial exponencial consegue descrever bem uma fase intermediária da inflação, pois não há mecanismo para parar a inflação.

4.4.2 Potencial trigonométrico: $V(\phi) = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$.

Vamos analisar agora o caso de um potencial do tipo cosseno, $V(\phi) = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$. Uma solução para o fator de expansão é $W(\phi) = \sqrt{\frac{V_0}{3}} \cos(\sqrt{3/2}\phi)$, que utilizando a equação (4.20) podemos encontrar a solução para $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{8}{3}} \tan^{-1}(e^{\sqrt{3V_0}(t-t_0)+cte}), \quad (4.41)$$

em que a constante “cte” que aparece na exponencial é $cte = \log(\tan(\sqrt{3/8}\phi_0))$ devido ao valor inicial do campo. Podemos calcular a a função $H(t)$, que utilizando a identidade $\cos(2 \tan^{-1}(e^t)) = -\tanh(t)$, obtemos

$$H(t) = -\sqrt{\frac{V_0}{2}} \tanh(\sqrt{3V_0}(t - t_0) + cte). \quad (4.42)$$

Podemos calcular o fator de escala através da definição do parâmetro de Hubble, $H = \dot{a}/a$,

$$a(t) = \frac{a_0}{(\cosh(\sqrt{3V_0}(t - t_0) + cte))^{1/3}}. \quad (4.43)$$

Na figura (4.4) plotamos as soluções encontradas para o potencial do tipo cosseno. As constante ϕ_0 e t_0 , essencialmente, deslocam as curvas no eixo temporal, enquanto que a constante V_0 muda a escala do eixo temporal. Para um valor inicial de campo $\phi_0 = 0$ o campo se inicia no máximo do potencial para $\phi = 0$ e se desloca para o mínimo em $\phi = \pi/2$.

O potencial do tipo cosseno gera uma expansão no fator de escala seguido de uma contração. Para tempo negativo, o observador mede um fator de expansão positivo e quando $t > t_0 = 0$ o fator de escala passa a ser negativo. Essa transição expansão/contração ocorre no momento em que o campo $\phi(t)$ passa para valores negativos da energia potencial, ou seja quando $\phi = \pi/4$, que é quando $t = 0$. Os tempos $t = -\infty$ e $t = \infty$ corresponde a situações em que o campo se encontra em um máximo do potencial $V(0)$ e um mínimo $V(\pi/2)$.

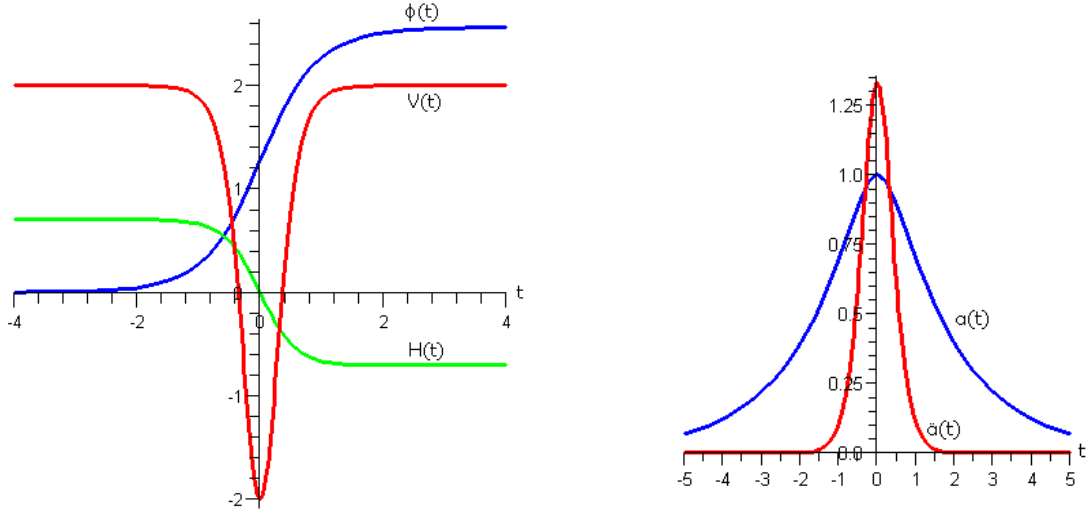


Figura 4.4: A figura da esquerda mostra a dependência temporal do campo $\phi(t)$, do potencial $V(t)$ e do parâmetro de Hubble $H(t)$ para o potencial $V = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$. A figura da direita mostra a solução para o fator de escala $a(t)$, bem como a aceleração $\ddot{a}(t)$. Os parâmetros V_0 , ϕ_0 e t_0 foram escolhidos para se obter uma boa visualização das curvas.

4.4.3 Potenciais polinomiais

Vamos considerar o campo ϕ como uma variável complexa z e fazer uma substituição de $W(z)$ na equação (4.31):

$$W(z) = \sqrt{\frac{V}{3}} \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} w(z) \right), \quad (4.44)$$

a equação de Hamilton-Jacobi na função $w(z)$ se torna

$$\frac{dw}{dz} = 1 + \frac{V'(z)}{2V(z)} \text{ctgh}(w). \quad (4.45)$$

Escolhendo um potencial polinomial do tipo $V(z) = V_0 \prod_{i=1}^N (z - z_i)$, encontramos para o parâmetro de *slow-roll*

$$\frac{V'(z)}{V(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - z_i}. \quad (4.46)$$

Para analisarmos se os pólos que aparecem no potencial geram pólos em $w(z)$, podemos expandir essa última em uma soma de duas funções, em que uma é analítica e a outra revela a presença de singularidades, ou seja

$$w(z) = -\frac{1}{2} \log(z - z_i) + F(z), \quad (4.47)$$

em que $F(z)$ é analítica próximo de z_i . Com pontos de ramificação do tipo logaritmo, a função $W(z)$ é analítica em z_i :

$$W(z) = \frac{1}{2} \left[\prod_{j \neq i} (z - z_j) \right] [e^{F(z)} - (z - z_i)e^{-F(z)}]. \quad (4.48)$$

Dessa forma vemos que singularidades do potencial não geram singularidades em W . Isso revela que não é possível achar variáveis de ação-ângulo para a equação de Hamilton-Jacobi cosmológica, pois a variável ação é definida como o “salto” da função S sobre um corte de ramificação, que vimos não existir. O fato de não haver variáveis de ação-ângulo significa que não há soluções de órbitas fechadas no espaço de fase do modelo inflacionário. No período de reaquecimento o campo oscila no mínimo do potencial, e considerando que a massa do campo é muito maior que o fator de expansão, podemos desprezar a energia cinética do campo métrico na hamiltoniana (4.28) e o fator de escala torna-se

uma função *background*, ou seja irá apenas reescalar os termos cinético e potencial do campo ϕ . Nesse caso é possível escrever variáveis de ação-ângulo [47].

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho estudamos um modelo de universo primitivo que se inicia no final da era de Planck, ou seja estudamos um período que corresponde a $t \sim 10^{-43} - 10^{-32}s$. Para tal apresentamos o arcabouço teórico necessário para a compreensão do paradigma cosmológico moderno, que é a teoria da relatividade geral e o princípio cosmológico, que nos fornece a métrica de FLRW. Mostramos também como esse paradigma padrão está fundamentado em observações cosmológicas, que vai desde as observações de galáxias feitas por Hubble na década de 20, até medidas atuais da anisotropia da radiação cósmica de fundo. Alguns cosmólogos afirmam que estamos na era de ouro das observações cosmológicas [19], devido à precisão das medidas que a tecnologia nos permite chegar.

Foi mostrado alguns problemas com o modelo do Big Bang, o da platitude e do horizonte, e como que a inflação proposta por A. Guth [20], no início da década de 80, as resolve de maneira satisfatória. Porém não precisamos, necessariamente, ter uma expansão exponencial, como proposto por Guth, do fator de escala, o que precisamos é que a

aceleração seja positiva, $\ddot{a} > 0$, pois assim asseguramos que haverá expansão acelerada. O modelo mais simples para gerar a inflação é o campo escalar, que acoplamos minimamente a gravitação e resolvemos a equação de movimento para alguns potenciais. Vimos que em geral é mais fácil trabalhar com a equação de Hamilton-Jacobi, pois é uma equação de primeira ordem, porém ao fixarmos o potencial é difícil encontrar uma solução geral para o parâmetro de Hubble. Um método bastante interessante é escolher a forma do parâmetro de Hubble e calcular o potencial resultante.

Os métodos utilizados no período inflacionário podem ser usados para descrever a expansão acelerada atual, porém o campo responsável por essa expansão não necessariamente é o inflaton. Existe um método bastante interessante proposto em [48] que considera um campo escalar complexo. Nesse modelo é possível descrever a inflação o período oscilatório e a aceleração recente sem introduzir uma constante cosmológica.

No potencial trigonométrico proposto, $V = V_0 \cos(\sqrt{6}\phi)$, encontramos uma solução particular para o fator de expansão. Seria interessante encontrar uma solução geral e analisar se há multivalência de $W(\phi)$, bem como procurar soluções não perturbativas como o instanton, pois a função cosseno tem infinitos vácuos degenerados e é razoável esperar que uma autofunção de um dos vácuos tunele para outro.

Vimos na seção 4.4.3 que o potencial inflacionário não define a dinâmica dos observáveis físicos, é necessário introduzir condições iniciais. Para obtermos inflação não podemos apenas atender a condição de *slow-roll*, devemos de certa maneira fixar o valor do campo inicial ϕ_0 , pois os pontos de ramificação na função $W(\phi)$ são removíveis. O paradigma inflacionário não elimina completamente a escolha de condições iniciais.

O método de Hamilton-Jacobi é uma ferramenta robusta em física pois é capaz de nos revelar a estrutura hamiltoniana do sistema, com ela podemos estudar desde um gás de Van Der Walls até a termodinâmica de buracos negros e de um gás de cordas [49, 50]. Para o caso cosmológico tratado o espaço de fase bidimensional relevante é o volume da seção espacial e o fator de expansão (a^3, W) . Seria interessante analisar o que significa quantizar esse espaço de fase.

Apêndice A

Unidades geométricas

Nesse trabalho utilizamos unidades geométricas, em que a constante gravitacional, $8\pi G$, e a velocidade da luz, c , são normalizadas a unidade. Todas as quantidades que estão em unidades ordinárias tem sua dimensão expressa em termos de unidades de comprimento, tempo e massa (L, T, M) que podem ser expressas em termos de potências de G e c . A motivação para usarmos coordenadas geométricas é fato de podermos omitir das equações os fatores que envolvem $8\pi G$ e c , que são muito recorrentes.

Para representarmos as unidades geométricas em unidades ordinárias devemos multiplicar por um fator de conversão. A dimensão de c é L/T e a dimensão de G/c^2 é L/M . Uma quantidade com dimensão $L^n T^m M^p$ em coordenadas ordinárias tem dimensão L^{n+m+p} em coordenadas geométricas, dessa maneira o fator de conversão de um sistema de unidades para outro é $c^m (G/c^2)^p$. Na tabela (A.1) apresentamos algumas quantidades físicas e sua dimensão em unidades ordinárias e geométricas, bem como o fator de conversão entre uma e outra.

Qtd. física	Dim. ordinária	Dim. geometrizada	Fator de conversão
Energia	$L^2T^{-2}M$	L	G/c^4
Dens. de energia	$L^{-1}T^{-2}M$	L^{-2}	G/c^4
Comprimento	L	L	1
Massa	M	L	G/c^2
Pressão	$L^{-1}T^{-2}M$	L^{-2}	G/c^4
Tempo	T	L	c
Velocidade	LT^{-1}	1	c^{-1}

Tabela A.1: Tabela de conversão entre unidades ordinárias e unidades geométricas [10].

Na era de Planck, período entre a singularidade inicial e a inflação, espera-se que efeitos quânticos da métrica sejam importantes. Na tabela (A.2) mostramos algumas grandezas características desse período.

Comprimento de Planck (l_{Pl})	$G\hbar/c^3$	$1,6 \cdot 10^{-33}\text{cm}$
Tempo de Planck (t_{Pl})	l_{Pl}/c	$5,4 \cdot 10^{-44}\text{s}$
Massa de Planck (M_{Pl})	$l_{Pl}c^2/G$	$2,2 \cdot 10^{-5}\text{g}$
Energia de Planck (E_{Pl})	$l_{Pl}c^4/G$	$1,3 \cdot 10^{19}\text{GeV}$
Dens. de massa de Planck (ρ_{Pl})	$l_{Pl}^{-2}c^2/G$	$5,2 \cdot 10^{93}\text{g cm}^{-3}$
Temperatura de Planck (T_{Pl})	E_{Pl}/k	$1,4 \cdot 10^{32}\text{K}$

Tabela A.2: Tabela com os valores das grandezas de Planck [10].

Referências Bibliográficas

- [1] T. Sauer, “Albert einstein’s 1916 review article on general relativity,” *History of Physics (physics.hist-ph)*, vol. arXiv:physics/0405066v1, 2004.
- [2] D. Salisbury, “Book review: The Genesis of General Relativity (Jurgen Renn),” *History of Physics (physics.hist-ph)*, vol. arXiv:0807.3706v1, 2008.
- [3] M. Janssen, “The einstein-besso manuscript: A gimpse behind the curtain of the wizard,” 2002. University of Minnesota.
- [4] A. Einstein *Annalen der Physik*, vol. 49, pp. 769–822, 1916.
- [5] A. Einstein, “The Berlin Years: Writings, 1918-1921.,” *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 7, 2002.
- [6] B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. 2nd ed., Weber, H. (ed.) Leipzig: Teubner, 1892.
- [7] E. B. Christoffel, “Ueber die transformation der homogenen differentialausdrucke zweiten grades,” *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 70, p. 46–70, 1869.

- [8] G. Ricci; T. Levi Civita, “Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications,” *Mathematische Annalen*, vol. 54, p. 125–201, 1901.
- [9] L. V. Morrison e C. G. Ward, “An analysis of the transits of mercury: 1677-1973,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 173, pp. 183–206, 1975.
- [10] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [11] S. Carroll, *Lectures Notes on General Relativity*. arXiv:gr-qc/9712019v1, 1997.
- [12] E. Hubble, “Ngc 6822, a remote stellar system,” *Astrophys. J.*, vol. 62, pp. 409–433, 1925.
- [13] G. Gamow, *My World Line: An Informal Autobiography*. Viking Press, 1970.
- [14] G. Gamow, “The Origin of Elements and the Separation of Galaxies,” *Physical Review*, vol. 74, p. 505, 1948.
- [15] G. Gamow, “The evolution of the universe,” *Nature*, vol. 162, p. 680, 1948.
- [16] R. A. Alpher e R. Herman, “On the relative abundance of the elements,” *Physical Review*, vol. 74, p. 1577, 1948.
- [17] A. A. Penzias; e R. W. Wilson *Ap. J.*, vol. 142, p. 419, 1965.
- [18] E. J. Copeland; M. Sami; e Shinji Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *e-print: arXiv*, vol. hep-th/0306057, 2006.
- [19] J. G. Bellido, “Astrophysics & cosmology.” Notas de aula para European School of High Energy Physics, 2004.

- [20] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, pp. 347–356, 1981.
- [21] A. Liddle e D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] A. D. Linde, “A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopoles problems,” *Phys. Lett.*, vol. 108B, p. 389, 1982.
- [23] A. Albrecht e P. J. Steinhardt, “Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, p. 1220, 1982.
- [24] A. R. Liddle; e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [25] A. R. Liddle; P. Parsons; e J. D. Barrow, “Formalising the slow-roll approximation in inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 50, pp. 7222–7232, 1994.
- [26] R. E. de Souza, “A expansão cosmológica: uma visão observacional.” Palestra conferida a *Semana da Física* na Univ. Est. Santa Cruz (Ilhéus, Ba), 2005.
- [27] D. S. Salopek e J. R. Bond, “Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary motions,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, p. 3936, 1990.
- [28] A. G. Muslimov, “On the scalar field dynamics in a spatially flat friedman universe,” *Class. Quantum Grav.*, vol. 7, pp. 331–237, 1990.

- [29] D. Bazeia; M. J. dos Santos; e R. F. Ribeiro, “Solitons in systems of coupled scalar fields,” *Phys. Lett. A*, vol. 208, pp. 88–88, 1995, arXiv:hep-th/0311265v1 (2003).
- [30] D. Bazeia e F. A. Brito, “Bags, junctions, and networks of bps and non-bps defects,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 105019, 2000, arXiv:hep-th/9912015v2 (1999).
- [31] A. Brandhuber e K. Sfetsos, “Non-standard compactifications with mass gaps and newton’s law,” *JHEP*, vol. 9910, p. 013, 1999, arXiv:hep-th/9908116v2 (1999).
- [32] O. DeWolfe; D. Z. Freedman; S. S. Gubser; e A. Karch, “Modeling the fifth dimension with scalars and gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 046008, 2000, arXiv:hep-th/9909134v4 (1999).
- [33] V. Sahnia e A. Starobinsky, “Reconstructing dark energy,” *J. Mod. Phys. D*, vol. 15, pp. 2105–2132, 2006, arXiv:hep-th/0603057v3 (2006).
- [34] I. Ya. Aref’eva; A. S. Koshelev; S. Yu. Vernov, “Crossing of the $w = -1$ barrier by d3-brane dark energy model,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 064017, 2005, arXiv:astro-ph/0507067 (2005).
- [35] D. Bazeia; C. B. Gomes; L. Losano; e R. Menezes, “First-order formalism and dark energy,” *Phys. Lett. B*, vol. 633, pp. 415–419, 2006, arXiv:astro-ph/0512197v1 (2005).
- [36] D. Bazeia; L. Losano; e J. J. Rodrigues, “First-order formalism for scalar field in cosmology,” arXiv:hep-th/0610028v1 (2006).
- [37] D. Bazeia; L. Losano; J. J. Rodrigues; e R. Rosenfeld, “First-order formalism for dark energy and dust,” arXiv:astro-ph/0611770v3 (2006).

- [38] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Press, 1980.
- [39] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2004.
- [40] R. C. Santos; J. Santos; J. A. S. Lima, “Hamilton-jacobi approach for power-law potentials,” *Brazilian journal of Physics*, vol. 36, pp. 1257–1261, 2006.
- [41] R. A. Leacock e M. J. Padget, “Hamilton-jacobi/action-angle quantum mechanics,” *Phys. Rev. D*, vol. 28, p. 2491, 1983.
- [42] P. K. Townsend; e K. Skenderis, “Hamilton-Jacobi for domain-walls and cosmologie,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 125008, 2006.
- [43] K. Skenderis; e P. K. Townsend
- [44] T. Padmanabhan, “Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 021301, 2002.
- [45] F. Lucchin e S. Matarrese, “Power law inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, pp. 1316–1322, 1985.
- [46] J. J. Halliwell, “Scalar fields in cosmology with an exponential potential,” *Phys. Lett. B*, vol. 185, p. 341, 1987.
- [47] G. W. Gibbons e N. Turok, “Measure problem in cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 063516, 2008.
- [48] A. V. Yurov, “Complex field as inflaton and quintessence,” arXivhep-th/0208129v1 19 Aug 2002.

- [49] Anosh Josepha; e Sarada G. Rajeev, “Hamilton-jacobi formalism for string gas thermodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 063525, 2008.
- [50] S. G. Rajeev, “A Hamilton-Jacobi for thermodynamics,” *Ann. Phys.*, vol. 323, p. 2265, 2008.