



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA E TEORIA QUÂNTICA
DE CIRCUITOS EM SISTEMAS HÍBRIDOS METAL
NORMAL-SUPERCONDUTOR E EM CADEIAS DE PONTOS
QUÂNTICOS

por

Gerson Cortês Duarte Filho

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Banca examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Orientador - UFPE)
Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF - UFPE)
Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (DF - UFPE)
Prof. Cláudio Benedito Silva Furtado (DF - UFPB)
Prof. Gilson Matheus Carneiro (IF - UFRJ)

Recife - PE, Brasil
Fevereiro - 2010

Duarte Filho, Gerson Cortês

Estatística de contagem de carga e teoria
quântica de circuitos em sistemas híbridos metal
normal-supercondutor e em cadeias de pontos
quânticos / Gerson Cortês Duarte Filho. - Recife : O
Autor, 2010.

xvii, 173 folhas: il. fig. tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Física do estado sólido. 2. Nanociência.

I. Título.

530.4 CDD (22.ed.) FQ 2010-012



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física - CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++) 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++) 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Gerson Cortês Duarte Filho

**ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA E TEORIA QUÂNTICA
DE CIRCUITOS EM SISTEMAS HÍBRIDOS METAL
NORMAL-SUPERCONDUTOR E EM CADEIAS DE PONTOS
QUÂNTICOS**

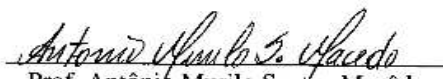
A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, Clécio Clemente de Souza Silva, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Cláudio Benedito Silva Furtado, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba e Gilson Matheus Carneiro, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, consideram o candidato:

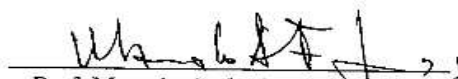
☒ Aprovado

☐ Reprovado

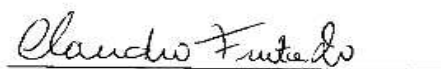
☐ Em exigência

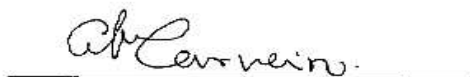
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e seis de fevereiro de dois mil e dez.


Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Presidente e Orientador


Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras
Gomes


Prof. Clécio Clemente de Souza Silva


Prof. Cláudio Benedito Silva Furtado


Prof. Gilson Matheus Carneiro

Ao meu avô Afonso (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Depois desta longa caminhada gostaria de agradecer às pessoas que estiveram sempre comigo me apoiando e incentivando durante estes anos. Gostaria de agradecer primeiramente à minha mãe, Maria de Fátima por todo o amor e suporte que ela me deu durante toda a minha vida. Agradeço também ao meu pai, Gerson Cortês, aos meus irmãos Manuela, Gustavo e Guilherme, à minha avó, Berenice, às minhas tias quase mães, Graça e Glória, aos meus primos, Hilton, Glauber, Carolina e Natália, aos meus tios Abílio, Antonio, Rogério, Ivanildo, Mariinha e Maria. Agradeço de forma especial aos meus avós Severino, Afonso e Lília, que infelizmente não estão mais entre nós.

Agradeço também de forma especial à minha namorada Luiza Vitória por todo o carinho, pela atenção e paciência nesses últimos meses. Aproveito para agradecer também aos seus pais, que sempre foram pessoas muito atenciosas e simpáticas comigo.

Gostaria também de expressar minha imensa gratidão ao meu orientador, Antônio Murilo por sua impecável orientação durante estes quase seis anos de trabalho. Aproveito também para agradecer aos companheiros de grupo, Anderson Barbosa, Sergio Pérez, Fredson Braz, Francisco Assis, Jorge Gabriel e ao ex-companheiro hoje professor Ailton Macedo.

Aos inúmeros amigos que fiz durante esses anos de DF, um muito obrigado por todo o companheirismo e apoio. Gostaria de agradecer em especial a Danieverton, Vladimir, Douglas (Gaúcho), Fernando Nóbrega, Plínio, Toinho, Eroni, Alexandre, Tâmara, Priscila, Luiz Felipe e Augusto César pelas amizades que vão além das portas do DF. Aos amigos do café Cesar, Lincoln, Giovani, Chiquinho, Maury, Milrian, Karllinha, Rafael, Tiago e Joaquim além do café, agradeço pelas conversas e risadas depois do almoço. Ao pessoal do LFTC, Rene, Eglânio, Fernanda, Miguel, Sandoildo, Leozinho e Claudio pelas agradáveis conversas e ajuda no dia-a-dia.

Aos amigos de todas as horas, Antônio Mário, Marcelo Anabuki, Danilo Carvalho, Luis, Cláudio, Eduardo Negão, Alexandre, Danilo, Carlos Henrique, Gabi, Marcus, Fred, Sandrinha, Gabriel, Zilka, Tiago, Daniel Buiú e Déco por sempre, de alguma forma estarem presentes nos momentos tristes e felizes da minha vida. Gostaria de agradecer de forma especial a outros que nesta reta final me apoiaram e incentivaram bastante: André Vilela, Euclides, Cleverson, Naishe, Rodrigo, Alan, Java, Juliana, Ralph, Gabriela, Larissa, Anete e Samara.

Aos Professores e funcionários do DF com os quais convivi durante esse tempo todo, só tenho a dizer que foram anos muito bons que passei junto com vocês nessa que foi minha segunda casa.

Por fim, Gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro essencial para a realização desta tese.

*A jornada será longa, mas não desanimaremos. Em cada dia chegaremos,
em cada dia partiremos. Mais além, sempre mais além.*

—JOSÉ SARAMAGO

RESUMO

Nesta tese apresentamos um método para a obtenção da estatística de contagem de carga de estruturas mesoscópicas baseado na teoria de matrizes aleatórias e em técnicas supersimétricas. Através de um poderoso mapa que pode ser estabelecido entre a função geratriz da estatística de contagem e o modelo sigma não linear supersimétrico, mostramos que a teoria quântica de circuitos de um ponto quântico ou uma sequência deles conectados a reservatórios de elétrons por barreiras não ideais pode ser obtida a partir do ponto de sela de tal modelo. Estendemos o formalismo para as três classes de Wigner-Dyson de matrizes aleatórias. Estabelecemos também uma conexão entre os resultados deste formalismo e a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias. Aplicamos a teoria de circuitos obtida de tal formalismo para estudar um sistema híbrido metal normal-supercondutor (NS) no regime de baixas temperaturas, pequenas voltagens e a campo magnético nulo. Calculamos a densidade de autovalores de reflexão de Andreev, que em sistemas NS assume o papel dos autovalores de transmissão do caso normal, e os três primeiros cumulantes da estatística de contagem de uma cavidade caótica conectada a um reservatório normal e outro supercondutor por barreiras de transparência arbitrárias. Observamos um interessante sinal de uma recentemente estudada transição quântica relacionada ao surgimento de modos do tipo Fabry-Pérot dentro da cavidade quando variamos as transparências das barreiras. Estas assinaturas são mais uma manifestação dos efeitos de proximidade do supercondutor. Estudamos também nesta tese os efeitos de interferência quântica nas propriedades de transporte de cadeias de pontos quânticos. Através de um eficiente método que permite obter correções quânticas através da teoria de circuitos, calculamos a correção de localização fraca dos três primeiros cumulantes de uma cadeia de pontos quânticos, onde fomos capazes de observar um comportamento anômalo de tais correções quando variamos o número de cavidades que compõem o circuito. Calculamos também as flutuações universais da condutância deste sistema. Finalizamos esta tese estudando um sistema onde a teoria de circuitos ainda não está disponível: um ponto quântico com uma interface NS na presença de campo magnético. Utilizamos a técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário para calcular os dois primeiros cumulantes bem como a correção de localização fraca da condutância deste sistema. Uma rica fenomenologia foi encontrada quando variamos as transparências das barreiras neste sistema. Comparamos os resultados deste regime com os obtidos a campo magnético nulo.

Palavras-chave: fenômenos de transporte em sistemas mesoscópicos, matrizes aleatórias, modelo σ não linear supersimétrico, estatística de contagem de carga, teoria quântica de circuitos, efeitos de proximidade.

ABSTRACT

In this thesis we present a method to obtain the full counting statistic of charge (FCS) in mesoscopic structures based on random matrices theory and supersymmetric technique. Through a powerful exact map which can be established between the generating function of FCS and a supersymmetric non-linear σ model, we show that the quantum circuit theory for a quantum dot or an array of them can be obtained by the saddle point solution of this model. We extend the formalism to all Wigner-Dyson classes of random matrices. We also establish a connection between our results and the theory of scattering random matrices. We apply the circuit theory obtained from such formalism to study a normal metal-superconductor (NS) hybrid system in the regime of low temperatures and low applied bias with zero magnetic field. We calculate the Andreev reflection eigenvalues density, which plays the role of transmission eigenvalues in the normal case, and the first three cumulants of FCS of a chaotic cavity connected to a normal reservoir and a superconductor one via barriers of arbitrary transparencies. We observe an interesting signature of a quantum transition related to the formation of Fabry-Pérot like modes in chaotic cavities as we vary the barriers' transparencies. Such signatures are another manifestation of the superconductor proximity effects. We also study in this thesis the quantum interference effects in the transport properties of an array of quantum dots. Through an efficient method which allow us to obtain the quantum corrections from the quantum circuit theory we were able to observe an anomalous behavior of such corrections as we increase the number of cavities which compose the circuit. We also calculate the universal fluctuations of conductance in this system. We finish this thesis presenting a regime where the quantum circuit theory is not yet available: a quantum dot in the presence of an NS interface with non-zero magnetic field. We use the diagrammatic technique of integration over the unitary group to calculate the first two cumulants as well as the weak localization correction to the conductance of this system. A rich phenomenology has been found as we vary the barriers' transparencies in this system. We compare these results with the results obtained in zero field regime.

Keywords: transport phenomena in mesoscopic systems, random matrices, supersymmetric non-linear σ model, full counting statistic, quantum circuit theory, proximity effects.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
1.1 Física Mesoscópica e Escalas de Energia Relevantes	2
1.2 Fenômenos em Sistemas Mesoscópicos	6
1.2.1 Quantização da Condutância	6
1.2.2 Fios Quânticos e Efeitos de Interferência Quântica	7
1.2.3 Pontos Quânticos e a Estatística de Contagem de Carga	10
1.2.4 Sistemas Híbridos Metal Normal-Supercondutor e Efeitos de Proximidade	14
1.3 Nesta Tese	20
1.3.1 Capítulo 2	20
1.3.2 Capítulo 3	21
1.3.3 Capítulo 4	21
1.3.4 Capítulo 5	21
1.3.5 Capítulo 6	22
1.3.6 Capítulo 7	22
Capítulo 2—Formalismo de Matriz-S, Teoria de Matriz Aleatória, Teoria de Circuitos...	23
2.1 Formalismo de Matriz- S e Teoria de Landauer-Büttiker	23
2.1.1 Teoria de Espalhamento em sistemas NS	23
2.2 Teoria de Matrizes Aleatórias	28
2.2.1 Ensembles gaussianos	28
2.2.2 Técnica de Supersimetria e TMA	31
2.2.3 Matrizes de Espalhamento Aleatórias	36
2.3 Teoria Quântica de Circuitos	38
2.3.1 Formalismo de Funções de Green de Keldysh	38
2.3.2 Aproximação de Elemento Finito	42
2.3.3 Nós e Reservatórios	44
2.3.4 Conectores	45
2.4 Estatística de Contagem	46
2.4.1 Estatística de Contagem de Carga	47
2.4.2 A Fórmula de Levitov-Lesovik	49
2.4.3 Estatística de Contagem em Sistemas NS	51
2.4.4 Teoria de Circuitos & Estatística de Contagem	52

Capítulo 3—Teoria Quântica de Circuitos e Estatística de Contagem ...	53
3.1 Introdução ao Formalismo	53
3.2 Estatística de Contagem de Carga Através de um Ponto Quântico	55
3.2.1 Representação em Termos de um Modelo σ	55
3.2.2 Equação de Ponto de Sela e a Teoria Quântica de Circuitos	60
3.3 Estatística de Contagem de Carga Através de uma Cadeia de Pontos Quânticos	64
3.3.1 Representação em Termos de um Modelo- σ	64
3.3.2 Análise do Ponto de Sela	65
3.4 Extensão para Outras Classes de Simetria	67
3.5 Conexão com a Teoria de Matrizes de Espalhamento Aleatórias	68
3.5.1 Cavidades Caóticas	69
3.5.2 Fios Quânticos	70
3.6 Versão Keldyshiana da Teoria de Circuitos	73
Capítulo 4—Aplicação da Estatística de Contagem em Sistemas NS...	77
4.1 Estatística de Contagem e Teoria de Circuitos para sistemas NS	77
4.2 Densidade Média de Autovalores de Reflexão de Andreev	80
4.2.1 Barreiras Simétricas ($T_1 = T_2$)	80
4.2.2 Junções de Tunelamento ($T_1, T_2 \ll 1$)	81
4.2.3 Contato Ideal ($T_1 = 1$) e Barreira arbitrária	82
4.3 Análise dos Cumulantes da Estatística de Contagem...	83
4.4 Outras Assinaturas da Transição Quântica	91
Capítulo 5—Localização Fraca e Flutuações via Teoria de Circuitos...	96
5.1 Cadeias: Regime Semiclássico	97
5.1.1 Cadeias Homogêneas	97
5.1.2 Cadeias Heterogêneas	103
5.2 Correções Quânticas para Cadeias de Pontos Quânticas	109
5.2.1 O Formalismo	110
5.2.2 Cálculo dos Autovalores de $\tilde{M}$ para uma Cadeia Homogênea . . .	115
5.3 Localização Fraca e Flutuações para um Ponto com Barreiras...	124
5.4 Aplicação em Sistemas NS	127
Capítulo 6—Técnica diagramática: Aplicação em Sistemas NS na Presença de Campo Magnético	131
6.1 Formalismo de matriz- S para Sistemas NS Revisitado	131
6.2 Parametrização de Estube para Sistemas NS	134
6.3 Observáveis NS e a Técnica Diagramática	135
6.3.1 Condutância NS	136
6.3.2 Potência de Ruído de Disparo NS	141
6.4 Localização Fraca da condutância	143

Capítulo 7—Conclusões e Perspectivas	149
Apêndice A—Super-álgebra	153
Apêndice B—Média da Matriz-S	155
Apêndice C—Parametrização da Supermatriz Fonte $Q_{\vec{a}\vec{b}}$	156
Apêndice D—Coeficientes da expansão de $g_{NS}(\varepsilon)$	158
Apêndice E—Parametrização das Matrizes de Voltagem 2×2	160
Referências Bibliográficas	162

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação do modelo de reservatórios do formalismo de Landauer. A região espalhadora S é conectada aos reservatórios por guias ideais contendo canais abertos de propagação. Os reservatórios estão em equilíbrio termodinâmico e são descritos por funções distribuições $f_i(T, \mu_i)$, onde μ_i é o potencial químico em cada reservatório. Um fluxo de corrente atravessará a região S quando estabelecemos uma diferença entre os potenciais químicos dos reservatórios.	3
1.2	Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópicos em função dos comprimentos característicos da amostra.	5
1.3	Quantização da condutância em constrições. À esquerda temos o comportamento tipo escada da condutância medida vs. a voltagem aplicada na constrição. O inset apresenta algumas dimensões utilizadas no experimento da ref. [7]. À direita apresentamos um zoom da constrição feita por microscopia eletrônica de varredura.	6
1.4	Na figura (a) apresentamos um fio quântico de 75nm de comprimento feito de uma heteroestrutura semicondutora. Vemos também um aparato de medição Hall de quatro terminais. Cada ponto está a aproximadamente $2\mu\text{m}$ de distância do fio. Na figura (b) é mostrado um fio quântico feito de silicone de $1.5\mu\text{m}$ de comprimento suspenso em um filme altamente dopado de silicone. As letras “S” e “D” representam a fonte e o dreno de cargas respectivamente enquanto G_1 e G_2 representam pontas de voltagem. . . .	8
1.5	Na figura (a): comportamento da magneto-resistência quando variamos o campo magnético em um fio quântico difusivo de comprimento $100\mu\text{m}$ para vários valores de espessura do fio e temperaturas. O máximo na magneto-resistência para campo magnético nulo é a assinatura do efeito de localização fraca. Também podemos observar o fenômeno de localização fraca na condutância em constrições, como é mostrado na figura (b). Na figura (c): flutuações universais da condutância em um fio de ouro de 310nm de comprimento e 25nm de espessura à 10mK. O valor quadrado médio da flutuação é $0.3G_0$ que é muito próximo do valor calculado teoricamente [15].	9

- 1.6 À esquerda é mostrado um desenho esquemático de um ponto quântico construído na interface de um heterojunção semicondutora de GaAs/AsGaAs. As estruturas em amarelo são os eletrodos que controlam o acoplamento entre o ponto e os reservatórios. À figura a direita apresenta a imagem de um ponto quântico. As setas em vermelho indicam as regiões onde os elétrons entram e deixam o ponto. Tanto o formato do ponto quanto o acoplamento do mesmo com os reservatórios pode ser feito variando a voltagem aplicada nos eletrodos. Figura retirada de [21]. 11
- 1.7 Figura (a) produzida por microscopia de força atômica de um ponto quântico acoplado a dois contatos 'S' e 'D' e na proximidade de um ponto de contato e de três portões de voltagem, G1, G2 e P cuja finalidade é controlar o acoplamento entre a cavidade e contatos e a condutância do ponto de contato. As voltagens G1 e G2 também são usadas para controlar o número de elétrons dentro da cavidade. É aplicada uma voltagem V entre a fonte (S) e o dreno (D) do ponto quântico. Na figura (b) apresentamos a corrente que atravessa o ponto de contato em função do tempo, que corresponde a flutuação no número de elétrons dentro da cavidade entre N e $N + 1$. As setas indicam os eventos de entrada de um elétron dentro do sistema. Figura retirada da ref. [35]. 14
- 1.8 Distribuição do número de elétrons (figuras (a) e (b)) que entram na cavidade durante um tempo T_0 . As duas figuras correspondem a dois conjuntos distintos de valores de taxas de tunelamento, obtidos para uma voltagem de G1 fixa. O segundo (c) e terceiro (d) cumulantes normalizados da estatística de contagem são apresentados em termos do parâmetro de assimetria $a \equiv (\Gamma_S - \Gamma_D)/(\Gamma_S + \Gamma_D)$. Cada ponto experimental é obtido executando a média sobre 50 valores da grandeza com a voltagem de G1 variando no seguinte intervalo $1.5 < V_{G1} < 3\text{mV}$. As linhas sólidas correspondem aos valores teóricos [36]. O inset da figura (d), mostra a dependência de a com a voltagem V_{G1} . Figura retirada da ref. [35]. . . . 15
- 1.9 Mecanismo de reflexão de Andreev: um elétron (e) vindo da região metal normal (N) com energia inferior ao potencial de emparelhamento (Δ), encontra a interface NS e é refletido como um buraco (h) com aproximadamente mesma energia e momento. Um par de Cooper ($2e$) é absorvido pelo condensado supercondutor. 17
- 1.10 Magnitude E_g do gap induzido em metais normais devido à proximidade do condensado supercondutor em função do comprimento da região normal. O inset apresenta a densidade de estados em função da energia em dois pontos do fio: $x = 0$ (interface NS) e $x = d_N$ (extremo do fio). No inset também observamos como o espalhamento devido ao spin-flip destrói o gap quando aumentamos sua intensidade Γ_{sf} . Figura retirada da ref. [46]. . . 18

1.11	A figura (a) mostra o comportamento de resistência de um fio conectado a um supercondutor quando variamos o comprimento do mesmo, para diversos valores de Γ . A figura (b) apresenta o comportamento da condutância diferencial de um junção de Nb-InGaAs quando variamos a voltagem aplicada ao sistema para várias temperaturas. O pico em voltagem nula é uma assinatura da coerência de fase entre elétrons e buracos. Na figura (c) temos um fio de ouro de $1\mu\text{m}$ em contato com nióbio na fase supercondutora. Na figura à esquerda temos o comportamento da magneto-resistência quando variamos o campo magnético à temperatura de 50mK. A geometria do sistema é apresentada no inset. À direita temos as flutuações universais da condutância da amostra no caso NS ($0.4 < B < 1.9\text{T}$) e no caso normal ($3.1 < B < 9\text{T}$).	19
2.1	Sistema NS composto por guias de ondas I e II perfeitos. O guia I conecta um reservatório de quase-partículas, com potencial químico μ , à esquerda do guia, à região metálica desordenada D. O guia II conecta a região D ao condensado supercondutor S que também tem a função de reservatório de quase-partículas.	24
2.2	Representação de um circuito quântico: três reservatórios caracterizados pelos índices 1, 2 e 3 interligados aos dois nós (4 e 5) por conectores. Cada conector é caracterizado por um conjunto de autovalores de transmissão $\{T_p\}$. As matrizes de voltagem $\tilde{G}_{i=1,2,3}$ que descrevem os reservatórios estão fixas. As matrizes de voltagem dos nós $\tilde{G}_{i=4,5}$ são obtidos através da lei de conservação de corrente matricial incluindo as correntes de “perda”, que são representadas pelo acoplamento de cada nó com um terminal fictício. Figura retirada da referência [80].	43
2.3	Distribuição binomial para $N = 10$ e $\Gamma = 0.4$. As setas em vermelho representam os dois primeiros cumulantes que correspondem a média e a variância respectivamente. As setas verdes apresentam esquematicamente o significado do terceiro (assimetria) e quarto (curtose) cumulantes. . . .	47
4.1	Densidade média de autovalores $\nu_{NS}(x)$ para $T_1 = 1$ e $T_2 = 1$ (linha sólida), $T_2 = 0.8$ (linha tracejada), $T_2 = 0.5$ (linha tracejada-pontilhada), $T_2 = 0.3$ (linha pontilhada). O inset mostra o comportamento de $\nu_{NS}(x)$ dividido $x^{1/3}$ para $T_2 = 0.5$	82
4.2	Diagrama ilustrando as diversas regiões correspondentes aos diferentes regimes de transporte quando variamos os parâmetros T_1 e T_2 . As linhas sólidas correspondem às curvas $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ que delimitam a região onde há modos do tipo Fabry-Perot ($1 < \zeta < \zeta_0$).	84
4.3	Resistência (topo da figura, linha sólida) e condutância NS (gráfico inferior, linha sólida) são apresentados para $T_1 = 0.1$. Também é apresentado (linhas tracejadas) o comportamento desses observáveis no caso normal para comparação. Os eixos verticais a direita dizem respeito aos observáveis no caso normal.	85

4.4	Comparação entre a condutância NS calculada via teoria quântica de circuitos, eq. (4.43) (linha cheia), levando em conta correlações entre os autovalores de transmissão e o resultado obtido em [117] (linha tracejada) considerando independência dos autovalores de transmissão, eq. (4.49).	86
4.5	Potência de ruído de disparo (parte superior) e terceiro cumulante (parte inferior). A linha vertical em $\zeta = 1$ nos auxilia a visualizar a assinatura da transição quântica nos cumulantes NS.	88
4.6	Comparação entre os resultados analíticos obtidos da teoria de circuitos (curvas sólidas (a) e (c)) e simulação (curvas (b) e (d)) utilizando um ensemble de matrizes espalhamento para o segundo e terceiro cumulantes para $T_1 = 0.1$. O eixo vertical à esquerda corresponde às curvas de ruído de disparo ((a) e (b)), enquanto o eixo à direita corresponde às curvas do terceiro cumulante.	89
4.7	Fator Fano (à esquerda) e skewness (à direita) para $T_1 = 0.1$ (linha sólida), 0.4 (linha tracejada), and 0.8 (linha pontilhada).	90
4.8	Densidade média de autovalores de reflexão de Andreev em $x = 0$ como função das transparências das barreiras. No plano $T_1 T_2$ recuperamos o diagrama de fase, fig. (4.2), da transição quântica. As linhas sólidas são as curvas $\zeta = \zeta_0$ and $\zeta = 1$	91
4.9	Fator Fano $F(\epsilon)$ e sua derivada, $dF(\epsilon)/d\zeta$ em função de ζ para $T_1 = 0.4$. As linhas pontilhadas verticais são estimativas numéricas para as linhas de transição, $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0 \simeq 2.33$. A linha pontilhada horizontal é o valor estimado de $F_c = \alpha_c/2 \simeq 0.67$ para $\epsilon \ll 1$. Figura retirada da ref. [102]	94
4.10	Comportamento da distribuição de carga transmitida (topo da figura) e suas derivadas na cauda de eventos raros ($x = 0$). A segunda derivada (parte inferior da figura) apresenta uma discontinuidade em $T_2 \equiv \Gamma_2 \approx 0.28$ e outra em $T_2 = \Gamma_2 \approx 0.67$ para $T_1 = 0.4$. Figura retirada da ref. [120].	95
5.1	Imagens de microscopia eletrônica de (a) uma barra Hall de aproximadamente $100\mu\text{m}$ de largura, com quatro pontos de contatos quânticos utilizados para definir as cavidades caóticas. Em (b) temos uma ampliação de um ponto de contato. Figura retirada da ref. [8].	97
5.2	Representação em teoria de circuitos de funções de Green quase-clássicas de uma cadeia homogênea.	98
5.3	Comportamento de três observáveis de interesse quando aumentamos o número de conectores para $T = 1$ (vermelho), $T = 0.7$ (verde), $T = 0.4$ (azul), $T = 0.1$ (magenta). As linhas tracejadas horizontais são os valores de tais grandezas para um fio quântico.	101
5.4	Densidade média de autovalores de transmissão para $T = 1$ e $N = 2, 4, 6, 8, 10$ e 12.	102

5.5	(a) Representação na teoria de circuitos de uma cadeia heterogênea típica. As barreiras que conectam as cavidades caóticas aos reservatórios possuem transparências diferente das barreiras internas. (b) Representação do problema de $N - 1$ pontos conectados em série em termos de um problema efetivo de dois pontos.	104
5.6	As figuras (a) e (b) apresentam o comportamento de $\nu_N(T_2, 0)$ para valores fixos de T_1 e T variando o número de conectores. A figura (c) apresenta o diagrama $T_1 \times T_2$ para $T = 1$ e $N = 3$ (vermelho), $N = 4$ (verde), $N = 5$ (azul) e $N = 10$ (magenta).	106
5.7	O comportamento do fator Fano [(a) e (b)] e do fator de assimetria [(c) e (d)] em função de T_2 (T_1) com $T_1 = 0.1$ ($T_2 = 0.1$). Observe o comportamento não monotônico destes observáveis quando aumentamos o número de conectores que compõem a cadeia.	108
5.8	Comportamento das correções de localização fraca da (a) condutância, (b) potência de ruído de disparo e (c) do terceiro cumulante para $T = 1$ (linha vermelha), $T = 0.7$ (verde), $T = 0.4$ (azul) e $T = 0.1$ (magenta). As linhas tracejadas horizontais são os valores dessas correções para o fio quântico.	122
5.9	Comparação entre o resultado da teoria de circuitos e via simulações para a localização fraca da potência de ruído de disparo variando o número de conectores.	123
5.10	Comparação entre a condutância NS obtida via teoria de circuitos com (linha cheia) e sem (linha tracejada) o termo de localização fraca e simulação numérica para $T_1 = 0.1$	129
6.1	Diferentes elementos do sistemas NS conectados por guias perfeitos. Da esquerda para a direita: conector b do lado normal, cavidade caótica, conector a próximo ao condensado supercondutor e a interface NS.	132
6.2	Representação diagramática das matrizes unitárias U e U^* , de uma matriz arbitrária A e a delta de Kronecker que surge quando executamos as médias. O índice $a = (i, n)$ caracteriza o ponto preto, enquanto $b = (j, m)$ diz respeito ao ponto branco.	136
6.3	Diagrama escada típico que é utilizado para o cálculo da média da condutância. O circuito fechado formado por linhas pontilhadas alternadas com linhas finas definem um ciclo- U . Cada ponto preto ou branco em um ciclo- U tem o mesmo índice de Nambu σ	137
6.4	Comportamento da razão entre os valores médios da condutância NS para os dois ensembles quando variamos o parâmetro a . Vemos que apenas no limite $a \rightarrow \infty$ essa razão tende a 1.	139
6.5	Condutância para o caso unitário (linhas sólidas) e para o caso ortogonal (linhas tracejadas) em unidades de NG_0	140
6.6	Representação diagramática de algumas funções que surgem no cálculo da potência de ruído de disparo e da correção de localização fraca da condutância.	141

6.7	Diagramas da potência do ruído de disparo. Esta figura foi retirada da ref. [139], onde esses diagramas foram utilizados para o cálculo da potência de ruído de disparo de um sistema metal-normal-ferromagnético. Observe que para o caso NS devemos lembrar que cada ponto em um ciclo- U deve ter o mesmo índice σ	142
6.8	O fator Fano em unidades de eVN em função de Γ_a (Γ_b) é apresentado na parte de cima (baixo) da figura, para vários valores de Γ_b (Γ_a) fixo. . . .	144
6.9	Dois diagramas maximamente cruzados distintos construídos utilizando o terceiro diagrama definido na figura (6.6).	145
6.10	Demais diagramas cruzados construídos utilizando a última estrutura diagramática definida na figura (6.6).	146
6.11	Localização fraca da condutância NS em unidades de G_0 variando a barreira Γ_b (Γ_a) na parte de cima (baixo) da figura com Γ_a (Γ_b) fixo e $N_a = N_b$.147	147

LISTA DE TABELAS

2.1	Os três ensembles de Wigner-Dyson: as matrizes H e U são classificadas pelo índice β dependendo da presença ou ausência das simetrias de reversão temporal (SRT) e de rotação de spin (SRS).	29
5.1	Relação entre os parâmetros de descoerência $\{\eta\}$ e os ensembles puro de matrizes aleatórias.	113
6.1	Expressões matemáticas para os seis diagramas topologicamente distintos que contribuem para a potência de ruído da disparo.	142

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Avanços consideráveis no entendimento da estrutura da matéria foram realizados durante todo o século passado devido à criação e desenvolvimento da mecânica quântica. Poderíamos sem exagero nomear o século XX como o século da mecânica quântica, que não só inaugurou um novo paradigma na física básica como também abriu os horizontes para um estrondoso desenvolvimento tecnológico que nos tirou da era das válvulas e nos levou para a era dos transistores e dos materiais semicondutores. Apesar de nos encontrarmos ainda nos primeiros anos do século XXI não seria nenhum absurdo se o chamarmos de século da nanociência. A nanociência tem como objetivo construir e controlar dispositivos em escala atômica. Obviamente para atingir esse objetivo a nanociência assume um caráter interdisciplinar nunca antes visto na história da ciência. Nesta tese estaremos interessados em um ramo particularmente interessante da nanociência: a física do transporte quântico. Tal ramo da ciência tem como objetivo estudar as propriedades de diferentes regimes do transporte eletrônico em nanoestruturas, que não necessariamente dependem da composição atômica da estrutura e como o adjetivo sugere, não pode ser explicada inteiramente pela física clássica.

A física do transporte quântico possui duas importantes escalas que permitem separar os seus diversos regimes: o quantum de condutância $G_0 \equiv 2e^2/h$, que depende de constantes universais da natureza (carga eletrônica e constante de Planck); e escalas de energia. As escalas de energia podem ser divididas em duas classes: as controláveis experimentalmente, e.g. temperatura ($k_B T$) e voltagem aplicada à nanoestrutura; escalas de energias internas da estrutura e.g. energia relacionada ao livre caminho médio elástico ou relacionada ao espaçamento médio de níveis dentro da estrutura. Os diferentes regimes de transporte quântico são determinados pelas relações entre as diversas escalas internas e não pelas dimensões da nanoestrutura.

Mais especificamente nesta tese estamos interessados em um subtópico da nanociência que teve seu início na década de 1980: a *física mesoscópica*. O principal objetivo desta área consiste em estudar assinaturas quânticas no transporte semiclássico em nanoestruturas [1, 2]. Estas nanoestruturas são tipicamente feitas de metais ou formadas através de um gás bidimensional de elétrons formado na interface de heterojunções semicondutoras. O nome *mesoscópica* foi escolhido de forma a enfatizar a importância das escalas intermediárias que encontram-se entre o mundo do micro, governado pela mecânica quântica e o mundo do macro, governado pela física clássica. O que torna a física de transporte quântico mais abrangente que a física mesoscópica é que nunca foi encontrado uma separação nítida entre a escala micro e a meso. Efeitos presentes nas propriedades de transporte de heteroestruturas semicondutoras (estruturas mesoscópicas), também são encontrados em estruturas formadas por poucos átomos. Desta forma o termo mesoscópico é comumente utilizado como referência ao *crossover* entre o regime de

transporte quântico e clássico, enquanto a física do transporte quântico tornou-se o termo utilizado para a física dos efeitos quânticos nas propriedades de transportes de estruturas em escalas atômicas à nano.

Iniciamos este capítulo com uma breve introdução à física mesoscópica, onde apresentaremos de forma sucinta a teoria de Landauer-Büttiker, que foi o primeiro formalismo teórico construído para o estudo de fenômenos mesoscópicos. Apresentamos e discutimos também as principais escalas de energia relacionada à física mesoscópica.

1.1 FÍSICA MESOSCÓPICA E ESCALAS DE ENERGIA RELEVANTES

Nos anos de 1980 tornou-se possível construir estruturas onde suas dimensões características são menores que seu livre caminho médio. Em heteroestruturas semicondutoras de GaAs/GaAlAs é possível, em baixas temperaturas uma mobilidade da ordem de $10^6 \text{cm}^2/\text{Vs}$, que leva a um livre caminho médio elástico da ordem de $10\mu\text{m}$ e a um livre caminho médio inelástico, que está relacionado com o comprimento característico que o elétron percorre sem perder a coerência de fase por espalhamento inelástico, ainda maior. Isto significa que neste regime de transporte, novos fenômenos surgem devido à coerência de fase eletrônica e a teoria de transporte de Boltzmann não é mais capaz de produzir resultados concordantes com os experimentos.

Estas estruturas de dimensões reduzidas são por muito autores chamadas de dispositivos mesoscópicos, onde o prefixo “meso” é utilizado para acentuar uma das principais propriedades desses sistemas que é sua característica intermediária entre o mundo do “micro” (escalas atômicas) e o “macro”, onde o transporte é essencialmente descrito pela equação de Boltzmann. De forma rigorosa não podemos associar a física mesoscópica à física de uma escala de comprimento intermediária. A física mesoscópica está intimamente relacionada a um regime de transporte onde a coerência de fase eletrônica durante o processo de transmissão de carga é um ingrediente fundamental. Como veremos, dependendo de algumas escalas de energia que definiremos adiante, podemos ter estruturas mesoscópicas da ordem de alguns nanômetros até centenas de nanômetros.

Historicamente os trabalhos teóricos que inauguraram esta área foram realizados por Landauer [3, 4], e tiveram como principal contribuição conceitual a mudança na visão do problema de transporte eletrônico numa rede unidimensional. No tratamento de Landauer uma corrente constante é injetada na amostra e a questão básica passa a ser qual seria a distribuição não homogênea de campos na amostra como resposta ao fluxo de elétrons. A amostra passa então a ser vista como um centro espalhador e a condutância pode ser interpretada como uma medida do coeficiente de transmissão. Para garantir um fluxo constante através da amostra, Landauer introduziu o conceito de reservatórios que são conectados à região “espalhadora” por guias de condução perfeitos, caracterizados por um número N de modos transversais (canais) de propagação, e têm a função de gerar uma força termodinâmica através de um gradiente de potencial químico, tirando assim o sistema do equilíbrio e o levando a um regime de transporte. Os reservatórios são formalmente descritos por suas funções de distribuição de equilíbrio $f_1(T, \mu_1)$ e $f_2(T, \mu_2)$, onde μ_1 e μ_2 são os potenciais químicos e T é a temperatura, que assumiremos ser a mesma nos dois reservatórios. Na figura (1.1) apresentamos o “circuito” que representa o modelo de reser-

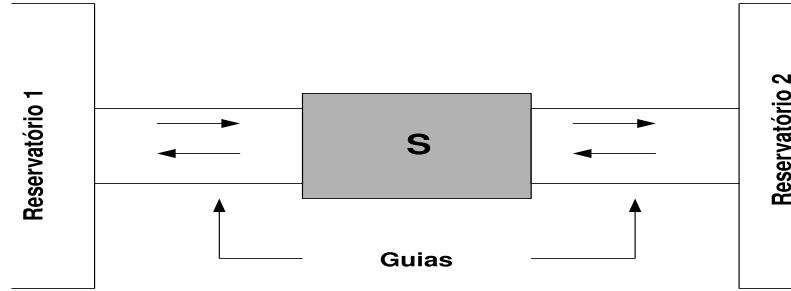


Figura 1.1 Representação do modelo de reservatórios do formalismo de Landauer. A região espalhadora S é conectada aos reservatórios por guias ideais contendo canais abertos de propagação. Os reservatórios estão em equilíbrio termodinâmico e são descritos por funções distribuições $f_i(T, \mu_i)$, onde μ_i é o potencial químico em cada reservatório. Um fluxo de corrente atravessará a região S quando estabelecemos uma diferença entre os potenciais químicos dos reservatórios.

vatórios do formalismo de Landauer. O reservatório é na verdade um objeto puramente conceitual, pois não pode ser construído isoladamente em um laboratório, no entanto é um ingrediente indispensável na formulação de Landauer pois introduz características como irreversibilidade e dissipação que estão sempre presentes nos experimentos.

Landauer mostrou [4] que a condutância de um condutor unidimensional, medida por 4 pontas de prova, é dada por $g = G_0 T/R$, para o caso de apenas um canal aberto em cada um dos guias. Os coeficientes T e R são os coeficientes de transmissão e reflexão respectivamente do condutor, visto como um único centro espalhador e $G_0 = 2e^2/h$, é o quantum da condutância. A extensão para o caso de N canais abertos foi obtida por Büttiker [5] e para uma medição com 2 pontas de prova é dada por

$$g = G_0 \text{Tr}(\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger), \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{t}$ é matriz de transmissão $N \times N$ que conecta as amplitudes do fluxo incidente nos vários canais do lado esquerdo da região desordenada com as amplitudes do fluxo que sai pelo canais do lado direito. Os autovalores da matriz $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$ formam o conjunto de autovalores de transmissão da região espalhadora, denotados por $\{\tau_i; i = 1, \dots, N\}$. Esta expressão é conhecida como fórmula de Landauer-Büttiker e durante os últimos 20 anos tem sido utilizada para descrever uma enormidade de sistemas mesoscópicos alguns dos quais iremos tratar na próxima seção. Para uma revisão mais detalhada do formalismo de Landauer-Büttiker recomendamos o livro-texto de física mesoscópica de S. Datta [6], que

apresenta o formalismo de forma bem elementar e acessível.

Antes de apresentarmos alguns fenômenos típicos de sistemas mesoscópicos, gostaríamos de apresentar algumas escalas de energia importantes neste regime de transporte. A primeira escala de energia que surge em sistemas confinados microscópicos está relacionada à discreteza dos níveis de energia nessa estrutura. A posição precisa de cada nível de energia dependerá dos detalhes da nanoestrutura. A escala de energia que caracteriza esta discreteza quântica é o *espaçamento médio entre níveis*, δ . Outra escala importante em física mesoscópica está relacionada à discreteza da carga eletrônica. A *energia de carregamento*, E_C está relacionada ao custo energético para adicionarmos um elétron à nanoestrutura. A energia de carregamento é expressa em termos da capacitância da nanoestrutura C , $E_C = e^2/C$. As escalas internas δ e E_C deixam de ser escalas relevantes em estruturas macroscópicas, enquanto que para escalas atômicas elas são tipicamente da ordem de 1eV e 10eV, respectivamente.

Além das escalas de energias internas, devemos levar em conta também a condutância da nanoestrutura em relação ao quantum de condutância, G_0 . No regime $G \gg G_0$ muitos elétrons atravessam a nanoestrutura e permanecem pouco tempo dentro da mesma de tal maneira que não sentem a influência das escalas de energia discutidas acima. Este regime de transporte é conhecido como *regime de transporte coerente semiclássico*. Esse regime introduz uma nova escala de energia: a *energia de Thouless*, E_{Th} . A energia de Thouless em sistemas abertos (ver fig. (1.1)) está relacionada ao inverso do tempo de permanência (τ_{perm}) do elétron dentro da nanoestrutura através do princípio da incerteza de Heisenberg que relaciona escalas de energia e de tempo, $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. A energia de Thouless é proporcional à condutância da nanoestrutura através da seguinte relação, $E_{Th} \simeq (G/G_0)\delta$. Essa energia também pode ser utilizada como parâmetro para a validade da característica universal de algumas propriedades de transporte de sistemas mesoscópicos. Para observarmos este fato, definimos mais uma escala de energia: a *energia ergódica*, E_{erg} . Essa escala de energia está relacionada com o inverso do tempo que o elétron gasta para explorar toda a nanoestrutura, que é conhecido como tempo ergódico, τ_{erg} . Em sistemas fechados, onde não há entrada nem saída de elétrons, esta energia é exatamente igual à energia de Thouless. Se a energia de Thouless é bem menor que a energia ergódica, ou equivalentemente $\tau_{perm} \gg \tau_{erg}$, as propriedades de transporte nessas nanoestruturas são universais, ou seja não dependem do formato específico nem do grau de impureza da mesma. Quando a condutância da amostra é bem menor que o quantum de condutância $G \ll G_0$, o evento de transmissão de elétrons torna-se raro, ocorrendo apenas a transferência de um elétron por vez de forma incoerente. Este regime é conhecido como *bloqueio coulombiano* e a escala E_C torna-se a escala mais relevante do sistema.

É também instrutivo observar os diversos regimes de transporte mesoscópico analisando as escalas de comprimento característicos ao invés das escalas de energia. Tais comprimentos são listados abaixo:

1. Comprimento de onda de Fermi, λ_F :

Está relacionado ao nível de Fermi pela relação, $\lambda_F = \hbar/\sqrt{2m\epsilon_F}$. Tipicamente varia de alguns angstroms em metais a centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras.

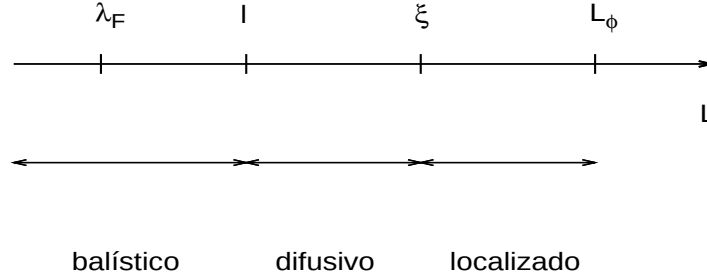


Figura 1.2 Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópicos em função dos comprimentos característicos da amostra.

2. Livre caminho médio elástico, l :

É a distância média que o elétron viaja até sofrer uma colisão elástica. Este comprimento varia de alguns angstroms em ligas amorfas a uma dezena de microns em heteroestruturas semicondutoras.

3. Comprimento de localização eletrônica, ξ :

Mede a extensão espacial das funções de onda eletrônicas. Para condutores metálicos, estas funções se estendem sobre toda a amostra, ao passo que em isolantes elas decaem exponencialmente a partir do chamado centro de localização.

4. comprimento de coerência de fase, L_ϕ :

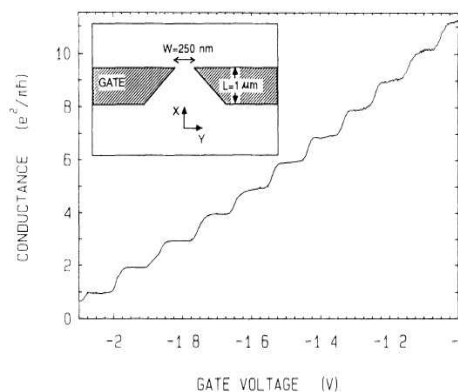
É o comprimento ao longo do qual a fase da função de onda não relaxa. É associado a esse comprimento o tempo de relaxação de fase τ_ϕ . O valor de L_ϕ cresce com a diminuição da temperatura e é a escala mais importante para o surgimento de efeitos mesoscópicos.

Em geral para amostras em baixas temperaturas temos, $\lambda_F < l < \xi < L_\phi$. Neste caso, existem três regimes de transporte distintos descritos abaixo (ver também fig. (1.2)):

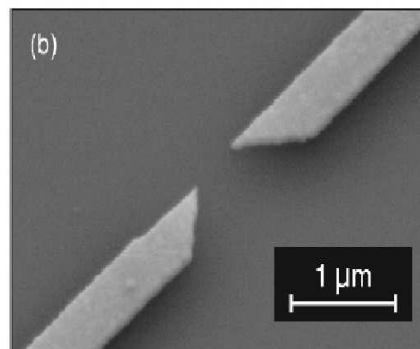
a Regime balístico:

Ocorre quando L , que é o comprimento da amostra, é menor que o livre caminho médio elástico ($L < l$). No regime balístico os elétrons viajam através da estrutura tipicamente sem sofrer colisões com espalhadores elásticos. Neste regime o comprimento de coerência de fase é dado por $L_\phi = v_F \tau_\phi$.

b Regime difusivo:



(a) Figura retirada da ref. [7]



(b) Figura retirada da ref. [8]

Figura 1.3 Quantização da condutância em constrições. À esquerda temos o comportamento tipo escada da condutância medida vs. a voltagem aplicada na constricção. O inset apresenta algumas dimensões utilizadas no experimento da ref. [7]. À direita apresentamos um zoom da constricção feita por microscopia eletrônica de varredura.

Para $l < L < \xi$, o sistema está no regime difusivo, pois o elétron sofre diversas colisões elásticas antes de escapar da amostra. Para este regime de transporte $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$, onde D é a constante de difusão da amostra.

c Regime localizado:

Quando $\xi < L < L_\phi$, o sistema encontra-se no regime localizado. A amostra neste regime comporta-se como um isolante.

Na próxima seção trataremos dos principais sistemas mesoscópicos de grande interesse atual tanto em estudos teóricos como experimentais. Analisaremos também os principais fenômenos relacionados a estes sistemas.

1.2 FENÔMENOS EM SISTEMAS MESOSCÓPICOS

Discutiremos agora alguns exemplos de sistemas mesoscópicos de grande interesse teórico e experimental. Para cada estrutura iremos também apresentar um fenômeno mesoscópico típico.

1.2.1 Quantização da Condutância

A primeira constatação da validade da fórmula de Landauer-Büttiker (1.1) foi a descoberta do fenômeno de quantização da condutância em uma constricção a baixas temperaturas, figura (1.3), observado por dois grupos experimentais independentemente em 1988 [7, 9]. Essas constrições são criadas introduzindo pontos de contatos (ver inset e a figura (1.3(b))) que têm como objetivo “separar” em duas partes o gás de elétrons formado na interface da heterojunção semicondutora GaAs/AlGaAs. A condutância é

medida entre essas duas regiões. A largura W da constrição pode ser controlada através da voltagem aplicada aos pontos de contato. O que se observa nessa estrutura é que à medida que a largura W da constrição diminui a condutância decresce na forma de degraus, ver figura (1.3(a)), onde cada degrau tem altura do quantum de condutância G_0 , que é o resultado esperado quando aplicamos a fórmula de Landauer para esse sistema

$$g_c = G_0 N \quad (1.2)$$

onde N é o número de canais de propagação da constrição e está relacionado com a largura da constrição pela seguinte relação $N \sim k_f W / \pi$, onde k_f é o módulo do vetor de onda de Fermi, que em metais é muito grande o que resulta em $N \gg 1$ e portanto resistências de contato muito pequenas. Já em semicondutores o comprimento de onda de Fermi é tipicamente $\sim 30\text{nm}$ que permite fazer o fator $k_f W$ bem menor que no caso de metais permitindo a observação desses degraus.

1.2.2 Fios Quânticos e Efeitos de Interferência Quântica

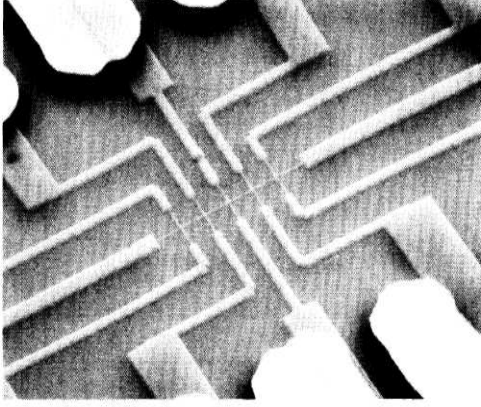
Quando o comprimento do sistema mesoscópico é menor do que o comprimento de coerência de fase devemos levar em conta os efeitos de interferência quântica nesses sistemas. Considere duas funções de onda com a seguinte forma geral $\psi_i = A_i e^{i\phi_i}$. Quando essas duas ondas são combinadas, temos que a densidade de probabilidade é dada por

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 4|A_1^* A_2| \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (1.3)$$

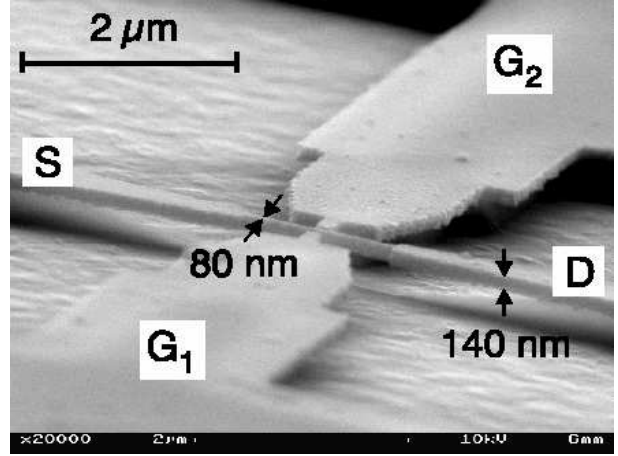
Na maioria dos casos podemos desprezar o termo que depende da diferença da fase, pois o comprimento de coerência é bem menor que o comprimento da amostra e sua contribuição acaba desaparecendo quando executamos a média em ensemble para obtermos os efeitos macroscópicos. Em estruturas mesoscópicas isso não ocorre e muitos efeitos devido à interferência quântica foram observados. Apresentamos aqui dois efeitos de interferência quântica: a localização fraca e as flutuações universais da condutância.

Para apresentar esses dois fenômenos mesoscópicos apresentaremos mais uma nanoestrutura amplamente estudada em física mesoscópica: o fio quântico. A figura (1.4) apresenta duas imagens de microscopia eletrônica de varredura de dois fios quânticos. À direita apresentamos um fio de 75nm de comprimento feito através de um gás de elétrons bidimensional criado na interface de uma heterojunção GaAs-AlGaAs. À esquerda apresentamos o segundo fio quântico de silicone de aproximadamente 1.5 μm de comprimento suspenso em um filme altamente dopado de silicone. Os fios quânticos possuem comprimentos bem maiores que o livre caminho médio elástico, logo o transporte nessas estruturas é difusivo e a baixas temperaturas tem um comprimento de coerência de fase bem maior que seu comprimento, de tal forma que podemos observar efeitos de interferência quântica em suas propriedades de transporte.

A contribuição de localização para um fio quântico pode ser vista na figura (1.5(a)). Nesta figura é apresentado o comportamento da magneto-resistência de um fio de 100 μm de comprimento, para diversos valores de espessura e temperaturas, em função da campo magnético. A assinatura da localização fraca pode ser vista como o excesso da magneto-resistência a campo nulo. O uso desse termo vem da visão de localização como a reflexão



(a) Figura retirada da ref. [10].



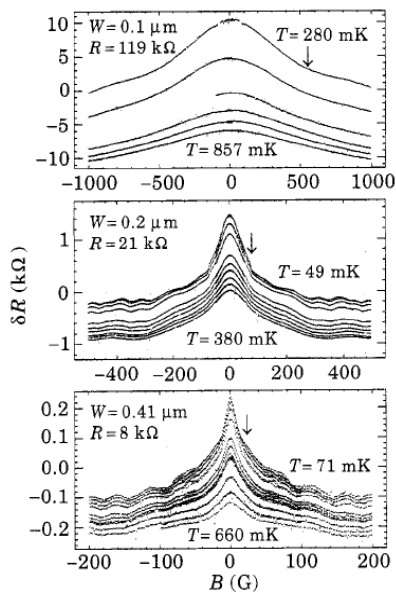
(b) Figura retirada da ref. [11].

Figura 1.4 Na figura (a) apresentamos um fio quântico de 75nm de comprimento feito de uma heteroestrutura semicondutora. Vemos também um aparato de medição Hall de quatro terminais. Cada ponto está a aproximadamente $2\mu\text{m}$ de distância do fio. Na figura (b) é mostrado um fio quântico feito de silicone de $1.5\mu\text{m}$ de comprimento suspenso em um filme altamente dopado de silicone. As letras “S” e “D” representam a fonte e o dreno de cargas respectivamente enquanto G_1 e G_2 representam pontas de voltagem.

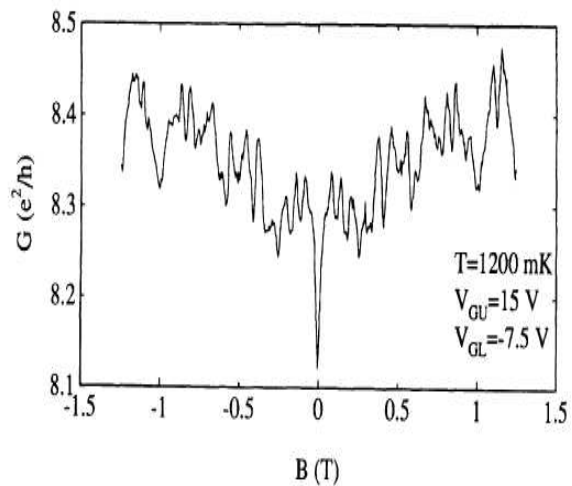
total das partículas por uma barreira de potencial. Nesse caso a reflexão é parcial e as partículas não estão verdadeiramente localizadas e portanto essa interação fraca cria apenas resistência adicional, que é conhecida como contribuição de localização fraca para a resistência. O efeito de localização é devido à interferência construtiva entre pares de trajetórias conjugadas revertidas no tempo. O regime de localização fraca é caracterizado pela alta sensibilidade ao relaxamento da fase. Quando aplicamos um campo magnético capaz de quebrar a simetria de reversão temporal os pares de trajetórias conjugadas revertidas no tempo não interferem mais construtivamente suprimindo assim o efeito. Para mais detalhes sobre a correção de localização fraca recomendamos as referências [16, 17]. Para um fio quântico cujo comprimento é muito maior que o livre caminho médio elástico, $L \gg l$, a condutância é dada por [15]

$$g/G_0 = \frac{2lN}{L} - \frac{1}{3}, \quad (1.4)$$

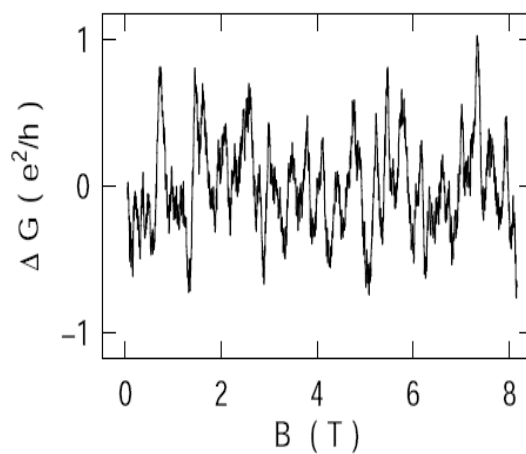
onde o primeiro termo nada mais é que o a lei de Ohm para um fio de comprimento L . O segundo termo é a correção de localização fraca. Note que essa correção é da ordem da unidade enquanto o termo principal é linear com o número de canais. Quando saímos do regime $L \ll L_\phi$ e entramos no regime onde o comprimento do fio é bem maior que comprimento de coerência de fase, a localização deixa de ser constante e passa a depender do inverso do tamanho do fio [17]:



(a) Figura retirada da ref. [12]



(b) Figura retirada da ref. [13]



(c) Figura retirada da ref. [14]

Figura 1.5 Na figura (a): comportamento da magneto-resistência quando variamos o campo magnético em um fio quântico difusivo de comprimento $100\mu\text{m}$ para vários valores de espessura do fio e temperaturas. O máximo na magneto-resistência para campo magnético nulo é a assinatura do efeito de localização fraca. Também podemos observar o fenômeno de localização fraca na condutância em constrições, como é mostrado na figura (b). Na figura (c): flutuações universais da condutância em um fio de ouro de 310nm de comprimento e 25nm de espessura à 10mK . O valor quadrado médio da flutuação é $0.3G_0$ que é muito próximo do valor calculado teoricamente [15].

$$g_{wl}/G_0 = \begin{cases} -1/3; L \ll L_\phi, \\ -L_\phi/L; L \gg L_\phi. \end{cases} \quad (1.5)$$

O efeito de localização fraca também pode ser visto em fios curtos como mostra a figura (1.5(b)). Uma queda acentuada na condutância de uma constrição de comprimento de $L = 730\text{nm}$ é observada quando o campo magnético aplicado é nulo. O valor teórico para fios curtos no regime $L \ll L_\phi$ é $-1/4$ [18].

Observa-se experimentalmente que a condutância de um sistema mesoscópico flutua com amplitude universal de amostra para amostra, em função do campo magnético ou da energia de Fermi. Estas flutuações não são ruído dependente do tempo, mas sim um padrão completamente reprodutível numa mesma amostra. O caráter universal deste efeito consiste no fato da amplitude das oscilações ser sempre da ordem de G_0 [19], independente da amostra e do valor médio da condutância da mesma. Aquecendo a amostra, modificamos a configuração de impurezas e portanto o espectro de flutuações é modificado quando resfriamos a amostra novamente. Na figura (1.5(c)) apresentamos as flutuações universais da condutância em um fio de ouro de 310nm de comprimento e 25nm de espessura a 10mK . A variância da condutância que foi medida em [14] para esse fio é bem próxima do valor teórico de $(2/15)G_0^2$, obtido por Mello em [15]. Os fenômenos de interferência quântica independentes do tempo estudados aqui também aparecem em outros sistemas quânticos como pontos de contatos [ver figura (1.5(b))] em anéis nanoscópicos de ouro [14] e em pontos quânticos [20]. Falaremos mais sobre os pontos quânticos na próxima seção onde apresentaremos o fenômeno de flutuação dependente do tempo em sistemas mesoscópicos devido à discreteza da carga eletrônica, conhecido na literatura como ruído de disparo.

1.2.3 Pontos Quânticos e a Estatística de Contagem de Carga

Os pontos quânticos são dispositivos que consistem de uma região condutora espacialmente delimitada por regiões isolantes na qual ocorre transporte coerente de elétrons. Tipicamente pontos quânticos são produzidos a partir de materiais semicondutores e têm dimensões de 100nm que é bem menor que o livre caminho médio elástico, que em heteroestruturas semicondutoras é da ordem de $100\mu\text{m}$, de tal forma que o transporte nessas estruturas é essencialmente balístico. Na figura (1.6) apresentamos um ponto quântico típico construído de um gás de elétrons bidimensional na interface de uma heteroestrutura semicondutora de GaAs/AlGaAs. As setas vermelhas na figura à direita representam os locais de entrada e saída dos elétrons. Os eletrodos (partes amarelas da figura à esquerda), além de confinar os elétrons dentro da cavidade, também definem os pontos de contato que acoplam o ponto quântico aos reservatórios. A intensidade do acoplamento entre reservatórios e ponto é definida através do controle da voltagem aplicada aos eletrodos.

Vários fenômenos observados em pontos quânticos assemelham-se aos observados em átomos e núcleos, tais como níveis de energia quantizados devido ao confinamento eletrônico, estruturas de camadas e caos quântico. De forma simples diz-se que um sistema quântico é caótico quando a dinâmica clássica correspondente é caótica. O interesse no estudo de dispositivos caóticos reside no fato de que suas propriedades são universais,

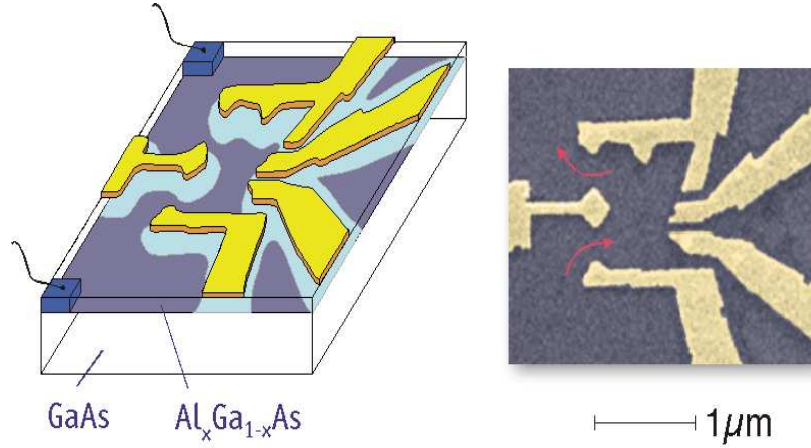


Figura 1.6 À esquerda é mostrado um desenho esquemático de um ponto quântico construído na interface de uma heterojunção semicondutora de GaAs/AsGaAs. As estruturas em amarelo são os eletrodos que controlam o acoplamento entre o ponto e os reservatórios. À direita apresenta a imagem de um ponto quântico. As setas em vermelho indicam as regiões onde os elétrons entram e deixam o ponto. Tanto o formato do ponto quanto o acoplamento do mesmo com os reservatórios pode ser feito variando a voltagem aplicada nos eletrodos. Figura retirada de [21].

dependendo apenas da existência ou ausência de certas simetrias fundamentais e de certas relações entre as escalas de tempo do dispositivo. Para mais informação sobre aspectos experimentais e fenômenos relacionados à física dos pontos quânticos recomendamos a revisão sobre o assunto que pode ser encontrada na ref. [22]. No final dessa subseção iremos tratar de um fenômeno muito interessante tanto na física das cavidades caóticas como de outros sistemas aqui já apresentados: as flutuações dependentes do tempo da corrente que atravessa uma estrutura mesoscópica.

Em 1918 Walter Schottky [23] através de experimentos com tubos de raios caóticos, onde todas as fontes de ruídos espúrios são eliminadas, percebeu que dois tipos de ruído permaneciam quando medimos a corrente elétrica que passa por essa estrutura. O primeiro é conhecido como ruído de Johnson e Nyquist ou simplesmente, ruído térmico e é devido à agitação térmica dos elétrons e está presente em todos os condutores. O segundo tipo de ruído observado por Schottky é conhecido como ruído de disparo e é devido à discreteza da carga dos portadores de corrente elétrica. Diferentemente do ruído térmico, o ruído de disparo não é observado em todo tipo de condutor.

O ruído é caracterizado por sua densidade espectral ou espectro de potência $P(\omega)$, que é dado pela transformada de Fourier em frequência da função correlação corrente-corrente que em nanoestruturas pode ser escrita como

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta \hat{I}(t + t_0) \delta \hat{I}(t) + \delta \hat{I}(t) \delta \hat{I}(t + t_0) \rangle, \quad (1.6)$$

onde, $\delta \hat{I}(t) \equiv \hat{I}(t) - \langle \hat{I}(t) \rangle$ é o operador corrente e a média $\langle \dots \rangle$ é a média sobre o

ensemble estatístico ou, equivalentemente, uma média sobre o tempo inicial t_0 e sobre o estado quântico dos reservatórios. O ruído de Nyquist, caracterizado por temperatura diferente de zero e voltagem nula aplicada à nanoestrutura é dado por, $P = 4k_B T G$, onde G é a condutância da nanoestrutura. Esse resultado pode ser obtido diretamente do teorema dissipação-flutuação, ver a ref. [24] para uma dedução.

O ruído de disparo é bem mais informativo que o ruído térmico, pois nos dá informação sobre as correlações temporais dos elétrons que não estão contidas na condutância. O ruído de disparo pode ser expresso em termos dos autovalores de transmissão da amostra, τ_n através da equação descrita abaixo [25]

$$P = eVG_0 \sum_n \tau_n (1 - \tau_n), \quad (1.7)$$

para canais completamente abertos, $\tau_n = 1$, ou fechados $\tau_n = 0$, o processo de transferência não é aleatório, pois ou os elétrons são todos transmitidos ou refletidos o que leva a $P = 0$. Para junções de tunelamento, que são caracterizadas por $\tau_n \ll 1$, a expressão acima se reduz a $P_{\text{Poisson}} = eVG$, que é o valor esperado para um processo de Poisson, onde os elétrons transmitidos são descorrelacionados. Observamos que o ruído descrito pela equação (1.7) é sempre menor que o poissoniano. Isto ocorre pois a potência de ruído de disparo é sempre suprimida pelas correlações eletrônicas devido ao princípio de exclusão de Pauli. Essa supressão é caracterizada pelo fator de Fano $F \equiv P/P_{\text{Poisson}}$, que é a razão entre o ruído da nanoestrutura dividido pelo ruído poissoniano

$$F = \frac{\sum_n \tau_n (1 - \tau_n)}{\sum_n \tau_n}. \quad (1.8)$$

Para condutores simples o fator de Fano assume valores universais: $F = 1/3$ para fios difusivos [26] e $F = 1/4$ para cavidades caóticas simétricas [27, 18], caracterizadas pelo mesmo número de canais de transmissão nos guias de entrada e saída dos elétrons. Esses resultados foram obtidos via formalismos teóricos dos mais diversos e foram constatados experimentalmente. Outro resultado bastante interessante com relação ao ruído de disparo em cavidades caóticas que foi constatado tanto experimentalmente [28] quanto teoricamente [29], diz respeito à dependência do fator de Fano desses sistemas com a razão entre o tempo de permanência (τ_{perm}) dentro da cavidade e o tempo de Ehrenfest (τ_E), que controla a transição gradual entre os comportamentos clássico e quântico dentro da cavidade. Como temos visto durante esta subseção, o ruído de disparo é uma grandeza física com característica puramente quânticas, pois está intimamente relacionado à estatística dos portadores de carga. Foi verificado experimentalmente, ref. [28] que o ruído de disparo desaparece no regime de $\tau_E \gg \tau_{\text{perm}}$. Nesse regime a partícula permanece um tempo muito curto dentro da cavidade e não “sente” os efeitos quânticos devido ao alargamento do pacote de onda dentro da mesma, se comportando como uma partícula clássica. O fator de Fano para cavidades caóticas levando em conta essa razão entre escalas tempo foi calculado teoricamente na ref. [29] e é dado por:

$$F = \frac{1}{4} e^{-\tau_E/\tau_{\text{perm}}}. \quad (1.9)$$

Podemos observar da eq. (1.9) que quando o tempo de permanência do elétron dentro da cavidade é muito longo, $\tau_{\text{perm}} \rightarrow \infty$, o fator de Fano tende ao valor universal $1/4$, que apresentamos anteriormente. Quando temos $\tau_E \gg \tau_{\text{perm}}$ o fator de Fano é nulo, que sinaliza a ausência dos efeitos quânticos nas propriedades de transporte da cavidade. Nesta tese, estaremos sempre interessados no limite oposto, $\tau_E \rightarrow 0$, onde os efeitos quânticos são perceptíveis. Existem várias revisões sobre o ruído de disparo em física mesoscópica, algumas delas podem ser encontradas nas referências [30, 31, 32].

Vimos que o ruído de disparo origina-se da natureza aleatória do processo de transferência de carga. Podemos em princípio medir essa transferência em tempo real e através de tais resultados calcular a média da corrente e o ruído de disparo. Vimos também que o ruído é bem mais informativo sobre as propriedades de espalhamento da nanoestrutura que simplesmente a média da condutância. Das mesmas medidas que utilizamos para calcular o ruído de disparo, poderíamos calcular também a distribuição completa do processo de transferência de carga na nanoestrutura e os momentos de maior ordem nessa distribuição podem ser analisados para obtermos ainda mais informação. Levitov e Lesovik estudaram a função distribuição completa da carga transmitida através de um condutor mesoscópico [33, 34]. Esta função, $P(n, T_0)$ nos dá a probabilidade de que exatamente n elétrons sejam transmitidos através da nanoestrutura durante um tempo de observação T_0 . Como veremos nos próximos capítulos desta tese, é mais vantajoso trabalharmos com uma função característica $\chi(\lambda, T_0)$ ao invés da função distribuição $P(n, T_0)$. Essas funções estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\chi(\lambda, T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, T_0) e^{in\lambda}, \quad P(n, T_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda e^{-in\lambda} \chi(\lambda, T_0). \quad (1.10)$$

Os momentos dessa distribuição podem ser calculados através de derivações com relação ao parâmetro λ da função característica

$$\langle n_k(T_0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^k P(n, T_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{i\partial\lambda} \right)^k \chi(\lambda, T_0). \quad (1.11)$$

A corrente média que atravessa o sistema é dada por $I = e\langle n_1(T_0) \rangle / T_0$, a potência de ruído de disparo é dada por $P = 2e^2 \lim_{T_0 \rightarrow \infty} (\langle n_2(T_0) \rangle - \langle n_1(T_0) \rangle^2) / T_0$.

Recentemente foi medido experimentalmente a estatística de contagem das flutuações de corrente em um ponto quântico semiconductor através de um aparato de contagem de elétrons que “atravessam” a cavidade [35] no regime de bloqueio coulombiano onde a condutância da nanoestrutura é bem menor que o quantum de condutância, $G \ll G_0$. Nesse regime apenas um elétron por vez pode entrar na nanoestrutura, o que garante a eficácia do esquema de contagem proposto na ref. [35]. A detecção da presença ou não do elétron dentro da cavidade é feita através de um ponto de contato, ver figura (1.7). No experimento uma voltagem é aplicada entre a “fonte” e “dreno” de elétrons do ponto de contato e é medida a corrente que passa através do mesmo. Esta corrente depende do número de elétrons N que atravessam a cavidade. Esse aparato experimental permitiu a obtenção da função distribuição de probabilidade de N elétrons que atravessam a cavidade, $P(N, T_0)$ num dado tempo de medição T_0 em função dos acoplamentos com

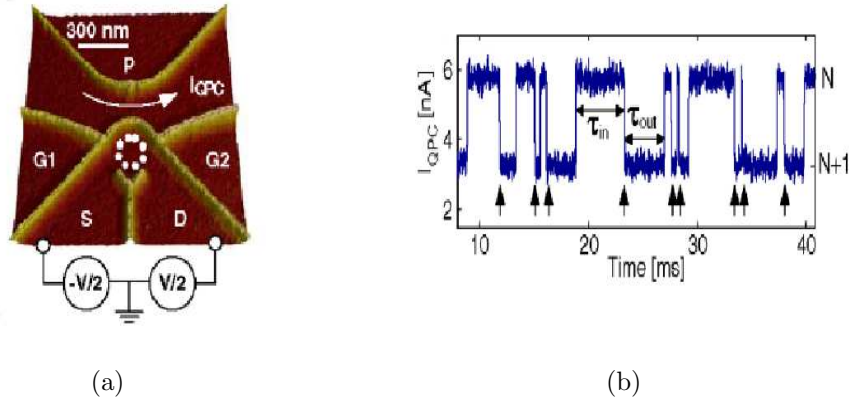


Figura 1.7 Figura (a) produzida por microscopia de força atômica de um ponto quântico acoplado a dois contatos 'S' e 'D' e na proximidade de um ponto de contato e de três portões de voltagem, G1, G2 e P cuja finalidade é controlar o acoplamento entre a cavidade e contatos e a condutância do ponto de contato. As voltagens G1 e G2 também são usadas para controlar o número de elétrons dentro da cavidade. É aplicada uma voltagem V entre a fonte (S) e o dreno (D) do ponto quântico. Na figura (b) apresentamos a corrente que atravessa o ponto de contato em função do tempo, que corresponde a flutuação no número de elétrons dentro da cavidade entre N e $N + 1$. As setas indicam os eventos de entrada de um elétron dentro do sistema. Figura retirada da ref. [35].

a fonte (Γ_S) e dreno (Γ_D) de elétrons da cavidade, ver figura (1.8). As taxas de tunelamento Γ_S e Γ_D são calculadas através da média do tempo de entrada e saída do elétron na nanoestrutura, respectivamente, durante um longo tempo de observação [37], $1/\Gamma_{S(D)} = 1/\Gamma_{in(out)} = \langle \tau_{in(out)} \rangle$. Tais parâmetros podem ser ajustados variando as voltagens G1 e G2. Na figura (1.8) também é apresentada uma comparação entre os resultados experimentais para o ruído de disparo e o terceiro cumulante com resultados teóricos obtidos na referência [36] para o regime de bloqueio coulombiano. O mesmo grupo experimental que desenvolveu esse aparato de medição da estatística de contagem em ponto quânticos conseguiu em 2007 medir até o quinto cumulante [38]. Neste mesmo trabalho também é discutido vários problemas com respeito à detecção de elétrons em um detector realístico, o que gera evidentemente discrepâncias com resultados teóricos que assumem detectores perfeitos.

Encerramos nossa apresentação de fenômenos e sistemas mesoscópicos analisando sistemas híbridos metal normal-supercondutor (NS) que são de grande interesse atual. Nestes sistemas teremos a ação combinada de efeitos de coerência de fase devido às escalas mesoscópicas do lado normal e os efeitos de coerência de fase presente em supercondutores macroscópicos.

1.2.4 Sistemas Híbridos Metal Normal-Supercondutor e Efeitos de Proximidade

Nesta subseção discutiremos como as propriedades de transporte em nanoestruturas são modificadas quando a mesma encontra-se conectada a um reservatório supercondutor.

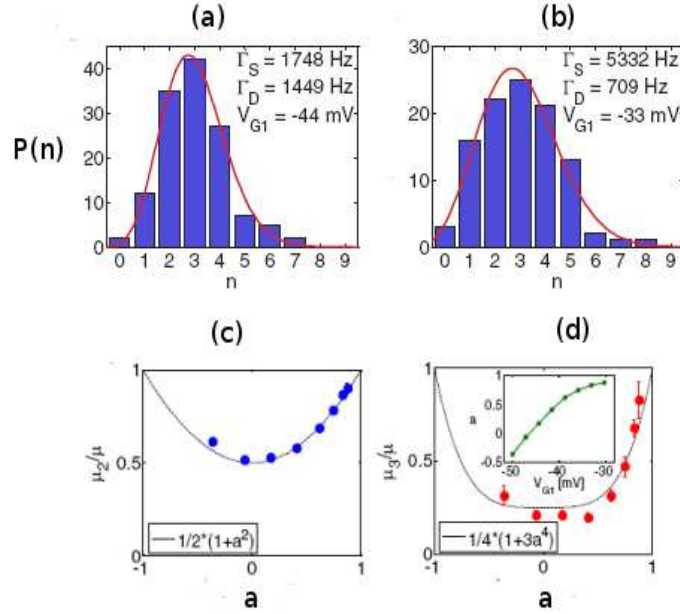


Figura 1.8 Distribuição do número de elétrons (figuras (a) e (b)) que entram na cavidade durante um tempo T_0 . As duas figuras correspondem a dois conjuntos distintos de valores de taxas de tunelamento, obtidos para uma voltagem de $G1$ fixa. O segundo (c) e terceiro (d) cumulantes normalizados da estatística de contagem são apresentados em termos do parâmetro de assimetria $a \equiv (\Gamma_S - \Gamma_D)/(\Gamma_S + \Gamma_D)$. Cada ponto experimental é obtido executando a média sobre 50 valores da grandeza com a voltagem de $G1$ variando no seguinte intervalo $1.5 < V_{G1} < 3\text{mV}$. As linhas sólidas correspondem aos valores teóricos [36]. O inset da figura (d), mostra a dependência de a com a voltagem V_{G1} . Figura retirada da ref. [35].

Um supercondutor possui algumas propriedades bem diferentes do metal normal. Abaixo de uma certa temperatura crítica T_c a resistência eletrônica é nula nesses materiais. Os supercondutores mais comuns são produzidos a partir de alumínio (Al) e nióbio (Nb). Elementos alcalinos, metais nobres e metais magnéticos nunca se tornam supercondutores. Supercondutores também possuem a propriedade de serem diamagnéticos ideais: campos magnéticos fracos não penetram o supercondutor, esse fato é conhecido como o efeito Meissner. Campos magnéticos intensos destroem a supercondutividade. Para mais detalhes sobre as propriedades dos supercondutores, recomendamos o livro-texto do Tinkham [39].

Em 1957 Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS) [40, 41] propuseram um modelo microscópico, que ficou conhecido como teoria BCS, que tem como seu grande sucesso a explicação das propriedades dos supercondutores convencionais em termos de um número mínimo de parâmetros experimentais. Nesta teoria, mostrou-se que uma interação atrativa entre elétrons, mesmo fraca, causa uma instabilidade no estado fundamental de um gás eletrônico levando à formação de pares de elétrons ligados ocupando estados com

momento linear e spins opostos. Esse par de elétrons recebe o nome de par de Cooper. A constatação via uma teoria microscópica desta quase-partícula de carga $2e$, como a portadora de carga no supercondutor confirmou as especulações de teorias fenomenológicas predecessoras. Para formação de um estado ligado entre elétrons é necessário um mecanismo que forneça atração entre os elétrons suficiente para “vencer” a repulsão coulombiana. Em metais essa atração é possível devido a interação elétron-fônon. A atração entre elétrons mediada por fônons tem a forma de um potencial local, $V_{e-ph} = -(2\lambda/\nu)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, onde λ é uma constante de interação elétron-fônon. A atração só é efetiva para frequências menores que a frequência típica dos fônons ω_D . Se essa atração compensa a interação coulombiana, a interação líquida entre os elétrons é atrativa e o metal sofre uma transição para um estado supercondutor a baixas temperaturas. O estado fundamental de elétrons com interação atrativa é um estado ligado com energia $E = -2\Delta$, onde

$$\Delta = \hbar\omega_D e^{-1/\lambda}. \quad (1.12)$$

Esta grandeza desempenha um papel importante na teoria da supercondutividade e é conhecida como potencial de emparelhamento [39].

O espectro de excitações de um supercondutor tem a seguinte forma:

$$\epsilon_p = \sqrt{\Delta^2 + \xi_p^2}, \quad (1.13)$$

onde, ξ_p são as excitações de quase-partículas (elétrons e buracos) em um metal normal. Vemos da equação (1.13) que não há excitações de quase-partículas dentro do supercondutor para energias inferiores a Δ . Em particular, se um metal normal é conectado a um supercondutor, os elétrons do lado normal com energias inferiores ao potencial de emparelhamento do supercondutor não podem penetrar o lado supercondutor. Portanto, para voltagens e temperaturas inferiores a Δ , nenhum fluxo de elétrons pode atravessar o supercondutor. No entanto a condutância através desses sistemas não é nula, isso porquê nas interfaces NS com $E < \Delta$ (mediremos a energia do elétron a partir da energia de Fermi) o mecanismo de transferência de carga se dá por um processo de reflexão pouco usual: um elétron vindo do lado normal em direção ao lado supercondutor é “refletido” ao lado normal como uma excitação tipo buraco. Enquanto esse processo conserva energia, também introduz um mecanismo de conversão de carga, $e \rightarrow -e$, quebrando assim a simetria de conservação de carga no lado normal. Isso implica que um par de Cooper de carga $2e$ é absorvido pelo condensado supercondutor. Este processo é chamado de reflexão de Andreev [42] e é o mecanismo responsável pela transferência de carga do lado normal para o lado supercondutor. Formalmente a reflexão de Andreev consiste na reflexão de uma excitação eletrônica levemente acima do nível de Fermi no metal normal, com componente não nula de momento na direção normal à interface, como uma excitação tipo buraco levemente abaixo do nível de Fermi, ou vice-versa, ver figura (1.9). O buraco refletido tem o momento aproximadamente igual ao do elétron incidente, $\hbar k_h = \hbar k_e - 2E/v_F$. Para $E \ll E_F$ temos, $k_h \approx k_e \approx k_F$. Contudo a velocidade dos buracos ($v_h = \hbar^{-1}(\partial E/\partial k_h)$), tem sinal oposto ao do elétron, já que o buraco afasta-se da interface NS.

O elétron e buraco correlacionados pelo mecanismo de Andreev mantêm coerência de fase na região normal a uma distância de aproximadamente $1\mu\text{m}$ o que causa sensíveis

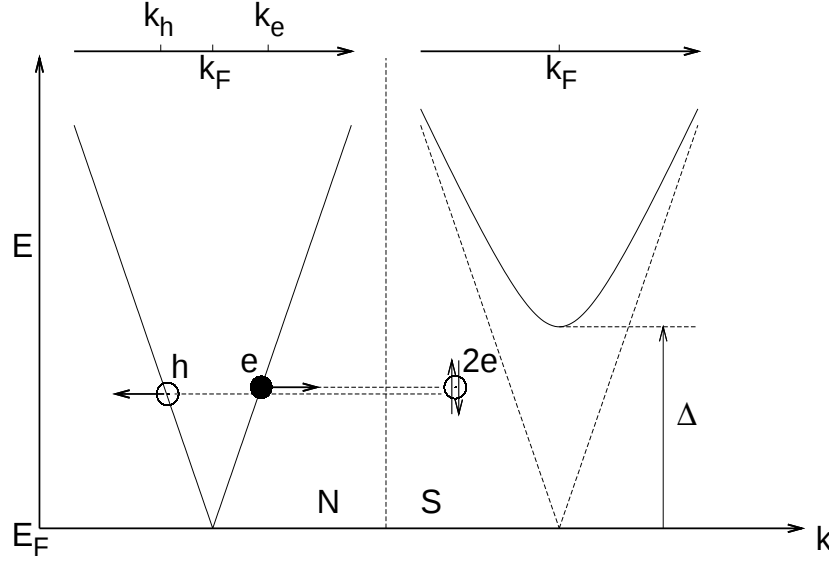


Figura 1.9 Mecanismo de reflexão de Andreev: um elétron (e) vindo da região metal normal (N) com energia inferior ao potencial de emparelhamento (Δ), encontra a interface NS e é refletido como um buraco (h) com aproximadamente mesma energia e momento. Um par de Cooper ($2e$) é absorvido pelo condensado supercondutor.

mudanças nas propriedades de equilíbrio e não equilíbrio do metal normal. Esses efeitos são conhecidos como *efeitos de proximidade*. O efeito de proximidade é caracterizado pela existência de uma amplitude não nula de emparelhamento, definida como a média quântica do produto de operadores de destruição de elétrons no ponto $\mathbf{r}$, $\langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle$, no lado normal (as setas verticais dizem respeito à componente de spin de cada operador). Deve-se distinguir esta amplitude de emparelhamento do potencial de emparelhamento, que é nulo no lado normal devido à ausência de interação atrativa entre elétrons.

Nas propriedades de equilíbrio de um metal normal de comprimento d , o efeito de proximidade supercondutor se manifesta como o surgimento de um “gap” na densidade de estados na região próxima à interface. Isto se deve ao fato de que os elétrons no lado normal estão sempre se movendo e, eventualmente, atingem a interface NS e portanto interagem com o potencial de emparelhamento. Espera-se que essa interação reduza a densidade de estados do lado normal, já que do lado supercondutor não há quase-partículas abaixo do gap. Na figura (1.10) apresentamos resultados teóricos para um fio de comprimento d_N em contato com um condensado supercondutor [43]. O tamanho do gap E_g cai quando o comprimento do fio aumenta. No inset observamos que o formato da densidade de estados depende do tamanho do fio, mas a magnitude do gap não. Observamos ainda do inset da figura (1.10) que espalhamentos que invertem o spin do elétron são responsáveis pela supressão do gap da densidade de estados. Os resultados apresentados na figura (1.10) estão de acordo com os experimentos da referência [44]. O gap na densidade de estado também foi encontrado em ponto quânticos conectados a um

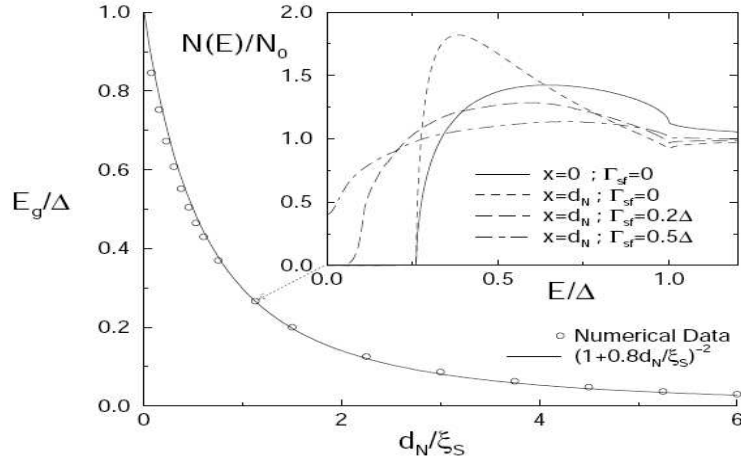
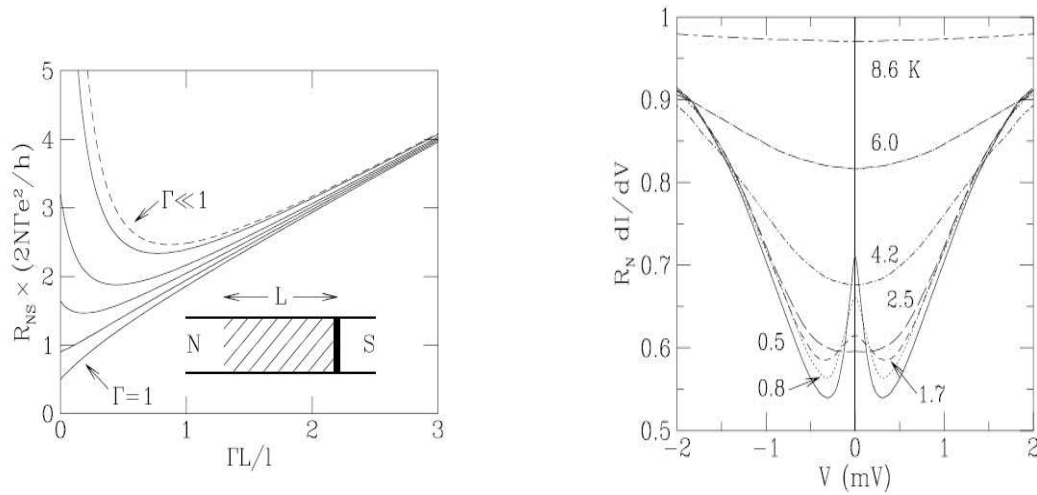


Figura 1.10 Magnitude E_g do gap induzido em metais normais devido à proximidade do condensado supercondutor em função do comprimento da região normal. O inset apresenta a densidade de estados em função da energia em dois pontos do fio: $x = 0$ (interface NS) e $x = d_N$ (extremo do fio). No inset também observamos como o espalhamento devido ao spin-flip destrói o gap quando aumentamos sua intensidade Γ_{sf} . Figura retirada da ref. [46].

supercondutor na presença de um campo magnético [45]. Diferentemente do caso sem campo onde a densidade de estados tende ao inverso do espaçamento médio entre níveis $\rightarrow 1/\delta$ quando $E \rightarrow 0$, quando aplicamos um campo magnético nesse sistema a densidade tende a zero para energia nula.

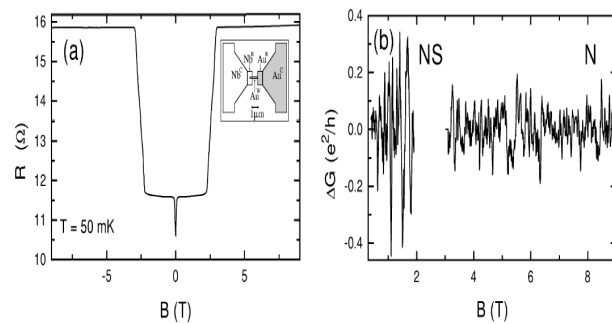
As propriedades de não equilíbrio de um dispositivo mesoscópico também são modificadas pela presença de uma interface com um supercondutor. Considere a resistência de um fio feito de um metal normal de comprimento L . Pela lei de Ohm sua resistência deve crescer monotonicamente com L . Quando conectamos esse fio a um supercondutor através de uma barreira de tunelamento, com coeficiente de transmissão Γ , a resistência do mesmo passa a exibir um mínimo quando $L \simeq l/\Gamma$ [47], onde l é o livre caminho médio elástico do fio, ver figura (1.11(a)). Este mínimo é um exemplo do efeito de proximidade da interface NS e desaparece quando a coerência de fase entre elétron e buraco é quebrada, o que pode ser provocado quando aumentamos a voltagem aplicada ao sistema. Este mínimo da resistência está associado com a transição entre os regimes Γ^{-1} para Γ^{-2} para a dependência da resistência com a transparência da barreira. A dependência tipo Γ^{-2} é esperada para o tunelamento num supercondutor, que é um processo de duas partículas. Já a dependência tipo Γ^{-1} é surpreendente. É como se o buraco refletido pelo processo de Andreev atravessasse a barreira sem sofrer reflexão. Este fenômeno recebeu o nome de *tunelamento sem reflexão*.

Uma outra assinatura do efeito de proximidade pode ser vista nas curvas características $I - V$ em junções de Nb-InGaAs, caracterizados por um coeficiente de transmissão $\Gamma \ll 1$, figura (1.11(b)). Um pico largo é observado no regime de baixas tempe-



(a) Figura retirada da ref. [48].

(b) Figura retirada da ref. [49].



(c) Figura retirada da ref. [50].

Figura 1.11 A figura (a) mostra o comportamento de resistência de um fio conectado a um supercondutor quando variamos o comprimento do mesmo, para diversos valores de Γ . A figura (b) apresenta o comportamento da condutância diferencial de um junção de Nb-InGaAs quando variamos a voltagem aplicada ao sistema para várias temperaturas. O pico em voltagem nula é uma assinatura da coerência de fase entre elétrons e buracos. Na figura (c) temos um fio de ouro de $1\mu\text{m}$ em contato com nióbio na fase supercondutora. Na figura à esquerda temos o comportamento da magneto-resistência quando variamos o campo magnético à temperatura de 50mK. A geometria do sistema é apresentada no inset. À direita temos as flutuações universais da condutância da amostra no caso NS ($0.4 < B < 1.9\text{T}$) e no caso normal ($3.1 < B < 9\text{T}$).

raturas e a campo magnético nulo nesse sistema a voltagem nula [49]. Isso ocorre pois em sistemas NS quando aplicamos uma voltagem à nanoestrutura destruimos a coerência elétron-buraco. O resultado é um pico na curva $\partial I/\partial V - V$ próximo de $V = 0$, que desaparece quando aumentamos a temperatura ou aplicamos um campo magnético. À medida que a transparência desta barreira vai aumentando, o pico em $V = 0$ se transforma em um pequeno declive, correspondendo a correção de localização fraca nesse sistema. É bom lembrar que em sistemas normais não seria possível observar correção de localização fraca em curvas $I - V$, pois a aplicação de uma voltagem não é capaz de quebrar a simetria de reversão temporal.

Observa-se também as flutuações universais da condutância em sistemas híbridos. No estado normal a condutância flutua de amostra para amostra com uma variância que independe do tamanho bem como do grau de desordem da mesma. Em sistemas NS também são observadas tais flutuações. Na figura (1.11(c)) apresentamos dois gráficos obtidos por Hecker et al. [50] para uma amostra NS que consiste em um fio de ouro de $1\mu\text{m}$ de comprimento em contato com um filme de Nióbio na sua fase supercondutora. A figura (1.11(c)) contrasta as amplitudes de oscilação da condutância em função do campo magnético aplicado para duas situações: quando o campo magnético aplicado é inferior ao campo crítico do Nióbio (valor onde o Nióbio deixa de ser supercondutor), mostrando que as amplitudes de oscilação neste regime são bem mais acentuadas que no caso normal, quando o campo magnético aplicado é maior que o campo crítico.

Existem várias revisões sobre sistemas híbridos NS e efeitos de proximidade. Para uma revisão com enfoque mais teórico recomendamos as referências [18, 46, 48]. Uma boa revisão mais voltada ao caráter experimental desses sistemas pode ser encontrada na referência [51]. Na próxima seção encerraremos este capítulo, apresentando, capítulo por capítulo, os principais objetivos desta tese.

1.3 NESTA TESE

Apresentamos agora os principais objetivos desta tese. De modo geral estaremos interessados nas propriedades de transporte de pontos quânticos, isolados ou conectados em série na presença de contatos não ideais. Analisaremos também esses sistemas na presença de uma interface NS. Os objetivos de cada capítulo são descritos abaixo.

1.3.1 Capítulo 2

Neste capítulo iniciaremos o tratamento matemático dos sistemas e fenômenos mesoscópicos apresentados nesta introdução. Trataremos de duas classes de formalismos teóricos: os puramente quânticos e os formalismos semiclássicos. Para a primeira classe apresentaremos o formalismo de matrizes de espalhamento, aplicado a uma interface híbrida NS e o formalismo de matrizes aleatórias aliado à técnica supersimétrica que permite a execução das médias em ensembles dessas matrizes. Posteriormente, trataremos do método das funções de Green quase-clássicas como um exemplo de métodos semiclássicos, válidos apenas para o regime $G \gg G_0$. Apresentaremos de forma sucinta o caminho que leva desse formalismo à teoria de elemento finito, que permite separar os sistemas me-

soscópicos em vários elementos discretos similar a uma teoria de circuitos convencional. Finalizamos este capítulo com uma breve introdução à fórmula de Levitov-Lesovik, que descreve a estatística de contagem de carga em uma nanoestrutura arbitrária e sua conexão com a teoria de circuitos mesoscópica, que tem como grande mérito fornecer uma maneira sistemática e eficiente de obter os cumulantes da estatística de contagem.

1.3.2 Capítulo 3

No capítulo 3 apresentamos uma formulação da estatística de contagem de carga através de uma sistema mesoscópico, utilizando o formalismo de matrizes aleatórias e técnicas de supersimetria. Através de um poderoso mapa que pode ser estabelecido entre a função geratriz da estatística de contagem e o modelo σ não linear supersimétrico, mostramos que a teoria quântica de circuitos de um ponto quântico conectado a barreiras não ideais pode ser obtida do ponto de sela de tal modelo σ . Analisamos também o caso de uma sequência de pontos quânticos conectados em séries. Generalizamos o formalismo para outras classes de universalidade de matrizes aleatórias. Uma conexão é estabelecida entre os resultados deste formalismo e a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias. Finalizamos este capítulo com uma comparação do nosso formalismo baseado em modelo σ não linear e o formalismo de funções de Green quase-clássicas desenvolvido no capítulo 2. Os resultados deste capítulo foram obtidos em colaboração com A. F. Macedo-Junior e encontram-se publicados na ref. [52].

1.3.3 Capítulo 4

Neste capítulo aplicamos a teoria quântica de circuitos obtida no capítulo anterior para estudar um sistema híbrido metal normal-supercondutor no regime de baixas voltagens aplicadas, baixas temperaturas e a campo magnético nulo. Neste regime é possível obter a estatística de contagem de um sistema NS através da teoria de circuitos desenvolvida para sistemas normais. Calculamos a densidade de autovalores de reflexão de Andreev, que em sistemas NS faz o papel dos autovalores de transmissão, e os três primeiros cumulantes da estatística de contagem de um ponto quântico conectado a um reservatório normal e um outro supercondutor por barreiras de transparências arbitrária. Observamos um interessante sinal de uma transição quântica relacionada ao surgimento de modos do tipo Fabry-Pérot dentro da cavidade, estudada na ref. [53], quando variamos as transparências das barreiras. Estas assinaturas são mais uma manifestação do efeito de proximidade supercondutora. Os resultados foram comparados com simulações numéricas de ensembles de matrizes- S e encontram-se em perfeita concordância. Estes resultados foram publicados na ref. [54].

1.3.4 Capítulo 5

Estudamos neste capítulo as correções quânticas à teoria de circuitos para uma cadeia de pontos quânticos conectados em série, utilizando o método desenvolvido por Campagnano e Nazarov [55], que permite obter tais correções utilizando a ação semi-clássica que descreve a estatística de contagem de carga em um sistema mesoscópico combinada com

um engenhoso esquema de duplicação da dimensão das funções de Green que descrevem os pontos quânticos. É introduzida uma matriz cuja a finalidade é “misturar” os dois blocos da função de Green duplicada e os modos cooperon e difuson, responsáveis pelas correções quânticas, são obtidos do coeficiente do termo de segunda ordem na expansão desta matriz de mistura. Estudamos as correções de localização fraca dos três primeiros cumulantes da estatística de contagem desta cadeia, onde fomos capazes de observar um curioso comportamento anômalo de tais correções quando variamos o número de cavidades que compõem o circuito. Estudamos também a variância da condutância que também pode ser obtida seguindo o esquema proposto em [55]. Estendemos também o formalismo para incluir uma interface NS no regime de baixas voltagens e temperaturas a campo magnético nulo. Muitos dos resultados obtidos neste capítulo foram comparados via simulação numérica desenvolvida por F. A. G. Almeida e outros métodos analíticos desenvolvidos por S. Rodríguez-Pérez.

1.3.5 Capítulo 6

Este capítulo é reservado para um exemplo onde ainda não temos uma teoria de circuitos disponível para obter a estatística de contagem: uma cavidade caótica na presença de uma interface NS com um campo magnético aplicado capaz de quebrar a simetria de reversão temporal. Sem esta simetria o esquema de renormalização utilizado no capítulo 4, que permite obter os observáveis do caso NS da teoria de circuitos do caso normal, não é mais válido e portanto devemos aplicar um outro formalismo. O formalismo escolhido neste capítulo foi a técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário desenvolvido por Brouwer e Beenakker [56]. Esta técnica aliada a uma conveniente parametrização da matriz espalhamento do sistema nos permitiu calcular a média da condutância e a potência de ruído de disparo deste sistema, como também nos possibilitou calcular a contribuição de localização fraca para condutância. Uma rica fenomenologia foi encontrada quando variamos as transparências das barreiras neste sistema. Comparamos os resultados deste regime e os obtidos no capítulo 4. Estabelecemos também uma comparação do ponto de vista de eficiência entre a técnica diagramática e a teoria de circuitos. Os resultados deste capítulo foram obtidos em colaboração com S. Rodríguez-Pérez e esperamos submeter um artigo para um periódico internacional brevemente.

1.3.6 Capítulo 7

No capítulo 7 fazemos uma recapitulação dos principais resultados obtidos nesta tese. Apresentamos também algumas perspectivas de extensão destes resultados para a inclusão de ingredientes relevantes à física mesoscópica atual que ficaram de fora desta tese.

CAPÍTULO 2

FORMALISMO DE MATRIZ- S , MATRIZES ALEATÓRIAS, TEORIA DE CIRCUITOS E ESTATÍSTICA DE CONTAGEM

2.1 FORMALISMO DE MATRIZ- S E TEORIA DE LANDAUER-BÜTTIKER

Vamos nesta seção discutir os principais pontos do estudo de transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos através do formalismo de matriz- S . Nesta abordagem a condução eletrônica em sistemas mesoscópicos é tratada como um problema de espalhamento [57], no qual a condutância do sistema é expressa em termos da probabilidade de transmissão dos elétrons através da amostra. No formalismo de espalhamento um sistema mesoscópico é descrito por uma matriz S que relaciona as amplitudes das funções de ondas espalhadas com as incidentes e desempenha um papel fundamental na teoria de transporte de Landauer-Büttiker [4, 5].

O formalismo de Landauer-Büttiker relaciona as propriedades de transporte do sistema às propriedades do problema de espalhamento subjacente. Para uma descrição histórica de todos os passos que culminaram nesse formalismo, bem como uma dedução da fórmula de Landauer através da teoria da resposta linear, recomendamos a ref. [58]. O formalismo de Landauer-Büttiker aplica-se a uma enormidade de efeitos observados em sistemas mesoscópicos tais como, efeito Hall quântico, fenômenos de localização, transporte no regime de localização forte, tunelamento por barreira dupla etc. O grande mérito de tal formalismo é o de nos capacitar a estudar um tópico tão complexo como é o transporte quântico em condutores desordenados e caóticos utilizando apenas mecânica quântica em primeira quantização.

Abaixo discutiremos alguns aspectos importantes da teoria de matriz- S e o formalismo de Landauer-Büttiker aplicado a sistemas híbridos metal normal-supercondutor (NS) que é de fundamental importância para o desenvolvimento de capítulos posteriores desta tese.

2.1.1 Teoria de Espalhamento em sistemas NS

Apresentamos agora uma pequena revisão sobre a teoria de espalhamento para sistemas mesoscópicos NS, desenvolvido por Beenakker [48, 59]. A necessidade de uma teoria específica para sistemas NS surge como consequência da existência de coerência de fase entre partículas e buracos acoplados pela reflexão de Andreev numa interface NS. Esta coerência introduz efeitos de proximidade no transporte de quase-partículas nestes sistemas. A teoria de espalhamento nos fornece uma maneira simples de implementar as simetrias de conservação do fluxo e simetria partícula-buraco no formalismo de transporte pois baseia-se em conceitos básicos da física quântica tais como a função de onda em primeira quantização e suas condições de contorno nas interfaces.



Figura 2.1 Sistema NS composto por guias de ondas **I** e **II** perfeitos. O guia **I** conecta um reservatório de quase-partículas, com potencial químico μ , à esquerda do guia, à região metálica desordenada D. O guia **II** conecta a região D ao condensado supercondutor S que também tem a função de reservatório de quase-partículas.

A geometria do nosso sistema está descrita na figura (2.1) e consiste em uma região desordenada (sistema mesoscópico) adjacente a um supercondutor (região à direita da figura (2.1)) e ligado a um reservatório de quase-partículas de potencial químico μ (região à esquerda da figura), admitimos também uma separação espacial entre as interfaces reservatório-dispositivo e dispositivo-supercondutor via guias metálicos perfeitos. Nesta configuração temos o espalhamento devido às impurezas da região desordenada separada espacialmente do espalhamento de Andreev.

Os estados de espalhamento com energia E são autofunções das equações de Bogoliubov-de Gennes (ver referência [60] para uma dedução dessas equações):

$$\begin{pmatrix} H_e & \Delta(\vec{r}) \\ \Delta^*(\vec{r}) & H_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde definimos $H_e \equiv p^2/2m + U(\vec{r})$ e $H_h \equiv -H_e^*$ como os hamiltonianos de partículas e buracos de Bogoliubov, respectivamente. Utilizaremos uma função degrau para modelar o potencial de emparelhamento

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\phi} \Theta(\vec{r}). \quad (2.2)$$

Esse modelo é conhecido na literatura como *condição de contorno rígida* e as condições para sua validade podem ser encontradas na referência [61]. Tal condição garante que as não-uniformidades do potencial de emparelhamento não afetem a dinâmica das quase-partículas. Essa condição é cumprida em nossa abordagem se considerarmos a resistividade do sistema mesoscópico bem maior que a resistividade do supercondutor macroscópico.

Nos guias ideais a equação de BdG se reduz às equações de Schrödinger separadas para elétrons e buracos

$$\begin{pmatrix} H_e & 0 \\ 0 & H_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_e(\vec{r}) \\ \varphi_h(\vec{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi_e(\vec{r}) \\ \varphi_h(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Nos guias há um forte confinamento nas direções transversais (y, z) , o que resulta em níveis discretos de energia que são caracterizados por um número inteiro n . Os n -ésimos modos de propagação de elétrons e buracos com energia E são representados pela seguinte função de onda

$$\varphi_{n,e(h)}^{\pm}(\vec{r}) = \chi_n(y, z) \frac{e^{\pm i k_n^{e(h)} x}}{\sqrt{k_n^{e(h)}}}, \quad (2.4)$$

onde os sinais $\pm$ indicam qual a direção de propagação da quase-partícula e $k_n^{e(h)} \equiv \sqrt{2m/\hbar^2(\mu - \epsilon_n + (-)E)}$ é a componente do momento na direção de propagação. A função $\chi_n(y, z)$ é a função de onda transversal no n -ésimo modo com energia ϵ_n .

As funções de onda de elétrons e buracos podem ser escritas de forma compacta através da seguinte definição:

$$\Phi_{e(h)}^{I,II}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,e(h)}^{I,II}(\vec{r}) & \dots & \varphi_{N,e(h)}^{I,II}(\vec{r}) \end{pmatrix}^T. \quad (2.5)$$

Por simplicidade assumiremos que cada guia suporta o mesmo número de modos transversais N . Podemos escrever cada elemento de $\Phi_{e(h)}^{I,II}(\vec{r})$ na base $\{\varphi_{n,e(h)}^{\pm}(\vec{r})\}$ através da seguinte relação:

$$\begin{cases} \varphi_{n,e}^i(\vec{r}) &= a_{n,i}^+ \varphi_{n,e}^+(\vec{r}) + a_{n,i}^- \varphi_{n,e}^-(\vec{r}); \\ \varphi_{n,h}^i(\vec{r}) &= b_{n,i}^- \varphi_{n,h}^+(\vec{r}) + b_{n,i}^+ \varphi_{n,h}^-(\vec{r}), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde o índice i define os guias I e II . Daqui por diante podemos tratar o problema de espalhamento em termos dos coeficientes $a_{n,i}^{\alpha}$ e $b_{n,i}^{\alpha}$, utilizando as matrizes de espalhamento $2N \times 2N$ que relacionam as amplitudes de fluxo que entram na região desordenada com as que saem da mesma:

$$S_e \begin{pmatrix} a_I^+ \\ a_{II}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_I^- \\ a_{II}^+ \end{pmatrix}; \quad S_e = \begin{pmatrix} r_e & t_e' \\ t_e & r_e' \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

onde r_e (r_e') conecta as amplitudes de fluxo refletidas com as incidentes no guia I (II) e t_e (t_e') conecta as amplitudes de fluxo transmitidas para o guia II (I) com as amplitudes incidentes no guia I (II). Uma equação similar pode ser escrita para os buracos, S_h . Devido à conservação do fluxo de carga, as matrizes S_{σ} são unitárias, $(S_{\sigma}^{\dagger} S_{\sigma}) = 1_N$ ($\sigma = e$ ou h). Essas matrizes também satisfazem à seguinte relação de simetria $S_{\sigma}(B) = S_{\sigma}^T(-B)$, onde B é o campo magnético aplicado ao sistema. Tomando o complexo conjugado da segunda relação da eq. (2.6) e da definição da matriz S_h e posteriormente fazendo as seguintes substituições $E \rightarrow -E$ e $\varphi_h^* \rightarrow \varphi_e$, obtemos as seguintes relações entre os coeficientes $a_{n,i}^{\alpha}$ e $b_{n,i}^{\alpha}$:

$$\begin{cases} a_{n,I}^+ = (b_{n,I}^+)^* & a_{n,I}^- = (b_{n,I}^-)^*; \\ a_{n,II}^+ = (b_{n,II}^+)^* & a_{n,II}^- = (b_{n,II}^-)^*, \end{cases} \quad (2.8)$$

e a seguinte entre as matrizes de espalhamento:

$$S_h(E) = S_e^*(-E). \quad (2.9)$$

Vamos considerar que a energia E do elétron incidente na interface NS medida em relação ao nível de Fermi E_F encontra-se no intervalo $0 < E < \Delta_0$, de modo que não há transmissão de corrente dissipativa no lado supercondutor e o único processo de transferência de carga ocorre pelo mecanismo de reflexão de Andreev. A matriz de reflexão de Andreev é dada por:

$$S_A \begin{pmatrix} a_{II}^+ \\ b_{II}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{II}^- \\ b_{II}^- \end{pmatrix}; S_A = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Como estaremos lidando com apenas uma interface NS podemos tomar a fase do potencial de emparelhamento igual a zero sem perda de generalidade. Dessa forma a matriz S_A fica constante com coeficientes fora da diagonal principal igual a $r_{eh}^A \equiv i$. É conveniente definir o vetor $2N$ -dimensional que contém os coeficientes de transmissão de elétrons e buracos num determinado guia, $c_i^\pm \equiv (a_i^\pm, b_i^\pm)^T$. Em termos deste vetor podemos escrever a matriz da região I que governa a reflexão de quase-partículas, seja pelo mecanismo de Andreev, seja devido à impurezas em todo o dispositivo:

$$Sc_I^+ = c_I^-; S = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

A matriz que descreve espalhamento devido às impurezas é dada por

$$S_D \begin{pmatrix} c_I^+ \\ c_{II}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I^- \\ c_{II}^+ \end{pmatrix}; S_D = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

onde cada submatriz de S_D é diagonal, já que esse tipo de espalhamento não converte partícula em buraco:

$$r = \begin{pmatrix} r_e & 0 \\ 0 & r_h \end{pmatrix}; t' = \begin{pmatrix} t'_e & 0 \\ 0 & t'_h \end{pmatrix}; t = \begin{pmatrix} t_e & 0 \\ 0 & t_h \end{pmatrix}; r' = \begin{pmatrix} r'_e & 0 \\ 0 & r'_h \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

A relação entre a matriz S e as matrizes S_A e S_D é obtida através de simples manipulações algébricas e é dada por

$$S = r + t'S_A(1 - r'S_A)^{-1}t. \quad (2.14)$$

Da equação (2.14) obtemos a submatriz de espalhamento de interesse para junções NS, que relaciona as amplitudes de reflexão de buracos no guia I com as amplitudes dos elétrons emitidos nesse guia, r_{he} , em termos das submatrizes da matriz S_D . Para fazermos conexão entre r_{he} e os observáveis de transporte, devemos utilizar a teoria de Landauer-Büttiker para sistemas NS. Uma boa revisão sobre esse assunto pode ser encontrada na referência [48]. Uma generalização para estruturas multi-terminais e com mais de um tipo de material supercondutor pode ser encontrado na ref. [62].

No regime de resposta linear, a condutância G_{NS} de uma junção NS à temperatura nula é dada pela matriz- S relativa ao nível de Fermi, $E \rightarrow 0$. Em termos de r_{he} a condutância NS é dada por [62]:

$$G_{NS} = 2G_0 \text{Tr} r_{he} r_{he}^\dagger. \quad (2.15)$$

A matriz de reflexão de Andreev r_{he} em termos das submatrizes de S_D é dada por:

$$r_{he} = i(t')^* [1 + r'(r')^*]^{-1} t. \quad (2.16)$$

Na presença de reversão temporal, ou seja a campo magnético nulo, temos $r' = (r')^T$ e $t' = (t')^T$, portanto a equação (2.16) fica,

$$r_{he} = i(t')^\dagger [1 + r'(r')^\dagger]^{-1} t. \quad (2.17)$$

Substituindo a eq. (2.17) em (2.15) e utilizando a simetria de conservação de fluxo, $t^\dagger t + (r')^\dagger r' = 1$, obtemos

$$G_{NS} = 2G_0 \text{Tr} \left\{ \left(\frac{tt^\dagger}{2 - tt^\dagger} \right)^2 \right\}. \quad (2.18)$$

Em termos dos autovalores τ_n de transmissão do produto $tt^\dagger$, obtemos a fórmula de Beenakker [48]

$$G_{NS} = 2G_0 \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n^2)^2}. \quad (2.19)$$

A expressão (2.19) nada mais é que o análogo da fórmula de Landauer, $G = G_0 \sum_n \tau_n$, para uma estrutura híbrida NS a campo magnético nulo.

A expressão para a potência do ruído de disparo no regime de resposta linear para essa estrutura híbrida também pode ser obtida em termos do produto $r_{he} r_{he}^\dagger$ [63]

$$P_{NS} = 4P_0 \text{Tr} [r_{he} r_{he}^\dagger (1 - r_{he} r_{he}^\dagger)], \quad (2.20)$$

onde, $P_0 = 2eVG_0$. Reescrevendo a eq. (2.20) em função dos autovalores de transmissão temos

$$P_{NS} = 16P_0 \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^2 (1 - \tau_n)}{(2 - \tau_n^2)^4}. \quad (2.21)$$

De forma geral podemos obter a estatística de contagem de carga nesses sistemas através do produto de matrizes de reflexão de Andreev $r_{he} r_{he}^\dagger$, que no regime de campo magnético nulo pode ser relacionado aos autovalores de transmissão, τ_n .

No regime semiclássico $G \gg G_0$, caracterizado por um número grande de canais de transmissão ($N \gg 1$) manusear essas matrizes se torna impraticável, ainda mais quando estamos interessados em tratar com sistemas que apresentam desordem (fios difusivos) ou dinâmica caótica (pontos quânticos). Na sequência deste capítulo apresentaremos alguns

formalismos que permitem contornar esse problema de lidar com matrizes enormes no regime semiclássico.

2.2 TEORIA DE MATRIZES ALEATÓRIAS

A teoria de matrizes aleatórias (TMA) [64] foi desenvolvida por Wigner em 1957 com o objetivo inicial de estudar as propriedades estatísticas dos níveis de energia de núcleos pesados bombardeados por nêutrons lentos. Devido ao grande número de graus de liberdade e à complexidade do processo de espalhamento, torna-se inviável construir o hamiltoniano do sistema a partir de primeiros princípios. Uma alternativa proposta por Wigner foi de modelar o hamiltoniano do núcleo como uma matriz aleatória pertencente a um determinado ensemble caracterizado por certas propriedades de simetria. A TMA nos fornece propriedades universais do sistema, independentes das especificidades do mesmo, como por exemplo a distribuição de espaçamentos entre níveis adjacentes, conhecida como a lei do semicírculo de Wigner, que foi comprovada experimentalmente. Outro grande resultado da TMA foi a demonstração que esta lei universal resulta da perda de relevância estatística de grande parte das informações microscópicas com exceção de certas simetrias básicas, como invariância à reversão temporal e a invariância de rotação de spin. O comportamento universal da TMA depende da validade de uma hipótese ergódica, de acordo com a qual médias sobre certos intervalos contendo um número estatisticamente significativo de níveis é equivalente a uma média sobre ensembles.

A utilização da TMA não se restringe apenas à física nuclear, ela também pode ser utilizada para estudar propriedades estatísticas de sistemas da matéria condensada [65]. A TMA tem se mostrado uma poderosa ferramenta para estudar caos quântico e propriedades de transporte, e.g. flutuações universais da condutância em sistemas mesoscópicos. Nesta seção discutiremos os principais aspectos da TMA aplicado ao estudo de sistemas mesoscópicos. Começamos apresentando os ensembles gaussianos que são utilizados para descrever o hamiltoniano de sistemas fechados. Apresentamos também como a supersimetria pode nos ajudar a executar médias sobre esses ensembles. Finalizamos esta seção apresentando as matrizes de espalhamento aleatórias que pertencem a outro ensemble de matrizes aleatórias conhecido como núcleo de Poisson.

2.2.1 Ensembles gaussianos

Considere um conjunto de matrizes hermitianas $N \times N$, H , com densidade de probabilidade

$$P(H) = C \exp[-\beta \text{Tr} V(H)], \quad (2.22)$$

onde C é uma constante de normalização e β é um parâmetro de simetria que indica o número de graus de liberdade dos elementos de H , e é utilizado para especificar os ensembles. O índice de Dyson, como também é chamado, pode assumir os valores $\beta = 1$ para elementos reais, $\beta = 2$ para complexos e $\beta = 4$ para quatérnions reais, que são matrizes 2×2 formadas por combinações da matriz identidade e das matrizes de Pauli, um quatérnion é dito real se todos os coeficientes que multiplicam a matriz identidade

e as de Pauli são reais. Os ensembles de matrizes aleatórias com distribuição (2.22) são invariantes pelo automorfismo

$$H \rightarrow H' = UHU^{-1}, \quad (2.23)$$

onde U é uma matriz ortogonal ($\beta = 1$), unitária ($\beta = 2$) ou simplética ($\beta = 4$), i.e. a probabilidade de encontrarmos um membro do ensemble no intervalo H e $H + dH$ é invariante sob essa transformação, $P(H)dH = P(H')dH'$, sendo dH a medida de integração no espaço das matrizes aleatórias construída através das diferenciais de todos os elementos independentes de H .

Quando $V(H) \propto \text{Tr}H^2$ estamos lidando com ensembles gaussianos. Uma propriedade interessante desses ensembles é que os elementos são independentemente distribuídos, pois $\text{Tr}H^2 = \text{Tr}HH^\dagger = \sum_{ij} H_{ij}^2$, fato que simplifica muitos cálculos. Existem três ensembles gaussianos, também conhecidos como ensembles de Wigner-Dyson: para $\beta = 1$ temos o ensemble gaussiano ortogonal (EGO), $\beta = 2$ temos o ensemble gaussiano unitário (EGU) e finalmente para $\beta = 4$ o ensemble gaussiano simplético (EGS). Fisicamente esses ensembles aplicam-se a sistemas fechados com a presença ou ausência das simetrias de reversão temporal e reversão de spin. A tabela (2.1) resume as principais características dos três ensembles.

Ensemble	β	SRT	SRS	$(H)_{ij}$	U
EGO	1	sim	sim	real	ortogonal
EGU	2	não	irrelevante	complexo	unitária
EGS	4	sim	não	quatérnion real	simplética

Tabela 2.1 Os três ensembles de Wigner-Dyson: as matrizes H e U são classificadas pelo índice β dependendo da presença ou ausência das simetrias de reversão temporal (SRT) e de rotação de spin (SRS).

Um experimento interessante com esses ensembles poderia ser realizado aplicando um campo magnético capaz de quebrar a simetria de reversão temporal no sistema. Teríamos então, uma transição gradual entre o ensemble ortogonal e o unitário induzido pelo campo magnético. Outra transição entre ensembles pode ser observada se doparmos um sistema mesoscópico com ouro aumentando assim o acoplamento spin-órbita que leva à quebra da simetria de rotação de spin. Nesse caso teríamos a transição do EGO para o EGS.

Os ensembles de matrizes aleatórias podem ser deduzidos via teoria da informação, associando-se uma entropia de Shannon à densidade de probabilidade

$$\mathcal{S}[P(H)] = - \int dH P(H) \ln P(H). \quad (2.24)$$

Os ensembles gaussianos são obtidos pela maximização da entropia, sujeita aos vínculos de normalização e da existência de um segundo momento para H [66], $\langle H_{\mu\nu} H_{\mu'\nu'} \rangle = \lambda^2 / N \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}$ ($\langle H_{\mu\nu} \rangle = 0$), onde λ como veremos mais a frente está relacionada com o espaçamento médio entre níveis e o símbolo $\langle \dots \rangle$ representa a média em ensemble de matrizes hamiltonianas que obedecem uma distribuição gaussiana.

A média em ensemble de qualquer função da matriz aleatória H , $f(H)$, pode ser representada como

$$\langle f(H) \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int dH f(H) \exp \left\{ -\frac{\beta N}{4\lambda^2} \text{Tr} H^2 \right\}, \quad (2.25)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização. Nesta tese estaremos interessados em executar média em ensembles de matrizes aleatórias de uma classe restrita de funções $f(H)$ que dependem apenas dos autovalores de H , ou seja dos níveis de energia $E_1, E_2, \dots, E_N$ da cavidade. Isto acontecerá se a função $f(H)$ satisfizer a seguinte propriedade $f(H) = f(UH_DU^{-1})$, onde $H_D = \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N)$ e a matriz unitária U contém os autovetores. Como $\text{Tr} V(H) \propto \sum_i E_i^2$ depende apenas dos autovalores, a distribuição (2.22) não depende dos autovetores, o que significa que U é uniformemente distribuída no grupo ortogonal para $\beta = 1$, unitário $\beta = 2$ e simplético $\beta = 4$. Em termos dos autovalores de H a média (2.25) fica

$$\begin{aligned} \langle f(H) \rangle &= \frac{V_N}{\mathcal{N}} \int \prod_{i=1}^N dE_i J(E_1, E_2, \dots, E_N) f(E_1, E_2, \dots, E_N) \exp \left\{ -\frac{\beta N}{4\lambda^2} \sum_i E_i^2 \right\} \\ &= \int \prod_{i=1}^N dE_i f(E_1, E_2, \dots, E_N) P_\beta(\{E_i\}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $J(E_1, E_2, \dots, E_N)$ é o jacobiano da mudança de variáveis

$$J(E_1, E_2, \dots, E_N) = \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\beta, \quad (2.27)$$

e $V_N \equiv \int d\Omega_N(U)$ é a integral da medida de Haar $d\Omega_N(U)$ dos grupos ortogonal, $O(N)$, unitário, $U(N)$, ou simplético, $Sp(2N)$ e especifica o volume do espaço das matrizes U . A densidade de probabilidade, $P_\beta(\{E_i\})$ da expressão (2.26) tem uma interessante interpretação física como um gás de Coulomb bidimensional. Para observarmos claramente esta analogia, reescrevemos $P_\beta(\{E_i\})$ na forma da distribuição de Gibbs da mecânica estatística clássica

$$P_\beta(\{E_i\}) = \frac{V_N}{\mathcal{N}} e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = \frac{N}{4\lambda^2} \sum_i E_i^2 - \sum_{i < j} \ln |E_i - E_j|. \quad (2.28)$$

Considere E_i/λ a posição de uma partícula. Então a densidade de probabilidade $P_\beta(\{E_i\})$ pode ser interpretada como a função de partição com temperatura efetiva β^{-1} , de um sistema cujo primeiro termo do hamiltoniano $\mathcal{H}$ é a soma sobre o quadrado de todas as posições e portanto representa um potencial de confinamento do tipo $U \propto x^2$. O segundo termo representa a soma sobre todos os pares e portanto representa a interação entre as cargas. Esta interação é repulsiva e depende logarithmicamente da distância entre as cargas, como a interação coulombiana em duas dimensões. Portanto, o comportamento dos autovalores de um matriz aleatória é equivalente ao comportamento de N partículas

carregadas confinadas num potencial parabólico. A repulsão entre as partículas significa que os autovalores da matriz aleatória tendem a repelir uns aos outros. Para “temperaturas” mais altas (β menores) é mais fácil para as “partículas” vencerem a repulsão entre níveis e ficarem mais próximas. Um detalhe interessante da equação (2.28) é que a correlação entre os autovalores E_i é introduzida pela geometria, ou seja, essas correlações originam-se do jacobiano de mudança de variáveis e não do potencial $V(H)$, onde os detalhes microscópicos do sistema são encontrados. Para mais informações sobre este fato, recomendamos a referência [18].

Vamos agora estudar a densidade de autovalores E_i , definida como $\nu(E) = \sum_n \delta(E_n - E)$, cujos momentos nos fornecem informação sobre as propriedades estatísticas de tais autovalores. Mais especificamente estaremos interessados na densidade média de autovalores, que é dada pela célebre lei do semicírculo de Wigner para o regime $N \gg 1$

$$\nu(E) = \frac{N}{\pi\lambda} \sqrt{1 - \frac{E^2}{4\lambda^2}}. \quad (2.29)$$

O parâmetro λ controla a escala de energia e o espaçamento médio na origem, $E = 0$, que é dado por $d = \pi\lambda/N$. A lei do semicírculo é uma propriedade dos ensembles gaussianos e pode ser deduzida através do método de polinômios ortogonais [64]. Uma dedução utilizando outro método também pode ser encontrada na referência [67], onde correlatores de maior ordem também podem ser encontrados. Apresentaremos uma dedução alternativa para esta expressão utilizando o método de supersimetria [68].

2.2.2 Técnica de Supersimetria e TMA

Nesta subsecção apresentamos o cálculo da média da densidade de autovalores de matrizes aleatórias que obedecem uma distribuição gaussiana. Utilizaremos para tanto o método de supersimetria que permite escrever tal média em termos de integrais gaussianas de variáveis de Grassmann. No apêndice A apresentamos as principais definições e propriedades da super-álgebra necessárias para a execução do cálculo. Por simplicidade trataremos neste cálculo apenas do EGU.

Como vimos anteriormente a densidade de estados é definida como

$$\nu(E) = \text{Tr} \delta(E - H) = \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \nu(E) dE = N. \quad (2.30)$$

Considere agora a identidade

$$\delta(E) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{E - i\epsilon} - \frac{1}{E + i\epsilon} \right), \quad \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (2.31)$$

e portanto obtemos a seguinte representação de $\nu(E)$

$$\begin{cases} \nu(E) = \frac{i}{2\pi} (G^+(E) - G^-(E)) & = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(G^+(E)) \\ G^\pm(E) \equiv \text{Tr} \left(\frac{1}{E - H \pm i\epsilon} \right); & G^+(E) = [G^-(E)]^*. \end{cases} \quad (2.32)$$

A função $G^+(E)$ corresponde a função de Green retardada enquanto $G^-(E)$ é a função de Green avançada quando introduzimos as funções de Green dependentes do tempo

$$\tilde{G}^\pm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} G^\pm(E); \quad \tilde{G}^+(t < 0) = 0 = \tilde{G}^-(t > 0). \quad (2.33)$$

Antes de apresentarmos o método propriamente, dito definimos as seguintes variáveis: $E_1^+ \equiv E + i\tilde{\omega}$ e $E_2^- \equiv E - i\tilde{\omega}$, onde $\tilde{\omega} = 1/2(\epsilon - i\omega)$. Os sub-índices 1 e 2 não devem ser confundidos com diferentes autovalores do hamiltoniano H . Definimos também a seguinte matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} E_1^+ & 0 \\ 0 & E_2^- \end{pmatrix} = E1_2 + i\tilde{\omega}L_2, \quad (2.34)$$

onde 1_2 é matriz identidade 2×2 e $L_2 = \text{diag}(1, -1)$. Note que

$$\begin{aligned} G^+(E_1) &= \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\Omega - H1_2} \right)_{11} \right], \\ G^-(E_2) &= \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\Omega - H1_2} \right)_{22} \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considere a seguinte função geratriz de traços do resolvente $(\Omega - H)^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\epsilon) &= \frac{\det(\Omega - H + \epsilon)}{\det(\Omega - H)}, \\ \frac{d\mathcal{Z}(\epsilon)}{d\epsilon} &= \text{Tr} \left(\frac{1}{\Omega - H + \epsilon} \right) \mathcal{Z}(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Observe que

$$\begin{aligned} G^+(E_1) &= \frac{d\mathcal{Z}(\epsilon)}{d\epsilon_1} \Big|_{\epsilon=0} = \text{Tr} \left(\frac{1}{E_1^+ - H} \right), \\ G^-(E_2) &= \frac{d\mathcal{Z}(\epsilon)}{d\epsilon_2} \Big|_{\epsilon=0} = \text{Tr} \left(\frac{1}{E_2^- - H} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

O resultado central desta abordagem é que se H é uma matriz aleatória pertencente ao EGU, então a seguinte igualdade é verdadeira

$$\langle e^{-i\text{Tr}HA} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle (\text{Tr}HA)^2 \rangle \right\}, \quad (2.38)$$

para qualquer matriz fixa $N \times N$, A . Tal dependência com H pode ser obtida ao expressar os determinantes do denominador e numerador da equação (2.36) como integrais gaussianas sobre variáveis comutantes e anti-comutantes, respectivamente. Para uma revisão sobre integrais gaussianas multi-dimensionais ver por exemplo as referências [69, 70]. Em

termos das integrais gaussianas o super-determinante (ver apêndice A) de uma super-matriz diagonal pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \text{Sdet}^{-1} A &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^\dagger \exp(-\varphi^\dagger A \varphi), \\ \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^\dagger &\equiv \prod_{k=1}^N (idz_k dz_k^* d\eta_k d\eta_k^*), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\varphi \equiv (z, \eta)^T$ é um vetor de $2N$ componentes, sendo as N primeiras, z_k , comutantes e as restantes, η_k , anticomutantes. As integrais de variáveis de Grassmann são normalizadas de acordo com a seguinte definição

$$\begin{aligned} \int d\eta_l \eta_l &= \int d\eta_l^* \eta_l^* = (2\pi)^{-1/2}, \\ \int d\eta_l &= \int d\eta_l^* = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Considere agora a função geratriz $\mathcal{Z}(\epsilon)$ modificada:

$$\mathcal{Z}(\epsilon) = \text{Sdet}^{-1}[D + J(\epsilon)] = \exp\{-\text{Strln}[D + J(\epsilon)]\}, \quad (2.41)$$

onde, o propagador D é uma super-matriz $4N \times 4N$ $D = (E - H)1_4 + i\tilde{\omega}L$ e L , é uma supermatriz diagonal, $L_{pp'}^{\alpha\alpha'} \delta_{pp'} \delta_{\alpha\alpha'}$, que distingue entre as componentes retardada e avançada de D . A super-matriz $J(\epsilon)$ é conhecida como super-matriz fonte e tem a seguinte forma:

$$J_{pp'}^{\alpha\alpha'}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_{m=1,2} (-1)^\alpha \epsilon_m \delta_{pp'} \delta_{pm} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (2.42)$$

Das equações (2.36) e (2.37), temos que $G^+(E_1) = \text{Tr}(D)_+^{-1}$.

Vamos agora executar a média em ensemble de $\mathcal{Z}(\epsilon)$. Reescrevendo a equação (2.41) em termos de uma integral gaussiana (2.39):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\epsilon) &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{i\mathcal{L}_1(\varphi; J)}, \\ \mathcal{L}_1(\varphi; J) &= \sum_{p, \alpha} \langle \bar{\varphi}_p^\alpha, [D + J(\epsilon)]_p^\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde a medida é definida em termos do super-vetor adjunto, que está relacionado com $\varphi^\dagger$ através da seguinte relação $\bar{\varphi} = \varphi^\dagger r$, com r definido como $r_{pp'}^{\alpha\alpha'} = (-1)^{(1-\alpha)(1+p)} \delta_{pp'} \delta_{\alpha\alpha'}$. A presença de r na definição de $\bar{\varphi}$ garante a convergência não apenas da integral (2.43), mas também da representação final da média em ensemble da função geratriz em termos de um modelo σ não-linear supersimétrico. Na equação (2.43) utilizamos a seguinte notação

compacta $\langle F, G \rangle \equiv \sum_{\mu} F(\mu)G(\mu)$, onde $\mu = 1, \dots, N$. A média da função geratriz pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi} \langle \exp\{-i \sum_{p\alpha} \langle \bar{\varphi}_p^\alpha, (H\varphi)_p^\alpha \rangle\} \rangle_H \\ &\quad \exp\{i \sum_{p\alpha} \langle \bar{\varphi}_p^\alpha, [(E + i\tilde{\omega}L + J(\epsilon))\varphi]_p^\alpha \rangle\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Definindo a matriz $N \times N$, $B_{\nu\mu} \equiv \sum_{p\alpha} \bar{\varphi}_p^\alpha(\mu) \varphi_p^\alpha(\nu)$ e utilizando a equação (2.38), a média definida na equação (2.44) fica

$$\langle \exp\{-i \sum_{p\alpha} \langle \bar{\varphi}_p^\alpha, (H\varphi)_p^\alpha \rangle\} \rangle_H = e^{-\frac{1}{2} \langle (\text{Tr}HB)^2 \rangle_H}. \quad (2.45)$$

Como as componentes de H são variáveis gaussianas aleatórias, então $\langle H_{\mu\nu} H_{\mu'\nu'} \rangle_H = \lambda^2/N \delta_{\nu\mu'} \delta_{\mu\nu'}$, desta forma temos

$$\langle (\text{Tr}HB)^2 \rangle_H = \frac{\lambda^2}{N} \text{Tr}B^2 = \frac{\lambda^2}{N} \text{Str}S^2, \quad (2.46)$$

onde, $S_{pq}^{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^N \varphi_p^\alpha(\mu) \bar{\varphi}_q^\beta(\mu)$. Em termos da variável S , a média em ensemble da função geratriz é

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{i\mathcal{L}_2(\varphi, J(\epsilon))}, \\ i\mathcal{L}_2(\varphi, J(\epsilon)) &= -\frac{\lambda^2}{2N} \text{Str}S^2 + i\text{Str}(E1_4 + i\tilde{\omega}L + J(\epsilon))S. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nesta forma, a integração de (2.47) não pode ser feita exatamente. No entanto uma maneira de simplificar consideravelmente este modelo é utilizar a transformação de Hubbard-Stratonovich, que tem como objetivo eliminar a dependência quártica na ação $\mathcal{L}_2(\varphi, J(\epsilon))$ através da introdução de novos graus de liberdades codificados em uma supermatriz 4×4 , σ que se acopla a S . Para aplicarmos a transformação de Hubbard-Stratonovich, definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{L}}_2(S) &= -\tilde{\omega}_R \text{Str}LS, \\ W(\sigma, S) &= -\tilde{\mathcal{L}}_2\left(S - \frac{iN}{\lambda}\sigma\right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde $\tilde{\omega}_R \equiv \text{Re}\tilde{\omega}$. Em termos desta nova supermatriz a média da função geratriz fica

$$\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H = \int \mathcal{D}\sigma e^{i\mathcal{L}_3(\sigma; J)}; \quad e^{i\mathcal{L}_3(\sigma; J)} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{iW(\sigma, S) + i\mathcal{L}_2(\sigma; J)}. \quad (2.49)$$

A matriz σ é construída de tal maneira que

$$\int \mathcal{D}\sigma e^{iW(\sigma, S)} = \int \mathcal{D}\sigma e^{iW(\sigma, 0)} = 1. \quad (2.50)$$

Para mais detalhes sobre a forma de σ ver a ref. [71]. A escolha de $W(\sigma, S)$ feita na equação (2.48) elimina o termo quártico em (2.47), possibilitando reescrever $\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H$ da seguinte forma, com a ajuda da seguinte mudança de variáveis $-\lambda\sigma \rightarrow -\tilde{\omega}_I + J(\epsilon) - \lambda\sigma$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H &= \int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Str} \sigma^2 - \frac{iN\tilde{\omega}}{\lambda} \text{Str} \sigma L - \frac{N}{\lambda} \text{Str}(\sigma + i\lambda^{-1}\tilde{\omega}L) J(\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N}{2\lambda^2} \text{Str} J^2(\epsilon) - N \text{Str} \ln[E1_4 - \lambda\sigma] \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para $N \gg 1$ podemos calcular (2.51) na aproximação de ponto de sela. A equação de ponto de sela é obtida extremizando a ação em (2.51) desprezando os termos responsáveis por quebra de simetria, i. e. $J \sim \mathcal{O}(1/N) \sim \tilde{\omega}$. Desta forma temos

$$\frac{\delta}{\delta\sigma} [1/2 \text{Sdet} \sigma^2 + \text{Sdet} \ln(E1_4 - \lambda\sigma)] \Rightarrow \lambda\sigma_{ps}^2 - E\sigma_{ps} + \lambda = 0, \quad (2.52)$$

onde σ_{ps} é a única solução acessível sem cruzar singularidades (ver ref. [71]) e é dada por

$$\sigma_{ps} = \frac{E}{2\lambda} 1_4 - i \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\lambda}\right)^2} L, \quad (2.53)$$

Fazendo $E_1 = E_2$, $i\tilde{\omega} = i\eta/2$ e $\epsilon_2 = 0$, a ação na equação (2.51) fica

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}_3(\sigma_0 + \delta\sigma; J_1) &= -\frac{N}{2} \text{Str} \sigma^2 - \frac{iN\eta}{2\lambda} \text{Str} \sigma \\ &\quad - \frac{N}{\lambda} \text{Str}(\sigma + \frac{i\eta}{2\lambda} 1_2) J_1(\epsilon_1) - N \text{Str} \ln(E1_2 - \lambda\sigma), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde σ_0 e $\delta\sigma$ são dados por

$$\sigma_0 1_2 = \left(\frac{E}{2\lambda} - i \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\lambda}\right)^2} \right) 1_2; \quad \delta\sigma = \begin{pmatrix} a & \xi^* \\ \xi & iz \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

onde a e z são variáveis reais e ξ é uma variável de Grassmann. Depois de certa álgebra em (2.51), obtemos

$$\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H = e^{-\frac{2N}{\lambda} \sigma_0 \epsilon} \int d\sigma \exp \left[-\frac{N}{2} (1 - \sigma_0^2) \text{Str} \delta\sigma \right] = e^{-\frac{2N}{\lambda} \sigma_0 \epsilon} I. \quad (2.56)$$

em termos das variáveis a , z e ξ a integral I fica

$$I = \int da dz d\xi^* d\xi \exp [-\gamma(a^2 + z^2 + 2\xi^* \xi)] = 1. \quad (2.57)$$

Desta forma, temos

$$\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle_H = e^{-\frac{2N}{\lambda}\sigma_0\epsilon}, \quad (2.58)$$

e a função de Green retardada é dada pela equação (2.37), $G^+(E) = N/\lambda\sigma_0$ e finalmente da equação (2.32), obtemos a densidade média de níveis

$$\langle \nu(E) \rangle = \frac{N}{\lambda\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\lambda}\right)^2}. \quad (2.59)$$

Esta é a famosa lei do semi-círculo de Wigner. Como já dissemos, esta expressão pode ser obtida por vários outros métodos de maneira mais direta, no entanto é instrutivo recuperar esta expressão através da abordagem supersimétrica. O grande mérito do método supersimétrico é seu poder de calcular outras funções de correlação de maneira similar ao cálculo aqui apresentado. O cálculo da função de correlação densidade-densidade $\langle \nu(E)\nu(E') \rangle$ utilizando esse método pode ser encontrado na ref. [71].

2.2.3 Matrizes de Espalhamento Aleatórias

A TMA também pode ser utilizada para estudar problemas de transporte. Agora, os elementos da matriz- S , que descreve a dinâmica de espalhamento dos elétrons pela estrutura mesoscópica, podem ser considerados como variáveis aleatórias. Existe duas maneiras de estudarmos problemas de transporte utilizando TMA. Na primeira modelamos o hamiltoniano $M \times M$ da estrutura, H como uma matriz aleatória, exatamente como fizemos anteriormente e a matriz- S aleatória $N \times N$ é obtida através da fórmula de Mahaux- Weidenmüller [72]

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger \frac{1}{E - H + i\pi W W^\dagger} W, \quad (2.60)$$

onde W é uma matriz retangular $M \times N$ não aleatória que descreve o acoplamento entre a cavidade e os guias. As propriedades universais são obtidas quando fazemos $M \rightarrow \infty$ na fórmula (2.60). A média sobre os ensembles gaussianos desta expressão foi obtido via supersimetria [73] é dada por

$$\langle S(0) \rangle = \frac{Md - \pi^2 W^\dagger W}{Md + \pi^2 W^\dagger W}. \quad (2.61)$$

A dedução dessa expressão pode ser encontrada no apêndice B.

Uma outra possibilidade consiste em aplicar a TMA diretamente na matriz de espalhamento que descreve o sistema. Similar ao caso hamiltoniano onde estávamos interessados nas propriedades estatísticas dos níveis de energia de H , estaremos interessados nas propriedades estatísticas dos autovalores de transmissão que é dado pelo produto $tt^\dagger$, sendo t uma submatriz de S . Para cálculos com ensembles de matrizes- S precisamos definir a medida invariante de integração (medida de Haar) $d\mu(S)$ nesse espaço de matrizes, que por definição é invariante sob um automorfismo de uma dada classe de simetria nela mesma, i. e. $d\mu^\beta(S) = d\mu^\beta(U_0 S V_0)$, onde U_0 e V_0 são matrizes unitárias para $\beta = 2$. Utilizando a seguinte parametrização da matriz- S , conhecida como decomposição polar [74]

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

onde τ é uma matriz diagonal $N \times N$ contendo os autovalores de transmissão de $tt^\dagger$, τ_i ($i = 1, \dots, N$). Os v_j ($j = 1, \dots, 4$) são matrizes unitárias $N \times N$ arbitrárias para o caso $\beta = 2$. Para o caso $\beta = 1$ temos as seguintes restrições $v_3 = v_1^T$ e $v_4 = v_2^T$, enquanto para $\beta = 4$ as matrizes v_j são quaternions auto-duais $2N \times 2N$, com autovalores duplamente degenerados com as seguintes restrições $v_3 = \bar{v}_1$ e $v_4 = \bar{v}_2$. Para esta decomposição a medida de Haar fatora numa parte radial e outra angular e pode ser escrita da seguinte forma

$$d\mu(S) \propto P_\beta(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a \prod_i d\mu(v_i), \quad (2.63)$$

onde $P_\beta(\{\tau\})$ é a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão

$$P_\beta(\{\tau\}) \propto \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_i \tau_i^{-1+\beta/2}. \quad (2.64)$$

A média de um função $f(\{\tau\})$ pode ser calculada através da seguinte expressão

$$\langle f(\tau) \rangle = C_\beta \int \prod_a d\tau_a \prod_i d\mu(v_i) f(\{\tau\}) P_\beta(\{\tau\}) \mathcal{P}(S), \quad (2.65)$$

onde $\mathcal{P}(S)$ é a densidade de probabilidade de encontrarmos a matriz S no volume $d\mu(S)$ e pode ser calculada maximizando a entropia de Shannon sujeita a certos vínculos

$$\mathcal{S} = - \int d\mu(S) \mathcal{P}(S) \ln \mathcal{P}(S). \quad (2.66)$$

Ao maximizar essa entropia sujeita apenas ao vínculo de normalização

$$\int \mathcal{P}(S) d\mu(S) = 1, \quad (2.67)$$

obtemos

$$\mathcal{P}(S) = \text{constante}, \quad (2.68)$$

ou seja, devido às flutuações, a matriz- S cobre a variedade com distribuição uniforme. Isto significa que a matriz S é uniformemente distribuída no grupo unitário. O ensemble caracterizado pela distribuição (2.68) é conhecido como ensemble circular. Existe três tipos de ensembles circulares: o ortogonal (ECO) para $\beta = 1$; o unitário (ECU) para $\beta = 2$ e o simplético (ECS) para $\beta = 4$. Se incluimos mais um vínculo do tipo [75]

$$\int d\mu(S) S^p \mathcal{P}(S) = \bar{S}; \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

onde $\bar{S}$ é uma matriz sub-unitária, i.e. os autovalores de $\bar{S}\bar{S}^\dagger \leq 1$, a distribuição (2.68) não é mais a que maximiza a entropia, sendo o núcleo de Poisson a que faz isso

$$\mathcal{P}(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-\beta(2N-1+2/\beta)}. \quad (2.70)$$

Observe que o ensemble circular é apenas um caso particular da expressão acima quando fazemos $\bar{S} = 0$.

O ensemble circular é mais apropriado quando estamos estudando cavidades caóticas que estão acopladas aos guias por contatos ideais, que são caracterizados apenas pelo número de canais de propagação abertos. O núcleo de Poisson é mais geral que o ensemble circular e é utilizado quando há junções de tunelamento. Voltaremos a falar mais sobre esses ensemble no capítulo 6, quando discutiremos uma eficaz técnica diagramática [56] para executar integração sobre esses ensembles.

2.3 TEORIA QUÂNTICA DE CIRCUITOS

Discutiremos agora um formalismo teórico semiclássico para o estudo de transporte coerente em nanoestruturas. Diferentemente dos formalismos que vimos anteriormente, cuja formulação é puramente quântica e em princípio descreve as propriedades de transporte de uma nanoestrutura de condutância arbitrária, esta formulação que apresentaremos agora descreve apenas o regime $G \gg G_0$. Iniciamos apresentando o formalismo das funções de Green quase-clássicas e posteriormente falaremos da teoria de circuitos propriamente dita.

2.3.1 Formalismo de Funções de Green de Keldysh

Originalmente, este formalismo foi desenvolvido para estudar supercondutores e estruturas híbridas NS como podemos encontrar na referência [46]. No entanto o método é muito mais geral e permite estudar estruturas de metal normal e estruturas ferromagnéticas. Começamos a discutir esta abordagem apresentando as funções de Green matriciais $G^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$. Para funções de Green de Keldysh para supercondutividade, os índices α e β são na verdade índices compostos contendo três sub-índices, onde cada um pode assumir dois valores: sub-índice de Keldysh, que corresponde ao sentido crescente e decrescente no contorno de Keldysh; sub-índice de spin (para cima ou para baixo); e o sub-índice de Nambu que distingue elétrons de buracos. Portanto a função de Green pode ser uma matriz 8×8 . Para operar com tantos índices é conveniente fazer uso das matrizes de Pauli. As matrizes de Pauli $\hat{\tau}_i$ dizem respeito ao espaço de Keldysh, as matrizes $\hat{\sigma}_i$ ao espaço de spin e as $\hat{\eta}_i$ ao espaço de Nambu. Definimos agora a função de Green matricial $\check{G}$, utilizando a parametrização no espaço de Nambu:

$$\check{G} = \begin{pmatrix} \hat{G} & \hat{F} \\ \hat{F}^\dagger & -\hat{G} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

onde a matriz $\hat{G}$ possui estrutura de spin e Keldysh e descreve elétrons e buracos, enquanto $\hat{F}$ e $\hat{F}^\dagger$, que são conhecidas como funções de Green anômalas, também possuem essas estruturas e descrevem a mistura de elétrons e buracos e a criação de pares de Cooper, ver a referência [60] para mais detalhes sobre esta parametrização.

Se as funções de Green são estacionárias, ou seja dependem apenas da diferença entre os tempos $t - t'$, então podemos trabalhar na representação de energia $\check{G}(t - t') \rightarrow \check{G}(E)$. As funções de Green obedecem a seguinte equação:

$$\begin{aligned} (\check{E} - \check{H}_r)\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ \check{E} &\equiv \left(E\hat{\eta}_3 + \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{r})(i\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1) + \frac{1}{2}\Delta^*(\mathbf{r})(i\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1) \right) \otimes 1_4, \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde, $\Delta(\mathbf{r})$ é o potencial de emparelhamento e $\hat{H}_r$ é o hamiltoniano BdG. A equação (2.72) não contém informação sobre a função distribuição de elétrons. Para inserir esta informação temos que impor que a função de Green no infinito, ou seja, longe da nano-estrutura assume o valor de equilíbrio, caracterizada pela função distribuição de Fermi-Dirac. O infinito nesta abordagem pode ser entendido como os guias e reservatórios da teoria de Landauer-Büttiker. Os reservatórios estão em equilíbrio termodinâmico e são caracterizados por um potencial químico e pela temperatura. Uma vez determinada a função de Green podemos calcular observáveis, como a densidade de carga e a densidade de corrente. Para supercondutores essas grandezas são expressas através das seguintes relações

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{e}{4} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr}\{\hat{\tau}_3 \otimes 1_4 \check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)\}; \quad (2.73)$$

$$I(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{4m} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \text{Tr}\{\hat{\tau}_3 \otimes \hat{\eta}_3 \otimes 1_2 (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)\}. \quad (2.74)$$

O grande atrativo do método de funções de Green é a possibilidade de utilizar aproximações quase-clássicas que permitem escrever equações similares à de Boltzmann e de difusão levando em conta a coerência quântica que está codificada na estrutura de Keldysh das funções de Green. Antes de utilizarmos as aproximações quase-clássicas, é interessante observar a seguinte representação na forma conjugada da equação (2.72), onde o hamiltoniano atua em $\mathbf{r}'$ ao invés de $\mathbf{r}$ e a matriz $\check{E}$ está à direita de $\check{G}$:

$$\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)(\check{E} - \check{H}_{r'}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.75)$$

Tomando a diferença entre (2.72) e (2.75), obtemos

$$[\check{E}, \check{G}] - \left(\frac{\hbar^2}{m} (\nabla_{\mathbf{r}'}^2 - \nabla_{\mathbf{r}}^2) + U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}') \right) \check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = 0. \quad (2.76)$$

Esta equação é exata e para implementarmos a primeira aproximação quase-clássica escrevemos a função de Green em termos das coordenadas de centro de massa, $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$ e reduzida $\mathbf{y} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e introduzimos a representação de Wigner para as funções de Green:

$$\check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}; E) \equiv \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\hbar} \check{G}(\mathbf{R} + \mathbf{y}/2, \mathbf{R} - \mathbf{y}/2; E). \quad (2.77)$$

A justificativa para a integração na variável reduzida $\mathbf{y}$ é que estamos ignorando a informação contida nas oscilações rápidas desta variável [60]. Substituindo esta representação em (2.76) e assumindo que a dependência de $\tilde{G}$ em $\mathbf{R}$ na escala do comprimento de onda de Fermi é suave, i. e., formalmente, $\partial/\partial\mathbf{R} \ll p/\hbar$, temos então

$$\frac{i}{\hbar} [\tilde{E}, \tilde{G}] + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.78)$$

onde, $\mathbf{v} = \partial H/\partial \mathbf{p}$ e $\mathbf{F} = -\partial H/\partial \mathbf{r}$. Por simplicidade substituímos a variável $\mathbf{R}$ por $\mathbf{r}$. A eq. (2.78) é similar à equação de balanço da função distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ do formalismo de Boltzmann para a função de Green matricial $\tilde{G}$. O efeito devido à impureza pode ser incorporado à equação (2.78) adicionando uma auto-energia $\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ao hamiltoniano, $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Desta forma obtemos a equação de Eilenberger:

$$\frac{i}{\hbar} [\tilde{E}, \tilde{G}] + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{i}{\hbar} [\tilde{\Sigma}, \tilde{G}]. \quad (2.79)$$

Na equação (2.79) desconsideramos o termo proporcional à força $\mathbf{F}$. A equação de Eilenberger é análoga à equação de Boltzmann e o comutador de $\tilde{\Sigma}$ com $\tilde{G}$ tem a mesma função do termo devido ao espalhamento na equação de Boltzmann. A auto-energia $\tilde{\Sigma}$ pode ser expressa em termos da versão matricial das taxas de tunelamento $W_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ da equação de Boltzmann:

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} W_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \tilde{G}(\mathbf{p}). \quad (2.80)$$

A equação de Eilenberger tem duas diferenças cruciais em relação à equação de Boltzmann. Primeiramente, devido à forma $\tilde{\Sigma}(\mathbf{p})$ a eq. (2.79) é não-linear em $\tilde{G}$. E em segundo lugar essa equação tem uma importante integral de movimento, $\partial_{\mathbf{r}}(\tilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}))^2 = 0$. Como havíamos dito, as funções de Green assumem seus valores de equilíbrio nos reservatórios. Este fato nos diz uma importante propriedade para $\tilde{G}$:

$$\tilde{G}^2 = \tilde{\mathbf{I}}, \quad (2.81)$$

em toda a nanoestrutura. Esta relação é conhecida como *condição de normalização* e desempenha um papel fundamental do ponto de vista de cálculo. Uma dedução mais geral desta condição pode ser encontrada na referência [76].

Assim como encontramos o análogo da equação de Boltzmann para as funções de Green $\tilde{G}$, podemos também encontrar uma equação para essas funções similar à equação de difusão para $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$. Esta equação assim como a equação de difusão é válida no “limite sujo”, onde o tamanho da amostra é maior que o livre caminho médio elástico. Neste regime é necessário que o termo de auto-energia devido às impurezas seja maior que qualquer outro termo na equação de Eilenberger. O movimento dos elétrons neste regime é essencialmente difusivo e a função de Green $\tilde{G}$ é aproximadamente isotrópica, i. e. podemos expandi-la em harmônicos esféricos

$$\tilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \tilde{G}^0(\mathbf{r}) + \tilde{G}^1(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (2.82)$$

onde $\check{G}^1(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ é pequeno termo anisotrópico, $\check{G}^1 \ll \check{G}^0$, $\langle \check{G}^1 \rangle = 0$. Da condição de normalização (2.81) temos que $\{\check{G}^0, \check{G}^1\} = 0$. Substituindo esta aproximação na equação (2.79) e executando a média nas variáveis angulares, o termo devido ao espalhamento se anula e ficamos com

$$\frac{ie^2\nu}{\hbar} [\check{E}, \check{G}^0] + \frac{\partial \check{J}}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \check{\mathbf{J}} = \langle v\check{G}^1 \rangle \quad (2.83)$$

A matriz $\check{\mathbf{J}}$ é conhecida como a densidade de corrente matricial e tem um papel importantíssimo na teoria de circuitos. O parâmetro ν que aparece na equação acima é a densidade de estados e surge pelo fato de que a corrente matricial tem dimensão de condutância. Para encontrarmos a relação entre a corrente matricial e a parte isotrópica da função de Green, subtraímos a equação de Eilenberger após a média da equação original (2.79), assim encontramos uma relação entre $\check{G}^1$ e $\check{G}^0$ que permite escrevermos a seguinte equação:

$$\frac{ie^2\nu}{\hbar} [\check{E}, \check{G}] + \frac{\partial \check{J}}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \check{\mathbf{J}} = -\sigma(\mathbf{r})\check{G}\nabla\check{G}, \quad (2.84)$$

onde $\sigma(\mathbf{r})$ é a condutividade da nanoestrutura. Por simplicidade daqui em diante omitiremos o índice superior “0” da função de Green isotrópica. A equação (2.84) é conhecida como equação de Usadel e foi primeiramente utilizada para estudar supercondutores no limite sujo. Note que a equação de Usadel é quase uma lei de conservação da corrente se não fosse o primeiro termo à esquerda.

Para aplicarmos a equação de Usadel em estruturas com interfaces, precisamos adicionar ao problema as condições de contorno que conectam as componentes das funções de Green em cada lado da interface. O cálculo dessas condições de contorno para um conector arbitrário que caracteriza a interface foi realizado por Zaitsev [77]. No limite sujo e para junções de tunelamento as condições de contorno de Zaitsev ficam

$$\check{J}_{\perp,1} = \check{J}_{\perp,2}; \quad \check{J}_{\perp} = \frac{G_T}{2} [\check{G}_1, \check{G}_2],$$

onde os índices 1 e 2 representam os dois lados separados pela junção, $\check{J}_{\perp}$ representa a corrente matricial perpendicular à interface e G_T é a condutância por unidade de área da junção.

Foi mostrado na referência [78], que as equações de Eilenberger e Usadel podem ser utilizadas em qualquer sistema mesoscópico sem que esse tenha algo a ver com supercondutividade, pois tais equações não dependem da estrutura matricial concreta do sistema. Desprezando o primeiro termo da equação (2.84) (ver ref. [79] para mais detalhes) a corrente matricial é conservada exatamente:

$$\frac{\partial \check{J}}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \check{\mathbf{J}} = -\sigma(\mathbf{r})\check{G}\nabla\check{G}. \quad (2.85)$$

Nesta situação podemos deduzir uma equação análoga à de Laplace. Num sistema de dois terminais onde, $\check{G}_1$ e $\check{G}_2$ são as funções de Green nos dois reservatórios, então a função de Green da nanoestrutura pode ser escrita da seguinte forma

$$\check{G}(\mathbf{r}) = \exp\{u(\mathbf{r})\check{M}\}\check{G}_1, \quad (2.86)$$

onde, $\check{M}$ é uma matriz constante que anticomuta com $\check{G}_1$. A corrente matricial é dada por: $\check{\mathbf{I}} = -\check{M}\nabla u(\mathbf{r})$ e a equação de Usadel torna-se linear

$$\nabla(\sigma(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})) = 0, \quad (2.87)$$

que nada mais é que a equação de Laplace para a distribuição de voltagem $u(\mathbf{r})$ em um condutor de formato arbitrário. Assumindo que o potencial é zero em um dos reservatórios e igual a um no outro, podemos então encontrar a solução da equação de Usadel determinando a matriz $\check{M}$ através da seguinte condição: $\check{G}_2 = \exp\{\check{M}\}\check{G}_1$. Utilizando a condição de normalização das funções de Green, obtemos,

$$\check{M} = \ln\{\check{G}_1\check{G}_2\}, \quad (2.88)$$

e a corrente matricial que “atravessa” a nanoestrutura é proporcional a condutância do dispositivo G e é dada por

$$\check{I} = G\{\check{G}_1, \check{G}_2\}. \quad (2.89)$$

Esta expressão pode ser utilizada para deduzir a distribuição de autovalores de transmissão de um condutor arbitrário que é universal, ou seja não depende do formato, nem da geometria e de outros parâmetros.

O método das funções de Green pode ser deduzido diretamente de argumentos quânticos exatos, porém tem um ponto fraco crucial: torna-se muito complexo quando atacamos aplicações concretas. Isto ocorre porque devemos sempre lidar com equações diferenciais não lineares com condições de contorno não triviais. Na próxima seção apresentaremos um método de elemento finito para as funções de Green quase-clássicas, conhecida como teoria quântica de circuitos desenvolvida por Nazarov [79] que permite obter de maneira eficiente observáveis de transporte em estruturas mesoscópicas das mais diversas.

2.3.2 Aproximação de Elemento Finito

Sabemos do eletromagnetismo que uma maneira de contornar a equação de Laplace é a teoria de circuitos elétricos, baseada na conservação de corrente e nas leis de Kirchhoff. Apresentaremos agora uma teoria de elemento finito conhecida como teoria quântica de circuitos [79]. Esta teoria é baseada na conservação da corrente matricial e nas propriedades da função de Green quase-clássica. Como em toda teoria de circuitos a ideia geral é dividir o sistema em elementos finitos, onde cada elemento é responsável por uma característica do processo de transporte. Existem três tipos de elementos em um circuito: terminais, conectores e nós. Na figura (2.2) apresentamos uma representação de circuito quântico. Em teoria quântica de circuitos chamamos de reservatórios os terminais onde a voltagem encontra-se fixa. A estrutura matemática que faz o papel da voltagem em teoria quântica de circuitos é a função de Green matricial que possui as seguintes propriedades

$$\text{Tr}\check{G} = \check{0}; \quad \check{G}^2 = \check{1}. \quad (2.90)$$

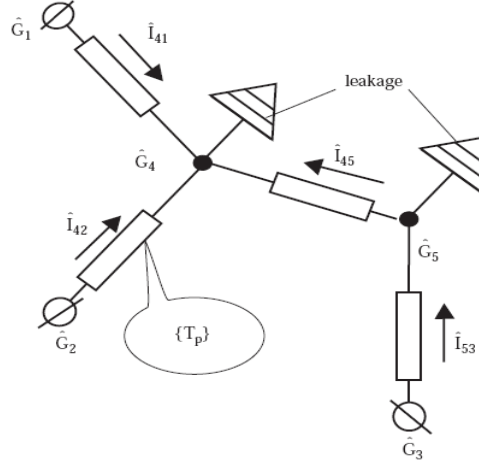


Figura 2.2 Representação de um circuito quântico: três reservatórios caracterizados pelos índices 1, 2 e 3 interligados aos dois nós (4 e 5) por conectores. Cada conector é caracterizado por um conjunto de autovalores de transmissão $\{T_p\}$. As matrizes de voltagem $\check{G}_{i=1,2,3}$ que descrevem os reservatórios estão fixas. As matrizes de voltagem dos nós $\check{G}_{i=4,5}$ são obtidos através da lei de conservação de corrente matricial incluindo as correntes de “perda”, que são representadas pelo acoplamento de cada nó com um terminal fictício. Figura retirada da referência [80].

Como na teoria de circuitos comum, a matriz de voltagem é fixa nos reservatórios. Cada nó do circuito também é representado por uma matriz de voltagem, que para ser determinada precisamos implementar a lei de conservação de corrente matricial

$$\sum_{\text{conectores}} \check{I} + \sum_{\text{ns}} \check{I}_{cp} = 0, \quad (2.91)$$

que é a lei Kirchhoff quântica. A corrente nos conectores podem ser expressas em termos das voltagens dos terminais ou nós conectados às extremidades do mesmo, i. e.

$$\check{I} = F(\check{G}_1, \check{G}_2). \quad (2.92)$$

Trataremos da forma explícita de F , que caracteriza o conector, mais adiante. O segundo termo da equação (2.91) é conhecido como corrente de perda e está associado ao comutador da equação de Usadel (2.84). Fisicamente este termo está relacionado ao fato de que em sistemas realísticos temos sempre perdas associadas a mecanismos de descoerência. Na linguagem de teoria de circuitos essa descoerência é levada em consideração assumindo que cada nó do circuito interage com um terminal fictício (ver figura 2.2), através de uma corrente de perda, $\check{I}_{cp} = ie\nu/\hbar [\check{E}, \check{G}_n]$, onde n representa os índices dos nós.

A teoria quântica de circuitos também pode ser formulada em termos de um princípio variacional. Neste caso a lei de conservação de corrente matricial, pode ser obtida de

uma ação submetida a um princípio variacional. Para formular a teoria quântica de circuitos via princípio variacional, devemos introduzir uma ação que dependa da matriz de voltagem de todos os nós e reservatórios do circuito. As voltagens em cada nó são determinadas da condição que esta ação tem um extremo com respeito às variações de $\check{G}$ nos nós. A ação da teoria de circuitos é dada por

$$\mathcal{S} = \sum_c \mathcal{S}_c(\check{G}_i, \check{G}_j) + \sum_n \mathcal{S}_{cp}(\check{G}_n), \quad (2.93)$$

onde $\mathcal{S}_c(\check{G}_i, \check{G}_j)$ representa a ação de um determinado conector e $\mathcal{S}_{cp}(\check{G}_n)$ a ação de perda do n -ésimo nó. Extremizando esta ação, levando em conta o vínculo $\check{G}^2 = \check{1}$, obtemos

$$\sum_j \check{I}_{i,j} + \check{I}_{cp} = 0, \quad (2.94)$$

que é a lei de Kirchhoff para o i -ésimo nó. A soma é feita sobre os j conectores vizinhos ao nó i .

2.3.3 Nós e Reservatórios

O reservatório para a teoria de circuitos tem o mesmo papel dos reservatórios da teoria de matrizes de espalhamento. Eles representam uma região macroscópica em contato com a nanoestrutura contendo um grande número de estados eletrônicos em equilíbrio. Na teoria de circuitos os reservatórios são caracterizados por funções de Green dependentes da energia. Em particular, o tipo de sistemas que estamos estudando depende da estrutura matricial. Por exemplo, se estamos interessados em estudar a corrente média que atravessa uma nanoestrutura, os reservatórios são caracterizados pela seguinte matriz 2×2 no espaço de Keldysh dependente de energia

$$\check{G}_N = \begin{pmatrix} 1 - 2f(E) & -2f(E) \\ -2 + 2f(E) & 2f(E) - 1 \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

onde, $f(E)$ é a função distribuição de Fermi-Dirac. Quando o grau de liberdade de spin é relevante então o fator de preenchimento dos reservatórios adquire uma estrutura de spin, caracterizada pela matriz 2×2 $\check{\rho}$. Consequentemente a função de Green num reservatório ferromagnético é uma matriz 4×4 da seguinte forma:

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 1 - 2\check{\rho} & -2\check{\rho} \\ -2 + 2\check{\rho} & 2\check{\rho} - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Para reservatórios supercondutores a estrutura matricial é 4×4 e pode ser escrita da seguinte forma

$$\check{G}_S = \begin{pmatrix} \check{R} + \check{K} + \check{A} & -\check{R} + \check{K} + \check{A} \\ -\check{R} - \check{K} + \check{A} & \check{R} - \check{K} + \check{A} \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

onde, $\check{R}$, $\check{A}$ e $\check{K}$ são matrizes 2×2 que correspondem às componente retardada, avançada e keldyshiana, respectivamente da matriz de Keldysh. A matriz $\check{K}$ pode ser obtida das

outras duas componentes pela relação $\check{K} = (\check{R} - \check{A})\tanh(E/2k_B T)$. Para um reservatório supercondutor em equilíbrio, temos

$$\begin{pmatrix} \check{R} \\ \check{A} \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(E + i\delta)^2 - |\Delta|^2}} \begin{pmatrix} E & \Delta^* \\ -\Delta & -E \end{pmatrix}, \quad (2.98)$$

com $\delta \rightarrow 0^+$. Para $E \ll \Delta$, essas matrizes simplificam-se $\check{R} = -\check{A} = \check{\eta}_2$. Se queremos estudar sistemas que possuam reservatórios normais e supercondutores, devemos modificar a matriz do reservatório normal para incluir a estrutura de Nambu. Obviamente ela continuará diagonal no espaço de Nambu mas devemos incluir tal redundância para que as matrizes fiquem com a mesma dimensão 4×4 . Desta forma a matriz do lado normal fica com a mesma forma do caso supercondutor mas as matrizes $\check{R}$, $\check{A}$ e $\check{K}$ são dadas por

$$\check{R} = -\check{A} = \check{\eta}_3; \check{K} = \begin{pmatrix} \tanh[(E + eV)/2k_B T] & 0 \\ 0 & \tanh[(E - eV)/2k_B T] \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

onde V é uma voltagem aplicada ao reservatório normal.

Assim como os reservatórios, os nós também são caracterizados por uma função de Green matricial. A única diferença é que as matrizes dos nós não são fixas, na verdade elas são determinadas pelas equações da teoria de circuitos. Para essa correspondência entre nós e reservatórios ser justificada microscopicamente as funções de Green devem ser isotrópicas na região da nanoestrutura atribuída a um nó. Esse critério de isotropização [79] pode ser intuído através do seguinte exemplo. Considere que no processo de discretização da nanoestrutura o nó é descrito por um cubo elementar. Vamos admitir que as dimensões desse cubo são maiores que o livre caminho médio elástico o que significa dizer que o mesmo contém um número considerável de impurezas. São estas impurezas que dão conta dos espalhamentos difusivos que garantem a isotropização da função de Green do cubo na escalas espaciais. Curiosamente o nó pode estar associado a uma parte da nanoestrutura onde não há impurezas e portanto o transporte é balístico, e.g. um ponto quântico conectado aos reservatórios por pontos de contatos quânticos cujas condutâncias são bem maiores que o quantum de condutância, $G \gg G_0$. Neste caso é a dinâmica caótica dentro da cavidade que é responsável pela isotropização. Portanto, mesmo sem um modelo rigoroso que leve em conta a dinâmica caótica dentro da cavidade, a teoria de circuitos baseada em funções de Green de Keldysh, que obedece uma equação de difusão pode ser utilizada para estudar sistemas que possuam componentes balísticos tipo pontos quânticos. No próximo capítulo apresentaremos uma formulação da teoria de circuitos obtida por um caminho onde a dinâmica caótica é levada em conta de maneira rigorosa em um estágio bem inicial de sua construção. Uma vez construída esta versão alternativa da teoria de circuitos, faremos uma comparação entre os dois formalismos.

2.3.4 Conectores

Agora trataremos da expressão explícita para a função $F(\check{G}_1, \check{G}_2)$ definida na equação (2.92) que descreve um conector arbitrário em teoria de circuitos. Os conectores são os elementos mais resistivos de um circuito e são descritos pela relação entre a corrente que

o atravessa e os estados dos nós ou reservatórios em suas extremidades. Em circuitos elétricos clássicos eles são caracterizados por um único parâmetro, que é a condutância obtida da lei de Ohm. Em circuitos quântico eles são descritos pelo “código-chave” $\{T_p\}$ que contém os autovalores de transmissão do produto de matrizes $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$ que estudamos no formalismo de matriz- S . A expressão da corrente matricial que atravessa um conector descrito por $\{T_p\}$ em termos das funções de Green dos reservatórios ou nós adjacente é dada por [79]

$$\check{I} = \sum_p \frac{T_p [\check{G}_1, \check{G}_2]}{2 + T_p/2(\{\check{G}_1, \check{G}_2\} - \check{2})}. \quad (2.100)$$

Esta expressão pode ser obtida da seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum_p \text{Tr} \left\{ \ln [\check{1} + T_p/4 (\{\check{G}_1, \check{G}_2\} - \check{2})] \right\}. \quad (2.101)$$

Vários exemplos utilizando a teoria de circuitos baseada em funções de Green quase-clássicas podem ser encontrados em uma numerosa quantidade de artigos científicos. Recomendamos o livro [81] onde pode-se achar vários desses exemplos. Trataremos agora da estatística de contagem de carga e no final desta seção discutiremos a conexão estabelecida entre este formalismo e a teoria de circuitos.

2.4 ESTATÍSTICA DE CONTAGEM

A estatística de contagem de carga foi inspirada nos trabalhos pioneiros desenvolvidos para detecção de fótons desenvolvido por Glauber [82]. O objetivo desta estatística de contagem de fótons é calcular a probabilidade $P_n(\tau)$ de que n fótons atinjam um detector num intervalo de tempo τ . Esta probabilidade foi calculada por Glauber e para um campo de apenas um modo normal é dada por

$$P_n(\tau) = \frac{(\eta\tau)^n}{n!} \langle : (a^\dagger a)^n e^{-\eta\tau a^\dagger a} : \rangle, \quad (2.102)$$

onde $a^\dagger$ e a são operadores de criação e aniquilação de fótons e η é o parâmetro de eficiência do detector. A presença de dois pontos no começo e no final da expressão $: \dots :$ acima corresponde ao ordenamento normal dos operadores a e $a^\dagger$ e $\langle \dots \rangle$ corresponde à operação de média sobre um estado quântico descrito por uma matriz densidade. O ordenamento normal da expressão acima garante que após ser medido o fóton é destruído, ou seja ele é absorvido pelo detector.

Fótons seguem a estatística de Bose-Einstein e por isso tendem a se agrupar no mesmo estado quântico de uma partícula. Já os elétrons são férmions e ao contrário dos fótons tendem a repelirem-se ficando apenas um por estado quântico de uma partícula, resultado conhecido como princípio da exclusão de Pauli. Este princípio gera correlações entre os elétrons que podem ser observadas nas propriedades de transporte dos mesmos em uma nanoestrutura. Vamos agora apresentar uma breve revisão da estatística de contagem de elétrons que nos permite observar tais correlações eletrônicas. Uma característica crucial

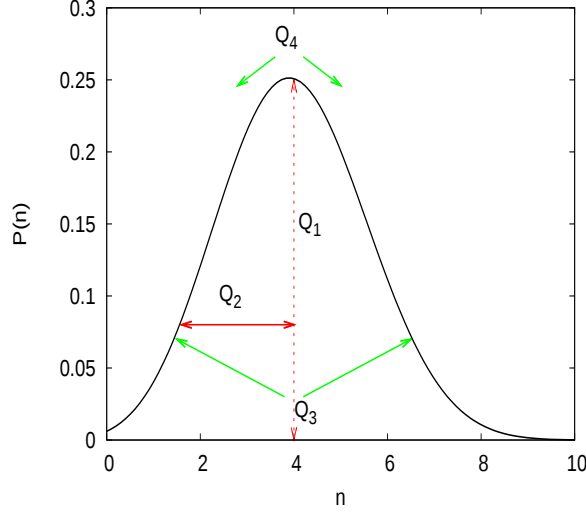


Figura 2.3 Distribuição binomial para $N = 10$ e $\Gamma = 0.4$. As setas em vermelho representam os dois primeiros cumulantes que correspondem a média e a variância respectivamente. As setas verdes apresentam esquematicamente o significado do terceiro (assimetria) e quarto (curtose) cumulantes.

que diferencia a contagem de fótons e de elétrons é que o processo de medição não destrói o elétron detectado, isso porque o número de elétrons é conservado.

2.4.1 Estatística de Contagem de Carga

Para lidarmos com carga definimos a função $P(Q, T_0)$, que é a probabilidade de uma carga $Q = ne$ associada a um número n de cargas elementares e ser transmitida em um intervalo de medida T_0 . A quantidade $Q(T_0)$ é uma variável estocástica e é bastante informativo estudar os momentos e cumulantes desta variável. O m -ésimo momento de $Q(T_0)$ é definido como:

$$\langle (Q(T_0))^m \rangle = \int dQ(T_0) P(Q, T_0) (Q(T_0))^m. \quad (2.103)$$

É conveniente definir a seguinte função característica:

$$\chi(\lambda) = \int dQ(T_0) P(Q, T_0) e^{i\lambda Q}. \quad (2.104)$$

Os momentos de $P(Q, T_0)$ em funções de $\chi(\lambda)$ são dados por:

$$\langle Q^m \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (i)^m \frac{\partial^m \chi(\lambda)}{\partial \lambda^m}. \quad (2.105)$$

Os cumulantes são definidos como:

$$Q_k \equiv -\lim_{\lambda \rightarrow 0} i^k \frac{\partial^k \Phi(\lambda)}{\partial \lambda^k}; \quad (2.106)$$

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} Q_k, \quad (2.107)$$

onde $\Phi(\lambda)$ é a função características dos cumulantes. As relações entre os quatro primeiros cumulantes e os momentos de Q são apresentadas abaixo:

$$Q_1 = \langle Q \rangle, \quad (2.108)$$

$$Q_2 = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2, \quad (2.109)$$

$$Q_3 = \langle Q^3 \rangle - 3\langle Q \rangle \langle Q^2 \rangle + 2\langle Q \rangle^3, \quad (2.110)$$

$$Q_4 = \langle Q^4 \rangle - \langle Q^2 \rangle^2 - 4\langle Q \rangle \langle Q^3 \rangle + 12\langle Q \rangle^2 \langle Q^2 \rangle - 6\langle Q \rangle^4. \quad (2.111)$$

Como exemplo discutiremos agora um sistema simples onde podemos calcular, utilizando argumentos físicos intuitivos e análise combinatória elementar, a estatística de contagem de carga. Considere elétrons tunelando uma barreira que encontra-se entre dois reservatórios de quase-partículas à temperatura nula. Neste regime o único ruído relevante está relacionado às flutuações de correntes dependentes do tempo devido aos espalhamentos no condutor que separa os dois reservatórios. Este espalhamento é descrito por uma probabilidade de transmissão Γ . É aplicada uma voltagem V a um dos reservatórios que modifica seu potencial químico para $\mu + eV$ ($eV \ll E_F = \text{energia de Fermi}$), tirando assim o sistema do equilíbrio e o levando a uma situação de transporte. A transferência de partículas nesta condição obedece a um processo de Bernoulli: um número de partículas fixo $N = T_0 eV/h$ tentam atravessar independentemente o condutor durante um tempo de observação T_0 com probabilidade de sucesso Γ . O número n de elétrons transmitido para um dado N obedece uma distribuição binomial

$$P(Q) = \binom{N}{n} \Gamma^n (1 - \Gamma)^{N-n}, \quad (2.112)$$

lembrando que $Q = ne$. A distribuição (2.112) é mostrada na figura (2.3) para $N = 10$ e $\Gamma = 0.4$. Apresentamos nesta mesma figura a interpretação dos primeiros quatro cumulantes da estatística de contagem que podem ser obtidos através da função geratriz dos cumulantes da distribuição binomial:

$$\Phi(\lambda) = -N \ln[1 + \Gamma(e^{-i\lambda} - 1)]. \quad (2.113)$$

Os quatro primeiros cumulantes em termos de N e Γ são: $Q_1 = N\Gamma$, que corresponde a média da variável Q ; $Q_2 = N\Gamma(1-\Gamma)$ que é a variância da distribuição; $Q_3 = N\Gamma(1-3\Gamma+\Gamma^2)$ diz o quão a distribuição é assimétrica com relação à média e finalmente $Q_4 = N\Gamma(1-7\Gamma+12\Gamma^2-6\Gamma^3)$, conhecido como curtose que dá conta de quão achatada ou pontiaguda é a distribuição próxima ao máximo. Cumulantes de ordem superiores não tem um significado simples mas já são medidos experimentalmente em estruturas mesoscópicas [38].

Se a probabilidade de transmissão for muito pequena $\Gamma \ll 1$, a transferência de partículas através da barreira se torna um evento raro, nesse limite a estatística quântica das partículas torna-se irrelevante levando a estatística de contagem a seguir uma distribuição poissoniana

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}, \quad (2.114)$$

$\langle n \rangle = N\Gamma$ é o número médio de partículas transferidas. Uma característica interessante de uma distribuição poissoniana é que todos os cumulantes são iguais e portanto o fator de Fano, que é a razão entre o segundo e primeiro cumulantes é 1, diferentemente do caso binomial que é $1 - \Gamma$ e portanto menor que 1. Este resultado nos faz concluir que as correlações eletrônicas devido ao princípio de Pauli suprimem as flutuações numa nanoestrutura. A distribuição (2.114) tem a seguinte função geratriz de cumulantes

$$\Phi(\lambda) = -\langle n \rangle (e^{-i\lambda} - 1). \quad (2.115)$$

Quando o número de partículas que tentam atravessar a nanoestrutura é muito grande, $N \rightarrow \infty$ todas as distribuições tendem à gaussiana como consequência do teorema central do limite.

2.4.2 A Fórmula de Levitov-Lesovik

Como falamos anteriormente o que difere drasticamente contar elétrons e fótons é que carga elétrica é conservada. O número de elétrons não muda quando fazemos medidas de corrente, diferentemente do caso com fótons, onde os mesmos são absorvidos pelo detector após a detecção. Em mecânica quântica a corrente elétrica é um operador, $\hat{I}(t)$ e em particular corrente em diferentes instantes de tempo não comutam entre si. Uma das consequências deste fato é que o operador carga transmitida $\hat{Q}(t) = \int_0^t \hat{I}(t') dt'$ geralmente não faz sentido algum. Então para obtermos informação sobre as flutuações dependentes do tempo de nanoestruturas devemos estudar as correlações corrente-corrente $\langle \hat{I}(t) \hat{I}(t') \rangle$ e de ordem superior e assim obter a distribuição de carga transmitida. Para tanto devemos incluir o sistema de medição no hamiltoniano total do sistema.

Em 1996, Levitov, Lee e Lesovik [34] propuseram um modelo de galvanômetro que é baseado na dinâmica de um spin-1/2. O funcionamento deste galvanômetro quântico se realiza da seguinte forma: um spin-1/2 precessiona no campo magnético B criado pela corrente que atravessa o sistema com frequência de precessão $\omega = eB/mc$, onde m é a massa do elétron e c é a velocidade da luz. Desta forma podemos inferir a corrente que atravessa o circuito analisando a precessão do spin. No argumento apresentado em [34] é adicionado um potencial vetor ao hamiltoniano do elétron devido ao spin-1/2:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\lambda \Phi_0}{4\pi} \sigma_z \nabla \theta(f(\vec{r}) - f_0), \quad (2.116)$$

onde σ_z é uma matriz de Pauli, $\Phi_0 = hc/e$ é o quantum de fluxo, $\theta(x)$ é a função degrau e λ é uma constante de acoplamento. Esta equação descreve a interação elétron-spin localizada numa superfície S definida por $f(\vec{r}) = f_0$, ou seja o spin só responde à

presença de um elétron quando o mesmo atravessa tal superfície, o que força o contador de carga a contar apenas valores inteiros de carga. O hamiltoniano total em segunda quantização do sistema mais spin é dado por:

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \Psi^\dagger(\vec{r}) \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}). \quad (2.117)$$

Suponha que a interação spin-corrente é “ligada” durante um intervalo de tempo $0 < t < \tau$. Em $t = 0$ a matriz densidade do sistema-spin descreve o regime desacoplado $\hat{\rho} = \hat{\rho}_e \otimes \hat{\rho}_s$, onde $\hat{\rho}_e$ descreve a matriz densidade dos elétrons e $\hat{\rho}_s$ a matriz densidade do spin. A matriz densidade num tempo t é dada pela fórmula de Heisenberg

$$\hat{\rho}(\tau) = e^{i\hat{H}\tau/\hbar} \hat{\rho} e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}. \quad (2.118)$$

A matriz densidade do spin logo após a interação ser desligada pode ser obtida quando executamos o traço parcial sobre os graus de liberdade eletrônicos, Tr_e

$$\hat{\rho}_s(\tau) = \text{Tr}_e \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & \chi(\lambda) \rho_{\uparrow\downarrow} \\ \chi(-\lambda) \rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.119)$$

onde,

$$\chi(\lambda) = \langle e^{-i\hat{H}_\lambda \tau/\hbar} e^{i\hat{H}_{-\lambda} \tau/\hbar} \rangle_e, \quad (2.120)$$

com $\langle \dots \rangle_e$ indicando a média sobre o estado quântico inicial do sistema. Utilizando a definição de $\chi(\lambda) = \sum_n e^{i\lambda n} P_n$, como função característica da estatística de contagem a equação (2.119) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_s(t) = \sum_n P_n \mathfrak{R}_{\theta=n\lambda}(\hat{\rho}_s), \quad (2.121)$$

onde,

$$\mathfrak{R}_\theta(\hat{\rho}_s) \equiv \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & e^{-i\theta} \rho_{\uparrow\downarrow} \\ e^{i\theta} \rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

A função P_n é a probabilidade de que n elétrons tenham atravessado o sistemas durante o tempo de observação.

Utilizando o formalismo de matriz- S os autores de [34] foram capazes de calcular a função geratriz da estatística de contagem $\Phi(\lambda)$ de um dispositivo mesoscópico descrito pelos seus autovalores de transmissão, $\{\tau_i\}$. Esta expressão é conhecida como fórmula de Levitov-Lesovik

$$\Phi(\lambda) = -T_0 \sum_{i=1}^N \int \frac{dE}{h} \ln \{ 1 + \tau_i [(e^{-i\lambda} - 1) f_E (1 - f_D) + (e^{i\lambda} - 1) f_D (1 - f_E)] \}, \quad (2.123)$$

as funções f_E e f_D são as funções distribuição dos reservatórios à esquerda e à direita da nanoestrutura, respectivamente. À temperatura nula, temos $f_E = 1$ e $f_D = 0$ e a expressão acima se reduz a

$$\Phi(\lambda) = -T_0 \sum_{i=1}^N \int \frac{dE}{h} \ln\{1 + \tau_i(e^{-i\lambda} - 1)\}. \quad (2.124)$$

Esta expressão tem uma interpretação bem evidente, trata-se da generalização para multicanais da distribuição binomial que tratamos anteriormente. Neste caso a transferência de elétrons se dá por N canais de forma independente como podemos ver da expressão acima.

No próximo capítulo mostramos que a equação (2.124) pode ser deduzida através do formalismo de funções de Green de Keldysh. Esta dedução também pode ser encontrada na referência [83].

2.4.3 Estatística de Contagem em Sistemas NS

A expressão pra função geratriz de um ponto de contato NS é dada por [84]

$$\Phi_{NS}(\lambda) = -\frac{T_0}{h} \text{Tr} \int dE \ln \left[1 + \sum_{n=-2}^2 A_n (e^{i\lambda n} - 1) \right]. \quad (2.125)$$

A eq. (2.125) mostra que o ruído de disparo neste sistema está associado com a transferência de carga nas unidades de $\pm e$ e $\pm 2e$. Os coeficientes A_n no limite de baixas temperaturas são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_1 = f_1(1 - |r_{ee}|^2 - |r_{he}|^2), \\ A_{-1} = f_2(1 - |r_{ee}|^2 - |r_{he}|^2), \\ A_2 = f_1(1 - f_2)|r_{he}|^2, \\ A_{-2} = f_2(1 - f_1)|r_{he}|^2, \end{cases} \quad (2.126)$$

onde, $f_1 = f(E - eV)$ e $f_2 = 1 - f(-E - eV)$, r_{ee} e r_{he} são matrizes $N \times N$ definidas na eq. (2.11).

No limite de baixas voltagens $eV \ll \Delta$ a dependência com a energia das amplitudes de espalhamento pode ser desprezada, facilitando a integração de (2.125). Obtemos então

$$\Phi_{NS}(\lambda) = -e|V|T_0/h \sum_{n=1}^N \ln[1 + r_n(e^{2i\lambda} - 1)]. \quad (2.127)$$

A característica principal de (2.127) corresponde a transferência de duas cargas para o lado supercondutor como esperado no regime subgap ($E < \Delta$). Note que os autovalores de reflexão do produto de matrizes de Andreev $r_{he}r_{he}^\dagger$, r_n exercem o papel da probabilidade de sucesso do processo de Bernoulli, similar ao coeficiente de transmissão em sistemas normais.

2.4.4 Teoria de Circuitos & Estatística de Contagem

A teoria de circuitos de funções de Green quase-clássicas pode ser utilizada para obter-se de forma eficiente a estatística de contagem de carga para uma nanoestrutura arbitrária. Através de uma extensão do formalismo de funções de Green de Keldysh [85, 86] observou-se que uma rotação na estrutura matricial da função de Green de um reservatório é capaz de absorver um parâmetro de contagem λ similar ao introduzido por Levitov-Lesovik:

$$\check{G}(\lambda) = e^{-i\lambda\tau_3/2}\check{G}(0)e^{i\lambda\tau_3/2}. \quad (2.128)$$

A matriz $\check{G}(0)$ corresponde à matriz do reservatório usual e.g. equação (2.95) para o caso de um reservatório normal.

Todos os passos e equações da aproximação quase-clássica permanecem válidos quando introduzimos o campo de contagem e portanto, podemos utilizar a teoria de circuitos para obter a estatística de contagem de uma enormidade de sistemas mesoscópicos. A ação de um conector arbitrário (2.101) em termos da matriz estendida $\check{G}(\lambda)$ é dada por:

$$\mathcal{S}(\lambda) = -\frac{T_0}{2\pi} \sum_n \int dE \text{Tr} \ln [\check{1} + T_n/4 (\{\check{G}_1(\lambda), \check{G}_2\} - \check{2})]. \quad (2.129)$$

Para um conector ligado a dois reservatórios descritos pela matriz (2.95), temos que o anticomutador de (2.129) pode ser escrito da seguinte forma

$$\{\check{G}_1(\lambda), \check{G}_2\} = 2(1 + 2(e^{i\lambda} - 1)f_1[1 - f_2] + 2(e^{-i\lambda} - 1)f_2[1 - f_1])\check{1}, \quad (2.130)$$

onde f_1 e f_2 são as funções distribuições em cada reservatório. Desta forma a ação (2.129) pode ser escrita como:

$$\mathcal{S}(\lambda) = -\frac{T_0}{\pi} \sum_n \int dE \ln [1 + T_n ((e^{i\lambda} - 1)f_1[1 - f_2] + (e^{-i\lambda} - 1)f_2[1 - f_1])], \quad (2.131)$$

que é a fórmula de Levitov-Lesovik para um condutor caracterizado por seus autovalores de transmissão $\{T_n\}$. Vários exemplos desta teoria de circuitos para a estatística de contagem de carga podem ser encontrados na referência [87].

No próximo capítulo apresentaremos uma formulação alternativa da função geratriz da estatística de contagem em termo de um modelo- σ não linear supersimétrico. Veremos que a teoria de circuitos pode ser obtida através da solução de ponto de sela de tal modelo- σ .

CAPÍTULO 3

TEORIA QUÂNTICA DE CIRCUITOS E ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA: UMA ABORDAGEM VIA MATRIZ ALEATÓRIA

Neste capítulo, utilizamos o formalismo de matrizes aleatórias discutido no capítulo anterior para obter a estatística de contagem de carga através de um sistema mesoscópico na presença de dois contatos não ideais. Tal formalismo, permite que a dinâmica caótica dentro da cavidade seja levada em conta de forma rigorosa no processo de dedução da estatística de contagem diferentemente da abordagem baseada no formalismo de funções de Green quase-clássicas de Keldysh discutido anteriormente.

3.1 INTRODUÇÃO AO FORMALISMO

Um dos principais objetivos do formalismo discutido neste capítulo, é ajudar no processo de unificação dos diversos formalismos hoje existentes na física mesoscópica em um único esquema teórico nos moldes sugeridos na ref. [88]. Este trabalho contém uma formulação de física mesoscópica na linguagem de física de muitos corpos e de métodos projetivos de mecânica estatística de não equilíbrio para sistemas quânticos dissipativos abertos [89, 90, 91]. A construção descrita em [88] possui três etapas: (i) especificação do modelo de detector para a medição da estatística de contagem de transferência de carga, (ii) projeção da função característica da estatística de contagem de carga no subespaço de Liouville de observáveis relevantes que leva a uma fórmula determinantal e (iii) execução da média sobre a dinâmica caótica da amostra mesoscópica do determinante funcional obtido do passo anterior. O principal atrativo desta abordagem, além de sua generalidade, é a possibilidade de controlar as aproximações em cada etapa de uma maneira matematicamente rigorosa. Na ref. [88], a etapa (i) foi implementada via o esquema de detecção proposto por Levitov e Lesovik [33] para a estatística de contagem de carga através de uma amostra mesoscópica. Na etapa (ii), o subespaço de Liouville dos operadores de uma partícula foi selecionado e uma fórmula determinantal de muitos corpos foi obtida para a função característica da estatística de contagem, com a auto-energia fazendo o papel da função memória. Para pontos quânticos não interagentes, a etapa (iii) foi executada utilizando o modelo estocástico de matrizes aleatórias da ref. [73] que descreve a dinâmica caótica dentro da amostra e também, o seu acoplamento com o ambiente, juntamente com o mapeamento entre a teoria de matrizes aleatórias e o modelo σ supersimétrico. A utilidade desse esquema unificado torna-se ainda mais evidente quando percebemos que existem diversas maneiras de executarmos qualquer uma das três etapas acima discutidas, sem modificar a estrutura lógica da construção. Por exemplo, no passo (i) podemos substituir o modelo de detector estático de Levitov e Lesovik pelo modelo mais realístico

da ref. [86], onde o detector é representado por um ambiente eletromagnético linear. Na etapa (ii), modos coletivos, tais como ondas de carga e spins, podem ser incluídos no subespaço de operadores relevantes se desejamos estudar por exemplo, correções não-analíticas no regime de baixas temperaturas da teoria de líquidos de Fermi utilizando uma abordagem teórica que contém apenas excitações de baixas energias, similar ao trabalho desenvolvido na ref. [92]. Já para a execução do passo (iii), poderíamos utilizar outro modelo σ em casos onde efeitos não perturbativos não fossem relevantes no regime de transporte de interesse.

Aplicamos o formalismo desenvolvido em [88] para descrever o processo de transferência de carga através de um sistema mesoscópico conectado a reservatórios de elétrons via barreiras de transparências arbitrárias. A função geratriz da estatística de contagem é obtida e promediada com relação à dinâmica caótica dentro da cavidade através de um mapa entre o modelo de matrizes aleatórias e o modelo σ não linear supersimétrico. Tal formulação é exata e contém todos os efeitos de interferência, e.g. localização fraca. Demonstramos que o limite semiclássico, calculado via aproximação de ponto de sela, pode ser descrito por uma versão escalar da teoria de circuitos [93]. Em 2005, Barbosa e Macêdo [94] demonstraram que essa teoria de circuitos escalar reproduz exatamente o limite semiclássico do núcleo de Poisson em perfeita concordância com a técnica diagramática para média sobre o grupo unitário desenvolvido na ref. [56]. Utilizamos a teoria de circuitos escalar para estudar alguns sistemas mesoscópicos de nosso interesse, a saber: ponto quântico conectado a reservatórios por duas barreiras de transparências arbitrária; uma sequência de pontos conectados por junções de tunelamento; e um fio quântico. O nosso formalismo também oferece um procedimento alternativo ao cálculo para as correções quânticas das propriedades semiclássicas obtidas da teoria de circuitos desenvolvido em [55], como também permite estudar a transição gradual entre uma única cavidade caótica e o limite de fio difusivo [93, 95]. A principal vantagem do nosso formalismo é a conexão direta com a teoria de matrizes aleatórias via o modelo estocástico introduzido por Verbaarschot-Weidenmüller-Zirnbauer (VWZ) [73] para um único ponto quântico ou via o modelo desenvolvido por Iida-Weidenmüller-Zuk (IWZ) [96] para uma cadeia de pontos quânticos. Quando esses modelos estocásticos são combinados com supersimetria, temos: inclusão rigorosa de barreiras de transparências arbitrária; um parâmetro natural de expansão para controle de expansões semiclássicas; uma clara visão física do setor não-perturbativo da teoria. Uma clara demonstração dessas vantagens é a solução não-perturbativa exata para o problema da transição ponto-fio para pontos de contato ideais, englobando em uma única fórmula os regimes balísticos, difusivo e o isolante [97]. Discutimos também neste capítulo a generalização deste formalismo para diferentes classes de simetria (ortogonal, unitário e simplético), assim como mostramos uma maneira de utilizar a conexão exata entre o modelo σ não linear supersimétrico e a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias para a execução de cálculos perturbativos e não-perturbativos.

Este capítulo é dividido da seguinte forma, na seção 3.2, apresentamos a dedução do modelo σ não linear supersimétrico que descreve a função geratriz da estatística de contagem de carga transferida através de um ponto quântico com simetria de reversão temporal quebrada. O limite semiclássico deste modelo σ é analisado e o usamos para de-

rivar as leis básicas da teoria de circuitos escalar. Na seção 3.3, o formalismo é estendido para descrever a estatística de contagem de carga através de uma cadeia. Na seção 3.4, apresentamos as devidas extensões do formalismo para outras classes de simetria. Conexões exatas com a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias são apresentadas na seção 3.5. Finalizamos este capítulo com a seção 3.6, onde fornecemos uma discussão das relações entre nosso formalismo e a teoria de circuitos keldyshiana [98] desenvolvida no capítulo anterior. Os resultados deste capítulo foram obtidos em colaboração com Macedo-Junior e encontram-se publicados no Physical Review B [52].

3.2 ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA ATRAVÉS DE UM PONTO QUÂNTICO

Nesta seção implementamos o esquema geral desenvolvido em [88] para construir a representação modelo σ da função geratriz da estatística de contagem de carga através de um ponto quântico acoplado a reservatórios de elétrons via barreiras de transparências arbitrárias. A derivação consiste em três etapas: (i) separação dos graus de liberdade do ambiente (reservatórios, guias e detectores) dos graus de liberdade do sistema (barreiras e ponto), (ii) introdução de um modelo estocástico para a dinâmica caótica dentro do ponto juntamente com uma descrição detalhada de seu acoplamento com os guias, e (iii) mapeamento da expressão final para a média em ensemble da função geratriz em um modelo σ não-linear. De certa maneira tal dedução pode ser considerada como um refra-seamento, na linguagem de física de muitos corpos, da teoria de espalhamento de Büttiker para o ruído da corrente em condutores mesoscópicos [99] com as extensões necessárias para conter a informação sobre todos os cumulantes da estatística de contagem.

3.2.1 Representação em Termos de um Modelo σ

Considere a seguinte equação de Dyson:

$$\sum_{\nu'} [\bar{1}(\delta_{\mu\nu'} E - H_{\mu\nu'}) - \bar{\Sigma}_{\mu\nu'}^\lambda(E)] \bar{G}_{\nu'\nu}^\lambda(E) = \bar{1}\delta_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde os índices μ e ν denotam estados localizados dentro da cavidade e $H_{\mu\nu}$ são elementos de matrizes do hamiltoniano do ponto isolado. Para modelarmos a dinâmica caótica dentro da cavidade devemos assumir que os elementos $H_{\mu\nu}$ são entradas de uma matriz aleatória pertencente ao ensemble gaussiano unitário (EGU), isto é, assumimos que o sistema tem simetria de reversão temporal quebrada. A “barra” indica que a matriz possui estrutura de Keldysh

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A^r & A^\kappa \\ 0 & A^a \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde os índices r , a e κ denotam as componentes retardada, avançada e de Keldysh respectivamente. em particular $\bar{1}$ representa a matriz unidade 2×2 . Iremos utilizar a seguinte notação compacta para as matrizes

$$(\bar{\mathbf{A}}(E))_{\mu\nu} = \bar{A}_{\mu\nu}(E). \quad (3.3)$$

A auto-energia $\bar{\Sigma}^\lambda(E)$ fornece uma descrição estatística da fonte de quase-partículas (reservatórios), especifica também o acoplamento não ideal entre o ponto e os guias e contém toda a informação relevante sobre o acoplamento do sistema e o campo de contagem λ_p , onde p especifica o guia em questão. Na notação matricial que estamos adotando, $\bar{\Sigma}^\lambda(E)$ tem a seguinte forma:

$$\bar{\Sigma}^\lambda(E) = \sum_{p=1}^2 e^{i\lambda_p \bar{\sigma}_1/2} \bar{\Sigma}_p(E) e^{-i\lambda_p \bar{\sigma}_1/2}, \quad (3.4)$$

onde $\bar{\sigma}_1$ é uma matriz de Pauli

$$\bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

No modelo mais simples para o ambiente as componentes de $\bar{\Sigma}_p(E)$ no espaço de Keldysh são dadas por [88]

$$\Sigma_p^\kappa(E) = [2f_p(E) - 1]\Gamma_p, \quad (3.6)$$

e

$$\Sigma_p^{r,a}(E) = \mp \frac{i}{2} \Gamma_p, \quad (3.7)$$

onde $f_p(E) = f(E + V_p)$ é função distribuição de Fermi-Dirac nos reservatórios, V_p é o potencial eletrostático e Γ_p é a matriz fenomenológica que descreve as taxas de tunelamento entre o guia p e a cavidade.

A informação sobre a transferência de carga através do ponto encontra-se codificada na seguinte corrente matricial (para mais detalhes ver por exemplo [6, 16])

$$\bar{I}_p^\lambda(E) = \frac{e}{\hbar} \bar{\sigma}_1 \text{Tr}_\mu ([\bar{\Sigma}_p^\lambda(E), \bar{\mathbf{G}}^\lambda(E)]), \quad (3.8)$$

onde o traço cobre apenas o espaço gerado pelos estados ressonantes no ponto. A carga transferida durante um tempo de observação T_0 é dada por

$$Q_p^\lambda = \frac{T_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr}_\kappa (\bar{I}_p^\lambda(E)), \quad (3.9)$$

onde Tr_κ denota o traço sobre o espaço de Keldysh. Inserindo (3.8) em (3.9) obtemos

$$Q_p^\lambda = \frac{-ieT_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} (\bar{\mathbf{G}}^\lambda(E) \partial_p \bar{\Sigma}_p^\lambda(E)). \quad (3.10)$$

Em (3.10) introduzimos a seguinte notação compacta $\partial_p \equiv \partial/\partial\lambda_p$. Utilizando a identidade

$$\text{Tr} (\bar{\mathbf{G}}^\lambda(E) \partial_p \bar{\Sigma}_p^\lambda(E)) = \partial_p \text{Tr} \ln \bar{\mathbf{G}}^\lambda(E), \quad (3.11)$$

podemos escrever a eq. (3.10) da seguinte forma

$$Q_p^\lambda = -ie\partial_p\Phi(\lambda), \quad (3.12)$$

onde,

$$\Phi(\lambda) \equiv \frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}^\lambda(E)}{\bar{\mathbf{G}}(E)} \right), \quad (3.13)$$

é a função geratriz da estatística de contagem de transferência de carga através do ponto quântico durante o tempo T_0 . As funções $\bar{\mathbf{G}}^\lambda(E)$ e $\bar{\mathbf{G}}(E)$ são relacionadas uma à outra pela seguinte equação de Dyson:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}^\lambda(E) &= \bar{\mathbf{G}}(E) + \bar{\mathbf{G}}(E)(\bar{\Sigma}^\lambda(E) - \bar{\Sigma}(E))\bar{\mathbf{G}}^\lambda(E) \\ &= \bar{\mathbf{G}}(E) + \bar{\mathbf{G}}^\lambda(E)(\bar{\Sigma}^\lambda(E) - \bar{\Sigma}(E))\bar{\mathbf{G}}(E). \end{aligned}$$

Podemos simplificar (3.13) escolhendo $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$ e executando explicitamente o traço sobre a estrutura de Keldysh. Desta forma obtemos a fórmula

$$\Phi(\lambda) = -\frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln(\mathbf{1} + J_\lambda(E)\mathbf{A}(E)), \quad (3.14)$$

onde a função escalar $J_\lambda(E)$ captura toda a informação relevante sobre os reservatórios (funções de distribuição) e campo de contagem (λ)

$$J_\lambda(E) = (e^{i\lambda} - 1)f_1(E)(1 - f_2(E)) + (e^{-i\lambda} - 1)f_2(E)(1 - f_1(E)). \quad (3.15)$$

Essa função tem uma interessante representação em termos de funções de Green quase-clássicas como veremos na seção 3.6. A função matricial

$$\mathbf{A}(E) = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{G}^r(E) \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{G}^a(E) \quad (3.16)$$

contém tanto a informação das barreiras que conectam os guias aos pontos como também sobre a dinâmica quântica microscópica dentro do ponto. A eq. (3.14) é o resultado final da implementação da etapa (i). Ela mostra a separação explícita dos graus de liberdade do ambiente, descritos por $J_\lambda(E)$ e do sistema mesoscópico representado pela matriz $\mathbf{A}(E)$.

Da função geratriz $\Phi(\lambda)$, podemos formalmente calcular a probabilidade P_n de que n partículas sejam transmitidas através do ponto durante o tempo de observação T_0 usando da seguinte relação

$$P_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\Phi(\lambda) - in\lambda}. \quad (3.17)$$

Podemos ainda expandir $\Phi(\lambda)$ em potências do campo de contagem λ para obter todos os cumulantes da estatística de contagem,

$$\Phi(\lambda) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} q_k. \quad (3.18)$$

Os dois primeiros cumulantes são dados por

$$q_1 = \frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE (f_1(E) - f_2(E)) \text{Tr}[\mathbf{A}(E)], \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} q_2 = & \frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \{ (f_1(E) + f_2(E) - 2f_1(E)f_2(E)) \\ & \times \text{Tr}[\mathbf{A}(E)] - (f_1(E) - f_2(E))^2 \text{Tr}[\mathbf{A}^2(E)] \}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

que estão relacionados com a condutância de Landauer e a potência de ruído de disparo da corrente respectivamente.

Uma maneira controlada de se levar em conta a dinâmica caótica dentro da cavidade é utilizar o modelo estocástico introduzido por VWZ [73]. Esse modelo é construído através da fórmula de Mahaux-Weidenmüller [72] para a matriz espalhamento,

$$S_{nm}^{pq}(E) = \delta_{pq}\delta_{nm} - 2\pi i \sum_{\mu\nu} (W_p^\dagger)_{n\mu} G_{\mu\nu}^r(E) (W_q)_{\nu m}, \quad (3.21)$$

onde os índices p, q (n, m) denotam os guias (canais de espalhamento). A função de Green retardada é a solução da equação de Dyson (3.1) na ausência de campo de contagem,

$$\mathbf{G}^r(E) = (\mathbf{1}E - \mathbf{H} + (i/2)(\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2))^{-1}, \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz aleatória $M \times M$ pertencente ao EGU. As matrizes retangulares $\mathbf{W}_p$ são não-aleatórias e especificam as matrizes de acoplamento ponto-guia através da relação

$$\mathbf{\Gamma}_p = 2\pi \mathbf{W}_p \mathbf{W}_p^\dagger, \quad p = 1, 2. \quad (3.23)$$

Elas também satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade

$$(\mathbf{W}_p^\dagger \mathbf{W}_q)_{nm} = \frac{\gamma}{\pi} \delta_{pq} \delta_{nm} e^{-\alpha_{pn}}, \quad (3.24)$$

onde α_{pn} é um parâmetro livre que quantifica a intensidade do acoplamento ponto-guia. O parâmetro γ fixa o espaçamento médio de níveis Δ das ressonâncias dentro da cavidade. A distribuição de $\mathbf{H}$ é

$$P(H) \propto \exp \left(-\frac{M}{2\gamma^2} \text{Tr}(H^2) \right). \quad (3.25)$$

A média no ensemble da matriz espalhamento no limite de um grande número de ressonâncias, $M \gg 1$, é dado por (ver apêndice B para dedução)

$$\langle S_{nm}^{pq}(E) \rangle = \delta_{pq} \delta_{nm} \frac{1 - i\xi(E)e^{-\alpha_{pn}}}{1 + i\xi(E)e^{-\alpha_{pn}}}, \quad (3.26)$$

onde,

$$\xi(E) = \frac{E}{2\gamma} - i\sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\gamma}\right)^2}. \quad (3.27)$$

Neste mesmo limite a densidade média de ressonâncias (parte real dos pólos de ressonância) obedece a lei do semi-círculo

$$\sigma(E) = \frac{M}{\pi\gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\gamma}\right)^2}. \quad (3.28)$$

É importante lembrar que apenas as características universais locais em espectro do modelo VWZ podem ser consideradas predições corretas para um sistema caótico realista. Tendo isso em mente fazemos $E = 0$ nas fórmulas acima, assim $\Delta = 1/\sigma(0) = \pi\gamma/M$ é o espaçamento médio de níveis dentro da cavidade. Os coeficientes de transmissão das barreiras nas interfaces ponto-guia são definidos como

$$T_{pn} = 1 - |\langle S_{nn}^{pp}(0) \rangle|^2 = \text{sech}^2(\alpha_{pn}/2). \quad (3.29)$$

E finalmente, a matriz de transmissão aleatória pelo ponto é dada por

$$\mathbf{t}(E) = -2\pi i \mathbf{W}_1^\dagger \mathbf{G}^r(E) \mathbf{W}_2. \quad (3.30)$$

Inserindo a eq. (3.30) em (3.14) obtemos

$$\Phi(\lambda) = -\frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln(\mathbf{1} + J_\lambda(E) \mathbf{t}(E) \mathbf{t}^\dagger(E)), \quad (3.31)$$

que é uma função aleatória e portanto, necessitamos executar a média em ensemble no regime local em espectro ($E = 0$) mencionado anteriormente. Com a obtenção de (3.31) finalizamos o passo (ii).

Para que possamos executar a média em ensemble, é conveniente definir a seguinte função auxiliar:

$$q(\lambda) = i \frac{\partial \langle \Phi(\lambda) \rangle}{\partial \lambda}, \quad (3.32)$$

substituindo (3.31) em (3.32), obtemos

$$q(\lambda) = -i \frac{T_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\partial J_\lambda(E)}{\partial \lambda} \frac{K(\sinh^{-1} \sqrt{J_\lambda(E)})}{\sqrt{J_\lambda(E)(1 + J_\lambda(E))}}, \quad (3.33)$$

onde a função $K(x)$ é definida como [100]

$$K(x) = \frac{1}{2} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{\sinh(2x) \mathbf{t}(E) \mathbf{t}^\dagger(E)}{1 + \sinh^2(x) \mathbf{t}(E) \mathbf{t}^\dagger(E)} \right) \right\rangle. \quad (3.34)$$

Existe um procedimento exato que permite executar médias em ensemble de razões entre determinantes que garante acesso direto a todos os regimes físicos (perturbativo e não-perturbativo), que é a técnica supersimétrica [68]. Considere a função geratriz introduzida por Rejai [101]

$$\Psi(\vec{a}, \vec{b}) = \left\langle \det \left(\frac{1 - b_1 b_2 \mathbf{t}(E) \mathbf{t}^\dagger(E)}{1 - a_1 a_2 \mathbf{t}(E) \mathbf{t}^\dagger(E)} \right) \right\rangle. \quad (3.35)$$

Observe que a função $K(x)$ pode ser obtida da $\Psi(\vec{a}, \vec{b})$ através da relação abaixo:

$$K(x) = \frac{\partial \Psi(\vec{a}, \vec{b})}{\partial a_2} \Big|_{\vec{a}=(\frac{1}{2} \sinh 2x, -\tanh x)=\vec{b}}. \quad (3.36)$$

A próxima etapa consiste no mapeamento da média em ensemble, local em espectro ($E = 0$), e no limite $M \rightarrow \infty$ da razão de determinantes (3.35) numa integral sobre um espaço quociente de um modelo σ não linear supersimétrico (para maiores detalhes ver por exemplo a ref. [68]). Como resultado desta etapa a função geratriz $\Psi(\vec{a}, \vec{b})$ pode ser escrita da seguinte forma compacta

$$\Psi(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{Q^2=1} dQ F_1(Q_{\vec{a}\vec{b}}, Q) F_2(Q, Q_0), \quad (3.37)$$

onde,

$$F_p(Q, Q') = \prod_{n=1}^{N_p} \text{Sdet}^{-1/2} (1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'), \quad (3.38)$$

são as funções de acoplamento que descrevem as interfaces guia-ponto e N_p é o número de canais de espalhamento abertos em cada guia p . Nós adaptamos a notação padrão para as operações em supermatemática: Sdet significa a operação de superdeterminante e dQ é a medida invariante do espaço quociente. As coordenadas dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são codificados na supermatriz fonte, $Q_{\vec{a}\vec{b}} \equiv S Q_0 S^{-1}$, onde

$$S = \exp \begin{pmatrix} 0 & iX_1 \\ iY_1 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & iY_2 \\ iX_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

com $X_j = \text{diag}(a_j, 0, b_j, 0)$, $Y_j = \text{diag}(0, a_j, 0, b_j)$ e $Q_0 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$.

A equação (3.37) encerra a última etapa de derivação do nosso modelo. Tal como está, esse método é uma representação matemática exata da física associada à estatística de contagem de carga através de uma cavidade caótica com contatos não ideais e simetria de reversão temporal quebrada. Isto permite extrair de maneira controlada e sistemática propriedades físicas relevantes do problema tanto perturbativas como não-perturbativas. No regime semi-clássico, como veremos abaixo, essa construção nos permite obter a teoria de circuitos na sua forma escalar [93].

3.2.2 Equação de Ponto de Sela e a Teoria Quântica de Circuitos

A representação integral (3.37) da função geratriz $\Psi(\vec{a}, \vec{b})$ pode apenas ser resolvida exatamente, i. e., ser expressa em termos de combinações de funções especiais conhecidas, para o caso de contatos ideais ($T_{pm} = 1$). Nesta subseção vamos considerar o regime semiclássico, onde o número de canais abertos de espalhamento é muito grande ($N_1, N_2 \gg$

1). Como veremos posteriormente é conveniente escrevermos as componentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i}{2} \sinh \phi_1; \quad a_2 = -i \tanh(\phi_1/2) \\ b_1 &= -\frac{1}{2} \sin \phi_0; \quad b_2 = -\tan(\phi_0/2). \end{aligned}$$

A supermatriz fonte pode ser escrita em termos desses novos parâmetros:

$$Q_{\vec{a}\vec{b}} = \begin{pmatrix} \cos \hat{\phi} & i \sin \hat{\phi} \\ -i \sin \hat{\phi} & -\cos \hat{\phi} \end{pmatrix} \equiv Q_{\hat{\phi}}, \quad (3.40)$$

onde introduzimos a seguinte matriz diagonal $\hat{\phi} = \text{diag}(i\phi_1, i\phi_1, \phi_0, \phi_0)$. Para detalhes da dedução dessa parametrização ver apêndice C. Com essa escolha a eq. (3.37) adquire a seguinte forma

$$\Psi(\phi_0, \phi_1) = \int_{Q^2=1} dQ e^{iS(Q, Q_{\hat{\phi}})}, \quad (3.41)$$

onde a ação efetiva de baixa energia é dada por

$$iS(Q, Q_{\hat{\phi}}) = iS_1(Q, Q_{\hat{\phi}}) + iS_2(Q, Q_0), \quad (3.42)$$

onde,

$$iS_p(Q, Q') = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_p} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'). \quad (3.43)$$

A equação de ponto de sela é obtida da extremização de $iS(Q, Q_{\hat{\phi}})$ com relação ao vínculo $Q^2 = 1$. Isto pode ser obtido através da seguinte transformação $Q \rightarrow \tilde{Q} = e^{\delta\Omega} Q e^{-\delta\Omega} \simeq Q + \delta Q$, onde $\delta Q \equiv [\delta\Omega, Q]$. Implementando essa transformação, a ação efetiva (3.42) fica:

$$iS(Q + \delta Q, \hat{\phi}) = iS^{(0)}(Q, \hat{\phi}) + iS^{(1)}(Q + \delta Q, \hat{\phi}), \quad (3.44)$$

onde,

$$iS^{(0)}(Q, \hat{\phi}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}}) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0), \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} iS^{(1)}(Q + \delta Q, \hat{\phi}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \text{Str} \ln(1 + (1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}})^{-1} e^{-\alpha_{1n}} \delta Q Q_{\hat{\phi}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} \text{Str} \ln(1 + (1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0)^{-1} e^{-\alpha_{2n}} \delta Q Q_0). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Utilizando a expansão $\text{Str} \ln(1+X) = \text{Str} X - \frac{1}{2}\text{Str} X^2 + \frac{1}{3}\text{Str} X^3 + \dots$ e a seguinte identidade $\text{Str}(A[B, C]) = \text{Str}([B, A]C)$, podemos escrever $iS^{(1)}(Q + \delta Q, \hat{\phi})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} iS^{(1)}(Q + \delta Q, \hat{\phi}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} e^{-\alpha_{1n}} \text{Str}([Q, Q_{\hat{\phi}}(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}})^{-1}] \delta \Omega) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_2} e^{-\alpha_{2n}} \text{Str}([Q, Q_0(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0)^{-1}] \delta \Omega). \end{aligned} \quad (3.47)$$

A equação de ponto de sela é obtida extremizando a expressão acima em relação a $\delta \Omega$:

$$\frac{\delta S^{(1)}(Q + \delta Q, \hat{\phi})}{\delta \Omega} = 0, \quad (3.48)$$

donde obtemos:

$$\sum_{n=1}^{N_1} e^{-\alpha_{1n}} [Q, Q_{\hat{\phi}}(1 + e^{-\alpha_{1n}} Q Q_{\hat{\phi}})^{-1}] = \sum_{n=1}^{N_2} e^{-\alpha_{2n}} [Q_0(1 + e^{-\alpha_{2n}} Q Q_0)^{-1}, Q]. \quad (3.49)$$

Essa equação pode ser resolvida utilizando o ansatz (ver apêndice C):

$$Q_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \sin \hat{\theta} \\ -i \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

onde $\hat{\theta} = \text{diag}(i\theta_1, i\theta_1, \theta_0, \theta_0)$. Desta forma obtemos a equação matricial diagonal:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \frac{\sin(\hat{\phi} - \hat{\theta})}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\hat{\phi} - \hat{\theta})} = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\sin \hat{\theta}}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \hat{\theta}}. \quad (3.51)$$

Com a solução da equação acima podemos calcular $\Psi(\phi_0, \phi_1)$ com precisão logaritmica:

$$\begin{aligned} \ln \Psi(\phi_0, \phi_1) &\simeq \sum_{n=1}^{N_1} \ln \left(\frac{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\phi_0 - \theta_0)}{\cosh \alpha_{1n} + \cosh(\phi_1 - \theta_1)} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_2} \ln \left(\frac{\cosh \alpha_{2n} + \cos \theta_0}{\cosh \alpha_{2n} + \cosh \theta_1} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

A função $K(x)$ pode ser obtida através da relação abaixo

$$K(x) = -i \frac{\partial \Psi(\phi_0, \phi_1)}{\partial \phi_0} \Big|_{\phi_0 = -2ix = i\phi_1}. \quad (3.53)$$

Inserindo a eq. (3.52) em (3.53) e escolhendo $\theta_0 = -2iy = i\theta_1$ nós recuperamos a lei de conservação da teoria de circuitos escalar,

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y), \quad (3.54)$$

onde,

$$K_p(x) = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh \alpha_{pn}}, \quad (3.55)$$

representa a relação “corrente-voltagem” característica de uma barreira arbitrária. A interpretação de $K(x)$ como uma pseudo-corrente escalar e as variáveis x e y como pseudo-potenciais dá à equação de ponto de sela a estrutura de uma teoria de circuito. Este é o principal resultado desta seção. Esta dedução matemática substitui argumentos indiretos anteriores [53] que sugeriam tal conexão. Existem diversas maneiras de generalizar nossa construção, e.g., considerando o caso de multi-terminais ou redes de pontos quânticos, algumas destas iremos tratar nas próximas seções. Para encerrar esta seção iremos nos concentrar num caso de grande relevância: um ponto quântico conectado a guias por barreiras de transparências arbitrárias. Nesse caso, $K_p(x)$ fica:

$$K_p(x) = \frac{N_p}{2} \left[\tanh\left(x + \frac{1}{2}\alpha_p\right) + \tanh\left(x - \frac{1}{2}\alpha_p\right) \right]. \quad (3.56)$$

Inserindo a eq. (3.56) em (3.54) encontramos,

$$K(x) = \frac{NT_2\xi}{1 - (1 - T_2)\xi^2}, \quad (3.57)$$

onde ξ é a solução da seguinte equação de quarto grau ($N_1 = N_2$)

$$[T_1(1 - T_2) \tanh x] \xi^4 - (3T_1T_2 \tanh x) \xi^2 + [(T_1T_2 + T_2 - T_1) \tanh^2 x + 2T_1T_2 - T_1 - T_2] \xi^3 + [(T_1T_2 + T_1 - T_2) \tanh^2 x + T_1 + T_2] \xi - T_1 \tanh x = 0. \quad (3.58)$$

As equações (3.57) e (3.58) são as equações da teoria de circuitos escalar para um ponto quântico com duas barreiras. Tal conjunto de equações foi demonstrado na ref. [94] ser equivalente ao conjunto de equações obtidas para o mesmo sistema via técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário [56]. Na ref. [53], essas equações foram utilizadas para descrever uma sutil transição quântica associada com a emergência de modos Fabry-Pérot dentro do ponto quântico quando variamos as transparências das barreiras. Na presença de interação coulombiana, esta transição leva a uma lei de potência não usual para a condutância diferencial em baixas temperaturas e voltagens [102], que implica no surgimento de uma estrutura tipo plateau no fator Fano (razão entre o segundo e o primeiro cumulante da estatística de contagem), quando variamos os valores T_1 e T_2 . No próximo capítulo iremos voltar a falar de forma mais detalhada de tal transição.

Na próxima seção estenderemos o formalismo de modelo σ para a descrição do processo de transferência de carga através de uma cadeia de pontos quânticos.

3.3 ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA ATRAVÉS DE UMA CADEIA DE PONTOS QUÂNTICOS

Nesta seção aplicamos o formalismo geral desenvolvido na seção anterior para deduzir uma expressão exata para a função geratriz da estatística de contagem de carga através de uma cadeia quântica acoplada a dois reservatórios de elétrons. Os passos a serem seguidos aqui são essencialmente os mesmos apresentados na seção anterior, portanto nossa apresentação aqui será menos detalhada.

3.3.1 Representação em Termos de um Modelo- σ

A ideia básica aqui é aplicar o modelo introduzido por IWZ [96], no qual a cadeia quântica é representada por uma série de L cavidades caóticas fracamente acopladas. O hamiltoniano H de todo o sistema portanto adquire uma estrutura de blocos, tal que o bloco $H^{(i,i)}$ é uma matriz aleatória que descreve a dinâmica caótica do i -ésimo ponto e, $H^{(i,i+1)}$, descreve o acoplamento entre os estados internos de cavidades adjacentes. O aspecto estocástico do modelo é especificado assumindo a seguinte distribuição gaussiana para o hamiltoniano

$$P(H) \propto \prod_{i=1}^L P(H^{(i,i)}) \prod_{i=1}^{L-1} P(H^{(i,i+1)}), \quad (3.59)$$

onde,

$$P(H^{(i,i)}) \propto \exp \left(-\frac{M}{2\gamma^2} \text{Tr} (H^{(i,i)})^2 \right), \quad (3.60)$$

e

$$P(H^{(i,i+1)}) \propto \exp \left(-\frac{M^2}{\gamma^2 g} \text{Tr} (H^{(i,i+1)} H^{(i+1,i)}) \right), \quad (3.61)$$

onde, γ e M são definidos como na seção anterior e g é um parâmetro livre que quantifica o acoplamento total entre cavidades adjacentes. Na expressão definida acima, utilizamos a propriedade $(H^{(i,i+1)})^\dagger = H^{(i+1,i)}$ e assumimos também a ausência da simetria de reversão temporal.

Introduzimos as matrizes não aleatórias W_1 e W_2 que conectam o primeiro guia à L -ésima cavidade e a primeira cavidade ao segundo guia, respectivamente. A intensidade do acoplamento $e^{-\alpha_{pn}/2}$ (ver eq. (3.24)), determina os coeficientes de transmissão das barreiras através da relação $T_{pn} = \text{sech}^2(\alpha_{pn}/2)$. Executando a média em ensemble, nós obtemos, no regime de interesse ($M \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$) a seguinte expressão [103]:

$$\Psi(\phi_0, \phi_1) = \int \prod_{j=1}^L dQ_j e^{iS(\{Q\}, Q_\phi)}, \quad (3.62)$$

onde,

$$iS(\{Q\}, Q_{\hat{\phi}}) = -\frac{g}{4} \sum_{j=1}^{L-1} \text{Str}(Q_j Q_{j+1}) + iS_1(Q_L, Q_{\hat{\phi}}) + iS_2(Q_1, Q_0),$$

e

$$iS_p(Q, Q') = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_p} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'), \quad (3.63)$$

que é a representação matemática exata da função geratriz da estatística de contagem de carga através de uma cadeia de pontos quânticos com dois contatos não ideais.

3.3.2 Análise do Ponto de Sela

Extremizando $S(\{Q\}, Q_{\hat{\phi}})$ sob o vínculo $Q_j^2 = 1$, obtemos as seguintes equações de ponto de sela:

$$[Q_j, Q_{j-1}] = [Q_{j+1}, Q_j]; \quad (3.64)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} e^{-\alpha_{1n}} [Q_{\hat{\phi}} (1 + e^{-\alpha_{1n}} Q_L Q_{\hat{\phi}})^{-1}, Q_L] = \frac{g}{2} [Q_L, Q_{L-1}], \quad (3.65)$$

e

$$\sum_{n=1}^{N_2} e^{-\alpha_{2n}} [Q_1, Q_0 (1 + e^{-\alpha_{2n}} Q_1 Q_0)^{-1}] = \frac{g}{2} [Q_2, Q_1]. \quad (3.66)$$

Podemos resolver este conjunto de equações utilizando o ansatz

$$Q_j = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta}_j & i \sin \hat{\theta}_j \\ -i \sin \hat{\theta}_j & -\cos \hat{\theta}_j \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde $\hat{\theta}_j = \text{diag}(i\theta_{j1}, i\theta_{j1}, \theta_{j0}, \theta_{j0})$. Com esta parametrização, as equações de ponto de sela tornam-se relações entre matrizes diagonais

$$\sin(\hat{\theta}_{j+1} - \hat{\theta}_{j-1}) = \sin(\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_{j-1}), \quad (3.68)$$

$$\frac{\sin(\hat{\phi} - \hat{\theta}_L)}{\cosh \alpha_{1n} + \cos(\hat{\phi} - \hat{\theta}_L)} = \frac{g}{2} \sin(\hat{\theta}_L - \hat{\theta}_{L-1}), \quad (3.69)$$

e

$$\frac{g}{2} \sin(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1) = \frac{\sin \hat{\theta}_1}{\cosh \alpha_{2n} + \cos \hat{\theta}_1}. \quad (3.70)$$

Calculando $\Psi(\phi_0, \phi_1)$ com precisão logaritmica e utilizando a eq. (3.53), obtemos a lei de conservação da teoria de circuito escalar para a cadeia quântica

$$\begin{aligned} K(x, L) &= K_1(x - x_L) = K^{(L-1)}(x_L - x_{L-1}) = \dots \\ &= K^{(1)}(x_2 - x_1) = K_2(x_1), \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde,

$$K_p(x) = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh \alpha_{pn}}, \quad (3.72)$$

e

$$K^{(j)}(x) = \frac{g}{2} \sinh 2x. \quad (3.73)$$

Assumindo que a queda de potencial através de cada cavidade é pequena, $|x_j - x_{j-1}| \ll 1$, a eq. (3.71) pode ser reescrita da seguinte forma

$$K(x, s) = K_1(x - x_L) = \frac{x_L - x_1}{s} = K_2(x_1), \quad (3.74)$$

onde $s \equiv (L - 1)/g$. A eq. (3.74) foi estudada em [93], onde foi mostrado que ela é equivalente a

$$K(x, s) = K_0(x - sK(x, s)), \quad (3.75)$$

onde $K_0(x)$ satisfaz a lei de conservação de um ponto quântico conectado a duas barreiras

$$K_0(x) = K_1(x - y) = K_2(y). \quad (3.76)$$

Podemos facilmente verificar que $K(x, s)$ também satisfaz à seguinte equação diferencial não-linear:

$$\frac{\partial K(x, s)}{\partial s} + K(x, s) \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} = 0, \quad (3.77)$$

cuja condição inicial é

$$K(x, 0) = K_0(x). \quad (3.78)$$

Essa equação diferencial foi utilizada em [93] para estabelecer uma conexão direta entre a teoria de circuitos escalar e a equação de escala DMPK [104, 105].

3.4 EXTENSÃO PARA OUTRAS CLASSES DE SIMETRIA

Uma das vantagens de uma descrição em termos de matrizes aleatórias é que tal formalismo permite uma classificação de um sistema físico complexo usando apenas a presença ou ausência de certas simetrias fundamentais, como reversão temporal (RT) e rotação de spin (RS). De acordo com Zirnbauer [106], existem dez classes de universalidade: três classes Wigner-Dyson (WD), três classes quirais e quatro classes de Bogoliubov-de Gennes. Até agora neste capítulo trabalhamos com uma única classe, a classe WD unitária (WDU), que descreve sistemas com simetria RT quebrada. Nesta seção iremos estender nossa descrição à classe WD ortogonal (WDO), onde a simetria de RT está presente assim como a simetria de RS e a WD simplética (WDS), caracterizada pela presença de RT e ausência de RS. Do ponto de vista matemático a distinção entre as três classes WD pode ser feita através da escolha da álgebra de divisão usada para representar as entradas da matriz hamiltoniana aleatória e utilizando um rótulo β que denota o número de componentes reais independentes em cada entrada. Para a classe WDO temos $\beta = 1$ (números reais), para WDU $\beta = 2$ (números complexos) e finalmente para WDS $\beta = 4$ (números quaterniônicos reais).

Por simplicidade nesta seção iremos apenas considerar o caso de um ponto conectado a duas barreiras. Vamos demonstrar que as equações de ponto de sela levam a um conjunto escalar de equações independentes de β que são idênticas a forma escalar da teoria de circuitos. As correções quântica contudo, dependem da classe de simetria de maneira não trivial. Começamos esta seção utilizando a função geratriz estendida introduzida em [103],

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \left\langle \prod_{\sigma=\pm} \det^{1/2} \left(\frac{1 - \sin^2(\phi_{0\sigma}^{(\beta)}/2) \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger}{1 + \sinh^2(\phi_{1\sigma}^{(\beta)}/2) \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger} \right) \right\rangle, \quad (3.79)$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi_{0\sigma}^{(\beta)} &= \phi_0 + \sigma \phi_{0\beta}; & \phi_{0\beta} &= \phi_2 \delta_{\beta,4} \\ \phi_{1\sigma}^{(\beta)} &= \phi_1 + \sigma \phi_{1\beta}; & \phi_{1\beta} &= \phi_3 \delta_{\beta,1} \\ \vec{\phi} &= (\phi_0, \phi_{0\beta}, \phi_1, \phi_{1\beta}). \end{aligned}$$

A pseudo-corrente escalar é obtida através da seguinte relação

$$K^{(\beta)}(x) = \frac{i}{2} I^{(\beta)}(\phi) \Big|_{\phi=-2ix}, \quad (3.80)$$

onde,

$$I^{(\beta)}(\phi) = -2^{m_\beta} \frac{\partial \Psi^{(\beta)}(\vec{\phi})}{\partial \phi_{0,+}^{(\beta)}} \Big|_{\vec{\phi}=(\phi, \phi, i\phi, i\phi)}, \quad (3.81)$$

e $m_\beta = 1 + \delta_{\beta,4}$. Seguindo as etapas usuais que nos levam à representação em termos de modelo σ , encontramos

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \int_{Q^2=1} dQ e^{iS_c^{(\beta)}(Q, Q_{\hat{\phi}})}, \quad (3.82)$$

onde,

$$S_c^{(\beta)}(Q, Q_{\hat{\phi}}) = m_{\beta}(S_1(Q_{\hat{\phi}}, Q) + S_2(Q, Q_0)), \quad (3.83)$$

e

$$iS_p(Q, Q') = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_p} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'). \quad (3.84)$$

As equações de ponto de sela podem ser resolvidas utilizando a seguinte generalização do ansatz que vimos em seções anteriores

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & i \sin \hat{\theta} \\ -i \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

onde,

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} i\theta_B & 0 \\ 0 & \theta_F \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

e

$$\theta_B = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_{1\beta} \\ \theta_{1\beta} & \theta_1 \end{pmatrix}; \quad \theta_F = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_{0\beta} \\ \theta_{0\beta} & \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Extremizando a ação $S_c^{(\beta)}(Q, Q_{\hat{\phi}})$, recuperamos a lei de conservação da teoria de circuitos escalar, eq. (3.54). Na próxima seção utilizaremos a conexão entre o modelo σ e a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias para calcular as correções quânticas da teoria de circuitos, que são dependentes de β .

3.5 CONEXÃO COM A TEORIA DE MATRIZES DE ESPALHAMENTO ALEATÓRIAS

Uma das mais poderosas consequências do nosso formalismo é a possibilidade de se usar o formalismo de matrizes de espalhamento aleatórias (ou matriz transferência) e o modelo σ não linear supersimétrico, para executar os cálculos das correções quânticas da teoria de circuitos. O objeto central nesta conexão é o seguinte núcleo de transformação

$$\Omega^{(\beta)}(\vec{\nu}, S) = \prod_{\sigma=\pm} \det^{1/2} \left(\frac{2 - (1 - \nu_{0\sigma}^{(\beta)}) \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger}{2 - (1 - \nu_{1\sigma}^{(\beta)}) \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger} \right), \quad (3.88)$$

onde S denota a matriz de espalhamento e

$$\begin{aligned} \nu_{0\sigma}^{(\beta)} &= \cos(\phi_{0\sigma}^{(\beta)}); & \nu_{1\sigma}^{(\beta)} &= \cosh(\phi_{1\sigma}^{(\beta)}) \\ \vec{\nu} &= (\nu_0, \nu_{0\beta}, \nu_1, \nu_{1\beta}). \end{aligned}$$

Nas subseções seguintes, iremos mostrar com $\Omega^{(\beta)}(\vec{\nu}, S)$ pode ser utilizada para executar conversões exatas entre o modelo σ e a teoria de matrizes espalhamento aleatória, que é capaz de fornecer um poderoso esquema de cálculo (perturbativo e não-perturbativo) das correções quânticas da teoria de circuitos.

3.5.1 Cavidades Caóticas

Da prova da equivalência [107, 108] entre o formalismo hamiltoniano (modelo VWZ) e o formalismo de matrizes espalhamento [109] baseado no princípio de máxima entropia da teoria de matrizes aleatórias, podemos estabelecer a seguinte relação exata:

$$\Psi^{(\beta)}(\vec{\nu}) = \int dS \Omega^{(\beta)}(\vec{\nu}, S) P^{(\beta)}(S), \quad (3.89)$$

onde,

$$P^{(\beta)}(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-\beta(N_1 + N_2 - 1 + 2/\beta)}, \quad (3.90)$$

é o núcleo de Poisson [109] e N_1 e N_2 são os números de canais abertos nos guias 1 e 2, respectivamente. A matriz de espalhamento pode ser expressa em termos das matrizes de reflexão $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e de transmissão $(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t} \\ \mathbf{t}' & \mathbf{r}' \end{pmatrix}, \quad (3.91)$$

e $\bar{S}$ é uma matriz sub-unitária da forma

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

que descreve as propriedades de espalhamento das barreiras. A pseudo-corrente escalar da teoria de circuitos pode ser obtida da relação,

$$K^{(\beta)}(x) = 2^{m_\beta - 1} \sinh(2x) \frac{\partial \Psi^{(\beta)}(\vec{\nu})}{\partial \nu_{0,+}^{(\beta)}} \Big|_{\vec{\nu}=(\nu, \nu, \nu, \nu)}, \quad (3.93)$$

onde $\nu = \cosh 2x$. A eq. (3.89) pode ser usada na construção de um esquema diagramático perturbativo, seguindo a ref. [56], que permite a computação das correções quânticas da teoria de circuitos de forma sistemática. O termo dominante desta expansão semiclássica ($N_1, N_2 \gg 1$) foi mostrado na ref. [94] estar em perfeita concordância com a teoria de circuitos escalar.

Para contatos ideais ($T_{pn} = 1$), consideráveis avanços nos cálculos de tais correções foram feitos utilizando poderosas técnicas de movimento browniano [110]. Isto é possível pelo fato de que para contatos ideais $\bar{S} = 0$, implicando que $P^{(\beta)}(S)$ é uma constante e através da propriedade de fatoração da medida de Haar,

$$dS \propto \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_{i=1}^N \tau_i^\mu \quad (3.94)$$

onde τ_i são os autovalores de $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$, e

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\beta}{2}(|N_2 - N_1| + 1 - 2/\beta), \\ N &= \min\{N_1, N_2\}.\end{aligned}$$

Utilizando os resultados da ref. [110], encontramos a seguinte expansão semi-clássica para a pseudo-corrente:

$$\begin{aligned}K^{(\beta)}(x) &\simeq \frac{N_1 + N_2}{2} \coth x \left(1 - \sqrt{1 - \tanh^2 x_0 \tanh^2 x}\right) \\ &\quad - \frac{2 - \beta}{8\beta} \frac{\sinh 2x}{\cosh^2 x (1 + \operatorname{cosech}^2 x_0 \cosh^2 x)},\end{aligned}$$

onde $\tanh^2 x_0 = 4N_1N_2/(N_1 + N_2)^2$, que está em concordância com o resultado obtido por Campagnano e Nazarov [55].

Para sistemas com simetria unitária, o método da transformada integral da ref. [110] nos dá expressões exatas no regime não-perturbativo

$$K(x) = \coth x \sum_{n=0}^{N-1} (1 - f_n(\cosh 2x) g_n(\cosh 2x)), \quad (3.95)$$

onde,

$$\begin{aligned}f_n(\nu) &= F(-n, -n - \mu; -2n - \mu; \frac{1 - \nu}{2}) \\ g_n(\nu) &= F(n + 1, n + 1 + \mu; 2n + 2 + \mu; \frac{1 - \nu}{2}),\end{aligned}$$

e $F(a, b; c; x)$ é a função hipergeométrica. Expressões similares também são encontradas para o caso ortogonal ($\beta = 1$) e simplético ($\beta = 4$) utilizando o método de polinômios de Jack combinados com a transformada integral da ref. [110].

3.5.2 Fios Quânticos

No limite do contínuo a eq. (3.71) da cadeia quântica simplifica-se bastante e obtemos a seguinte representação do modelo σ para a função geratriz da estatística de contagem de transferência de carga através de um fio quântico com contatos ideais

$$\Psi_s^{(\beta)}(\vec{\phi}) = \int dQ dQ' e^{iS_c^{(\beta)}(Q, Q', Q_\phi)} W_s^{(\beta)}(Q, Q'), \quad (3.96)$$

onde $s = 2L/\xi$ é duas vezes o comprimento do fio em unidades do comprimento de localização. A ação efetiva do acoplamento fio-guia é dado por

$$S_c^{(\beta)}(Q, Q', Q_\phi) = m_\beta(S_1(Q_\phi, Q) + S_2(Q', Q_0)), \quad (3.97)$$

onde,

$$iS_p(Q, Q') = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_p} \text{Str} \ln(1 + e^{-\alpha_{pn}} Q Q'). \quad (3.98)$$

e $W_s^{(\beta)}(Q, Q')$ é o núcleo de calor do espaço quociente de Efetov,

$$\begin{aligned} (\partial_s - \Delta_Q^{(\beta)}) W_s^{(\beta)}(Q, Q') &= 0 \\ W_0^{(\beta)}(Q, Q') &= \delta(Q - Q'). \end{aligned}$$

A conexão com a teoria de circuitos escalar pode ser feita definindo a pseudo-corrente

$$I_s^{(\beta)}(\phi) = -2^{m_\beta} \frac{\partial \Psi_s^{(\beta)}(\vec{\phi})}{\partial \phi_{0,+}^{(\beta)}} \Big|_{\vec{\phi}=(\phi, \phi, i\phi, i\phi)}. \quad (3.99)$$

Para contatos ideais e simetria unitária, resultados exatos podem ser obtidos para os autovalores e autovetores da parte radial do operador de Laplace-Beltrami $\Delta_Q^{(2)}$. Adaptando os resultados da ref. [97], temos

$$I_s^{(2)}(\phi) = 2 \sin \phi \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\infty d\mu_{nk} c_{nk}^{(N_1)} c_{nk}^{(N_2)} f_{nk}(\phi) e^{-\varepsilon_{nk}s}, \quad (3.100)$$

onde,

$$\begin{aligned} d\mu_{nk} &= \frac{(2n+1)}{\varepsilon_{nk}} k \tanh(k\pi) dk \\ \varepsilon_{nk} &= k^2 + n(n+1) + 1/4 \\ c_{nk}^{(N)} &= \frac{|\Gamma(N+1/2+ik)|^2}{(N-n-1)!(N+n)!} \\ f_{nk}(\phi) &= P_n(\cos \phi) P_{ik-1/2}(\cos \phi) \\ N &= \min\{N_1, N_2\}, \end{aligned}$$

e $P_n(x)$ é o polinômio de Legendre e $P_{ik-1/2}(x)$ é a função cônica.

Outro caminho que podemos tomar, é aplicar o mapeamento exato entre o modelo σ e a teoria DMPK [104, 105, 111, 112], que foi utilizada na ref. [103] para estabelecer a prova de equivalência. Considere a seguinte relação

$$\Psi_s^{(\beta)}(\vec{\nu}) = \int dM \Omega^{(\beta)}(\vec{\nu}, S) P_s^{(\beta)}(M), \quad (3.101)$$

onde M é matriz transferência que contém a mesma informação codificada na matriz S como podemos ver da sua representação em termos das matrizes reflexão e transmissão

$$M = \begin{pmatrix} (\mathbf{t}^\dagger)^{-1} & \mathbf{r}'(\mathbf{t}')^{-1} \\ -(\mathbf{t}')^{-1}\mathbf{r} & (\mathbf{t}')^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

A função distribuição $P_s^{(\beta)}(M)$ descreve a mudança na distribuição da matriz transferência em função do parâmetro de comprimento adimensional s . Tal função distribuição satisfaz a equação DMPK

$$\begin{aligned} (\partial_s - \mathcal{L}_{\text{DMPK}}^{(\beta)})P_s^{(\beta)}(M) &= 0 \\ P_0^{(\beta)}(M) &= P^{(\beta)}(S), \end{aligned}$$

onde $P^{(\beta)}(S)$ é o núcleo de Poisson (eq. (3.90)) e $\mathcal{L}_{\text{DMPK}}^{(\beta)}$ é o operador de Fokker-Planck da teoria DMPK que nas coordenadas usuais, definidas como $\lambda_i = (1 - \tau_i)/\tau_i$, é

$$\mathcal{L}_{\text{DMPK}}^{(\beta)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \lambda_i (1 + \lambda_i) J_\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_i} J_\beta^{-1}, \quad (3.103)$$

onde

$$J_\beta = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta. \quad (3.104)$$

Utilizando a teoria de função geratriz introduzida em [100], podemos sistematicamente calcular as correções da teoria de circuitos que descreve a transição gradual ponto-fio apresentada na ref. [93]. No caso mais simples de contatos ideais e $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ podemos utilizar os resultados de [100] para o regime perturbativo. A expansão semi-clássica da pseudo-corrente é dada por

$$I_s^{(\beta)}(\phi) = \frac{\phi}{s} + a_\beta f(\phi) + sb_\beta \frac{d}{d\phi} \left(\frac{f(\phi)}{\phi} \right) + O(s^2), \quad (3.105)$$

onde

$$\begin{aligned} a_\beta &= \frac{\beta - 2}{\beta}; & b_\beta &= \frac{12 - 14\beta + 3\beta^2}{2\beta^2} \\ f(\phi) &= \frac{1}{\phi} - \cot \phi. \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos da eq. 3.105 coincide com o resultado para $\beta = 1$ obtido por Campagnano e Nazarov [55].

Encerramos agora nossa discussão sobre as consequências imediatas da formulação via modelo σ não linear supersimétrico da estatística de contagem. Na próxima seção iremos discutir a conexão entre nosso formalismo e a teoria de circuitos keldyshiana apresentada no capítulo anterior.

3.6 VERSÃO KELDYSHIANA DA TEORIA DE CIRCUITOS

Como vimos no capítulo anterior, existe uma maneira completamente independente da apresentada neste capítulo de formular a teoria de circuitos. Esta abordagem introduzida por Nazarov e Bagrets [98] é construída através da técnica de funções de Green de Keldysh quase-clássicas e tem como principal atrativo sua capacidade de extensão para redes quânticas arbitrárias. Nesta seção iremos apresentar o método variacional introduzido por Nazarov [80] para deduzir a teoria de circuitos keldyshiana. Nosso principal objetivo nesta seção é mostrar as similaridades e diferenças entre o modelo σ e a teoria de circuitos de Nazarov, que ajudará na conexão entre nossos resultados apresentados aqui com os da ref. [80]. Por simplicidade, trataremos apenas do caso de um único ponto quântico conectado a duas barreiras arbitrárias.

Iniciamos nossa apresentação reescrevendo a eq. (3.31) em termos dos autovalores de transmissão, i. e., os autovalores de $\mathbf{t}(E)\mathbf{t}^\dagger(E)$

$$\Phi(\lambda) = -\frac{T_0}{h} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dE \ln(1 + J_\lambda(E)\tau_n(E)), \quad (3.106)$$

onde $J_\lambda(E)$ é definido na eq. (3.15). Como discutido na ref. [98], essa equação possui uma representação simples em termos das funções de Green quase-clássicas dos reservatórios, que são dadas por

$$\bar{G}_j(E) = \begin{pmatrix} 1 & 2(1 - 2f_j(E)) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

e satisfazem a condição de normalização $\bar{G}_j^2(E) = \bar{1}$. O campo de contagem é introduzido através da seguinte transformação de calibre

$$\bar{G}_1^\lambda(E) = e^{i\lambda\bar{\sigma}/2} \bar{G}_1(E) e^{-i\lambda\bar{\sigma}/2}. \quad (3.108)$$

Desta forma podemos reescrever $J_\lambda(E)$ da seguinte forma

$$J_\lambda(E)\bar{1} = -\frac{1}{4} (\bar{G}_1^\lambda(E) - \bar{G}_2(E))^2 \equiv -\bar{D}_{12}^\lambda(E). \quad (3.109)$$

Com essa relação podemos reescrever a eq. (3.106) como sendo

$$\Phi(\lambda) = -\frac{T_0}{2h} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr}_\kappa \ln (\bar{1} - \tau_n(E)\bar{D}_{12}^\lambda(E)). \quad (3.110)$$

A próxima etapa é sem dúvida o ponto mais fraco dessa construção. A média em ensemble da dinâmica caótica dentro da cavidades não é executada de forma matematicamente rigorosa através da teoria de matrizes aleatórias. Ao invés deste cálculo, foram utilizados argumentos quase-clássicos razoáveis, mas não controláveis, de isotropização [79]. A principal dificuldade técnica com essa abordagem é que a expansão em gradientes, que é o conceito central da teoria quase-clássica, não leva à ação efetiva de baixas energias para geometrias confinadas como pontos, onde as funções de acoplamento das interface ponto-guia, $F_p(Q, Q')$ eq. (3.38), são ingredientes essenciais e os modos de relaxação lenta

são irrelevantes. Contudo, o argumento permanece útil pois, motiva a construção da ação efetiva de um maneira completamente independente da formulada anteriormente. A idéia básica do modelo baseado no argumento de isotropização, é que o ponto quântico pode ser completamente caracterizado por uma função de Green quase-clássica dependente da energia $\bar{G}_c(E)$ e cada barreira é especificada por um conjunto fixo de autovalores de transmissão T_{jn} . O valor de $\bar{G}_c(E)$ pode ser obtido da extremização, sob o vínculo $\bar{G}_c(E)^2 = \bar{1}$, da seguinte ação fenomenológica:

$$iS[\bar{G}_c(E)] = -\frac{T_0}{2h} \sum_{n=1}^{N_1} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln (\bar{1} - T_{1n} \bar{D}_{1c}^\lambda(E)) - \frac{T_0}{2h} \sum_{n=1}^{N_2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln (\bar{1} - T_{2n} \bar{D}_{2c}(E)), \quad (3.111)$$

onde

$$\bar{D}_{1c}^\lambda(E) = \frac{1}{4} (\bar{G}_1^\lambda(E) - \bar{G}_c(E))^2 \quad (3.112)$$

$$\bar{D}_{2c}^\lambda(E) = \frac{1}{4} (\bar{G}_2(E) - \bar{G}_c(E))^2. \quad (3.113)$$

Executando os cálculos (ver capítulo 5) desta extremização, obtemos a seguinte equação matricial

$$\bar{I}_1^\lambda(E) + \bar{I}_2(E) = 0, \quad (3.114)$$

onde

$$\bar{I}_1^\lambda(E) = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{T_{1n}}{4} [\bar{G}_c(E), (1 - T_{1n} \bar{D}_{1c}^\lambda(E))^{-1} \bar{G}_1^\lambda(E)], \quad (3.115)$$

e

$$\bar{I}_2(E) = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{T_{2n}}{4} [\bar{G}_c(E), (1 - T_{2n} \bar{D}_{2c}(E))^{-1} \bar{G}_2(E)]. \quad (3.116)$$

É conveniente introduzir uma formulação vetorial do problema via as seguintes identidades

$$\bar{G}_1^\lambda(E) = \vec{g}_1^\lambda(E) \cdot \vec{\sigma} \quad (3.117)$$

$$\bar{G}_2(E) = \vec{g}_2(E) \cdot \vec{\sigma} \quad (3.118)$$

$$\bar{G}_c(E) = \vec{g}_c(E) \cdot \vec{\sigma}, \quad (3.119)$$

onde, $\vec{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ e cada $\bar{\sigma}_j$ é uma matriz de Pauli. Ficamos agora com as seguintes correntes vetoriais

$$\bar{I}_1^\lambda(E) = i\vec{I}_1^\lambda(E) \cdot \tilde{\sigma} \quad (3.120)$$

$$\bar{I}_2(E) = i\vec{I}_2(E) \cdot \tilde{\sigma}, \quad (3.121)$$

cuja lei de conservação é $\vec{I}_1^\lambda(E) + \vec{I}_2(E) = 0$. As equações (3.115) e (3.116) na forma vetorial são

$$\vec{I}_1^\lambda(E) = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{T_{1n} \vec{g}_1^\lambda(E) \times \vec{g}_c(E)}{2 + T_{1n}(\vec{g}_1^\lambda(E) \cdot \vec{g}_c(E) - 1)} \quad (3.122)$$

$$\vec{I}_2(E) = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{T_{2n} \vec{g}_2(E) \times \vec{g}_c(E)}{2 + T_{2n}(\vec{g}_2(E) \cdot \vec{g}_c(E) - 1)}. \quad (3.123)$$

O problema encontra-se agora reduzido ao cálculo do vetor $\vec{g}_c(E)$. É importante notar que podemos recuperar a função $J_\lambda(E)$, definida na eq. (3.15), e suas derivadas com respeito a λ diretamente dos vetores $\vec{g}_1^\lambda(E)$ e $\vec{g}_2(E)$ utilizando as seguintes fórmulas

$$J_\lambda(E) = \frac{1}{2} (\vec{g}_1^\lambda(E) \cdot \vec{g}_2(E) - 1) \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial J_\lambda(E)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \vec{g}_1^\lambda(E) \times \vec{g}_2(E) \cdot \hat{e}_1, \quad (3.125)$$

onde $\hat{e}_1$ é um vetor unitário. As equações acima podem ser utilizadas para nos ajudar a fazer contato com a média em ensemble definida na seção (3.2). Para tanto, considere a seguinte quantidade

$$\vec{I}^\lambda(E) = \sum_n \left\langle \frac{\tau_n(E) \vec{g}_1^\lambda(E) \times \vec{g}_2(E)}{2 + \tau_n(E)(\vec{g}_1^\lambda(E) \cdot \vec{g}_2(E) - 1)} \right\rangle, \quad (3.126)$$

a função $q(\lambda)$ definida na eq. (3.32) torna-se

$$q(\lambda) = \frac{iT_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \vec{I}^\lambda(E) \cdot \hat{e}_1. \quad (3.127)$$

No limite de temperatura nula, temos

$$q(\lambda) = M_0 \sum_n \left\langle \frac{\tau_n(E) e^{i\lambda}}{1 + \tau_n(E)(e^{i\lambda} - 1)} \right\rangle, \quad (3.128)$$

onde definimos $M_0 = eVT_0/h$. Note que essa equação implica numa simples relação entre $q(\lambda)$ e a pseudo-corrente, $K(x)$, da teoria de circuitos escalar

$$K(x) = \frac{\tanh x}{M_0} q(\lambda) \Big|_{e^{i\lambda} = \cosh^2 x}. \quad (3.129)$$

Combinando esse resultado com a eq. (3.33) vemos que o cálculo pode ser dividido em duas partes. Podemos calcular $K(x)$ diretamente do vetor corrente $\vec{I}_1^\lambda(E)$ ou $\vec{I}_2(E)$ a temperatura nula e então inserir na eq. (3.33) para obtermos $q(\lambda)$ a temperatura finita. Este raciocínio também nos dá uma estratégia para estabelecer a equivalência entre a versão baseada no modelo σ e a versão keldyshiana da teoria de circuitos. De fato é apenas necessário mostrar que ambas as teorias dão a mesma expressão para a pseudo-corrente escalar $K(x)$. Isto pode ser obtido aplicando a parametrização das funções de Green quase-clássicas matriciais introduzida por Nazarov [80], que permite obter a lei de conservação de $K(x)$ diretamente da formulação keldyshiana. Para uma interessante parametrização alternativa, que também resulta em equações escalares, recomendamos a ref. [113].

Embora a lei de conservação da teoria de circuitos escalar possa ser obtida pelo princípio variacional aplicado à ação keldyshiana eq. (3.111) utilizando a parametrização de Nazarov [80], a informação adicional contida na estrutura supersimétrica do ponto de sela do modelo σ oferece uma rota não-perturbativa da teoria além do alcance da teoria baseada no formalismo de Keldysh. Para uma discussão adicional sobre esse ponto, recomendamos a ref. [114]

No próximo capítulo iremos utilizar a teoria de circuitos escalar para obter a estatística de contagem de um sistema híbrido metal normal-supercondutor no regime de baixas energias e campo magnético nulo. Neste regime existe uma relação conveniente entre os autovalores de reflexão de Andreev e os de transmissão do lado normal que nos permite obter a estatística de contagem por uma simples renormalização dos observáveis do caso normal.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DA ESTATÍSTICA DE CONTAGEM EM SISTEMAS NS: ESTATÍSTICA DE AUTOVALORES DE REFLEXÃO DE ANDREEV

Neste capítulo, utilizaremos a teoria de circuito para estatística de contagem de carga desenvolvida no capítulo anterior, para estudar sistemas híbridos metal normal-supercondutor na ausência de campo magnético. Neste regime, os autovalores de reflexão de Andreev estão conectados aos autovalores de transmissão do lado normal através da seguinte relação $r_j = \tau_j^2 / (2 - \tau_j)^2$. O sistema NS que iremos tratar é formado de um ponto quântico conectado a um reservatório de quase-partículas no estado normal e outro supercondutor via barreiras de transparência arbitrárias. Iniciaremos este capítulo apresentando as principais modificações da função geratriz da estatística de contagem desenvolvida no Capítulo 3 para incluir a interface NS do nosso dispositivo híbrido. Posteriormente, utilizaremos a função geratriz NS para calcular analiticamente a densidade média de autovalores de reflexão de Andreev e os três primeiros cumulantes da estatística de contagem. Discutiremos através da análise da densidade de autovalores a emergência do regime de *tunelamento sem reflexão* quando variamos as transparências das barreiras e, ainda, analisaremos uma interessante característica dos cumulantes NS: diferentemente do caso NN, tais cumulantes exibem assinaturas interessantes de uma transição quântica que ocorre em pontos quânticos conectados a barreiras de transparência arbitrárias associada à formação de modos de Fabry-Pérot dentro da cavidade [53]. Os resultados que serão apresentados neste capítulo, encontram-se publicados no Physical Review B [54].

4.1 ESTATÍSTICA DE CONTAGEM E TEORIA DE CIRCUITOS PARA SISTEMAS NS

Nesta seção, apresentamos a função geratriz da estatística de transferência de carga num dispositivo NS através da teoria quântica de circuitos desenvolvida no capítulo anterior. Iniciamos, escrevendo a função geratriz da estatística de contagem em termos dos autovalores de reflexão de Andreev $\{r_j\}$

$$\Phi_{NS}(\lambda) = \sum_{j=1}^N \ln(1 + r_j(e^{i\lambda} - 1)). \quad (4.1)$$

Admitiremos baixas temperaturas e baixas voltagens aplicadas, tal que, $\max(eV, k_B T) \ll \min(E_{Th}, |\Delta|)$, onde E_{Th} é a energia de Thouless e Δ é o parâmetro de ordem supercondutor. Com tais condições obedecidas, podemos desprezar a dependência com a energia das matrizes de espalhamento e, conseqüentemente, dos autovalores de reflexão de Andreev. Na presença de dinâmica caótica dentro da cavidade, os autovalores $\{r_j\}$ tornam-se

variáveis aleatórias correlacionadas, de tal maneira que é conveniente introduzir a função geratriz média

$$S(\lambda) \equiv \langle \Phi_{NS}(\lambda) \rangle = \int_0^1 dr \rho_{NS}(r) \ln(1 + r(e^{i\lambda} - 1)), \quad (4.2)$$

onde $\rho_{NS}(r) = \sum_n \langle \delta(r - r_n) \rangle$, é a densidade média de autovalores de reflexão de Andreev. No regime semiclássico, caracterizado por um número grande de canais de espalhamento abertos nos guias $N \gg 1$, $\rho_{NS}(r)$ torna-se uma função bem comportada, o que nos permite escrever a seguinte função auxiliar para a condutância adimensional

$$g_{NS}(\varepsilon) = -i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{e^{i\lambda}=1-\varepsilon^2} = \int_0^1 dr \rho_{NS}(r) \frac{(1 - \varepsilon^2)r}{1 - \varepsilon^2 r}. \quad (4.3)$$

Os cumulantes da estatística de contagem são obtidos de $g_{NS}(\varepsilon)$ através da fórmula abaixo

$$q_{l+1} = \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \right)^l g_{NS}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}; \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$

É conveniente introduzir a seguinte mudança de variáveis, $r = \text{sech}^2 x$. Em termos desta nova variável, podemos definir uma densidade média modificada $\nu_{NS}(x)$, que é obtida de $g_{NS}(\varepsilon)$ através de

$$\nu_{NS}(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \left\{ \frac{i\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} g_{NS}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon = \cosh x} \right\}. \quad (4.5)$$

Esta nova densidade $\nu_{NS}(x)$ está diretamente relacionada à densidade $\rho_{NS}(r)$ segundo a transformação

$$\rho_{NS}(r) = \frac{\nu_{NS}[\cosh^{-1}(1/\sqrt{r})]}{2r\sqrt{1-r}}. \quad (4.6)$$

Vamos agora descrever o problema de encontrar $g_{NS}(\varepsilon)$ na linguagem de teoria quântica de circuitos. Para tanto, voltemos à eq. (4.3), reescrevendo-a da seguinte forma

$$g_{NS}(\varepsilon) = \int_0^1 d\tau \rho_{NS}(\tau^2/(2 - \tau^2)) \frac{\tau^2}{\left(\tau^2 + 4(1 - \tau)/(1 - \varepsilon^2) \right)}. \quad (4.7)$$

Podemos ainda, reescrever o polinômio de segundo grau do denominador da expressão acima em termos de suas raízes e, assim, escrever eq. (4.7) em termos de frações parciais

$$g_{NS}(\varepsilon) = -\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \left(\frac{\tau}{1 - \tau/\lambda_+} - \frac{\tau}{1 - \tau/\lambda_-} \right), \quad (4.8)$$

onde, $\rho(\tau) = \sum_n \langle \delta(\tau - \tau_n) \rangle$ é a densidade média de autovalores de transmissão e $\lambda_{\pm} = 2(1 \pm \varepsilon)/(1 - \varepsilon^2)$. Utilizamos também, na equação acima a seguinte igualdade

$$\int_0^1 d\tau \rho(\tau) = \int_0^1 dr \rho_{NS}(r) = N, \quad (4.9)$$

que nada mais é do que a condição de normalização da densidade média de autovalores. Introduzindo a função

$$F(\phi) \equiv \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - \tau \sin^2 \phi / 2} = I(\phi) / \sin \phi, \quad (4.10)$$

podemos escrever a eq. (4.8) de uma forma bem conveniente

$$g_{NS}(\varepsilon) = -\frac{1 - \varepsilon^2}{4\varepsilon} \left(F_+(\varepsilon) - F_-(\varepsilon) \right), \quad (4.11)$$

onde,

$$F_{\pm}(\varepsilon) = F(\phi) \Big|_{\sin^2 \phi / 2 = (1 - \varepsilon^2) / [2(1 \pm \varepsilon)]}. \quad (4.12)$$

A eq. (4.11) é o principal resultado desta seção; como veremos, todos os observáveis calculados nas próximas seções dependerão desta equação. A eq. (4.11), também revela uma das principais vantagens de uma abordagem via teoria de circuitos: a função $F(\phi)$ pode ser calculada independentemente de $\rho(\tau)$ através da lei de conservação da corrente espectral $I(\phi)$, $K(x) \equiv -i/2I(\phi = 2ix)$

$$I(\phi) = I_1(\phi - \theta) = I_2(\theta), \quad (4.13)$$

onde, a relação “corrente-voltagem” num conector arbitrário, caracterizado por um número de canais abertos N_j e barreira de transparência T_j é dada por

$$I_j(\Delta\phi_j) = \frac{2N_j T_j \tan(\Delta\phi_j/2)}{1 + (1 - T_j) \tan^2(\Delta\phi_j/2)}; \quad j = 1, 2, \quad (4.14)$$

onde $\Delta\phi_j$ corresponde à queda do pseudo-potencial através de um conector. Definindo a variável $\xi = \tan \theta / 2$ a segunda igualdade na eq. (4.13) produz a seguinte equação quártica em ξ

$$\begin{aligned} & T_1(1 - T_2)\eta\xi^4 + (1 + 2a)T_1T_2\eta\xi^2 + [(aT_2 - \\ & T_1(1 - T_2))\eta^2 + aT_2(1 - T_1) + T_1(1 - T_2)]\xi^3 + \\ & [(aT_2(1 - T_1) - T_1)\eta^2 + T_1 + aT_2]\xi - T_1\eta = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde, $\eta = \tan \phi / 2$ e $a = N_2 / N_1$. Uma vez obtida a solução física da eq. (4.15), podemos calcular $F(\phi)$ e finalmente, calcular $g_{NS}(\varepsilon)$ usando a relação

$$g_{NS}(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon} \left(\frac{N_2 T_2 \xi_-}{1 + (1 - T_2)\xi_-^2} - \frac{N_2 T_2 \xi_+}{1 + (1 - T_2)\xi_+^2} \right), \quad (4.16)$$

onde, $\xi_{\pm}$ é a solução física da eq. (4.15) com η igual a $\eta_{\pm} = \sqrt{(1 \mp \varepsilon)/(1 \pm \varepsilon)}$.

Na próxima seção, utilizaremos $g_{NS}(\varepsilon)$ para calcular a densidade de autovalores de reflexão de Andreev. Esta quantidade, apresenta uma clara assinatura da transição quântica discutida na ref. [53] quando variamos a transparência das barreiras.

4.2 DENSIDADE MÉDIA DE AUTOVALORES DE REFLEXÃO DE ANDREEV

Dividiremos esta seção em três partes. Nas duas primeiras, trataremos de dois casos onde expressões analíticas simples podem ser encontradas: duas barreiras indênticas e duas junções de tunelamento. A análise destes dois casos será importante para o estudo da assinatura da transição mencionada anteriormente, a qual surge quando examinamos o terceiro e último caso: um contato ideal e um barreira de transparência arbitrária.

4.2.1 Barreiras Simétricas ($T_1 = T_2$)

Neste caso, a equação quártica fatora-se em duas equações quadráticas, e a raiz física é obtida da seguinte equação

$$a\eta\xi^2 + (1+a)\xi - \eta = 0, \quad (4.17)$$

portanto

$$\xi = \frac{-(1+a) + \sqrt{(1+a)^2 + 4a\eta^2}}{2a\eta}. \quad (4.18)$$

Inserindo a eq. (4.18) na eq. (4.16), obtemos $g_{NS}(\varepsilon)$ e finalmente $\nu_{NS}(x)$ através da eq. (4.6) para $a = 1$

$$\rho_{NS}^{\text{sim}}(r) = \frac{N}{\pi} \frac{T(1+\sqrt{r})}{\sqrt{r(1-r)}} \Xi(r), \quad (4.19)$$

onde, $\Xi(r)$ é uma função bem comportada em $r = 0$ e $r = 1$ e é dada por:

$$\Xi(r) = \frac{(2+T)\alpha + (2-7T)r}{(T\alpha + (8-7T)r)^2 + 16r(\alpha-3r)}, \quad (4.20)$$

onde, $\alpha = (1+2\sqrt{r})$. É importante notar a presença de singularidades tipo inverso de raiz quadrada para valores de r próximos de 0 e 1 na eq. (4.19). Através da equação (4.4), podemos calcular os cumulantes da estatística de contagem. Abaixo, apresentamos os três primeiros cumulantes para este caso

$$G_{NS} = 2q_1 = NT(2+\sqrt{2}) \frac{(2+2\sqrt{2}+T)}{(4+2\sqrt{2}-T)^2}, \quad (4.21)$$

$$P_{NS} = 4q_2 = \frac{N(1-(1-T)^2)}{2\sqrt{2}} \frac{[(16+12\sqrt{2}+T)^2 - (8+6\sqrt{2})^2(1-T)]}{(4+2\sqrt{2}-T)^4}, \quad (4.22)$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} C_{NS} = q_3 = & \frac{\sqrt{2}N(1-(1-T)^2)}{128(4+2\sqrt{2}-T)^6} [(1-T)^4 + (1468+1036\sqrt{2})(1-T)^3 \\ & - (33066+23380\sqrt{2})(1-T)^2 + (56348+39844\sqrt{2})(1-T) \\ & + 19601+13860\sqrt{2}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para $a \neq 1$ e $T = 1$, encontramos as seguintes expressões em termos de N_1 e N_2

$$G_{NS} = (N_1 + N_2) \left[1 - \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1^2 + 6N_1N_2 + N_2^2}} \right], \quad (4.24)$$

que coincide com o resultado obtido por Belzig e Vanevic [115].

$$P_{NS} = \frac{16N_1^2N_2^2(N_1 + N_2)^2}{(N_1^2 + 6N_1N_2 + N_2^2)^{3/2}}, \quad (4.25)$$

e

$$C_{NS} = -\frac{4N_1^2N_2^2(N_1 + N_2)^2[(N_1 - N_2)^4 - 8N_1^2N_2^2]}{(N_1^2 + 6N_1N_2 + N_2^2)^{9/2}}. \quad (4.26)$$

4.2.2 Junções de Tunelamento ($T_1, T_2 \ll 1$)

Neste caso, a eq. (4.15) se reduz à seguinte equação trigonométrica

$$G_1 \sin(\phi - \theta) = G_2 \sin \theta; G_j \equiv N_j T_j. \quad (4.27)$$

Da solução da eq. (4.27) obtivemos $F(\phi)$ que é dado por:

$$F(\phi) = \frac{G_1 G_2}{\sqrt{(G_1 + G_2)^2 - 4G_1 G_2 \sin^2 \phi/2}}. \quad (4.28)$$

Finalmente, substituindo a expressão acima na eq. (4.6), temos:

$$\rho_{NS}^{\text{tun}}(r) = \frac{N}{2\sqrt{2}\pi} \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \frac{1}{r^{5/4} \sqrt{(r_0 - 2)\sqrt{r} + r_0}}. \quad (4.29)$$

onde, $r_0 = 4G_1 G_2 / (G_1 + G_2)^2$. Note que a eq. (4.29) possui uma singularidade do tipo $r^{-5/4}$ para r próximo de zero. Este resultado concorda com o limite de energia nula da densidade de autovalores de reflexão de Andreev obtido na referência [116] para um sistema formado por duas junções de tunelamento. A principal diferença qualitativa entre a eq. (4.29) e a eq. (4.19) é a ausência da singularidade tipo inverso de raiz quadrada em $r = 1$ na eq. (4.29). Para entendermos melhor o desaparecimento desta divergência na eq. (4.29), iremos a seguir, considerar um ponto quântico acoplado a dois reservatórios (um metal normal e outro supercondutor) através de um contato ideal e uma barreira de transparência arbitrária. Apresentamos abaixo, os três primeiros cumulantes extraídos da eq. (4.28)

$$G_{NS} = \frac{G_1^2 G_2^2}{(G_1^2 + G_2^2)^{3/2}}, \quad (4.30)$$

$$P_{NS} = \frac{G_1^2 G_2^2 (2G_1^4 - G_1^2 G_2^2 + 2G_2^4)}{(G_1^2 + G_2^2)^{7/2}}, \quad (4.31)$$

$$C_{NS} = \frac{G_1^2 G_2^2}{8(G_1^2 + G_2^2)^{11/2}} [4G_1^8 - 14G_1^6 G_2^2 + 27G_1^4 G_2^4 - 14G_1^2 G_2^6 + 4G_2^8]. \quad (4.32)$$

4.2.3 Contato Ideal ($T_1 = 1$) e Barreira arbitrária

Nesta seção, será mais conveniente trabalhar com a densidade $\nu_{NS}(x)$, pois, diferentemente de $\rho_{NS}(r)$, tal densidade é finita em $x = 0$ ($r = 1$) e $x \rightarrow \infty$ ($r = 0$), o que facilita nossa análise da transição. O principal resultado desta seção é o interessante comportamento de $\nu_{NS}(x)$ próximo de $x = 0$ quando variamos a transparência das barreiras. Como discutido na ref. [53], para o caso normal podemos usar $\nu_{NS}(0)$ como um parâmetro de ordem para a transição quântica discutida neste mesmo artigo. Na linguagem de teoria de circuitos este sistema é descrito escolhendo $T_1 = 1$ e $T_2 = T$ na eq. (4.15), que pode ser fatorada e a raiz física é obtida através da seguinte equação cúbica:

$$(1 - T)\xi^3 + ((1 + a)T - 1)\eta\xi^2 + (1 + aT)\xi - \eta = 0. \quad (4.33)$$

Substituindo a raiz física da eq. (4.33) na eq. (4.5), obtemos $\nu_{NS}(x)$. Na figura (4.1), apresentamos o comportamento de $\nu_{NS}(x)$ quando variamos T .

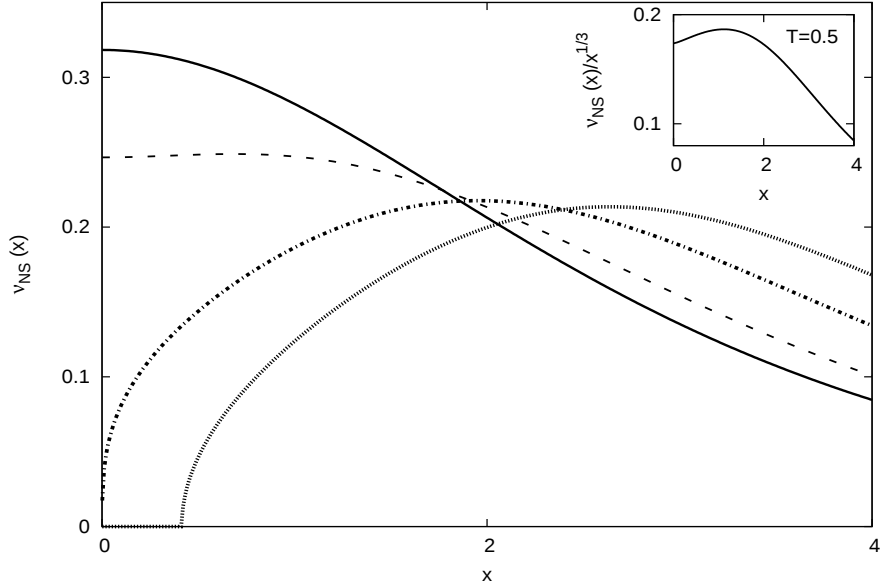


Figura 4.1 Densidade média de autovalores $\nu_{NS}(x)$ para $T_1 = 1$ e $T_2 = 1$ (linha sólida), $T_2 = 0.8$ (linha tracejada), $T_2 = 0.5$ (linha tracejada-pontilhada), $T_2 = 0.3$ (linha pontilhada). O inset mostra o comportamento de $\nu_{NS}(x)$ dividido $x^{1/3}$ para $T_2 = 0.5$.

A figura (4.1) mostra a densidade média $\nu_{NS}(x)$ para vários valores da barreira arbitrária. Observamos que $\nu_{NS}(0) = 0$ para $T \leq 0.5$ e $\nu_{NS}(0) > 0$ para $0.5 < T \leq 1$. Neste caso, $\nu_{NS}(0)$ é similar a um parâmetro de ordem correspondente a uma transição de fase

de segunda ordem. Tal parâmetro de ordem sinaliza o aparecimento de modos Fabry-Pérot $r = 1$ ($x = 0$) dentro da cavidade como discutido na ref. [53]. A emergência dos modos tipo Fabry-Pérot em pontos quânticos, está conectada à observação do regime de tunelamento sem reflexão em estruturas NS com duas barreiras. Para $x = 0$ uma expressão simples é obtida para $\nu_{NS}(x)$ em termos de T e a

$$\nu_{NS}(0) = \frac{N_2}{\pi} \text{Re} \left\{ \frac{\sqrt{(a+1)T-1}}{a} \right\}. \quad (4.34)$$

Tal resultado é absolutamente idêntico ao resultado obtido para o caso normal discutido na ref. [53] dividido por um fator dois. Também investigamos o comportamento de $\nu_{NS}(x)$ quando x tende a zero para $T = 0.5$ (vide o *inset* da figura (4.1)). Encontramos um comportamento do tipo lei de potência

$$\nu_{NS}(x) \propto x^{1/3}, x \rightarrow 0. \quad (4.35)$$

Esse resultado também foi encontrado pelo autores da ref. [53] para o caso normal. Na próxima seção iremos explorar a principal vantagem da teoria de circuitos no seu formato escalar, que é obter $\nu_{NS}(x)$ para todo o plano $T_1 T_2$ e assim, descrever detalhadamente a transição. Iremos mostrar também que os três primeiros cumulantes da estatística de contagem de carga exibem uma clara assinatura da transição quando atravessamos as linhas da mesma.

4.3 ANÁLISE DOS CUMULANTES DA ESTATÍSTICA DE CONTAGEM: ASSINATURAS DE UMA TRANSIÇÃO QUÂNTICA

Nesta seção consideramos o caso geral, T_1 e T_2 arbitrários, para investigarmos a assinatura da transição na média dos cumulantes NS. Investigamos também que a propriedade de $\nu_{NS}(0)$ ser a densidade de modos Fabry-Pérot dentro da cavidade é preservada nesse caso geral e pode ser utilizada como um indicador do surgimento do regime de tunelamento sem reflexão no sistema. Para simplificar nossa análise daqui por diante, iremos introduzir as seguintes variáveis auxiliares

$$\zeta = T_2(1 + T_1)/T_1, \quad (4.36)$$

e

$$\zeta_0 = (1 + T_1)/(1 - T_1). \quad (4.37)$$

As curvas $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ correspondem às linhas de transição no diagrama $T_1 \times T_2$ separando a região onde existem modos de Fabry-Pérot ($\nu(0) \neq 0$) da região onde tais modos desaparecem ($\nu(0) = 0$). Na figura (4.2), apresentamos o diagrama $T_1 \times T_2$ obtido na ref. [53] para o caso normal e que veremos é exatamente idêntico ao caso NS substituindo o parâmetro de ordem $\nu(0)$ do caso normal por $\nu_{NS}(0)$.

Iremos considerar inicialmente, o caso geral de guias assimétricos ($a \neq 1$).

Como discutido nas seções anteriores, toda a análise em termos da teoria de circuitos começa resolvendo a equação quártica eq. (4.15). Uma maneira simples de computar

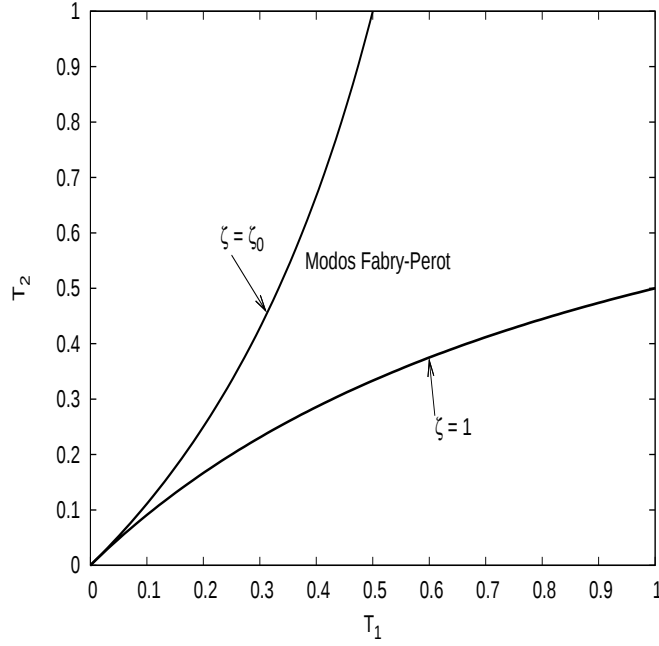


Figura 4.2 Diagrama ilustrando as diversas regiões correspondentes aos diferentes regimes de transporte quando variamos os parâmetros T_1 e T_2 . As linhas sólidas correspondem às curvas $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ que delimitam a região onde há modos do tipo Fabry-Perot ($1 < \zeta < \zeta_0$).

os cumulantes sem precisar calcular a solução completa (para todos valores de ε) dessa equação quártica, que em geral leva a expressões analíticas extensas, é expandir $g_{NS}(\varepsilon)$ em uma série de potências de ε e assim, obter os cumulantes através dos coeficientes da expansão. Inserindo a expansão de ξ

$$\xi_{\pm} = A \pm B\varepsilon + C\varepsilon^2 \pm D\varepsilon^3 + E\varepsilon^4 \pm F\varepsilon^5 \dots \quad (4.38)$$

e

$$\eta_{\pm} = 1 \mp \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mp \frac{1}{2}\varepsilon^3 + \frac{3}{8}\varepsilon^4 \mp \frac{3}{8}\varepsilon^5 \dots \quad (4.39)$$

na eq. 4.15, podemos mostrar que o coeficiente A é obtido da seguinte equação quártica

$$T_1(1 - T_2)A^4 + aT_2(2 - T_1)A^3 + (1 + 2a)T_1T_2A^2 + a(2 - T_1)T_2A - T_1 = 0. \quad (4.40)$$

O coeficiente B em termos de A fica

$$B = \frac{T_1A[(2 + a)T_2 - 2]A^2 - 2 - aT_2}{4\sigma_1A^3 + 3\sigma_2^-A^2 + 2T_1T_2(1 + 2a)A + \sigma_2^-}, \quad (4.41)$$

onde $\sigma_1 = T_1(1 - T_2)$ e $\sigma_2^- = aT_2(2 - T_1)$. Os demais coeficientes da expansão (C , D , E e F) são apresentados no apêndice D.

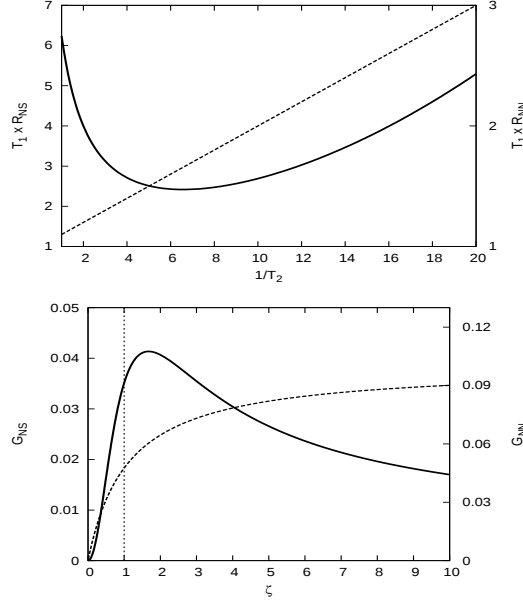


Figura 4.3 Resistência (topo da figura, linha sólida) e condutância NS (gráfico inferior, linha sólida) são apresentados para $T_1 = 0.1$. Também é apresentado (linhas tracejadas) o comportamento desses observáveis no caso normal para comparação. Os eixos verticais a direita dizem respeito aos observáveis no caso normal.

Substituindo a eq. (4.38) na equação quártica (4.15), obtemos a seguinte expansão:

$$g_{NS}(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4 + \dots \quad (4.42)$$

Os coeficientes α_0 , α_1 e α_2 podem ser escritos em termos dos coeficientes da expansão de $\xi_{\pm}$ eq. (4.38) (ver apêndice D).

Os três primeiros cumulantes são obtidos da eq. (4.4). Em termos dos coeficientes de (4.42), temos:

$$G_{NS} = 2q_1 = 2\alpha_0, \quad (4.43)$$

$$P_{NS} = 4q_2 = -4\alpha_1, \quad (4.44)$$

e

$$C_{NS} = q_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1. \quad (4.45)$$

Na figura (4.3) é apresentado o comportamento da resistência R_{NS} (linha sólida, parte superior) e a condutância $G_{NS} = 1/R_{NS}$ (linha sólida, parte inferior) para $T_1 = 0.1$. Os observáveis correspondentes ao caso normal NN, também são apresentados (linhas tracejadas) para comparação. A linha vertical tracejada em $\zeta = 1$ serve de “guia para os olhos” e auxilia a identificação da mudança de comportamento dos cumulantes NS quando

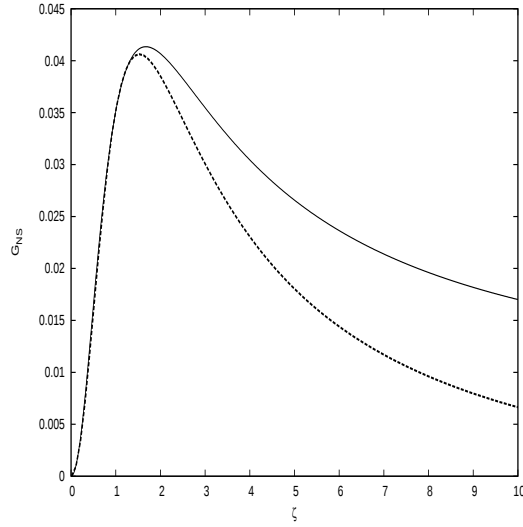


Figura 4.4 Comparação entre a condutância NS calculada via teoria quântica de circuitos, eq. (4.43) (linha cheia), levando em conta correlações entre os autovalores de transmissão e o resultado obtido em [117] (linha tracejada) considerando independência dos autovalores de transmissão, eq. (4.49).

os modos Fabry-Pérot surgem no sistema. Como discutido na ref. [53] (ver fig. 4.2), $\zeta = 1$ define uma das linhas de transição no diagrama $T_1 \times T_2$.

O mínimo na resistência NS sinaliza uma transição gradual entre o regime de tunelamento sem reflexão e o regime de reflexão usual (duas partículas) típico de sistemas com interface NS. No regime de tunelamento sem reflexão, uma das partículas relacionadas pelo mecanismo de Andreev, tunela toda a amostra sem sofrer reflexão. Portanto, um processo de transporte que em princípio envolve duas partículas (elétron e buraco) é efetivamente convertido em um processo de uma única partícula.

Beenakker e colaboradores [47] previram pela primeira vez esse fenômeno em junções NS. Eles consideraram um fio difusivo de comprimento L conectado a um reservatório supercondutor por uma barreira de tunelamento, Γ , e observaram que à medida que aumentamos comprimento do fio (aumento da desordem) a dependência da resistência R_{NS} com a barreira era da ordem de $1/\Gamma$ e não $1/\Gamma^2$ como esperado num processo envolvendo duas partículas. Variando o comprimento do fio eles observaram também que a resistência NS exibe um mínimo para $L \approx l/L$, onde l é o livre caminho médio da região difusiva. Através de uma teoria de escala para a densidade de autovalores de reflexão de Andreev os autores de [47] concluíram que o aumento da desordem está relacionado com a abertura de canais de tunelamento com autovalores de transmissão próximo da unidade, que são responsáveis pelo regime de tunelamento sem reflexão. Essa abertura de canais induzida por desordem foi descoberta por Nazarov na ref. [78].

Em cavidades caóticas, este regime de tunelamento sem reflexão está relacionado ao surgimento de estados ressonantes de longo tempo de vida dentro da cavidade que combinam dois efeitos: o aprisionamento de ressonâncias e a formação de modos tipo

Fabry-Pérot entre as barreiras conectadas à cavidade caótica. O primeiro ocorre quando o aumento da intensidade do acoplamento da cavidade com o exterior causa uma forte superposição entre as ressonâncias dentro da cavidade. Para um valor crítico de tal acoplamento ocorre uma reorganização de todo o espectro da cavidade, dando origem a uma bifurcação no tempo de vida dos estados ressonantes. Alguns desses estados tornam-se instáveis com tempo de vida muito curto, enquanto os estados restantes são estáveis e têm tempo de vida longo. O outro mecanismo, como temos visto no decorrer deste capítulo, está relacionado com o aparecimento de uma singularidade do tipo inverso da raiz quadrada na densidade de autovalores de transmissão. Note que a formação de modos Fabry-Pérot entre as barreiras constitui um fenômeno puramente ondulatório não sendo exclusivo, portanto, de sistemas quânticos. Ambos os fenômenos, aprisionamentos de ressonâncias e a formação de modos Fabry-Pérot, devem contribuir para o surgimento do regime de tunelamento sem reflexão no dispositivo NS.

O caso de duas barreiras de tunelamento foi estudado por Melsen e Beenakker na ref. [117]. O objetivo deste trabalho era descrever a transição gradual entre o regime balístico e o difusivo, de um dispositivo feito de metal normal entre duas barreiras de tunelamento de transparência arbitrária, através de uma fórmula fenomenológica do tipo Fabry-Pérot para os autovalores de transmissão, dada por:

$$\tau_n = (\beta_0 + \beta_1 \cos \phi_n)^{-1}, \quad (4.46)$$

onde

$$\beta_0 = \frac{2 - (T_1 + T_2)}{T_1 T_2}, \quad (4.47)$$

$$\beta_1 = \frac{2(1 - T_1)^{-1/2}(1 - T_2)^{-1/2}}{T_1 T_2}, \quad (4.48)$$

e ϕ_n é a fase acumulada na viagem de “ida” e “volta” entre as barreiras. Observe que a expressão (4.46) admite independência entre os autovalores de transmissão, cada autovalor é caracterizado por uma variável aleatória ϕ_n independente. A expressão para a condutância G_{NS} obtida na ref. [117] é

$$G_{NS}^0 = \frac{2N \cosh 2\gamma_1 \cosh 2\gamma_2}{(\cosh^2 2\gamma_1 + \cosh^2 2\gamma_2 - 1)^{3/2}}, \quad (4.49)$$

$T_i = 1/\cosh^2 2\gamma_i$. Esta equação (4.49) deve ser contrastada com a eq. (4.43) obtida via teoria de circuitos. Na figura (4.4), plotamos ambas as equações mostrando claramente que a suposição de que não há superposição das ressonâncias, sugerida pela eq. (4.46), não é apropriada para o tratamento de cavidades caóticas balísticas. Observamos que a fórmula fenomenológica tem boa concordância com nossos resultados apenas no regime de junções de tunelamento ($T_i \ll 1$).

Para a densidade de autovalores de transmissão a expressão obtida na ref. [117] foi a seguinte

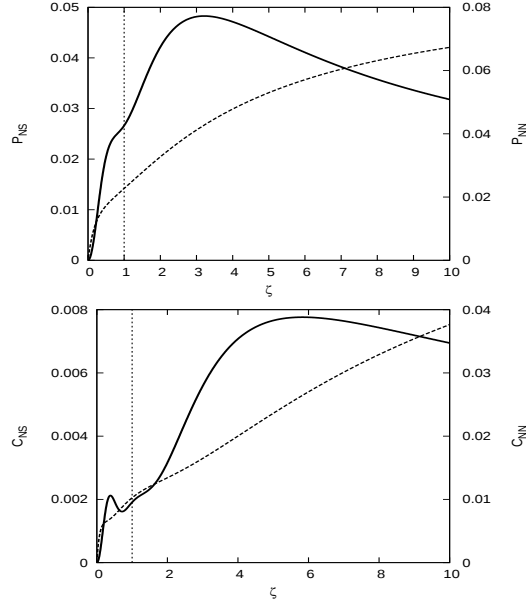


Figura 4.5 Potência de ruído de disparo (parte superior) e terceiro cumulante (parte inferior). A linha vertical em $\zeta = 1$ nos auxilia a visualizar a assinatura da transição quântica nos cumulantes NS.

$$\rho_{NS}(\tau) = \frac{N}{\pi\tau}(\beta_1^2\tau^2 - (\beta_0\tau - 1)^2)^{-1/2}, \quad (4.50)$$

para $(\beta_0 + \beta_1)^{-1} < \tau < (\beta_0 - \beta_1)^{-1}$. Esta equação foi utilizada em [117] como condição inicial para obter a densidade de autovalores de transmissão quando é introduzida desordem no sistema através da inserção de um fio metálico difusivo. Para obter tal densidade eles utilizaram a equação DMPK que descreve a evolução da densidade de autovalores de transmissão quando um pedaço infinitesimal de material desordenado é adicionado ao sistema. A análise feita por esses autores, como já vimos, só é correta quando $T_i \ll 1$, que é o regime de validade da eq. (4.46), a despeito do argumento apresentado pelos autores em favor da validade geral de (4.50). Utilizando a densidade de autovalores correta, obtida através da corrente espectral deduzida na ref. [93], Apolinário [118], via análise numérica da teoria de circuitos, fez uma análise completa da transição ponto-fio para barreiras de transparência arbitrária.

Na figura (4.5) apresentamos a potência de ruído de disparo (topo da figura, linha sólida) e o terceiro cumulante da estatística de contagem (parte de baixo da figura). Os valores para o caso normal também são mostrados (linhas tracejadas). Gostaríamos de chamar a atenção ao interessante comportamento desses dois cumulantes NS próximo ao ponto $\zeta = 1$, o que mostra uma considerável sensibilidade dos cumulantes de maior ordem à transição quântica nesses sistemas de duas barreiras.

Para nos certificar dos resultados que obtivemos via teoria de circuitos, nós calculamos o segundo e terceiro cumulantes implementando numericamente o formalismo de matriz de espalhamento. O ensemble de matrizes- S é construído combinando matrizes de

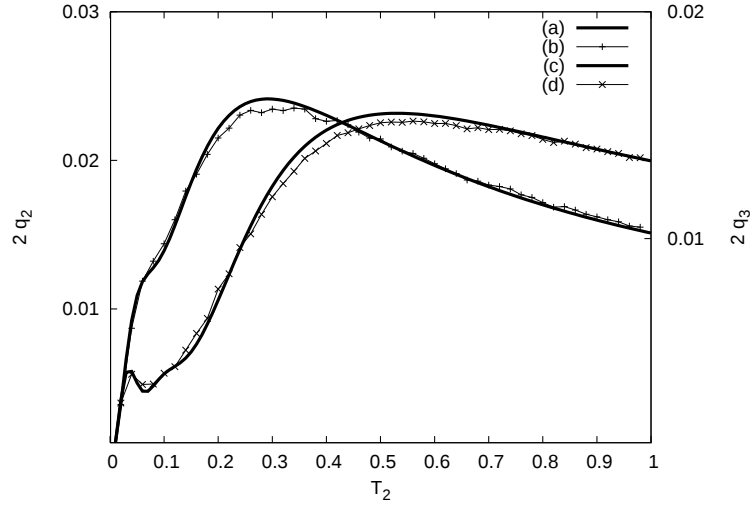


Figura 4.6 Comparação entre os resultados analíticos obtidos da teoria de circuitos (curvas sólidas (a) e (c)) e simulação (curvas (b) e (d)) utilizando um ensemble de matrizes espalhamento para o segundo e terceiro cumulantes para $T_1 = 0.1$. O eixo vertical à esquerda corresponde às curvas de ruído de disparo ((a) e (b)), enquanto o eixo à direita corresponde às curvas do terceiro cumulante.

espalhamento fixas, que descrevem as barreiras de tunelamento T_1 e T_2 , com uma matriz de espalhamento estocástica pertencente ao Ensemble Circular Ortogonal (ECO), que descreve a dinâmica caótica dentro do ponto. A matriz $\mathbf{t}$ de toda a estrutura (barreiras-ponto) é obtida e usada para calcular a matriz de reflexão de Andreev $\mathbf{s}_{he}$. Em nossa rotina numérica consideramos guias simétricos com 50 canais abertos ($N_1 = N_2 = 50$) e fizemos a média em ensemble considerando 1000 realizações da matriz $\mathbf{s}_{he}$. Como podemos ver na figura (4.6), os resultados semiclássicos analíticos plotados na fig. (4.5) estão em boa concordância com as simulações.

É importante lembrar que a abordagem via matriz- S contém todas as correções quânticas, tais como a correção de localização fraca e termos de ordem superior na expansão $1/N$, enquanto a teoria de circuitos nos fornece apenas o termo dominante, que é da ordem de N . Os efeitos de tais correções podem ser vistos na fig. (4.6), onde observamos que na região próxima ao máximo tanto de q_2 quanto q_3 os efeitos devido às correções quânticas são mais pronunciados. É possível calcular analiticamente as correções de localização da função característica da estatística de contagem desses dispositivos com duas barreiras se formos além da teoria de circuitos apresentada nesse capítulo. Listamos aqui duas possíveis abordagens para o cálculo de tais correções, a saber o método diagramático para a integração sobre o grupo unitário [56] e uma recente extensão da teoria de circuitos que incorpora as correções quânticas [55]. Na ref. [119] os autores calcularam a correção de localização fraca da potência de ruído de disparo para uma cavidade caótica acoplada a reservatórios normais por barreiras de transparência arbitrária utilizando os dois métodos citados anteriormente e observaram uma inesperada transição do tipo am-

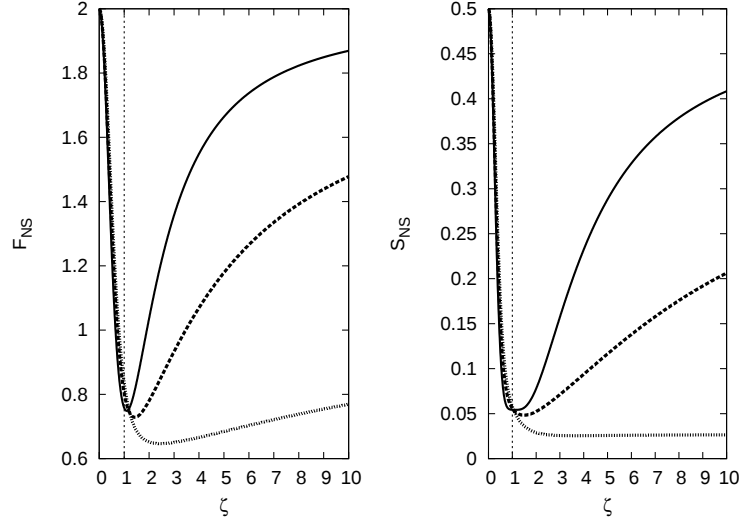


Figura 4.7 Fator Fano (à esquerda) e skewness (à direita) para $T_1 = 0.1$ (linha sólida), 0.4 (linha tracejada), and 0.8 (linha pontilhada).

plificação-supressão em função do número de canais abertos e das transparências das barreiras.

Nos próximos capítulos, utilizaremos estes dois formalismos para estudar um sistema de pontos quânticos conectados em série (extensão da teoria de circuitos [55]) e um outro sistema consistindo essencialmente do problema discutido nesse capítulo mas na presença de um campo magnético (técnica diagramática [56]), que tem como principal efeito invalidar a renormalização dos autovalores de reflexão de Andreev, $r = \tau^2/(2 - \tau)^2$.

Estudamos também o comportamento do fator Fano, definido como a razão da potência de ruído de disparo pela condutância NS, $F_{NS} = P_{NS}/G_{NS}$, e o fator de assimetria que é a razão entre o terceiro cumulante e a condutância NS, $S_{NS} = C_{NS}/G_{NS}$, que são mostrados na figura (4.7) para vários valores de T_1 . Podemos observar que ambos os fatores exibem uma queda acentuada próximo de $\zeta = 1$, onde ocorre a transição.

Finalmente, apresentamos a densidade média $\nu_{NS}(x)$, eq. (4.5), para T_1 e T_2 arbitrários. Na figura (4.8), plotamos o comportamento tridimensional de $\nu_{NS}(x)$ em $x = 0$ quando variamos arbitrariamente T_1 e T_2 . Observamos que as linhas $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ delimitam a região onde $\nu_{NS}(0) \neq 0$, confirmando que $\nu_{NS}(0)$ realmente faz o papel de um parâmetro de ordem da transição quântica discutida aqui, em concordância com os resultados da ref. [53] para sistemas NN.

Em termos de ζ e ζ_0 , podemos escrever $\nu_{NS}(0)$ da seguinte forma:

$$\nu_{NS}(0) = \frac{N}{\pi} \begin{cases} \frac{\sqrt{\zeta_0(\zeta-1)(\zeta_0-\zeta)}}{\zeta+\zeta_0} & ; \quad 0 < \zeta < \zeta_0 \\ 0 & ; \quad \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (4.51)$$

Esta expressão coincide com o resultado obtido na ref. [53] para sistemas NN se dividirmos o resultado do caso normal por dois.

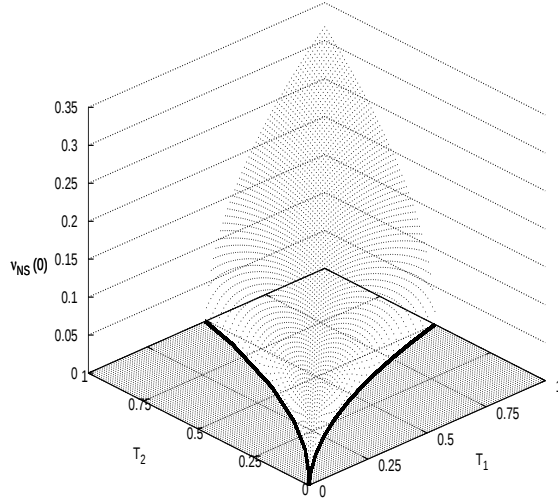


Figura 4.8 Densidade média de autovalores de reflexão de Andreev em $x = 0$ como função das transparências das barreiras. No plano $T_1 T_2$ recuperamos o diagrama de fase, fig. (4.2), da transição quântica. As linhas sólidas são as curvas $\zeta = \zeta_0$ and $\zeta = 1$.

4.4 OUTRAS ASSINATURAS DA TRANSIÇÃO QUÂNTICA

Nesta seção, discutiremos duas outras assinaturas da transição quântica apresentada neste capítulo. Primeiramente, trataremos do esquema proposto em [102] para a observação do sinal da transição observando o comportamento anômalo do fator Fano para cavidades caóticas embebidas num ambiente eletromagnético. O segundo trabalho que iremos descrever mostra uma interessante assinatura da transição na cauda da distribuição de carga transmitida quando variamos a transparência das barreiras [120]. Finalizamos fazendo uma comparação entre tais assinaturas e a descrita neste capítulo do ponto de vista experimental.

Na ref. [102] os autores estudaram os efeitos de interação coulombiana em pontos quânticos. A intensidade da interação na cavidade pode ser medida via a impedância, $Z(\Omega)$, de um ambiente eletromagnético efetivo no qual o sistema encontra-se embebido. A impedância do ambiente eletromagnético também pode ser utilizada para observar a dinâmica de supressão do efeito de bloqueio coulombiano, visto que quando $z = (e^2/h)Z(\Omega) \ll 1$ o bloqueio coulombiano é fortemente suprimido. Esse efeito pode ser medido através das curvas características $I - V$, as quais exibem um comportamento tipo lei de potência anômalo para pequenas voltagens $I(V) \cong V^{2z+1}$. Kindermann e Nazarov [85] utilizaram um esquema de grupo de renormalização que seleciona uma janela de energia de estados revelantes (da ordem do inverso do tempo RC do condutor) para mapear tal problema em um similar com autovalores de transmissão renormalizados dependentes da energia, que dão conta do acoplamento efetivo com os demais estados. Esta transformação pode ser interpretada como uma mudança na densidade média de

autovalores de transmissão de um condutor genérico causada por uma dependência com a energia dos autovalores de transmissão. A equação de grupo de renormalização para os autovalores renormalizados é

$$\frac{d\tau_n(E)}{d\ln E} = 2z\tau_n(1 - \tau_n). \quad (4.52)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$\tau_n(\epsilon) = \frac{\epsilon^2 \tau_n}{1 + (\epsilon^2 - 1)\tau_n}, \quad (4.53)$$

onde $\epsilon \equiv (E/E_{\text{rel}})^z$, $E_{\text{rel}} = \hbar/t_{\text{rel}} = G_0 E_c$ é o inverso do tempo de relaxação de carga do condutor e $E_c = e^2/C$ é a energia para o carregamento de um elétron extra no condutor caracterizado pela capacitância C . Observe que para $\epsilon = 1$ obtemos novamente o caso não interagente, onde os autovalores de transmissão independem da energia, portanto E_{rel} faz o papel de um limiar de energia acima do qual a interação é irrelevante. A condutância do sistema é dada pela fórmula de Landauer renormalizada

$$g(\epsilon) = \sum_{n=1}^N \tau_n(\epsilon) = \text{Tr} \left(\frac{\epsilon^2 \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger}{1 + (\epsilon^2 - 1) \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger} \right), \quad (4.54)$$

cuja média, $\langle g(\epsilon) \rangle$, pode ser calculada do limite semiclássico do modelo- σ discutido no capítulo anterior:

$$\langle g(\epsilon) \rangle = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} K(x) \Big|_{\cosh x = \epsilon} \quad (4.55)$$

Para $\epsilon \ll 1$ podemos escrever o termo principal da expansão de $\langle g(\epsilon) \rangle$ da seguinte forma

$$\langle g(\epsilon) \rangle = A\epsilon^\alpha, \quad (4.56)$$

onde A , é um parâmetro dependente da transparência das barreiras e do número de canais nos guias e α é o expoente do termo principal da expansão. Para o caso mais geral, onde temos a transparência das duas barreiras variando arbitrariamente de 0 a 1 independentemente, foram encontrados três valores para α , cada um desses correspondendo a uma região no diagrama $T_1 T_2$ da figura (4.2)

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\text{gap}} = 2; & 0 < \zeta < 1 \text{ e } \zeta > \zeta_0 \\ \alpha_{\text{FP}} = 1; & 1 < \zeta < \zeta_0 \\ \alpha_c = 4/3; & \zeta = 1 \text{ e } \zeta = \zeta_0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Existe uma interpretação simples para os valores de α obtidos se definirmos o número médio de “pulos” para uma transfência de carga completa, $\bar{n} = 2/\alpha$. Para junções de tunelamento, $\bar{n} = \bar{n}_{\text{gap}} = 1$, indicando que o elétron atravessa a estrutura em um único “salto”, que é consistente com a noção de que a dinâmica dentro da cavidade é irrelevante neste caso. Para estruturas com barreiras simétricas, $\bar{n} = \bar{n}_{\text{FP}} = 2$, ou seja, um processo de duas etapas. Neste caso o mecanismo de transferência de carga é o tunelamento ressonante através dos modos Fabry-Perot formados entre as barreiras.

Analisando os resultados da eq. (4.57) à luz dessa interpretação, observamos que nas linhas da transição temos $\bar{n}_c = 3/2 = (\bar{n}_{\text{gap}} + \bar{n}_{\text{FP}})/2$. Fisicamente isto significa que o processo de transferência de carga é uma mistura estatística de eventos de um e dois pulos.

Uma proposta de observação experimental para a medição desses expoentes é também feita nesse trabalho. Os autores de [102] propõem a medição da potencia de ruído de disparo para valores suficientemente baixos de ϵ variando o parâmetro ζ . No gráfico (4.9) é mostrado o resultado de um cálculo numérico do fator Fano variando ζ com $T_1 = 0.4$. O fator Fano exhibe platôs que dependem de ζ para um ζ_0 fixo. Esses platôs correspondem às regiões onde há modos Fabry-Perot (região FP) e às regiões onde tais modos não estão presentes (região com “gap”). Tais platôs são: $F(\epsilon) \simeq \alpha_{\text{gap}}/2$ para $0 < \zeta < 1$ e $\zeta > \zeta_0$ e $F(\epsilon) \simeq \alpha_{\text{FP}}/2$ para $1 < \zeta < \zeta_0$ e estão conectados por uma região de transição suave que intersecta as linhas de transição $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ em $F(\epsilon) \simeq \alpha_c/2$. Para verificar a consistência dos resultados, os autores também localizaram as linhas de transição (linhas pontilhadas na fig. (4.9)) através da análise dos extremos de $dF/d\zeta$ obtidos via rotina numérica.

Os valores universais do fator Fano no regime de baixas voltagens e temperaturas para pontos quânticos fracamente interagentes foi a primeira evidência teórica da transição quântica apresentada aqui. Outra assinatura da transição pode ser vista na cauda da distribuição de carga transmitida que foi objeto de estudo da referência [120] que discutiremos a partir de agora. Utilizando a teoria quântica de circuitos, os autores de [120] conseguiram obter a distribuição completa de carga transmitida para cavidades caóticas conectadas a dois terminais que no regime semiclássico ($N \gg 1$) é dada por

$$P_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{M_0 S(\lambda) - in\lambda}, \quad (4.58)$$

onde n é o número de carga transmitida, $M_0 = eVT_0/h$ é o número de tentativas de transmissão de carga durante um tempo de observação T_0 por canal de transmissão, V é a voltagem aplicada ao dispositivo e N o número de canais abertos. Como vimos no capítulo anterior, $S(\lambda)$ é a ação de um dispositivo mesoscópico. Introduzindo a variável normalizada $x = n/\mathcal{M}$, $0 \leq x \leq 1$, onde $\mathcal{M} = M_0 N$ é o número total de tentativas de transmissão durante o tempo de observação. A nova distribuição é dada por

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{\mathcal{M}(\Omega(\lambda) - ix\lambda)}, \quad \Omega(\lambda) = S(\lambda)/N. \quad (4.59)$$

Para $\mathcal{M} \gg 1$ a variável x pode ser tratada como uma variável contínua e a integral acima pode ser calculada através da aproximação de ponto de sela (ver a referência [121] para mais detalhes deste procedimento). A figura (4.10) mostra o comportamento do logaritmo da distribuição de carga transmitida ($W(x) \propto \ln \mathcal{P}(x)$) e suas duas primeiras derivadas no regime de baixa transmissão $x \rightarrow 0^+$ para $T_1 = 0.4$, obtidos via implementação numérica do método de ponto de sela. Como podemos observar da figura (4.10), a segunda derivada de $W(0)$ com relação a T_2 possui duas discontinuidades em $T_2 \approx 0.28$ e $T_2 \approx 0.67$ em concordância com os valores que delimitam a região onde existem os modos de Fabry-Perot no diagrama da figura (4.2) para $T_1 = 0.4$.

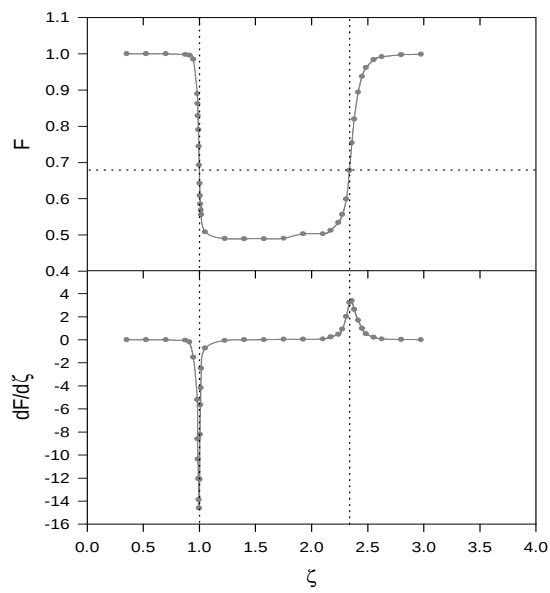


Figura 4.9 Fator Fano $F(\epsilon)$ e sua derivada, $dF(\epsilon)/d\zeta$ em função de ζ para $T_1 = 0.4$. As linhas pontilhadas verticais são estimativas numéricas para as linhas de transição, $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0 \simeq 2.33$. A linha pontilhada horizontal é o valor estimado de $F_c = \alpha_c/2 \simeq 0.67$ para $\epsilon \ll 1$. Figura retirada da ref. [102]

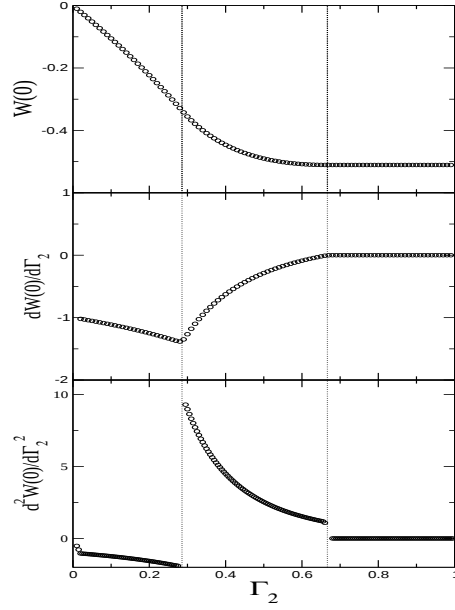


Figura 4.10 Comportamento da distribuição de carga transmitida (topo da figura) e suas derivadas na cauda de eventos raros ($x = 0$). A segunda derivada (parte inferior da figura) apresenta uma discontinuidade em $T_2 \equiv \Gamma_2 \approx 0.28$ e outra em $T_2 = \Gamma_2 \approx 0.67$ para $T_1 = 0.4$. Figura retirada da ref. [120].

Diferentemente destas assinaturas, que aparecem como discontinuidades na cauda de eventos raros da distribuição de carga transmitida ou induzida por uma ambiente eletromagnético externo no fator Fano, os sinais observados neste capítulo aparecem naturalmente nos primeiros cumulantes da estatística de contagem que podem, em princípio, ser medidos diretamente. Recentes experimentos desenvolvidos em junções de tunelamento e pontos de contatos para obtenção da distribuição de carga transmitidas [122, 123] e para obtenção dos cumulantes de estatística de contagem com controle da transparência das barreiras em pontos quânticos [35, 38], nos dão a esperança de que experimentos similares em sistemas NS possam ser realizados brevemente. Uma excelente revisão do campo experimental de sistemas híbridos pode ser encontrada na ref. [51]. Neste trabalho os autores descrevem o problema de transporte termo-elétrico no regime de baixas temperaturas e discutem vários setups experimentais em que é possível estudar as diversas manifestações dos efeitos de proximidade.

LOCALIZAÇÃO FRACA E FLUTUAÇÕES VIA TEORIA DE CIRCUITOS: APLICAÇÃO EM CADEIAS DE PONTOS QUÂNTICOS

Neste capítulo trataremos das propriedades semiclássicas e correções quânticas dos observáveis de transporte, para pontos quânticos conectados em série com ou sem interface NS. O estudo dessas cadeias de pontos é motivado, em grande parte, por recentes avanços experimentais que observam uma transição bastante interessante entre o regime de cadeia e o limite difusivo (fio metálico) [124, 8, 125]. Particularmente em [8] os autores comparam resultados obtidos experimentalmente para o fator Fano com resultados teóricos obtidos via formalismo semiclássico de Boltzmann-Langevin [126, 127] quando variamos o número de pontos numa cadeia aumentando o número de pontos de contatos que separam as diversas cavidades, como podemos ver na fig. (5.1). Com o avanço das atuais técnicas de medição da distribuição de carga transmitida em sistemas formados por uma única cavidade [35, 38], em breve teremos resultados experimentais de cumulantes de ordem superior para essas cadeias e um formalismo teórico que seja capaz de dar predições de forma eficiente destes cumulantes é sem dúvida indispensável. Veremos neste capítulo que a teoria de circuitos é capaz de descrever a estatística de contagem de carga nesses sistemas de forma eficiente e, também, fornece um algoritmo para cálculos de correções quânticas como localização fraca e flutuações.

Começamos descrevendo o problema de cadeias através do formalismo de funções de Green quase-clássicas discutido no capítulo 2. Como discutido na referência [80] existe uma parametrização muito conveniente para as funções de Green matriciais 2×2 que permite descrever o problema de transporte em estruturas de dois terminais através de equações escalares semelhantes às deduzidas pelo formalismo de matriz aleatória do capítulo 3. O apêndice E é reservado para uma dedução desta parametrização. Utilizamos esta parametrização para calcularmos a função geratriz da estatística de contagem de uma cadeia de pontos quânticos conectados uns aos outros por barreiras simétricas no regime semiclássico. Através da teoria de circuitos, também estudamos os efeitos nas propriedades de transporte dessa cadeia quando introduzimos uma barreira de transparência diferente das demais. Após esta discussão do regime semiclássico de cadeias de pontos quânticos, estendemos os resultados obtidos por Campagnano e Nazarov [55] para correção de localização fraca e flutuações dos cumulantes da estatística de contagem de carga de cadeias fora do regime de junção de tunelamento. Generalizamos também o método para a incorporação de interfaces NS no regime de baixas energias e campo magnético nulo.

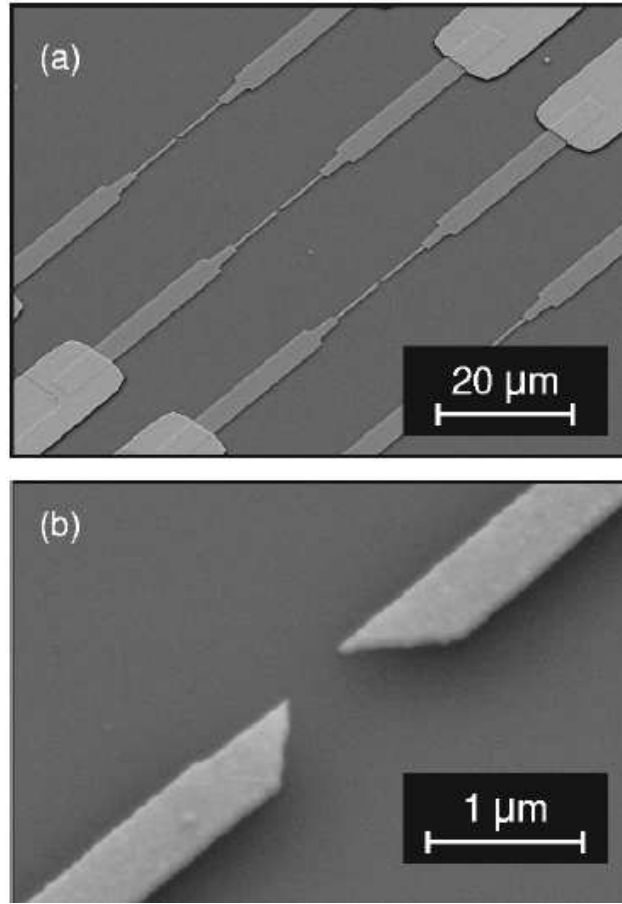


Figura 5.1 Imagens de microscopia eletrônica de (a) uma barra Hall de aproximadamente $100\mu\text{m}$ de largura, com quatro pontos de contatos quânticos utilizados para definir as cavidades caóticas. Em (b) temos uma ampliação de um ponto de contato. Figura retirada da ref. [8].

5.1 CADEIAS: REGIME SEMICLÁSSICO

Nesta seção iremos calcular a função geratriz da estatística de contagem de carga para uma cadeia formada por $N - 1$ cavidades caóticas conectadas entre si e ao reservatórios de elétrons por N conectores com transparência T (cadeias homogêneas). Uma vez estudado este caso homogêneo, vamos estudar como a introdução de um conector com transparência diferente das demais interfere nas propriedades semiclássicas de transporte do sistema (cadeias heterogêneas).

5.1.1 Cadeias Homogêneas

A ação que descreve tal cadeia é dada por:

$$S(\{\check{G}_j\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{T_n}{4} (\{\check{G}_j, \check{G}_{j+1}\} - 2) \right], \quad (5.1)$$

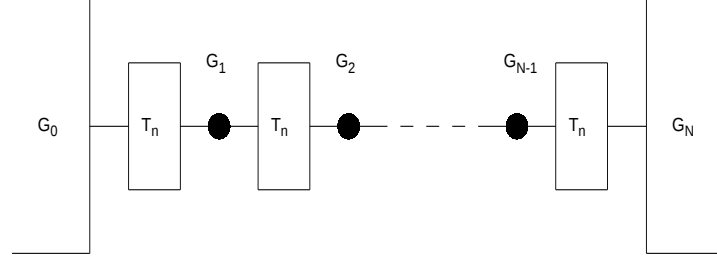


Figura 5.2 Representação em teoria de circuitos de funções de Green quase-clássicas de uma cadeia homogênea.

onde N_c é o número de canais abertos em cada conector que por sua vez é caracterizado pelos coeficientes de transmissão T_n , $\check{G}_j$ é a função de Green que descreve o j -ésimo nó do circuito da fig. (5.2). A matriz $\check{G}_0$ descreve o reservatório à esquerda e a matriz $\check{G}_N \equiv \check{G}^\lambda = e^{i\lambda\check{\sigma}_1} \check{G}_0 e^{-i\lambda\check{\sigma}_1}$ descreve o reservatório à direita, onde o campo de contagem, descrito pelo parâmetro λ foi acoplado. Considere agora, a seguinte variação infinitesimal em $\check{G}_j$:

$$\check{G}_j \rightarrow e^{\delta\check{\Omega}_j} \check{G}_j e^{-\delta\check{\Omega}_j} = \check{G}_j + \delta\check{G}_j, \quad (5.2)$$

onde, $\delta\check{G}_j = [\delta\check{\Omega}_j, \check{G}_j]$. Substituindo a eq. (5.2) em (5.1):

$$S(\{\check{G}_j + \delta\check{G}_j\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{T_n}{4} (\{\check{G}_j + \delta\check{G}_j, \check{G}_{j+1} + \delta\check{G}_{j+1}\} - 2) \right]. \quad (5.3)$$

As equações de ponto de sela são obtidas extremizando a ação (5.3) em relação a $\delta\check{\Omega}_j$:

$$\frac{\delta S(\{\check{G}_j + \delta\check{G}_j\})}{\delta\check{\Omega}_j} = 0, \quad (5.4)$$

de onde obtemos (por simplicidade consideramos que $T_n = T$)

$$\frac{2N_c T [\check{G}_j, \check{G}_{j-1}]}{4 + T (\{\check{G}_j, \check{G}_{j-1}\} - 2)} + \frac{2N_c T [\check{G}_j, \check{G}_{j+1}]}{4 + T (\{\check{G}_j, \check{G}_{j+1}\} - 2)} = 0; \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (5.5)$$

ou ainda,

$$\sum_{\delta=-1}^{+1} \check{I}_{j,j+\delta} = 0; \check{I}_{j,j+\delta} = \frac{2N_c T [\check{G}_j, \check{G}_{j+\delta}]}{4 + T (\{\check{G}_j, \check{G}_{j+\delta}\} - 2)}, \quad (5.6)$$

cuja solução é:

$$[\check{G}_{j+1}^{ps}, \check{G}_j^{ps}] = [\check{G}_j^{ps}, \check{G}_{j-1}^{ps}]; j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.7)$$

Ao invés de prosseguirmos na solução de (5.7) em termos desta parametrização de funções de Green em termos do campo de contagem λ , que é essencialmente um cálculo matricial, utilizaremos uma parametrização para as funções de Green proposta por Nazarov em [80] que reduz o conjunto de equações matriciais (5.7) à solução de equações escalares em termos de um parâmetro ϕ , idênticas às da teoria de circuitos escalar estudada no capítulo anterior. No apêndice E apresentamos uma dedução de tal parametrização. Na ref. [115] os autores estudaram este mesmo problema utilizando até o fim a parametrização em termo de λ . A parametrização introduzida por Nazarov é dada por

$$\check{G}_j(\phi_j) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_j} \\ e^{i\phi_j} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Desta forma temos que a eq. (5.7) pode ser escrita em termos dos novos parâmetros ϕ_j da seguinte forma:

$$[\check{G}_{j+1}^{ps}, \check{G}_j^{ps}] = -2i \text{sen}(\phi_{j+1} - \phi_j) \check{\sigma}_3, \quad (5.9)$$

e portanto a eq. (5.7) fica:

$$\text{sen}(\phi_{j+1} - \phi_j) = \text{sen}(\phi_j - \phi_{j-1}), \quad (5.10)$$

cuja solução é dada pela seguinte equação:

$$\phi_{j+1} + \phi_{j-1} - 2\phi_j = 0; j = 1, \dots, N-1, \quad (5.11)$$

os potenciais nos terminais são fixados em $\phi_0 = 0$ e $\phi_N = \phi$. A eq. (5.11) é a versão elemento finito da equação de Laplace em uma dimensão, cuja solução é

$$\phi_j = \frac{j\phi}{N}; j = 0, \dots, N. \quad (5.12)$$

Usando (5.12), podemos escrever os comutadores e anticomutadores dos $\check{G}_j$'s em termos de ϕ

$$[\check{G}_{j+1}^{ps}, \check{G}_j^{ps}] = -2i \text{sen}(\phi/N) \check{\sigma}_3 \quad (5.13)$$

$$\{\check{G}_{j+1}^{ps}, \check{G}_j^{ps}\} = 2 \cos(\phi/N) \check{1} \quad (5.14)$$

A ação no ponto de sela é dada por:

$$S^{ps}(\phi) = \frac{N}{2} \sum_{n=1}^{N_c} \text{Tr} \ln [\check{1} + T_n/2 (\cos(\phi/N) - 1) \check{1}] . \quad (5.15)$$

A pseudo-corrente é dada por

$$I^{ps}(\phi) = -2 \frac{d}{d\phi} S^{ps}(\phi) = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{T_n \text{sen}(\phi/N)}{1 - T_n \text{sen}^2(\phi/2N)} . \quad (5.16)$$

Os cumulantes da estatística de contagem são obtidos através da seguinte expressão

$$q_{l+1}^{ps} = \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \right)^l g^{ps}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}; l = 0, 1, \dots, \quad (5.17)$$

onde,

$$g^{ps}(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon} I^{ps}(\phi)|_{\text{sen}\phi/2=\varepsilon} . \quad (5.18)$$

Expandindo a eq. (5.18) para $\varepsilon \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{g^{ps}(\varepsilon)}{N_c} &= \frac{T}{N} - \frac{T}{3} \frac{(N^2 + 2 - 3T)}{N^3} \varepsilon^2 + \frac{T}{15} \frac{[2(1 - N^4) - 15(1 - T)T]}{N^5} \varepsilon^4 \\ &+ \frac{T}{315N^7} [-24N^6 + (14 - 21T)N^4 + (14 - 105(1 - T)T)N^2 \\ &+ 315T^3 - 420T^2 + 126T - 4] \varepsilon^6 + \mathcal{O}(\varepsilon^8), \end{aligned} \quad (5.19)$$

e portanto os cumulantes da estatística de contagem de carga para essa cadeia são dados pelos coeficientes de tal expansão como já vimos nos capítulos anteriores. Abaixo apresentamos o fator Fano, o fator de assimetria e a razão entre o quarto cumulante e a condutância do sistema

$$F \equiv \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{3} \frac{N^2 + 2 - 3T}{N^2}; \quad (5.20)$$

$$S \equiv \frac{q_3}{q_1} = \frac{1}{15} \frac{N^4 + (10 - 15T)N^2 - 30(1 - T)T + 4}{N^4}; \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} Q &\equiv \frac{q_4}{q_1} = -\frac{1}{105N^6} [N^6 - (42 - 63T)N^4 + (420(1 - T)T - 56)N^2 \\ &+ 630T^3 - 840T^2 + 252T - 8]; \end{aligned} \quad (5.22)$$

A figura 5.3 mostra o comportamento desses três observáveis quando aumentamos o número de conectores para vários valores de T fixos. O comportamento do fator Fano e do fator de assimetria já havia sido apresentado em [115]. Ambos apresentam um comportamento monotônico crescente para $T = 0.7$ e $T = 1$ tendendo ao valor esperado

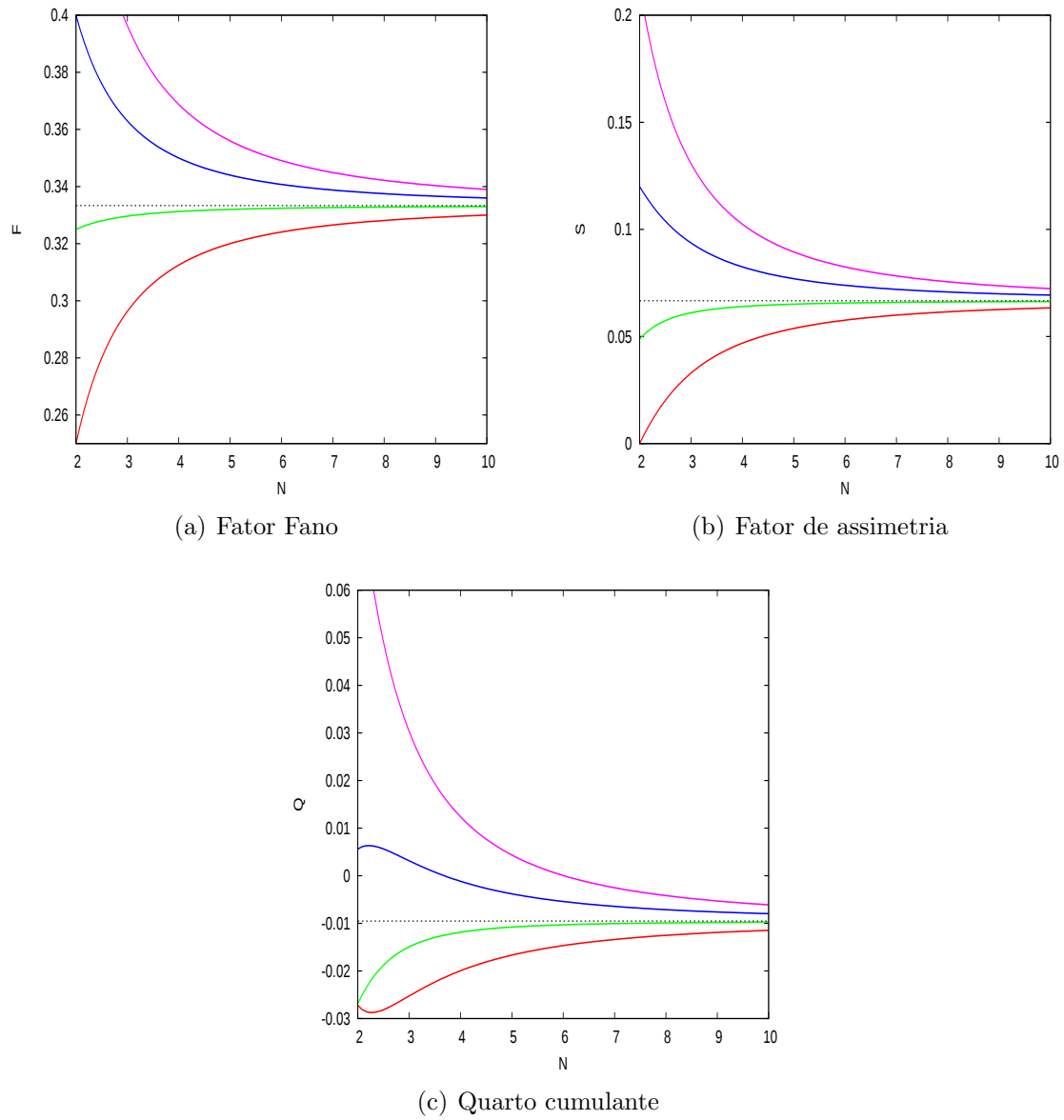


Figura 5.3 Comportamento de três observáveis de interesse quando aumentamos o número de conectores para $T = 1$ (vermelho), $T = 0.7$ (verde), $T = 0.4$ (azul), $T = 0.1$ (magenta). As linhas tracejadas horizontais são os valores de tais grandezas para um fio quântico.

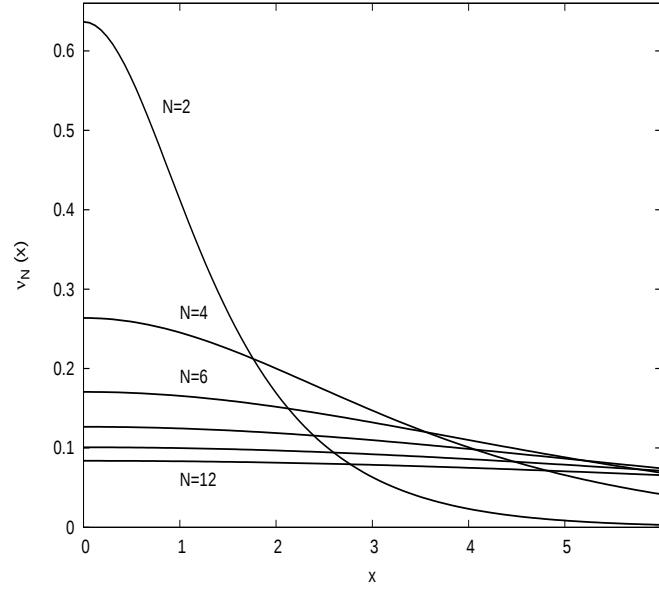


Figura 5.4 Densidade média de autovalores de transmissão para $T = 1$ e $N = 2, 4, 6, 8, 10$ e 12 .

de tais grandezas para um fio quântico, $F_{\text{fio}} = 1/3$ e $S_{\text{fio}} = 1/15$. Quando o número de conectores é muito maior que 1, já o quarto cumulante exibe um comportamento não monotônico para valores intermediários de T e tende ao valor $1/105$ para N grande. Interessante notar na fig. (5.3) que existe um valor próximo a $T = 0.7$ onde os observáveis tendem aos valores do fio para um número pequeno de conectores ($N \sim 5$).

A densidade média de autovalores de transmissão pode ser obtida da pseudo-corrente (5.16) através da relação:

$$\nu_N(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \{ K^{ps}(x - i\pi/2) \} ; K^{ps}(x) = i/2 I^{ps}(-2ix), \quad (5.23)$$

Para $T = 1$ obtemos a seguinte expressão:

$$\nu_N(x) = \frac{2}{\pi} \tan(\pi/2N) \frac{1 - \tanh^2\left(\frac{x}{N}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) \tanh^2\left(\frac{x}{N}\right)}. \quad (5.24)$$

O comportamento desta função é apresentado na figura (5.4) para vários valores de N fixo. Podemos reescrever $S^{ps}(\phi)$ em termos de variável λ e assim, calcular a distribuição de carga transmitida para uma dada voltagem:

$$\Omega(\lambda) \equiv \frac{S^{ps}(\lambda)}{N_c} = N \ln \left[1 - T \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{1 - e^{i\lambda}}}{N} \right) \right) \right], \quad (5.25)$$

a distribuição de carga transmitida é então dada por:

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{\mathcal{M}(\Omega(\lambda) - ix\lambda)}, \quad (5.26)$$

onde $\mathcal{M} = M_0 N_c$ ($M_0 = eVT_0/h$) é o número total de tentativas de transmissão e $x = n/\mathcal{M}$ é o número de partículas transmitidas.

5.1.2 Cadeias Heterogêneas

Estudaremos agora a influência de uma barreira com transparência diferente das demais na cadeia da fig. (5.2). Para ser mais exato, estaremos interessados em cadeias descritas na fig. (5.5(a)), onde uma sequência de pontos quânticos encontra-se conectada aos reservatórios à esquerda e à direita por barreiras com transparências T_1 e T_2 respectivamente, diferente das barreiras internas T . A pseudo-corrente nesse caso pode ser escrita como

$$I_1(\phi - \theta_1) = \frac{N_c T_1 \sin(\phi - \theta_1)}{1 - T_1 \sin^2(\phi - \theta_1)/2}, \quad (5.27)$$

devido à “queda de potencial” através da barreira T_1 ,

$$I_{j,j+1}^{(c)}(\theta_j - \theta_{j+1}) = \frac{N_c T \sin(\theta_j - \theta_{j+1})}{1 - T \sin^2(\theta_j - \theta_{j+1})/2}; j = 1 \dots N - 1, \quad (5.28)$$

que descreve os conectores internos e finalmente

$$I_2(\theta_N) = \frac{N_c T_2 \sin(\theta_N)}{1 - T_2 \sin^2(\theta_N)/2}. \quad (5.29)$$

A lei de conservação neste circuito é dado por:

$$I_1(\phi - \theta_1) = I_{j,j+1}^{(c)}(\theta_j - \theta_{j+1}) = I_2(\theta_N). \quad (5.30)$$

Da nossa análise de cadeias homogêneas, temos que a queda de potencial num conector interno qualquer é dado por

$$\sin(\theta_j - \theta_{j+1}) = \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_N}{N - 1}\right); j = 1 \dots N - 1. \quad (5.31)$$

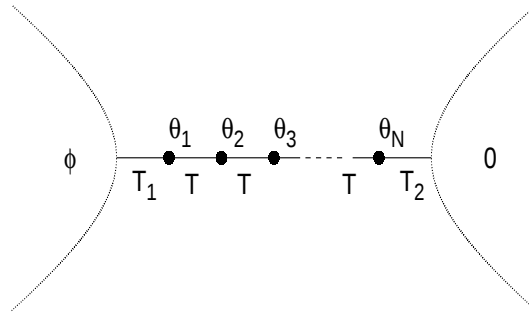
Este resultado nos permite reescrever a lei de conservação da seguinte forma

$$I_1(\phi - \theta_1) = I_c(\theta_1 - \theta_N) = I_2(\theta_N), \quad (5.32)$$

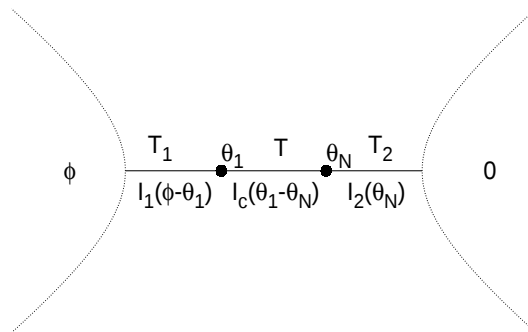
onde definimos a pseudo-corrente normalizada que descreve a queda de potencial por toda a região interna do circuito descrito na fig. (5.5(a))

$$I_c(\phi) = \frac{N_c T \sin \phi / (N - 1)}{1 - T \sin^2 \phi / 2 (N - 1)}; N > 2. \quad (5.33)$$

É interessante notar que em termos da pseudocorrente (5.33) o circuito da fig. (5.5(a)) se reduz ao descrito pela fig. (5.5(b)). Para determinarmos os pseudo-potenciais θ_1 e



(a)



(b)

Figura 5.5 (a) Representação na teoria de circuitos de uma cadeia heterogênea típica. As barreiras que conectam as cavidades caóticas aos reservatórios possuem transparências diferente das barreiras internas. (b) Representação do problema de $N-1$ pontos conectados em série em termos de um problema efetivo de dois pontos.

θ_N , devemos resolver o conjunto de equações acopladas abaixo oriundas da lei de conservação (5.32)

$$\frac{N_c T_1 \sin(\phi - \theta_1)}{1 - T_1 \sin^2(\phi - \theta_1)/2} = \frac{N_c T \sin(\theta_1 - \theta_N)/(N-1)}{1 - T \sin^2(\theta_1 - \theta_N)/2(N-1)}, \quad (5.34)$$

e

$$\frac{N_c T \sin(\theta_1 - \theta_N)/(N-1)}{1 - T \sin^2(\theta_1 - \theta_N)/2(N-1)} = \frac{N_c T_2 \sin \theta_N}{1 - T_2 \sin^2 \theta_N/2}. \quad (5.35)$$

Resolvendo numericamente este conjunto de equações, utilizando por exemplo o programa matemático Maple, podemos obter a densidade média de autovalores de transmissão em termos de T_1 , T_2 e T . Na figura (5.6) apresentamos o comportamento de $\nu_N(\{T\}, x)$ para $x = 0$, que corresponde à densidade de modos Fabry-Pérot do sistema.

As figuras 5.6(a) e 5.6(b) mostram o comportamento do parâmetro de ordem $\nu_N(T_2, 0)$ em função do número de conectores do circuito com $T_1 = T$ fixo. Na fig. 5.6(b) observamos que para $N = 3$, ou seja um circuito de dois pontos, $\nu_N(T_2, 0)$ é nulo para $T_2 < 1/3$ e diferente de zero caso contrário. Lembramos que no caso de um ponto [53] este valor crítico ocorre em $T_2^c = 1/2$. Para o caso geral, onde temos $N-1$ pontos, a expressão geral para o valor crítico de barreira onde ocorre a mudança em $\nu_N(T_2, 0)$ é $T_2^c = 1/N$, quando consideramos as demais barreiras contatos ideais. Podemos estender este resultado para o caso $T_1 \neq T$, através das seguintes variáveis auxiliares:

$$\zeta_N = \frac{T_2}{T_1} \left(1 + (N-2+T) \frac{T_1}{T} \right); \quad (5.36)$$

$$\zeta_{0N} = \frac{1 + (N-2+T) \frac{T_1}{T}}{1 - (N-2+T) \frac{T_1}{T}}, \quad (5.37)$$

que nada mais são que as respectivas generalizações das variáveis ζ e ζ_0 , definidas no capítulo anterior, para conter a informação do número de pontos e o valor das barreiras internas T . Na figura 5.6(c) apresentamos o diagrama $T_1 \times T_2$ para $T = 1$ que delimita a região onde $\nu_N(T_1, T_2, 0) \neq 0$ através das curvas $\zeta_N = 1$ e $\zeta_N = \zeta_{0N}$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator Fano e do fator de assimetria desta cadeia heterogênea. Nossa análise de cumulantes será feita expandindo a função geratriz de cumulantes $g_N^{ps}(\varepsilon)$ para $\varepsilon \ll 1$. Para simplificar nosso estudo vamos considerar $T_1 = T$, reduzindo o número de pseudo-potenciais a apenas um. Escrevendo a pseudo-corrente para esse caso temos

$$I_1(\phi - \theta) = \frac{2N_c T_1 \tan\left(\frac{\phi - \theta}{2(N-1)}\right)}{1 + (1 - T_1) \tan^2\left(\frac{\phi - \theta}{2(N-1)}\right)}; \quad (5.38)$$

$$I_2(\theta) \frac{2N_c T_2 \xi}{1 + (1 - T_2) \xi^2}, \quad (5.39)$$

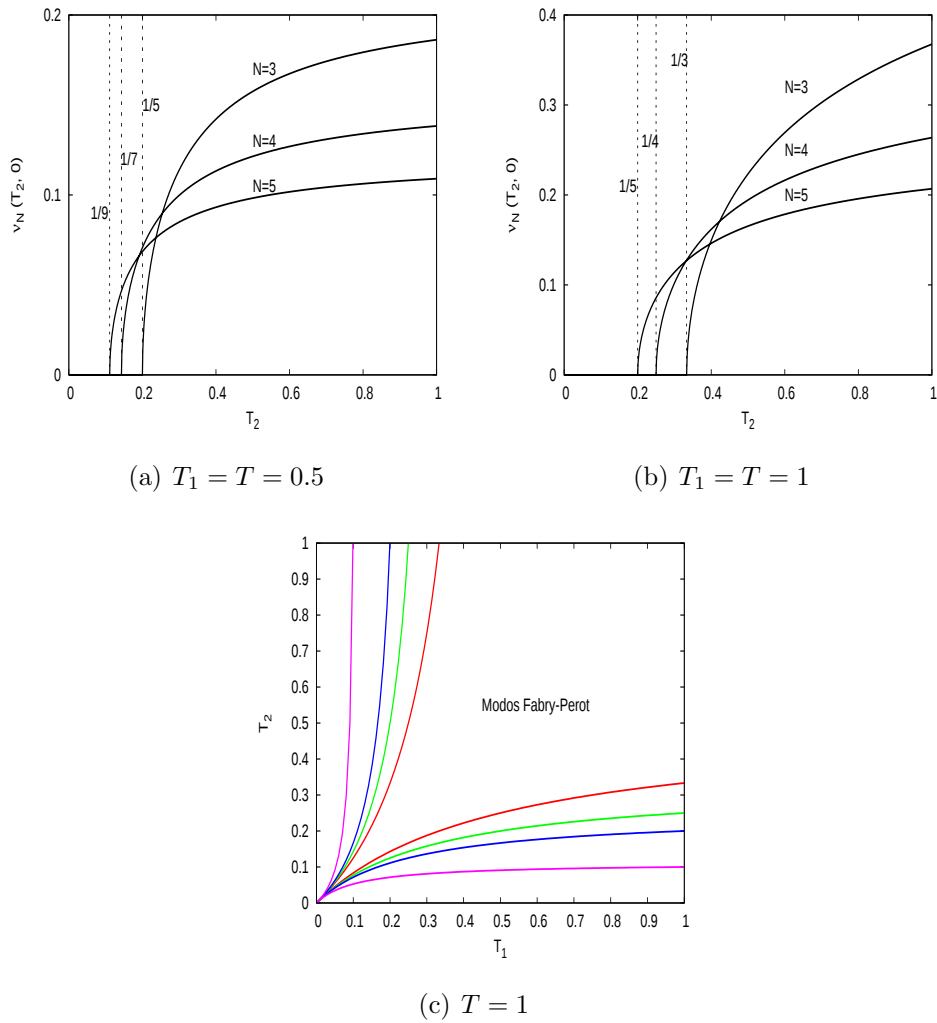


Figura 5.6 As figuras (a) e (b) apresentam o comportamento de $\nu_N(T_2, 0)$ para valores fixos de T_1 e T variando o número de conectores. A figura (c) apresenta o diagrama $T_1 \times T_2$ para $T = 1$ e $N = 3$ (vermelho), $N = 4$ (verde), $N = 5$ (azul) e $N = 10$ (magenta).

onde $\xi = \tan \theta/2$. Definimos também $\xi_N \equiv \tan \theta/2(N-1)$ e $\eta_N \equiv \tan \phi/2(N-1)$. Em termos destas novas variáveis temos:

$$\tan \left(\frac{\phi - \theta}{2(N-1)} \right) = \frac{\eta_N - \xi_N}{1 + \eta_N \xi_N}. \quad (5.40)$$

Substituindo $\phi = 2\arcsen(\varepsilon)$ na variáveis acima definidas e expandindo para $\varepsilon \ll 1$ temos:

$$\eta_N = \frac{\varepsilon}{N-1} + \frac{(N-1)^2 + 2}{6(N-1)^3} \varepsilon^3 + \frac{9(N-1)^4 + 20(N-1)^2 + 16}{120(N-1)^5} \varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^7); \quad (5.41)$$

$$\xi_N = A\varepsilon + B\varepsilon^3 + C\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^7), \quad (5.42)$$

onde os coeficientes A , B e C são obtidos da lei de conservação da pseudo-corrente. A expansão de ξ pode ser escrita em termos dos coeficientes de ξ_N através da seguinte expressão:

$$\xi = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{N-1}{2k+1} \xi_N^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{N-1}{2k} \xi_N^{2k}}. \quad (5.43)$$

Uma vez calculados os coeficientes de (5.42) através da lei de conservação, podemos calcular os cumulantes da estatística de contagem, eq. (5.17). Calculamos os três primeiros cumulantes e abaixo apresentamos o fator Fano e o fator de assimetria:

$$F_N(T_1, T_2) = \frac{1}{3} \frac{[(3T_1 + t_2)t_2 + (3T_1^2 - 3T_1T_2^2 + 2T_2^2)]t_2 + 3(1 - T_2)T_1^3}{(T_1 + t_2)^3}; \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} C_N(T_1, T_2) = & \frac{1}{15(T_1 + t_2)^6} \{ (t_2 + 6T_1)t_2^5 + 5[(2T_2^2 - 3T_1T_2^2 + 3T_1^2)t_2 \\ & + 3((2 - 3T_1T_2)T_1T_2^2 + (2 - T_2)T_1^3)]t_2^3 + [2(2 - 15(1 - T_1)T_1)T_2^4 \\ & + 15(2 - 3T_1)T_1^2T_2^2 + 45(1 + T_2)T_1^4]t_2^2 - 3[2(6 - (15 - 10T_1)T_1)T_2^3 \\ & + 20(2 - 3T_1)T_1^2T_2^2 - 5(6 - 9T_1 - 4T_1^2)T_2T_1^2 - 15T_1^4]T_1T_2t_2 \\ & + 15(1 - (3 - 2T_2)T_2)T_1^6 \}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde $t_2 \equiv (N-1)T_2$.

A fig. (5.7) apresenta o comportamento desses dois observáveis para diversos valores de N variando T_1 , com $T_2 = 0.1$ e o caso contrário, onde T_2 varia e T_1 é mantido fixo também em 0.1. O comportamento do fator Fano e o fator de assimetria apresentado aqui é semelhante ao do caso NS estudado no capítulo anterior, tais observáveis neste caso também apresentam um comportamento não monotônico quando variamos as transparências das barreiras. Para os gráficos 5.7(a) e 5.7(c) podemos observar uma acentuada

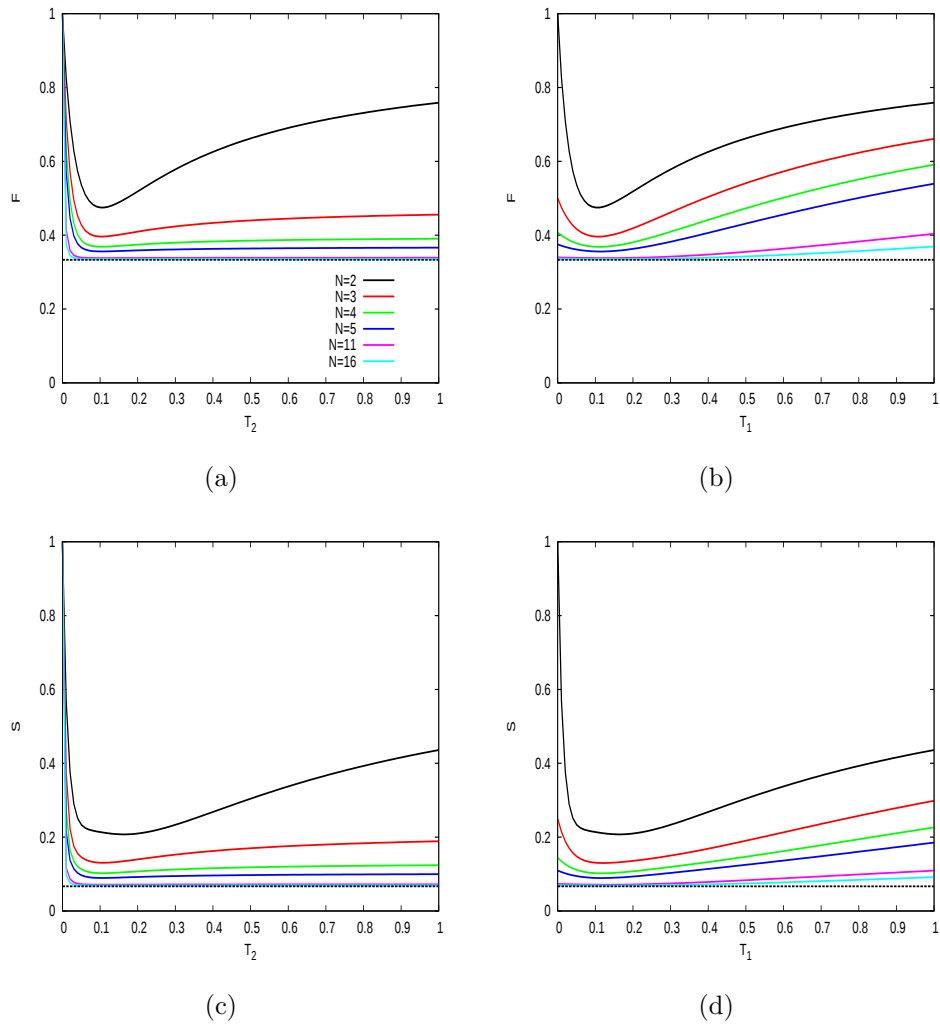


Figura 5.7 O comportamento do fator Fano [(a) e (b)] e do fator de assimetria [(c) e (d)] em função de T_2 (T_1) com $T_1 = 0.1$ ($T_2 = 0.1$). Observe o comportamento não monotônico destes observáveis quando aumentamos o número de conectores que compõem a cadeia.

discrepância entre o fator Fano (fator de assimetria) da cadeia e $1/3$ ($1/15$) que é o valor do fio quando T_2 é muito menor que T_1 ($T_2 \ll T_1$), mesmo quando N é grande ($N \sim 10$). Para $T_2 \simeq T_1$ o valor de $F_N(T_1, T_2)$ ($S_N(T_1, T_2)$) é praticamente $1/3$ ($1/15$) para o mesmo número de conectores. Comportamento semelhante ocorre para o caso onde fixamos T_2 ao invés de T_1 . Neste caso para $T_1 \ll T_2$ temos que os valores da cadeia tendem aos do fio mais rapidamente. O que podemos concluir de toda essa discussão é que a introdução de uma inomogeneidade numa cadeia através de uma barreira de transparência diferente acarreta em acentuadas diferenças entre o regime de muitos pontos e o regime de fio quântico, que em cadeias homogêneas ocorre independente de T como vimos na figura (5.3).

5.2 CORREÇÕES QUÂNTICAS PARA CADEIAS DE PONTOS QUÂNTICAS

Recentemente, Campagnano e Nazarov [55] introduziram um método eficiente de cálculo de correções quânticas de um sistema mesoscópico arbitrário através da teoria de circuitos keldyshiana. Usualmente o cálculo de tais correções é realizado através da obtenção dos diagramas difusos e cooperons, que correspondem aos diagramas tipo escada e cruzados respectivamente da técnica diagramática aplicada às funções de Green de uma partícula quando promediadas sobre impurezas [128, 19]. O método basea-se no fato de que tais diagramas não são específicos das correções quânticas, pois também aparecem na resposta das funções de Green a uma variação da auto-energia. O que temos aqui é de certa forma uma versão do teorema “flutuação-dissipação” para um problema de não-equilíbrio, onde as flutuações quânticas de um sistema mesoscópico estão relacionadas à dissipação desse sistema que se encontra incorporada em uma auto-energia. Para uma discussão mais detalhada sobre essas ideias recomendamos a referência [81], onde é feito a construção do método desde as funções de Green no espaço de coordenadas até a generalização para o caso discreto (teoria de circuitos).

Com esse cenário em mente os autores de [55] construíram um método onde a contribuição desses diagramas é calculada diretamente da ação semi-clássica (5.1) através de um truque de duplicação da dimensão das funções de Green. A função de Green agora é diagonal blocada onde, o bloco superior é chamado de “black” e o inferior de “white”. As funções de Green de cada nó são substituídas por uma expansão até segunda ordem numa certa matriz “fonte”, $\hat{X}_j$ em torno da solução de ponto de sela $\hat{G}_j^{ps}$, (a estrutura “chapéu” já incorpora os dois setores), mantendo o vínculo $\hat{G}^2 = \hat{1}$. A matriz $\hat{X}_j$ tem o papel de misturar os dois setores. Os autovalores cooperon e difusos são obtidos diagonalizando o termo de segunda ordem em $\hat{X}_j$ da expansão da ação semi-clássica. O método é bem flexível e permite a inclusão de parâmetros relacionados com o efeito de descoerência causado por exemplo por um campo magnético ou espalhamento spin-órbita. Um método alternativo para o cálculo da localização fraca pode ser encontrado na ref. [129]. Nestes trabalhos os autores utilizam o formalismo de matriz-S combinado com o modelo σ não linear de Keldysh [130] para calcular a correção de localização fraca da magnetocondutância para redes de pontos quânticos. Outra abordagem teórica que permite estudar este tipo de correções quânticas é a abordagem via matrizes aleatórias e modelo σ não linear supersimétrico [52] discutida no capítulo 4. Os cumulantes da

estatística de contagem e suas variâncias também podem ser calculados exatamente para número de canais arbitrário utilizando um método desenvolvido recentemente [131] que permite o cálculo de média em ensemble desses observáveis utilizando uma interessante conexão entre a teoria de polinômios simétricos e generalizações das integrais de Selberg.

O grande atrativo do método discutido na ref. [55] é sua simplicidade algorítmica que permite o cálculo das correções quânticas manipulando matrizes 4×4 para o caso mais simples de estruturas com apenas dois terminais. Abaixo apresentamos o procedimento detalhado para o cálculo dos autovalores da ref. [55] e aplicamos para a cadeia homogênea estudada em seções anteriores e para sistemas NS.

5.2.1 O Formalismo

Considere a solução de ponto de sela no espaço duplicado

$$\hat{G}_j^{ps}(\phi, \phi') = \begin{pmatrix} \check{G}(j\phi/N) & \check{0} \\ \check{0} & \check{G}(j\phi'/N) \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

e a seguinte expansão

$$\hat{G}_j = \hat{G}_j^{ps} + \hat{X}_j - \frac{1}{2} \hat{G}_j^{ps} \hat{X}_j^2 + \dots \quad (5.47)$$

A matriz $\hat{X}$ deve ser escolhida de tal forma que o vínculo $\hat{G}_j^2 = 1$ seja satisfeito. Para tanto, $\hat{X}$ deve anticomutar com $\hat{G}_j^{ps}$

$$\{\hat{G}_j^{ps}, \hat{X}_j\} = 0. \quad (5.48)$$

Vamos agora, reescrever (5.46) da seguinte forma:

$$\hat{G}_j^{ps} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_j \check{\sigma}_3/2} & \check{0} \\ \check{0} & e^{-i\theta'_j \check{\sigma}_3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{\sigma}_1 & \check{0} \\ \check{0} & \check{\sigma}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_j \check{\sigma}_3/2} & \check{0} \\ \check{0} & e^{i\theta'_j \check{\sigma}_3/2} \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

onde, $\theta_j \equiv j\phi/N$ e $\theta'_j \equiv j\phi'/N$. Considere a seguinte transformação unitária

$$\hat{\mathcal{U}}_0 = \begin{pmatrix} \check{\mathcal{U}}_0 & \check{0} \\ \check{0} & \check{\mathcal{U}}_0 \end{pmatrix}; \check{\mathcal{U}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Observe que

$$\check{\mathcal{U}}_0 \check{\sigma}_1 \check{\mathcal{U}}_0^\dagger = \check{\sigma}_3, \quad (5.51)$$

desta forma a eq. (5.49) pode ser escrita como

$$\hat{G}_j^{ps} = \hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j \hat{\mathcal{U}}, \quad (5.52)$$

onde,

$$\hat{T}_j = \hat{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_j \check{\sigma}_3/2} & \check{0} \\ \check{0} & e^{i\theta'_j \check{\sigma}_3/2} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{U}}^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\theta_j \check{\sigma}_1/2} & \check{0} \\ \check{0} & e^{i\theta'_j \check{\sigma}_1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \check{\sigma}_3 & \check{0} \\ \check{0} & \check{\sigma}_3 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

A ação no ponto de sela nesse espaço duplicado fica

$$S^{ps}(\phi, \phi') = \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \ln \left[\hat{1} + \frac{T}{4} \left(\left\{ \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j, \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_{j+1} \right\} - \hat{2} \right) \right] \quad (5.55)$$

Como veremos adiante, é conveniente definirmos a seguinte matriz auxiliar

$$\hat{L} \equiv \hat{T}_j \hat{T}_{j+1}^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\phi\check{\sigma}_1/2N} & \check{0} \\ \check{0} & e^{-i\phi'\check{\sigma}_1/2N} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

É fácil ver a seguinte propriedade da matriz $\hat{L}$

$$\hat{L}^\dagger = \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{i\phi\check{\sigma}_1/2N} & \check{0} \\ \check{0} & e^{i\phi'\check{\sigma}_1/2N} \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Em termos de $\hat{L}$ o anticomutador de (5.55) pode ser escrito da seguinte forma

$$\left\{ \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j, \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_{j+1} \right\} = \hat{T}_j^\dagger \hat{L}^\dagger \hat{T}_{j+1} + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{L} \hat{T}_j. \quad (5.58)$$

Executando os produtos matricias de (5.58) obtemos:

$$\left\{ \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j, \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_{j+1} \right\} = 2 \begin{pmatrix} \cos \phi/N \check{1} & \check{0} \\ \check{0} & \cos \phi'/N \check{1} \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Substituindo (5.59) na eq. (5.55), obtemos

$$S^{ps}(\phi, \phi') = N_c N \ln \left[\left(1 + \frac{T}{2} (\cos \phi/N - 1) \right) \left(1 + \frac{T}{2} (\cos \phi'/N - 1) \right) \right]. \quad (5.60)$$

Para $\phi = \phi'$, a eq. (5.60) se reduz à solução de ponto de sela semi-clássica, eq. (5.15) multiplicada por um fator 2.

Fora do ponto de sela, a ação é dada por:

$$S(\phi_b, \phi_w) = \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \left\{ \hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\}) \right\}; \quad (5.61)$$

$$\hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\}) = \ln \left[\hat{1} + \frac{T}{4} \left(\left\{ \hat{T}_j^\dagger \hat{G}_j \hat{T}_j, \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{G}_{j+1} \hat{T}_{j+1} \right\} - \hat{2} \right) \right], \quad (5.62)$$

onde,

$$\hat{G}_j = \hat{\Lambda} + \hat{X}_j - \frac{1}{2} \hat{\Lambda} \hat{X}_j^2 + \dots. \quad (5.63)$$

Uma das vantagens de termos executado a transformação unitária em $\hat{G}_j^{ps}$ é que nesta nova base a matriz $\hat{X}_j$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{X}_j = \begin{pmatrix} \check{0} & \check{X}_j^{bw} \\ \check{X}_j^{wb} & \check{0} \end{pmatrix}; \check{X}_j^{\alpha\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & x_{j,+}^{\alpha\bar{\alpha}} \\ x_{j,-}^{\alpha\bar{\alpha}} & 0 \end{pmatrix}; \alpha = b, w, \quad (5.64)$$

onde fica simples perceber que a condição de anticomutação (5.48) é respeitada na eq. acima, o índice $\bar{\alpha}$ recebe b (w) se α recebe w (b). As matrizes $\hat{T}_j$ e $\hat{\Lambda}$ foram definidas nas equações (5.53) e (5.54) respectivamente. A expansão (5.63) é um dos passos mais importantes de todo o cálculo. Isso porque expandir funções de Green matriciais dependentes do campo de contagem não é uma tarefa trivial, como apontado por um dos autores de [55] em um trabalho recente [132] envolvendo cálculo de correções quânticas em correntes de spin. Essa expansão aliada à parametrização em termos de ϕ podem ser a fonte de inconsistências que temos encontrado para cálculo de flutuações de cumulantes de ordem superior. Voltaremos a tratar dessa questão durante a análise destes resultados no final do capítulo.

Seguindo o algoritmo desenvolvido por Campagnano e Nazarov em [55] iremos agora calcular a correção de localização fraca e flutuações para uma cadeia de N pontos quânticos conectados por barreiras idênticas. O algoritmo para tal cálculo é apresentado abaixo:

1. Expandir eq. (5.62) até segunda ordem nos $\hat{X}_j$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\}) &\sim \hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\} = 0) + \frac{\delta \hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\})}{\delta \hat{X}_j} \Big|_{\hat{X}_j=0} \hat{X}_j \\ &+ \frac{\delta^2 \hat{\mathcal{S}}_j(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\})}{\delta \hat{X}_j^2} \Big|_{\hat{X}_j=0} \hat{X}_j^2. \end{aligned} \quad (5.65)$$

2. Substituindo a expansão (5.65) na eq. (5.61), escrever o termo de segunda ordem da seguinte forma

$$S^{(2)}(\phi_b, \phi_w) = \sum_{j,j'=0}^{N-1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} x_{j, \sigma_1 \bar{\sigma}_1}^{bw} M_{j \bar{\sigma}_1, j' \sigma_2} x_{j', \sigma_2 \bar{\sigma}_2}^{wb}; \sigma_i = +, -. \quad (5.66)$$

3. Aplicar o método variacional à eq. (5.66) em relação aos $x_{j, \sigma \bar{\sigma}}^{bw}$ (ou $x_{j, \sigma \bar{\sigma}}^{wb}$);

$$\frac{\delta S^{(2)}(\phi_b, \phi_w)}{\delta x_{j, \sigma \bar{\sigma}}^{\alpha \bar{\alpha}}} = 0, \quad (5.67)$$

o que leva a um conjunto de equações de autovalores.

4. Resolver o sistema linear resultante do passo anterior, ou em outras palavras, calcular os autovalores de $\hat{M}$.

5. A correção de localização fraca para a estatística de contagem em termos dos autovalores de $\check{M}$ pode ser obtida através de

$$q_{l+1}^{wl}(\{\eta\}) = \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \right)^l g^{wl}(\varepsilon, \{\eta\}) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (5.68)$$

onde $g^{wl}(\varepsilon, \{\eta\})$ é a função geratriz da correção de localização fraca dos cumulantes da estatística de contagem

$$g^{wl}(\varepsilon, \{\eta\}) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon} I^{wl}(\varepsilon, \{\eta\}) \Big|_{\text{sen}\phi/2=\varepsilon}, \quad (5.69)$$

e $I^{wl}(\varepsilon, \{\eta\})$ é a pseudo-corrente de localização fraca

$$I^{wl}(\varepsilon, \{\eta\}) = -2 \frac{\partial}{\partial \phi} S^{wl}(\varepsilon, \{\eta\}). \quad (5.70)$$

A ação de localização fraca em termos dos autovalores de $\check{M}$ é dada por [55]

$$S^{wl}(\phi, \{\eta\}) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\ln \left(\frac{M_j^-(\{\phi_\alpha\}) + \eta_H}{M_j^+(\{\phi_\alpha\}) + \eta_H} \right) + 3 \ln \left(\frac{M_j^+(\{\phi_\alpha\}) + \eta_H + \eta_{SO}}{M_j^-(\{\phi_\alpha\}) + \eta_H + \eta_{SO}} \right) \right]_{\phi_w = -\phi_b = \phi}, \quad (5.71)$$

onde η_H é o parâmetro relacionado à quebra da simetria de reversão temporal e η_{SO} diz respeito à quebra da simetria de spin. A relação entre esses parâmetros e o parâmetro β que descreve ensembles puros é mostrada na tabela abaixo.

	β	η_H	η_{SO}
EGO	1	0	0
EGU	2	$\rightarrow \infty$	irrelevante
EGS	4	0	$\rightarrow \infty$

Tabela 5.1 Relação entre os parâmetros de descoerência $\{\eta\}$ e os ensembles puro de matrizes aleatórias.

Para o ensemble ortogonal a ação de localização fraca simplifica bastante

$$S^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \ln \left(\frac{M_j^+(\phi)}{M_j^-(\phi)} \right). \quad (5.72)$$

6. A variância da condutância que é definida como $\text{var}G \equiv \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$ ($g = \sum_{i=1}^N \tau_i$) pode ser calculada, assim como em princípio a variância dos cumulantes de ordem superior, através da teoria de circuitos definindo a seguinte ação:

$$S^{(\beta)}(\phi_b, \phi_w) \equiv \sum_{i,j=1}^N \langle \ln(1 - \tau_i \text{sen}^2 \phi_b / 2) \ln(1 - \tau_j \text{sen}^2 \phi_w / 2) \rangle_{\text{con}}. \quad (5.73)$$

onde $\langle \dots \rangle_{\text{con}}$ significa que estamos interessados apenas na parte conectada da expressão acima. É conveniente também, definir a seguinte função geratriz

$$I^{(\beta)}(\phi_b, \phi_w) \equiv 4 \frac{\partial^2 S^{(\beta)}(\phi_b, \phi_w)}{\partial \phi_b \partial \phi_w}, \quad (5.74)$$

$$I^{(\beta)}(\phi_b, \phi_w) = \sum_{i,j=1}^N \left\langle \frac{\tau_i \tau_j \text{sen} \phi_b \text{sen} \phi_w}{(1 - \tau_i \text{sen}^2 \phi_b / 2)(1 - \tau_j \text{sen}^2 \phi_w / 2)} \right\rangle_{\text{con}}. \quad (5.75)$$

A variância da estatística de contagem pode ser obtida da expressão abaixo:

$$\text{var}q_{l+1} = \left(\frac{(\varepsilon_b^2 - 1)(\varepsilon_w^2 - 1)}{4\varepsilon_b \varepsilon_w} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_b \partial \varepsilon_w} \right)^l g(\varepsilon_b, \varepsilon_w) \Big|_{\varepsilon_b = \varepsilon_w = 0}; \quad (5.76)$$

$$g(\varepsilon_b, \varepsilon_w) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_b^2} \sqrt{1 - \varepsilon_w^2}}{4\varepsilon_b \varepsilon_w} I^{(\beta)}(\phi_b, \phi_w) \Big|_{\text{sen} \phi_\alpha / 2 = \varepsilon_\alpha}. \quad (5.77)$$

O método desenvolvido na ref. [55] nos dá uma maneira de calcular a ação (5.73) em termos dos autovalores *diffuson* e *cooperon*

$$S(\{\phi\}, \{\eta\}) = S_D(\{\phi\}, \{\eta\}) + S_C(\{\phi\}, \{\eta\}), \quad (5.78)$$

onde,

$$S_D(\{\phi\}, \{\eta\}) = -\frac{1}{4} \sum_{j,\alpha} [\ln M_{D,j}^\alpha(\{\phi\}) + 3 \ln (M_{D,j}^\alpha(\{\phi\}) + \eta_{SO})], \quad (5.79)$$

e

$$S_C(\{\phi\}, \{\eta\}) = -\frac{1}{4} \sum_{j,\alpha} [\ln (M_{C,j}^\alpha(\{\phi\}) + \eta_H) + 3 \ln (M_{C,j}^\alpha(\{\phi\}) + \eta_H + \eta_{SO})], \quad (5.80)$$

onde, $M_{C,j}^\pm(\phi_b, \phi_w) = M_{D,j}^\pm(\phi_b, -\phi_w) = M_{D,j}^\mp(\phi_b, \phi_w)$. Para o ensemble ortogonal a ação (5.78) pode ser escrita da seguinte forma:

$$S(\{\phi\}) = -2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\alpha=\pm} \ln M_j^\alpha(\{\phi\}); M_j^\alpha(\{\phi\}) \equiv M_{D,j}^\alpha(\{\phi\}). \quad (5.81)$$

5.2.2 Cálculo dos Autovalores de $\check{M}$ para uma Cadeia Homogênea

Começamos obtendo o termo de segunda ordem em $\hat{X}_j$ da eq. (5.61), que pode ser escrito da seguinte forma

$$S^{(2)}(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\}) = \frac{N_c}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \left[-\hat{Z}^2 \hat{B}_j^2 + 2\hat{Z} \hat{C}_j \right], \quad (5.82)$$

onde,

$$\hat{B}_j = \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{T}_{j+1} + \hat{T}_j^\dagger \hat{X}_j \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_{j+1} + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{T}_j + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j, \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_j = & \hat{T}_j^\dagger \hat{X}_j \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{T}_{j+1} + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{T}_j - \frac{1}{2} \left(\hat{T}_j^\dagger \hat{L}^\dagger \hat{X}_{j+1}^2 \hat{T}_{j+1} + \hat{T}_j^\dagger \hat{\Lambda} \hat{X}_j^2 \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{T}_{j+1} \right. \\ & \left. + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{L} \hat{X}_j^2 \hat{T}_j + \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{X}_{j+1}^2 \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{T}_j \right), \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} Z_b \check{1} & \check{0} \\ \check{0} & Z_w \check{1} \end{pmatrix}; Z_\alpha = \frac{T}{4(1 - T \sin^2 \phi_\alpha / 2N)}. \quad (5.85)$$

Observe que para o caso de junções de tunelamento ($T \ll 1$), $Z_\alpha = T/4$ a ação (5.82) se reduz ao caso estudado na ref. [55],

$$S_{\text{tun.}}^{(2)}(\phi_b, \phi_w) = \frac{G_T}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\text{Tr} \left(\hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\hat{L}^{\dagger 2} \hat{X}_{j+1}^2 + \hat{L}^2 \hat{X}_j^2 \right) \right]; G_T = N_c T. \quad (5.86)$$

Agora executaremos o cálculo de $\text{Tr}(\hat{Z}^2 \hat{B}^2)$. Para tanto dividiremos esse traço em três componentes:

$$\text{Tr}(\hat{Z}^2 \hat{B}^2) = 2P(\phi_b, \phi_w) + Q(\phi_b, \phi_w) + R(\phi_b, \phi_w), \quad (5.87)$$

onde,

$$\begin{aligned} P(\phi_b, \phi_w) \equiv & \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \left(\hat{X}_j^2 + \hat{X}_{j+1}^2 \right) \right) + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right) \\ & \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \right), \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$Q(\phi_b, \phi_w) \equiv \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{L}^3 \right) + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{X}_j \hat{L}^3 \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \right) + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{X}_j \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{L}^{\dagger 3} \right) \\ + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{X}_{j+1} \hat{L}^{\dagger 3} \hat{X}_j \hat{L} \right), \quad (5.89)$$

$$R(\phi_b, \phi_w) \equiv \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \right) + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger \hat{X}_j \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right) + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{\Lambda} \hat{L} \hat{X}_{j+1} \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{X}_j \right) \\ + \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{X}_j \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{X}_{j+1} \right). \quad (5.90)$$

Apresentamos aqui o cálculo detalhado de $P(\phi_b, \phi_w)$:

$$\text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{X}_{j+\delta}^2 \right) = (Z_b^2 + Z_w^2) \text{Tr} \left(\check{X}_{j+\delta}^{bw} \check{X}_{j+\delta}^{wb} \right); \delta = 0, 1. \quad (5.91)$$

Definindo as seguintes matrizes auxiliares

$$\hat{\Gamma}_1 \equiv \hat{L}^\dagger \hat{\Lambda} \hat{L} = \begin{pmatrix} \check{\Gamma}_1^b & \check{0} \\ \check{0} & \check{\Gamma}_1^w \end{pmatrix}; \check{\Gamma}_1^\alpha = e^{i\phi_\alpha \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3 e^{-i\phi_\alpha \check{\sigma}_1/2N}, \quad (5.92)$$

$$\hat{\Gamma}_2 \equiv \hat{L} \hat{\Lambda} \hat{L}^\dagger = \begin{pmatrix} \check{\Gamma}_2^b & \check{0} \\ \check{0} & \check{\Gamma}_2^w \end{pmatrix}; \check{\Gamma}_2^\alpha = e^{-i\phi_\alpha \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3 e^{i\phi_\alpha \check{\sigma}_1/2N}. \quad (5.93)$$

Em termos dessas duas matrizes, dois últimos termo de $P(\phi_b, \phi_w)$ ficam:

$$\begin{cases} \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{\Gamma}_1 \hat{X}_{j+1} \hat{\Gamma}_1 \hat{X}_{j+1} \right) = (Z_b^2 + Z_w^2) \text{Tr} \left(\check{\Gamma}_1^b \check{X}_{j+1}^{bw} \check{\Gamma}_1^w \check{X}_{j+1}^{wb} \right); \\ \text{Tr} \left(\hat{Z}^2 \hat{\Gamma}_2 \hat{X}_j \hat{\Gamma}_2 \hat{X}_j \right) = (Z_b^2 + Z_w^2) \text{Tr} \left(\check{\Gamma}_2^b \check{X}_j^{bw} \check{\Gamma}_2^w \check{X}_j^{wb} \right). \end{cases} \quad (5.94)$$

Executando os somatórios de (5.91) e (5.94), $P(\phi_b, \phi_w)$ pode ser escrito em termos das variáveis $x_{j,\sigma\bar{\sigma}}^{bw}$:

$$P(\phi_b, \phi_w) = (Z_b^2 + Z_w^2) \sum_{\sigma} \left[x_{j,\sigma\bar{\sigma}}^{bw} x_{j,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} + x_{j+1,\sigma\bar{\sigma}}^{bw} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} \right] \\ + \sum_{\sigma'} \left[(\check{\Gamma}_1^b)_{\sigma\sigma'} x_{j+1,\sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (\check{\Gamma}_1^w)_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} + (\check{\Gamma}_2^b)_{\sigma\sigma'} x_{j,\sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (\check{\Gamma}_2^w)_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} \right] \quad (5.95)$$

Procedendo analogamente obtemos as seguintes expressões para $Q(\phi_b, \phi_w)$ e $R(\phi_b, \phi_w)$

$$Q(\phi_b, \phi_w) = (Z_b^2 + Z_w^2) \sum_{\sigma\sigma'} \left[(e^{i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j,\sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (e^{-3i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{bw} \right. \\ + (e^{i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j,\sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (e^{-3i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} \\ + (e^{-i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j+1,\sigma'\bar{\sigma}'}^{wb} (e^{3i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j,\bar{\sigma}\sigma}^{bw} \\ \left. + (e^{-i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j+1,\sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (e^{3i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} \right], \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned}
R(\phi_b, \phi_w) &= (Z_b^2 + Z_w^2) \sum_{\sigma\sigma'} [(\check{\sigma}_3 e^{-i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j+1, \sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (\check{\sigma}_3 e^{i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j, \bar{\sigma}\sigma}^{wb} \\
&+ (\check{\sigma}_3 e^{-i\phi_w \check{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j+1, \sigma'\bar{\sigma}'}^{wb} (\check{\sigma}_3 e^{i\phi_b \check{\sigma}_1/2N})_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j, \bar{\sigma}\sigma}^{bw} \\
&+ (e^{-i\phi_b \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3)_{\sigma\sigma'} x_{j+1, \sigma'\bar{\sigma}'}^{bw} (e^{i\phi_w \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3)_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j, \bar{\sigma}\sigma}^{wb} \\
&+ (e^{-i\phi_w \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3)_{\sigma\sigma'} x_{j+1, \sigma'\bar{\sigma}'}^{wb} (e^{i\phi_b \check{\sigma}_1/2N} \check{\sigma}_3)_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j, \bar{\sigma}\sigma}^{bw}] . \quad (5.97)
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular as derivadas de $P(\phi_b, \phi_w)$, $Q(\phi_b, \phi_w)$ e $R(\phi_b, \phi_w)$ em relação a $x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}$:

$$\frac{\partial P(\phi_b, \phi_w)}{\partial x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}} = 2(Z_b^2 + Z_w^2) \left[\left(1 - \cos \frac{\phi_b}{N} \cos \frac{\phi_w}{N} \right) x_{k, \bar{\sigma}\sigma}^{wb} - \text{sen} \frac{\phi_b}{N} \text{sen} \frac{\phi_w}{N} x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{wb} \right]; \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\phi_b, \phi_w)}{\partial x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}} &= (Z_b^2 + Z_w^2) \left\{ \left[\cos \frac{\phi_w}{2N} \cos \frac{3\phi_b}{2N} + \cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{3\phi_w}{2N} \right] (x_{k-1, \bar{\sigma}\sigma}^{wb} + x_{k+1, \bar{\sigma}\sigma}^{wb}) \right. \\
&+ \left. \left[\text{sen} \frac{\phi_w}{2N} \text{sen} \frac{3\phi_b}{2N} + \text{sen} \frac{\phi_b}{2N} \text{sen} \frac{3\phi_w}{2N} \right] (x_{k-1, \sigma\bar{\sigma}}^{wb} + x_{k+1, \sigma\bar{\sigma}}^{wb}) \right\}; \quad (5.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(\phi_b, \phi_w)}{\partial x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}} &= -2(Z_b^2 + Z_w^2) \left[\cos \frac{\phi_b}{N} \cos \frac{\phi_w}{N} (x_{k-1, \bar{\sigma}\sigma}^{wb} + x_{k+1, \bar{\sigma}\sigma}^{wb}) \right. \\
&- \left. \text{sen} \frac{\phi_b}{2N} \text{sen} \frac{\phi_w}{2N} (x_{k-1, \sigma\bar{\sigma}}^{wb} + x_{k+1, \sigma\bar{\sigma}}^{wb}) \right]. \quad (5.100)
\end{aligned}$$

Devido às condições de contorno periódicas das variáveis $x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}}$ ($x_{0, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} = x_{N, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} = 0$), é conveniente escrever tais variáveis da seguinte forma

$$x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} = 2i \text{sen} \frac{\pi k j}{N} x_{\sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}}, \quad (5.101)$$

$$x_{k-1, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} + x_{k+1, \sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} = 4i \text{sen} \frac{\pi k j}{N} \cos \frac{\pi j}{N} x_{\sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}}. \quad (5.102)$$

A derivada do termo $\text{Tr}(\hat{Z}^2 \hat{B}^2)$ em relação aos $x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}$ é apresentada abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Tr}(\hat{Z}^2 \hat{B}^2)}{\partial x_{k, \sigma\bar{\sigma}}^{bw}} &= 8i \text{sen} \frac{\pi k j}{N} (Z_b^2 + Z_w^2) \left\{ \left[\left(1 - \cos \frac{\phi_b}{N} \cos \frac{\phi_w}{N} \right) - 2 \cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{\phi_w}{2N} \times \right. \right. \\
&\left. \left(\text{sen}^2 \frac{\phi_b}{2N} + \text{sen}^2 \frac{\phi_w}{2N} \right) \cos \frac{\pi j}{N} \right] x_{\sigma\bar{\sigma}}^{wb} + \left[-\text{sen} \frac{\phi_b}{N} \text{sen} \frac{\phi_w}{N} \right. \\
&+ \left. 2 \text{sen} \frac{\phi_b}{2N} \text{sen} \frac{\phi_w}{2N} \left(\cos^2 \frac{\phi_b}{2N} + \cos^2 \frac{\phi_w}{2N} \right) \cos \frac{\pi j}{N} \right] x_{\sigma\bar{\sigma}}^{wb} \right\}. \quad (5.103)
\end{aligned}$$

Agora é a vez de apresentarmos o cálculo de $\text{Tr}(\hat{Z}\hat{C})$:

$$\text{Tr}(\hat{Z}\hat{C}) = \text{Tr} \left[\hat{Z} \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{X}_j, \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right\} \right] - \text{Tr} \left[\hat{Z} \left(\hat{L}^{\dagger 2} \hat{X}_{j+1}^2 + \hat{L}^2 \hat{X}_j^2 \right) \right], \quad (5.104)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\hat{Z} \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{X}_j, \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right\} \right] &= (Z_b + Z_w) \left[\text{Tr} \left(e^{i\phi_b \tilde{\sigma}_1/2N} \check{X}_j^{bw} e^{-i\phi_w \tilde{\sigma}_1/2N} \check{X}_{j+1}^{wb} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} \left(e^{i\phi_w \tilde{\sigma}_1/2N} \check{X}_j^{wb} e^{-i\phi_b \tilde{\sigma}_1/2N} \check{X}_{j+1}^{bw} \right) \right] \\ &= (Z_b + Z_w) \sum_{\alpha=b}^w \sum_{\sigma\sigma'} \left[(e^{i\phi_\alpha \tilde{\sigma}_1/2N})_{\sigma\sigma'} x_{j,\sigma'\tilde{\sigma}'}^{\alpha\bar{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. (e^{-i\phi_{\bar{\alpha}} \tilde{\sigma}_1/2N})_{\tilde{\sigma}'\bar{\sigma}} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{\bar{\alpha}\alpha} \right], \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\hat{Z} \left(\hat{L}^{\dagger 2} \hat{X}_{j+1}^2 + \hat{L}^2 \hat{X}_j^2 \right) \right] &= Z_b \text{Tr} \left[e^{i\phi_b \tilde{\sigma}_1/N} \check{X}_{j+1}^{bw} \check{X}_{j+1}^{wb} + e^{-i\phi_b \tilde{\sigma}_1/N} \check{X}_j^{bw} \check{X}_j^{wb} \right] \\ &\quad + Z_w \text{Tr} \left[e^{i\phi_w \tilde{\sigma}_1/N} \check{X}_{j+1}^{wb} \check{X}_{j+1}^{bw} + e^{-i\phi_w \tilde{\sigma}_1/N} \check{X}_j^{wb} \check{X}_j^{bw} \right]. \\ &= \sum_{\alpha=b}^w \sum_{\sigma} Z_\alpha \left[(e^{i\phi_\alpha \tilde{\sigma}_1/N})_{\sigma\sigma} x_{j+1,\sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} x_{j+1,\bar{\sigma}\sigma}^{\bar{\alpha}\alpha} \right. \\ &\quad \left. + (e^{-i\phi_\alpha \tilde{\sigma}_1/N})_{\sigma\sigma} x_{j,\sigma\bar{\sigma}}^{\alpha\bar{\alpha}} x_{j,\bar{\sigma}\sigma}^{\bar{\alpha}\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Calculando as derivadas dos termos acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{k,\sigma\bar{\sigma}}^{bw}} \text{Tr} \left[\hat{Z} \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{X}_j, \hat{L} \hat{X}_{j+1} \right\} \right] &= (Z_b + Z_w) \left[\cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{\phi_w}{2N} (x_{k-1,\bar{\sigma}\sigma}^{wb} + x_{k+1,\bar{\sigma}\sigma}^{wb}) \right. \\ &\quad \left. + \text{sen} \frac{\phi_b}{2N} \text{sen} \frac{\phi_w}{2N} (x_{k-1,\sigma\bar{\sigma}}^{wb} + x_{k+1,\sigma\bar{\sigma}}^{wb}) \right], \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{k,\sigma\bar{\sigma}}^{bw}} \text{Tr} \left[\hat{Z} \left(\hat{L}^{\dagger 2} \hat{X}_{j+1}^2 + \hat{L}^2 \hat{X}_j^2 \right) \right] = 2 \left(Z_b \cos \frac{\phi_b}{N} + Z_w \cos \frac{\phi_w}{N} \right) x_{k,\bar{\alpha}\alpha}^{wb}, \quad (5.108)$$

a derivada de $\text{Tr}(\hat{Z}\hat{C})$ fica então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Tr}(\hat{Z}\hat{C})}{\partial x_{k,\alpha\bar{\alpha}}^{bw}} &= \left(4i \text{sen} \frac{\pi k j}{N} \right) \left[(Z_b + Z_w) \cos \frac{\pi j}{N} \left(\cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{\phi_w}{2N} x_{\bar{\alpha}\alpha}^{wb} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{sen} \frac{\phi_b}{2N} \text{sen} \frac{\phi_w}{2N} x_{\alpha\bar{\alpha}}^{wb} \right) - \left(Z_b \cos \frac{\phi_b}{N} + Z_w \cos \frac{\phi_w}{N} \right) x_{\bar{\alpha}\alpha}^{wb} \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Das equações (5.103) e (5.109) podemos calcular as derivadas da ação (5.82). Abaixo apresentamos de forma conveniente tais derivadas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S^{(2)}(\phi_b, \phi_w)}{\partial x_{j,+}^{bw}} \\ \frac{\partial S^{(2)}(\phi_b, \phi_w)}{\partial x_{j,-}^{bw}} \end{pmatrix} = \check{M}_j \begin{pmatrix} x_{+}^{wb} \\ x_{-}^{wb} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.110)$$

onde,

$$\check{M}_j(\phi_b, \phi_w) = \begin{pmatrix} \alpha_j(\phi_b, \phi_w) & \beta_j(\phi_b, \phi_w) \\ \beta_j(\phi_b, \phi_w) & \alpha_j(\phi_b, \phi_w) \end{pmatrix}, \quad (5.111)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_j(\phi_b, \phi_w) \equiv & -(Z_b^2 + Z_w^2) \left[\left(1 - \cos \frac{\phi_b}{N} \cos \frac{\phi_w}{N} \right) - 2 \cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{\phi_w}{2N} \left(\sin^2 \frac{\phi_b}{2N} + \sin^2 \frac{\phi_w}{2N} \right) \times \right. \\ & \left. \cos \frac{\pi j}{N} \right] + (Z_b + Z_w) \cos \frac{\pi j}{N} \cos \frac{\phi_b}{2N} \cos \frac{\phi_w}{2N} - \left(Z_b \cos \frac{\phi_b}{N} + Z_w \cos \frac{\phi_w}{N} \right); \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} \beta_j(\phi_b, \phi_w) \equiv & -(Z_b^2 + Z_w^2) \left[-\sin \frac{\phi_b}{N} \sin \frac{\phi_w}{N} + 2 \sin \frac{\phi_b}{2N} \sin \frac{\phi_w}{2N} \left(\cos^2 \frac{\phi_b}{2N} + \cos^2 \frac{\phi_w}{2N} \right) \cos \frac{\pi j}{N} \right] \\ & + (Z_b + Z_w) \cos \frac{\pi j}{N} \sin \frac{\phi_b}{2N} \sin \frac{\phi_w}{2N}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Os autovalores de $\check{M}_j$ são:

$$M_j^\pm(\phi_b, \phi_w) = \alpha_j(\phi_b, \phi_w) \pm \beta_j(\phi_b, \phi_w). \quad (5.114)$$

Para calcularmos a localização fraca, devemos fazer $\phi_w = -\phi_b = -\phi$ em α_j e β_j :

$$\alpha_j(\phi) = -2Z \left[Z \left(1 - \cos \frac{\pi j}{N} \right) \sin^2 \frac{\phi}{N} + \cos \frac{\phi}{N} - \cos \frac{\pi j}{N} \cos^2 \frac{\phi}{2N} \right], \quad (5.115)$$

$$\beta_j(\phi) = -2Z \left[Z \left(1 - \cos \frac{\pi j}{N} \right) \sin^2 \frac{\phi}{N} + \cos \frac{\pi j}{N} \sin^2 \frac{\phi}{2N} \right]. \quad (5.116)$$

Desta forma os autovalores simétricos e anti-simétricos são dados respectivamente por

$$M_j^+(\phi) = -2Z \left(1 - \cos \frac{\pi j}{N} \right) \left[2Z \sin^2 \frac{\phi}{N} + \cos \frac{\phi}{N} \right], \quad (5.117)$$

e

$$M_j^-(\phi) = -2Z \left(\cos \frac{\phi}{N} - \cos \frac{\pi j}{N} \right). \quad (5.118)$$

A ação de localização fraca portanto fica:

$$S^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \ln \left[\frac{2Z \sin^2 \frac{\phi}{N} + \cos \frac{\phi}{N}}{\cos \frac{\phi}{N} - \cos \frac{\pi j}{N}} \right], \quad (5.119)$$

ou ainda,

$$S^{wl}(\phi) = \frac{(N-1)}{2} \ln \left(2Z \sin^2 \frac{\phi}{N} + \cos \frac{\phi}{N} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\cos \frac{\phi}{N} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin \frac{2\phi}{N}}{\sin \phi} \right). \quad (5.120)$$

Para facilitar o cálculo dos cumulantes, apresentamos abaixo a expressão para $g^{wl}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} g^{wl}(\varepsilon) = & -\frac{1}{3N^2} (N-1) (N-2+3T) + \frac{1}{45N^4} (N-1) (N-2) (N+2) \\ & (N+15T-14) \varepsilon^2 - \frac{1}{945N^6} (N-1) [-10N^5 + (116-126T)N^4 \\ & + 32N(N(N+1)+1) + f(T)] \varepsilon^4, \end{aligned} \quad (5.121)$$

onde,

$$f(T) \equiv 945T^3 - 2835T^2 + 3906T - 1984. \quad (5.122)$$

O termo de localização fraca da condutância é dado por:

$$G^{wl} = -\frac{1}{3N^2} (N-1) (N-2+3T). \quad (5.123)$$

Este resultado encontra-se em concordância com o resultado obtido via técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário estendida para redes de ponto quânticos desenvolvida por Rodríguez-Pérez [133] e por simulação numérica do formalismo de matriz- S [134, 135]. Esse resultado também está em acordo com a expressão $g^{wl} = -1/3(1 - 1/N^2)$ obtida por Argaman [136] utilizando um formalismo semi-clássico baseado na fórmula de Kubo para a condutância de um sistema mesoscópico. Abaixo apresentamos a correção de localização fraca da potência de ruído de disparo e do terceiro cumulante

$$P^{wl} = -\frac{1}{45N^4} (N-1) (N-2) (N+2) (N+15T-14), \quad (5.124)$$

e

$$\begin{aligned} C^{wl} = & -\frac{1}{945N^6} (N-1) [N^5 - (62-63T)N^4 - 20N^3 \\ & + (1240-1260T)N^2 + 64N + 2f(T)]. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Para $N \gg 1$ temos que as expressões G^{wl} e P^{wl} tendem respectivamente aos valores $-1/3$ e $-1/45$ previsto pela teoria de matrizes aleatórias [18, 100]. Na fig. (5.8), apresentamos

o comportamento desses três cumulantes quando variamos o número de conectores para vários valores de T . Observamos que o segundo (5.8(b)) e terceiro (5.8(c)) cumulantes apresentam um comportamento não monotônico para N pequeno havendo até mudança de sinal de tais correções. Através de simulação numérica executada por Almeida, checamos à comprovação desse comportamento não monotônico da potência de ruído de disparo. O resultado desta comparação mostra que [ver fig. (5.9)] a simulação está de acordo com resultado obtido via teoria de circuitos.

A variância da condutância também pode ser calculada utilizando a expressão (5.81) e os autovalores dependentes de ϕ_b e ϕ_w , eq. (5.114), encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \text{var}G &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{N^4 \left(1 - \cos \frac{\pi j}{N}\right)^2} \left[4(1 - T) + 2T^2 - (3 - 8T + 4T^2) \cos \frac{\pi j}{N} \right. \\ &\quad \left. + (2 - 4T + 2T^2) \cos^2 \frac{\pi j}{N} \right] \\ &= \frac{2}{15} \left\{ 1 + \frac{15[N - (N-1)(2-T)T] - 16}{N^4} \right\}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Para $T = 1$ esse resultado se reduz à $\text{var}G = 2/15(1 - 1/N^4)$ obtido também por Argaman em [136] e, para o caso de $N \rightarrow \infty$ tende ao resultado obtido via teoria de matrizes aleatórias $2/15$ [18, 100]. Para o cálculo da variância dos cumulantes de maior ordem, em princípio deveríamos expandir a função geratriz $g(\varepsilon_b, \varepsilon_w)$ para $\varepsilon_b, \varepsilon_w$ pequenos:

$$g(\varepsilon_b, \varepsilon_w) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_b^2 \varepsilon_w^2 + \alpha_2 (\varepsilon_b^4 \varepsilon_w^2 + \varepsilon_b^2 \varepsilon_w^4) + \alpha_3 \varepsilon_b^4 \varepsilon_w^4 + \dots \quad (5.127)$$

Os cumulantes de ordem superior seriam obtidos substituindo essa expansão em (5.76). A variância da potência do ruído de disparo seria $\text{var}P = \alpha_1$ e a variância do terceiro cumulante seria $\text{var}C = \alpha_1 + 4(\alpha_3 - \alpha_2)$. A dificuldade que encontramos nesta etapa foi o aparecimento de inconsistências nos valores obtidos dos coeficientes de (5.127). Por exemplo, o fator α_1 que corresponde a variância de P não é sempre positivo quando variamos a transparência da barreira de 0 até 1, que é um verdadeiro absurdo pois a variância é uma grandeza positiva definida e tem um significado estatístico bem definido. Infelizmente não temos uma explicação física ou matemática para esse fato. Como havíamos comentado no começo da apresentação do método de [55] a expansão em torno do ponto de sela das funções de Green e cada nó do circuito não é uma tarefa trivial quando levamos em conta o campo de contagem. Lembramos que uma etapa chave para tornar este cálculo tão eficiente do ponto de vista operacional é a parametrização discutida no apêndice E, que permite transformar o problema em termos do campo de contagem λ onde devemos operar matrizes completas, em um problema em termos de um pseudo-potencial ϕ onde as matrizes são agora diagonais nulas e portanto, mais simples de manusear. É realmente não trivial explicar como essa parametrização pode capturar toda a informação contida na matriz completa dependente de λ e, à luz destes resultados que acabamos de apresentar, torna-se imprescindível uma análise mais cautelosa desta parametrização. No entanto, as contribuições desta tese sobre esse assunto acabam por aqui e finalizamos esta seção calculando o limite da ação (5.81) para os autovalores da cadeia dados

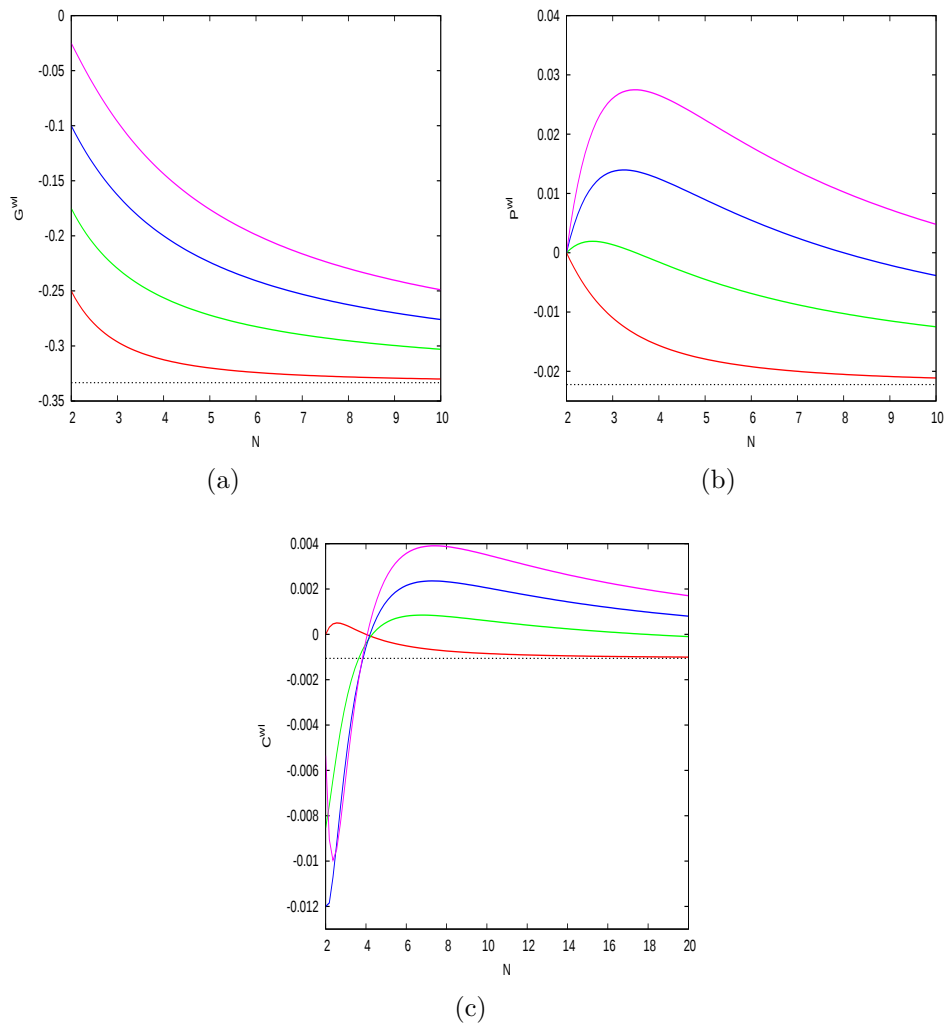


Figura 5.8 Comportamento das correções de localização fraca da (a) condutância, (b) potência de ruído de disparo e (c) do terceiro cumulante para $T = 1$ (linha vermelha), $T = 0.7$ (verde), $T = 0.4$ (azul) e $T = 0.1$ (magenta). As linhas tracejadas horizontais são os valores dessas correções para o fio quântico.

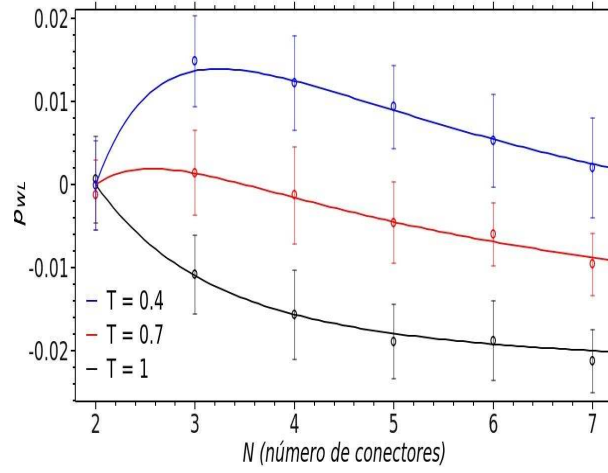


Figura 5.9 Comparação entre o resultado da teoria de circuitos e via simulações para a localização fraca da potência de ruído de disparo variando o número de conectores.

por (5.114) quando $N \rightarrow \infty$. Mesmo não contendo resultados consistentes para o caso de cadeias finitas para a variância dos cumulantes de maior ordem, os autovalores (5.114) dão o resultado esperado para a variância da potência de ruído de disparo no limite de fio quântico. Para o limite $N \rightarrow \infty$ a ação (5.81) se reduz à ação do fio

$$S^{\text{fio}}(\phi_b, \phi_w) = -2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} \ln(\pi^2 l^2 - (\phi_b + \sigma \phi_w)^2 / 4). \quad (5.128)$$

A expansão de $g(\varepsilon_b, \varepsilon_w)$ para $N \rightarrow \infty$ é

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_b, \varepsilon_w) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{4}{75\pi^{12}j^{12}} [225\pi^8 j^8 + (25\pi^8 j^8 - 500\pi^6 j^6 + 5250\pi^4 j^4)\varepsilon_b^2 \varepsilon_w^2 \\ &+ (10\pi^8 j^8 - 100\pi^6 j^6 - 525\pi^4 j^4 + 18900\pi^2 j^2)(\varepsilon_b^2 \varepsilon_w^4 + \varepsilon_b^4 \varepsilon_w^2) \\ &+ (4\pi^8 j^8 - 420\pi^4 j^4 + 103950)\varepsilon_b^4 \varepsilon_w^4], \end{aligned} \quad (5.129)$$

A variância dos três primeiros cumulantes do fio quântico são:

$$\text{var}G_{N \rightarrow \infty} = 12 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\pi^4 j^4} = \frac{2}{15}, \quad (5.130)$$

$$\text{var}P_{N \rightarrow \infty} = \frac{1}{3} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{840 - 80\pi^2 j^2 + 4\pi^4 j^4}{\pi^8 j^8} = \frac{46}{2835}, \quad (5.131)$$

esses dois resultados estão de acordo com os obtidos via formalismo DMPK [100]. Apresentamos também o resultado para o terceiro cumulante

$$\begin{aligned}
\text{var}C_{N \rightarrow \infty} &= \frac{4}{75} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{415800 - 75600\pi^2 j^2 + 5760\pi^4 j^4 - 100\pi^6 j^6 + \pi^8 j^8}{\pi^{12} j^{12}} \\
&= \frac{11366}{1447875}.
\end{aligned} \tag{5.132}$$

Na próxima seção estudaremos o problema de um ponto quântico conectado a guias por duas barreiras de transparências arbitrárias.

5.3 LOCALIZAÇÃO FRACA E FLUTUAÇÕES PARA UM PONTO COM BARREIRAS ARBITRÁRIAS

A ação (5.61) para este caso fica:

$$S(\phi_b, \phi_w) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 N_{j+1} \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{T_{j+1}}{4} \left(\left\{ \hat{T}_j^\dagger \hat{G}_j \hat{T}_j, \hat{T}_{j+1}^\dagger \hat{G}_{j+1} \hat{T}_{j+1} \right\} - \hat{2} \right) \right], \tag{5.133}$$

onde,

$$\begin{cases} \hat{G}_0 = \hat{G}_2 = \hat{\Lambda}; \\ \hat{G}_1 = \hat{\Lambda} + \hat{X}_1 - \frac{1}{2} \hat{\Lambda} \hat{X}_1^2. \end{cases} \tag{5.134}$$

O termo de segunda ordem na expansão em $\hat{X}$ é dado pela eq. (5.82):

$$S^{(2)}(\{\phi_\alpha\}, \{\hat{X}_j\}) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \text{Tr} \left[-N_{cj} \hat{Z}_j^2 \hat{B}_j^2 + 2N_{cj} \hat{Z}_j \hat{C}_j \right], \tag{5.135}$$

onde, $\hat{B}_j$ e $\hat{C}_j$ são respectivamente eq. (5.83) e eq. (5.84). A matriz $\hat{Z}_j$ é definida como

$$\hat{Z}_j = \begin{pmatrix} Z_{b,j} \check{1} & \check{0} \\ \check{0} & Z_{w,j} \check{1} \end{pmatrix}; Z_{\alpha,j} = \frac{T_{j+1}}{4(1 - T_{j+1} \text{sen}^2 \phi_{\alpha,j}/2)} \tag{5.136}$$

onde $\phi_{\alpha,0} \equiv \phi_\alpha - \theta_\alpha$ e $\phi_{\alpha,1} \equiv \theta_\alpha$. Seguindo o algoritmo discutido no começo do capítulo, que é essencialmente refazer os passos aqui mostrados para cadeias levando em conta a dependência com j de $Z_{\alpha,j}$, obtivemos os seguintes autovalores para este caso

$$M^\pm(\{\phi_\alpha\}) = \sum_{j=0}^1 N_{cj+1} \left[2(Z_{b,j}^2 + Z_{w,j}^2) \text{sen}^2 \left(\frac{\phi_{b,j} \mp \phi_{w,j}}{2} \right) + \sum_{\alpha=b}^w Z_{\alpha,j} \cos \phi_{\alpha,j} \right] \tag{5.137}$$

Em termos da função geratriz $I(\phi_\alpha)$, podemos reescrever os autovalores (5.137) da seguinte forma:

$$M^\pm(\{\phi_\alpha\}) = \sum_{j=0}^1 \sum_{\alpha=b}^w \left[\cot \phi_{\alpha,j} I(\phi_\alpha) + \frac{\sin^2 \left(\frac{\phi_{b,j} \mp \phi_{w,j}}{2} \right)}{\sin^2 \phi_{\alpha,j}} \left(\frac{I'(\phi_\alpha)}{\phi'_{\alpha,j}} - \cot \phi_{\alpha,j} I(\phi_\alpha) \right) \right], \quad (5.138)$$

onde, $I'(\phi_\alpha) \equiv dI(\phi_\alpha)/d\phi_\alpha$ e $\phi'_{\alpha,j} \equiv d\phi_{\alpha,j}/d\phi_\alpha$. Essa expressão é idêntica à obtida por Campagnano e Nazarov na ref. [55].

Vamos inicialmente calcular a ação de localização fraca. Para tanto, tomamos $\phi_w = -\phi_b = -\phi$ em (5.137):

$$M^\pm(\phi) = 2 \sum_{j=0}^1 N_{cj+1} Z_j [\cos \phi_j + 2Z_j \sin^2 \phi_j \delta_{\sigma,+}], \quad (5.139)$$

e a ação de localização fraca fica:

$$S^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sum_{j=0}^1 N_{cj+1} Z_j (\cos \phi_j + 2Z_j \sin^2 \phi_j)}{\sum_{j=0}^1 N_{cj+1} Z_j \cos \phi_j} \right]. \quad (5.140)$$

Para facilitar o cálculo das correções para os cumulantes, é conveniente reescrever a expressão acima em termos de corrente espectral $I(\phi)$. Após simples manipulações algébricas, podemos reescrever a expressão acima como

$$S^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{2(\cot(\phi - \theta) + \cot \theta)} \frac{1+a}{N_{c2}} I(\phi) \right], \quad (5.141)$$

onde $a \equiv N_{c2}/N_{c1}$ e θ é obtido resolvendo a equação quártica resultante da lei de conservação de $I(\phi)$. Para realizarmos a mudança de variáveis para ε , devemos primeiramente escrever a ação acima em termo das variáveis $\xi = \tan \theta/2$ e $\eta = \tan \phi/2$ já utilizadas anteriormente

$$\frac{1}{2} (\cot(\phi - \theta) + \cot \theta)^{-1} = \frac{\xi(\eta - \xi)(1 + \eta\xi)}{\eta(1 + \xi^2)^2}. \quad (5.142)$$

Uma outra maneira de escrever a ação acima, foi usada por Ramos et. al. [119] para estudar o comportamento da correção de localização fraca nos dois primeiro cumulantes da estatística de contagem. Nesta expressão, aparece explicitamente além da corrente $I(\phi)$, sua derivada $I'(\phi)$:

$$S^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{I'(\phi) \sum_{j=0}^1 \frac{1}{\phi'_j}}{I(\phi) \sum_{j=0}^1 \cot \phi_j} \right]. \quad (5.143)$$

Em termos de ε definimos

$$S^{wl}(\varepsilon) \equiv S^{wl}(\phi) \Big|_{\varepsilon=\tan \phi/2}, \quad (5.144)$$

e a pseudo-corrente de localização fraca é dada por:

$$I^{wl}(\varepsilon) = -\sqrt{1-\varepsilon^2} \frac{dS^{wl}(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad (5.145)$$

a função geratriz dos cumulantes (5.69) expandida em $\varepsilon \ll 1$ fica:

$$\begin{aligned} g^{wl}(\varepsilon) = & -\frac{(1+a)aT_2^2T_1^2}{(T_1+aT_2)^3} \left\{ 1 + \frac{1}{(T_1+aT_2)^3} \left[-(3-4T_2)T_1^3 + 2((3-4T_2)-4aT_2)T_2T_1^5 \right. \right. \\ & + a^2(3+4aT_2)T_2^2T_1 - 3a^3T_2^3 \left. \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{(T_1+aT_2)^6} \left[(2-(10-9T_2)T_2^2)T_1^6 \right. \\ & + a(8(2-3a)T_2 - (18-49T_2+33T_2^2))T_2T_1^5 - a^2(9+52a-4(4(1+a^2) \\ & + 17a)T_2)T_2^3T_1^4 + a^4(16+49a+9a^2T_2)T_2^5T_1^2 - 2a^5(9+5aT_2)T_2^5T_1 \\ & \left. \left. - 2a^6T_2^6 \right] \varepsilon^4 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad (5.146)$$

Por simplicidade, apresentaremos as correções de localização fraca dos três primeiros cumulantes para o caso de guias simétricos, ou seja, $a = 1$ ($N_{c1} = N_{c2}$):

$$q_1 = -\frac{2T_2^2T_1^2}{(T_1+T_2)^3}, \quad (5.147)$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{(T_1-T_2)^2(3(T_1+T_2)-4T_1T_2)}{(T_1+T_2)^3}, \quad (5.148)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_3}{q_1} = & (T_1+aT_2)^{-6} \left\{ [7-6(4-3T_2)T_2]T_1^6 - 2[15-(63-57T_2)T_2]T_2T_1^5 \right. \\ & - [3+2(57-100T_2)T_2]T_2^2T_1^4 + [68-114(1+T_2)T_2]T_2^3T_1^3 \\ & \left. - [3-6(21+3T_2)T_2]T_2^4T_1^2 - 6(5-4T_2)T_2^5T_1 + 7T_2^6 \right\}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Os resultados para os dois primeiros cumulantes estão em concordância com os resultados da ref. [119]. Calculamos também a variância da condutância para esse caso

$$\begin{aligned} \text{var}G = & \frac{2T_1T_2G_1G_2}{(G_1+G_2)^6} \{ 4(N_2G_1+N_1G_2-N_1N_2)G_1G_2 - 2[(1-T_2)N_1G_1^3 \\ & + (1-T_1)N_2G_2^3 + N_1N_2(G_1^2+G_2^2) - N_1G_2G_1^2 - N_2G_1G_2^2] \\ & - (N_1T_2G_1+N_2T_1G_2)G_1G_2 - 6G_1^2G_2^2 \}, \end{aligned} \quad (5.150)$$

onde, $G_j = N_jT_j$. A eq. (5.150) está em plena concordância com resultado obtido via técnica diagramática [56]. Para contatos ideais ($T_j = 1$), temos $\text{var}G = 2N_1^2N_2^2/(N_1+N_2)^4$ [136]. Na próxima seção apresentamos alguns resultados que obtivemos para sistemas híbridos NS.

5.4 APLICAÇÃO EM SISTEMAS NS

A função geratriz da correção de localização fraca de cumulantes para o caso NS, no regime de campo magnético nulo é dada por:

$$g_{NS}^{wl}(\varepsilon) = -\frac{(1 - \varepsilon^2)}{4\varepsilon}(F_+^{wl}(\varepsilon) - F_-^{wl}(\varepsilon)), \quad (5.151)$$

onde,

$$F_{\pm}^{wl}(\varepsilon) = F^{wl}(\phi) \Big|_{\sin^2 \phi/2 = (1 - \varepsilon^2)/[2(1 \pm \varepsilon)]}. \quad (5.152)$$

Vamos agora apresentar alguns exemplos de aplicação dessas expressões para cálculo de localização de alguns sistemas mesoscópicos simples com a presença de uma interface NS.

1. Fio Quântico:

A ação de localização fraca do fio, pode ser obtida tomando o limite $N \rightarrow \infty$ em (5.120), o que nos produz a seguinte expressão:

$$S_{\text{fio}}^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\phi}{\sin \phi} \right). \quad (5.153)$$

A pseudo-corrente $I^{wl}(\phi) = \sin \phi F^{wl}(\phi)$ é obtida derivando a ação definida acima em relação ao parâmetro ϕ :

$$F_{\text{fio}}^{wl}(\phi) = \frac{\phi \cos \phi - \sin \phi}{\phi \sin^2 \phi}, \quad (5.154)$$

substituindo $\phi \rightarrow \phi_{\pm}(\varepsilon) = 2 \arcsen(\sqrt{(1 - \varepsilon^2)/2(1 \pm \varepsilon)})$ em (5.151), temos:

$$\begin{aligned} g_{NS}^{wl}(\varepsilon) &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} - \frac{2}{3} \frac{\pi^2 - 12}{\pi^4} \varepsilon^2 - \frac{4}{15} \frac{\pi^4 - 120}{\pi^6} \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (5.155)$$

Apresentamos abaixo os três primeiros cumulantes que podem ser obtidos dos coeficientes da expansão acima:

$$G_{NS}^{wl} = 2\alpha_0 = \frac{4}{\pi^2} - 1, \quad (5.156)$$

que está de acordo com o resultado obtido em [100],

$$P_{NS}^{wl} = -4\alpha_1 = \frac{8}{3\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}, \quad (5.157)$$

calculado anteriormente em [137] e finalmente

$$C_{NS}^{wl} = 2\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{2}{15\pi^2} - \frac{8}{\pi^4} + \frac{64}{\pi^6}, \quad (5.158)$$

que também pode ser obtido pela teoria DMPK.

2. Um ponto quântico com barreiras simétricas ($T_1 = T_2 = T$):

Para este caso, a ação de localização fraca pode ser convenientemente escrita em termos da pseudo-corrente semi-clássica [55]:

$$S_{NS}^{wl}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I'(\phi)}{I(\phi)} \tan \phi/2 \right). \quad (5.159)$$

Definindo as seguintes variáveis auxiliares:

$$v(T) \equiv T(1 - T)(2 - T), \quad (5.160)$$

$$\Upsilon(T) \equiv (2 + 2\sqrt{2} + T)^2(4 + 2\sqrt{2} - T)^2, \quad (5.161)$$

os três primeiros cumulantes podem ser calculados utilizando o mesmo procedimento utilizado no item anterior:

$$G_{NS}^{wl} = -\frac{T}{2\Upsilon(T)} \left[28(24 + 17\sqrt{2}) - 2(62 + 45\sqrt{2})T + 2(14 + 11\sqrt{2})T^2 + T^3 \right]; \quad (5.162)$$

$$P_{NS}^{wl} = \frac{(128 + 91\sqrt{2})v(T)}{712\Upsilon^2(T)} \left\{ 32[19(283 + 200\sqrt{2}) - (754 + 525\sqrt{2})T] \right. \\ \left. 80(207 + 140\sqrt{2})T^2 - 356T^3 + 89T^4 \right\}; \quad (5.163)$$

$$C_{NS}^{wl} = \frac{(1024 + 725\sqrt{2})v(T)}{1337 \cdot 64\Upsilon^3(T)} \{ 2^{10} \cdot 97(5 \cdot 3617 + 2^2 \cdot 23 \cdot 139\sqrt{2}) \\ - 2^9(2^9 \cdot 9373 + 3 \cdot 389 \cdot 2909\sqrt{2})T + 2^8(73 \cdot 84551 \\ + 5^2 \cdot 174569\sqrt{2})T^2 - 2^6(2^2 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 167 + 3957431\sqrt{2})T^3 \\ + 2^4[(3 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 7759 + 2 \cdot 2178073\sqrt{2}) - (2 \cdot 5 \cdot 34381 \\ + 3^2 \cdot 19 \cdot 1399\sqrt{2})T]T^4 + 2^3 \cdot 3(39241 + 19 \cdot 1399\sqrt{2})T^6 \\ - 10696T^7 + 1337T^8 \}, \quad (5.164)$$

a correção de localização fraca da condutância para contatos ideais $T = 1$ reproduz o resultado da técnica diagramática [56].

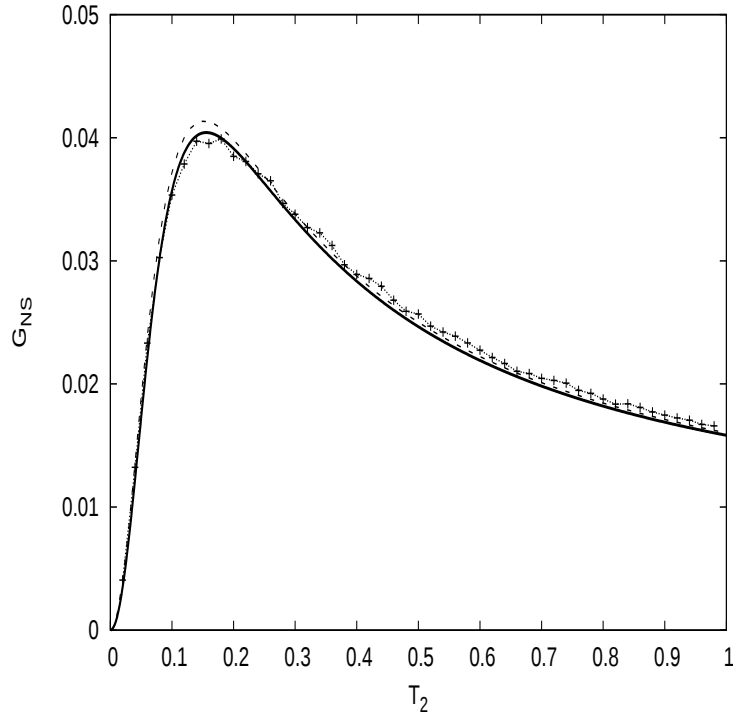


Figura 5.10 Comparação entre a condutância NS obtida via teoria de circuitos com (linha cheia) e sem (linha tracejada) o termo de localização fraca e simulação numérica para $T_1 = 0.1$.

3. Barreiras arbitrárias:

Para este caso geral, devemos seguir essencialmente os mesmo passos desenvolvidos no capítulo 4, levando em conta agora a ação de localização fraca ao invés da ação semi-clássica para sistemas NS. A correção de localização fraca dos cumulantes seriam relacionados com os coeficientes da função geratriz $g_{NS}^{wl}(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4$ e esses coeficientes por sua vez estariam relacionados aos coeficientes de $\xi = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \dots$ como fizemos no apêndice D. Devido à expressão não trivial que é a ação de localização fraca para esse caso os coeficientes de $g_{NS}^{wl}(\varepsilon)$ crescem rapidamente de tamanho, já sendo complicado apresentar o termo α_0 que está relacionado com a condutância ($G_{NS}^{wl} = 2\alpha_0$). Portanto omitiremos esta expansão e apresentaremos o resultado através do gráfico da figura (5.10), que apresenta a condutância NS semi-clássica com (linha cheia) e sem (linha tracejada) o termo de localização fraca obtido de tal expansão. Ambos os casos são comparados com resultados numéricos obtidos por simulações de um ensemble de 1000 matrizes- S pertencente ao ensemble circular ortogonal (ECU) para $N_c = 50$. Escolhemos $T_1 = 0.1$ que foi o mesmo valor escolhido no capítulo anterior. Observamos que a inclusão do termo de localização reduz o máximo para um valor intermediário de T_2 , o que aproxima o resultado analítico do obtido via simulação.

Uma grande limitação desse método aplicado a sistemas NS reside no fato de que só é possível calcular os observáveis e suas correções quânticas devido à relação entre os autovalores de reflexão de Andreev e os autovalores de transmissão quando estamos a campo magnético nulo e em baixas energias. Seria interessante uma teoria de circuitos que fosse capaz de capturar todos os regimes relevantes desses sistemas de uma forma eficiente. Esta teoria de circuitos de correções quânticas ainda não está disponível e para realçar a importância deste fato, iremos no próximo capítulo utilizar a técnica diagramática [56] aliada a uma conveniente parametrização de estube, que permite incorporar a interface NS de maneira natural no método diagramático, para calcular a condutância NS semi-clássica e sua correção de localização quando aplicamos um campo magnético capaz de destruir a simetria de reversão temporal do sistema. Iremos comparar os resultados dos observáveis nos dois regimes (com e sem campo magnético) e também faremos uma análise comparativa entre o método de teoria de circuitos e o diagramático.

TÉCNICA DIAGRAMÁTICA: APLICAÇÃO EM SISTEMAS NS NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO

Neste capítulo estudaremos um sistema mesoscópico idêntico ao discutido no capítulo 4 na presença de um campo magnético capaz de quebrar a simetria de reversão temporal. Neste regime não podemos mais utilizar o esquema de renormalização desenvolvido no capítulo 4 para obter os observáveis de transporte de um sistemas NS através da teoria de circuitos para sistemas normais. Isto se deve ao fato de que a expressão que relaciona os autovalores de reflexão de Andreev aos autovalores de reflexão do lado normal não é mais válida na ausência da simetria de reversão temporal. A forma mais geral da matriz de reflexão de Andreev foi deduzida no capítulo 2 e depende de todas as submatrizes de transmissão e reflexão que compõem a matriz- S da cavidade. Iniciamos este capítulo revisitando o problema do ponto de vista de matriz- S abordado no capítulo 2, agora incluindo explicitamente as matrizes espalhamento que descrevem as barreiras. Depois apresentaremos a parametrização de estube que nos permitirá utilizar a técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário [56] que será nossa ferramenta teórica alternativa à teoria de circuitos que utilizaremos neste capítulo. Apresentaremos as principais regras desta técnica aplicando-a em um cálculo específico. Seremos pragmáticos na apresentação da técnica diagramática, contudo, daremos as referências necessárias para que o leitor que queira ter mais informações sobre a técnica possa encontrá-las. Apresentaremos também o cálculo da correção de localização fraca para a condutância deste sistema, que diferentemente do caso normal (ver capítulo 3), é não nula na presença do campo magnético [138]. Este fenômeno se deve ao fato de que mesmo sem a simetria de reversão temporal, a simetria partícula-buraco introduzida ao sistema devido ao mecanismo de Andreev, é responsável por gerar correções da ordem da unidade aos observáveis de transporte.

Mostraremos ao longo de todas as aplicações que faremos nestas seções como é rica a fenomenologia no que diz respeito aos comportamentos não triviais dos observáveis de transporte deste sistema quando variamos os parâmetros relacionados às barreiras. Finalmente faremos uma breve comparação entre a técnica diagramática e a teoria de circuitos dos capítulos anteriores.

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em colaboração com S. Rodríguez-Pérez e encontram-se compilados em um artigo que pretendemos submeter em breve a algum periódico internacional.

6.1 FORMALISMO DE MATRIZ- S PARA SISTEMAS NS REVISITADO

Vamos estudar novamente o problema de um ponto quântico conectado aos guias por contatos não-ideais na presença de uma interface NS do ponto de vista do formalismo

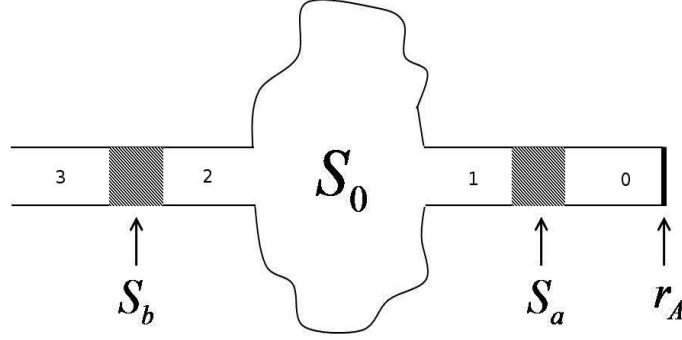


Figura 6.1 Diferentes elementos do sistemas NS conectados por guias perfeitos. Da esquerda para a direita: conector b do lado normal, cavidade caótica, conector a próximo ao condensado supercondutor e a interface NS.

de matriz- S desenvolvido no início do capítulo 2. Para tanto, definimos os vetores $2N_i$ -dimensional, onde N_i é o número de modos transversais tipo elétron/buraco no i -ésimo guia

$$\Psi_{i,L/R} = \begin{pmatrix} \Psi_{i,L/R}^e \\ \Psi_{i,L/R}^h \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Estas componentes de cada camada do sistema mesoscópico descrito na figura (6.1) encontram-se conectadas através das matrizes $2(N_a + N_b) \times 2(N_a + N_b)$ definidas abaixo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_{1L} \\ \Psi_{0R} \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_a \begin{pmatrix} \Psi_{1R} \\ \Psi_{0L} \end{pmatrix}; \mathbf{S}_a = \begin{pmatrix} r_a & t'_a \\ t_a & r'_a \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Psi_{2L} \\ \Psi_{1R} \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} \Psi_{2R} \\ \Psi_{1L} \end{pmatrix}; \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t'_0 \\ t_0 & r'_0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Psi_{3L} \\ \Psi_{2R} \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_b \begin{pmatrix} \Psi_{3R} \\ \Psi_{2L} \end{pmatrix}; \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} r_b & t'_b \\ t_b & r'_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cada sub-matriz $(N_a + N_b) \times (N_a + N_b)$, s_i ($s = \{r, t', r', t\}$), é diagonal no subespaço elétron-buraco,

$$s_i(\epsilon) = \begin{pmatrix} \hat{s}_i(\epsilon) & 0 \\ 0 & \hat{s}_i^*(-\epsilon) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

onde, $\hat{s}_i$ é uma matriz $N_i \times N_j$.

A reflexão de Andreev na interface NS é descrita pela seguinte matriz $2N_a \times 2N_a$:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{0L}^e \\ \Psi_{0L}^h \end{pmatrix} = S_A \begin{pmatrix} \Psi_{0R}^e \\ \Psi_{0R}^h \end{pmatrix}; S_A = -i \begin{pmatrix} \hat{0}_{N_a} & \hat{1}_{N_a} \\ \hat{1}_{N_a} & \hat{0}_{N_a} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Definimos agora a matriz $2(N_a + N_b) \times 2(N_a + N_b)$, $\mathbf{S}_D$, que contém a informação do processo de transmissão e reflexão usual em toda a nanoestrutura

$$\begin{pmatrix} \Psi_{3L} \\ \Psi_{0R} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_D \begin{pmatrix} \Psi_{3R} \\ \Psi_{0L} \end{pmatrix}; \mathbf{S}_D = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Combinando as matrizes $\mathbf{S}_D$ e S_A , obtemos

$$\Psi_{3L} = S\Psi_{3R}; S \equiv r + t'S_A(1 - r'S_A)^{-1}t, \quad (6.5)$$

onde,

$$S = \begin{pmatrix} \hat{r}_{ee} & \hat{r}_{eh} \\ \hat{r}_{he} & \hat{r}_{hh} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

A condutância NS é dada pela fórmula de Landauer-Büttiker para sistemas NS [48] deduzida no capítulo 2

$$G_{NS} = 2G_0 \langle \text{Tr}(\hat{r}_{he} \hat{r}_{he}^\dagger) \rangle, \quad (6.7)$$

onde $G_0 = 2e^2/h$ é o quantum de condutância e

$$\hat{r}_{he} = -it'^*(\hat{1} + \hat{r}'\hat{r}'^*)^{-1}\hat{t}.$$

Abaixo apresentamos explicitamente as sub-matrizes de $\mathbf{S}_D$

$$\hat{r} = \hat{r}_b + \hat{t}'_b(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}[\hat{r}_N + \hat{t}'_N\hat{\gamma}^{-1}\hat{r}_a\hat{t}_N(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}]\hat{t}_b,$$

$$\hat{t}' = \hat{t}'_b(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}\hat{t}'_N\hat{\gamma}^{-1}\hat{t}'_a,$$

onde,

$$\hat{\gamma} \equiv \hat{1} - \hat{r}_a(\hat{r}'_N + \hat{t}_N\hat{r}'_b(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}\hat{t}'_N),$$

$$\hat{t} = \hat{t}_a\hat{\gamma}^{-1}\hat{t}_N(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}\hat{t}_b,$$

$$\hat{r}' = \hat{r}'_a + \hat{t}_a(\hat{r}'_N + \hat{t}_N\hat{r}'_b(\hat{1} - \hat{r}_N\hat{r}'_b)^{-1}\hat{t}'_N)\hat{\gamma}^{-1}\hat{t}'_a.$$

Para campo magnético nulo, a expressão de G_{NS} simplifica bastante $G_{NS} = 2G_0 \langle \text{Tr}\{[\hat{t}\hat{t}^\dagger(\hat{2} - \hat{t}\hat{t}^\dagger)^{-1}]^2\} \rangle$, que é uma estatística linear dos autovalores de transmissão de $\hat{t}\hat{t}^\dagger$ e podemos por exemplo calcular esse observável utilizando a extensão da teoria de circuitos para sistemas NS do capítulo 4. Neste capítulo estaremos interessados no caso geral descrito por (6.7) e para executar esse cálculo utilizaremos uma técnica alternativa à teoria de circuitos baseada no método diagramático de integração sobre o grupo unitário desenvolvida por Brouwer e Beenakker [56]. Uma etapa chave nesse cálculo será reescrever a eq. (6.7) em termos de uma parametrização muito conveniente, que em particular nos permite importar os diagramas do caso normal para o cálculo dos observáveis NS.

6.2 PARAMETRIZAÇÃO DE ESTUBE PARA SISTEMAS NS

Antes de aplicarmos o método diagramático para o cálculo de observáveis em sistemas NS com simetria de reversão temporal quebrada, vamos apresentar uma conveniente parametrização da matriz espalhamento que permite obter expressões analíticas de forma eficiente, pois nos possibilita importar os diagramas obtidos para o caso normal em [56] para o cálculo dos observáveis de interesse. Esta parametrização é conhecida como parametrização de estube. O estube na engenharia de comunicações é representado por uma pequena cavidade que é conectada a uma antena de forma a modificar suas propriedades eletromagnéticas. Na física mesoscópica o método de estube já foi utilizado em diversos sistemas, e.g. cavidades caóticas conectadas a reservatórios normais [56, 107, 119], ferromagnéticos não-colineares [139] e supercondutores [140, 141]. Para uma revisão mais detalhada do método de estube em física mesoscópica, recomendamos a ref. [133]. Para que possamos utilizar a parametrização de estube em sistemas NS, é preciso incorporar o efeito da interface NS, descrito pela matriz S_A , à matriz que descreve a barreira a , ou seja, iremos concatenar as matrizes S_A e $\mathbf{S}_a$ em uma única estrutura matricial. O que temos ao final desse procedimento é uma barreira normalizada “ativa” no espaço de Nambu (elementos não nulos fora da diagonal principal). A submatriz relevante para o cálculo dos observáveis da nova barreira a é dada por:

$$\Psi_{1L} = \bar{r}_{Aa} \Psi_{1R}; \bar{r}_{Aa} = r_a + t'_a S_A (1 - r'_a S_A)^{-1} t_a. \quad (6.8)$$

As submatrizes das barreiras a e b são dadas por

$$\begin{cases} \hat{r}_i = \hat{r}'_i = \sqrt{1 - \Gamma_i} \hat{1}_{N_i} \\ \hat{t}_i = \hat{t}'_i = i\sqrt{\Gamma_i} \hat{1}_{N_i} \end{cases} \quad (6.9)$$

onde Γ_i é o coeficiente de transmissão da barreira i . Dessa forma a matriz $\bar{r}_{Aa}$, eq. (6.8) é dada por:

$$\bar{r}_{Aa} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{1-\Gamma_a}}{2-\Gamma_a} & \frac{-i\Gamma_a}{2-\Gamma_a} \\ \frac{-i\Gamma_a}{2-\Gamma_a} & \frac{2\sqrt{1-\Gamma_a}}{2-\Gamma_a} \end{pmatrix} \otimes \hat{1}_{N_a}. \quad (6.10)$$

Observe que agora a matriz efetiva da barreira a , tem componentes fora da diagonal não nulas, devido à incorporação do mecanismo de Andreev. Nesta parametrização consideraremos que a matriz que descreve a cavidade caótica é dada por

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

onde, U é uma matriz $N_T \times N_T$, $N_T = N_a + N_b$, pertencente ao ensemble circular unitário (CUE). Antes de apresentarmos a parametrização de estube, é necessário introduzir à matriz $\bar{r}_{Aa}$ a estrutura de direção de propagação. Isso é feito introduzindo a seguinte redundância na matriz de espelhamento

$$\mathbf{S}_{Aa} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r}_{Aa} \\ \bar{r}_{Aa} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

De agora em diante, organizaremos a estrutura de todas as matrizes de espalhamento definindo a seguinte hierarquia: Estrutura elétron-buraco $\rightarrow$ estrutura de direção de propagação $\rightarrow$ canais de propagação. Desta forma, podemos expressar a matriz de espalhamento total da seguinte forma

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{T}'(\mathbf{1} - \mathbf{S}_0\mathbf{R})^{-1}\mathbf{S}_0\mathbf{T}, \quad (6.13)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R} = \left(\begin{array}{cc|cc} \hat{r}_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{1-\Gamma_a}\hat{1}_{Na}}{2-\Gamma_a} & \frac{-i\Gamma_a\hat{1}_{Na}}{2-\Gamma_a} & 0 \\ \hline 0 & \frac{-i\Gamma_a\hat{1}_{Na}}{2-\Gamma_a} & \hat{r}_b^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{1-\Gamma_a}\hat{1}_{Na}}{2-\Gamma_a} \end{array} \right), \quad (6.14)$$

e

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' = \left(\begin{array}{cc|cc} \hat{t}_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \hat{t}_b^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.15)$$

As linhas verticais e horizontais delimitam os diferentes blocos da estrutura de Nambu. A matriz de estubo é definida abaixo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{T}' \\ \mathbf{T} & \mathbf{R} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Das equações (6.14) e (6.15) é fácil ver que (6.16) é unitária.

Na próxima seção, usaremos essa parametrização aliada à técnica diagramática [56] para o cálculo de observáveis NS quando a simetria de reversão temporal é quebrada por um campo magnético externo aplicado.

6.3 OBSERVÁVEIS NS E A TÉCNICA DIAGRAMÁTICA

Nesta seção adaptamos as regras da técnica diagramática do caso normal para conter a simetria elétron-buraco introduzida no nosso sistema pelo mecanismo de reflexão de Andreev na interface NS. O cálculo que será apresentado nesta seção se resume à obtenção de médias sobre traços no espaço de Nambu e de canais envolvendo a matriz unitária $\mathbf{S}_0$:

$$(\mathbf{S}_0)_{ij,nm,\sigma_1\sigma_2} = U_{ij,nm}\delta_{\sigma_1,1}\delta_{\sigma_2,1} + U_{ij,nm}^*\delta_{\sigma_1,2}\delta_{\sigma_2,2}, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}
U_{a,b} &= \bullet \cdots \circ & A_{a,b} &= \longrightarrow \\
U_{a,b}^* &= \bullet \overset{*}{\cdots} \circ & \delta_{a,b} &= \text{---}
\end{aligned}$$

Figura 6.2 Representação diagramática das matrizes unitárias U e U^* , de uma matriz arbitrária A e a delta de Kronecker que surge quando executamos as médias. O índice $a = (i, n)$ caracteriza o ponto preto, enquanto $b = (j, m)$ diz respeito ao ponto branco.

onde os índices (i, j) , (n, m) e (σ_1, σ_2) referem-se à estrutura de canais de transmissão, direção de propagação e partícula-buraco, respectivamente. As matrizes U são representadas por um ponto preto conectado a um branco por uma linha pontilhada como podemos ver na fig. (6.2). Para diferenciarmos diagramaticamente U^* de U , colocamos um símbolo $*$ em cima da representação diagramática de U^* . A eq. (6.17) apresenta um detalhe importante da técnica diagramática para sistemas NS: cada ponto, preto ou branco, em um ciclo- U (ver figura (6.3)) deve ter o mesmo valor de σ . Apresentaremos as demais estruturas e regras diagramáticas aplicando a um exemplo concreto: O cálculo da média da condutância e da potência do ruído de disparo.

6.3.1 Condutância NS

A média da condutância NS à temperatura nula é dada pela eq. (6.7), que na parametrização de estube é dada por:

$$G_{NS} = 2G_0 \langle \text{Tr}(\mathbf{C}_1 \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \mathbf{S}^\dagger) \rangle = 2G_0 \langle \text{Tr}(\mathbf{C}_1 \delta \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \delta \mathbf{S}^\dagger) \rangle, \quad (6.18)$$

onde, $\delta \mathbf{S} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}$, e $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ são dadas por

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{0}_{N_a} & \hat{0} & 0 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0}_{N_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{1}_{N_b} & \hat{0} \\ 0 & 0 & \hat{0} & \hat{0}_{N_b} \end{pmatrix}; \quad (6.19)$$

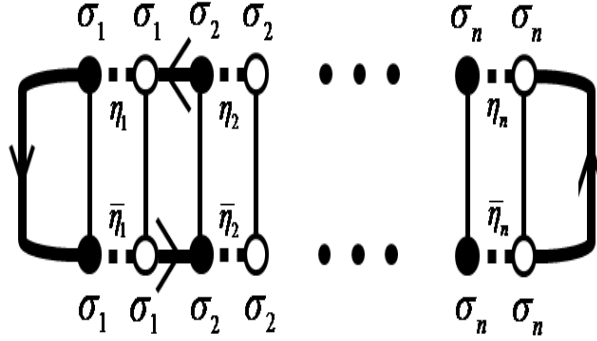


Figura 6.3 Diagrama escada típico que é utilizado para o cálculo da média da condutância. O circuito fechado formado por linhas pontilhadas alternadas com linhas finas definem um ciclo- U . Cada ponto preto ou branco em um ciclo- U tem o mesmo índice de Nambu σ .

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \hat{0}_{N_a} & \hat{0} & 0 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0}_{N_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{0}_{N_b} & \hat{0} \\ 0 & 0 & \hat{0} & \hat{1}_{N_b} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

substituindo (6.13) em (6.18)

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle = \langle \text{Tr}(\mathbf{A}(\mathbf{1} - \mathbf{S}_0 \mathbf{R})^{-1} \mathbf{S}_0 \mathbf{B} \mathbf{S}_0^\dagger (\mathbf{1} - \mathbf{R}^\dagger \mathbf{S}_0^\dagger)^{-1}) \rangle, \quad (6.21)$$

onde, $\mathbf{A} = \mathbf{T}'^\dagger \mathbf{C}_1 \mathbf{T}'$ e $\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{C}_2 \mathbf{T}^\dagger$. Expandindo a expressão acima em potências de $\mathbf{S}_0$, obtemos

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle = \sum_{\kappa_1, \kappa_2=1}^{\infty} \langle \text{Tr}(\mathbf{A}(\mathbf{S}_0 \mathbf{R})^{\kappa_1-1} \mathbf{S}_0 \mathbf{B} \mathbf{S}_0^\dagger (\mathbf{R}^\dagger \mathbf{S}_0^\dagger)^{\kappa_2-1}) \rangle, \quad (6.22)$$

a média da condutância é dada pela soma de diagramas escada, figura (6.3), obtidos fazendo $\kappa_1 = \kappa_2$ na equação acima. A linha grossa na extremidade esquerda (direita) do diagrama representa a matriz $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$). As linhas sólidas intermediárias na parte de baixo (cima) do diagrama representa a matriz $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^\dagger$). A soma sobre os índices é representada pelo acoplamento de uma linha grossa com um ponto. As linhas finas verticais que conectam dois pontos distintos do diagrama representa, diagramaticamente, a operação de média sobre as matrizes unitárias. Chamamos de ciclo- U o “circuito” fechado criado pela alternância entre pontos e linhas pontilhadas. Cada ciclo- U em um diagrama contribui com um fator $1/N$ para o caso de um ciclo de comprimento 1. O comprimento de um ciclo- U é definido pelo número de linhas tracejadas que constituem o ciclo dividido por 2. Cada circuito fechado formado por linhas finas alternadas com linhas grossas é chamado de ciclo- T e corresponde ao traço do produto de matrizes que fazem parte do mesmo. Para o caso NS precisamos introduzir uma nova variável $\eta(\sigma)$ que é dada por

$$\eta(\sigma) = \begin{cases} U & ; \quad \sigma = 1 \\ U^* & ; \quad \sigma = 2. \end{cases} \quad (6.23)$$

A necessidade de tal definição é consequência direta da eq. (6.17), que é a representação da matriz unitária que descreve o ponto quando é introduzida estrutura elétron-buraco.

Somando os diagramas tipo escada obtemos a seguinte expressão para a condutância NS (seguimos aqui o algoritmo descrito em detalhes nas ref. [139]):

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle = \mathcal{A}[(N_a + N_b)1_2 - \mathcal{L}]^{-1} \mathcal{B}^T \quad (6.24)$$

onde, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são vetores definidos como

$$\mathcal{A} = (\text{Tr} \mathbf{A}_{11}, \text{Tr} \mathbf{A}_{22}) = (N_b \Gamma_b, 0), \quad (6.25)$$

e

$$\mathcal{B} = (\text{Tr} \mathbf{B}_{11}, \text{Tr} \mathbf{B}_{22}) = (0, N_b \Gamma_b) \quad (6.26)$$

e $\mathcal{L}$ é uma matriz 2×2 definida como

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}; \mathcal{L}_{\sigma_1 \sigma_2} = \text{Tr}[\mathbf{R}_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{R}_{\sigma_2 \sigma_1}^\dagger]. \quad (6.27)$$

Da equação (6.24), obtemos

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle = 2 \frac{N_a N_b \Gamma_a^2 \Gamma_b}{2N_a \Gamma_a^2 + N_b(-2 + \Gamma_a)^2 \Gamma_b}, \quad (6.28)$$

note que a eq. (6.28) pode ser escrita da seguinte forma $G_a G_b / (G_a + G_b)$, definindo $G_a = 2N_a \Gamma_a^2 / (2 - \Gamma_a)^2$ e $G_b = N_b \Gamma_b$. Esta é a lei de Ohm para um circuito formado por um conector caracterizado por uma condutância G_b e um outro conector caracterizado por uma condutância renormalizada G_a . Da expressão (6.28) observamos que o principal efeito do campo magnético é quebrar a simetria entre os conectores que compõem o circuito. Para contatos ideais a eq. (6.28) se reduz a

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle|_{\beta=2} = \frac{2N_b}{2 + a}, \quad (6.29)$$

onde $a = N_b/N_a$. Para comparação apresentamos a expressão obtida no capítulo 4 para o caso onde a simetria de reversão temporal está presente, eq. (4.24):

$$\langle G_{NS}/2G_0 \rangle|_{\beta=1} = \frac{N_b(1+a)}{a} \left(1 - \frac{1+a}{\sqrt{a^2 + 6a + 1}} \right). \quad (6.30)$$

Essa é uma característica muito interessante do sistema NS, diferentemente do caso normal, o termo principal na expansão em termos de $1/N$ é diferente para classes de simetria diferentes. Como vimos no capítulo 3 no caso normal a dependência com o parâmetro β só aparece no termo de localização fraca, demonstrando que a simetria elétron-buraco aliada à quebra da simetria de reversão temporal interfere de maneira não trivial nas

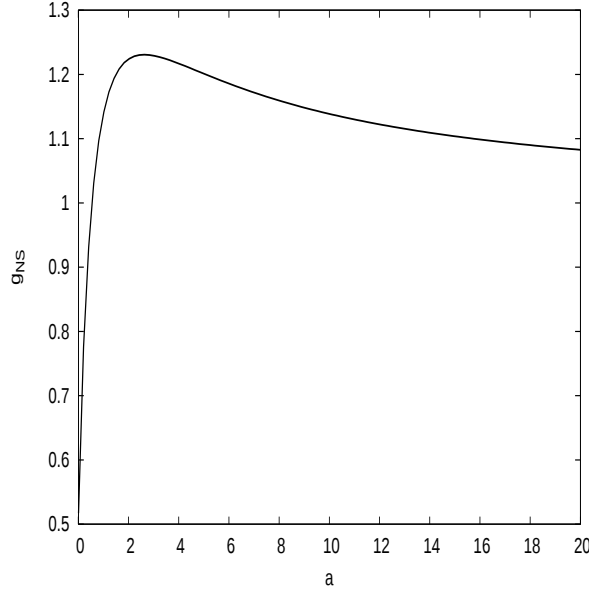


Figura 6.4 Comportamento da razão entre os valores médios da condutância NS para os dois ensembles quando variamos o parâmetro a . Vemos que apenas no limite $a \rightarrow \infty$ essa razão tende a 1.

propriedades de transporte de sistemas mesoscópicos mesmo no regime semiclassico. A razão entre os dois regimes, $g_{NS} \equiv \langle G_{NS} \rangle|_{\beta=2} / \langle G_{NS} \rangle|_{\beta=1}$, é mostrada em função de a na figura (6.4). Para $a \rightarrow 0$, $g_{NS} = 1/2$ e apenas para o limite $a \rightarrow \infty$, g_{NS} tende à unidade. Na figura (6.5) apresentamos o comportamento quando variamos as transparências das barreiras. Na parte superior (inferior) da figura fixamos os valores de Γ_a (Γ_b) em 1, 0.6 e 0.2 variando o valor de Γ_b (Γ_a), para $a = 1$. O caso unitário e ortogonal são representados pelas linhas sólidas e tracejadas respectivamente.

A principal diferença qualitativa entre os dois regimes é o comportamento monotônico crescente da condutância para o caso unitário quando variamos a transparência da barreira, diferentemente do caso ortogonal onde surge um máximo para valores intermediários da transparência da barreira (ver caso $\Gamma_i = 0.2$ na figura (6.5)). Como vimos no capítulo 4 este máximo está relacionado a uma transição quântica que ocorre em cavidades caóticas conectadas a guias não-ideais [53]. Concluimos da análise comparativa entre os dois regimes mostrada na figura (6.5), que a aplicação de um campo magnético capaz de destruir a simetria de reversão temporal numa estrutura híbrida NS resulta no desaparecimento da assinatura na condutância NS da transição quântica associada à formação de modos Fabry-Pérot dentro da cavidade. Abaixo apresentamos o cálculo da potência de ruído de disparo e analisamos o comportamento do fator Fano quando variamos as transparências das barreiras.

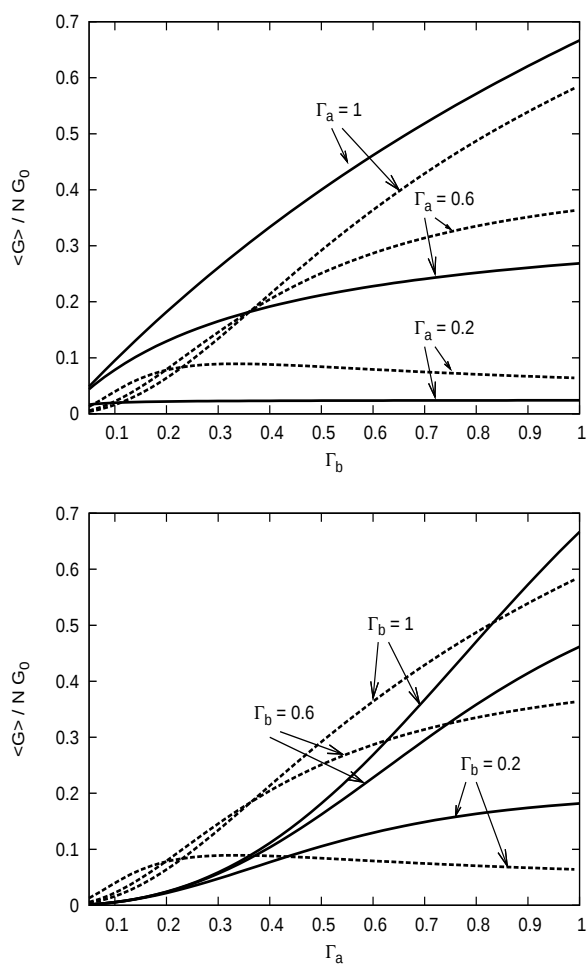


Figura 6.5 Condutância para o caso unitário (linhas sólidas) e para o caso ortogonal (linhas tracejadas) em unidades de $N G_0$.

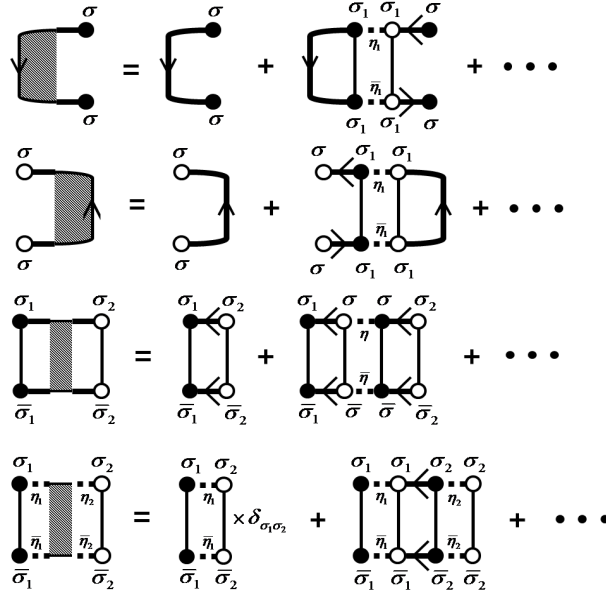


Figura 6.6 Representação diagramática de algumas funções que surgem no cálculo da potência de ruído de disparo e da correção de localização fraca da condutância.

6.3.2 Potência de Ruído de Disparo NS

Para calcularmos a potência de ruído de disparo precisamos calcular o segundo momento do produto $\hat{r}_{he}\hat{r}_{he}^\dagger$, que em termos da parametrização de estube é dado por $\langle \text{Tr}(\mathbf{C}_1 \delta \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \delta \mathbf{S}^\dagger)^2 \rangle$. Para obtermos expressões analíticas para os diagramas definimos os seguintes vetores:

$$\mathcal{F}^A = \mathcal{A} + \mathcal{A} \mathcal{L}((N_a + N_b)1_2 - \mathcal{L})^{-1}, \quad (6.31)$$

e

$$\mathcal{F}^B = \mathcal{B} + ((N_a + N_b)1_2 - \mathcal{L})^{-1} \mathcal{L} \mathcal{B}. \quad (6.32)$$

A definição deste vetores em termos de diagramas é apresentada na figura (6.6): o primeiro e o segundo diagrama representa $\mathcal{F}^A$ e $\mathcal{F}^B$ respectivamente. Definimos também a seguinte matriz

$$\mathcal{H}^C = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11}^C & \mathcal{H}_{12}^C \\ \mathcal{H}_{21}^C & \mathcal{H}_{22}^C \end{pmatrix}; \mathcal{H}_{\sigma_1 \sigma_2}^C = \text{Tr}[\mathbf{C}_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{C}_{\sigma_2 \sigma_1}^\dagger], \quad (6.33)$$

onde, $\mathbf{C} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Vamos também definir alguns tensores:

$$\mathcal{T}_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^A = \text{Tr}[\mathbf{R}_{\sigma_1 \sigma_2}^\dagger \mathbf{R}_{\sigma_2 \sigma_3} \mathbf{A}_{\sigma_3 \sigma_1}]; \quad (6.34)$$

$$\mathcal{T}_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^B = \text{Tr}[\mathbf{R}_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{R}_{\sigma_2 \sigma_3}^\dagger \mathbf{B}_{\sigma_3 \sigma_1}]; \quad (6.35)$$

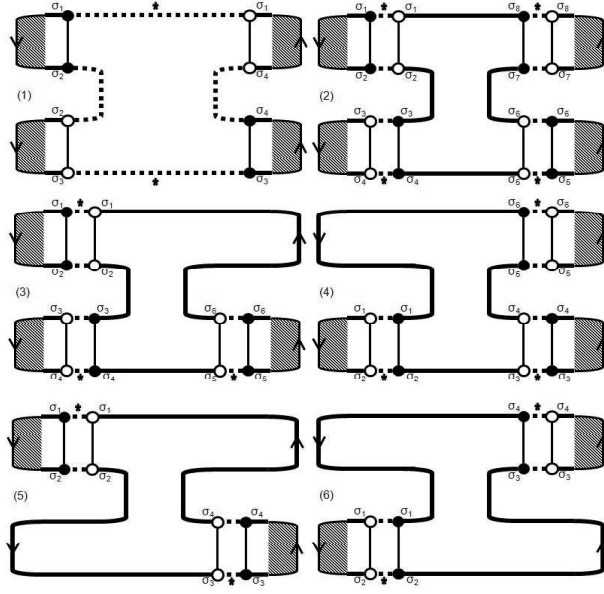


Figura 6.7 Diagramas da potência do ruído de disparo. Esta figura foi retirada da ref. [139], onde esses diagramas foram utilizados para o cálculo da potência de ruído de disparo de um sistema metal-normal-ferromagnético. Observe que para o caso NS devemos lembrar que cada ponto em um ciclo- U deve ter o mesmo índice σ .

$$\mathcal{R}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}^A = \text{Tr}[\mathbf{R}_{\sigma_1\sigma_2}\mathbf{R}_{\sigma_2\sigma_3}^\dagger\mathbf{R}_{\sigma_3\sigma_4}\mathbf{R}_{\sigma_4\sigma_1}^\dagger]. \quad (6.36)$$

Os diagramas topologicamente independentes que contribuem para a potência de ruído de disparo são apresentados na figura (6.7) e foram utilizados primeiramente em [119] para o cálculo da potência do ruído de disparo para o caso normal. As expressões matemáticas de tais diagramas são apresentadas na tabela 6.1. Os coeficientes $W_1 = 1/N$ e $W_2 = -1/N^3$ são os pesos dos diagramas e estão relacionados à contibuição dos ciclos- U . A multiplicidade de cada diagrama também é representada nessa tabela.

Somando os diagramas da tabela (6.1) obtemos a eq. (6.37) e o comportamento do fator Fano quando variamos as transparências das barreiras é apresentado na figura (6.8),

1	W_2	$\sum_{\sigma} (\mathcal{F}_{\sigma}^A)^2 (\mathcal{F}_{\sigma}^B)^2$
2	W_1^4	$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{F}_{\sigma_1}^A \mathcal{F}_{\sigma_2}^B \mathcal{F}_{\sigma_3}^A \mathcal{F}_{\sigma_4}^B \mathcal{T}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}^R$
3	$2 W_1^3$	$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{F}_{\sigma_1}^A \mathcal{F}_{\sigma_2}^B \mathcal{F}_{\sigma_3}^A \mathcal{T}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}^B$
4	$2 W_1^3$	$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{F}_{\sigma_1}^B \mathcal{F}_{\sigma_2}^A \mathcal{F}_{\sigma_3}^B \mathcal{T}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}^A$
5	W_1^2	$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{F}_{\sigma}^A \mathcal{H}_{\sigma\sigma'}^B \mathcal{F}_{\sigma'}^A$
6	W_1^2	$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{F}_{\sigma}^B \mathcal{H}_{\sigma\sigma'}^A \mathcal{F}_{\sigma'}^B$

Tabela 6.1 Expressões matemáticas para os seis diagramas topologicamente distintos que contribuem para a potência de ruído da disparo.

para $N_a = N_b$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{P_{NS}}{4P_0} \right\rangle = & -\left\langle \frac{G_{NS}}{2G_0} \right\rangle \frac{1}{(2N_a\Gamma_a^2 + N_b(-2 + \Gamma_a)^2\Gamma_b)^3} [N_a^3\Gamma_a^6(-2 + \Gamma_b) \\ & - 2N_aN_b^2(-2 + \Gamma_a)^2\Gamma_a^4\Gamma_b - N_aN_b^2(-2 + \Gamma_a)^4\Gamma_a^2\Gamma_b^2 \\ & + 2N_b^3(-2 + \Gamma_b)^4(-1 + \Gamma_2)\Gamma_b^3] \end{aligned} \quad (6.37)$$

Em ambos os painéis da figura (6.8) analisamos o fator Fano iniciando com uma barreira ideal ($\Gamma_i = 1$) fixa e fomos diminuindo este valor até o limite de junção de tunelamento ($\Gamma_i \ll 1$). Observamos um comportamento análogo nos dois gráficos: a partir de um certo valor crítico de $\Gamma_a^c \approx 0.85$ ($\Gamma_b^c \approx 0.63$), o fator Fano passa a ser monotônico com um mínimo em $\Gamma_b = 1$ ($\Gamma_a = 1$). Para valores abaixo desses valores críticos um mínimo no fator é observado para valores intermediários da barreira que variamos. Analisamos também o comportamento desse observável de transporte quando nos aproximamos do limite de junções de tunelamento. Para $\Gamma_a \rightarrow 0$ o processo de transferência de carga através do sistema passa a ser determinado essencialmente por essa junção e fator Fano tende a $2eV$, que é o valor esperado quando as flutuações temporais são dominadas pela junção conectada ao reservatório supercondutor e portanto a carga é transferida em unidades de $2e$ de maneira não correlacionada. Analogamente quando $\Gamma_b \rightarrow 0$ o fator Fano tende a eV , pois o conector do lado normal domina o processo de transferência de carga, que ocorre em unidades da carga eletrônica e [30].

Na próxima seção utilizaremos a técnica diagramática aliada à parametrização de estube para estudar a correção de localização fraca da condutância NS na presença de campo magnético. Diferentemente do caso normal onde esta correção é nula quando um campo magnético é aplicado ao sistema, veremos que a simetria partícula-buraco presente em sistemas NS induz correções da ordem da unidade nos observáveis de transporte neste regime.

6.4 LOCALIZAÇÃO FRACA DA CONDUTÂNCIA

Como foi discutido anteriormente, a correção de localização fraca pode coexistir com um campo magnético em sistemas NS, como consequência da simetria de elétron-buraco. Tecnicamente a grande diferença entre os sistemas NS e os normais é que aqui, a simetria de elétron-buraco, particularmente a estrutura da matriz unitária $\mathbf{S}_0$ (6.17), induz o surgimento de diagramas maximamente cruzados, que são responsáveis pela correção da ordem da unidade [56] da eq. (6.28). O cálculo da correção de localização fraca para o caso NS na presença de campo magnético aplicado, já foi feito para fios difusivos [138] e pontos quânticos com contatos ideais [56]. Iremos considerar no cálculo da correção de localização fraca desta seção o caso de um ponto quântico conectado a duas barreiras não-ideais assimétricas. Contudo os diagramas deste caso são topologicamente similares aos do caso de contatos ideais da ref. [56].

Para construirmos todos os diagramas maximamente cruzados topologicamente distintos responsáveis pela correção de localização fraca precisamos além dos vetores $\mathcal{F}^A$ e $\mathcal{F}^B$ já definidos, de mais duas estruturas que são apresentadas na figura (6.6). A delta

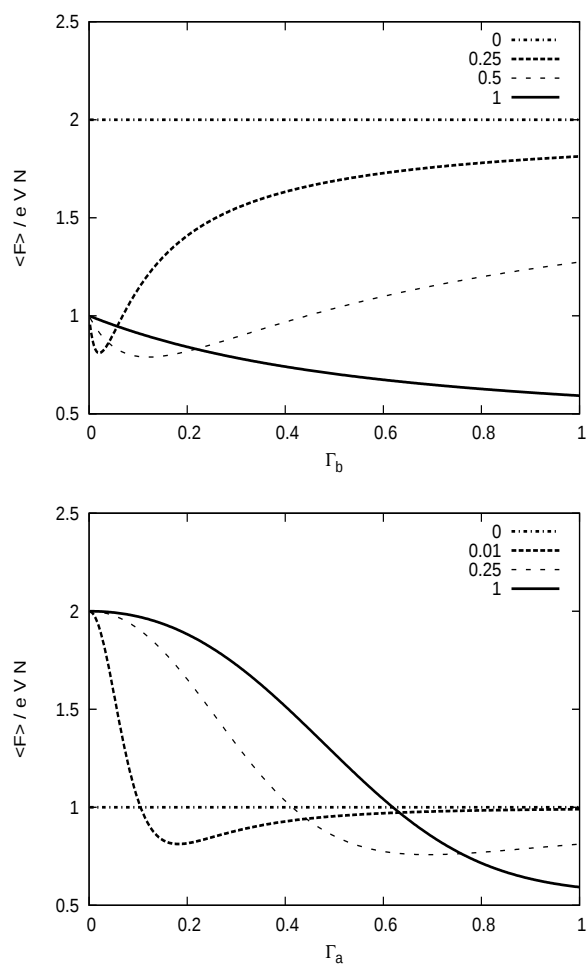


Figura 6.8 O fator Fano em unidades de $eV N$ em função de Γ_a (Γ_b) é apresentado na parte de cima (baixo) da figura, para vários valores de Γ_b (Γ_a) fixo.

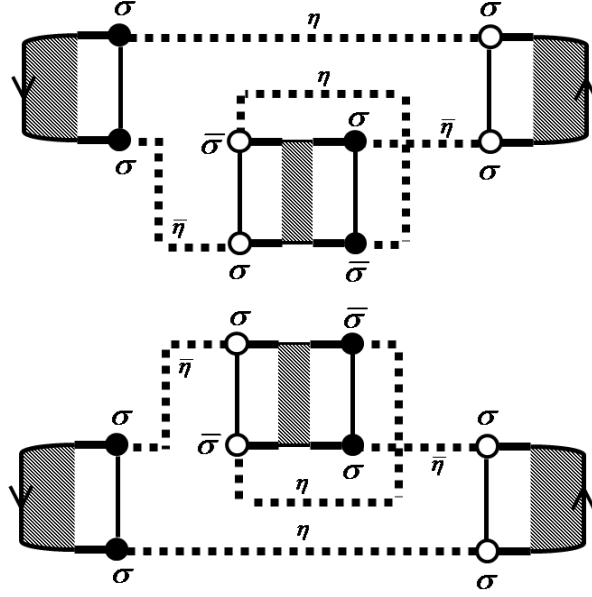


Figura 6.9 Dois diagramas maximamente cruzados distintos construídos utilizando o terceiro diagrama definido na figura (6.6).

de Kronecker que aparece no último diagrama da figura (6.6) é necessária pois, uma das regras acrescentadas à técnica diagramática devido a presença da simetria elétron-buraco, diz que não podemos ter dois pontos conectados por uma linha tracejada (matriz U ou U^*) com índices σ distintos. Apresentamos todos os diagramas maximamente cruzados responsáveis pela correção de localização fraca da condutância nas figuras (6.9) e (6.10). Omitimos os índices $\eta(\sigma)$ destes diagramas da fig.(6.10) para que as figuras não ficassem tão carregadas no que diz respeito a índices. Para mais detalhes sobre a construção de tais diagramas recomendamos a ref. [56].

Somando essas oito contribuições, obtemos a seguinte expressão para a correção de localização fraca da condutância em termos das transparências das barreiras e dos respectivos números de canais abertos:

$$\frac{\langle \delta G_{wl} \rangle}{G_0} = - \frac{4N_a [2N_a^2 \Gamma_a^6 (1 - \Gamma_b) + N_a N_b (2 - \Gamma_a)^2 \Gamma_a^4 \Gamma_b + N_b^2 \Gamma_a^2 \Gamma_b^2 (2 - \Gamma_a)^2 (\Gamma_a^2 + 4\Gamma_a - 4)]}{[2N_a \Gamma_a^2 + N_b \Gamma_b (2 - \Gamma_a)^2]^3}. \quad (6.38)$$

Na figura (6.11) apresentamos o comportamento de tal correção quando variamos as transparências das barreiras para $N_a = N_b$. Vamos inicialmente analisar o limite de junção de tunelamento. Para $\Gamma_a \rightarrow 0$ (gráfico inferior da fig. 6.11) as correções tendem a zero para todos os valores de Γ_b , isso porque a estrutura matricial que incorpora o mecanismo de Andreev à matriz da barreira a , eq. (6.10), fica diagonal nesse limite destruindo assim, a contribuição devido a simetria partícula-buraco para a localização fraca. Quando $\Gamma_b \rightarrow 0$ o efeito da localização é máxima tendendo a -1 . Devemos enfatizar que esse resultado só tem sentido se a desigualdade $N_i \Gamma_i \gg 1$ é satisfeita,

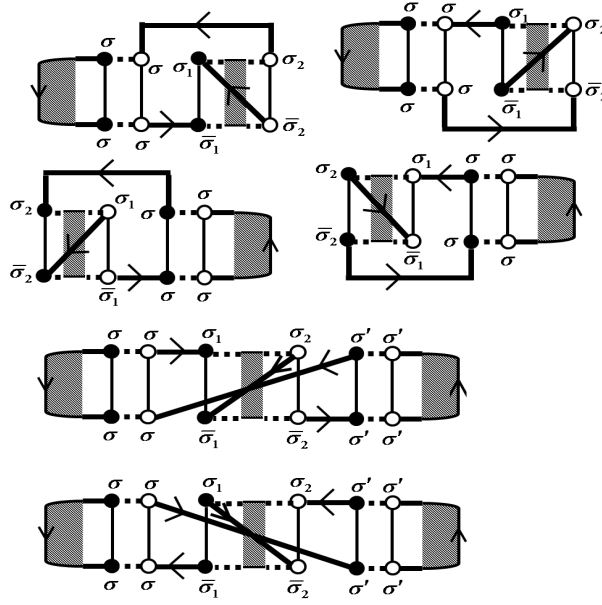


Figura 6.10 Demais diagramas cruzados construídos utilizando a última estrutura diagramática definida na figura (6.6).

validando assim, a expansão semiclássica em termos do inverso do número de canais, que é um ingrediente básico da técnica diagramática [56]. A figura (6.11) também revela um comportamento não trivial da correção de localização fraca devido aos contatos serem não-ideais. Chamamos atenção para uma interessante mudança de sinal completamente induzida por variações das transparências das barreiras. Quando variamos Γ_a observamos uma transição do tipo anti-localização-localização para qualquer valor de Γ_b (ver parte de baixo da fig. (6.11)). Para o caso onde variamos Γ_b (ver topo da figura), tal fenômeno desaparece quando temos $\Gamma_a > \sqrt{3} - 1$. Um efeito similar a esse foi observado na correção da potência de ruído de disparo de uma cavidade conectada a reservatórios normais por contatos ideais [119], mas neste caso é indispensável manter o regime de guias assimétricos para ser observado o regime de amplificação-supressão.

Encerramos aqui o último capítulo de resultados desta tese. Neste capítulo apresentamos uma técnica alternativa à teoria de circuitos quântica, que foi a abordagem teórica mais utilizada nesta tese para, obter estatística de contagem de carga e correções quânticas de vários sistemas mesoscópicos de interesse teórico e experimental. A técnica diagramática se mostrou eficaz para o cálculo de observáveis de transporte de sistemas NS, bem como suas correções quânticas na presença de campo magnético, porém não é, se comparamos com a teoria de circuitos, uma técnica eficiente. Este fato fica evidente quando observamos a quantidade de diagramas topologicamente distintos que surgem quando passamos do cálculo da média da condutância para a análise da potência do ruído de disparo. Quando consideramos os diagramas maximamente cruzados, responsáveis pela correção de localização fraca essa ineficiência torna-se ainda mais evidente. Até onde sabemos a técnica diagramática até agora foi apenas utilizada para o cálculo da

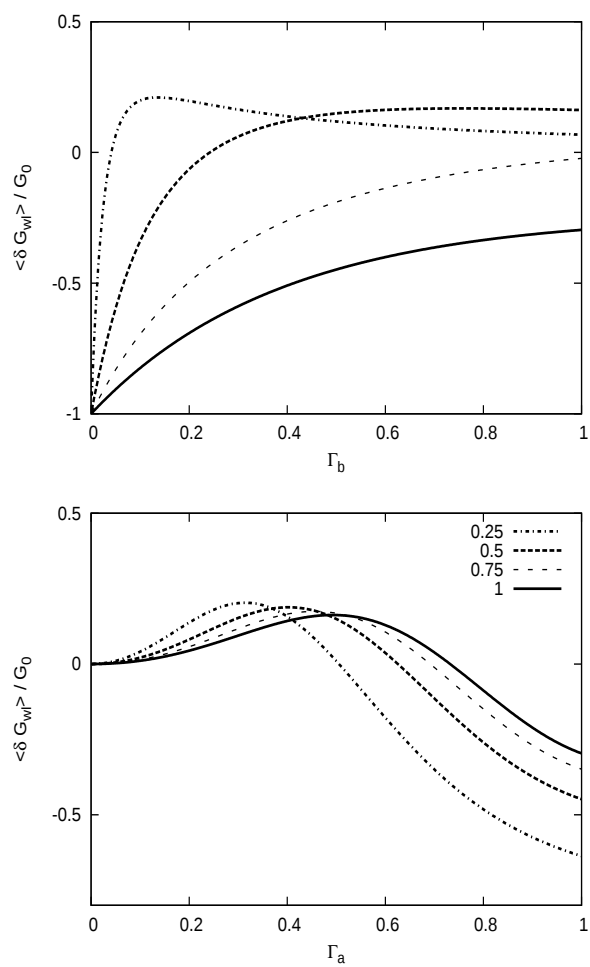


Figura 6.11 Localização fraca da condutância NS em unidades de G_0 variando a barreira Γ_b (Γ_a) na parte de cima (baixo) da figura com Γ_a (Γ_b) fixo e $N_a = N_b$.

densidade média de autovalores de transmissão (que conteria a informação sobre todos os cumulantes) para casos muito simples, como contatos ideais e junções de tunelamento. Não ter um algoritmo eficiente para gerar a densidade de autovalores de transmissão, ou de forma mais geral uma função geratriz de cumulantes, para o caso mais geral onde temos contatos não-ideias, é sem dúvida um ponto fraco da técnica diagramática. É bom que se diga também que, a eficácia do método para o caso NS só foi possível graças à conveniente parametrização de estube que utilizamos. Sem ela ficaria muito difícil calcularmos até a condutância média.

No próximo capítulo listaremos as principais conclusões apresentadas nesta tese, bem como apontaremos as perspectivas de todas as linhas aqui exploradas.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese apresentamos vários aspectos relacionados ao transporte quântico em nanoestruturas. Mais especificamente estudamos as propriedades estatísticas e as correções quânticas nas propriedades de transportes em pontos quânticos conectados aos guias por barreiras de transparências arbitrárias, na presença ou não de uma interface NS. Este estudo nos permitiu observar uma rica fenomenologia nas propriedades de transporte destas estruturas quando variamos as transparências das barreiras de forma arbitrária.

Antes de apresentar os resultados principais desta tese, fizemos uma breve revisão dos principais formalismos existentes atualmente na literatura para estudar estes sistemas. Dois métodos puramente quânticos foram apresentados: A teoria de matrizes de espalhamento (TME) e a teoria de matrizes aleatórias (TMA). Como exemplo da TME apresentamos o método desenvolvido por Beenakker [48], que permite incluir uma interface NS no problema de espalhamento em estruturas mesoscópicas e sua conexão com a teoria de Landauer-Büttiker. Com relação à TMA, apresentamos os ensembles de Wigner-Dyson e sua conexão com as propriedades espectrais de sistemas fechados. Ainda neste tópico, apresentamos o formalismo de supersimetria que permite calcular a densidade média de níveis nestes ensembles através de modelo σ não linear supersimétrico. Discutimos também a teoria de matrizes de espalhamento aleatórias, que podem ser obtidas através do formalismo de Mahaux-Weidenmüller, ou admitindo diretamente a aleatoriedade de elementos da matriz S . Neste último caso tais variáveis aleatórias não pertencem mais a um dos ensembles gaussianos e sim ao núcleo de Poisson.

O capítulo 2 também contou com uma revisão do método de funções de Green quase-clássicas e sua conexão com uma teoria de elemento finito conhecida como teoria quântica de circuitos [79]. Ao contrário dos formalismos de matriz- S e matrizes aleatórias a teoria de circuitos é um formalismo semi-clássico e portanto só descreve o regime $G \gg G_0$, onde a condutância do sistema é bem maior que o quantum de condutância. Encerramos este capítulo discutindo a estatística de contagem de carga. Através de um exemplo simples, onde usamos apenas argumento físicos intuitivos e análise combinatória apresentamos os principais objetos que constituem esta teoria. Apresentamos depois o modelo de galvanômetro de spin-1/2 de Levitov, Lee e Lesovik [34] que permite calcular a função geratriz da estatística de contagem de carga de um sistema mesoscópico arbitrário descrito pelos seus autovalores de transmissão. Finalmente, apresentamos as modificações necessárias na teoria quântica de circuitos para que a mesma possa ser utilizada para a obtenção da estatística de contagem de carga em sistemas mesoscópicos.

Iniciamos a apresentação de nossos resultados no capítulo 3, onde obtivemos a estatística de contagem de carga de estruturas mesoscópicas utilizando a TMA, baseado no modelo estocástico VWZ [73] para dinâmica caótica dentro da cavidade e técnicas supersimétricas. Além do seu poder operacional, esta construção tem também o mérito

de tentar unificar os diversos formalismos hoje existentes em física mesoscópica em um único esquema teórico nos moldes sugeridos na referência [88]. A construção descrita em [88] consiste de três etapas: (i) especificação do modelo de detecção de carga para obter a estatística de contagem, onde utilizamos o modelo de spin-1/2 da referência [34]; (ii) projeção da função geratriz da estatística de contagem de carga no sub-espaço de Liouville dos observáveis relevantes, neste capítulo utilizamos o sub-espaço de Liouville de operadores de uma partícula; (iii) execução da média sobre a dinâmica caótica no sistema mesoscópico, que neste trabalho foi realizada através de um poderoso mapa exato entre a função geratriz da estatística de contagem e o modelo σ não linear supersimétrico. Versatilidade é também um dos grandes atrativos deste esquema teórico: a maneira de executar qualquer uma das três etapas pode ser modificada sem modificar a estrutura lógica da construção. Por exemplo na primeira etapa poderíamos substituir o protótipo de medição de carga estático da referência [34] por um mais realístico, onde o detector é representado por um ambiente eletromagnético [85], ou ainda modelos onde é possível estudar a influência de detectores com eficiência menor que a unidade na estatística de contagem de carga [142]. Se tivéssemos que escolher uma palavra que descrevesse este formalismo, esta palavra seria: controle. Isto porque tal formalismo estruturado seguindo estas etapas de construção permite um controle matematicamente rigoroso de todas as aproximações executadas em cada uma das três etapas.

A grande vantagem do formalismo desenvolvido no capítulo 3 com relação à teoria de circuitos de funções de Green quase-clássica é que temos acesso também ao regime não perturbativo, onde a condutância da nanoestrutura é da ordem do quantum de condutância. No regime semiclássico, $G \gg G_0$ obtivemos uma versão escalar da teoria quântica de circuitos [93] para sistemas de dois terminais, obtida a partir do ponto de sela do modelo σ não linear supersimétrico. Estendemos também este resultado para diferentes classes de simetria e também conectamos os resultados deste método com o formalismo de matrizes de espalhamento aleatórias. Encerramos este capítulo com uma comparação mais detalhada entre a teoria de circuitos obtida via teoria de funções de Green quase-clássicas e o nosso formalismo. Concluimos que a principal diferença entre as duas formulações do ponto de vista semiclássico, reside no controle das aproximações que no método nazaroviano é feito usando argumentos físicos plausíveis, porém pouco rigorosos, em contraste com a formulação via TMA onde são matematicamente justificadas.

No capítulo 4 apresentamos uma aplicação da teoria de circuitos escalar para estudar a estatística de contagem de um sistema híbrido NS. O sistema consiste em um ponto quântico conectado a um reservatório normal e a um supercondutor por barreiras de transparências arbitrárias, em baixas temperaturas, pequenas voltagens e a campo magnético nulo. Neste regime podemos escrever os autovalores de reflexão de Andreev em termos dos autovalores de transmissão do lado normal e portanto podemos obter a estatística de contagem deste sistemas com a teoria de circuitos escalar. Obtivemos a densidade de autovalores de reflexão de Andreev, ver figura (4.1), que analogamente à densidade de autovalores de transmissão do caso normal pode ser utilizada como um parâmetro de ordem que sinaliza o surgimento de modos do tipo Fabry-Pérot dentro da cavidade quando variamos as transparências das barreiras. Analisamos também os três primeiros cumulantes da estatística de contagem deste sistema NS e, diferentemente do caso normal, tais

cumulantes exibem interessantes assinaturas, como podemos ver nas figuras (4.3) e (4.5) desta transição quântica descrita na referência [53]. Estas assinaturas estão associadas aos efeitos de proximidade supercondutora que afetam as propriedades espectrais e de transporte de estruturas do metal normal adjacente. Chamamos atenção também que ao contrário de outras assinaturas previstas teoricamente em sistemas normais [102, 120], onde tais assinaturas aparecem como discontinuidades na cauda de eventos raros da distribuição de carga transmitida ou induzida por ambiente eletromagnético, os sinais desta transição em sistemas NS aparecem nos primeiros cumulantes da estatística de contagem. Essas assinaturas são completamente induzidas pelas transparências das barreiras e podem, à luz dos avanços experimentais realizados em estruturas híbridas [51], serem medidos experimentalmente.

Voltamos a tratar da teoria quântica de circuitos baseada em funções de Green quase-clássicas no capítulo 5. Estudamos as correções quânticas em cadeias de pontos quânticos conectados entre si e a dois terminais via barreiras simétricas, utilizando um engenhoso truque que permite calcular tais correções via teoria quântica de circuitos [55], evitando assim o caminho ortodoxo de funções de Green onde estas correções são obtidas calculando as contribuições do cooperon e difusons. Estendemos os resultados de cadeias no regime de junção de tunelamento da referência [55] para o caso onde a transparência da barreira pode variar arbitrariamente. Calculamos a correção de localização fraca dos três primeiros cumulantes da estatística de contagem em função da transparência da barreira e do número de pontos que compõem o circuito. Um detalhe interessante surge quando analisamos por exemplo a localização fraca da potência de ruído de disparo (ver figura 5.8(b)): um comportamento não monotônico é observado quando aumentamos o número de conectores (e consequentemente o número de pontos) que compõem o circuito. Esperaríamos que esta correção tendesse ao valor esperado para um fio monotonicamente, como ocorre com a condutância, ver figura 5.8(a). Este fato só demonstra como é não trivial a transição gradual entre o regime de poucos pontos e o regime de fio quântico que ocorre quando o número de conectores do circuito é muito grande. Da figura (5.8) concluímos que a transparência da barreira influencia bastante na “velocidade” com que o valor de tal correção tende ao valor do fio.

Estudamos também as flutuações universais dos observáveis de transporte que em princípio deveriam ser obtidos da mesma ação que nos possibilitou calcular as correções de localização fraca. Obtivemos uma expressão geral em termos do número de conectores e da transparência da barreira, eq. (5.126) para a variância da condutância que checka com vários casos limites estudados por outros métodos e com simulações. No entanto para cumulantes de maior ordem obtivemos resultados inconsistentes, que de certa forma nos fazem repensar sobre a aplicabilidade do método proposto em [55] para estudar flutuações universais dos cumulantes da estatística de contagem. Infelizmente até o período de escrita desta tese não encontramos nenhuma resposta concreta para as inconsistências encontradas.

O capítulo 6 é reservado para um regime em sistemas híbridos NS onde uma teoria de circuito ainda não está disponível: um ponto quântico conectado a um reservatório normal e a um supercondutor por barreiras de transparências arbitrárias na presença de campo magnético que é responsável pela quebra de simetria entre elétron e buraco. Neste

regime não podemos mais escrever os autovalores de reflexão de Andreev em termos dos autovalores de transmissão e portanto não podemos utilizar a teoria de circuitos. Utilizamos a técnica diagramática de integração sobre o grupo unitário desenvolvida por Brouwer e Beenakker [56] como ferramenta matemática alternativa à teoria de circuitos. Nossas contribuições neste capítulo dividem-se em duas partes. Na primeira tivemos que reescrever a matriz S do sistema NS em termos de uma conveniente parametrização que permite separar a contribuição devido à dinâmica caótica dentro da cavidade da contribuição devido às barreiras e a interface NS, conhecida como parametrização de estube. Esta parametrização nos permitiu importar diagramas conhecidos do caso normal que contribuem para a média da condutância e da potência do ruído de disparo. Adicionando a estrutura matricial de partícula-buraco a estes diagramas podemos calcular a média destes cumulantes do caso NS, equações (6.24) e (6.37) respectivamente. Um fato interessante com a média da condutância NS na presença de campo magnético: diferentemente do caso normal o valor deste observável é diferente para o regime sem campo magnético, como podemos ver no gráfico (6.5). Esta é mais uma manifestação do efeito de proximidade presente em sistemas híbridos. Na segunda parte deste capítulo estudamos a correção de localização fraca da condutância que produz os diagramas apresentados nas figuras (6.9) e (6.10), que são generalizações de diagramas obtidos na ref. [56] para o caso de contatos ideais. Uma rica fenomenologia foi encontrada quando analisamos este observável variando as transparências das barreiras na equação (6.38). Observamos um efeito de amplificação-supressão deste observável, caracterizada pela mudança de sinal do mesmo completamente induzida pela transparência das barreiras. Um ponto fraco do método diagramático é que à medida que aumentamos o grau do cumulante a quantidade de diagramas que contribuem cresce enormemente tornando tal técnica impraticável. Este fato deve ser contrastado com a forma sistemática de obter tais observáveis pela teoria de circuitos.

Vários aspectos da física mesoscópica poderiam ser estudados nos sistemas apresentados nesta tese, como por exemplo estudar o efeitos de multiterminais [143] e topologias arbitrárias [144] na estatística de contagem em circuitos de pontos quânticos com ou sem interfaces NS. Um impedimento nestes casos é que a teoria de circuitos até agora disponível é matricial o que torna o cálculo bem mais trabalhoso. No entanto existe um indicativo de que será possível reescrever esta teoria em uma forma escalar utilizando álgebras de Clifford e interpolação geodésica, mas este estudo encontra-se na sua fase inicial. Outro problema que será muito interessante de atacar é a teoria de circuitos para a estatística de contagem de sistemas híbridos na presença de campo magnético e/ou efeitos de descoerência causados pela dependência com a energia das matrizes de espalhamento. Esta dependência com a energia torna-se particularmente interessante no caso NS, onde resultados para condutância já são bem conhecidos [79]. Seria também interessante estudar as propriedades de sistemas híbridos na presença de ambientes eletromagnéticos dissipativos. No começo da década de 1990, Nazarov e Ingold [145] mostraram que as interações coulombianas em sistemas mesoscópicos podem ser tratadas através de um ambiente eletromagnético. Este fato foi utilizado por Kindermann e Nazarov em 2003 [85] para estudar a estatística de contagem de um sistema mesoscópico. Seria interessante também estudar a estatística de contagem de sistemas híbridos na presença deste ambiente.

APÊNDICE A

SUPER-ÁLGEBRA

O formalismo supersimétrico necessita da definição de um número (escalar) anticomutante, conhecido como variável de Grassmann. Tais variáveis satisfazem o seguinte produto: $\eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1$. Como consequência direta deste fato temos que $\eta_1^2 = \eta_2^2 = 0$ (nilpotência). Utilizaremos a seguinte convenção para a operação de conjugação complexa de variáveis de Grassmann

$$(\eta_1 \eta_2)^* = \eta_1^* \eta_2^*, \quad \eta^{**} = -\eta. \quad (\text{A.1})$$

Devido à sua grande relevância para a formulação via integrais de trajetória de problemas de física de partículas elementares o método supersimétrico tomou emprestado alguns jargões dessa física. Por exemplo, graus de liberdades comutantes em um super-espaço são frequentemente chamados de “bosônicos” enquanto os anti-comutantes são chamados de “fermiônicos”. Uma variedade diferenciável com coordenadas bosônicas e fermiônicas é conhecida como super-variedade.

Uma super-matriz tem a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde as matrizes a e b possuem apenas variáveis comutantes como elementos e α e β possuem elementos anti-comutantes. Utilizaremos a seguinte notação onde os elementos de uma super-matriz têm a seguinte forma $A_{pp'}^{\alpha\alpha'}$:

$$A_{pp'}^{00} = a_{pp'}; \quad A_{pp'}^{01} = \alpha_{pp'}; \quad A_{pp'}^{10} = \beta_{pp'}; \quad A_{pp'}^{11} = b_{pp'}, \quad (\text{A.3})$$

onde α e α' rotulam os diferentes blocos de A . Se $\alpha + \alpha'$ é ímpar o elemento $A_{pp'}^{\alpha\alpha'}$ é uma variável de Grassmann, já se esta soma é par o elemento é uma variável complexa comum. Os quatro blocos apresentados na equação (A.3) recebem nomes especiais: A^{00} é o bloco bóson-bóson; A^{01} é o bloco bóson-férmion; A^{10} é o bloco férmion-bóson e A^{11} é o bloco férmion-férmion. Se A e B são super-matrizes temos a seguinte propriedade

$$A_{pp'}^{\alpha\alpha'} B_{qq'}^{\beta\beta'} = (-1)^{(\alpha+\alpha')(\beta+\beta')} B_{qq'}^{\beta\beta'} A_{pp'}^{\alpha\alpha'}. \quad (\text{A.4})$$

O super-traço, $\text{Str}A$ e o super-determinante $\text{Sdet}A$ de uma super-matriz são definidos abaixo

$$\begin{aligned} \text{Str}A &\equiv \text{tra} - \text{tr}b = \sum_{p,\alpha} (-1)^\alpha A_{pp}^{\alpha\alpha} \\ \text{Sdet}A &\equiv e^{\text{Str} \ln A} = \frac{\det(a - \alpha b^{-1} \beta)}{\det b}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Definido desta maneira, o super-determinante herda todas as propriedades do determinante usual, como $\text{Sdet}A^{-1} = (\text{Sdet}A)^{-1}$, $\text{Sdet}(AB) = (\text{Sdet}A)(\text{Sdet}B)$, etc. Se a super-matriz é diagonal, $A_{pp'}^{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} A_{pp'}^\alpha$, temos

$$\text{Sdet}A = \frac{\det A^{00}}{\det A^{11}}. \quad (\text{A.6})$$

Como consequências das definições (A.5), se a super-matriz for a indentidade, então o super-traço é nulo $\text{Str}1 = 0$ e o super-determinante é igual à unidade $\text{Sdet}1 = 1$.

Definimos também o super-vetor da seguinte forma

$$\varphi = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_N^1)^T, \quad (\text{A.7})$$

onde φ_p^0 (φ_p^1) são variáveis comutantes (anti-comutantes). Se φ_p^α e $\varphi_{p'}^{\alpha'}$ são componentes de super-vetores, então

$$\varphi_p^\alpha \varphi_{p'}^{\alpha'} = (-1)^{\alpha\alpha'} \varphi_{p'}^{\alpha'} \varphi_p^\alpha. \quad (\text{A.8})$$

Em termos desses super-vetores podemos definir a matriz transposta de A

$$\psi^T A^T \varphi = (A\psi)^T \varphi, \quad (\text{A.9})$$

que em termos das componentes é $(A^T)_{pq}^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha(1+\beta)} (A)_{qp}^{\beta\alpha}$ e na forma matricial fica:

$$A^T = \begin{pmatrix} a^T & \beta^T \\ -\alpha^T & b^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Listamos abaixo outras propriedades úteis envolvendo super-matrizes e super-vetores:

$$\begin{aligned} A^{**} &= kAk; & \varphi^{**} &= k\varphi, \\ A^{TT} &= kAk; & A^{\dagger\dagger} &= A, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde $k_{pq}^{\alpha\beta} = (-1)^\alpha \delta_{\alpha\beta} \delta_{pq}$ e o hermitiano conjugado é definido pela composição do conjugado complexo e a operação de super-transposta $A^\dagger \equiv (A^*)^T$.

APÊNDICE B

MÉDIA DA MATRIZ- S

Na linguagem de supersimetria a média da matriz- S (2.60) pode ser escrita da seguinte forma

$$\langle S(E) \rangle = 1 - 2\pi i W^\dagger \langle D_+^{-1} \rangle W, \quad (\text{B.1})$$

onde,

$$D_+^{-1} = \frac{1}{E - H + i\pi W W^\dagger + i\eta/2}; \quad \eta \rightarrow 0^+. \quad (\text{B.2})$$

A média em ensemble de D_+^{-1} pode ser obtida de uma função geratriz similar a estudada no caso de sistemas fechados

$$\langle D_+^{-1} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle, \quad (\text{B.3})$$

onde,

$$\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle = \int d\sigma \exp \left\{ -\frac{M}{2} \text{Str}_\alpha \sigma^2 - \text{Str}_{\mu p \alpha} \ln(E + \frac{\omega}{2} L + i\pi W W^\dagger L + J(\epsilon) - \lambda \sigma) \right\}, \quad (\text{B.4})$$

com $\mu = 1, \dots, M$, $p = 1, 2$ e $\alpha = 0, 1$. O ponto de sela desse modelo σ é dada pela equação (2.55), desta forma temos $\langle \mathcal{Z}(\epsilon) \rangle = e^{i\mathcal{L}_3(\sigma_0)}$ e

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}_3(\sigma_0) &= -\text{Str}_{\mu\alpha} \ln(E + i\pi W W^\dagger L + J(\epsilon) - \lambda \sigma_0) \\ &\simeq -\frac{\sigma_0}{\lambda} \text{Str}_{\mu\alpha} \{ (1 + i\pi \lambda^{-1} \sigma_0 W W^\dagger L)^{-1} J(\epsilon) \} + \mathcal{O}(J^2(\epsilon)). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo (B.5) em (B.3), temos

$$\langle (D_+^{-1})_{\mu\nu} \rangle = \frac{\sigma_0}{\lambda} \left(\frac{1}{1 + i\pi \lambda^{-1} \sigma_0 W W^\dagger} \right)_{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

e, finalmente, substituindo essa expressão em (B.1), obtemos a média de S :

$$\langle S(E) \rangle = \frac{1 - i\pi \lambda^{-1} \sigma_0 W W^\dagger}{1 + i\pi \lambda^{-1} \sigma_0 W W^\dagger}. \quad (\text{B.7})$$

Para $E = 0$ a eq. (B.7) se reduz à expressão (2.61), com $\lambda = Md/\pi$, onde d é o espaçamento médio entre níveis ao redor do centro do espectro.

APÊNDICE C

PARAMETRIZAÇÃO DA SUPERMATRIZ FONTE $Q_{\vec{a}\vec{b}}$

Definindo as seguintes matrizes:

$$\begin{cases} K = X_1 X_2 = \text{diag}(a_1 a_2, 0, b_1 b_2, 0); \\ \bar{K} = Y_1 Y_2 = \text{diag}(0, a_1 a_2, 0, b_1 b_2); \\ P = X_1 + Y_2 = \text{diag}(a_1, a_2, b_1, b_2); \\ \bar{P} = X_2 + Y_1 = \text{diag}(a_2, a_1, b_2, b_1), \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

a supermatriz S , eq. (3.39), fica:

$$S = \begin{pmatrix} 1 - K & i\bar{P} \\ iP & 1 - \bar{K} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

e

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \bar{K} & -i\bar{P} \\ -iP & 1 - K \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

A supermatriz fonte $Q_{\vec{a}\vec{b}} \equiv S Q_0 S^{-1}$, onde $Q_0 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$, pode ser expressa em termos dessas matrizes auxiliares da seguinte forma:

$$Q_{\vec{a}\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 - 2P\bar{P} & 2i\bar{P}(K - 1) \\ 2iP(1 - \bar{K}) & 2P\bar{P} - 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Com simples manipulações algébricas matriciais, temos:

$$\begin{cases} P\bar{P} = \text{diag}(a_1 a_2, a_1 a_2, b_1 b_2, b_1 b_2); \\ \bar{P}(K - 1) = \text{diag}(a_2(a_1 a_2 - 1), -a_1, b_2(b_1 b_2 - 1), -b_1); \\ P(1 - \bar{K}) = \text{diag}(a_1, a_2(1 - a_1 a_2), b_1, b_2(1 - b_1 b_2)). \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Escolhendo a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i}{2} \sinh \phi_1; & a_2 &= -i \tanh(\phi_1/2) \\ b_1 &= -\frac{1}{2} \sin \phi_0; & b_2 &= -\tan(\phi_0/2), \end{aligned}$$

temos então

$$\begin{cases} 1 - 2P\bar{P} = \cos \hat{\phi}; \\ 2i\bar{P}(K - 1) = i \sin \hat{\phi}; \\ 2iP(1 - \bar{K}) = -i \sin \hat{\phi}, \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

substituindo a eq. (C.6) em (C.4), obtemos

$$Q_{\vec{a}\vec{b}} = \begin{pmatrix} \cos \hat{\phi} & i \sin \hat{\phi} \\ -i \sin \hat{\phi} & -\cos \hat{\phi} \end{pmatrix} \equiv Q_{\hat{\phi}}. \quad (\text{C.7})$$

Essa parametrização será nosso ansatz para resolvermos as equações de ponto de sela de (3.37).

APÊNDICE D

COEFICIENTES DA EXPANSÃO DE $g_{NS}(\varepsilon)$

Na seção (4.3) obtivemos a seguinte expansão para $g_{NS}(\varepsilon)$, eq. (4.42)

$$g_{NS}(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4 + \dots \quad (\text{D.1})$$

Aqui apresentamos os coeficientes α_0 , α_1 e α_2 em termos dos coeficientes da expansão das raízes de $\xi_{\pm}$, definidos em (4.38). São eles:

$$\alpha_0 = NT_2(1 - tA^2)J^2B, \quad (\text{D.2})$$

onde $J = (1 + tA^2)^{-1}$ e $t = 1 - T_2$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{NT_2J^4}{2} [-t^3((B - 2D)A^6 + 4CBA^5) - t^2((-2tB^3 + B - 3D)A^4 - 8CBA^3) \\ & + t(((1 - 12t)B - 2D)A^2 + 12CBA) + 2(tB^2 + 1)B - 2D], \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \frac{NT_2J^6}{8} [-t^5((B + 4D - 8F)A^3 - 8((B - 2D)C - 2BE)A^2 + 32CB^3)A^7 + t^4(24t(-4B^2 \\ & + DB + C^2)B - 3(B + 4D - 8F))A^8 + 2t^3((4t(tB^4 - 2(6(C^2 + DB) - 8B^2))B - B \\ & - 4D + 8F)A - 24(-6tCB^3 + CB - 2(BE + CD)))A^5 - 2t^2(20t(3tB^3 + 6(DB + C^2) \\ & - B^2)B - B - 4D + 8F)A^4 - 32t^2(-5tB^3C + 2((C - 2E)B - 2CD))A^3 + t(8t(15B^4 \\ & + 2B^2 - 12(C^2 + DB))B + 3(B + 4D - 8F))A^2 + 8t(-20tB^3C + 3(B(2E - C) + 2CD))A \\ & - (4t(tB^4 + (B - 6D)B - 6C^2)B - B - 4D + 8F)]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

As variáveis C , D , E e F são apresentados abaixo em termos das seguintes variáveis: $\sigma_1 = (1 - T_2)T_1$, $\sigma_2^{\pm} = (2 \pm T_1)aT_2$, $\sigma_3 = (1 + 2a)T_1T_2$, $\sigma_4 = (1 + aT_2)T_1$

$$\begin{aligned} C = & -\frac{\gamma}{2}[(\sigma_2^+ - 4\sigma_1(2B + 1))A^3 + 12(\sigma_1(B + 1) - aT_2)BA^2 + (2(3\sigma_2^- B \\ & - 2\sigma_3)B - (4 + 3aT_2)T_1 + 2aT_2)A + 2(\sigma_3B + 2(\sigma_4 - aT_2))B] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} D = & -\frac{\gamma}{2}[(4\sigma_1(B - 2C + 1) - \sigma_2^+)A^3 + 12(\sigma_1((2C - B - 1)B + C) + aT_2(B - C))A^2 \\ & + (4(\sigma_1(2B + 3) - aT_2)B^2 + 12\sigma_2^- T_1T_2CB + 2\sigma_3(B - 2C) + (4 + 3aT_2)T_1 - 2aT_2)A \\ & + 2((\sigma_2^- - \sigma_3 - B)B + 2(\sigma_3 - \sigma_4 + aT_2))B + 4(\sigma_4 - aT_2)C] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned}
E = & -\frac{\gamma}{8}[(16\sigma_1(C - B - 2D - 1) + (10 + 3T_1)aT_2)A^3 + 24(\sigma_1((B + 4(D - C) + 2)B + 2C^2) \\
& + 2(\sigma_1 - aT_2)(D - C) - 48aT_2B)A^2 + (8(-4\sigma_1B^2 + 6(\sigma_1(2C - 1) + aT_2)B + 12(\sigma_1 - aT_2)C \\
& + 6\sigma_2^-D - \sigma_3)B + 24\sigma_2^-C^2 + 8\sigma_3C - 16\sigma_3D - (16 + 13aT_2)T_1 + 10aT_2)A + 4(2\sigma_1B^4 \\
& + 4(\sigma_1 - aT_2)B^3 + (6\sigma_2^-C + \sigma_3)B^2 + 4(\sigma_3(D - C) + \sigma_4 - aT_2)B + 2\sigma_3C^2) \\
& + 4(aT_2 - \sigma_4)(C - D)] \tag{D.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & -\frac{\gamma}{8}[(4\sigma_1(3B + 4(D - C - 2E + 1)) - (10 + 3T_1)aT_2)A^3 + (24\sigma_1(-B^2 + 2(C - 2(D - E) \\
& - 1))B + 48((aT_2B - \sigma_1C(C + 2D)) + (C - D + E)(\sigma_1 - aT_2)))A^2 + (16\sigma_1B^3 + 48(2\sigma_1 \\
& (D - C) + (\sigma_1 - aT_2))B^2 + 6(16(\sigma_1C^2 + (\sigma_1 - aT_2)(D - C)) + 8\sigma_2^-E + \sigma_3)B \\
& + 48((\sigma_1 - aT_2)C^2 + \sigma_2^-D) + 8\sigma_3(D - C - 2E))A - 4(-2\sigma_1B^4 + 4(\sigma_1(2C - 1) \\
& + aT_2)B^3 + (12(\sigma_1 - aT_2)C + 6\sigma_2^-D - \sigma_3)B^2 + 2(3\sigma_2^-C^2 + \sigma_3(C - 2(D - E)) \\
& - 2(\sigma_4 - aT_2))B + 2(\sigma_4(2(D + 1) - C) - 2T_2)C - 8(\sigma_4 - aT_2)(D - E))], \tag{D.8}
\end{aligned}$$

onde,

$$\gamma = [4\sigma_1A^3 + 3\sigma_2^-A^2 + 2T_1T_2(1 + 2a)A + \sigma_2^-]^{-1}. \tag{D.9}$$

Os coeficientes A e B são dados pelas equações (4.40) e (4.41), respectivamente para o caso mais geral apresentado na seção (4.3). Com α_0 , α_1 e α_2 podemos calcular os três primeiros cumulantes analiticamente através das equações (4.43), (4.44) e (4.45). O comportamento de tais cumulantes quando variamos as transparências das barreiras é mostrado nas figuras (4.3) e (4.5).

APÊNDICE E

PARAMETRIZAÇÃO DAS MATRIZES DE VOLTAGEM 2×2

No formalismo quase-clássico, as matrizes de voltagem são definidas de tal forma a satisfazer os seguintes vínculos:

$$\begin{cases} \bar{G}^2 = \bar{1} \\ \text{Tr}\bar{G} = \bar{0}. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Considere a seguinte matriz de voltagem

$$\hat{G}_j^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2F_j \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; F_j = 1 - 2f_j, j = 1, 2, \quad (\text{E.2})$$

onde, f_j é a função distribuição de Fermi-Dirac. Considere também a transformação de calibre

$$\bar{G}_1^\lambda = e^{i\lambda\bar{\sigma}/2} \bar{G}_1 e^{-i\lambda\bar{\sigma}/2}; \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Definindo os seguintes produtos matriciais

$$\begin{cases} \bar{K}_{12}^\lambda \equiv \bar{G}_1^\lambda \bar{G}_2 \\ \bar{K}_{21}^\lambda \equiv \bar{G}_2 \bar{G}_1^\lambda = (\bar{K}_{12}^\lambda)^{-1}. \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Como consequência da definição acima, temos

$$[\bar{K}_{12}^\lambda, \bar{K}_{21}^\lambda] = \bar{0}, \quad (\text{E.5})$$

e

$$\{\bar{K}_{12}^\lambda, \bar{K}_{21}^\lambda\} = 2(1 + 2J_\lambda) \bar{1}, \quad (\text{E.6})$$

onde, $J_\lambda \equiv (e^{i\lambda} - 1)f_1(1 - f_2) + (e^{-i\lambda} - 1)f_2(1 - f_1)$. Podemos compactar as matrizes $\bar{G}_1^\lambda$ e $\bar{G}_2$ em uma única expressão definindo um novo parâmetro discreto α da seguinte forma

$$\bar{G}(\alpha) \equiv \hat{G}_1^\lambda \exp(\alpha \ln \bar{K}_{12}^\lambda); \alpha = 0, 1. \quad (\text{E.7})$$

O próximo passo é encontrar os autovalores de K_{12}^λ e K_{21}^λ . Seja $\{|r_\pm\rangle\}$ a base comum de autovetores de K_{12}^λ e K_{21}^λ , temos então

$$\begin{cases} \bar{K}_{12}^\lambda |r_\pm\rangle = a_\pm |r_\pm\rangle \\ \bar{K}_{21}^\lambda |r_\pm\rangle = b_\pm |r_\pm\rangle. \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

Nesta base temos,

$$\bar{K}_{12}^\lambda = \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & a_- \end{pmatrix}; \bar{K}_{21}^\lambda = \begin{pmatrix} b_+ & 0 \\ 0 & b_- \end{pmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

Das condições de normalização e anticomutação

$$\begin{cases} \bar{K}_{12}^\lambda \bar{K}_{21}^\lambda = \bar{1} \\ \bar{K}_{12}^\lambda + \bar{K}_{21}^\lambda = 2(1 + 2J_\lambda) \bar{1}, \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

temos,

$$\begin{cases} a_\sigma b_\sigma = 1; \sigma = \pm \\ a_+ + b_+ = a_- + b_-. \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

Assumindo que $a_- \neq a_+$ em geral, temos que a solução para o conjunto de equações acima é

$$\begin{cases} b_\sigma = 1/a_\sigma, \\ a_- = 1/a_+, \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

portanto K_{12}^λ e K_{21}^λ ficam:

$$\bar{K}_{12}^\lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}; \bar{K}_{21}^\lambda = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad (\text{E.13})$$

Nesta mesma base, temos

$$\bar{G}_1^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ 1/g_1 & 0 \end{pmatrix}; \bar{G}_2^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ 1/g_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.14})$$

onde, $a \equiv g_1/g_2$. Parametrizando $g_i = e^{i\phi_i}$, $\bar{G}(\alpha)$ fica

$$\bar{G}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i((1-\alpha)\phi_1 + \alpha\phi_2)} \\ e^{-i((1-\alpha)\phi_1 + \alpha\phi_2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.15})$$

que pode ser usada para obtermos a teoria de circuitos [80].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb, *Mesoscopic Phenomena in Solids*. North-Holland, New York, 1991.
- [2] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*. Oxford University Press, 1997.
- [3] R. Landauer, “Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction,” *IBM J. Res. Develop.*, vol. 1, p. 233, 1957.
- [4] R. Landauer, “Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices,” *Phil. Mag.*, vol. 21, p. 863, 1970.
- [5] M. Büttiker, “Four-terminal phase coherent conductance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, p. 1761, 1986.
- [6] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, first ed., 1997.
- [7] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, “Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 848, 1988.
- [8] S. Oberholzer, E. V. Sukhorukov, C. Strunk, and C. Schönenberger, “Shot noise of series quantum point contacts intercalating chaotic cavities,” *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 233304, 2002.
- [9] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, J. E. F. Ahmed, H. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, “One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance,” *J. Phys. C*, vol. 21, p. L209, 1998.
- [10] M. L. Roukes, A. Scherer, S. J. Allen, H. G. Craighead-Jr, R. M. Ruthen, E. D. Beebe, and J. P. Harbison, “Quenching of the Hall effect in a one-dimensional wire,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, p. 3011, 1987.
- [11] L. Pescini, A. Tilke, R. H. Blick, H. Lorenz, J. P. Kotthaus, W. Eberhard, and D. Kern, “Suspending highly doped silicon-on-insulator wires for applications in nanomechanics,” *Nanotechnology*, vol. 10, p. 418, 1999.

- [12] B. Reulet, H. Bouchiat, and D. Mailly, “Magnetoeconductance, weak localization and electron-electron interactions in semi-ballistic quantum wires,” *Europhys. Lett.*, p. 305, 1995.
- [13] C. de Graaf, J. Caro, and S. Radelaar, “Weak localization in short one-dimensional channels contacted by two-dimensional probes,” *Phys. Rev. B*, vol. 46, p. 12814, 1992.
- [14] S. Washburn and R. A. Webb, “Aharonov-bohm effect in normal metal quantum coherence and transport,” *Adv. Phys.*, vol. 35, p. 375, 1986.
- [15] P. A. Mello, “Macroscopic approach to universal conductance fluctuations in disordered metals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 1089, 1988.
- [16] D. K. Ferry and S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [17] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge, 2007.
- [18] C. W. J. Beenakker, “Random-matrix theory of quantum transport,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 69, p. 731, 1997.
- [19] P. A. Lee, A. D. Stone, and H. Fukuyama, “Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field,” *Phys. Rev. B*, vol. 35, p. 1039, 1987.
- [20] S. M. Cronenwett, S. R. Patel, C. M. Marcus, K. Campman, and A. C. Gosard, “Mesoscopic fluctuations of elastic cotunneling in coulomb blockaded quantum dots,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 2312, 1997.
- [21] L. Kouwenhoven and C. Marcus, “Quantum dots,” *Physics World*, pp. 35–39, Junho 2008.
- [22] L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P. L. Mceuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt, and N. S. Wingreen, “Electron Transport in Quantum Dots,” in *Proceedings of the Advanced Study Institute on Mesoscopic Electron Transport*, Kluwer, 1997.
- [23] W. Schottky, “Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern,” *Ann. Phys. (Leipzig)*, vol. 57, p. 541, 1918.
- [24] S. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [25] M. Büttiker, “Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, p. 2901, 1990.
- [26] C. W. J. Beenakker, “Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors,” *Phys. Rev. B*, vol. 46, p. 1889, 1992.

- [27] Y. V. Nazarov, *Quantum Dynamics of Submicron Structures*, ch. Generalized Ohm's Law, p. 687. Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 1995.
- [28] S. Oberholzer, E. V. Sukhorukov, and C. Schönenberger, "Crossover between classical and quantum shot noise in chaotic cavities," *Nature*, vol. 415, p. 765, 2002.
- [29] O. Agam, I. Aleiner, and A. Larkin, "Shot noise in chaotic systems: "classical" to quantum crossover," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 3153, 2000.
- [30] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, *Mesoscopic Electron Transport*, ch. Shot noise in mesoscopic systems. Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 1997.
- [31] Y. M. Blanter and M. Büttiker, "Shot noise in mesoscopic conductors," *Phys. Rep.*, vol. 336, p. 1, 2000.
- [32] Y. M. Blanter, *CFN Summer School 2005 on Nano-Electronics*, ch. Recent Advances in Studies of Current Noise. Springer, 2005. Também disponível em condmat/0511478.
- [33] L. S. Levitov and G. B. Lesovik, "Charge distribution in quantum shot noise," *JETP Lett.*, vol. 58, p. 230, 1993.
- [34] L. S. Levitov, H. Lee, and G. B. Lesovik, "Electron counting statistic and coherent state of electric current," *J. Math. Phys.*, vol. 37, no. 10, p. 4845, 1996.
- [35] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simović, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, D. C. Ensslin, K. Driscoll, and A. C. Gossard, "Counting statistics of single electron transport in a quantum dot," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 076605, 2006.
- [36] D. A. Bagrets and Y. V. Nazarov, "Full counting statistics of charge transfer in Coulomb blockade systems," *Phys. Rev. B*, vol. 67, p. 085316, 2003.
- [37] R. Schleser, E. Ruh, K. Ensslin, D. C. Driscoll, and A. C. Gossard, "Time-resolved detection of individual electrons in a quantum dot," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, p. 2005, 2004.
- [38] S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, M. Reinwald, and W. Wegscheider, "Measurements of higher-order noise correlations in a quantum dot with a finite bandwidth detector," *Phys. Rev. B*, vol. 75, p. 075314, 2007.
- [39] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. Dover, New York, 2004.
- [40] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Microscopic theory of superconductivity," *Phys. Rev.*, vol. 106, p. 162, 1957.
- [41] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity," *Phys. Rev.*, vol. 108, p. 1175, 1957.

- [42] A. F. Andreev, “Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 46, p. 1823, 1964.
- [43] W. Belzig, C. Bruder, and G. Schön, “Local density of states in a dirty normal metal connected to a superconductor,” *Phys. Rev. B*, vol. 54, p. 9443, 1996.
- [44] S. Guéron, H. Pothier, N. O. Birge, D. Esteve, and M. H. Devoret, “Superconducting proximity effect probed on a mesoscopic length scale,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 3025, 1996.
- [45] K. M. Frahm, P. W. Brouwer, J. A. Melsen, and C. W. J. Beenakker, “Effect of the coupling to a superconductor on the level statistics of a metal grain in a magnetic field,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, p. 2981, 1996.
- [46] W. Belzig, F. K. Wilhelm, C. Bruder, G. Schön, and A. D. Zaikin, “Quasiclassical Green’s function approach to mesoscopic superconductivity,” *Superlattices Microstruct.*, vol. 25, p. 1251, 1999.
- [47] C. W. J. Beenakker, B. Rejai, and J. A. Melsen, “Scaling theory of conduction through a normal-superconductor microbridge,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, p. 2470, 1994.
- [48] C. W. J. Beenakker, “Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunction,” *Lectures at the Les Houches summer school*, vol. LXI, 1994. também disponível em cond-mat/9406083.
- [49] A. Kastalsky, A. W. Kleinsasser, L. H. Greene, F. P. Bhat, R. Milliken, and J. P. Harbison, “Observation of pair currents in superconductor-semiconductor contacts,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, p. 3026, 1991.
- [50] K. Hecker, H. Hegger, A. Altland, and K. Fiegle, “Conductance fluctuations in mesoscopic Normal-Metal/Superconductor samples,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 1547, 1997.
- [51] F. Giazotto, T. T. Heikkilä, A. Luukanen, A. M. Savin, and J. P. Pekola, “Opportunities for mesoscopies in thermometry and refrigeration: Physics and applications,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 78, pp. 217–274, 2006.
- [52] G. C. Duarte-Filho, A. F. Macedo-Junior, and A. M. S. Macêdo, “Circuit theory and full counting statistics of charge transfer through mesoscopic systems: a random-matrix approach,” *Phys. Rev. B*, vol. 76, p. 075342, 2007.
- [53] A. M. S. Macêdo and A. M. C. Souza, “Formation of Fabry-Perot resonances in double-barrier chaotic billiards,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 066218, 2005.
- [54] G. C. Duarte-Filho and A. M. S. Macêdo, “Full counting statistics of Andreev reflection: signatures of a quantum transition,” *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 035311, 2009.

- [55] G. Campagnano and Y. V. Nazarov, “ G_Q corrections in the circuit theory of quantum transport,” *Phys. Rev. B*, vol. 74, p. 125307, 2006.
- [56] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, “Diagrammatic method of integration over unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems,” *J. Math. Phys.*, vol. 37, p. 4904, 1996.
- [57] Y. Imry and R. Landauer, “Conductance viewed as transmission,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 71, p. S306, 1999.
- [58] A. D. Stone and A. Szafer, “What is measured when you measure a resistance?,” *IBM J. Res. Develop.*, vol. 32, p. 384, 1988.
- [59] C. W. J. Beenakker, “Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunctions,” *Phys. Rev. B*, vol. 46, p. 12841, 1992.
- [60] J. B. Ketterson and S. N. Song, *Superconductivity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [61] K. K. Likharev, “Superconducting weak links,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 51, p. 101, 1979.
- [62] C. J. Lambert and R. Raimondi, “Phase-coherent transport in hybrid superconducting nanostructures,” *J. Phys.: Condens Matter*, vol. 10, p. 901, 1998. Também disponível em cond-mat/9708056.
- [63] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, “Doubled shot noise in disordered normal-metal-superconductor junctions,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, p. 16070, 1994.
- [64] M. L. Mehta, *Random Matrices*. Academic Press, New York, 1991.
- [65] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, “Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 53, p. 385, 1981.
- [66] R. Balian, “Random matrices and information theory,” *Nuovo Cimento B*, vol. 57, p. 183, 1968.
- [67] A. F. Macedo-Junior, *Transporte em Nanoestruturas: Métodos de Movimento Browniano e Teoria de Circuitos*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Dezembro 2006.
- [68] K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [69] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [70] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. World Scientific Publishing, 2005.

- [71] J. A. Zuk, “Introduction to the supersymmetry method for the Gaussian random-matrix ensembles,” 1996. arXiv:cond-mat/9412206v3.
- [72] C. Mahaux and H. A. Weidenmüller, *Shell Model Approach in Nuclear Reactions*. North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [73] J. J. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, “Grassmann integration in stochastic quantum physics: The case of compound-nucleus scattering,” *Phys. Rep.*, vol. 129, p. 367, 1985.
- [74] H. U. Baranger and P. A. Mello, “Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random s -matrix approach,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, p. 142, 1994.
- [75] H. U. Baranger and P. A. Mello, “Short paths and information theory in quantum chaotic scattering: transport through quantum dots,” *Europhys. Lett.*, vol. 33, p. 465, 1996.
- [76] U. Eckern and A. Schmid, “Quasiclassical green’s function in the bcs pairing theory,” *J. Low Temp. Phys.*, vol. 45, p. 137, 1981.
- [77] A. V. Zaitsev *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 86, p. 1742, 1984. Sov. Phys. JETP 59, 1015 (1984).
- [78] Y. V. Nazarov, “Limits of universality in disordered conductors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, p. 134, 1994.
- [79] Y. V. Nazarov, “Novel circuit theory of Andreev reflection,” *Superlattices Microstruct.*, vol. 25, p. 1221, 1999.
- [80] Y. V. Nazarov, in *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*. American Scientific Publishers, 2006.
- [81] Y. V. Nazarov and Y. M. Blanter, *Quantum Transport*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [82] R. J. Glauber, “Photon correlations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, p. 84, 1963.
- [83] G. C. Duarte-Filho, “Estatística de contagem em sistemas híbridos normal-supercondutor,” Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Março 2006.
- [84] B. A. Muzykantskii and D. E. Khmelnitskii, “Quantum shot noise in a normal-metal-superconductor point contact,” *Phys. Rev. B*, vol. 50, no. 6, p. 3982, 1994.
- [85] M. Kindermann and Y. V. Nazarov, “Interaction effects on counting statistics and the transmission distribution,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 136802, 2003.
- [86] M. Kindermann and Y. V. Nazarov, *Quantum Noise in Mesoscopic Systems*, ch. Full Counting Statistics in Electric Circuits. Kluwer, Dordrecht, 2003.

- [87] W. Belzig, *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*, ch. Full Counting Statistics of Superconductor-Normal-Metal Heterostructures. Kluwer, Dordrecht, 2003. Também disponível em cond-mat/0210125.
- [88] A. M. S. Macêdo, “Transport theory of interacting mesoscopic systems: A memory-function approach to charge-counting statistics,” *Phys. Rev. B*, vol. 69, p. 155309, 2004.
- [89] E. Fick and G. Sauermann, *The Quantum Statistics of Dynamic Processes*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
- [90] J. Rau and B. Müller, “From reversible quantum microdynamics to irreversible quantum transport,” *Phys. Rep.*, vol. 272, pp. 1–59, 1996.
- [91] R. Balian, Y. Alhassid, and H. Reinhardt, “Dissipation in many-body systems: A geometric approach based on information theory,” *Phys. Rep.*, vol. 131, pp. 1–146, 1986.
- [92] I. L. Aleiner and K. B. Efetov, “Supersymmetric low-energy theory and renormalization group for a clean fermi gas with a repulsion in arbitrary dimensions,” *Phys. Rev. B*, vol. 74, p. 075102, 2006.
- [93] A. M. S. Macêdo, “Scaling theory of phase-coherent metallic conductors,” *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 033306, 2002.
- [94] A. L. R. Barbosa and A. M. S. Macêdo, “Diagrammatic analysis of unitary group for double-barrier ballistic cavities: Equivalence with circuit theory,” *Phys. Rev. B*, vol. 71, p. 235307, 2005.
- [95] M. Vanević and W. Belzig, “Quasiparticle transport in arrays of chaotic cavities,” *Europhys. Lett.*, vol. 75, p. 604, 2005.
- [96] S. Iida, H. A. Weidenmüller, and J. A. Zuk, “Statistical scattering theory, the supersymmetry method and universal conductance fluctuations,” *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 200, p. 219, 1990.
- [97] A. M. S. Macêdo, “Quantum dot to disordered wire crossover: A complete solution in all length scales for systems with unitary symmetry,” *Phys. Rev. B*, vol. 61, p. 4453, 2000.
- [98] Y. V. Nazarov and D. A. Bagrets, “Circuit theory for full counting statistics in multiterminal circuits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 196801, 2002.
- [99] M. Büttiker, “Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides,” *Phys. Rev. B*, vol. 46, p. 12485, 1992.
- [100] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, “Exact results for the level density and two-point correlation function of the transmission-matrix eigenvalues in a quasi-one-dimensional conductors,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, p. 4695, 1994.

- [101] B. Rejai, “Equivalence of the transmission-eigenvalue density in supersymmetric and scaling theories of disordered wires without time-reversal symmetry,” *Phys. Rev. B*, vol. 53, p. R13235, 1996.
- [102] A. M. S. Macêdo and A. M. C. Souza, “Universal Fano factor and anomalous $I - V$ characteristics in weakly interacting quantum dots,” *Phys. Rev. B*, vol. 72, p. 165340, 2005.
- [103] P. W. Brouwer and K. Frahm, “Quantum transport in disordered wires: Equivalence of the one-dimensional σ model and the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar equation,” *Phys. Rev. B*, vol. 53, p. 1490, 1996.
- [104] O. N. Dorokhov, “Transmission coefficient and the localization length of an electron in n bound disordered chains,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 36, p. 256, 1982.
- [105] P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, “Macroscopic approach to multichannel disordered conductors,” *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 181, p. 290, 1988.
- [106] M. R. Zirnbauer, “Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory,” *J. Math. Phys.*, vol. 37, p. 4986, 1996.
- [107] P. W. Brouwer, “Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads,” *Phys. Rev. B*, vol. 51, p. 16878, 1995.
- [108] C. H. Lewenkopf and H. A. Weidenmüller, “Stochastic versus semiclassical approach to quantum chaotic scattering,” *Ann. Phys.*, vol. 212, p. 53, 1991.
- [109] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations*. Oxford University Press, New York, 2004.
- [110] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo, “Brownian-motion ensembles of random matrix theory: A classification scheme and an integral transform method,” *Nucl. Phys. B*, vol. 752, p. 439, 2006.
- [111] P. A. Mello and A. D. Stone, “Maximum-entropy model for quantum-mechanical interference effects in metallic conductors,” *Phys. Rev. B*, vol. 44, p. 3559, 1991.
- [112] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, “Effects of spin-orbit interactions in disordered conductors: A random-matrix approach,” *Phys. Rev. B*, vol. 46, p. 14985, 1992.
- [113] O. M. Bulashenko, “Full counting statistics of a chaotic cavity with asymmetric leads,” *J. Stat. Mech.*, vol. P08013, 2005.
- [114] A. Lamacraft, B. D. Simons, and M. R. Zirnbauer, “Localization from σ -model geodesics,” *Phys. Rev. B*, vol. 70, p. 075412, 2005.
- [115] M. Vanević and W. Belzig, “Full counting statistic of Andreev scattering in an asymmetric chaotic cavity,” *Phys. Rev. B*, vol. 72, p. 134522, 2005. Também disponível em cond-mat/0412320.

- [116] P. Samuelson, W. Belzig, and Y. V. Nazarov, “Andreev reflection eigenvalue density in mesoscopic conductors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 196807, 2004.
- [117] J. A. Melsen and C. W. J. Beenakker, “Reflectionless tunneling through a double-barrier NS junction,” *Physica B*, vol. 203, pp. 219–225, 1994.
- [118] S. W. S. Apolinário, “Teoria quântica de circuitos para a transição balístico-difusivo,” Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Março 2004.
- [119] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, and A. M. S. Macêdo, “Quantum interference correction to the shot-noise power in nonideal chaotic cavities,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 235305, 2008.
- [120] A. L. R. Barbosa, A. F. Macedo-Junior, and A. M. S. Macêdo, “Statistics of charge and phase in a ballistic chaotic cavity,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 045306, 2008.
- [121] A. L. R. Barbosa, *Estatística de Contagem de Carga e Efeitos de Interferência em Sistemas Mesoscópicos*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Fevereiro 2009.
- [122] Y. Bomze, G. Gershon, D. Shovkun, L. S. Levitov, and M. Reznikov, “Measurement of counting statistics of electron transport in a tunnel junction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 176601, 2005.
- [123] G. Gershon, Y. Bomze, E. V. Sukhorukov, and M. Reznikov, “Detection of non-gaussian fluctuations in a quantum point contact,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 016803, 2008.
- [124] S. Oberholzer, E. V. Sukhorukov, C. Strunk, C. Schönenberger, T. Heinzel, and M. Holland, “Shot noise by quantum scattering in chaotic cavities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, p. 2114, 2001.
- [125] S. Song, A. K. M. Newaz, J. K. Son, and E. E. Mendez, “Drastic reduction of shot noise in semiconductor superlattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 126803, 2006.
- [126] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, “Semiclassical theory of shot-noise suppression,” *Phys. Rev. B*, vol. 51, p. 16867, 1995.
- [127] Y. M. Blanter and E. V. Sukhorukov, “Semiclassical theory of conductance and noise in open chaotic cavities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, p. 1280, 2000.
- [128] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, “Disordered electronic systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 57, p. 287, 1985.
- [129] D. S. Golubev and A. D. Zaikin, “Weak localization in arrays of metallic quantum dots: Combined scattering matrix formalism and nonlinear σ model,” *Phys. Rev. B*, vol. 74, p. 245329, 2006.

- [130] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin, and M. A. Skvortsov, "Keldysh action for disordered superconductors," *Phys. Rev. B*, vol. 61, p. 12361, 2000.
- [131] M. Novaes, "Statistics of quantum transport in chaotic cavities with broken time-reversal symmetry," *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 035337, 2008.
- [132] Y. V. Nazarov, "Mesoscopic fluctuations of spin currents," *New J. Phys.*, vol. 9, p. 352, 2007.
- [133] S. Rodríguez-Pérez. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Dezembro 2009.
- [134] F. A. G. Almeida. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Fevereiro 2010.
- [135] F. A. G. Almeida, S. Rodríguez-Pérez, and A. M. S. Macêdo, "Distribution of charge cumulants of a chaotic quantum dot with nonideal contacts," *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 125320, 2009.
- [136] N. Argaman, "Semiclassical analysis of the quantum interference corrections to the conductance of mesoscopic systems," *Phys. Rev. B*, vol. 53, p. 7035, 1996.
- [137] A. M. S. Macêdo, "Exact two-point length correlator of quasi-one-dimensional disordered metals," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 5098, 1997.
- [138] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, "Weak localization coexisting with a magnetic field in a normal-metal-superconductor microbridge," *Phys. Rev. B*, vol. 52, p. R3868, 1995.
- [139] S. Rodríguez-Pérez, A. L. R. Barbosa, and A. M. S. Macêdo, "Stub model for charge transport through a quantum dot connected to noncollinear ferromagnets," *Phys. Rev. B*, vol. 81, p. 085326, 2010.
- [140] B. Béri, "Generalization of the Poisson kernel to the superconducting random-matrix ensembles," *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 214506, 2009.
- [141] V. A. Gopar, J. A. Méndez-Bermúdez, and A. H. Aly, "Effects of Andreev reflection on the conductance of quantum chaotic dots," *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 245412, 2009.
- [142] O. Naaman and J. Aumentado, "Poisson transition rates from time-domain measurements with finite bandwidth," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 100201, 2006.
- [143] J. Börlin, W. Belzig, and C. Bruder, "Full counting statistics of a superconducting beam splitter," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, pp. 197001–1, 2002.
- [144] J. N. Kupferschmidt and P. W. Brouwer, "Temperature and magnetic-field dependence of the quantum corrections to the conductance of a network of quantum dots," *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 125313, 2008.

- [145] G.-L. Ingold and Y. V. Nazarov, *NATO ASI Series B294*, ch. Single Charge Tunneling. Plenum, New York, 1992.

