

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**REDES BAYESIANAS PARA A PARAMETRIZAÇÃO
DA CONFIABILIDADE EM SISTEMAS COMPLEXOS**

PAULO RENATO ALVES FIRMINO

Orientador: Prof. Enrique López Droguett, Ph. D.

RECIFE, Novembro / 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
-PROJETO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO-

REDES BAYESIANAS PARA A PARAMETRIZAÇÃO
DA CONFIABILIDADE EM SISTEMAS COMPLEXOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UFPE
PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
POR

PAULO RENATO ALVES FIRMINO

Orientador: Prof. Enrique López Droguett, Ph. D.

RECIFE, Novembro / 2004



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA
DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

PAULO RENATO ALVES FIRMINO

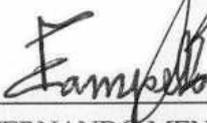
“Redes Bayesianas para a Parametrização da Confiabilidade em Sistemas Complexos”

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Pesquisa Operacional

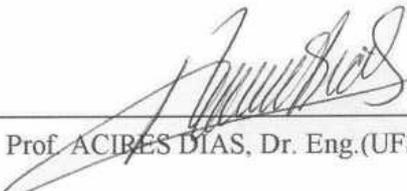
A comissão examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o candidato **APROVADO COM DISTINÇÃO**.

Recife, 10 de Novembro de 2004.

Prof. ENRIQUE ANDRÉS LÓPEZ DROGUETT, PhD (UFPE)



Prof. FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, PhD (UFPE)



Prof. ACIBES DIAS, Dr. Eng.(UFSC)

PÁGINA DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos aqueles que amo.

Ao meu país, pois espero estar sendo útil e retribuindo ao investimento em mim realizado; aos professores que me auxiliaram direta e indiretamente, como Padre Paulo, Tacio Maciel, Edson Costa de Barros, Maria Cristina Falcão, Sylvio José Pereira, Dayse Duarte e meu orientador (e amigo) Enrique López Droguett, pois foram eles os responsáveis por cada pequena e grande conquistas acadêmicas por mim obtidas. Homenageio, também, aos meus amigos de infância e adolescência, como Roberto, Celício, Roró, Pantuca, Thuca, Dimas e Wanderley, pois me permitem o desamarro dos problemas da “Vida Real” e o retorno à criança que deixei em Barbalha. Não poço deixar de dedicar o fim desta etapa aos meus amigos recentes de estrada: Wagner, Felipe, Regilda, Adson e aos demais companheiros diários do RISCTEC, pois confiam em mim e me fazem sentir capaz e útil. Por fim, dedico este fruto de tanto esforço à minha família: Aide (minha Mãe), Antônio (meu Pai), David e Renata (meus irmãos), Ana Isabel e Ana Isadora (minhas sobrinhas), minhas avós e avôs, tios e primos e à mais nova extensão da minha casa: Carlos e Lurdinha (meus compadres), Tavinho (meu afilhado), Elza (minha sogra), Sindelza (minha cunhada) e seu esposo Joca e especialmente à minha futura esposa Sinelza, a quem tenho uma dívida eterna.

AGRADECIMENTOS

Sem dúvidas há muito a agradecer e a muitos.

Este trabalho conclui uma etapa iniciada com muito sofrimento, suor e amor dos meus pais e grandes heróis, Antonio e Aide, que se deram de presente aos meus irmãos e a mim de maneira irrestrita. Agradeço a Deus por me considerar tão especial, a ponto de ser sorteado por estas duas pessoas, nas quais encontrei toda a força e sabedoria necessárias para ir em frente e continuar tentando em tantas situações adversas.

Agradeço a Deus, também, por todos os outros anjos que foram postos em meu caminho, desde a chegada à Casa do Estudante do Nordeste, cenário de tantas experiências difíceis porém enriquecedoras, à oportunidade dada pelo Professor Enrique López, para o qual apresentei-me apenas para me desculpar por não poder iniciar o meu mestrado no PPGEF devido à falta de bolsa, necessidade logo após suprida pela PETROBRAS, através de Carlos Magno, e pelo CNPq.

Neste percurso, não posso deixar de agradecer a Deus por um anjo em especial: Sinelza Vasconcelos dos Santos, que a pouco substituirá o “dos Santos” por Firmino. Um anjo que tanto “quantitativamente” quanto “qualitativamente” me levou a “índices” bem mais promissores, ou seja, me elevou como profissional e como pessoa.

Enfim, agradeço a Deus por ter me dado tudo o que era necessário para chegar até aqui: Amor, Saúde, Dignidade, Coragem, Sorte e Apoio.

RESUMO

A análise de confiabilidade é uma técnica de suporte a tomadas de decisão e controle que auxilia gestores na busca da garantia da execução satisfatória das funções dos itens a respeito de um dado sistema, considerando suas limitações, o seu desgaste e os fatores que influenciam seu desempenho, sejam estes itens equipamentos ou pessoas.

É comum a aplicação de técnicas, tais como as de árvores de falhas e de eventos, na representação probabilística do funcionamento dos equipamentos integrantes do sistema, assim como métodos direcionados à análise de confiabilidade quando pessoas fazem parte do processo. Estas duas linhas são comumente chamadas de análise de confiabilidade de equipamentos e análise de confiabilidade humana, respectivamente. Um dos principais problemas de tais conjuntos de técnicas é que estas requerem adaptações que, em muitos casos, tornam a modelagem precária ou distante da realidade do sistema. Neste sentido, pode-se citar: suposições de independência entre variáveis que na verdade são relacionadas; partição simplória de eventos como favoráveis ou desfavoráveis e dificuldades para a inclusão de novos conhecimentos ou para sua quantificação nos modelos construídos.

Neste trabalho, mostra-se que a modelagem, ou mesmo a abordagem, por redes Bayesianas de métodos direcionados às análises de confiabilidade de equipamentos e humana pode permitir uma maior flexibilidade e proporcionar uma maior fidelidade quanto aos mecanismos probabilísticos que regem as incertezas presentes nos sistemas, resultando em inferências mais precisas, além de uma maior compreensão diagramática do comportamento dinâmico do processo diante de eventos rotineiros ou anormais.

Palavras-chave: Incerteza, Inferência Bayesiana, Confiabilidade, Confiabilidade Humana, Redes Bayesianas, Árvores de Falhas, Árvores de Eventos.

ABSTRACT

Reliability analysis is a set of techniques with a wide range of applications to decision making and system performance assessments. It supports decision makers in assuring that systems (e.g., hardware or people) and their items will perform accordingly, given a set of operational and environmental restrictions, which usually lead to wear out conditions and related consequences to the items and systems reliability performance.

In the probabilistic representation of a system performance, not only techniques such as fault trees and event trees have been used, but also reliability methods for taking into account situations where the human element is involved and interacts with the system. These two reliability lines of study have often been referred to hardware reliability and human reliability, respectively. However, one can argue that one of the major concerns regarding such techniques is related to the underlying assumptions and simplifications that lead to models that are not appropriate representations of the reality being analyzed. Examples of this situation include: independency assumption among random variables otherwise known to be correlated, simplistic decomposition of events affecting the system performance, and difficulties in updating the state of knowledge of the reality based on the available models in light of new evidence.

In this work, it is shown that Bayesian Networks for modeling hardware and human reliability allow greater flexibility with an improved representation of the uncertainty underlying the systems. This approach usually leads to more precise reliability assessments as well as an improved understanding of the causal relationships in the system response to usual and rare events.

Keywords: Uncertainty, Bayesian Inference, Reliability, Human Reliability, Bayesian Networks, Fault Trees, Event Trees.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. JUSTIFICATIVA.....	2
1.2. OBJETIVOS.....	3
1.2.1. <i>Objetivo Geral</i>	3
1.2.2. <i>Objetivos Específicos</i>	3
2. CONCEITOS E FUNDAMENTOS PARA A ANÁLISE PROBABILÍSTICA DA CAUSALIDADE.....	5
2.1. MODELAGEM DA INCERTEZA INSPIRADA NO COMPORTAMENTO HUMANO.....	5
2.2. CAUSALIDADE	6
2.3. CÁLCULO DAS PROBABILIDADES	7
2.3.1. <i>Axiomas de Kolmogorov</i>	7
2.3.2. <i>Dependências Probabilísticas</i>	8
2.3.3. <i>Tipos de Inferência</i>	10
2.3.4. <i>Variáveis Aleatórias</i>	10
2.4. REDES BAYESIANAS	10
2.4.1. <i>Condição Markoviana</i>	12
2.4.2. <i>Independência Condicional Induzida</i>	14
2.4.3. <i>d-Separação</i>	17
2.4.4. <i>Coberturas de Markov</i>	18
2.4.5. <i>Atualização de Crenças</i>	18
2.4.6. <i>Aprendizado</i>	20
2.4.7. <i>Evidências Subjetivas</i>	22
2.4.8. <i>Algoritmos Computacionais para a Atualização de Crenças</i>	23
2.4.9. <i>Simulação Estocástica</i>	25
2.4.9.1. <i>Precisão da Simulação Estocástica</i>	28
2.4.9.2. <i>Processo de Burn-in</i>	29
2.4.10. <i>Redes Bayesianas com variáveis Contínuas</i>	29
2.5. REDES BAYESIANAS DINÂMICAS.....	30
2.6. ANÁLISE DE ÁRVORES DE FALHAS	30

2.6.1. Método de Aproximação do Evento Raro.....	32
2.7. ANÁLISE DE ÁRVORES DE EVENTOS	33
2.8. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE HUMANA	35
3. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	39
3.1. CONVERSÃO DE UMA ÁRVORE FALHAS A UMA REDE BAYESIANA	39
3.2. COTA SUPERIOR PARA A PROBABILIDADE DE FALHA	40
3.2.1. Método de remoção de redundâncias dos Diagramas Espirais.....	41
3.2.2. Métodos de aproximação com e sem hibridismo	46
3.2.3. Software E&P FTA.....	49
3.3. CONVERSÃO DE UMA ÁRVORE DE EVENTOS A UMA REDE BAYESIANA (DINÂMICA) ...	51
3.4. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE HUMANA	53
3.5. SOFTWARE E&P/CHESF BBN.....	58
3.6. BOA PRÁTICA DE PROGRAMAÇÃO EM REDES BAYESIANAS.....	64
4. CONCLUSÕES.....	69
4.1. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE ÁRVORES DE FALHAS.....	69
4.2. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE ÁRVORES DE EVENTOS.....	70
4.3. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE HUMANA.....	70
4.4. REDES BAYESIANAS	71
4.5. DESAFIOS FUTUROS.....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
ANEXOS	78
APÊNDICES	79

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 DEPENDÊNCIA ENTRE EVENTOS.	8
FIGURA 2.2 DAGs E REDES BAYESIANAS.	11
FIGURA 2.3 CASO DE VIOLAÇÃO DA CONDIÇÃO MARKOVIANA.....	14
FIGURA 2.4 REDE BAYESIANA REFERENTE AO PROBLEMA DE INFERÊNCIAS SOBRE O NÚMERO DE CITAÇÕES DE PESQUISADORES.	15
FIGURA 2.5 INCLUSÃO DE UMA CAUSA COMUM NA REDE BAYESIANA REFERENTE AO PROBLEMA DE INFERÊNCIAS SOBRE O NÚMERO DE CITAÇÕES DE PESQUISADORES.	16
FIGURA 2.6 INDEPENDÊNCIAS CONDICIONAIS POR D-SEPARAÇÃO.	17
FIGURA 2.7 REDE BAYESIANA RELATIVA AOS MODELOS HIERÁRQUICOS APRESENTADOS.	22
FIGURA 2.8 INCLUSÃO DE EVIDÊNCIAS SUBJETIVAS NA REDE BAYESIANA REFERENTE À QUALIDADE DO ENSINO DE DETERMINADO COLÉGIO.	23
FIGURA 2.9 MÉTODOS EXATOS PARA A ATUALIZAÇÃO DE CRENÇAS EM RMC.....	25
FIGURA 2.10 ÁRVORE DE FALHAS REFERENTE AO EXEMPLO 2.5.	32
FIGURA 2.11 ÁRVORE DE EVENTOS REFERENTE AO EXEMPLO 2.6.	33
FIGURA 2.12 CAUSALIDADE ENTRE OS FATORES DE DESEMPENHO HUMANO RELACIONADOS À OPERAÇÕES DE CONTROLE DE SISTEMAS.	36
FIGURA 3.1 CONVERSÃO DE UMA ÁRVORE DE FALHAS A UMA REDE BAYESIANA.....	40
FIGURA 3.2 OCORRÊNCIA DE REDUNDÂNCIAS, ONDE APENAS O EVENTO ORIGINAL PERTENCE À PRIMEIRA GERAÇÃO DO TOPO DA OCORRÊNCIA DA REDUNDÂNCIA.	42
FIGURA 3.3 OCORRÊNCIA DE REDUNDÂNCIAS, ONDE TANTO O EVENTO ORIGINAL QUANTO OS EVENTOS REDUNDANTES PERTENCEM À SEGUNDA GERAÇÃO DE RAMIFICAÇÕES DO TOPO DA OCORRÊNCIA DA REDUNDÂNCIA.	43
FIGURA 3.4 PRESENÇA DE REDUNDÂNCIAS DE GERAÇÃO III.....	45
FIGURA 3.5 INTERFACE DE CONSTRUÇÃO DE ÁRVORES DE FALHAS DO E&P FTA.	50
FIGURA 3.6 INTERFACE DE EXIBIÇÃO DE RESULTADOS DO E&P FTA.	50
FIGURA 3.7 REDE BAYESIANA REFERENTE À ÁRVORE DE EVENTOS DO EXEMPLO 2.6 DETALHADA NO EXEMPLO 2.7.....	52
FIGURA 3.8 DISPOSIÇÃO DOS ELETRICISTAS DURANTE A TROCA DE CADEIAS DE ISOLADORES DE TORRES DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA DA CHESF.....	56

FIGURA 3.9 REDE BAYESIANA DINÂMICA REFERENTE À TROCA DE CADEIAS DE ISOLADORES DE TORRES DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA DA CHESF.....	57
FIGURA 3.10 INTERFACE PRINCIPAL DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN: CARACTERÍSTICAS DAS VARIÁVEIS.	59
FIGURA 3.11 INTERFACE PRINCIPAL DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN: PROBABILIDADES CONDICIONAS.	60
FIGURA 3.12 INTERFACE PRINCIPAL DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN: EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS.	61
FIGURA 3.13 INTERFACE PRINCIPAL DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN: EVIDÊNCIAS SUBJETIVAS.	62
FIGURA 3.14 INTERFACE PRINCIPAL DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN: SIMULAÇÃO.	63
FIGURA 3.15 INTERFACE DE RESULTADOS DO SOFTWARE E&P/CHESF BBN.....	64
FIGURA 3.16 REDE BAYESIANA DISCRETA REFERENTE AO EXEMPLO 3.2.	65

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 ATUALIZAÇÃO DAS PROBABILIDADES DAS VARIÁVEIS QUE COMPÕEM A REDE BAYESIANA REFERENTE À QUALIDADE DO ENSINO DE DETERMINADO COLÉGIO.....	20
TABELA 2.2 ESTADOS DA CADEIA DE MARKOV REFERENTE À REDE BAYESIANA QUE TRATA DA QUALIDADE DO ENSINO DE DETERMINADO COLÉGIO.	27
TABELA 2.3 REGRAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA BOOLEANA SOBRE TRÊS EVENTOS QUAISQUER, X, Y, Z.....	30
TABELA 3.1 ERRO PERCENTUAL DOS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO APRESENTADOS DIANTE DA ÁRVORE TRATADA NO EXEMPLO 3.1.....	48
TABELA 3.2. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE SOBRE A PROBABILIDADE DE INSUCESSO DO ELETRICISTA DE TOPO NO CENÁRIO 0 (ET0), COMO DESCRITO NO SUBCAPÍTULO 3.4.	63
TABELA 3.3 DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES CONDICIONAIS DA VARIÁVEL X REFERENTE AO EXEMPLO 3.2.....	65

LISTA DE ACRÔNIMOS

DG- *Directed Graph* (Grafo Direcionado)

DAG- *Directed Acyclic Graph* (Grafo Acíclico Direcionado)

BBN- *Bayesian Belief Networks* (Rede de Crenças Bayesianas)

d- Direction-Dependent (Direção-Dependente)

ds- d-Separation (*d*-Separação)

RSC- Redes Bayesianas Singularmente Conectadas

RMC- Redes Bayesianas Multiplamente Conectadas

MCMC- *Markov Chain Monte Carlo* (Cadeias de Markov por Monte Carlo)

IDAC- *Identification, Decision And Action in Crew* (Identificação, Decisão e Ação em Grupo)

BEL- *Bayesian Belief* (Crença Bayesiana)

BDD- *Binary Decision Diagram* (Diagrama de Decisão Binária)

OBDD- *Ordered Binary Decision Diagram* (Diagrama de Decisão Binária Ordenado)

CREAM- *Cognitive Reliability and Error Analysis Method* (Método de Análise de Erros e Confiabilidade Cognitiva)

MEEC- Método Espiral de Eliminação de Cortes Não-Mínimos

E&P- Exploração e Produção

FTA- *Falt Tree Analysis* (Análise de Árvores de Falhas)

CHESF- Companhia Hidro Elétrica do São Francisco

MLT- *Multilateral Tools* (Ferramentas Multilaterais)

1. INTRODUÇÃO

O objetivo central de muitos estudos da física, ciências comportamentais, sociais e biológicas é a obtenção de relações de causa e efeito entre variáveis (Pearl, 2000). Com os avanços científicos, principalmente na área computacional, a modelagem gráfica e probabilística sofreram uma grande transformação, o que refletiu-se, também, na tentativa de quantificar causalidades estatisticamente. Atualmente, a utilização de redes Bayesianas como documento e estrutura causal permitem o manuseio de grandes conjuntos de variáveis relacionadas e a utilização de qualquer fonte de informação para auxiliar em tomadas de decisão, previsões ou diagnósticos.

O conhecimento sobre as causalidades envolvidas em um dado sistema é uma etapa primordial para o sucesso tanto da sua implantação e execução quanto do seu gerenciamento. Tal conhecimento permite corrigir projetos, otimizar o processo produtivo e realizar previsões ou diagnósticos mais precisos e em menos tempo.

Pode-se dizer que a engenharia de produção busca identificar, caracterizar, quantificar e avaliar as causalidades que envolvem riscos em um processo produtivo, através de uma análise de riscos. A análise de riscos é vastamente utilizada por agências privadas e governamentais para dar suporte regulatório e apoio a tomadas de decisão (Modarres et al. 1999); porém, sua aplicabilidade a sistemas de menor porte pode, também, levar a grandes benefícios. Uma das suas principais ferramentas é a análise de confiabilidade, avaliada em termos de equipamentos e do pessoal envolvidos no processo produtivo. A análise de confiabilidade é uma técnica de suporte a tomadas de decisão e controle que auxilia gestores na busca da garantia da execução satisfatória das funções do indivíduo, trabalhador ou equipamento, a respeito do sistema, considerando suas limitações, o seu desgaste e os fatores que influenciam o seu desempenho. Desta maneira, a análise de confiabilidade de um sistema pode assumir o papel de ferramenta de suporte técnico-científico para justificar tomadas de decisão, melhorias de produto, estratégias de manutenção, qualificação de pessoal, entre outros.

Mostra-se bastante difundida pela comunidade científica a análise de confiabilidade baseada em técnicas de diagramatização de eventos indesejáveis e de suas conseqüências, tais como árvores de falhas e de eventos. No primeiro caso, postula-se um evento indesejável e avaliam-se os seus progenitores, enquanto que no segundo estuda-se o comportamento do sistema após a ocorrência de tal evento. Vê-se, portanto, que a análise de confiabilidade através de árvores de falhas e de eventos é intimamente entrelaçada com as relações causais

entre os componentes do sistema.

Em uma outra perspectiva, a aplicação de redes Bayesianas leva a uma representação gráfica das causalidades inerentes aos componentes do problema e proporciona um raciocínio sensato-artificial ¹ baseado em conceitos da teoria dos grafos, probabilidade, computação e do comportamento humano.

Além das características em comum já citadas, a modelagem de um sistema, tanto por redes Bayesianas quanto por árvores de falhas ou de eventos, baseia-se em distribuições de probabilidades para a realização de inferências. Isto permite a abordagem das duas últimas através de um enfoque baseado na primeira sem a necessidade de qualquer adaptação além da metodológica, permitindo algumas vantagens apresentadas no decorrer do trabalho.

1.1. Justificativa

Na tentativa de desvendar e quantificar as relações causais entre os componentes dos seus sistemas, as empresas envolvem desde seus gerentes do mais alto escalão aos seus operadores, dando uma grande oportunidade para a revalidação de procedimentos, alocação de tarefas, qualificação de pessoal e qualidade dos equipamentos, entre outras observações. A verdade é que a incorporação da análise causal em um sistema permeia todas as suas etapas de produção, seja o produto final um bem ou um serviço.

Uma vez quantificadas, as relações causais permitem o acompanhamento dinâmico e detalhado do desempenho de todos os componentes do sistema à medida que novas evidências tornam-se disponíveis. Conseqüentemente, as análises diagnósticas e prognósticas são tão precisas quanto mais inserida na filosofia de organização de dados a empresa se encontre. Com esta intenção, é comum que se verifique a aplicação de métodos de árvores de falhas e de eventos na representação do funcionamento de um sistema, quantificando as causalidades através da análise de confiabilidade.

Assim como as análises relacionadas a equipamentos, existe também a análise de confiabilidade humana, que considera a atividade humana no contexto das decisões diante do sistema. Contudo, em ambos os casos são necessárias suposições distantes da realidade do sistema em questão, como considerar independência entre componentes ou subsistemas na

¹ Tal raciocínio é característico da inteligência artificial.

verdade relacionados. Além disto, não há grande flexibilidade para uma modelagem mais fiel do sistema, podendo-se citar: a categorização dicotômica de variáveis em árvores de falhas, que não permite a representação de eventos como a degradação, restringindo-se a falhas e não falhas; a dificuldade de inclusão da incerteza quanto às conseqüências da ocorrência de determinados eventos nestas e em árvores de eventos, já que em ambos tem-se relações determinísticas entre os seus integrantes por regras de álgebra booleana; e as deficiências para a utilização sistemática e fundamentada das mais distintas fontes de informação em se tratando da análise de confiabilidade humana.

O direcionamento de redes Bayesianas ao estudo das causalidades relacionadas à confiabilidade é apenas um caminho entre vários possíveis, referentes às mais distintas áreas de concentração da engenharia de produção. A modelagem, ou mesmo a abordagem, por redes Bayesianas das técnicas clássicas da análise de confiabilidade podem proporcionar uma maior flexibilidade e levar a uma maior fidelidade quanto aos mecanismos probabilísticos que regem as incertezas presentes nos sistemas, além de uma maior compreensão dos usuários de tais ferramentas acerca do comportamento dinâmico do sistema diante de eventos rotineiros ou anormais. Desta forma, pode-se facilitar e aprimorar as inferências sobre os parâmetros que regem processo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

Deseja-se com este trabalho apresentar redes Bayesianas na quantificação de métricas de confiabilidade, através da conversão de métodos classicamente conhecidos ao seu formato, e contribuir sobre o tema de redes Bayesianas propriamente dito.

1.2.2. Objetivos Específicos

A estratégia adotada para a realização do trabalho percorre os quatro temas aqui enfatizados: as análises de árvores de falhas e de eventos, a análise de confiabilidade humana e a disciplina de redes Bayesianas.

Sobre o hibridismo entre técnicas, deseja-se propor a análise de confiabilidade humana e de árvores de eventos por redes Bayesianas e enriquecer a abordagem de árvores de falhas por redes Bayesianas, através de maneiras otimizadas e mais precisas de se realizar inferências sobre medidas de confiabilidade.

Quanto ao tema de redes Bayesianas propriamente dito, discute-se sobre as deficiências das suas técnicas de aprendizado e apresenta-se um algoritmo de pesquisa pontual sobre probabilidades dispostas em tabelas de probabilidades condicionais, que proporciona um melhor desempenho computacional, se comparado com métodos tradicionais.

No próximo capítulo, tem-se um apanhado geral sobre todos os temas aqui abordados. Discutir-se-á a causalidade como sendo o alvo de modelagem das técnicas enfatizadas, a partir do cálculo das probabilidades. Apresentar-se-á os conceitos de redes Bayesianas e comentar-se-á sua deficiência quanto ao aprendizado em alguns casos específicos. Em seguida, serão introduzidas as características das análises de confiabilidade humana, de árvores de eventos e de árvores de falhas, de forma a permitir uma compreensão geral sobre todos os temas e sobre a importância do trabalho.

2. CONCEITOS E FUNDAMENTOS PARA A ANÁLISE PROBABILÍSTICA DA CAUSALIDADE

2.1. Modelagem da Incerteza Inspirada no Comportamento Humano

Argumentar sobre qualquer domínio normalmente requer simplificações. Quando se deseja enquadrar o conhecimento ou o comportamento de regras como “pássaros voam” ou “onde há fumaça há fogo”, sabe-se que há exceções e que não compensa, em muitos casos, enumerá-las por completo. Um outro problema são as condições segundo as quais as regras se aplicam, pois, em geral, são definidas ambigualmente ou com dificuldades de adequação ao problema tratado.

Judea Pearl (Pearl, 1988) buscou estudar e sumarizar uma linguagem de exceções de julgamentos na qual crenças pudessem ser representadas e processadas de acordo com a suposição bastante razoável de que quando não se tem o domínio pleno sobre o problema, o raciocínio sensato deve ser aplicado. Assim, ele resolveu aliar linguagem, objetivos e técnicas do artefato da inteligência artificial e da disciplina de inferência Bayesiana. O principal objetivo da inteligência artificial é prover um modelo matemático computacionalmente viável do comportamento inteligente ou, em outras palavras, do raciocínio sensato (Pearl, 1988). Já a inferência Bayesiana, busca estabelecer uma maneira para que graus de crença sejam alterados à luz de novas evidências, mesmo sendo elas parciais ou incertas.

A usabilidade da inferência Bayesiana se alternou entre períodos de aceitação e de rejeição durante muito tempo (Martz & Waller, 1982). A idéia de que a probabilidade requer uma maciça quantidade de dados, a enumeração de todos os possíveis resultados, e de que é mal estimada por pessoas, enfraqueceram a inferência Bayesiana em muitas ocasiões, segundo os mesmos autores. Diante disto, muitas das áreas de aplicação da Estatística se direcionaram à inferência empírica, fazendo uso da estatística clássica, baseada em dados propriamente ditos. Uma destas áreas foi a inteligência artificial, cujos pesquisadores tornaram-se contundentemente empíricos desde o final da década de 60 (Pearl, 1988). Judea Pearl (Pearl, 1988) absteve-se desta perspectiva empírica e tentou comunicar a idéia de que probabilidade não é, de fato, sobre números, mas sim sobre a estrutura do raciocínio. Ele tentou exercitar a idéia de que a inferência Bayesiana é única na sua habilidade de processar crenças, e o que torna o processamento computacional possível é que a informação necessária para a especificação do contexto de dependências pode ser representada por grafos e manipulada por propagações locais.

Pode-se destacar duas vertentes da inteligência artificial que refletem os acontecimentos acima citados: redes neurais e redes Bayesianas. Enquanto a primeira busca modelar sistemas através de componentes relacionados como neurônios, isto é, comparando-se fisicamente o sistema ao cérebro humano, a segunda trata do problema de maneira comportamental, ou seja, ela tenta explicar os motivos para a ocorrência de um evento ou prever suas conseqüências baseando-se no que é percebido. Redes neurais expressam uma relação empírico-cognitiva e redes Bayesianas um comportamento subjetivo-cognitivo. Em decorrência disto, mesmo que a literatura de redes neurais, como Braga et al. (2000), considere que seja requerido pouco domínio sobre as características que governam o processo, há a necessidade de dados iniciais. Contudo, sabe-se que em muitos casos dados propriamente ditos são raros ou inexistem, tornando a modelagem do sistema problemática, já que um processo subjetivo neste sentido não parece se adequar. Por outro lado, a modelagem de um dado processo por redes Bayesianas é feita dentro dos limites de conhecimento sobre o mesmo, esteja este conhecimento explícito por bancos de dados ou implícito por eventuais especialistas.

De qualquer forma, muitas das áreas nas quais redes neurais estão difundidas, tais como predição, controle, otimização, processamento de imagens, processamento de sinais e classificação, ilustradas por Braga et al. (2000) e Pham & Liu (1995), são acessíveis também aos conceitos de redes Bayesianas. Porém, a recíproca não é, a princípio, verdadeira, como na análise de confiabilidade de sistemas onde a maior fatia de informações encontra-se nos especialistas.

2.2. Causalidade

A causalidade é a condição segundo a qual uma causa produz um efeito. Pearl (2000) traduz como “a consciência do homem acerca do que causa o que a sua volta”. Assim, trata-se de causalidades mesmo que involuntariamente, quando se diagnostica o porquê ou prognostica a conseqüência da ocorrência de algum evento. Quando se tenta avaliar o impacto de um novo acessório de determinado produto no mercado, o rendimento de um time de futebol com a entrada de um novo atleta ou no que pode resultar a falta de cuidados com a saúde, o interesse recai sobre os efeitos que tais eventos podem causar. Porém, se o problema é explicar por que as vendas caíram, por que o time não vence ou mesmo diagnosticar uma doença, a perspectiva volta-se às causas das ocorrências destes eventos.

Sob esta ótica, o grande desafio foi encontrar uma maneira de traduzir matematicamente a causalidade existente entre os eventos que compõem um dado problema de maneira realista,

isto é, sem desprezar as incertezas inerentes a ele. Assim, o cálculo das probabilidades foi adotado.

2.3. Cálculo das Probabilidades

O cálculo das probabilidades permite a representação das dependências e independências entre eventos. Com isto, é possível a abordagem probabilística da causalidade, representada através de dependências probabilísticas.

A seguir, faz-se um esboço da aplicação do cálculo das probabilidades na quantificação das incertezas e das relações causais inerentes a um processo.

2.3.1. Axiomas de Kolmogorov

A estrutura matemática da probabilidade é estabelecida por quatro axiomas apresentados por Kolmogorov:

Axioma 2.1 *O uso de uma tripla (U, E, P) , onde U se refere ao conjunto cujos elementos são os possíveis resultados do experimento, E equivale ao conjunto cujos elementos são todas as possíveis combinações dos elementos de U , os eventos, e P é o conjunto de funções, chamadas de probabilidades, que relacionam a cada elemento de E um número real.*

Axioma 2.2 *A função de P relacionada ao elemento U de E tem o valor 1. Isto pode ser escrito como $P(U) = 1$.*

Axioma 2.3 *As funções de P relacionam apenas valores não negativos aos eventos de E , isto é, $P(A) \geq 0, \forall A \in E$.*

Axioma 2.4 *Se os elementos de um subconjunto qualquer de E são mutuamente exclusivos, a probabilidade da união de tais elementos equivale à soma das suas probabilidades individuais, ou seja, $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.*

A realização do cálculo de probabilidades requer, segundo o Axioma 2.1, que se definam três bases. A primeira, U , é o conhecimento sobre todos os possíveis resultados do experimento. Embora pareça algo complexo, U é moldável a qualquer nível de detalhamento sobre o problema. Pode-se classificá-lo, por exemplo, como a ocorrência ou não de algum evento; esta categorização abrange todos os possíveis resultados do experimento, mesmo que de forma bastante generalizada. As duas últimas bases para o cálculo de probabilidades, E e P , permitem a introdução de incerteza quanto aos elementos de U , assim como quão verossímil acredita-se ser cada combinação entre seus possíveis resultados. No exemplo citado, haveria apenas dois eventos excludentes a terem suas probabilidades quantificadas: a ocorrência ou não do evento em estudo. Note-se que não há sentido em relacionar probabilidades aos

elementos de U , pois estes não tratam de eventos mas sim de resultados; esta comunicação é realizada através de E .

O Axioma 2.2 diz que como E contém todas as combinações possíveis dos elementos de U , o próprio U está contido em E , o que significa que existe um evento em E que representa o fato de que certamente ocorrerá algo ao se realizar o experimento.

Como as funções de P são na verdade probabilidades, não há sentido em considerá-las passíveis da atribuição de valores negativos (Axioma 2.3).

O último axioma apresentado expressa a idéia de que caso não haja qualquer maneira de ocorrer dois ou mais eventos de interesse simultaneamente, a probabilidade de acontecer ao menos um deles equivale à soma de suas probabilidades.

Recomenda-se Campello de Souza (2002b) para uma abordagem mais aprofundada.

2.3.2. Dependências Probabilísticas

Dois outros conceitos do cálculo das probabilidades também muito importantes, inerentes um ao outro, são o de dependência entre eventos e o de ocorrência condicionada de eventos. Da Figura 2.1, vê-se que a probabilidade de o evento A ocorrer dada a ocorrência do evento B é a relação entre a probabilidade conjunta da ocorrência de A e B (área tracejada) e a probabilidade de ocorrência de B . Ou seja, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Desta maneira, diz-se que $A \cap B$ são estatisticamente independentes se dada a ocorrência de B , a probabilidade de ocorrência de A se mantém inalterada e pode ser expresso por $P(A|B) = P(A)$. Esta noção de independência define-se como segue:

Definição 2.1 *Se os elementos de um subconjunto qualquer de E são eventos estatisticamente independentes, a probabilidade da ocorrência conjunta destes iguala-se ao produto das suas probabilidades individuais. Ou, em notação probabilística, $P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$.*

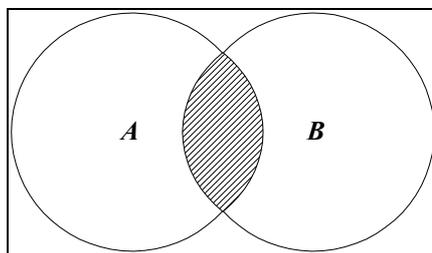


Figura 2.1 Dependência entre eventos.

A notação adotada para expressar a definição de independência entre eventos será *ind*, logo descreve-se a independência entre dois eventos A e B por $\{A\} \text{ ind } \{B\}$. A independência condicional é uma generalização do conceito de independência que pode ser intuitivamente

abordado por ao menos duas perspectivas: usando o raciocínio probabilístico conceitual e o de análise de dados. Conceitualmente, admite-se que a ocorrência de um subconjunto de eventos qualquer de E redistribui as probabilidades de ocorrência de eventos de um outro subconjunto, de forma a torná-los independentes entre si, mesmo que originalmente estes sejam dependentes. Já sob a ótica da análise de dados, considera-se que as informações trazidas pelo conhecimento dos resultados de um subconjunto de eventos podem tornar informações mutuamente irrelevantes, ao se tratar de eventos de um outro subconjunto. Segue a definição de independência estatística condicionada:

Definição 2.2 *Se os elementos de um subconjunto qualquer de E , diga-se C , são eventos estatisticamente independentes quando conhecidos os resultados de um outro subconjunto de E , diga-se O , a probabilidade da ocorrência conjunta dos eventos de C , dado que se conhece os resultados dos eventos de O , iguala-se ao produto das probabilidades condicionais dos eventos de C , dados os resultados dos eventos de O . Ou, em notação probabilística, $P(\bigcap_i A_i | O) = \prod_i P(A_i | O)$.*

Existe uma grande contribuição dos conceitos de probabilidades condicionais acerca da representação matemática da causalidade. Pode-se começar pela apresentação dos seguintes teoremas:

Teorema 2.1(Regra da Cadeia) *Seja C um subconjunto de eventos de E , onde $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. $P(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = P(C_1)P(C_2 | C_1) \dots P(C_n | C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$.*

Teorema 2.2(Regra de Bayes) *Seja C um subconjunto de eventos de E , onde $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Se $P(C_i) \neq 0$ e $P(C_j) \neq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$: $P(C_i | C_j) = P(C_i)P(C_j | C_i) / P(C_j)$.*

A regra da cadeia traduz que a probabilidade da ocorrência conjunta de um subconjunto de eventos pode ser desencadeada em um produto de probabilidades condicionais. Isto tem grande importância, pois torna acessível a avaliação geral acerca das ocorrências dos eventos, a partir do conhecimento de suas probabilidades condicionais. Já a regra de Bayes permite que dada a ocorrência de um subconjunto de eventos, se redistribuam as probabilidades dos demais. As distribuições de probabilidades componentes da regra de Bayes são comumente chamadas de *a priori* [$P(A)$ e $P(B)$], *a posteriori* [$P(A|B)$] e verossimilhança [$P(B|A)$].

2.3.3. Tipos de Inferência

Há duas maneiras de se inferir sobre a probabilidade dos eventos: empiricamente e subjetivamente. Empiricamente, isto é, de maneira freqüentista, a diferença relativa ¹ entre o valor estimado pela razão da quantidade de casos favoráveis sobre a quantidade de experimentos realizados e o valor da probabilidade aproxima-se de zero à medida que o número de realizações do experimento, sob mesmas condições, cresce. Enquanto que subjetivamente, além das informações provindas de experimentos, quantificam-se as experiências dos indivíduos. A inferência subjetiva atribui ao valor da probabilidade o grau de conhecimento ou crença sobre o evento, estando intimamente ligada à mente humana. Maiores detalhes podem ser encontrados em Martz & Waller (1982).

A probabilidade subjetiva é também chamada de probabilidade Bayesiana por fazer uso do teorema de Bayes, já que dada uma nova evidência, crenças são atualizadas.

2.3.4. Variáveis Aleatórias

Até aqui, as probabilidades têm sido dirigidas aos eventos. Porém, devido à necessidade do uso dos conceitos de funções de distribuição, a função variável aleatória mostra-se necessária. Uma variável aleatória associa a cada possível resultado do experimento um número real e permite a utilização da matemática de forma irrestrita, através, por exemplo, do uso das operações aritméticas, de igualdades, desigualdades e do cálculo diferencial e integral.

Definição 2.3 *Uma variável aleatória é uma função cujo argumento é um elemento de U e o resultado é um número real.*

2.4. Redes Bayesianas

A inferência Bayesiana é relativamente simples quando envolve apenas duas variáveis. Porém, quando a quantidade de variáveis se eleva, tal inferência torna-se complexa e sem valor prático (Neapolitan, 2003). É neste momento em que as redes Bayesianas se inserem ao problema da inferência Bayesiana, através da condição Markoviana atribuída às variáveis aleatórias envolvidas.

A seguir, faz-se uma introdução à teoria dos grafos, necessária para a definição da condição Markoviana, que por sua vez embasa a aplicabilidade de redes Bayesianas.

¹ A diferença relativa é também chamada de erro percentual.

Um grafo direcionado (DG) é um par (V, B) , onde V é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de nós ou vértices e B é um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V . Os elementos de B são denominados arestas ou arcos e se um par $(Y, X) \in B$, existe um arco de Y para X . Seja um conjunto de nós, $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, onde $k \geq 2$, tal que $(X_{i-1}, X_i) \in B$, para $k \geq i \geq 2$. O conjunto de arcos conectando os k nós é chamado de caminho de X_1 a X_k e é denotado por $[X_1, X_2, \dots, X_k]$. Um grafo acíclico direcionado (DAG) é um grafo direcionado que não possui ciclos, isto é, seus arcos são unidirecionais de forma que partindo-se de qualquer um dos elementos de V é impossível que se retorne ao mesmo. Considere-se aqui que caminho seja lido com o mesmo sentido de caminho unidirecional.

Dados um DAG, $G = (V, B)$, e um par $(Y, X) \in B$, Y é pai de X e X é filho de Y se houver um arco de Y para X . Mais genericamente, Y é ancestral de X e X é descendente de Y se houver um caminho de Y a X . Um nó é chamado de raiz caso não possua qualquer pai. Uma cadeia tem a mesma notação de um caminho, porém representa um fluxo adirecional, ou seja, despreza a direção dos arcos do DAG ¹.

A compreensão destes conceitos torna-se simples através de um exemplo. Na Figura 2.2(b), tem-se os seguintes casos: Z é pai e não descendente de X e X é filho e descendente de Z ; Z é ancestral e não descendente de W e W é descendente de Z ; Z é a única raiz da rede; há apenas um caminho entre Z e W , $[Z, X, W]$; identifica-se apenas uma cadeia entre Z e W , $[Z, X, W] = [W, X, Z]$ e, por fim, o grafo apresentado caracteriza-se como um DAG, pois partindo-se de Z chega-se a X ou a W , saindo-se de X finda-se em W e W não permite qualquer passagem, assim, não há caminhos que permitam o retorno ao nó inicial, seja este Z, X ou W .

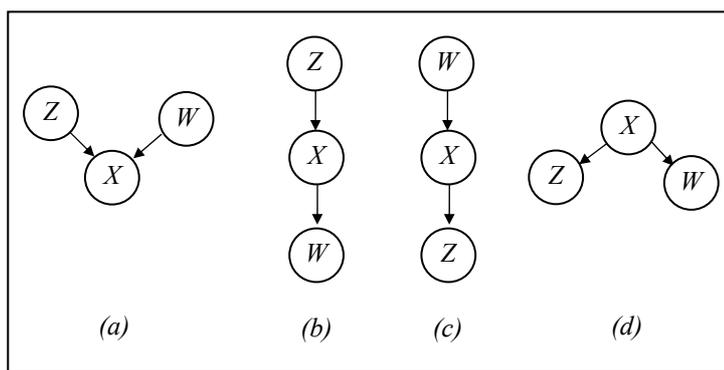


Figura 2.2 DAGs e redes Bayesianas.

¹ Estes conceitos foram extraídos de Neapolitan (2004) e divergem dos conceitos apresentados por outros autores (Korb & Nicholson, 2003; Pearl, 1988 e Edwards, 1949), que chamam caminhos e cadeias de caminhos unidirecionais e adirecionais, respectivamente, ou simplesmente caminhos.

Agora, mostra-se pertinente a definição de redes Bayesianas:

Definição 2.4 *Uma rede Bayesiana é um DAG, onde os nós representam variáveis aleatórias e as conexões direcionadas expressam as relações de causa e efeito entre tais variáveis. O poder das relações causais inerentes ao sistema modelado é descrito por probabilidades condicionais sobre cada variável da rede, dados específicos valores do seu conjunto de pais.*

2.4.1. Condição Markoviana

As redes Bayesianas, através da condição Markoviana, fazem uso da teoria dos grafos ao considerarem que os nós são as variáveis aleatórias envolvidas no problema e que os arcos direcionados expressam a relação causal entre as variáveis.

A principal característica de processos markovianos diz respeito à suposição de falta de memória. Quando se sabe sobre o atual estado do processo, informações anteriores são irrelevantes nas inferências sobre os seus estados futuros (ver tópico 2.4.9). Este é o conceito da condição Markoviana.

Definição 2.5 (Condição Markoviana) *Seja P a distribuição de probabilidades conjunta das variáveis aleatórias em algum conjunto V e seja um DAG $G = (V, B)$. É dito que o par (G, P) satisfaz à condição Markoviana se para cada V , onde $X \in V$, X é condicionalmente independente de todas as variáveis que compõem o conjunto dos seus não descendentes, dados os valores das variáveis que compõem seu conjunto de pais. Ou, em notação probabilística, $\{X\} \text{ ind } ND(X) | PA(X)$, onde $ND(X)$ refere-se ao conjunto de não descendentes de X e $PA(X)$ ao seu conjunto de pais.*

Se um nó é raiz, então a condição Markoviana o considera independente dos seus não descendentes. Observando a Figura 2.2, percebe-se que dado um específico valor de X , satisfeita a condição Markoviana, Z e W tornam-se independentes em (b), (c) e (d). A condição Markoviana é uma suposição bastante realista em muitos casos. A Figura 2.2(b) pode se referir ao seguinte caso:

Exemplo 2.1 *A qualificação dos professores de um determinado colégio (Z) pode levar a uma melhoria do rendimento dos seus alunos (X) que, conseqüentemente, pode causar um maior índice de aprovação no exame vestibular (W). A rede Bayesiana correspondente a este problema é tal qual o DAG da Figura 2.2(b).*

No exemplo acima, saber que o rendimento dos alunos mostra-se acima da média torna a informação sobre a qualificação dos seus professores irrelevante na inferência sobre uma aprovação no exame vestibular.

A condição Markoviana aliada à regra da cadeia (Teorema 2.1) facilita a obtenção da distribuição de probabilidades conjunta das variáveis da rede, igualando-a ao produto das distribuições de probabilidades condicionais das mesmas, em relação aos valores dos seus pais. Se na Figura 2.2 (a), deseja-se calcular a probabilidade conjunta das variáveis da rede, P , tem-se $P = P(Z=z \cap W=w \cap X=x) = P(Z=z)P(W=w|Z=z)P(X=x|W=w \cap Z=z)$. Como Z e W são nós raiz e conseqüentemente não descendentes um do outro, $P(W=w|Z=z) = P(W=w)$ e $P = P(Z=z)P(W=w)P(X=x|W=w \cap Z=z)$. Este é um teorema que se apresenta da seguinte forma:

Teorema 2.3 *Se a rede Bayesiana (G, P) satisfaz à condição Markoviana, então P equivale ao produto das distribuições condicionais de todos os nós, dados os valores dos seus pais, sempre que estas distribuições condicionais existirem.*

É possível demonstrar que quando as distribuições condicionais das variáveis da rede, em relação a seus pais, são discretas, a condição Markoviana é satisfeita (Neapolitan, 2004). Esta afirmação é conceituada, também, por um teorema.

Teorema 2.4 *Se um DAG G é tal que cada nó se refere a uma variável aleatória que possui uma distribuição de probabilidades condicional discreta, em relação aos valores dos seus pais, então o produto destas distribuições condicionais iguala-se à distribuição de probabilidades conjunta P e a rede Bayesiana (G, P) satisfaz à condição Markoviana.*

É importante que se atente que o Teorema 2.4 requer que todas as variáveis que compõem a rede possuam distribuições de probabilidades condicionais discretas. Porém, freqüentemente isto ocorre também nos casos contínuos. Para maiores detalhes recomenda-se Neapolitan (2004).

Trata-se agora dos casos nos quais a condição Markoviana pode ser violada. Começa-se com o fato de que como ela trata da independência entre variáveis não descendentes dados os valores dos seus respectivos pais, esta independência condicional deixa de existir se é conhecido o valor de uma variável que seja efeito comum de ao menos duas variáveis não descendentes entre si. Este fenômeno é bastante conhecido como *explaining away* ou ativação de dependências. Uma variável descendente é um efeito comum de um conjunto de variáveis não descendentes entre si quando existem caminhos entre as variáveis de tal conjunto e esta. Usando o mesmo raciocínio, classifica-se variáveis que são causas comuns. A Figura 2.2(a) exemplifica um destes casos. Dado X , tem-se que Z e W tornam-se dependentes, já que X é um efeito comum de Z e W , que são não descendentes entre si. Por outro lado, a Figura 2.2(d) ilustra um caso em que X é causa comum de Z e W . Intuitivamente, pode-se considerar o seguinte exemplo sobre *explaining away*:

Exemplo 2.2 Um sistema de alarme (X) pode ser ativado por duas razões em potencial, tentativa de assalto (Z) ou terremoto (W). Não há motivos para crer que a ocorrência de terremotos esteja relacionada com a de assaltos, logo estes dois eventos podem ser considerados independentes, como ilustra o DAG da Figura 2.2 (a). Se o alarme é disparado, os eventos ocorrência de terremoto e de assalto passam a ser relacionados, já que uma vez dada a ocorrência de um deles, reduz-se as crenças sobre a probabilidade de ocorrência do outro.

Um segundo caso de violação da condição Markoviana se dá quando a rede não se caracteriza como um DAG. É importante recordar que uma rede Bayesiana não pode ser cíclica.

Por fim, se existem duas variáveis, X e Y , tais que X é ancestral de Y e ambas possuem uma causa comum Z , nem sempre $\{X\} \text{ ind } \{Z\} | PA(X)$. Isto se dá porque mesmo que se saiba sobre os pais de X , Z pode influenciá-lo através dos seus descendentes. Considerando-se a rede apresentada pelo grafo da Figura 2.3, tem-se que $\{C\} \text{ ind } \{A\} | \{B\}$ é incorreto, pois informações sobre A alteram os graus de crença sobre D , que por sua vez alteram as probabilidades relacionadas a C .

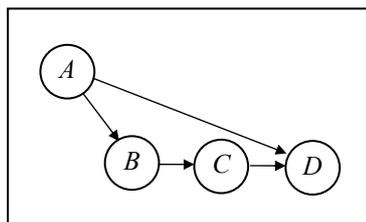


Figura 2.3 Caso de violação da condição Markoviana.

Uma generalização da condição Markoviana é a independência condicional induzida. Ela exprime que a condição Markoviana leva a independências condicionais mais abrangentes do que as que se referem a variáveis não descendentes, conhecidos os valores dos seus conjuntos de pais.

2.4.2. Independência Condicional Induzida

Definição 2.6 (Independência Condicional Induzida) Seja $G = (V, B)$ um DAG, onde V é um conjunto de variáveis aleatórias. É dito que, baseado na condição Markoviana, G induz à independência condicional entre duas variáveis quaisquer X e Y , dado Z , $\forall X, Y, Z \in V$, se $\{X\} \text{ ind } \{Y\} | \{Z\}$ ocorre para qualquer $P \in \mathcal{P}$, sendo \mathcal{P} o conjunto de todas as distribuições de probabilidade de P tais que a dupla (G, P) satisfaz à condição Markoviana.

Esta definição diz que se o par (G, P) satisfaz à condição Markoviana, então duas variáveis são condicionalmente independentes dado que se sabe sobre uma outra variável que se encontre entre as duas no fluxo de suas dependências.

O exemplo a seguir apresenta a independência condicional induzida de maneira mais intuitiva.

Exemplo 2.3 *Se a dupla (G, P) satisfaz à condição Markoviana, onde G é tal qual o DAG da Figura 2.4, então, pela condição Markoviana, $\{C\} \text{ ind } \{F, G\} | \{B\}$, pois $\{B\}$ é o conjunto de pais de C e $\{F, G\}$ é o seu conjunto de não descendentes. Da mesma maneira, $\{B\} \text{ ind } \{G\} | \{F\}$. Estas são as únicas independências condicionais explicitadas pela condição Markoviana; porém, elas podem induzir a outras independências condicionais. Atribuindo um significado para as variáveis e uma interpretação causal a G , usa-se o problema de se fazer inferência sobre o número de citações de pesquisadores (exemplo extraído de Neapolitan, 2004). A qualidade do programa de graduação (G) pode influenciar a qualidade do primeiro trabalho científico (F), que pode se refletir no número de publicações (B) que, por fim, pode causar um maior número de citações (C).*

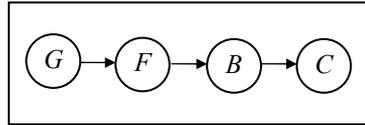


Figura 2.4 Rede Bayesiana referente ao problema de inferências sobre o número de citações de pesquisadores.

Seguindo no Exemplo 2.3, seria razoável supor que $\{C\} \text{ ind } \{G\} | \{F\}$? Isto é, dado que se conhece a qualidade do primeiro trabalho científico, seria a informação sobre a qualidade do programa de graduação irrelevante acerca do número de citações? Como é considerado que G afeta exclusivamente F , quando F é fixado, G passa a ser desprezível para C , assim, intuitivamente, aceita-se que $\{C\} \text{ ind } \{G\} | \{F\}$. A verdade é que o fluxo de dependências entre G e C se dá por uma única cadeia $[G, F, B, C]$. Este fluxo pode ser interrompido de duas maneiras. A primeira, que é também consequência da condição Markoviana, é quando se conhece B e a segunda quando fixa-se F . Este fato pode ser facilmente demonstrado para o caso em que as variáveis são discretas:

$$\begin{aligned} P(C = c | G = g \cap F = f) &= \sum_b P(C = c | B = b \cap G = g \cap F = f) P(B = b | G = g \cap F = f) = \\ &= \sum_b P(C = c | B = b) P(B = b | F = f) = P(C = c | F = f), \text{ pois} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(C = c | F = f) &= \sum_b P(B = b \cap C = c | F = f) = \\
 &= \sum_b P(C = c | B = b \cap F = f) P(B = b | F = f) = \sum_b P(C = c | B = b) P(B = b | F = f).
 \end{aligned}$$

A última igualdade desta última álgebra, assim como a penúltima igualdade da penúltima álgebra, se dão devido à condição Markoviana.

Agora, incluindo uma causa comum que permita a violação da condição Markoviana, analisa-se o comportamento das independências condicionais. A variável a ser inserida na rede apresentada no Exemplo 2.3 é a habilidade (A). Supõe-se que a habilidade pode influenciar a qualidade do programa de graduação e, também, o número de publicações dos pesquisadores. A nova rede é tal qual a da Figura 2.5.

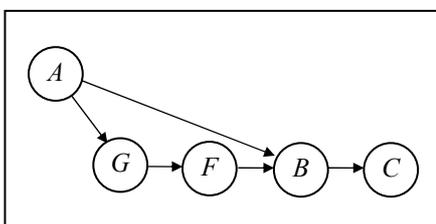


Figura 2.5 Inclusão de uma causa comum na rede Bayesiana referente ao problema de inferências sobre o número de citações de pesquisadores.

Neste novo contexto, não é correto considerar que $\{C\} \text{ ind } \{G\} | \{F\}$. Isto ocorre porque o conhecimento sobre a qualidade do programa de graduação (G) altera o grau de crença sobre a habilidade (A) que por sua vez altera o grau de crença sobre o número de publicações (B), o qual influencia diretamente o número de citações (C). Este fluxo de dependências pode ser descrito pela cadeia $T = [G, A, B, C]$ ¹. Contudo, dada uma evidência sobre a habilidade, a afirmação de que $\{C\} \text{ ind } \{G\} | \{F, A\}$ torna-se mais razoável, pois o fluxo de dependências de T pode ser interrompido por A e o de $[G, F, B, C]$ por F .

A condição Markoviana é violada quando analisa-se a independência condicional entre F e A dado G , pois informações sobre A alteram o grau de crença sobre B , que leva a uma atualização das probabilidades de F . A independência entre F e A se dará quando o fluxo de dependências $[A, B, F]$ for interrompido, ou seja, quando se souber também sobre B . Logo $\{F\} \text{ ind } \{A\} | \{G, B\}$.

¹ Vale ressaltar que uma cadeia representa uma seqüência adirecional de nós conectados.

2.4.3. d -Separação

Até aqui, sabe-se que a condição Markoviana pode levar a outras independências condicionais além da que por definição é capaz. Sabe-se, também, que todas as independências condicionais podem ser encontradas a partir das variáveis que quando fixadas interrompem o fluxo de dependências. Estas independências condicionais são propriedades dos DAGs conhecidas como d -separação, onde d se refere a *direction-dependent*. A presença da d -separação será denotada aqui por ds . No DAG da Figura 2.4 tem-se que $\{C\} ds \{G\}|\{F\}$.

A d -separação tem a característica de bloquear a comunicação entre dois subconjuntos disjuntos a partir de um terceiro subconjunto também disjunto destes. O termo bloquear é referente a interromper o fluxo de dependências.

Pode-se demonstrar (Neapolitan, 2004) que a condição Markoviana induz a que todas as d -separações sejam independências condicionais e a que qualquer independência condicional induzida pela condição Markoviana seja identificada pelas d -separações da rede Bayesiana.

Definição 2.7 Seja $G = (V, B)$ um DAG. Sejam A, B e C subconjuntos mutuamente disjuntos de V . Diz-se que $A ds B|C$ em G se para qualquer $X \in A$ e $Y \in B$, $X ds Y|C$.

Considerando o DAG da Figura 2.6, tem-se que $\{W, X\} ds \{S, T\}|\{R, Z\}$, porque $\{W\} ds \{S\}|\{R, Z\}$, $\{W\} ds \{T\}|\{R\}$, $\{X\} ds \{S\}|\{R, Z\}$ e $\{X\} ds \{T\}|\{R\}$. Assim, uma vez fixadas as variáveis R e Z , informações sobre W ou X tornam-se irrelevantes quando das inferências sobre S ou T e vice-versa.

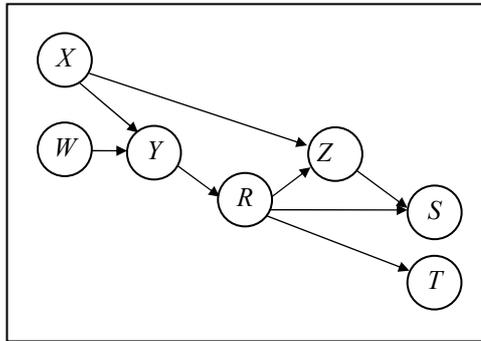


Figura 2.6 Independências condicionais por d -separação.

Pearl (1988) define a d -separação entre dois conjuntos disjuntos de variáveis, A e B , por um terceiro conjunto, C , mutuamente disjunto de A e B se existe um nó w tal que (i) w é um efeito comum e nem ele nem seus descendentes pertencem a C ou (ii) w não é um efeito comum e pertence a C . Voltando à Figura 2.6, segue-se que $\{X\} ds \{R\}|\{Y, Z\}$, $\{X\} ds \{T\}|\{Y, Z\}$, $\{W\} ds \{T\}|\{R\}$ e $\{W\} ds \{X\}|\{\emptyset\}$. É importante que se observe que $\{W\} ds \{T\}|\{Y\}$ é errado, já que a cadeia $[W, Y, X, Z, R, T]$ é ativada por Y que é efeito comum de X e W .

2.4.4. Coberturas de Markov

Uma rede Bayesiana pode ter um grande número de variáveis e a probabilidade de uma variável pode ser afetada pelo conhecimento (ou instanciação) de uma variável que esteja distante dela ¹. Porém, pode ser demonstrado (Neapolitan, 2004) que a instanciação de um conjunto de nós próximos interrompe a comunicação entre um nó e os demais. Tal conjunto é chamado de cobertura de Markov.

Definição 2.8 *Seja V um conjunto de variáveis aleatórias, P a sua distribuição de probabilidades conjunta e $X \in V$. Então a cobertura de Markov $M(X)$ é qualquer conjunto de variáveis tal que X é condicionalmente independente de todas as demais variáveis dados os valores das variáveis de $M(X)$. Isto é denotado por $\{X\} \text{ ind } V \cap [M(X) \cup \{X\}]^c | M(X)$.*

A cobertura de Markov permite que as inferências sobre os graus de crenças das variáveis que compõem a rede Bayesiana sejam realizadas localmente. Assim, independente do tamanho da rede, qualquer variável é passível de atualização. O teorema a seguir apresenta os componentes de uma cobertura Markoviana.

Teorema 2.5 *Se o par (G, P) satisfaz à condição Markoviana, então para cada X , $M(X)$ é composto por $PA(X)$, $C(X)$ e $PA[C(X)]$, onde $PA(X)$ é o conjunto de pais de X , $C(X)$ é o seu conjunto de filhos e $PA[C(X)]$ é composto pelos conjuntos dos pais de cada filho de X .*

Quando uma cobertura de Markov não possui subconjuntos que são, também, coberturas de Markov, esta define-se como uma fronteira de Markov. Pode-se provar (Neapolitan, 2004) que se P , a distribuição de probabilidades conjunta das variáveis de V , é estritamente positiva, então para cada $X \in V$ existe uma única cobertura Markoviana de X .

2.4.5. Atualização de Crenças ²

Adaptando o Exemplo 2.1 sob a condição de que o colégio sabe apenas que existe uma relação causal mensurável entre a qualificação dos professores (Z) e a melhoria no rendimento dos seus alunos (X), tem-se a ilustração $Z \rightarrow X$. Denotando $P(Z=z)$, $P(X=x)$ e $P(W=w)$ por $P(z)$, $P(x)$ e $P(w)$, respectivamente, considerando apenas duas categorias para ambas as variáveis, favorável (0) ou desfavorável (1) para a imagem externa do colégio e atribuindo as seguintes probabilidades para cada variável em análise: $P(z)=(0,7; 0,3)$, $P(x|Z=0)=(0,8; 0,2)$ e

¹ Distância aqui significa que as cadeias entre as duas variáveis possuem um grande número de nós.

² Ressalve-se que o significado da palavra crença é uma generalização da definição apresentada por Shafer (1976), que direciona crença à abordagem matemática de evidências.

$P(x|Z=1)=(0,3; 0,7)$, a diretoria da escola deseja calcular o seu grau de crença acerca da melhoria dos seus alunos (X). Este problema é resolvido através da regra de Bayes diretamente.

$$P(x|z) = P(x \cap z) / P(z) \Rightarrow P(x \cap z) = P(z)P(x|z) \Rightarrow P(x) = \sum_z P(z)P(x|z).$$

Assim, $P(X=0)=(0,7)(0,8)+(0,3)(0,3)=0,65$

Agora, envolvendo também a relação causal entre o rendimento dos alunos (X) e o índice de aprovação no exame vestibular (W), como o Exemplo 2.1 apresenta, tem-se $Z \rightarrow X \rightarrow W$. A categorização de W pode ser semelhante à de X e Y . Para a atualização dos graus de crença sobre W é preciso que se use as propriedades da d -separação do grafo, juntamente com os teoremas de probabilidades condicionais. Sendo $P(w|X=0)=(0,7; 0,3)$ e $P(w|X=1)=(0,2; 0,8)$ tem-se:

$$P(W=0) = \sum_x P(x)P(W=0|x) = (0,65)(0,7) + (0,35)(0,2) = 0,52$$

É importante que se atente que foi necessário que se conhecesse $P(X)$, a qual fez uso da *priori* de Z , para que se fizesse inferências sobre a *priori* de W .

Seguindo o Exemplo 2.1, o colégio deseja atualizar o seu grau de crença em relação às variáveis que compõem o problema a partir de uma evidência. Sabe-se que um dos seus novos professores foi classificado como bem qualificado ($Z=0$), isto é, deseja-se calcular $P(x|Z=0)$ e $P(w|Z=0)$, que será denotado por $BEL_1(x)$ e $BEL_1(w)$, respectivamente. BEL_i refere-se às crenças sobre a variável dada a i -ésima evidência. Até agora tem-se $BEL_0(z)$, $BEL_0(x)$ e $BEL_0(w)$, que são equivalentes a $P(z)$, $P(x)$ e $P(w)$, respectivamente.

As inferências sobre X são diretas, $BEL_1(x) = P(x|Z=0)$, logo $BEL_1(X=0) = 0,8$. Já a atualização sobre a variável W requer mais sofisticação. Apesar de não se conhecer $P(w|z)$ é possível obtê-la utilizando as propriedades da d -separação e dos conceitos do cálculo das probabilidades.

$$BEL_1(w) = P(w|Z=0) = \sum_x P(x|Z=0)P(w|x) = \sum_x BEL_1(x)P(w|x), \text{ assim}$$

$$\begin{aligned} BEL_1(W=0) &= P(W=0|Z=0) = BEL_1(X=0)P(W=0|X=0) + BEL_1(X=1)P(W=0|X=1) = \\ &= (0,8)(0,7) + (0,2)(0,2) = 0,6 \end{aligned}$$

Os graus de crença das demais variáveis da rede foram atualizados devido à evidência sobre Z e pode-se concluir que a presença de um professor classificado como bem qualificado eleva as chances de um melhor rendimento dos alunos e, conseqüentemente, de melhores resultados no exame vestibular.

A atualização a respeito das probabilidades das causas de um determinado efeito também pode ser realizada diante do conhecimento sobre tal efeito. A diretoria do colégio está diante

de uma nova evidência, um dos seus alunos foi aprovado em um exame vestibular ($W=0$).

Assim:

$$BEL_2(x) = P(x | W = 0) = P(x)P(W = 0 | x) / P(W = 0),$$

$$P(W = 0) = \sum_x P(x)P(W = 0 | x) = (0,65)(0,7) + (0,35)(0,2) = 0,525 \Rightarrow$$

$$BEL_2(X=0) = (0,65)(0,7)/(0,525) = 0,867.$$

$$BEL_2(z) = P(z | W = 0) = P(z)P(W = 0 | z) / P(W = 0),$$

$$P(W=0|z) = \sum_x P(x | z)P(W = 0 | x)$$

$$P(W=0) = \sum_z P(Z)P(W = 0 | Z)$$

$$BEL_2(z) = \{(0,7)[(0,8)(0,7) + (0,2)(0,2)], (0,3)[(0,3)(0,7) + (0,7)(0,2)]\} / (0,52) =$$

$$= (0,8; 0,2).$$

Vê-se que é possível fazer a atualização de variáveis causais ou resultantes. Mas, e quanto à atualização simultânea das causas e efeitos de um específico nó instanciado? Supondo agora que se sabe sobre X ($X = 0$).

$$BEL_3(W=0) = P(W=0|X=0) = 0,7$$

$$BEL_3(z) = P(z|X=0) = P(z)P(X=0|z)/P(X=0) = [(0,7)(0,8), (0,3)(0,3)]/P(X=0) =$$

$$= (0,56; 0,09)/(0,65) = (0,862; 0,138).$$

Na Tabela 2.1, tem-se o comportamento das crenças à medida que as evidências são incluídas. Como todas as evidências foram positivas à imagem externa do colégio, os graus de crença das variáveis envolvidas sempre elevaram-se sensivelmente.

Tabela 2.1 Atualização das probabilidades das variáveis que compõem a rede Bayesiana referente à qualidade do ensino de determinado colégio.

Evidência	$P(Z=0)$	$P(X=0)$	$P(W=0)$
<i>nenhuma</i>	0,7	0,65	0,52
$Z=0$	1	0,8	0,6
$W=0$	0,8	0,867	1
$X=0$	0,862	1	0,7

2.4.6. Aprendizado

Analisando as atualizações realizadas no tópico anterior, pode-se perceber que não há um acúmulo de evidências sobre as distribuições a *posteriori* das variáveis, isto é, não há um aprendizado da rede diante da chegada de uma seqüência de evidências. O aprendizado de redes Bayesianas é semelhante ao realizado por modelos hierárquicos (Bernardo & Smith,1995), os quais tornaram-se conhecidos como métodos de Bayes empírico por

calibrarem as crenças sobre parâmetros diante de dados gerados pelo mecanismo probabilístico baseado em tais parâmetros. Em geral, modelos hierárquicos têm a seguinte forma:

$$P(\tilde{x} | \tilde{\theta}) = P(x_1, x_2, \dots, x_k | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^k P(x_i | \theta_i),$$

$$P(\tilde{\theta} | \phi) = P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | \phi) = \prod_{i=1}^k P(\theta_i | \phi) \text{ e } P(\phi),$$

onde as variáveis observáveis são X_1, X_2, \dots, X_k , e os parâmetros θ_i 's podem resumir fenômenos probabilísticos de populações locais geradores dos x_i 's, enquanto que o ϕ pode exprimir algum parâmetro populacional geral que influencia os θ_i 's. Pode-se citar como um exemplo de tais relações o caso a seguir:

Exemplo 2.4 *A qualidade de fabricação de uma batelada de sensores óticos, para temperatura e pressão em sistemas de perfuração de petróleo (ϕ), rege suas condições de funcionamento nos locais onde os sensores serão utilizados (θ_i 's). Sabe-se que tais locais têm suas características particulares de operação e que estas influenciam o tempo de vida dos sensores (X_i 's) distintamente. Supondo-se que o conhecimento sobre as condições de funcionamento tornam o tempo de vida de um sensor independente da qualidade de sua fabricação, tem-se um problema a ser modelado de maneira hierárquica.*

Quando observa-se um conjunto de evidências x_1, x_2, \dots, x_k , tanto o conjunto de θ_i 's quanto ϕ têm seus graus de crença atualizados e representados através das suas distribuições a *posteriori*, calculadas pela regra de Bayes (Teorema 2.2). As relações de causa e efeito entre os componentes dos modelos hierárquicos podem ser representadas graficamente através da rede Bayesiana exibida na figura abaixo, pois, pela condição Markoviana, os X_i 's são independentes entre si dados os valores dos θ_i 's que, por sua vez, independem uns dos outros ao fixar-se ϕ .

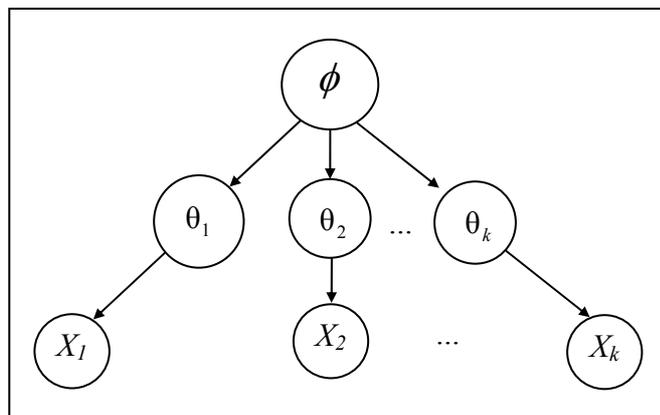


Figura 2.7 Rede Bayesiana relativa aos modelos hierárquicos apresentados.

Durante as atualizações, a regra de Bayes considera como *priori* para os cálculos de crenças diante de uma nova evidência, a *posteriori* obtida pelas crenças relativas à evidência imediatamente anterior.

Neste trabalho, expõe-se um problema em aberto para o aprendizado de redes Bayesianas. Ele se dá pelo fato de estas permitirem a evidenciação de todos os seus nós e não apenas daqueles conseqüentes finais. Para as variáveis causais, o teorema de Bayes é aplicado, porém, para as conseqüentes é necessária uma outra maneira para se realizar as inferências.

Para ilustrar este problema, considera-se o Exemplo 2.1. Caso deseje-se realizar um aprendizado da rede diante de duas evidências, $X=0$ e $X=0$, representado-o por PL_i para a i -ésima evidência, tem-se que:

$$PL_1(z) = P(z|X=0) = BEL_3(z) = (0,862; 0,138) \text{ e}$$

$$PL_1(w) = P(w|X=0) = BEL_3(w) = (0,7; 0,3), \text{ enquanto que}$$

$$PL_2(z) = P(z|X=0) = P(z)P(X=0|z)/P(X=0) = PL_0(z)P(X=0|z)/P(X=0) = \\ = [(0,862)(0,8); (0,138)(0,3)]/P(X=0) = (0,943; 0,057) \text{ e}$$

$$PL_2(w) = P(w|X=0) = BEL_3(w) = (0,7; 0,3).$$

Vê-se, nos cálculos acima, que a variável W não absorveu a 2ª evidência; nela o teorema de Bayes não é adequado para o processo de aprendizado. É simples verificar que caso haja infinitas evidências “ $X=0$ ”, apenas a primeira altera os graus de crença sobre a variável conseqüente W , enquanto que Z é atualizada a cada evidência.

2.4.7. Evidências Subjetivas

No tópico 2.4.5, que trata do Exemplo 2.1, foram realizadas três atualizações devido à chegada de três evidências. As relatadas evidências são genuinamente observadas, isto é, empíricas. Isto quer dizer que, de fato, observou-se $Z=0$, $X=0$ e $W=0$. Estas evidências são chamadas de específicas na área de inteligência artificial, para a qual redes Bayesianas foram inicialmente aplicadas. Será utilizado aqui o termo evidência empírica.

Um outro tipo de evidência pode ser utilizado: a evidência aqui chamada de subjetiva é conhecida como virtual em inteligência artificial. A evidência subjetiva é expressa em termos de razões de verossimilhança. Ela traduz a incerteza da ocorrência dos eventos através de uma taxa. Usando o Exemplo 2.1, pode-se imaginar que não se tem certeza sobre a qualificação de um novo professor (Z), porém acredita-se que dada a sua qualificação, tal professor tem uma razão de 4 contra 1 a favor de bons resultados diante de um teste, $T = 0$. Denota-se esta

informação por $P(T=0|Z) = \beta(4, 1)$, considerando β como um fator de normalização. Isto implica que $P(T=0|Z=0) = 0,8$ e $P(T=0|Z=1) = 0,2$. A Figura 2.8 ilustra como T é incluída no problema.

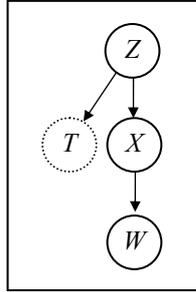


Figura 2.8 Inclusão de evidências subjetivas na rede Bayesiana referente à qualidade do ensino de determinado colégio.

Assumindo que o teste foi realizado e que os resultados foram favoráveis à boa qualificação do novo professor ($T=0$), a primeira atualização de crenças é dada da seguinte forma:

$$BEL_0(z) = P(z | T = 0) = \alpha P(z) P(T = 0 | z) = \alpha \beta [(0,7)4; (0,3)1] = (0,9; 0,1)$$

$$BEL_0(x) = P(x | T = 0) = \sum_z P(z | T = 0) P(x | z) = \sum_z BEL_0(z) P(x | z) = [(0,9)(0,8)+(0,1)(0,3); (0,9)(0,2)+(0,1)(0,7)] = (0,75; 0,25)$$

$$BEL_0(w) = P(w | T = 0) = \sum_x P(x | T = 0) P(w | x) = \sum_x BEL_0(x) P(w | x) = [(0,75)(0,7)+(0,25)(0,2); (0,75)(0,3)+(0,25)(0,8)] = (0,58; 0,42)$$

Nota-se que os cálculos para a atualização de crenças são semelhantes, sejam as evidências empíricas ou subjetivas. A maior diferença entre as duas é que uma evidência empírica tem um “peso maior”, isto é, uma evidência subjetiva aproxima-se de uma empírica quando as taxas de verossimilhança favorecem contundentemente a um específico resultado da variável aleatória em questão, como, por exemplo, se $P(T=0|z) = \beta(100000; 1)$.

2.4.8. Algoritmos Computacionais para a Atualização de Crenças

Observando a maneira com que as crenças das variáveis do exemplo utilizado nos tópicos 2.4.5 e 2.4.7 são atualizadas, pode-se perceber que estas atualizações são passíveis de programação computacional. Devido às independências condicionais conseqüentes da d -separação, Pearl (1988) propõe um algoritmo para que as crenças sobre as demais variáveis da rede sejam atualizadas, dada a presença de um conjunto de evidências. Este algoritmo permite a atualização em redes Bayesianas singularmente conectadas (RSC). Uma RSC possui a característica de existir no máximo uma cadeia entre dois nós quaisquer da rede. Quando uma

rede Bayesiana não possui esta característica ela é chamada rede multiplamente conectada (RMC).

A principal consequência de se inferir sobre RMCs é que há a presença de laços na atualização das crenças. Pearl (1988) comenta que se a presença dos laços é ignorada, as atualizações podem ser realizadas indefinidamente nestes e o processo não converge para um equilíbrio estável. Ele acrescenta que como o equilíbrio assintótico não é coerente, as probabilidades *a posteriori* (crenças atualizadas) de todas as variáveis da rede não são representadas.

Sob esta ótica, Pearl (1988) sugere três métodos coerentes para a manipulação de laços: o agrupamento de variáveis, o condicionamento de variáveis e a simulação estocástica. Os dois primeiros permitem uma inferência exata sobre as crenças, enquanto que o último realiza uma inferência aproximada. Cooper (1990) prova que a inferência probabilística em RMCs é *NP-hard*. Isto significa que um algoritmo genérico de inferência probabilística eficiente, precisa e acurada mostra-se improvável. As dificuldades dos métodos exatos são proporcionais à estrutura da rede, enquanto que as que se referem aos métodos aproximados são ligadas aos valores numéricos das probabilidades condicionais.

A Figura 2.9 (a) mostra uma RMC, já que existem no mínimo duas cadeias entre os nós A e D , tais como $[A, B, D]$ e $[A, C, D]$. O método dos agrupamentos cria uma variável Z referente à conjunção das variáveis B e C , tal qual a Figura 2.9 (b). Desta forma, quando se deseja avaliar $P(Z|A)$ está-se na verdade trabalhando com $P(B \cap C|A)$ que devido à condição Markoviana iguala-se a $P(B|A) P(C|A)$. Já quando o interesse recai sobre $P(E|Z)$ tem-se $P(E|B \cap C)$ que resulta em $P(E|C)$.

O método dos condicionamentos elimina os laços através da fixação de variáveis localizadas estrategicamente na rede. Para cada valor da variável A , a rede da Figura 2.9 (a) torna-se singularmente conectada. Supondo que a variável A possui duas categorias, diga-se 0 e 1, as Figuras 4.7(c) e 4.7(d) exibem as suas respectivas RSCs. Ao final, as atualizações das crenças se dão pela média ponderada dos cenários construídos. Se, por exemplo, deseja-se calcular $P(E)$, tem-se que

$$P(E) = \sum_{a=0}^1 P(A=a \cap E) = \sum_{a=0}^1 P(A=a)P(E|A=a), \text{ onde}$$

$$P(E|A=a) = \sum_c P(C=c \cap E|A=a) = \sum_c P(C=c|A=a)P(E|C=c).$$

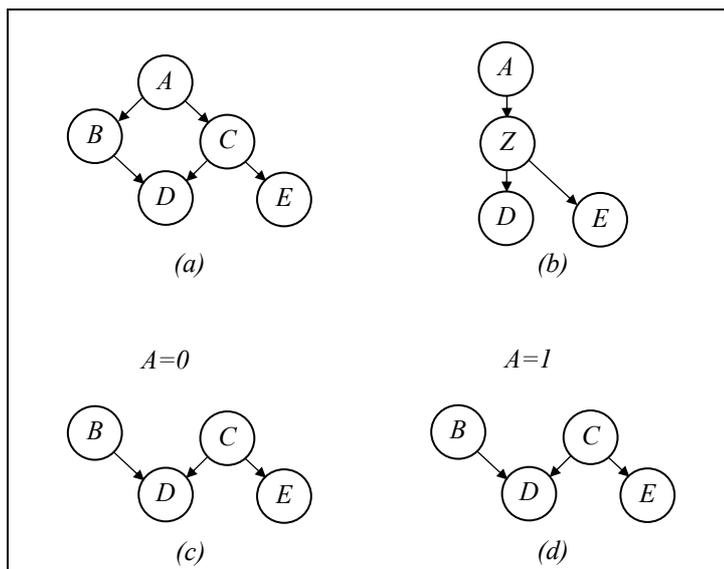


Figura 2.9 Métodos exatos para a atualização de crenças em RMC.

Pode-se citar alguns autores que estudam os algoritmos introduzidos por Pearl (1988) para a realização de inferências exatas. Suermondt & Cooper (1991) estudam o método dos condicionamentos. Díez (1996) propõe uma otimização de tal método, chamado condicionamento local. Já o método dos agrupamentos é estendido por Ladeira et al. (1999).

Na prática, a velocidade das inferências exatas depende de fatores como a estrutura da rede, em termos de quão conectados estão os nós, quantos são os laços e onde se localizam os nós evidenciados (Korb & Nicholson, 2003).

2.4.9. Simulação Estocástica

Como os métodos exatos fazem inferências insatisfatórias para redes complexas, aborda-se aqui os métodos aproximados, apresentados após uma introdução a processos estocásticos.

Definição 2.9 *Um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias, onde T é o conjunto de índices, ou parâmetros, e X_t é o estado do processo no instante t .*

Freqüentemente, T refere-se ao tempo e o estado do processo à sua condição de funcionamento em relação a algum parâmetro. Assim, X_t pode representar o valor do dólar em relação ao real no instante t do dia ou a quantidade de pacientes atendidos em uma unidade hospitalar em um específico horário da tarde. Cryer (1996) e Campello de Souza (2002b) apresentam maiores detalhes sobre este tema.

Uma cadeia de Markov é um processo estocástico que não possui memória, isto é, a probabilidade de o processo se encontrar em determinado estado futuramente depende

unicamente de onde ele se encontra atualmente, desprezando o seu histórico. Uma cadeia de Markov é graficamente representada por um DG, onde os arcos representam a possibilidade de transição entre os estados, ou nós, quantificada através de taxas ou probabilidades. Conceitualmente tem-se que:

Definição 2.10 *Uma cadeia de Markov é um processo estocástico onde*

$$P(X_{t+\Delta t}=j | X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_t=i) = P(X_{t+\Delta t}=j | X_t=i) = P_{ij}(\Delta t).$$

Uma cadeia de Markov é dita irredutível se existe ao menos um caminho provável entre todos os pares de nós e chamada de aperiódica se a probabilidade de se manter em qualquer dos seus estados em uma transição imediatamente seguinte é não nula. Estas duas características estão seguramente presentes em cadeias de Markov referentes a redes Bayesianas nas quais não há probabilidades condicionais nulas.

Quando uma cadeia de Markov é irredutível e aperiódica pode-se aproximar P_j , a probabilidade de o sistema se encontrar no estado j ¹, pela probabilidade de transição $P_{ij}(t)$, quando t cresce (Ross, 2000 e 2002).

Simulação estocástica é um método de cálculo de probabilidades por contagem da frequência em que os eventos ocorrem em uma série de iterações executadas (Pearl, 1988). Uma rede Bayesiana pode ser usada para gerar amostras aleatórias de suas configurações hipotéticas prováveis. Ao final das simulações, infere-se sobre a distribuição (ou sobre a função densidade) de probabilidades a partir das médias amostrais das crenças geradas sobre cada variável da rede não evidenciada empiricamente.

Segundo York (1992) não é requerido que a distribuição do processo seja estritamente positiva, como implica-se de Hrycej (1990); o que é necessário é que a cadeia de Markov a ser percorrida durante as simulações seja irredutível.

Ordenando-se as variáveis que compõem a rede Bayesiana, atribui-se seus valores iniciais e para cada variável avalia-se a probabilidade de o processo permanecer em seu atual estado ou mudar para um outro, considerando a probabilidade de mudança da variável em questão, condicionada aos atuais valores das demais variáveis. Ao término da avaliação da última variável, completa-se uma iteração e um indivíduo hipotético é gerado. Como uma variável torna-se independente das demais, dados os valores das variáveis que compõem a sua

¹ P_j é também conhecida como probabilidade estacionária do estado j .

cobertura de Markov (Definição 2.8), as inferências passam a ser realizadas localmente. Este método de simulação estocástica é uma extensão do método MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), o *Gibbs Sampler* (Geman & Geman, 1984), abordado por autores como Hrycej (1990), York (1992) e Neal (2003).

Retornando ao Exemplo 2.1, que trata da qualidade do ensino de determinado colégio, onde $Z \rightarrow X \rightarrow W$ e

$$P(Z=0)=0,7,$$

$$P(X=0|Z=0)=0,8, P(X=0|Z=1)=0,3,$$

$$P(W=0|X=0)=0,7, (W=0|X=1)=0,2,$$

tem-se 8 possíveis estados para o sistema a ser simulado (Tabela 2.2). O estado 0, por exemplo, condiz a uma situação onde a qualificação de um professor (Z), o rendimento de um aluno (X) e a situação em um exame vestibular (W) mostram-se favoráveis a uma boa imagem externa do colégio.

Tabela 2.2 Estados da cadeia de Markov referente à rede Bayesiana que trata da qualidade do ensino de determinado colégio.

Z	X	W	Estado da cadeia
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

A simulação estocástica via MCMC faz uso das coberturas de Markov (Definição 2.8) e do método de geração inversa de números aleatórios (Ross, 2002) para realizar suas inferências. Supondo que se deseje conhecer os graus de crença sobre as variáveis Z , X e W , começa-se com a atribuição inicial das variáveis da rede e segue-se com uma atualização de cada variável em uma ordem predeterminada. Aqui adota-se a ordem Z, X, W , com todas as variáveis igualadas a zero inicialmente. Assim, a cadeia de Markov referente às simulações parte do estado 0.

$$\begin{aligned} \text{Passo 1, atualiza-se } Z: BEL_0(z) &= \alpha P(z)P(X=0|z) = \alpha [(0,7)(0,8); (0,3)(0,3)] = \\ &= (0,86; 0,14). \end{aligned}$$

Gera-se um número uniforme entre 0 e 1, $u = 0,4$. Como $u \leq BEL_0(Z=0)$, adota-se $Z=0$. A cadeia de Markov mantém-se no estado 0.

Passo 2, atualiza-se X : $BEL_0(x) = \alpha P(x|Z=0)P(W=0|x) = \alpha[(0,8)(0,7); (0,2)(0,2)] = (0,93; 0,07)$.

Gera-se um número uniforme entre 0 e 1, $u = 0,95$. Como $u \leq BEL_0(X=0) + BEL_0(X=1)$, adota-se $X=1$. A cadeia de Markov transita para o estado 2.

Passo 3, atualiza-se W : $BEL_0(w) = P(w|X=1) = (0,2; 0,8)$.

Gera-se um número uniforme entre 0 e 1, $u = 0,3$. Como $u \leq BEL_0(W=0) + BEL_0(W=1)$, adota-se $W=1$. A cadeia de Markov transita para o estado 3.

Ao final do passo 3 conclui-se uma iteração e um indivíduo hipotético é gerado. Quanto maior o número de iterações, mais próximas dos verdadeiros parâmetros tornam-se as médias das crenças estimadas de cada variável. Assim, ter-se-ão $BEL_0(Z=0) = 0,7$, $BEL_0(X=0) = 0,65$ e $BEL_0(W=0) = 0,52$, como na resolução exata realizada no tópico 2.4.5. Isto se dá pela irreduzibilidade da cadeia de Markov referente ao problema e pelo número satisfatório de iterações.

2.4.9.1. Precisão da Simulação Estocástica

Vale enfatizar que sem irreduzibilidade as inferências através da simulação estocástica não são confiáveis. Caso isto ocorra, Pearl (1987) apresenta uma alternativa para solucionar o problema. Dado que a irreduzibilidade é em geral difícil de ser provada (York, 1992) e que ela é assegurada quando todas as probabilidades condicionais das variáveis da rede são maiores que zero, Pearl sugere que todos os valores nulos das tabelas de probabilidades condicionais sejam removidos. Isto é feito substituindo-se tais valores por probabilidades pequenas, porém, não nulas p .

O problema desta substituição se dá pela necessidade de um número de iterações proporcional a $1/p$ para que haja uma convergência das inferências aos valores reais. O autor propõe duas alternativas para reduzir o tempo de convergência: a primeira é utilizar agrupamentos das variáveis, tal qual o método dos agrupamentos descrito anteriormente, conduzindo-se a simulação na rede Bayesiana convertida e depois computando-se as distribuições das variáveis componentes dos agrupamentos. Porém, caso os agrupamentos tornem-se tarefas complexas, o autor recomenda como alternativa utilizar, ao invés de uma simulação estocástica por Gibbs *Sampler*, uma simulação estocástica por amostragem lógica, também conhecida como esquema de Henrion. Nela, as coberturas de Markov são substituídas por coberturas de pais, ou seja, considera-se apenas os atuais valores dos pais nos cálculos de crenças de cada variável. Em contrapartida, Korb & Nicholson (2003) alertam que as simulações estocásticas por amostragem lógica podem, também, consumir um elevado

número de iterações. Isto porque os eventos evidenciados são também simulados; assim, quando estes são pouco prováveis muitos cenários hipotéticos são descartados.

Diante destes argumentos adota-se, neste trabalho, a simulação estocástica por Gibbs *Sampler*, pois não descarta indivíduos hipotéticos gerados, e recomenda-se um número de iterações proporcional ao valor $1/p$.

2.4.9.2. Processo de *Burn-in*

Quando uma rede Bayesiana gera uma cadeia de Markov irredutível durante as simulações, a escolha de valores iniciais não afeta a distribuição estacionária de probabilidades dos estados (Gilks et al. 1996). Mesmo que o cenário inicial do processo seja pouco provável, quando o número de iterações cresce suficientemente a convergência é garantida. Porém, como as inferências baseiam-se em médias aritméticas, a escolha inapropriada do cenário inicial pode levar a maiores imprecisões. O que se sugere é um período de *burn-in* que descarte os cenários inicialmente gerados. Gilks et al. (1996) acrescentam que mesmo sendo o estado inicial bem definido, um período de *burn-in* contribui para melhores estimativas.

Formalmente, a identificação do melhor período de *burn-in* é realizada por ferramentas de diagnóstico de convergência, porém, Geyer (1992) considera tais métodos desnecessários. Segundo o autor, caso valores extremos sejam evitados, o período de *burn-in* pode ser estimado como estando entre 1% e 2% da quantidade de iterações executadas. O problema a ser resolvido seria evitar tais valores extremos. Neste sentido, Gilks et al. (1996) recomendam a utilização de valores iniciais esparsos, ou seja, a realização de várias simulações a partir de cenários iniciais diferentes; a intenção é verificar a sensibilidade do processo estocástico a distintos cenários iniciais. Uma outra alternativa é definir como estado inicial do processo aquele mais verossímil; para isto, seleciona-se o estado mais provável segundo a distribuição de probabilidades conjunta das variáveis da rede condicionadas a possíveis ocorrências de eventos.

2.4.10. Redes Bayesianas com variáveis Contínuas

Foram apresentadas até aqui redes Bayesianas cujas variáveis são discretas e as inferências são não paramétricas, porém, muito tem sido estudado no sentido de, com os avanços computacionais, contornar as dificuldades matemáticas da modelagem paramétrica. Pearl (1988) apresenta redes Bayesianas cujas variáveis possuem distribuições condicionais normais, Heckerman (1995) trata do caso multinomial, Gilks et al. (1996) estuda distribuições

conjugadas e Castillo et al. (1997) analisa a sensibilidade e a propagação simbólica em redes Bayesianas gaussianas.

2.5. Redes Bayesianas Dinâmicas

Redes Bayesianas modelam relações entre variáveis em um particular instante do tempo ou durante um específico intervalo. Ainda que uma relação causal representada por um arco implique em uma relação temporal, redes Bayesianas não modelam explicitamente relações temporais entre variáveis. A única maneira para se modelar a relação entre o valor atual de uma variável e seu valor passado ou futuro é pela adição de uma outra variável que possua um nome diferente (Korb & Nicholson, 2003). Pode-se citar como exemplo a influência que um operário sofre do comportamento do sistema do qual faz parte, que só será refletida em uma oportunidade adiante. Este tipo de problema mostra-se freqüentemente presente quando se trata de análises de confiabilidade humana, como será abordado a seguir (subcapítulo 2.8).

A seqüência de manipulação de uma rede Bayesiana dinâmica é a mesma apresentada para redes Bayesianas. Desta forma, neste trabalho, redes Bayesianas dinâmicas serão chamadas de redes Bayesianas simplesmente.

2.6. Análise de Árvores de Falhas

A utilização da análise de árvores de falhas permite a obtenção das medidas de confiabilidade, referindo-se aos eventos indesejáveis inerentemente ligados aos sistemas.

Na sua montagem, árvores de falhas postulam um provável evento indesejável do sistema, chamado de *evento topo* da árvore, e representa todas as combinações de eventos causadores do mesmo, através de regras de álgebra booleana (Tabela 2.3). Entre estes eventos causadores, tem-se falhas de subsistemas ou componentes, que em um maior nível de detalhamento são representados por *eventos básicos*. Eventos básicos são aqueles fenômenos observáveis que quando ocorridos contribuem para a falha dos subsistemas que os expõem. Tais eventos localizam-se nas extremidades das árvores e não possuem ramificações. Quanto às regras de álgebra booleana, caso trate-se, por exemplo, de uma união, a ocorrência de ao menos um componente leva á falha do subsistema; se de uma interseção, apenas a ocorrência de todos eles leva à falha do subsistema. No Exemplo 2.5, há dois eventos básicos componentes do contexto de falha do sistema, E_1 e E_2 , e a álgebra booleana entre eles é de interseção.

Tabela 2.3 Regras básicas de álgebra booleana sobre três eventos quaisquer, X , Y , Z .

Regra	Álgebra
-------	---------

<i>Distributividade</i>	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
<i>Idempotência</i>	$X \cap X = X \cup X = X$
<i>Absorção</i>	$X \cap (Y \cup X) = X \cup (Y \cap X) = X$
<i>Teoremas de Morgan</i> ¹	$(X \cup Y \cup Z)^c = X^c \cap Y^c \cap Z^c$ $(X \cap Y \cap Z)^c = X^c \cup Y^c \cup Z^c$

Muitos autores estudam maneiras otimizadas de se extrair as medidas de confiabilidade de árvores de falhas (Firmino et al. 2004a). As duas grandes preocupações consistem em como medir a probabilidade de ocorrência de falha do sistema como um todo e, também, obter e quantificar as probabilidades das combinações mínimas de eventos, comumente chamadas de *cortes mínimos* da árvore, que quando ocorridas levam à falha do sistema. No Exemplo 2.5, existe apenas uma combinação de eventos que pode levar à falha do sistema apresentado, $E_1 \cap E_2$; porém, à medida que o nível de detalhamento da árvore de falhas se eleva esta categorização torna-se complexa. Neste trabalho, pôde-se propor um método que tenta solucionar este problema (Firmino et al. 2004a e 2004b), o qual é ilustrado por Moreira et al. (2004), através de um exemplo prático. Tal método, chamado de Diagramas Espirais, consiste de quatro etapas:

1. Faz-se uma ordenação dos componentes da árvore, segundo um critério de criticalidade dos subsistemas²;
2. Realiza-se uma remoção de cortes não-mínimos da árvore;
3. Converte-se a árvore a um diagrama espiral, com a remoção de portas lógicas e a inclusão de conexões que as representem na relação entre os eventos básicos;
4. Converte-se o diagrama espiral em um diagrama de decisão binária ordenado (OBDD), definindo-se o seu evento topo.

A conversão de uma árvore de falhas ao formato OBDD leva a muitos benefícios, como pode ser visto em Firmino et al. (2004a).

Com a caracterização dos cortes mínimos da árvore de falhas e a quantificação da probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos indesejáveis, $P(E_1)$ e $P(E_2)$ no Exemplo

¹ X^c refere-se ao evento complementar de X .

² Estudos recentes realizados pelo autor tentam verificar se a etapa de ordenação pode ser descartada do método dos diagramas espirais.

2.5, obtém-se a probabilidade de falha do sistema sob a suposição de que os eventos em cada corte são estatisticamente independentes entre si. No Exemplo 2.5, tem-se que

$$P(\text{falha do sistema}) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2).$$

Exemplo 2.5 Dado sistema falha quando há a ocorrência conjunta de dois eventos indesejáveis, E_1 e E_2 , como ilustra a árvore de falhas exposta na Figura 2.10.

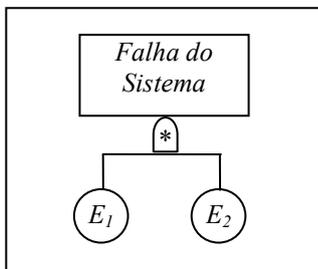


Figura 2.10 Árvore de falhas referente ao Exemplo 2.5.

Como dito anteriormente, uma das grandes dificuldades de se trabalhar com árvores de falhas é a complexidade dos cálculos da probabilidade do seu evento topo. Métodos de cálculo exato são, em geral, limitados à complexidade da árvore (Heger et al. 1995) ou requerem algoritmos sofisticados para a execução. Assim, com o intuito de simplificar os cálculos, são adotados métodos de aproximação, tais como o do evento raro.

2.6.1. Método de Aproximação do Evento Raro

Segundo Modarres et al. (1999), aproxima-se $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$ por $\sum_{i=1}^n P(E_i)$ quando $P(E_i) \leq (50n)^{-1}$, para $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

O método de aproximação do evento raro é vastamente aplicado em análises de árvores de falhas, para o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento topo (Heger et al. 1995 e Hauptmanns, 2002). Como $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$ (ANEXO 1), a aproximação por evento raro atribui uma cota máxima para a probabilidade de ocorrência do evento topo da árvore, isto é, a falha do sistema. Conseqüentemente, a confiabilidade recebe uma cota mínima por ser o complementar de tal resultado.

A Equação 2.1, demonstrada no APÊNDICE 1, mostra como se comporta o erro percentual máximo cometido pelo método de aproximação do evento raro diante de uma árvore de falhas que possui dois cortes mínimos compostos por n eventos em comum e apenas l diferente. Por exemplo, se $n=2$, então os cortes seriam compostos pelos eventos básicos $A_1A_2A_3$ e $A_1A_2A_4$, respectivamente. Quando os cortes mínimos possuem eventos básicos em

comum, $n \geq 1$, a aproximação por evento raro pode levar a estimativas muito diferentes do valor real, chegando a um erro percentual extremo, assintótico a 100% com n suficientemente grande.

$$erro_{\%} = \frac{1}{\left| 1 - 2 \cdot 100^{\frac{1}{n+1}} \right|}$$

Equação 2.1

2.7. Análise de Árvores de Eventos

Quando o sucesso da operação de um sistema depende de tarefas cronologicamente dispostas de suas unidades ou subsistemas, uma árvore de eventos torna-se apropriada. Em sistemas complexos, esta seqüência cronológica mostra-se freqüentemente presente (Modarres et al. 1999). Na Figura 2.11, descreve-se graficamente o comportamento dinâmico do sistema relatado no Exemplo 2.6, diante de uma falha no seu subsistema de funcionamento principal. Esta falha, por ter iniciado um processo de ativação de outras unidades do sistema, é chamada de *evento iniciador*. A seta ascendente, ainda no Exemplo 2.6, refere-se ao funcionamento adequado do subsistema requisitado, enquanto que a descendente especifica a sua falha. Desta forma, se o subsistema S_2 falhar o sistema pode se manter em funcionamento devido ao provável sucesso de S_3 . Para calcular a probabilidade do sistema falhar, pode-se buscar a probabilidade de ocorrência do cenário 3, obtendo-se

$$P(\text{Sistema Falhar}) = P(\text{Cenário 3 ocorrer}) = P(S_1 \text{ falhar} \cap S_2 \text{ falhar} \cap S_3 \text{ falhar}) = \\ = P(S_1 \text{ falhar})P(S_2 \text{ falhar} | S_1 \text{ falhou})P(S_3 \text{ falha} | S_2 \text{ e } S_1 \text{ falharam}).$$

Exemplo 2.6 Dado sistema é composto por um subsistema de funcionamento, S_1 , e dois subsistemas de reserva, S_2 e S_3 , onde S_2 mantém-se sob alerta em relação a S_1 , assim como S_3 em relação a S_2 . A diagramatização dinâmica deste sistema, sob uma falha em S_1 , está representada na Figura 2.11.

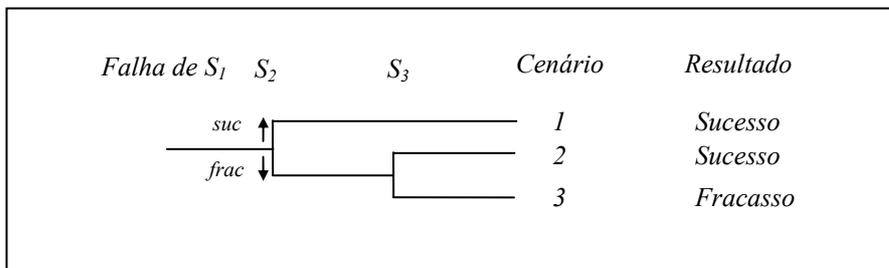


Figura 2.11 Árvore de eventos referente ao Exemplo 2.6.

É comum que a modelagem das probabilidades utilizadas para a análise de falhas do sistema seja realizada a partir dos cortes mínimos das árvores de falhas construídas para cada subsistema, assim considera-se árvores de falhas como estruturas estáticas dos subsistemas no contexto da falha e árvores de eventos como modelagens dinâmicas do sistema como um todo.

Tradicionalmente, a abordagem para a resolução quantitativa e qualitativa de árvores de eventos é a mesma direcionada a árvores de falhas. A utilização de regras de álgebra booleana leva aos cenários de falha ou sucesso e às suas respectivas probabilidades. O Exemplo 2.7 ilustra esta idéia. Caso busque-se analisar qualitativa e quantitativamente a falha do sistema, a partir do exemplo anterior, estuda-se o cenário 3. Qualitativamente, obtém-se que

$$\begin{aligned} \text{falha do sistema} &= \text{falha de } S_1 \cap \text{falha de } S_2 \cap \text{falha de } S_3 = \\ &= (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup D) \end{aligned}$$

Equação 2.2

Percebe-se que esta análise pode ser realizada através de uma árvore de falhas cuja expressão booleana é dada pela Equação 2.2; assim, tem-se como cortes mínimos $A \cap C$, $B \cap C$ e $B \cap D$, o que significa que caso ocorra ao menos uma destas combinações de eventos, o sistema falha. Já quantitativamente, avalia-se a probabilidade da união dos cortes mínimos acima definidos, chegando-se assim a uma estimativa da confiabilidade do sistema como sendo o complementar de tal probabilidade.

Exemplo 2.7 *Seja o funcionamento de um sistema como descrito no Exemplo 2.6. Sua análise de confiabilidade pode ser realizada através de árvores de falhas representadas pelas expressões booleanas dadas por:*

$$P(S_1 \text{ falhar}) = P(A \cup B), P(S_2 \text{ falhar}) = P(B \cup C) \text{ e } P(S_3 \text{ falhar}) = P(C \cup D),$$

onde A , B , C e D são eventos básicos considerados.

O acompanhamento dinâmico do sistema em uma árvore de eventos pode ser realizado localizando-se o atual estado do sistema e verificando-se seus cenários futuros possíveis. Se no Exemplo 2.7 sabe-se que S_1 e S_2 falharam, então $P(\text{sistema falhar} \mid S_1 \text{ e } S_2 \text{ falharam}) = P(S_3 \text{ falhar} \mid S_1 \text{ e } S_2 \text{ falharam}) = P(C \cup D \mid S_1 \text{ e } S_2 \text{ falharam})$, o que implica na informação direta sobre a ocorrência do evento C quando do sistema S_2 , pois caso C tenha ocorrido S_3 falhará deterministicamente.

Pode-se também considerar múltiplas saídas para cada estado de uma árvore de eventos, isto é, policotomia. Neste caso, porém, as regras de álgebra booleana tornam-se inapropriadas. Recomenda-se Modarres et al. (1999) para maiores detalhes.

Diante da carência de uma formalização, Papazoglou (1998) apresenta uma fundamentação teórica para a análise de árvores de eventos constituída de conceitos básicos

das teorias de conjuntos e da probabilidade, de definições e de proposições necessárias ao desenvolvimento de uma base matemática para tal análise.

2.8. Análise de Confiabilidade Humana

O erro humano é um comportamento inapropriado que diminui o nível de eficiência ou segurança de um sistema, o qual pode ou não resultar em acidentes ou danos (Wickens et al. 1997). Já a confiabilidade humana é a probabilidade de um procedimento ou tarefa ser concluído com sucesso pelo operador ou equipe em qualquer estágio na operação de um sistema dentro do mínimo de tempo exigido, quando a dimensão do tempo é relevante (Swain & Guttman, 1983). Conciliando as definições de erro humano e confiabilidade humana, percebe-se a relação natural entre os dois e as causalidades existentes entre respostas, sejam do sistema às ações dos operadores, sejam dos operadores ao comportamento do sistema.

A princípio, os métodos desenvolvidos para a modelagem da confiabilidade humana baseavam-se na análise de árvores de eventos binários que, em muitos casos, utilizavam árvores de falhas; eram os chamados modelos de 1ª geração. O tratamento binário sobre a categorização, contudo, mantinha a modelagem distante do cenário causador dos erros. Com a tentativa de generalizar árvores de eventos através de uma categorização policotômica e quantificar mais explicitamente a influência de fatores sobre o desempenho dos operários, os métodos de 2ª geração, dentre os quais pode-se citar o CREAM (*Cognitive Reliability and Error Analysis Method*), foram desenvolvidos durante a década de 90. Para maiores detalhes sobre os dois métodos, de 1ª e 2ª geração, recomenda-se Hollnagel (1998).

Devido à sofisticação das técnicas de análise de confiabilidade humana, a malha de variáveis envolvendo o sucesso ou o fracasso das tarefas realizadas pelos operadores mostra-se tão complexa quanto o domínio sobre os sistemas e sobre as condições para operá-los. Fatores internos ao indivíduo, tais como habilidade, experiência e autocontrole, assim como fatores externos, compreendendo condições ambientais, pressão gerencial e *design* de equipamentos, por exemplo, são preponderantes à conclusão do processo de maneira satisfatória, sendo que o descarte de qualquer um deles ou a má representação das suas relações causais durante a modelagem pode levar a resultados não condizentes à realidade em questão.

Com uma intenção mais explícita de modelar as causalidades que regem o sucesso ou a falha de um operador em uma sala de controle de uma planta de energia nuclear, Chang & Mosleh (1999) tentam descrever fatores que influenciam o seu comportamento (Figura 2.12). Essa nova geração de métodos procura detalhar todos os fatores supostamente relacionados ao

desempenho humano diante da realização de tarefas em um sistema de controle, a princípio, e quantificar suas relações de causa e efeito. No modelo cognitivo chamado de IDAC (*Information, Decision and Action in Crew*), baseado em descobertas relevantes das áreas de psicologia cognitiva, ciências comportamentais, neurociência, fatores humanos, observações de campo, e várias metodologias de 1ª e 2ª geração, os autores tratam do comportamento de um indivíduo em um contexto de grupo em resposta a condições anormais de um sistema complexo aliadas a fatores fisiológicos (fadiga, limitações físicas), fatores ambientais (acesso físico, desconforto do ambiente), eventos condicionantes (*softwares, hardwares*), fatores organizacionais (ambiente de trabalho, disponibilidade de ferramentas), fatores do grupo de trabalho (coesividade, liderança) e fatores internos, como experiência, autoconfiança e estresse (figura abaixo).

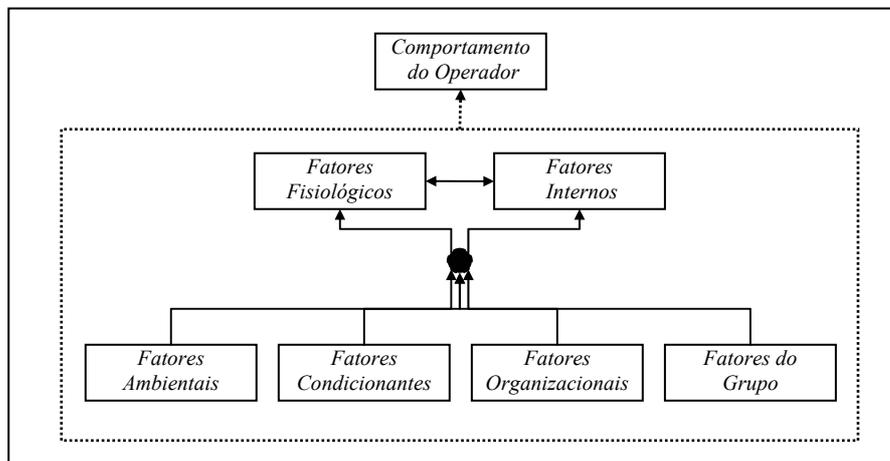


Figura 2.12 Causalidade entre os fatores de desempenho humano relacionados às operações de controle de sistemas [Mosleh & Chang (2004)].

Os fatores apresentados na Figura 2.12 podem ser classificados como estáticos ou dinâmicos, a depender do contexto e das aplicações. Se a tarefa é realizada em um período relativamente pequeno, pode-se considerar que os fatores fisiológicos, ambientais, condicionantes, organizacionais e do grupo são estáticos, enquanto que os fatores internos ao indivíduo são sensíveis a mudanças em, inclusive, pequenos intervalos de tempo.

A modelagem dinâmica do sistema é realizada através do acoplamento do modelo IDAC a árvores de eventos. A partir de um evento iniciador, busca-se modelar o comportamento do indivíduo, baseado no IDAC, no decorrer da árvore referente ao sistema dinâmico. A probabilidade de ocorrer uma determinada seqüência de eventos da árvore é baseada na suposição de independência entre os mesmos. A combinação entre o modelo IDAC e árvores de eventos é apresentada com detalhes por Mosleh & Chang (2004).

No próximo capítulo, introduz-se os conceitos de redes Bayesianas nas técnicas de análise de confiabilidade humana e de árvores de eventos. Sugere-se, também, uma maneira mais precisa e computacionalmente eficiente de se realizar inferências sobre medidas de confiabilidade, através de árvores de falhas abordadas por um hibridismo entre redes Bayesianas e o método dos diagramas espirais. Apresenta-se, também, um estudo de caso que leva a uma percepção mais intuitiva da adequação de redes Bayesianas ao problema da análise de confiabilidade humana. Por fim, exibe-se um *software* desenvolvido neste trabalho referente à modelagem e análise de redes Bayesianas, que possui o diferencial de implementar um algoritmo mais eficiente que os tradicionais, para pesquisas em tabelas de probabilidades condicionais.

3. REDES BAYESIANAS NA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Deseja-se aqui introduzir os conceitos de redes Bayesianas para a quantificação de medidas de confiabilidade, tais como na análise de árvores de falhas, de eventos e na modelagem do erro humano.

3.1. Conversão de uma árvore falhas a uma rede Bayesiana

A conversão de uma árvore de falhas ao formato de redes Bayesianas pode trazer muitos benefícios. A introdução de flexibilidade, através do descarte de suposições de independência irreais, a inserção de incerteza quanto à consequência da combinação de eventos e, até mesmo, a liberdade para definição de eventos básicos ou subsistemas como variáveis policotômicas, são algumas das vantagens desta conversão. Recomenda-se Bobbio et al. (2001 e 2003) para maiores detalhes.

Bobbio et al. (2001) acrescentam, ainda, o fato de que qualquer árvore de falhas, coerente ou não, pode ser convertida para sua respectiva rede Bayesiana, sem perda de informação. Em geral, uma árvore de falhas é dita coerente quando não possui o complementar de eventos básicos no seu escopo, ou seja, ela é composta por portas lógicas referentes a operações algébricas booleanas de união e interseção entre eventos somente, sem a presença de complementares.

Um subsistema composto por uma porta lógica cuja álgebra booleana é de qualquer natureza (união, interseção, união excludente, ou outra) com k componentes ramificados [ver Figura 3.1(a)], sejam eles eventos ou subsistemas, pode ser convertido a sua rede Bayesiana correspondente, tal como apresenta-se na Figura 3.1(b). O que caracteriza a álgebra booleana é, na verdade, a tabela de probabilidades condicionais da variável que representa o evento topo do subsistema. Se a porta lógica representa uma união, então tem-se que apenas a não ocorrência de todos os eventos ($E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_k^c$) evita a ocorrência do evento topo, $P(Topo | E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_k^c) = 0$, e qualquer outra combinação dos E_i 's leva a tal ocorrência. Assim, a partir da rede Bayesiana e considerando a suposição de independência entre eventos básicos característica da análise de árvores de falhas,

$$\begin{aligned} P(Topo) &= \\ &= \sum_{E_1, E_2, \dots, E_k} P(E_1)P(E_2)\dots P(E_k)P(Topo | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(E_1)P(E_2)...P(E_k)P(Topo | E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_k) + \\
 &\quad P(E^c_1)P(E_2)...P(E_k)P(Topo | E^c_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_k) + \dots \\
 &\quad + P(E^c_1)P(E^c_2)...P(E^c_k)P(Topo | E^c_1 \cap E^c_2 \cap ... \cap E^c_k) = \\
 &= P(E_1)P(E_2)...P(E_k)1 + P(E^c_1)P(E_2)...P(E_k)1 + \dots + P(E^c_1)P(E^c_2)...P(E^c_k)0 \Rightarrow \\
 &\quad P(Topo) = 1 - \prod_{i=1}^k P(E^c_i)
 \end{aligned}$$

Equação 3.1

Agora, considerando o mesmo raciocínio e sob a mesma suposição, se a porta lógica representa uma interseção, apenas a ocorrência simultânea de todos os eventos componentes do subsistema em questão leva ao evento topo, isto é, apenas $P(Topo | E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k)$ é não nulo (sendo este igual a 1), o que resulta em

$$P(Topo) = \prod_{i=1}^k P(E_i)$$

Equação 3.2

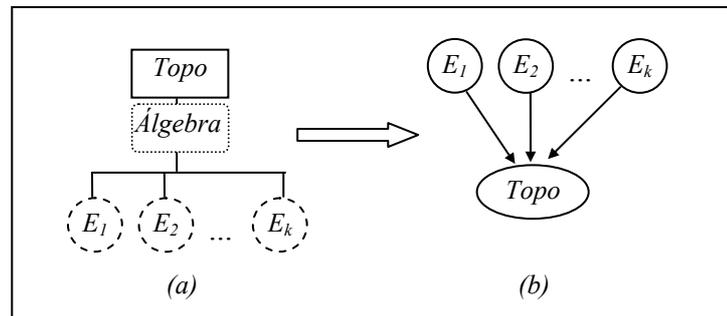


Figura 3.1 Conversão de uma árvore de falhas a uma Rede Bayesiana.

Vale salientar que a Equação 3.1 e a Equação 3.2 se dão pela suposição de independência entre os eventos básicos e pelo uso dos conceitos de redes Bayesianas, conseqüentes da condição Markoviana. É importante enfatizar, também, que nas duas equações, a abordagem por redes Bayesianas leva à mesma igualdade obtida tratando-se do problema através de regras de álgebra booleana, tais como os teoremas de Morgan.

3.2. Cota Superior para a probabilidade de falha

Como árvores de falhas são tradicionalmente compostas por subsistemas que possuem uma relação determinística com os seus componentes, a utilização de métodos estocásticos

nas respectivas redes Bayesianas fica comprometida caso não se altere as probabilidades condicionais, devido à não garantia de irreduzibilidade da cadeia de Markov a ser percorrida durante as simulações, como já comentado. Os métodos exatos, como também já foi dito, tornam-se impraticáveis à medida que tal rede Bayesiana tem um nível de complexidade mais elevado. Este nível de complexidade será tão maior quanto mais detalhada e quanto mais repetições de eventos básicos ou subsistemas houver na árvore de falhas geradora da rede.

Contudo, deseja-se aqui apresentar a idéia de que no caso de árvores de falhas coerentes, a princípio, a abordagem por redes Bayesianas atribui à confiabilidade uma cota inferior mais precisa do que aquela encontrada pelo método de aproximação do evento raro, se realizada a etapa de remoção de redundâncias do método dos diagramas espirais (subcapítulo 2.6), requerendo um esforço computacional ou dedutivo relativamente baixos. A definição de redundância apresentada neste trabalho [podendo ser encontrada em Firmino et al. (2004a)] mostra-se a seguir:

Definição 3.1 *A presença de redundâncias em uma árvore de falhas ocorre quando existe repetição desnecessária de eventos básicos ou subsistemas.*

A redundância é mais freqüente em grandes árvores de falhas e torna-se cada vez mais difícil evitá-la à medida que o nível de detalhamento do sistema em análise aumenta.

Demonstrar-se-á que a remoção de redundâncias da árvore e sua subsequente resolução por redes Bayesianas leva a uma probabilidade de ocorrência do evento topo mais próxima do valor real, porém maior. O problema de resolução da árvore não foi tratado por Bobbio et al. (2001), que se concentraram na conversão de formatos, isto é, na modelagem e não no tratamento da rede Bayesiana gerada. A seguir, apresenta-se o método de remoção de cortes não-mínimos dos diagramas espirais e demonstra-se como se comportam os dois tratamentos, com e sem a remoção de redundâncias.

3.2.1. Método de remoção de redundâncias dos Diagramas Espirais

Os diagramas espirais possuem um conjunto de métodos que levam uma árvore de falhas coerente a uma compactação que consiste apenas dos seus cortes mínimos. Desta maneira, a álgebra booleana que representa a árvore se constitui ou leva à união dos conjuntos compostos pela interseção de eventos não redundantes, sendo que dentre tais conjuntos não há qualquer um que seja subconjunto de outro. Vale salientar, contudo, que alguns cuidados são necessários antes da aplicação de tais métodos, como a remoção de portas lógicas quando

estas são componentes de portas lógicas com mesma álgebra de eventos, união ou interseção, ou quando estas têm apenas um componente.

Cinco tipos de ocorrência de redundância são analisados, através da aplicação de regras de álgebra booleana, tais como distributividade, idempotência e absorção (Tabela 2.3). Antes, porém, são necessárias algumas definições quanto à classificação dos componentes das redundâncias verificadas.

Definição 3.2 *Seja o topo da ocorrência da redundância a raiz da qual o evento básico original e os redundantes são descendentes imediatos, isto é, a porta lógica descendente do topo da árvore que representa o subsistema que possui como descendentes o evento original e os redundantes. Seja o evento original da redundância aquele mais próximo do topo da ocorrência da redundância e sejam os eventos redundantes aqueles mais distantes do topo da ocorrência da redundância.*

Redundância trivial (o evento original e os redundantes pertencem à primeira geração do topo da ocorrência da redundância): Nesse caso a solução para a redundância é simples, basta excluir todas as redundâncias e manter o evento original, pois em álgebra booleana $A \cup A = A \cap A = A$. Considerando, na Figura 3.1(a), que E_1 e E_2 são o mesmo evento básico, este tipo de ocorrência de redundância se verifica.

Redundância de geração I (Apenas o evento original pertence à primeira geração do topo da ocorrência da redundância): Aqui ocorrem duas lógicas de matemática combinatória. Se os topos dos eventos redundantes possuírem portas lógicas diferentes da do topo do evento original (que é também o topo da ocorrência da redundância), o topo das redundâncias deve ser eliminado da árvore [Figura 3.2 (a) e (b)]. Porém, se os topos dos eventos redundantes possuírem portas lógicas iguais à do topo do evento original, apenas os eventos redundantes devem ser eliminados dos seus topos [Figura 3.2 (c) e (d)].

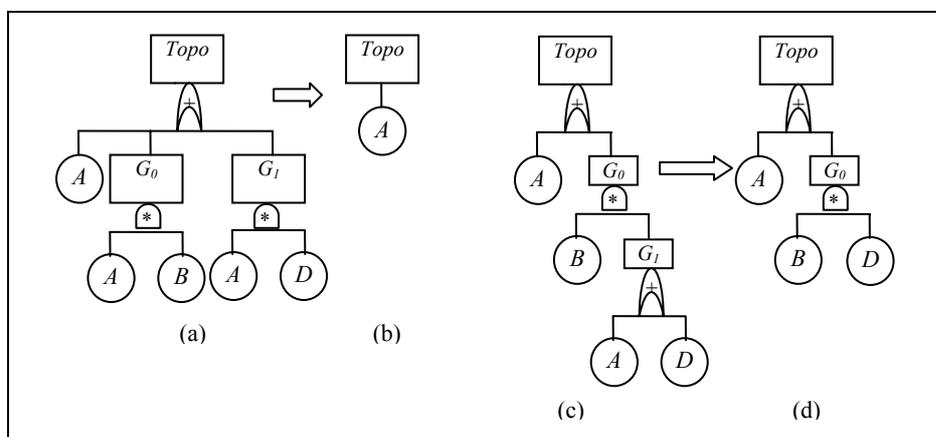


Figura 3.2 Ocorrência de redundâncias, onde apenas o evento original pertence à primeira geração do topo da ocorrência da redundância.

Este tipo de redução utiliza-se do seguinte fato: seja f a função booleana referente à árvore de falhas apresentada na Figura 3.2(c), em álgebra booleana $f = A \cup [B \cap (A \cup D)] = A \cup (B \cap D)$, e, em se tratando da árvore de falhas referente à Figura 3.2 (a), $f = A \cup (A \cap B) \cup (A \cap D) = A$.

Redundância de geração II (Tanto o evento original quanto os eventos redundantes pertencem à segunda geração de ramificações do topo da ocorrência da redundância): Neste tipo de ocorrência de redundâncias o método de redução de Faunet (Reay & Andrews, 2002) é aplicado. Utilizando álgebra booleana, tem-se $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$, assim como $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$, onde, do lado direito destas duas igualdades a redundância é eliminada, como pode ser visto na Figura 3.3.

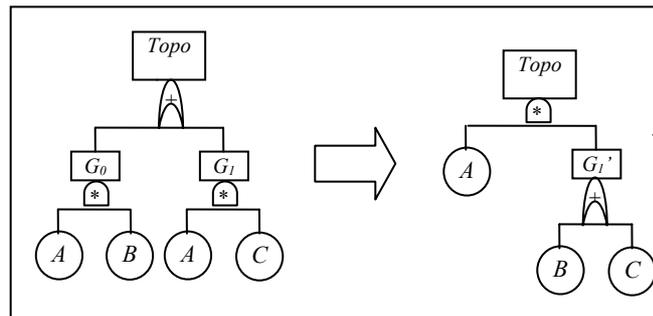


Figura 3.3 Ocorrência de redundâncias, onde tanto o evento original quanto os eventos redundantes pertencem à segunda geração de ramificações do topo da ocorrência da redundância.

Redundância de geração III (Não há qualquer das relações de parentesco citadas anteriormente, ao menos o evento original ou os redundantes pertencem à terceira geração de ramificações do topo da ocorrência da redundância e a porta lógica do topo da ocorrência das redundâncias é de interseção): Para este tipo de ocorrência de redundâncias o método de resolução utilizado é o método espiral de eliminação de cortes não-mínimos (MEEC). O MEEC utiliza-se, do fato de que

$$(G_i \cup G_j) \cap (G_k \cup G_l) = [G_i \cap (G_k \cup G_l)] \cup [G_j \cap (G_k \cup G_l)],$$

Equação 3.3

onde G_i, G_j, G_k, G_l são subsistemas da árvore de falhas. Considerando que a primeira parcela entre colchetes do lado direito da igualdade na Equação 3.3 não contém o evento original, e que, conseqüentemente, a segunda parcela entre colchetes o contém, esta lógica de igualdade

é aplicada recursivamente na segunda parcela, de forma a expandi-la e aproximar o evento original do topo da ocorrência da redundância. Quando o evento original tornar-se uma ramificação do topo da ocorrência da redundância, ter-se-á a redundância de geração I, chegando-se assim à solução possível. Antes da utilização do MEEC é preciso a seguinte precaução: quando o evento redundante pertencer à terceira geração do topo da ocorrência da redundância, este deve passar a ser considerado como o evento original, a não ser que o evento original também possua esta característica.

Redundância de geração elevada (*Não há qualquer das relações de parentesco citadas anteriormente e a porta lógica do topo da ocorrência das redundâncias é de interseção*): Aqui o método utilizado é, também, o MEEC, porém com uma singularidade. O MEEC finaliza-se aplicando a lógica inversa à primeira parcela entre colchetes do lado direito da igualdade da Equação 3.3, correspondente à última chamada da recursividade. Esta lógica inversa remove o topo do evento repetido da primeira parcela entre colchetes do lado direito da igualdade da Equação 3.3 quando apenas o evento repetido é removido da segunda parcela, e remove apenas o evento repetido da primeira parcela entre colchetes do lado direito da Equação 3.3 quando o topo do evento repetido é removido da segunda parcela.

Para o tipo de ocorrência de redundâncias onde o MEEC se aplica, não é possível obter-se uma árvore de falhas sem repetições, mas é garantido que a árvore de falhas remanescente possua apenas cortes mínimos.

O MEEC pode ser melhor compreendido verificando-se a Figura 3.4, onde a sua lógica elimina todos os cortes não-mínimos que certamente serão gerados devido o topo da ocorrência da repetição ser uma porta lógica de interseção. Como o evento básico B está presente em dois subsistemas distintos e tanto o evento original quanto o evento redundante pertencem à terceira geração do topo da ocorrência da redundância (que por conhecida é o topo da árvore), a redundância é classificada como de geração III e apenas o MEEC pode solucioná-la. Neste caso específico o evento original poderia ser qualquer uma das ocorrências do evento básico B . O que o MEEC está fazendo de (a) para (b), na Figura 3.4, é considerando que $(A \cup G_j) \cap (D \cup G_l) = [A \cap (D \cup G_l)] \cup [B \cap C \cap (D \cup G_l)]$. Como $B \cap C \cap (D \cup G_l)$ representa o subsistema que possui a ocorrência da redundância, e como o evento original pertence à primeira geração do topo de tal ocorrência, G'_l , e ainda considerando que o evento básico original e o redundante são ramificações de subsistemas cujas portas lógicas são do mesmo tipo, tem-se que apenas o evento básico redundante deve ser excluído do seu topo, em

G'_1 . Observando a Figura 3.4(c), percebe-se que agora os eventos básicos D , E , e o próprio B possuem uma repetição. Estas repetições são inevitáveis, devido às características da árvore proposta, porém, são necessárias para que seja garantida a geração de todos os cortes mínimos. Como os seus topos são subsistemas cujas portas lógicas são de união, não haverá problemas com suas permanências na árvore de falhas e suas repetições não devem ser consideradas como redundâncias.

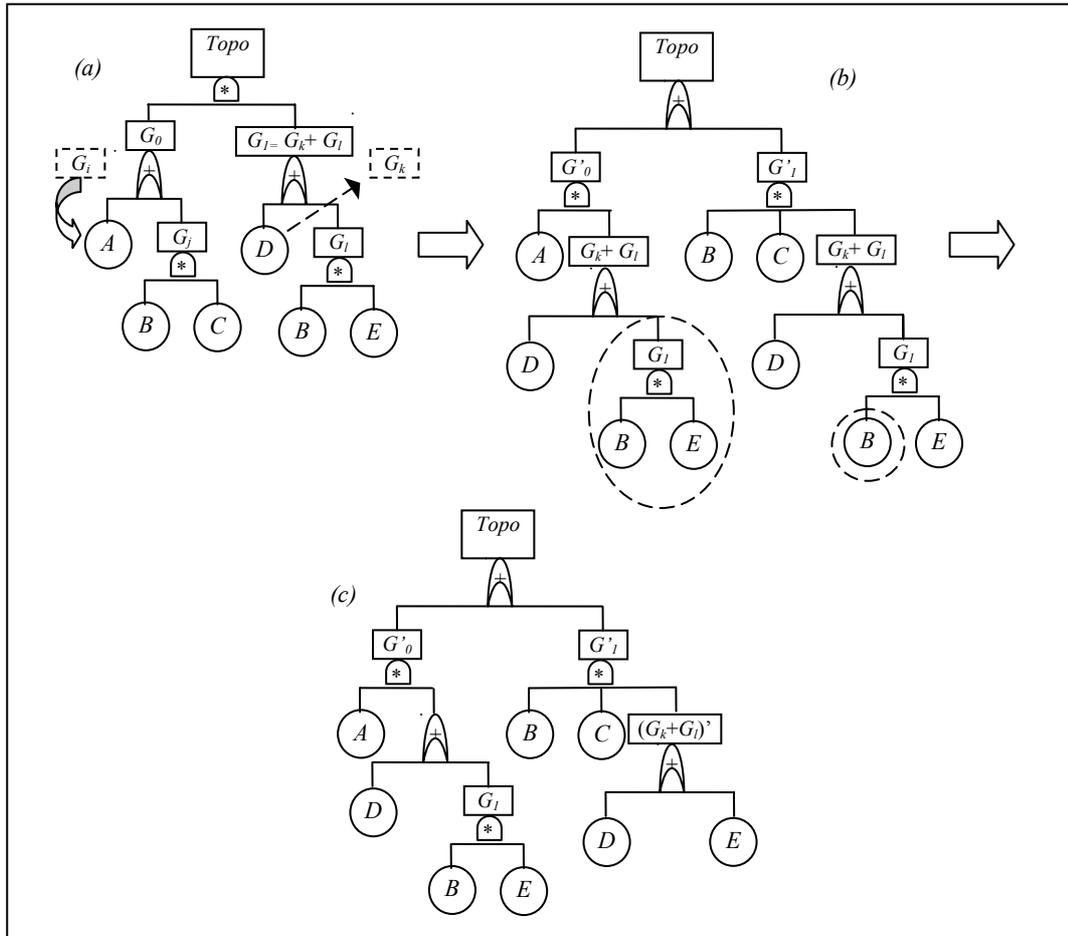


Figura 3.4 Presença de redundâncias de geração III.

Há ainda um tipo de ocorrência de redundâncias em que o MEEC se aplica. Quando há redundâncias de geração III ou elevada, referentes a subsistemas ao invés de eventos, o MEEC é usado, porém com alguns cuidados adicionais a serem estudados.

Vale observar que os métodos de remoção de redundâncias apresentados neste tópico foram desenvolvidos a partir de verificações dedutivas. Infelizmente, o problema de verificação de adequação destes em um contexto complexo de redundâncias, onde se exige a combinação entre eles, não é acessível de forma a ser demonstrada matematicamente até o

presente momento. Nos testes realizados, percebeu-se que as remoções de redundâncias na ordem em que estas foram apresentadas aqui torna o problema mais simples. As redundâncias de geração III ou elevada expandem a árvore, por isso aconselha-se removê-las por último.

Fazendo-se uso dos métodos apresentados neste tópico, tem-se o suporte necessário para a realização de um hibridismo entre estes e redes Bayesianas, na busca de melhores estimativas sobre a crença quanto ao evento topo de uma árvore de falhas coerente.

3.2.2. Métodos de aproximação com e sem hibridismo

O cálculo exato da probabilidade de ocorrência do evento topo de uma dada árvore de falhas coerente via redes Bayesianas torna-se bastante simples quando a rede é singularmente conectada (tópico 2.4.8). Neste caso, basta fazer uso da Equação 3.1 e da Equação 3.2, aplicando-as recursivamente, do topo da árvore aos eventos básicos. Este procedimento acumula a probabilidade de ocorrência de falha de cada subsistema, do topo da árvore aos seus eventos básicos. Porém, a presença de redundâncias ou mesmo a necessidade de remoção de redundâncias de geração III ou elevada levam a redes multiplamente conectadas, uma vez que haverá eventos básicos repetidos na árvore neste último caso.

Logo, torna-se óbvio que a remoção de redundâncias triviais, de geração I e de geração II tornam os cálculos mais simples e levam a resultados exatos, já que levam a RSCs. Faz-se, então, necessária apenas a demonstração de que após a remoção de redundâncias de geração III ou elevada de uma árvore de falhas coerente, os cálculos sobre a probabilidade de ocorrência do evento topo leva a uma cota superior mais precisa do que aquela obtida pelo método de aproximação do evento raro. Demonstrar-se-á, também, que a não remoção de redundâncias de geração III ou elevada compromete uma cota superior para a probabilidade de falha do sistema.

Demonstração 3.1 *Considera-se como ponto de partida que*

$$P(\text{Topo}) = P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = S + \delta, \quad \text{onde } S = \sum_{i=1}^k P(E_i) \text{ e}$$

$\delta = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_c$, *cujos valores são dados por*

$$\begin{aligned}
w_1 &= -\sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k P(E_i \cap E_j) \\
w_2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^k P(E_i \cap E_j \cap E_l) \\
w_3 &= -\sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^k \sum_{m=l+1}^k P(E_i \cap E_j \cap E_l \cap E_m) \\
&\dots \\
w_c &= (-1)^{k-1} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k), \\
c &= \left| \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} - k \right|.
\end{aligned}$$

Equação 3.4

Devido à desigualdade de Boole (ANEXO 1), $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$, demonstrar-se-á que $\delta \leq 0$ e que δ é sub-estimado.

Dado que o objetivo da remoção de redundâncias é tornar a álgebra booleana de eventos da árvore de falhas composta por uma união de conjuntos mínimos de eventos isentos da necessidade de tratamento quanto à repetição interna de seus elementos, o termo S da Equação 3.4 será sempre obtido de maneira exata. δ , por sua vez, terá seu valor sub-estimado porque não haverá qualquer tratamento quanto às interseções, isto é, eventos repetidos terão suas probabilidades potencializadas. O que garante que δ continuará não positivo é o fato de que $|w_i| \geq w_j$, para i ímpar e $j=i+1$. Logo, ter-se-á uma superestimativa da probabilidade exata de ocorrência do evento topo de uma dada árvore de falhas.

Demonstração 3.2 Fazendo-se uso da Equação 3.4, tem-se que no método de aproximação do evento raro $\delta=0$. Assim,

$$P(\text{Topo})_{\text{redes Bayesianas com remoção}} \leq P(\text{Topo})_{\text{evento raro}}.$$

Retornando à árvore de falhas geradora do erro percentual exibido na Equação 2.1, tópico 2.6.1, tem-se redundâncias de geração II e as inferências pelo método híbrido são exatas.

Demonstração 3.3 Fazendo-se uso da Equação 3.4, tem-se que caso a remoção de redundâncias não seja realizada, não se assegura que os componentes de S , os E_i 's, estarão isentos de redundâncias e nem que não haverá quaisquer deles contidos em quaisquer outros. Isto compromete o termo S e não garante uma cota superior para $P(\text{Topo})$.

A seguir, explica-se dedutivamente a Demonstração 3.1, a Demonstração 3.2 e a Demonstração 3.3 através da árvore de falhas exibida na Figura 3.4(a).

Exemplo 3.1 *Seja uma árvore de falhas que possui uma redundância de geração III, tal qual o evento B na Figura 3.4(a), a correspondente álgebra de eventos é dada por*

$$\begin{aligned} TOPO &= [A \cup (B \cap C)] \cap [D \cup (B \cap E)] = \\ &= (A \cap D) \cup (A \cap B \cap E) \cup (B \cap C \cap D) \cup (B \cap B \cap C \cap E) \end{aligned}$$

Equação 3.5

Relacionando a Equação 3.4 com a Equação 3.5, tem-se $k=4$, onde $E_1 = A \cap D$, $E_2 = A \cap B \cap E$, $E_3 = B \cap C \cap D$ e $E_4 = B \cap B \cap C \cap E$. Como E_4 possui a repetição do evento B, nos cálculos da probabilidade de ocorrência do evento topo sem qualquer cuidado em relação às interseções e supondo independência entre os eventos, $P(E_4)$ terá seu valor reduzido pela multiplicação por $P(B)$. Isto leva a uma redução de S e a maior imprecisão nos cálculos de δ , de forma que a probabilidade aproximada pelo método de redes Bayesianas sem a remoção de redundâncias não assegura a superestimação da probabilidade exata da ocorrência do evento topo.

Considera-se agora a árvore sem redundâncias exibida na Figura 3.4(c). Tem-se como álgebra de eventos:

$$\begin{aligned} TOPO &= \{A \cap [D \cup (B \cap E)]\} \cup [(B \cap C) \cap (D \cup E)] = \\ &= (A \cap D) \cup (A \cap B \cap E) \cup (B \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap E) \end{aligned}$$

Equação 3.6

Como na Equação 3.5, $k=4$, onde E_1 , E_2 e E_3 definem-se da mesma maneira. O que muda, de fato, é que agora tem-se E_4 de forma ideal. Analisando a Equação 3.4, garante-se que S será obtido de forma exata nos cálculos da probabilidade da união. A inferência sobre δ será sub-estimada, já que haverá termos reduzidos pelas interseções não tratadas entre os E_i 's.

Analisando o erro percentual cometido pelos métodos de aproximação por evento raro, redes Bayesianas com e sem remoção de redundâncias, tem-se, considerando alguns valores para as probabilidades dos eventos básicos envolvidos no Exemplo 3.1, os resultados da Tabela 3.1. Na 1ª simulação, avalia-se o sistema sob elevadas probabilidades para os eventos básicos, não satisfazendo à condição imposta pelo método de aproximação do evento raro, enquanto que nas demais tal condição é satisfeita. Em todos os casos o hibridismo entre redes Bayesianas e os métodos de remoção de redundâncias dos diagramas espirais apresenta melhores resultados. Pode-se perceber, também, que em tal método todos os erros relativos não-absolutos são negativos, o que implica em uma cota superior para a probabilidade exata.

Tabela 3.1 Erro percentual dos métodos de aproximação apresentados diante da árvore tratada no Exemplo 3.1.

$P(A), P(C),$ $P(D)$	$P(B), P(E)$	Probabilidade Exata	Erro % não-absoluto por método de aproximação		
			Redes		
			Redes Bayesianas com Remoção	Bayesianas sem Remoção	Evento Raro
2,83E-01	6,84E-01	2,82E-01	-5,72E-02	7,62E-02	-4,15E-01
7,07E-02	1,71E-01	9,50E-03	-1,86E-02	1,56E-01	-5,14E-02
1,77E-02	4,27E-02	3,89E-04	-2,01E-03	7,68E-02	-4,99E-03
4,42E-03	1,07E-02	2,07E-05	-1,51E-04	2,39E-02	-3,67E-04
1,10E-03	2,67E-03	1,24E-06	-9,92E-06	6,33E-03	-2,40E-05
2,76E-04	6,68E-04	7,66E-08	-6,28E-07	1,61E-03	-1,52E-06
6,91E-05	1,67E-04	4,77E-09	-3,53E-08	4,03E-04	-9,51E-08

A seguir, apresenta-se o *software* E&P FTA, onde E&P referem-se a Exploração e Produção e FTA a *Falt Tree Analysis*. O programa implementa a idéia do método dos diagramas espirais para a obtenção de cortes mínimos e usa o método de aproximação híbrido por redes Bayesianas e diagramas espirais para o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento topo de árvores de falhas coerentes.

3.2.3. Software E&P FTA

O *software* E&P FTA foi desenvolvido na linguagem Java (Deitel & Deitel, 2001 e Sun, 2001) e permite a análise de árvores de falhas coerentes. Sua construção se direcionou inicialmente para a modelagem e análise de árvores de falhas no contexto da exploração e produção de petróleo da PETROBRAS/CENPES¹.

Em sua interface principal (Figura 3.5) o *software* permite a inserção de portas lógicas de união e interseção, a atribuição de probabilidades de ocorrência a eventos básicos e descrições sobre cada componente da árvore. A montagem de árvores de falhas é realizada de maneira simples, basta clicar no objeto de interesse ao lado esquerdo da tela e clicar subsequente na tela de construção da árvore de falhas. A relação causal entre os componentes é realizada selecionando-se o ícone que diagramatiza uma curva, realizando-se um clique no componente conseqüente e outro no seu causador.

¹ O CENPES (Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello) é uma instituição de pesquisa da PETROBRAS nas áreas de exploração, produção, refino e petroquímica (PETROBRAS, 2004).

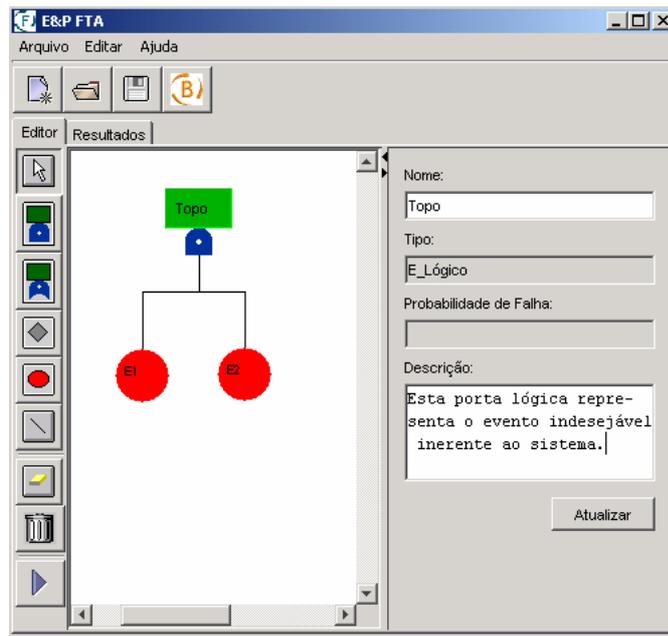


Figura 3.5 Interface de construção de árvores de falhas do E&P FTA.

Já na interface de resultados (Figura 3.6), tem-se, as análises qualitativa e quantitativa, através da expressão booleana de ocorrência do evento topo da árvore em função de operações de união e interseção representadas pelos sinais de soma e produto, respectivamente e da probabilidade de ocorrência do evento topo, além da distinção de cada corte mínimo da árvore com sua probabilidade de ocorrência correspondente.

The screenshot shows the 'Resultados' tab in the E&P FTA software. It displays simulation results for the fault tree:

Expressão de falha:
 $E2 * E1$

Probabilidade de falha:
 $3.0E-6$

Cortes Mínimos & Probabilidades:

Índice	Corte Mínimo	Probabilidade
1	$E2 * E1$	$3.0E-6$

Figura 3.6 Interface de exibição de resultados do E&P FTA.

O maior diferencial do programa E&P FTA reside na sua implementação totalmente baseada nos métodos dos diagramas espirais e na aproximação híbrida entre estes e redes Bayesianas para a obtenção dos seus cortes e para o cálculo da probabilidade do evento topo da árvore, respectivamente.

3.3. Conversão de uma árvore de eventos a uma rede Bayesiana (dinâmica)

Muito pode ser dito sobre as vantagens da introdução de redes Bayesianas na análise de árvores de eventos. Algumas delas são semelhantes às do contexto de árvores de falhas e outras não.

A abordagem dinâmica de um sistema por redes Bayesianas (dinâmicas) pode levar a uma melhor representação gráfica, permitindo uma compreensão mais intuitiva. Para a árvore sugerida no Exemplo 2.6, cujas expressões booleanas das árvores de falhas são apresentadas no Exemplo 2.7, tem-se a rede Bayesiana da Figura 3.7(a). Nela, as linhas tracejadas ilustram uma relação funcional entre os subsistemas, de acordo com as seqüências de eventos que levam a cada um dos três cenários da árvore de eventos da Figura 2.11. Analisando-se a falha do sistema, apenas o cenário três é considerado, o qual é dado pelo fracasso dos três subsistemas envolvidos, S_1 , S_2 e S_3 . Aqui, o evento “falha do subsistema i ” é representado por $S_i F^+$, onde o sinal sobrescrito refere-se a uma lógica booleana de união entre os eventos que podem levar a sua falha.

Com redes Bayesianas, a compreensão sobre as relações causais que regem o sistema é alcançada de forma direta. Se na rede da Figura 3.7(a) o evento B ocorre, acontece a falha de ambos os subsistemas S_1 e S_2 , e o subsistema S_3 é ativado. Esta seqüência de eventos é visível ao se percorrer a rede a partir de B . A Figura 3.7(b) e a Figura 3.7(c) expressam a lógica booleana que envolve cada variável e seus causadores; ou, cada subsistema e seus componentes em um contexto de falha. Uma vez que S_2 tenha falhado, a ocorrência de ao menos um dos eventos C ou D leva à falha de S_3 [Figura 3.7(b)]. Já a falha do sistema deixa de ocorrer se ao menos um dos seus subsistemas funcionar [Figura 3.7(c)].

Redes Bayesianas não requerem métodos complementares, como classicamente ocorre em árvores de eventos. Há uma abordagem única sobre o sistema, das suas menores partes às maiores e vice-versa. Considerando uma árvore de eventos cujas variáveis são postuladas por árvores de falhas, por exemplo, caso se deseje saber em que resulta a ocorrência de um evento básico, basta verificar o comportamento da rede Bayesiana sob esta evidência; da mesma

forma, caso se queira diagnosticar a falha do próprio sistema, busca-se os causadores através da inferência Bayesiana, tendo este fato como evidência.

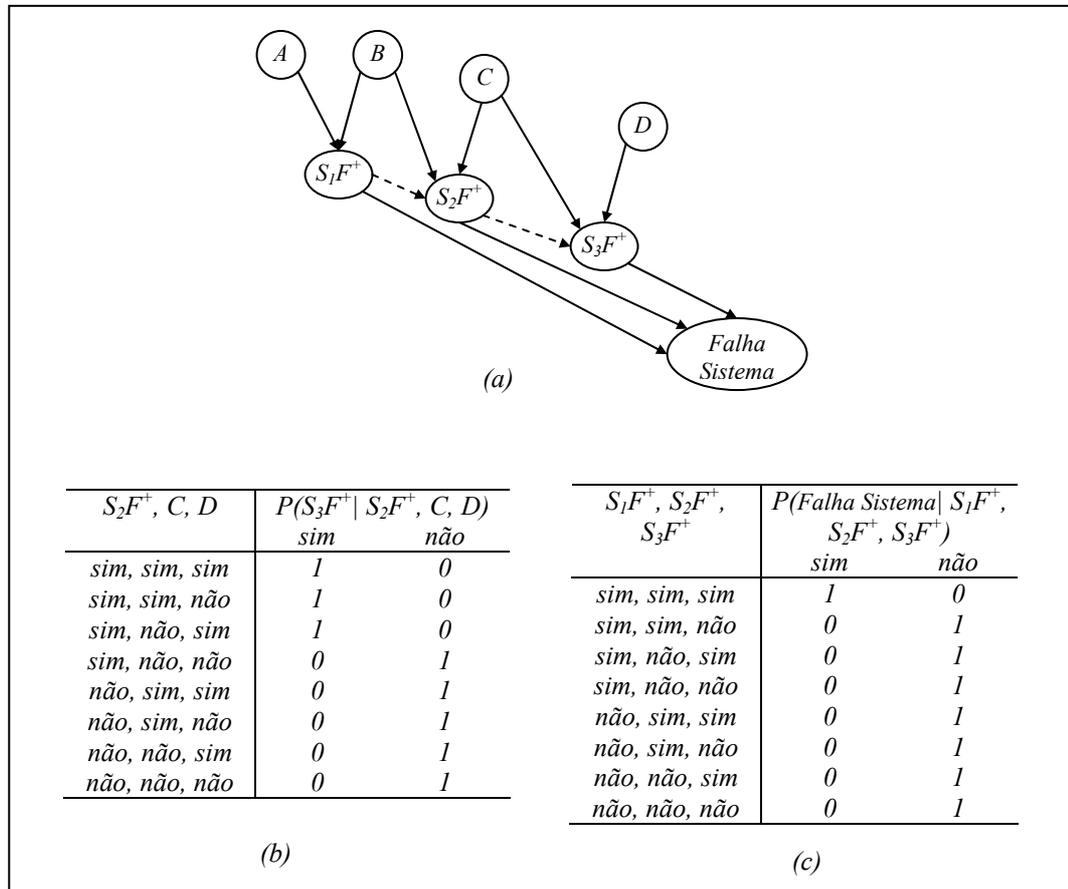


Figura 3.7 Rede Bayesiana referente à árvore de eventos do Exemplo 2.6 detalhada no Exemplo 2.7.

Com a análise de redes Bayesianas, pode-se introduzir flexibilidade sobre a categorização das variáveis e considerar incertezas quanto ao conhecimento a respeito dos componentes do sucesso ou fracasso do sistema, assim como dito anteriormente na abordagem de árvores de falhas. Pode-se desejar, por exemplo, expressar a falta de conhecimento a respeito do sucesso do sistema como um todo e introduzir tal incerteza na tabela de probabilidades condicionais correspondente. Uma outra vantagem desta conversão se dá pela ausência de suposições de independência comumente realizadas em grandes árvores de eventos, como em Mosleh & Chang (2004), comentado no subcapítulo 2.8. Devido aos eventos *B* e *C*, não é correto dizer que os subsistemas 1 e 2 são independentes no Exemplo 2.7.

Pode-se concluir que o tratamento de uma árvore de eventos ou de falhas por redes Bayesianas é bastante semelhante, porém há ressalvas para o 1º caso. A presença de policotomia e incoerências é bastante provável em árvores de eventos, o que torna, por

exemplo, o método de aproximação híbrido por redes Bayesianas e diagramas espirais inaplicável na busca de uma cota inferior para a confiabilidade. Dois outros problemas também presentes na conversão de árvores de falhas são a relação determinística entre eventos e subsistemas e a geração de redes Bayesianas multiplamente conectadas decorrentes das dependências entre subsistemas. Estas duas características podem tornar as inferências exatas e aproximadas viesadas, como já dito anteriormente.

O que se sugere é a remoção das relações determinísticas da rede, permitindo uma simulação estocástica baseada no Gibbs *Sampler* em seguida (tópico 2.4.9). Como já citado, tópico 2.4.9.1, isto é feito com uma alteração das probabilidades condicionais, substituindo-se os valores nulos por uma constante, p , próxima de zero (Pearl, 1987). A simulação estocástica subsequente deve ser realizada com um número de iterações proporcional a $1/p$.

3.4. Redes Bayesianas na Análise de Confiabilidade Humana

Neste subcapítulo, deseja-se apresentar redes Bayesianas no problema da modelagem do erro humano. Como pode ser visto no subcapítulo 2.8, a análise da confiabilidade humana baseia-se em ferramentas como a análise de árvores de eventos e de falhas. Assim, existe uma grande dificuldade na modelagem das relações entre pessoas e destas com os sistemas, assim como na quantificação dos modelos causais.

Vários autores têm elaborado críticas sobre os métodos de 1ª e 2ª gerações e apresentado expectativas quanto a métodos futuros (Mosleh & Chang, 2004). Neste sentido, apresenta-se a seguir algumas das expectativas resumidas por Mosleh & Chang (2004) e a robustez de redes Bayesianas diante das mesmas.

1. Melhores modelos causais: redes Bayesianas são, segundo a Definição 2.4, representações das relações de causa e efeito entre variáveis componentes de um dado problema;
2. Regras mais explícitas para contextualizar a identificação de erros e a estimação de probabilidades: a identificação de erros por redes Bayesianas pode ser feita por análises diagnósticas baseadas no cálculo de probabilidades condicionais, sejam as evidências empíricas ou subjetivas, isto é, sejam os erros observados ou prováveis. O que explicita a estimação das probabilidades é sua realização sob conceitos do cálculo das probabilidades e da matemática;
3. Uso mais formal do conhecimento acumulado nas ciências comportamentais: como todo o conhecimento sobre o sistema está expresso nas distribuições de probabilidades

condicionais e estas são adimensionais, qualquer conhecimento pode ser medido formalmente e usado pela rede, inclusive aquele provindo das ciências comportamentais;

4. Melhor calibração com eventos operacionais atuais: a robustez de uma rede Bayesiana está intrinsecamente relacionada às experiências dos seus criadores. Porém, sua calibração a alterações do sistema não requer mais do que um cuidado pontual nos locais necessários. A inclusão de uma nova causa sobre dado efeito, por exemplo, altera apenas a distribuição de probabilidades condicionais de tal efeito. Por outro lado, a alteração de um conjunto de efeitos não leva a qualquer modificação no seu conjunto de causas. Isto ocorre também tratando-se de exclusões;

5. Representação mais realista da natureza dinâmica das interações homem-sistema: como as relações de causa e efeito significantes devem estar presentes na rede Bayesiana e expressas por probabilidades condicionais, a cada resposta do sistema há uma correspondente situação probabilística acerca do operador que contabiliza suas alterações. Da mesma forma atualiza-se o comportamento do sistema sob as ações do operador;

6. Aplicabilidade por diferentes usuários em contextos também diferentes: Uma vez representado por uma rede Bayesiana, um sistema pode ser analisado em muitos contextos. Em um ponto de vista mais detalhado pode-se desejar uma análise operacional, com diagnósticos e prognósticos mais precisos e rápidos. Já com propósitos gerenciais, pode-se embasar opiniões, tais como sobre a melhoria ou o retrocesso de um subsistema qualquer;

7. Consistência: A consistência de uma rede Bayesiana representa o conhecimento sobre o sistema. Desta forma, sua consistência para um específico processo será, ao menos, tão satisfatória quanto a de qualquer outro método.

As características de redes Bayesianas parecem suprir muitas das necessidades para uma boa representação de sistemas envolvendo homens e máquinas. Pode-se acrescentar ainda que o processo de educação para a montagem da rede resulta em modelos tão mais precisos e acurados quanto maior for a capacidade de se posicionar os indivíduos educados nos cenários desejados. A grande força dos conceitos de redes Bayesianas neste sentido é a sua capacidade de simular o raciocínio sensato do indivíduo em cenários por ele conhecidos. Isto torna o envolvimento dos conceitos de redes Bayesianas e muitos métodos para educação, como os sugeridos por Campello de Souza (2002a), bastante apropriado.

As grandes dificuldades encontradas pelos métodos de 2ª geração consistem em modelar o sistema sem a realização de suposições irrealistas de independência e, ainda assim, inferir sobre o mesmo de uma maneira matematicamente ou computacionalmente tratável. Este problema não existe quando se trata de redes Bayesianas, já que nelas a significância de relações causais é modelada naturalmente, sem complicações adicionais quanto ao tratamento.

A seguir, para exemplificar a aplicação de redes Bayesianas no contexto de confiabilidade humana, tem-se um problema real apresentado em resumo e analisado em detalhes por Menêzes & Droguett (2004).

Atualmente, a CHESF (Companhia Hidro Elétrica do São Francisco) possui 46333 torres de transmissão de energia espalhadas por quase toda a extensão do rio São Francisco (CHESF, 2004). A empresa de energia tem se preocupado com as trocas dos isoladores de suas linhas de transmissão de 230 KV devido à grande importância de tal operação. Elas representam 31861 torres, cerca de 68,8% do total (CHESF, 2004). Em uma falha extremamente grave, pode haver queda de cabos de transmissão, interrupção de energia e até perdas humanas.

Uma equipe de eletricitas tem a função de realizar a troca periódica dos isoladores. A equipe é formada por sete eletricitas que estão expostos a fatores externos às suas condições, tais como clima e tempo disponível para a tarefa, e fatores internos, como condição física e experiência na função. A Figura 3.8 exhibe brevemente a disposição dos eletricitas durante a troca da cadeia, onde

E_E - Eletricista encarregado,

E_T - Eletricista de topo,

E_M - Eletricista de montagem,

E_A - Eletricista de apoio,

E_{AUX} - Eletricitas auxiliares.

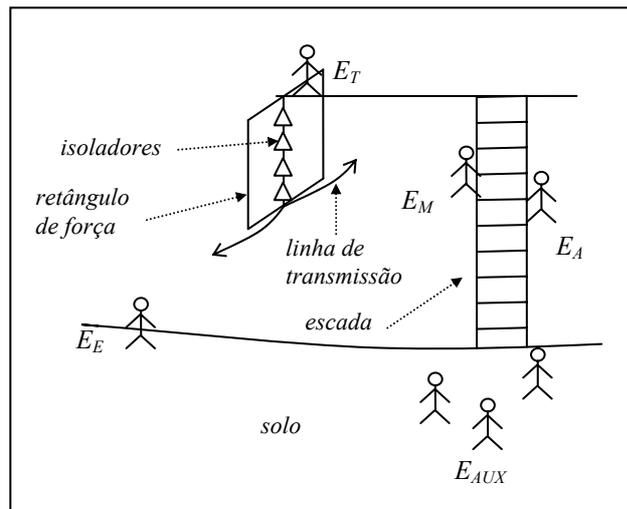


Figura 3.8 Disposição dos eletricitistas durante a troca de cadeias de isoladores de torres de transmissão de energia da CHESF.

O que se deseja em longo prazo é realizar diagnósticos e prognósticos satisfatoriamente precisos, com o intuito de que se tenha o suporte técnico-científico necessário para tomadas de decisões direcionadas à redução da probabilidade do insucesso na troca dos isoladores, além de gerenciar de maneira mais técnica o processo, isto é, busca-se uma análise de confiabilidade humana. Este problema pode ser abordado por redes Bayesianas dinâmicas, já que se sabe que o mesmo indivíduo participa do processo de troca dos isoladores em momentos e condições distintas, tanto em relação aos fatores externos quanto aos internos.

Durante o processo de educação¹, discriminou-se sete etapas consideradas críticas durante a troca de uma cadeia de isoladores, compreendidas entre o acoplamento e a remoção de um *retângulo de força* (ver Figura 3.8), que exerce a função dos isoladores durante a troca. Na Figura 3.9, tem-se que

C- Cenário,

E^* - Operação conjunta de E_T com E_M ,

C_3 - Operação conjunta de E_M com E_A no cenário 5,

FI- Fatores internos ao eletricitista,

FE- Fatores externos ao eletricitista,

¹ Todo o processo de educação, tanto da rede Bayesiana quanto das distribuições de probabilidades condicionais das suas variáveis, está descrito em detalhes em Menêzes & Droguet (2004).

E_E, E_T, E_M, E_A e E_{AUX} definem-se como na Figura 3.8.

A numeração seguinte a cada variável se refere ao cenário em que ela se encontra.

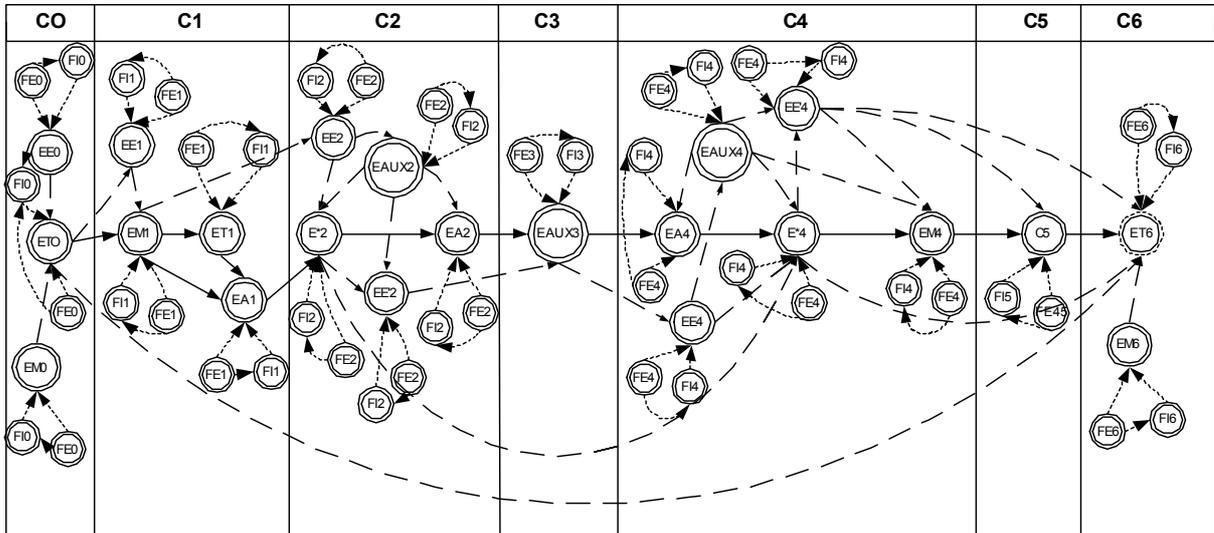


Figura 3.9 Rede Bayesiana dinâmica referente à troca de cadeias de isoladores de torres de transmissão de energia da CHESF.

Ainda na Figura 3.9, a descrição funcional do sistema se dá pelas linhas sólidas, enquanto que as relações causais probabilísticas são expressas por linhas pontilhadas e tracejadas. As linhas tracejadas exprimem as causalidades entre os eletricitistas e as pontilhadas entre os fatores de desempenho humano envolvidos no problema e destes com os eletricitistas. Acredita-se que os fatores externos influenciam tanto os fatores internos quanto o próprio eletricista. Isto pode ser intuitivamente compreendido considerando-se que a presença de nuvens pode levar o eletricista a realizar o trabalho mais rapidamente, temendo estar no alto da torre no início de uma chuva, enquanto que a chuva propriamente dita interrompe o processo de fato.

Com o intuito de esclarecer a diagramatização do funcionamento sistema, comenta-se sobre o cenário 0. Nele, tem-se o eletricista de topo montando o retângulo de forças sob a supervisão do eletricista encarregado e do de montagem. Além destes componentes, o cenário é composto por dois nós referentes aos fatores internos e externos a cada um dos eletricitistas. No próximo subcapítulo, este cenário é ilustrado numericamente, considerando alguns fatores internos e externos selecionados por Menêzes & Droguet (2004).

Esta rede, Figura 3.9, relata as relações funcionais entre os eletricitistas e, também, as dependências que provavelmente levam a uma alteração das suas probabilidades de erro quando estes são requisitados pelo sistema. Ela exhibe, na verdade, a “espinha dorsal” da rede

Bayesiana dinâmica que futuramente embasará tomadas de decisões com o objetivo de tornar o sistema sensivelmente mais confiável.

Para este problema, a confiabilidade humana do sistema (R_s) é equivalente à probabilidade do cenário 6, a remoção do retângulo de forças, ser concluído com sucesso [$P(E_{t6} \text{ ter sucesso})$], pois funcionalmente é nesta etapa que o sistema termina e causalmente é nela que se pondera todo o histórico de eventos causadores probabilísticos de um sucesso ou fracasso do sistema. Isto denota-se por $R_s = P(E_{t6} \text{ ter sucesso})$.

Na seqüência, apresenta-se o *software* E&P/CHESF BBN, onde E&P refere-se a Exploração e Produção (como já descrito na apresentação do E&P FTA) e BBN a *Bayesian Belief Networks*¹, o qual trata da modelagem das causalidades subjacentes aos sistemas através de redes Bayesianas.

3.5. Software E&P/CHESF BBN

Existem muitos *softwares* disponíveis que implementam os conceitos de redes Bayesianas, tais como o JavaBayes (Cozman, 2004), porém mostra-se a seguir um programa alternativo com algoritmos próprios, também introduzidos neste trabalho (subcapítulo 3.6).

A linguagem na qual o E&P/CHESF BBN foi implementado é Java (Deitel & Deitel, 2001 e Sun, 2001) e sua manipulação é similar à do E&P FTA. As organizações-alvo para sua construção são a CHESF e a PETROBRAS. O sistema a ser modelado e analisado pela CHESF refere-se à troca de cadeias de isoladores (brevemente apresentado no subcapítulo anterior) e, no caso PETROBRAS, tenta-se realizar uma análise integrada entre confiabilidade humana e de *hardware*² em poços multilaterais (MLTs).

Para ilustrar o procedimento de construção e análise de uma rede Bayesiana, será realizada a montagem do cenário 0 da troca de cadeias de isoladores de linhas de transmissão, tal qual comentado no subcapítulo anterior. Os fatores internos e externos a cada eletricitista, exibidos na rede da Figura 3.9, foram expandidos sobre o eletricitista de topo (ET0) de forma a simular

¹ Há vários sinônimos para redes Bayesianas; pode-se citar: redes de crenças Bayesianas (*Bayesian belief networks*), redes de crenças (*belief networks*), redes causais probabilísticas (*probabilistic causal networks*) e modelos probabilísticos de causa e efeito (*probabilistic cause-effect models*).

² Uma análise de confiabilidade de equipamentos é também conhecida como análise de confiabilidade de *hardware*.

uma situação real. A rede exibida na interface principal do E&P/CHESF BBN, Figura 3.10, é um protótipo do que será construído por Menezes & Drogue (2004).

Na construção da rede, seleciona-se o ícone desejado e clica-se na tela de construção desta. Pode-se, além do nome da variável na rede, atribuir a quantidade de categorias que particionam os seus possíveis resultados. Após isto, define-se os rótulos de cada uma das partições criadas (ver Figura 3.10). No protótipo, definiram-se duas partições para todas as variáveis envolvidas, favorável ou desfavorável ao bom desempenho do sistema.

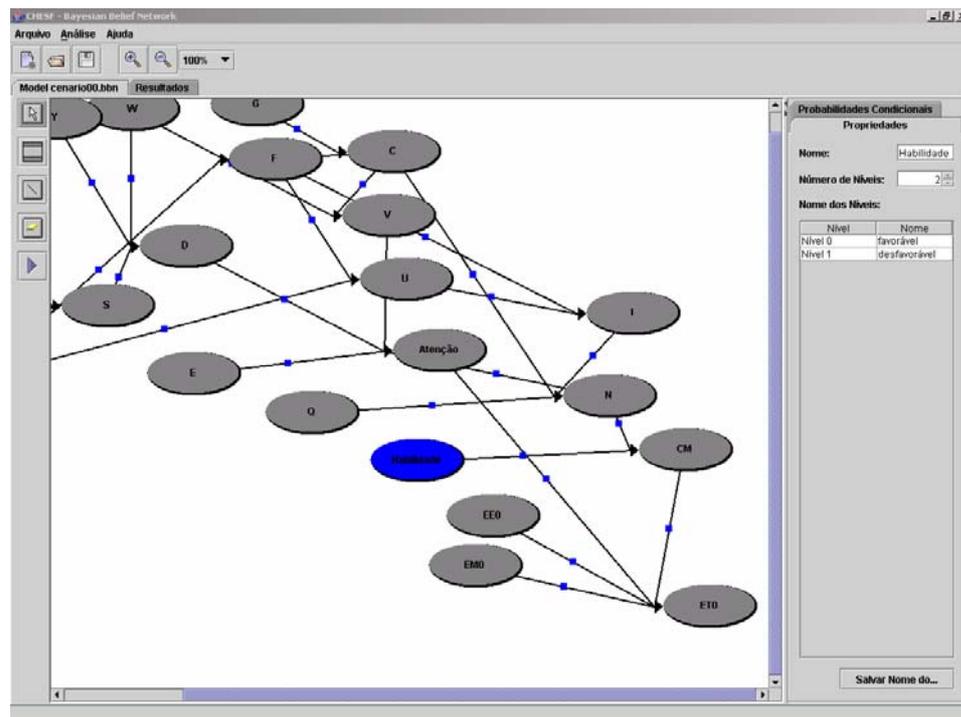


Figura 3.10 Interface principal do software E&P/CHESF BBN: características das variáveis.

A próxima etapa consiste na atribuição das probabilidades condicionais de cada variável, dados específicos valores dos seus causadores (Figura 3.11). Sobre a variável habilidade, por exemplo, tem-se que a probabilidade de um eletricista de topo ter a habilidade necessária é de 80%, segundo a pseudo-educação realizada baseada em Menezes & Drogue (2004). Ao final deste processo, a rede Bayesiana está pronta para gerar distribuições a *posteriori* sob a presença de evidências empíricas, subjetivas ou diante da ausência de ambas.

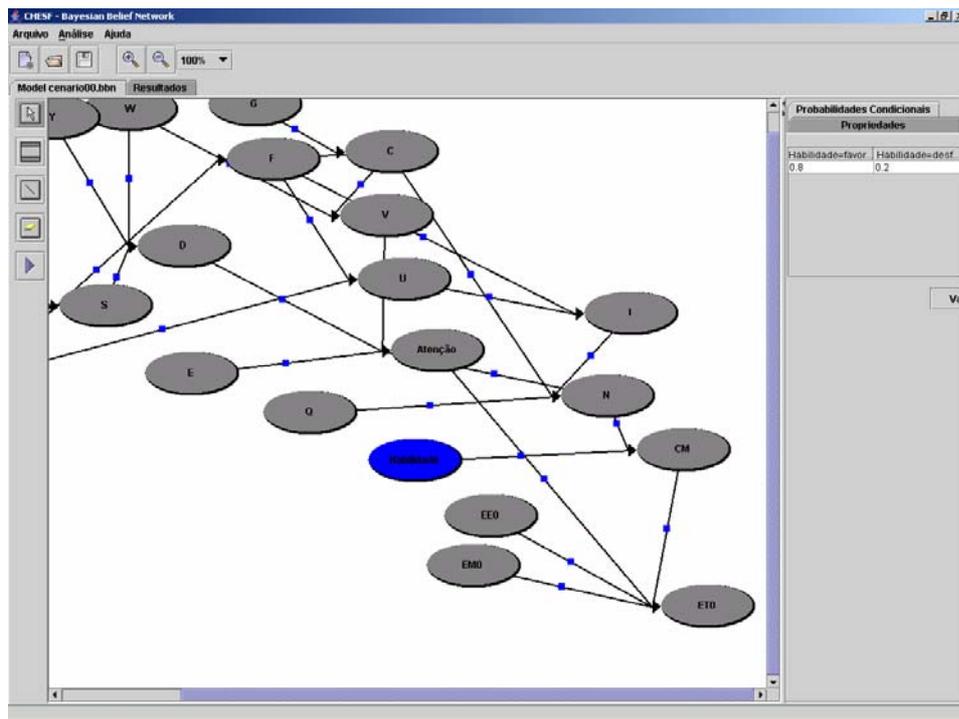


Figura 3.11 Interface principal do software E&P/CHESF BBN: probabilidades condicionais.

A inclusão de uma evidência empírica sobre as variáveis da rede é realizada selecionando-se as categorias ou níveis observados (Figura 3.12). Considerando o protótipo, poder-se-ia observar a falta de atenção do eletricista de topo (ET0) e analisar a influência desta evidência (Atenção inadequada) sobre a sua probabilidade de insucesso (ver resultados na Tabela 3.2).

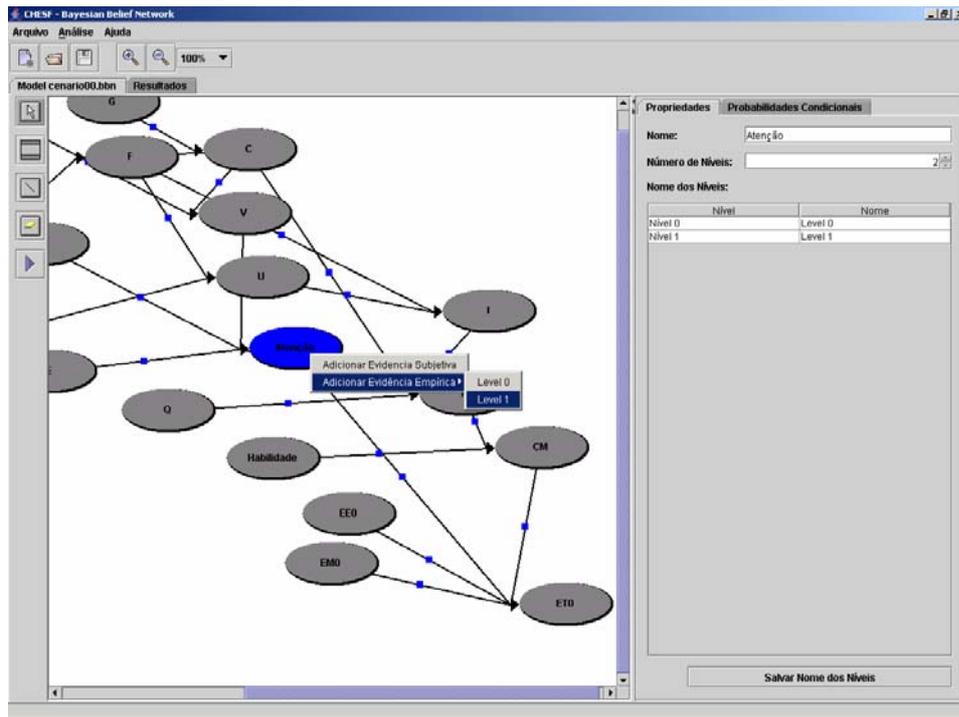


Figura 3.12 Interface principal do software E&P/CHESF BBN: evidências empíricas.

Em complemento à inclusão de evidências empíricas, a inserção de evidências subjetivas se dá pelas taxas de verossimilhança referentes a cada nível da variável em questão (Figura 3.13). Observe-se que é permitida a inclusão de várias evidências subjetivas sobre a mesma variável, pois as taxas correspondentes a cada categoria de cada evidência desta natureza são multiplicadas devido à condição Markoviana, que torna tais evidências independentes dado que se sabe sobre a variável à qual estas se referem. Assim, diante do protótipo, caso se tenha duas opiniões sobre a habilidade do electricista de topo dado que o resultado em um exame de qualificação por ele realizado foi satisfatório, $E_1 = P_1(\text{aprovação no exame} | \text{tem habilidade}) = \beta_1(4, 1)$ e $E_2 = P_2(\text{aprovação no exame} | \text{tem habilidade}) = \beta_2(3, 1)$, trabalha-se com a evidência $E^* = \beta^*(12, 1)$. A influência destas evidências sobre a probabilidade de sucesso do electricista de topo quando do cenário 0 apresenta-se na Tabela 3.2.

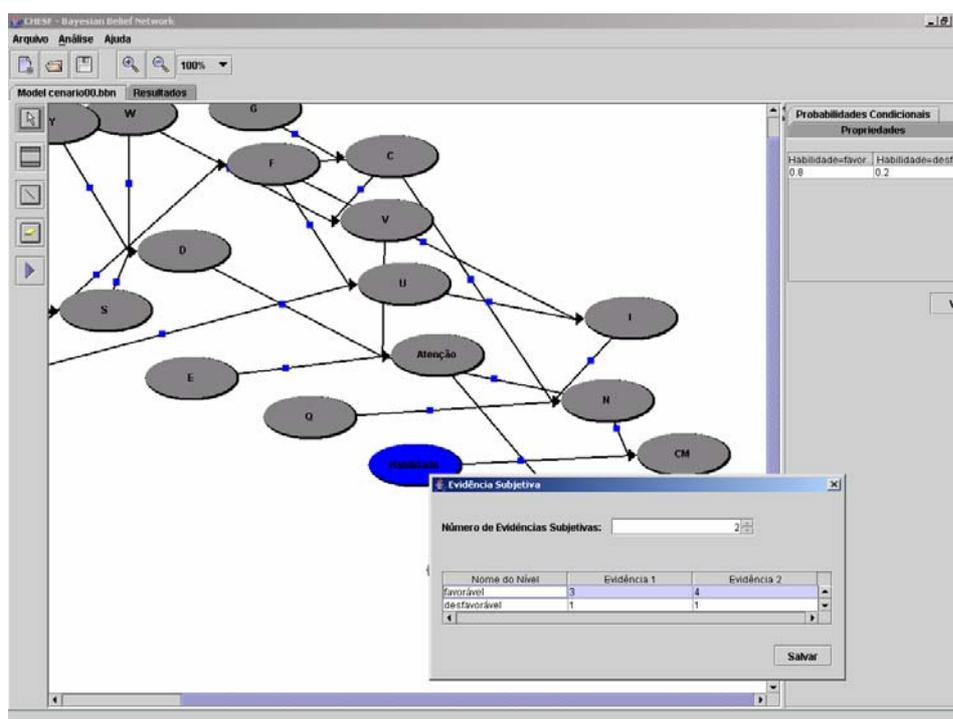


Figura 3.13 Interface principal do software E&P/CHESF BBN: evidências subjetivas.

O cálculo de crenças baseia-se no método Gibbs *Sampler*, de simulação estocástica via MCMC, requerendo do usuário o número de iterações para as inferências (Figura 3.14). Adota-se um período de *burn-in* igual a 1,5% do número de iterações. Para ilustrar a realização das simulações, executou-se 50000 iterações no protótipo, tendo como resultados acerca da probabilidade de sucesso do electricista de topo diante do cenário 0 exibidas na Tabela 3.2.

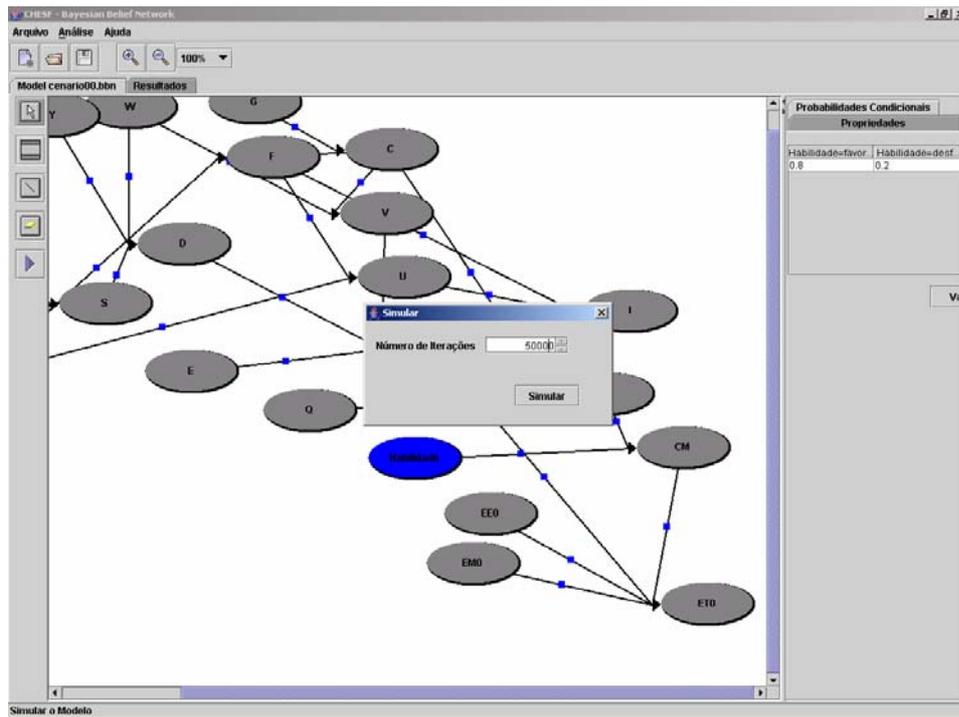


Figura 3.14 Interface principal do software E&P/CHESF BBN: simulação.

Ao final, tem-se as distribuições de probabilidades a *posteriori* de cada variável da rede, em função de prováveis evidências (Figura 3.15). Considerando que não foram atribuídas evidências ao protótipo do modelo, conclui-se que a probabilidade de o electricista de topo realizar sua tarefa no cenário 0 adequadamente é de 55% (Tabela 3.2).

Tabela 3.2. Análise de sensibilidade sobre a probabilidade de insucesso do electricista de topo no cenário 0 (ET0), como descrito no subcapítulo 3.4.

Evidência	$P(\text{electricista de topo não falhar no cenário } 0)$
nenhuma	0,55
$\beta(4,1)$ e $\beta(3,1)$ sobre a habilidade adequada do ET0	0,65
Atenção inadequada do ET0	0,38

Analisando a Tabela 3.2, vê-se que, a princípio, a probabilidade de o electricista de topo realizar a tarefa adequadamente diante do cenário 0 é razoavelmente baixa, segundo as eduções. Porém, ao se perceber, diante de um teste, que este têm maiores chances de possuir a habilidade necessária para a tarefa solicitada, suas chances de sucesso elevam-se sensivelmente. Já em campo, ao verificar-se que o electricista de topo não está dedicando a

atenção necessária para um bom desempenho, a sua probabilidade de sucesso no acoplamento do retângulo de força (Figura 3.8) reduz-se drasticamente.

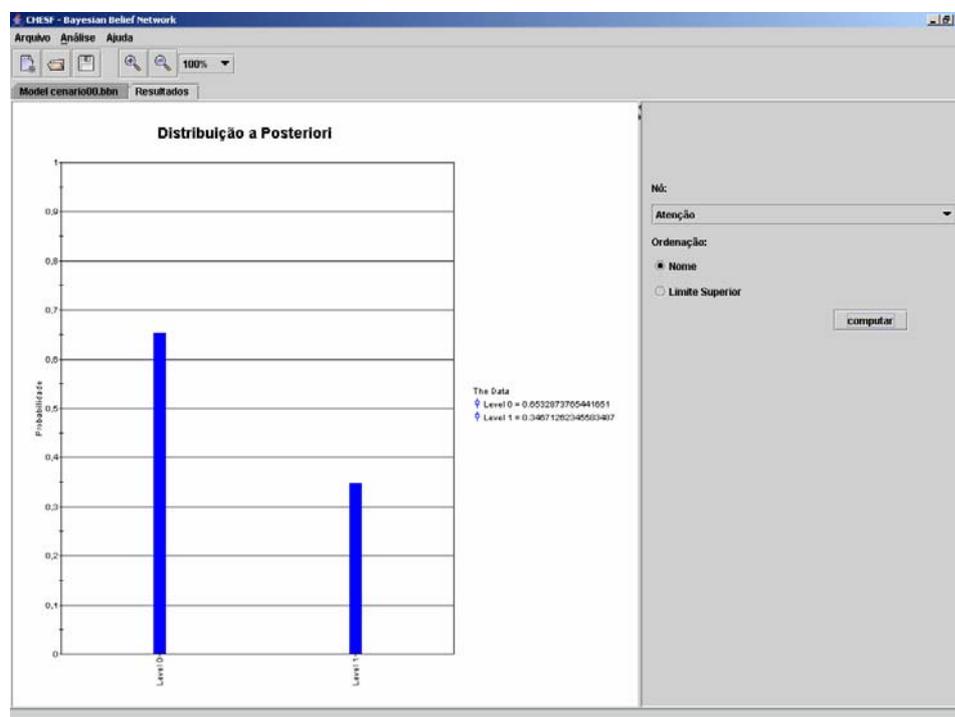


Figura 3.15 Interface de resultados do software E&P/CHESF BBN.

A seguir, apresenta-se um algoritmo otimizado elaborado neste trabalho para a realização de pesquisas nas tabelas de probabilidades condicionais de uma variável aleatória discreta de uma rede cujos pais são, também, variáveis aleatórias discretas. Tal algoritmo apresenta-se como um diferencial do programa E&P/CHESF BBN devido à sua eficiência e desempenho sensivelmente superiores aos métodos de busca geralmente adotados.

3.6. Boa Prática de Programação em Redes Bayesianas

No cálculo de crenças, tópicos 2.4.5 e 2.4.7, percebe-se que quando as variáveis envolvidas são discretas é requerida uma pesquisa sobre suas probabilidades condicionais. Tal pesquisa é realizada em um número bastante elevado de vezes durante os cálculos de crenças, principalmente em se tratando das inferências aproximadas obtidas através da simulação estocástica (tópico 2.4.9). Diante disto, propõe-se uma maneira otimizada de se realizar as pesquisas nas tabelas de probabilidades condicionais, ilustrando-a através do exemplo a seguir.

Exemplo 3.2 Seja um DAG, tal qual o da Figura 3.16, onde há duas categorias, ou níveis, para as variáveis Y e W (0 e 1), três para X (0, 1 e 2) e quatro para Z (0, 1, 2, 3). A Tabela 3.3 apresenta a estrutura das probabilidades condicionais de X em função dos seus pais, onde a primeira coluna representa o índice da linha da tabela.

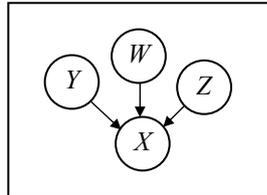


Figura 3.16 Rede Bayesiana discreta referente ao Exemplo 3.2.

A literatura apresenta alguns métodos para a obtenção de $P(x|y, w, z)$. Pode-se considerar como chave, ou identificador, para a pesquisa da probabilidade a coordenada (y, w, z) e aplicar uma busca seqüencial, binária ou de Fibonacci. O método seqüencial verifica chave-por-chave, de maneira incremental ou decremental, até que a coordenada de interesse seja identificada, enquanto que a pesquisa binária compara a chave em questão com aquela que se localiza no ponto médio de uma faixa da lista ordenada, a cada comparação a quantidade de chaves remanescentes cai pela metade caso a coordenada não tenha sido encontrada. Já o método de busca de Fibonacci baseia-se na seqüência de números de Fibonacci, onde um índice posterior, F_{t+1} , é obtido pela soma dos dois últimos,

$$F_{t+1} = F_t + F_{t-1}, \text{ onde } F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1.$$

Recomenda-se Pike (2001) para maiores detalhes sobre este método de busca.

Horowitz & Sahni (1987) e Skiena (1997) apresentam o método de busca binária como mais eficiente do que o seqüencial quando a quantidade de chaves a ser pesquisada não é tão pequena. Horowitz & Sahni (1987) acrescentam que o método de busca Fibonacci mostra-se ao menos tão eficiente quanto o binário por substituir as operações de divisão por subtrações e adições.

Tabela 3.3 Distribuição de probabilidades condicionais da variável X referente ao Exemplo 3.2.

rk	Y	W	Z	X		
				0	1	2
0	0	0	0			
1	0	0	1			

2	0	0	2	$P(x y, w, z)$
3	0	0	3	
4	0	1	0	
5	0	1	1	
6	0	1	2	
7	0	1	3	
...	
15	1	1	3	

O que se propõe aqui é um método de pesquisa direto. Isto é possível devido ao controle sobre a estrutura dos dados, isto é, a disposição das coordenadas das variáveis causais nas tabelas de probabilidades condicionais da variável conseqüente. A estrutura das probabilidades condicionais exibidas na Tabela 3.3 é definida por um algoritmo recursivo, onde pode-se perceber que os valores de Z incrementam-se a cada linha, os de W apenas quando todos os valores de Z são incrementados e os de Y quando são incrementados todos os de W . Ressalve-se que o incremento do último nível de uma variável leva ao seu primeiro nível. Chamando de período da variável na estrutura de dados, P_V , a quantidade de linhas em que a variável se mantém fixa em um determinado valor, tem-se que $P_Z = 1$, $P_W = 4$ e $P_Y = 8$ no exemplo. Note-se que os períodos são funções diretas da ordenação das variáveis causais na estrutura da tabela. Dada a ordenação dos pais de um específico nó, pode-se, a partir das informações atribuídas à chave da pesquisa e do número de níveis de tais pais, construir uma chave referente à linha na tabela, chamada de chave-linha.

A montagem da chave-linha é composta pelos períodos das variáveis causais, $(P_{V_1}, P_{V_2}, \dots, P_{V_n})$, e pelos índices que se deseja pesquisar, $(V_1=v_1, V_2=v_2, \dots, V_n=v_n)$, da seguinte forma:

$$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_i v_i P_{V_i}$$

Equação 3.7

Na Equação 3.7, P_{V_i} está diretamente ligado à ordenação das variáveis causais. A n -ésima variável terá um período unitário, a $n-1$ -ésima variável terá como período o produto do período da n -ésima pelo número de níveis também da n -ésima variável, o da $n-2$ -ésima será o produto do período da $n-1$ -ésima pelo número de níveis também da $n-1$ -ésima variável, e assim por diante. Esta recursão se segue até que a primeira variável causal na ordenação definida tenha seu período calculado.

No Exemplo 3.2, $P_Z = 1$, $P_W = (4)(1) = 4$ e $P_Y = (2)(4) = 8$. Diante destas informações, caso requeira-se $P(X=1|Y=0, W=1, Z=3)$, calcula-se

$rk(Y=0, W=1, Z=3) = (8)(0) + (4)(1) + (1)(3) = 7$ e pesquisa-se na tabela pela célula localizada na linha $rk = 7$ e coluna $X=1$, obtendo-se $P(X=1|rk=7)$, sem que sejam necessárias comparações de chaves.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho propõe uma maneira alternativa para a modelagem das incertezas presentes nas operações de sistemas de produção, com o objetivo principal de aprimorar sua análise de confiabilidade, sejam estes sistemas fabricantes de bens ou serviços. A grande motivação para tanto se dá pelas limitações das técnicas tradicionais (subcapítulos 3.1, 3.3 e 3.4), presentes desde a modelagem do processo, com ou sem eduções, à compreensão dinâmica do sistema e à precisão das inferências realizadas.

A seguir, faz-se um apanhado geral sobre a introdução de redes Bayesianas na quantificação de medidas de confiabilidade, com referência às três técnicas aqui abordadas: as análises de árvores de falhas, de eventos e de confiabilidade humana e, também, sobre o tema de redes Bayesianas propriamente dito, além de recomendações para futuros trabalhos na linha de pesquisa abordada.

4.1. Redes Bayesianas na Análise de Árvores de Falhas

Sob uma ótica mais apurada, percebeu-se que a análise de árvores de falhas é totalmente adaptável à de redes Bayesianas, como já registrado pela literatura (Bobbio et al. 2001). Isto porque uma árvore de falhas é um dos tipos mais elementares de redes Bayesianas. Pois, como mostrado no tópico 3.1, após a conversão, todas as variáveis serão dicotômicas e apenas as relações entre eventos básicos e seus subsistemas serão probabilísticas. Estas duas propriedades tornam a rede Bayesiana mais simples de ser montada e podem facilitar seus cálculos, a depender de alguns outros fatores tais como a coerência da árvore de falhas progenitora.

Propôs-se neste trabalho, tópico 3.2.2, que o tratamento de árvores de falhas coerentes pode ser realizado de forma mais eficiente em termos computacionais e oferecer inferências mais precisas quando comparadas às de métodos tradicionalmente utilizados, como o de aproximação do evento raro. Caso a árvore não possua redundâncias ou estas sejam classificadas como triviais, de geração I ou de geração II, as inferências realizadas pelo método híbrido envolvendo redes Bayesianas e a etapa de remoção de redundâncias do método dos diagramas espirais levam a estimativas exatas sobre a probabilidade de ocorrência do evento topo da árvore. Se as redundâncias forem de geração III ou elevada, provou-se que tal hibridismo oferece uma cota inferior para a confiabilidade melhor do que a do método alternativo.

Referenciando-se em Bobbio et al. (2001), viu-se também, subcapítulo 3.1, que a conversão de uma árvore de falhas para sua respectiva rede Bayesiana permite sua extrapolação de várias maneiras: a suposição de independência entre os eventos básicos pode ser removida e suas relações quantificadas; pode-se generalizar as lógicas de álgebra booleana, através de policotomias e é permitida a inclusão de incertezas quanto às mesmas.

4.2. Redes Bayesianas na Análise de Árvores de Eventos

A abordagem de árvores de eventos por redes Bayesianas teve sua primeira roupagem apresentada à literatura neste trabalho. Muito do que foi comentado no subcapítulo anterior aplica-se à análise de árvores de eventos, porém com algumas ressalvas.

Propôs-se, como discutido no subcapítulo 3.3, que a utilização de redes Bayesianas na análise de árvores de eventos proporciona um acompanhamento do sistema bem mais intuitivo. Redes Bayesianas não requerem técnicas auxiliares, prática comum na análise de árvores de eventos. Quando, por exemplo, os nós de uma árvore de eventos são postulados por árvores de falhas, todas as deficiências desta técnica são adicionadas às da primeira, o que pode resultar em modelos precários ou, até, sem valor prático. Mostrou-se, também, que redes Bayesianas absorvem as dependências entre os nós da árvore de eventos, descartando a necessidade de suposições de independência entre eles, comumente realizadas.

4.3. Redes Bayesianas na Análise de Confiabilidade Humana

Uma outra contribuição deste trabalho se deu pela tentativa de introduzir os conceitos de redes Bayesianas na análise de confiabilidade humana. Enumerou-se, a partir de Mosleh & Chang (2004), uma série de características ausentes ou restritas nos métodos encontrados na literatura da análise de confiabilidade humana, porém presentes em se tratando de redes Bayesianas (subcapítulo 3.4). Pôde-se destacar a capacidade que os conceitos de redes Bayesianas têm de posicionar o especialista educado em cenários de interesse, já que estas são uma diagramatização das relações de causa e efeito entre variáveis.

Embora brevemente e de maneira resumida, o tópico 3.2.3 mostra como redes Bayesianas permitem inferências gerenciais e operacionais. Dando suporte técnico-científico, desde a verificação da importância da habilidade na contratação de um novo electricista, até a percepção medida probabilisticamente da gravidade de sua falta de atenção durante a realização da tarefa, considerando o caso de estudo resumido de Menezes & Droggett (2004) apresentado no subcapítulo 3.4.

De fato, a adequação dos conceitos de redes Bayesianas à análise de confiabilidade pode levar a inferências mais centradas, devido à sua flexibilidade quando da modelagem de relações de causa e efeito entre os componentes de um sistema.

Pode-se considerar que técnicas clássicas, tais como a análise de árvores de falhas e de eventos, são casos particulares de redes Bayesianas, podendo ser depuradas e melhoradas proporcionalmente à quantidade de informações sobre o processo, quando abordadas sob esta perspectiva. Conclui-se, também, que no que diz respeito ao direcionamento de redes Bayesianas à análise de confiabilidade humana, muitas das dificuldades encontradas por autores da área, tais como: na modelagem das causalidades, calibração e aplicabilidade, podem ser superadas, permitindo melhores resultados.

4.4. Redes Bayesianas

Neste trabalho, buscou-se também contribuir para o tema de redes Bayesianas propriamente dito. No decorrer da apresentação, pôde-se levantar algumas questões e propor alternativas. A verificação da necessidade de um método complementar quanto ao aprendizado da rede mostra-se bastante pertinente, uma vez que o estudo dos impactos de evidências sobre os parâmetros da rede é tão importante quanto o da influência dos parâmetros da rede sobre um indivíduo em evidência (tópico 2.4.6).

No tópico 3.6, sugeriu-se um novo algoritmo para a realização de pesquisas nas tabelas de probabilidades condicionais, utilizado quando as variáveis envolvidas são discretas. A motivação para os estudos nesta área se deu devido ao fato de que esta pesquisa é efetuada em um número muito grande de vezes durante os cálculos de crenças. Quando aplicado, o algoritmo, chamado de algoritmo de pesquisa pontual, eleva significativamente o desempenho computacional, se comparado com os métodos de busca clássicos.

4.5. Desafios Futuros

Para trabalhos a seguir, sugere-se um estudo mais aprofundado sobre o tratamento de eventos cujas probabilidades tendem a zero, isto é, eventos raros, pois este parece ser um dos principais problemas para a conversão de formatos ou, mesmo, para toda uma abordagem por redes Bayesianas de problemas classicamente modelados por árvores de falhas, árvores de eventos e, supostamente, pelos propostos para a análise de confiabilidade humana. Isto pode ser realizado através de um hibridismo entre a análise de eventos precursores (Bier,1998 e Minarick,1998) e redes Bayesianas, por exemplo.

Propõe-se, também, um direcionamento à modelagem paramétrica, envolvendo variáveis contínuas, discretas ou ambas e sua implementação no *software* E&P/CHESF BBN, assim como a realização de inferências populacionais ¹ diante do acúmulo de evidências sobre indivíduos.

Por fim, mostra-se necessário um estudo mais elaborado quanto à remoção de redundâncias, principalmente no que se refere à necessidade de aplicação alternada entre o MEEC e os demais procedimentos aqui apresentados, além de uma abordagem a árvores de falhas incoerentes, subseqüentemente implementada no E&P FTA.

¹ O aprendizado de uma rede Bayesiana pode ser visto como um mecanismo de inferências populacionais, baseado no impacto de indivíduos da população geradora da rede, quando estes estão em evidência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERNARDO, J. M. & SMITH, A. F. (1995)- Bayesian theory. 3 ed. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.
- BIER, V. M. (1998)- *Accident Sequence Precursors and Probabilistic Risk Analysis*. 1 ed. Center for Reliability Engineering. Maryland.
- BOBBIO, A.; CIANCAMERLA, E.; FRANCESCHINIS, G.; GAETA, R.; MINICHINO, M & PORTINALE, L. (2003)- Sequential application of heterogeneous models for the safety analysis of a control system: a case study. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 81, p. 269-280.
- BOBBIO, A.; PORTINALE, L.; MINICHINO, M. & CIANCAMERLA, E. (2001)- Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into Bayesian networks. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 71, p. 249-260.
- BRAGA, A. P.; LUDERMIR, T. B. & CARVALHO, A. P. (2000)- *Redes neurais artificiais: teoria e aplicações*. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M. (2002a)- *Decisões racionais em situações de incerteza*. Editora Universitária da UFPE. Recife.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M. (2002b)- *Sistemas Probabilísticos*. Talus. Recife.
- CASTILLO, E.; GUTIÉRREZ, J. M.; HADI, A. S. & SOLARES, C. (1997)- Symbolic propagation and sensitivity analysis in Gaussian Bayesian networks with application to damage assessment. *Artificial Intelligence in Engineering*. Vol. 11, p. 173-181.
- CHANG, Y. H. & MOSLEH, A. (1999)- Cognitive modeling and dynamic probabilistic simulation of operating crew response to complex system accidents (ADS-IDACrew). *Center for Technology Risk Studies*. University of Maryland.
- CHESF (2004)- *Linhas de Transmissão/ Visão Geral*. s.n.t. Disponível em http://www.chesf.gov.br/xml/energia_linhasdetransmissao_visaogeral.php. Acesso em 30 de Julho de 2004.
- COOPER, G. F. (1990)- The Computational Complexity of Probabilistic Inference Using Bayesian Belief Networks. *Artificial Intelligence*. Vol. 42, p. 393-405.

- COZMAN, F. .G (2004)- *JavaBayes system*. s.n.t. Disponível em <http://www.poli.usp.br/p/fabio.cozman>. Acesso em 02 de Dezembro de 2004.
- CRYER, J. D. (1986)- *Time series analysis*. PWS Publishers. Boston.
- DEITEL, H. M. & DEITEL, P. J. (2001)- *Java™, como programar*. 3 ed. Bookman. Porto Alegre.
- DIÉZ, F. J. (1996)- Local conditioning in Bayesian networks. *Artificial Intelligence*. Vol. 87, p. 1-20.
- EDWARDS, D. (1949)- *Introduction to Graphical Modelling*. 2 ed. Springer. New York.
- FIRMINO, P. R.; MOREIRA, P. I.; CHIKUSHI, R. T. & DROGUETT, E. L. (2004a) - Diagramas espirais: Método auxiliar para a resolução ótima de árvores de falhas via OBDD. *Artigo completo submetido e aceito para o SBPO 2004*. Minas Gerais.
- FIRMINO, P. R.; MOREIRA, P. I.; CHIKUSHI, R. T. & DROGUETT, E. L. (2004b) - Métodos para a remoção de redundâncias de árvores de falhas. *Artigo completo submetido e aceito para o ENEGEP 2004*. Santa Catarina.
- GEMAN, S. & GEMAN, D. (1984)- Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 6, p. 721-741.
- GEYER, C. J. (1992)- Practical Markov chain Monte Carlo. *Statistic Science*. Vol. 7, 473-511.
- GILKS, W. R.; RICHARDSON, S. & SPIEGELHALTER, D. J. (1996)- *Markov chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall/CRC. Florida.
- HECKERMAN, D. (1995)- *A Tutorial on Learning Bayesian Networks*. Microsoft Research. Washington.

- HEGER, A. S.; BHAT, J. K.; STACK, Q. W. & TALBOTT, D. V. (1995)- Calculating exact top-event probabilities using $\Sigma\Pi$ -Patrec. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 50, p. 253-259.
- HOLLNAGEL, E. (1998)- *Cognitive Reliability and Error Analysis Method CREAM*. Elsevier Science. Oxford.
- HOROWITZ, E. & SAHNI, S. (1987)- *Fundamentos de estruturas de dados*. 4 ed. Campus. Rio de Janeiro.
- HRYCEJ, T. (1990)- Gibbs Sampling in Bayesian Networks. *Artificial Intelligence*. Vol. 46, p. 351-363.
- KORB, K. B. & NICHOLSON, A. E. (2003)- *Bayesian artificial intelligence*. Chapman & Hall/CRC. Florida.
- LADEIRA, M.; VICARI, R. M. & COELHO, H. (1999)- In: Encontro Nacional de Inteligência Artificial. Rio de Janeiro. *Redes Bayesianas Multiagentes*.
- MARTZ, H. F. & WALLER, R. A. (1982)- *Bayesian reliability analysis*. 2 ed. Krieger Publishing Company. Florida.
- MENÊZES, R. C. & DROGUETT, E. L. (2004)- Uma metodologia para a Avaliação da Confiabilidade Humana em atividades de substituição de cadeias de isoladores em linhas de transmissão. Recife. 75p. (Mestrado- Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção/ UFPE).
- MINARICK, J. W. (1998)- Two State-of-the-Art Precursor Analysis. *International Workshop Series on Advanced Topics in Reliability and Risk Analysis*. Vol. 1, p. 119-127.
- MOSLEH, A. & CHANG, Y. H. (2004)- Model-based human reliability analysis: prospects and requirements. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 83, p. 241-253.
- MOREIRA, P. I.; FIRMINO, P. R. & DROGUETT, E. L., (2004)- Aplicação do método dos diagramas espirais no auxílio para a resolução de árvores de falhas via OBDD. *Artigo completo submetido e aceito para o SBPO 2004*. Minas Gerais.
- NEAL, R. M. (2003)- Slice Sampling. *The Annals of Statistics*. Vol. 31, p. 705-767.

- NEAPOLITAN, R. E. (2004)- *Learning Bayesian Networks*. Pearson Prentice Hall. New Jersey.
- PAPAZOGLU, I. A. (1998)- Mathematical foundations of event trees. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 61, p. 169-183.
- PEARL, J. (1987)- Evidential Reasoning Using Stochastic Simulation of Causal Models. *Artificial Intelligence*. Vol. 33, p. 131-132.
- PEARL, J. (1988)- *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. 2 ed. Morgan Kaufmann. California.
- PEARL, J. (2000)- *Causality, Reasoning, and Inference*. Cambridge University Press. New York.
- PETROBRAS (2004)- *Desenvolvimento Tecnológico*. s.n.t. Disponível em http://www2.petrobras.com.br/saladeaula/petroleo/desenvolvimento_tecnologico.stm. Acesso em 28 de Outubro de 2004.
- PIKE, R. W. (2001)- *Optimization for Engineering Systems*. Ralph W. Pike. Louisiana. Disponível em <http://www.mpri.lsu.edu/bookindex.html>. Acesso em 07 de Outubro de 2004.
- PHAM, D. T. & LIU, X. (1995)- *Neural networks for identification, prediction and control*. Springer-Verlag London. Great Britain.
- REAY, K. A. & ANDREWS, J. D. (2002)- A fault tree analysis strategy using binary decision diagrams. *Reliability Engineering and System Safety*. Vol. 78, p. 45-56.
- ROSS, S. M. (2000)- *Introduction to Probability Models*. 7 ed. Harcourt Academic Press. Florida.
- ROSS, S. M. (2002)- *Simulation*. 3 ed. Academic Press. California.
- SHAFER, G. (1976)- *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press. New Jersey.

- SKIENA, S.S. (1997)- *The algorithm design manual*. Springer TELOS. New York.
- SUERMONDT, H. J. & COOPER, G. F. (1991)- Initialization for the method of conditioning in Bayesian belief networks. *Artificial Intelligence*. Vol. 50, p. 83-94.
- SUN (2001)- *JavaTM Programming Language*. Sun Microsystems. Colorado.
- SWAIN, A D & GUTTMANN, H. E. (1983)- *Handbook of Human Reliability Analysis with Emphasis on Nuclear Power Plant Applications*. U. S. Nuclear Regulatory Commission. Washington.
- WICKENS, C. D.; GORDON, S. E. & LIU, Y. (1997)- *An introduction to human factors engineering*. Addison Wesley Longman. New York.
- YORK, J. (1992)- Use of the Gibbs Sampler in expert systems. *Artificial Intelligence*. Vol. 56, p. 115-130.

ANEXOS

ANEXO 1

A seguir demonstra-se a desigualdade de Boole, a qual resulta em que $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq$

$\sum_{i=1}^n P(E_i)$, através de conceitos das teorias dos conjuntos e do cálculo das probabilidades.

Seja um conjunto com k eventos quaisquer, $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$, tem-se, através de regras de partição que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = P(E_1) + P(E_2 \cap E_1^c) + P(E_3 \cap E_1^c \cap E_2^c) + \\ + P(E_4 \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) + \dots + P(E_k \cap E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_{k-1}^c),$$

onde E_i^c refere-se ao evento complementar de E_i .

Comparando, agora, a probabilidade da união com o somatório das probabilidades de ocorrência de eventos, vê-se que

$$P(E_2 \cap E_1^c) \leq P(E_2), \quad P(E_3 \cap E_1^c \cap E_2^c) \leq P(E_3), \\ P(E_4 \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) \leq P(E_4), \quad \dots, \quad P(E_k \cap E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_{k-1}^c) \leq P(E_k).$$

Como cada termo da união, a partir do 2º, é no máximo igual ao seu termo em comparação no somatório, conclui-se que $P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$.

CQD.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

A seguir, demonstra-se a Equação 2.1, que mostra como se comporta o erro percentual máximo cometido pelo método de aproximação do evento raro diante de uma árvore de falhas que possui dois cortes mínimos, C_1 e C_2 , compostos por n eventos em comum e apenas 1 diferente.

O erro percentual máximo cometido ocorre quando $P(C_i) = \frac{1}{50 \cdot 2}$, $i=1, 2$, pois este é o limite superior aceitável para a aplicação do método de aproximação do evento raro.

Com $n=0$, os cortes são compostos por um evento apenas, $C_1 = \{E_1\}$ e $C_2 = \{E_2\}$, e $P(E_i) = \frac{1}{(100)^i}$, $i=1, 2$, a fim de tornar o erro percentual máximo que, neste caso, é dado por:

$$erro_{\%} = \frac{\left| P(C_1 \cup C_2) - \sum_{i=1}^2 P(C_i) \right|}{P(C_1 \cup C_2)} = \frac{\left| 2P(E_1) - P(E_1)^2 - 2P(E_1) \right|}{2P(E_1) - P(E_1)^2} = \frac{|-P(E_1)|}{2 - P(E_1)}.$$

Note-se que o erro percentual está em função apenas de E_1 . Isto se dá por estar-se considerando as probabilidades tanto de E_1 quanto de E_2 iguais.

Com $n=1$: $C_1 = E_1 \cap E_2$, $C_2 = E_1 \cap E_3$, $P(E_i) = \frac{1}{(100)^{i/2}}$, $i=1, 2, 3$, e supondo independência entre os eventos,

$$erro_{\%} = \frac{\left| P(C_1 \cup C_2) - \sum_{i=1}^2 P(C_i) \right|}{P(C_1 \cup C_2)} = \frac{\left| 2P(E_1)^2 - P(E_1)^3 - 2P(E_1)^2 \right|}{2P(E_1)^2 - P(E_1)^3} = \frac{|-P(E_1)|}{2 - P(E_1)}$$

...

Com um n qualquer: $C_1 = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n \cap E_{n+1}$, $C_2 = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n \cap E_{n+2}$, $P(E_i) = \frac{1}{(100)^{1/(n+1)}}$, $i=1, 2, 3, 4, \dots, n+2$, e supondo independência entre os eventos,

$$erro_{\%} = \frac{\left| P(C_1 \cup C_2) - \sum_{i=1}^2 P(C_i) \right|}{P(C_1 \cup C_2)} = \frac{\left| 2P(E_1)^{n+1} - P(E_1)^{n+2} - 2P(E_1)^{n+1} \right|}{2P(E_1)^{n+1} - P(E_1)^{n+2}} = \frac{|-P(E_1)|}{2 - P(E_1)}.$$

Substituindo $P(E_1)$ por $\frac{1}{(100)^{1/(n+1)}}$, encontra-se

$$erro_{\%} = \frac{1}{\left| 1 - 2 \cdot 100^{\frac{1}{n+1}} \right|}$$

CQD.