



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Joab Marques do Nascimento

**Matemática financeira nos livros didáticos de
matemática aprovados no PNLD**

**Recife
2023**

Joab Marques do Nascimento

**Matemática financeira nos livros didáticos de matemática
aprovados no PNLD**

Trabalho apresentado a Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa

Recife

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Nascimento, Joab Marques do.

Matemática financeira nos livros didáticos de matemática aprovados no
PNLD / Joab Marques do Nascimento. - Recife, 2023.
102 p., tab.

Orientador(a): Paulo Roberto Câmara de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática -
Licenciatura, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática financeira. 2. Livro didático. 3. Educação financeira. I.
Sousa, Paulo Roberto Câmara de. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Joab Marques do Nascimento

**Matemática financeira nos livros didáticos de
matemática aprovados no PNLD**

Trabalho apresentado a Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa

Aprovado em: 12 de Junho de 2023.

Banca Examinadora

Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.Dr. Airton Temistoclenes Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^ª. Me. Jéssica Hayanna Monteiro
Universidade Federal de Pernambuco

Ao meu Deus pela sua graça e infinita misericórdia,
À minha família pelo apoio que sempre me deram,
Ao professor e mestre Paulo Roberto Câmara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela força para perseverar e pela capacidade de aprender pois sem Ele nada seria possível. À minha família pelo apoio e pela motivação que sempre me deram para enfrentar os meus desafios.

Ao Prof. Me. Paulo Roberto Câmara, pela orientação nessa pesquisa, pelo apoio, e pela disponibilidade para me atender sempre que possível para tirar minhas dúvidas; com toda a certeza a sua dedicação nessa orientação foi fundamental para a concretização desse projeto.

Em suma, agradeço à todos que direta ou indiretamente me deram apoio e suporte para realizar essa pesquisa, meus sinceros sentimentos à todos.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação". – Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O presente trabalho investiga de que forma os livros didáticos têm contribuído para o processo de ensino e aprendizagem da matemática financeira. Para fazer esta investigação foram escolhidos quatro livros didáticos de ensino médio de diferentes versões do PNLD que abordavam o tema de matemática financeira, como também foi elaborado previamente um questionário composto por oito questões que visavam analisar diferentes aspectos das abordagens de matemática financeira feitas pelas obras, tais como: abordagem metodológica, sequência didática, conceitos contemplados, referência a recursos didáticos etc. Na análise efetuada nos livros didáticos verificou-se que, apesar da indicação no Programa Nacional do Livro Didático, algumas obras deixaram de contemplar alguns conceitos importantes dentro do ensino da matemática financeira; além disso, foi constatado também que algumas obras continham erros e descuidos em suas abordagens.

Palavras-chave: Matemática financeira. Livro didático. Educação financeira.

ABSTRACT

The presente work investigates how textbooks have contributed to the teaching and learning process of financial mathematics. In order to carry out this investigation, four high school textbooks from different versions of the PNLD that addressed the theme of financial mathematics were chosen, as well as a questionnaire composed of eight questions that aimed to analyze different aspects of the approaches to financial mathematics made by the works, such as: methodological approach, didactic sequence, covered concepts, reference to didactic resources etc. In the analysis carried out in the textbooks, it was verified that, despite the indication in the National Textbook Program, some works did not contemplate some important concepts within the teaching of financial mathematics; in addition, it was also found that some works contained errors and oversights in their approaches.

Key-words: Financial math. Textbook. Financial education.

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1 – Evolução do montante à juros simples e composto ao passar do tempo	57
Tabela 2 – Tabela de amortização SAC do empréstimo de R\$ 80.000,00	62
Tabela 3 – Tabela price de amortização do empréstimo de R\$ 18.000,00	70
Tabela 4 – Tabela price de amortização do empréstimo de R\$ 11.500,00	72
Tabela 5 – Tabela de amortização SAC do empréstimo de R\$ 11.500,00.	73
Tabela 6 – sequência didática dos conteúdos de Matemática Financeira apresentadas nas obras analisadas.	88
Tabela 7 – Tecnologias exploradas nas abordagens de Matemática Financeira das obras.	91
Tabela 8 – Tipos de situações-problemas explorados nos contextos teóricos das obras sobre Juro Simples.	92
Tabela 9 – Tipos de situações-problemas explorados nos contextos teóricos das obras sobre Juro Composto.	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
Plifed	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNLDEM	Programa do Livro Didático para o Ensino Médio
Colted	Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático
INL	Instituto Nacional do Livro
Fename	Fundação Nacional do Material Escolar
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
PNBE	Programa Nacional Biblioteca da escola
BCC	Base Curricular Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
OCDE	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
ONU	Organização das Nações Unidas
P.A	Progressão Aritmética
P.G	Progressão Geométrica
MEC	Ministério da Educação
USAID	<i>United States Agency for International Development</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\%$	Porcentagem
$\Rightarrow$	Implica
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\cong$	Aproximadamente
$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$\therefore$	Portanto
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais exceto o zero
$\mathbb{Q}^+$	Conjunto dos números racionais positivos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	
3.1	Matemática Financeira e Educação Financeira	18
3.1.1	O que é Matemática Financeira	18
3.1.2	O que é Educação Financeira	19
3.2	Conteúdos abordados na Matemática Financeira do Ensino Médio	21
3.2.1	Porcentagem	21
3.2.2	Progressão Aritmética	25
3.2.2.1	Soma dos termos de uma P. A	27
3.2.3	Progressão Geométrica	31
3.2.3.1	Soma dos termos de uma P.G finita	34
3.2.3.2	Soma dos termos de uma P.G infinita	37
3.2.4	Lucro e Prejuízo	38
3.2.5	Aumentos e Descontos sucessivos	41
3.2.6	Juros simples e composto	44
3.2.6.1	Juro simples	45
3.2.6.2	Juro composto	50
3.2.7	Sistemas de Amortização	58
3.2.7.1	Sistema SAC (Sistema de Amortização Constante)	58
3.2.7.2	Sistema price	65
3.3	O Livro Didático	
3.3.1	Um pouco da história do Livro Didático no Brasil	75
3.3.2	A importância do Livro Didático	78
3.3.3	O PNLD (Programa Nacional do Livro Didático)	81
4	RESULTADOS E DISCURSÕES	85
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100

1. INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática é, por natureza, uma ciência que estuda entidades abstratas que são definidas logicamente. Por esta razão, não é incomum que muitos alunos que se deparam com essa área do conhecimento durante sua vida escolar, sintam alguma dificuldade de encontrar alguma aplicabilidade para muitos conceitos que são abordados nas aulas de matemática, na sua vida cotidiana. Por muitas vezes, quando um aluno encontra muita dificuldade para compreender um determinado conceito matemático, é bastante comum ele fazer o seguinte questionamento: Onde vou usar isso na minha vida? Este tipo de indagação ocorre muitas vezes pelo fato de o aluno não conseguir encontrar uma relação entre os conteúdos matemáticos estudados e as situações que ele vivência no dia a dia. No entanto, sabemos que muitas ideias foram desenvolvidas na matemática com a finalidade de encontrar soluções para problemas práticos da vida do ser humano. Por esta razão, existem muitas áreas dentro da matemática que podem ser aplicadas em muitas situações do contexto social das pessoas. Isso faz com que a matemática seja uma ferramenta útil para interpretar e resolver muitos problemas que as pessoas encontram no seu dia a dia, na sua vida social. Dentre as muitas áreas da matemática que podem ser aplicadas em situações práticas, podemos destacar a matemática financeira. Além disso, podemos encontrar razões para afirmar que a matemática financeira é uma das áreas mais importantes da matemática, dentre as que são abordadas na educação escolar.

Uma dessas razões, dentre muitas que poderíamos elencar, é o fato de que a matemática financeira está presente nos mais diversos setores de nossa sociedade: no orçamento familiar, nas finanças das grandes empresas e instituições financeiras, na economia do Estado etc.; ou seja, ela tem muitas aplicações. Um outro motivo que evidencia a importância da matemática financeira, é que através dos conhecimentos que ela mobiliza, as pessoas podem fundamentar as suas decisões sobre administração financeira de uma maneira mais segura. Além do mais, um outro fato que respalda a importância da abordagem dessa temática nas escolas, ou seja, que as pessoas saiam da escola instruídas sobre os fundamentos da matemática financeira: capital, juros, crédito, poupança, investimento, dívida, amortização etc., é o fato de que os índices de inadimplência no Brasil estão cada vez maiores. Segundo

o site do Serasa, de acordo com um recente levantamento, só no mês de setembro de 2022, o Brasil registrou 411 mil novos inadimplentes, concretizando um crescimento do índice de inadimplência pelo nono mês consecutivo; com isso, o Brasil chegou no mês de setembro a 68,39 milhões de inadimplentes, o que representa mais de 30% da população nacional. No entanto, sabemos que os níveis de inadimplência da população não estão necessariamente diretamente relacionados com os níveis de conhecimento sobre matemática financeira das pessoas, ou pelo menos não dependem apenas deste fator; pois, é razoável admitirmos que, embora uma pessoa seja bem instruída financeiramente, isto não a isenta da possibilidade de cair em situação de inadimplência, ou seja, não conseguir pagar suas dívidas e ficar com o nome restrito; uma vez que, muitas vezes, por mais prudente que seja a pessoa financeiramente falando, ela pode ser surpreendida com uma situação que afete significativamente a sua capacidade de saldar uma dívida, como perder o emprego, por exemplo. Contudo, é inegável que as pessoas que não têm um conhecimento razoável sobre finanças estão mais propensas a cair em inadimplência.

Cada vez mais as tecnologias vão se desenvolvendo e o mundo se modernizando, e isto também inclui o âmbito das transações financeiras. Se antes, para abrir uma conta bancária, realizar a compra de um móvel ou fazer o pagamento de uma dívida, era necessário ir ao banco, à loja, à casa lotérica, atualmente, as pessoas podem fazer tudo isto sem sair de casa, apenas utilizando um dispositivo eletrônico; tudo ficou mais simples e prático, sem burocracias. No entanto, se por um lado as tecnologias digitais e os novos meios de pagamento, como o pix por exemplo, tornaram as transações financeiras mais rápidas e práticas, por outro lado, esses novos mecanismos de pagamento representam um perigo para muitas pessoas que têm hábitos consumistas. Sobretudo dentro do contexto de uma sociedade capitalista, onde as pessoas vivem diariamente sendo bombardeadas, através dos meios de comunicação e mídias sociais, por propagandas que estimulam o consumo. Todos esses fatores inerentes à sociedade atual, de uma sociedade capitalista que prega o consumismo e o acúmulo de bens, e as facilidades para a realização de compras e transações financeiras propiciadas pelo desenvolvimento tecnológico, fazem com que a matemática financeira seja um conhecimento cada vez mais imprescindível para que o indivíduo possa manter o seu equilíbrio financeiro nesse contexto social.

Diante do exposto, podemos perceber que a matemática financeira é um ramo do conhecimento matemático extremamente importante para a vida social dos alunos, pois através do ensino da matemática financeira o aluno pode desenvolver competências necessárias para tomar decisões prudentes, diante das várias questões que envolvem ou envolverão a sua vida financeira, tais com: comprar à vista ou parcelado? Poupar ou investir em ações? Escolher este ou aquele sistema de amortização? Dentre outras questões. No entanto, precisamos admitir que o simples fato desse assunto ser abordado em sala de aula, ou a simples prática de definir várias fórmulas de matemática financeira e aplicar exercícios diretos não são garantias de que se obterá o resultado desejado, ou seja, que se vai conseguir fazer com que o aluno desenvolva uma compreensão razoável sobre os princípios básicos de administração financeira. Por esta razão, para que se atinja o objetivo de ensino da matemática financeira, que é fazer com que os alunos desenvolvam competências sobre administração de recursos financeiros, faz-se necessário empregar abordagens, metodologias e recursos didáticos no processo de ensino-aprendizagem que propiciem esse desenvolvimento. E dentre os vários recursos didáticos importantes que o professor pode utilizar no ensino da matemática financeira, destaca-se o livro didático.

Por este motivo, o objetivo da presente pesquisa foi analisar as abordagens sobre os conteúdos de matemática financeira presentes nos livros didáticos aprovados no PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), tendo em vista a importância que esse instrumento didático tem para a atuação do professor de matemática. Como já foi ressaltado, sabemos que a matemática financeira é um dos conteúdos mais úteis e importantes dentre os que são abordados na educação básica, em detrimento da grande aplicabilidade que esse ramo do conhecimento matemático tem na vida das pessoas; portanto, devido a seriedade e importância desse tema, faz-se necessário que o processo metodológico de ensino seja bem planejado pelo professor para que a educação financeira seja realmente significativa, ou seja, para que o professor consiga fazer com que os seus alunos compreendam a matemática financeira como um importante instrumento que eles podem usar em suas vidas para o auxiliar à gerenciar suas finanças; e dentre as etapas do processo de planejamento metodológico, encontrasse a escolha do livro didático.

2. METODOLOGIA

Na presente pesquisa investigamos a abordagem adotada por livros didáticos de matemática no ensino de Matemática Financeira. Como material de análise, escolhemos 5 livros didáticos aprovados pelo PNLD.

Os livros selecionados estão relacionados a seguir:

Livro A: Conexões: matemática e suas tecnologias, Fabio Martins de Leonardo. Editora Moderna. São Paulo, 2020.

Livro B: Matemática: Sistemas, matemática financeira e grandezas. Bonjorno, Giovanni Jr e Paulo Câmara. Editora Prisma. São Paulo, 2020.

Livro C: Novo olhar matemática. Joamir Roberto de Souza. 2. ed. Editora FTD. São Paulo, 2013.

Livro D: Matemática Paiva. Manoel Paiva. 1. ed. Editora Moderna. São Paulo, 2009.

Nós procuramos investigar tais coleções com a finalidade de responder a seguinte questão:

“De que maneira os livros didáticos têm contribuído no processo de ensino e aprendizagem de Matemática Financeira?”

Com o objetivo de responder à pergunta acima, nós seguimos um roteiro de análise baseado em um questionário previamente elaborado em conjunto com o professor orientador, o professor Paulo Roberto câmara, após algumas reuniões em que discutimos quais elementos seriam analisados dentro das abordagens de Matemática Financeira presentes nos livros didáticos selecionados. As questões elaboradas para analisar os livros didáticos foram as seguintes:

MATEMÁTICA FINANCEIRA X LIVROS DIDÁTICOS: Instrumentos de análise das obras.

- 1) *Em qual(ais) volume(s) da obra o(s) autor(es) explora(m) a Matemática Financeira?*
- 2) *Quais conceitos de Matemática Financeira/Educação Financeira os autores exploram no texto de abertura do capítulo?*
- 3) *Qual a sequência didática que a obra apresenta ao explorar as ideias da Matemática Financeira? Numeração por ordem de apresentação:*
 - () *Porcentagem*
 - () *Aumentos e descoos sucessivos*

- ☐ *Lucro e prejuízo*
 - ☐ *Juro Simples*
 - ☐ *Juro composto*
 - ☐ *Amortização*
- 4) *A obra explora novas tecnologias no estudo da Matemática Financeira?*
- ☐ *Calculadora básica*
 - ☐ *Calculadora científica*
 - ☐ *Calculadora HP*
 - ☐ *Planilha EXCEL*
 - ☐ *Outras. Quais?*
- 5) *No estudo do Juro Simples a obra, no contexto teórico, explora situações-problema que visam determinar o valor do juro, taxa percentual, tempo (ou período), capital e montante?*
- ☐ *Juro* ☐ *Capital*
 - ☐ *Montante* ☐ *Taxa percentual*
 - ☐ *Tempo/período*
- 6) *No estudo do Juro Composto a obra, no contexto teórico, explora situações-problema que visam determinar o valor do juro, taxa percentual, tempo (ou período), montante e capital?*
- ☐ *Juro* ☐ *Capital*
 - ☐ *Montante* ☐ *Taxa percentual*
 - ☐ *Tempo/período*
- 7) *A obra estabelece relações entre os conteúdos de Matemática Financeira e outros conteúdos tais como Progressões Aritméticas e Geométricas, Função Afim e Função Exponencial?*
- 8) *O livro faz referência à Educação Financeira no texto do capítulo ou no Manual do professor?*

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

3.1.1 O que é matemática financeira

Segundo Gouveia (2022): “A matemática financeira é a área da matemática que estuda a equivalência de capitais no tempo, ou seja, como se comporta o valor do dinheiro no tempo”, ou seja, conforme esta definição, podemos entender a área da matemática financeira como um campo que investiga a relação entre as variáveis: dinheiro e tempo; assim sendo, podemos compreender que ela abrange conceitos como: inflação monetária, variações do câmbio, acúmulo de juros etc. Uma outra definição de matemática financeira podemos encontrar no site do banco pan, o qual, em seu blog, assim a descreve:

Matemática financeira é o nome dado a aplicação dos conceitos matemáticos para controle financeiro. Ou seja, consiste na utilização de cálculos para organizar as ações relacionadas ao bom uso do dinheiro, tanto nas finanças pessoais quanto na contabilidade de organizações. (Banco pan, 2022)

Percebemos com isso que a matemática financeira se aplica tanto ao indivíduo em particular, o auxiliando na sua organização financeira, em seu dia a dia, quanto às organizações, como as grandes empresas, por exemplo, na administração de suas economias. Sabemos que a matemática financeira é um campo muito amplo, com muitas aplicações, que perpassa e transcende o âmbito da educação básica e que vai desde conceitos simples, como juros simples e composto, até aplicações mais avançadas, como as que estão relacionadas ao mercado das ações nas bolsas de valores. Todavia, em relação ao campo de interesse da presente pesquisa, abordaremos apenas os conteúdos de matemática financeira que são abordados na educação básica, particularmente aqueles que são trabalhados nas turmas do ensino médio.

Por fim, basicamente, podemos entender a matemática financeira como princípios matemáticos aplicados no gerenciamento do uso e da aplicação do dinheiro; em outras palavras, a matemática financeira é um ramo da matemática aplicada que nos auxilia e nos mostra como a matemática pode ser utilizada para melhorar a nossa relação com o dinheiro e com o consumo. Diante dessa perspectiva, vale ressaltarmos a necessidade de se apresentar a matemática financeira no ensino básico, não simplesmente como um conjunto de conceitos e fórmulas,, mas como uma

importante ferramenta que pode auxiliar os estudantes em seu dia-a-dia, na sua organização financeira; e para tal, faz-se necessário no processo de ensino/aprendizagem a utilização de recursos didáticos ou de meios de abordagem que aproximem ou relacionem a matemática financeira com o contexto social do aluno. Ou seja, isso significa dizer que as situações que os alunos encontram no seu cotidiano, referentes às situações financeiras, de utilização do dinheiro, devem ser levadas em consideração e priorizadas quando forem apresentadas questões contextualizadas para os alunos sobre matemática financeira.

3.1.2 O que é educação financeira

Em 2005, a OCDE (Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico, órgão ligado à ONU) publicou um documento sobre os princípios e boas práticas de educação financeira, e nesse documento ela nos traz a seguinte definição:

Educação financeira pode ser entendida como o processo mediante o qual consumidores e investidores financeiros melhoram a sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, instrução ou aconselhamento objetivo, desenvolvam as habilidades e a confiança necessárias para se tornarem mais cientes dos riscos e oportunidades financeiras, para fazerem escolhas baseadas em informação, para saberem onde procurar ajuda e para realizarem outras ações efetivas que melhorem o seu bem-estar financeiro (OCDE, tradução livre).

Vale ressaltar que a educação financeira não é responsabilidade apenas das instituições de ensino, segundo o entendimento da OCDE, mas também de outras instituições, como as instituições financeiras, por exemplo; entretanto, orienta-se que a educação financeira, quando promovida por instituições financeiras, deve ser transmitida sem interesses comerciais, ou seja, as instituições não devem procurar educar os seus clientes com o intuito de os estimular à consumir determinado produto ou serviço, segundo as orientações da OCDE no mesmo documento publicado em 2005, como se segue:

Deve-se incentivar as instituições financeiras a distinguir claramente entre educação financeira e informações financeiras e orientação financeira “comercial”. Qualquer orientação financeira para fins comerciais deve ser transparente e divulgada claramente sua natureza comercial se for promovida como uma iniciativa de educação financeira (OCDE, tradução livre).

Apesar dessas observações da OCDE, bem sabemos que, em meio ao nosso contexto social puramente capitalista, muitas vezes até certos programas de educação financeira promovidos por algumas instituições, podem estar comprometidos com certos interesses particulares, de cunho comercial; diante desse paradigma de educação financeira, podemos afirmar que o contexto escolar se apresenta como um dos principais ambientes para a promoção da educação financeira, pois em tal contexto, pretende-se, pelo menos, que a educação financeira será apresentada aos alunos sem o viés de interesses comerciais. Ainda sobre o contexto escolar, podemos elencar pelo menos mais duas razões pelas quais esse ambiente de ensino se configura como um dos mais importantes (se não o mais) dentre os ambientes de aprendizagem de matemática financeira:

I – A abrangência dos programas de ensino de matemática financeira aplicados na educação básica: pois sabemos que, quando falamos de educação básica, estamos falando de um programa de ensino que atende há milhões de crianças e adolescentes em todo país;

II – A necessidade das crianças de serem familiarizadas com os assuntos relacionados à matemática financeira e a economia desde muito jovem, para que, quando elas tiverem mais maduras e tenham a oportunidade de administrarem as suas próprias finanças, elas já tenham interiorizado princípios importantes de educação financeira, como: a necessidade de poupar, a importância de analisar sempre o quanto se está pagando em juros, os cuidados que se devem tomar para não se entrar em situação de inadimplência, dentre outros;

É por esta razão também que a OCDE (2005) ratificou naquele documento a importância, ou antes de tudo, a necessidade de se trabalhar com a educação financeira com as pessoas desde cedo, quando afirma que: “a educação financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras mais cedo possível em suas vidas.” Portanto, observamos a importância da abordagem dessa temática na educação básica.

3.2 CONTEÚDOS ABORDADOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA DO ENSINO MÉDIO.

O objetivo do presente tópico é apresentar os principais conteúdos que estão relacionados com a matemática financeira estudada no ensino médio; tanto os conceitos que servem de base para o estudo da matemática financeira, como porcentagem, P.A e P.G; quanto conceitos mais avançados, como os sistemas de amortização.

3.2.1 Porcentagem

A porcentagem ou percentagem é uma medida de razão na base 100, ela indica a quantidade ou a proporção de uma determinada medida em relação à cem unidades de alguma coisa, ou seja, ela representa uma proporção entre dois valores expressa a partir de uma fração cujo denominador é 100. Habitualmente, denota-se a porcentagem pelo símbolo “%”. O conceito de porcentagem é amplamente aplicado em muitas áreas da matemática e de outras áreas do conhecimento, dentre elas a economia; por esta razão a noção de porcentagem é fundamental para a compreensão da linguagem matemática utilizada na matemática financeira, pois, o emprego de taxas percentuais é bastante comum na área das finanças para representar taxas de juros, de aumentos, de descontos, de inflação, de lucro, etc.; ou seja, são muitas as situações em que a porcentagem é utilizada na matemática financeira, fazendo com que esse conhecimento seja um dos pré-requisitos para o estudo dessa área da educação matemática. Por esta razão, embora a porcentagem seja um conceito relativamente simples, que é trabalhado no ensino fundamental, a sua noção é fundamental para os alunos do ensino médio, para que eles possam compreender a linguagem e os principais conceitos de matemática financeira trabalhados no nível médio de ensino.

Definição 3.1 O termo $x\%$, onde x é um número real qualquer, representa a razão centesimal $\frac{x}{100}$ e é chamado de porcentagem, taxa percentual ou percentual.

A ideia de porcentagem está intimamente relacionada com o conceito de proporcionalidade, por esta razão, é habitual na solução de questões envolvendo porcentagem a utilização do conhecido método da regra de três, como no exemplo a seguir:

Questão 3.1. *Conforme a medida provisória MP n.1091, de 2021, o salário-mínimo no Brasil que antes era de R\$ 1.100,00, teve o seu valor reajustado, passando a valer R\$ 1.212,00 a partir de janeiro de 2022. Qual foi o percentual de reajuste do salário-mínimo?*

Solução 1: utilizando a regra de três temos a seguinte situação:

Porcentagem		Valor do salário-mínimo
X	→	1.212
100	→	1.100

Ou seja, “x” está para 100 assim como 1.212 está para 1.100. Então:

$$\frac{X}{100} = \frac{1.212}{1.100}$$

Logo, temos que,

$$1.100X = 100 * 1.212$$

$$X = \frac{121.200}{1100} \cong 110,18$$

Portanto, o salário-mínimo no Brasil em 2022 corresponde a 110,18% do valor do salário-mínimo anterior, logo o reajuste salarial foi de 10,18%.

Solução 2: Uma outra maneira de calcular o percentual de reajuste salarial também utilizando a regra de três é calcular primeiramente a diferença entre os salários, ou seja, o valor que será acrescentado ao último salário-mínimo, e em seguida, aplicar a regra de três para determinar o percentual de reajuste diretamente, como se segue:

Salário-mínimo no Brasil em 2021: R\$ 1.100,00

Salário-mínimo no Brasil em 2022: R\$ 1.212,00

Valor do reajuste salário: R\$ 1.212,00 – R\$ 1.100,00 = R\$ 112,00

Logo, aplicando a regra de três novamente temos a seguinte relação:

Porcentagem		Valor do reajuste e do último salário-mínimo
X	→	112
100	→	1100

Logo, temos que:

$$\frac{X}{100} = \frac{112}{1100}$$

$$\text{Portanto, } 1100X = 100 * 112 \Rightarrow X = \frac{11.200}{1100} \cong 10,18.$$

Questão 3.2. Para aumentar em 50% a área de um triângulo qualquer, quantos por cento devemos aumentar a medida da altura, se a medida da base for aumentada em 20%?

Solução: Para chegarmos à resposta dessa questão, precisamos recorrer à fórmula da área de um triângulo qualquer, dados a sua base e a sua altura. Sabemos que, dado um triângulo com base b e altura h , a fórmula da área desse triângulo é definida como $\frac{1}{2}b * h$. Com base nessas informações, sejam A_1, b_1 e h_1 a área, a base e a altura, respectivamente, do triângulo em questão antes de ter a sua área aumentada. Analogamente, sejam A_2, b_2 e h_2 a área, a base e a altura, respectivamente, do mesmo triângulo depois de ter a sua área ampliada. Do enunciado, temos que:

$$b_2 = 120\% \text{ de } b_1.$$

Da definição 3.1 temos que $120\% = \frac{120}{100} = 1,2$.

$$\text{Ou seja, } b_2 = 1,2 * b_1.$$

Como a área do triângulo ampliado é 50% maior que a sua área inicial, então:

$$A_2 = 150\% \text{ de } A_1$$

Da definição 3.1 temos que $150\% = \frac{150}{100} = 1,5$.

$$\text{Logo, } A_2 = 1,5 * A_1$$

Seja x a taxa percentual de aumento da medida da altura do triângulo necessária para aumentar a área do triângulo em 50%; logo, pela fórmula da área do triângulo, temos a seguinte equação:

$$A_2 = \frac{1}{2} b_2 * h_2 = \frac{1}{2} (1,2b_1) * (1 + x)h_1$$

$$= 1,2 * (1 + x) * (\frac{1}{2} b_1 * h_1)$$

$$= 1,2(1 + x) * A_1$$

$$= 1,5 * A_1$$

Portanto, como $1,2(1 + x) * A_1 = 1,5 * A_1$, logo, temos que:

$$1,2(1 + x) = 1,5 \Rightarrow 1 + x = \frac{1,5}{1,2} = 1,25$$

Assim, segue que:

$$x = 1,25 - 1 = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

Logo, devemos aumentar a medida da altura em 25% para que a área do triângulo seja aumentada em 50%.

Questão 3.3. *Em uma determinada loja de eletrodomésticos, um notebook é ofertado sob as seguintes condições: à vista no pix, por R\$ 2.879,10 ou em 10x de R\$ 319,90 no cartão*

de crédito sem juros. Qual o percentual de desconto do preço do notebook caso o cliente resolva comprar à vista?

Solução: Como o notebook é ofertado à parcelas de R\$ 319,90 em 10 vezes no cartão de crédito, então, segundo a loja, o preço total do notebook, sem juros, é de:

$$10 * R\$319,90 = R\$ 3.199,00$$

Como o valor à vista no pix é de R\$ 2.879,10; logo, o desconto em relação ao preço total do notebook é de:

$$R\$3.199,00 - R\$ 2.879,10 = R\$ 319,90$$

Assim, pela definição 3.1, o percentual de desconto no valor do produto que o cliente receberá caso opte por comprar à vista será de:

$$\frac{X}{100} = \frac{R\$ 319,90}{R\$ 3.199,00} = 0,1 \Rightarrow X = 0,1 * 100 = 10$$

Ou seja, o desconto será de 10%.

3.2.2 Progressão Aritmética

Dentre os conhecimentos fundamentais da matemática escolar que são aplicados na matemática financeira, está o de progressão aritmética; a noção de progressão aritmética é muito importante na matemática financeira, pois, ela é utilizada para representar certas operações financeiras, como operações financeiras

que usam o regime de juros simples, onde o montante de uma operação financeira que utiliza juros simples pode ser interpretado como um termo de uma progressão aritmética.

Basicamente, uma progressão aritmética é uma sequência numérica de termos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n\}$ onde cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante r , conforme a definição a seguir:

Definição 3.2. *Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r .*

A partir da definição de progressão aritmética podemos chegar em uma fórmula de recorrência que nos permite expressar o k -ésimo termo da sequência em termos da razão e do termo anterior, conforme a fórmula a seguir:

$$a_k = a_{k-1} + r, \quad \text{onde } k \geq 2 \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Vale ressaltar que uma progressão aritmética tanto pode ser uma sequência numérica com um número finito de termos quanto pode ser infinita.

A partir da fórmula de recorrência podemos encontrar uma fórmula que nos permite expressar o k -ésimo termo da sequência em termos do primeiro termo, do índice e da razão, como se segue:

Pela fórmula de recorrência, para $k = 2$ temos que:

$$a_2 = a_1 + r$$

Analogamente,

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r \dots$$

Logo, para o k-ésimo termo temos:

$$a_k = a_1 + (k - 1)r, \text{ onde } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.2)$$

Questão 3.4. *Sabendo que os anos 2008, 2012, 2016, 2020 foram anos bissextos, que estamos no ano de 2022 e que o último ano bissexto deste século será 2096, quantos anos bissextos ainda teremos até o final do século 21?*

Solução: Sabemos que os anos bissextos definem uma sequência numérica de razão $r = 2012 - 2008 = 2016 - 2012 = 2020 - 2016 = 4$. Logo, se desconsiderarmos os anos bissextos anteriores à 2020 e tomarmos $a_1 = 2020$, então, pela fórmula 3.2 temos que:

$$2096 = 2020 + 4(n - 1)$$

Assim, resolvendo a equação para n, temos:

$$4(n - 1) = 2096 - 2020 = 76$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{76}{4} = 19$$

Sabemos que o resultado desta equação será $n = 20$, ou seja, existem 20 anos bissextos de 2020 à 2096, todavia, como a pergunta da questão 3.4 solicita a quantidade de bissextos deste século após o ano de 2020, então a resposta correta é 19 bissextos.

3.2.2.1 Soma dos termos de uma P.A

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi um dos maiores matemáticos da história da matemática, pelo que ficou popularmente conhecido como: “Príncipe da matemática”. Durante toda a sua trajetória de vida, Gauss fez importantes

contribuições para o avanço da matemática; ele é responsável por obras relevantes na matemática, física e estatística, tais como: método de Gauss-Seidel, lei de Gauss para o magnetismo e a distribuição normal, dentre outras. Gauss já demonstrava aptidão para ramo da matemática desde muito jovem. Aos sete anos de idade Gauss entrou para a escola, e segundo Boyer (1974), um certo dia, com o objetivo de manter a classe ocupada, o professor de Gauss mandou que todos os alunos somassem todos os números de um a cem, e instruiu a cada um deles que colocassem sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase que de maneira imediata, o jovem Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo: “*ligget se*”, isto é: “*Aí está*”. Por causa da rapidez com que Gauss concluiu a tarefa, o seu professor à princípio não fez muito caso dele, enquanto os demais alunos se esforçavam para tentar concluir a atividade proposta. Posteriormente, quando o mestre olhou os resultados apresentados pelos alunos, a lousa de Gauss era a única que apresentava a resposta correta, 5050. Sem apresentar nenhum cálculo. Demonstrando assim que Gauss havia feito mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$; muito provavelmente, ele chegou a esse resultado por meio da fórmula $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que é notoriamente fácil de se deduzir como se segue:

Seja $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n$, se colocarmos a mesma soma do maior para o menor número, temos: $S_n = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 2 + 1$. Agora, se somarmos as duas equações, somando os números aos pares conforme a mesma sequência, ou seja, o primeiro com o primeiro, o segundo com o segundo, e assim por diante, no segundo lado das equações, teremos:

$$\begin{array}{cccccccc}
 S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & n - 1 + & n \\
 & + \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 S_n = & n & + & n - 1 & + & n - 2 & + \dots + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 2S_n = & (n + 1) & + & (n + 1) & + & (n + 1) & + \dots + & (n + 1) & + & (n + 1)
 \end{array}$$

Como temos n termos, então $2S_n = n(n + 1)$. Logo, temos que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que é a soma dos n primeiros números naturais.

A partir dessa fórmula podemos encontrar a soma dos n termos de uma P.A finita. Seja uma P.A $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, de razão r , segundo a fórmula 3.2, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\text{P.A } \{a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_1 + (n-2)r, a_1 + (n-1)r\}.$$

Assim, seja S_n a soma dos n termos da progressão aritmética, então temos que:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)r) = \sum_{k=1}^n a_1 + \sum_{k=1}^n (k-1)r = na_1 + r \sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$\Rightarrow S_n = na_1 + r \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2na_1}{2} + \frac{rn(n-1)}{2} = \frac{n(a_1 + a_1 + r(n-1))}{2}$$

Logo, temos que:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (3.3)$$

Questão 3.5. Dada uma progressão aritmética finita cujos primeiros termos são 3, 10 e 17, e que a soma de todos os seus termos é 1840. Quantos termos tem essa P.A?

Solução: Pelo enunciado da questão, sabemos que $a_1 = 3$ e $r = 10 - 3 = 7$. Logo, segundo a fórmula 3.2 temos que o n -ésimo termo da progressão, ou seja, o último termo, é dado por:

$$a_n = 3 + 7(n-1) = 3 + 7n - 7 = 7n - 4$$

Como a soma dos n termos da P.A é 1840, conforme a fórmula (3.3), temos então que:

$$S_n = \frac{n(3 + (7n-4))}{2} = \frac{n(7n-1)}{2} = 1840.$$

Logo, segue que:

$$n(7n-1) = 3680$$

$$\Rightarrow 7n^2 - n = 3680 \Rightarrow 7n^2 - n - 3680 = 0.$$

Calculando o discriminante da equação, temos:

$$\Delta^2 = (-1)^2 - 4 * 7 * (-3680) = 103.041$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{103.41} = 321$$

Logo, temos que:

$$n = \frac{1 \pm 321}{2 * 7}$$

$$\Rightarrow n' = \frac{1 + 321}{14} = \frac{322}{14} = 23, \text{ e } n'' = \frac{-320}{14} \cong -22,85$$

Como n é a quantidade de termos da progressão aritmética, então ele só pode ser um número natural, logo:

$$n = n' = 23$$

Ou seja, a P.A tem 23 termos.

Questão 3.6. Qual é a soma de todos os números naturais menores do que 1000 que terminam com o algarismo 9?

Solução: Primeiramente, precisamos listar todos os números naturais menores do que 1000 que terminam com o algarismo 9, os quais são: 9, 19, 29, 39, ..., 989, 999. Notemos que essa sequência de números, listados em ordem crescente, se comporta como uma P.A, onde $a_1 = 9$ e $r = 19 - 9 = 29 - 19 = 39 - 29 = 10$. Assim, pela fórmula 3.2, temos que o k -ésimo termo da P.A é dado por:

$$a_k = a_1 + (k - 1)r = 9 + (k - 1)10 = 9 - 10 + 10k = 10k - 1.$$

$$\text{onde } k \in [1, n]$$

Como o último número natural menor do que 1000, ou seja, o último termo da progressão aritmética é 999, então segue que:

$$a_n = 10n - 1 = 999 \Rightarrow 10n = 999 + 1 = 1000.$$

Logo temos que $n = \frac{1000}{10} = 100$. Ou seja, a P.A tem 100 termos. Assim, somando todos os termos da P.A, conforme a fórmula 3.3, temos então que:

$$S_n = S_{100} = \frac{100(9+999)}{2} = 50.400.$$

Portanto, a soma de todos os números naturais menores que 1000 que terminam com o algarismo 9 é 54.400.

3.2.3 Progressão geométrica

Assim como as progressões aritméticas são um dos conceitos matemáticos que servem de fundamento para a matemática financeira, uma vez que servem de modelo para o cálculo do montante de operações financeiras que utilizam juros simples; as progressões geométricas estão relacionadas com o conceito de juros compostos. Por esta razão, iremos abordar brevemente o conceito de progressão geométrica, pois esse é um dos conhecimentos que servem de base para a introdução da matemática financeira.

Definição 3.3. *Progressão geométrica é uma sequência de números não nulos, onde qualquer termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é denominada razão da progressão, e é representada pela letra q , de quociente.*

Da mesma maneira que na progressão aritmética, a partir da definição acima de progressão geométrica podemos definir uma fórmula de recorrência para a P.G, como se segue:

Seja a_1 , a_k e q , o primeiro termo, o k -ésimo termo e a razão de uma P.G, respectivamente, de acordo com a definição 3.3, temos a seguinte relação de recorrência:

$$a_k = a_1, \text{ se } k = 1$$

$$a_k = a_{k-1} * q, \forall k \geq 2 \quad (3.4)$$

Onde k pertence aos naturais; e se a P.G tiver n termos, então $k \in [1, n]$.

Também podemos observar, conforme a definição 3.3 e a fórmula 3.4, que podemos relacionar os termos de uma progressão geométrica através de uma relação de proporcionalidade, como a seguir:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}. \quad (3.5)$$

É por esta razão que q é chamado de razão da progressão, pois ele representa a razão entre termos sucessivos da sequência.

A partir do primeiro termo a_1 e da razão q , podemos determinar se a progressão geométrica é crescente, decrescente, constante ou alternada. Caso $q < 0$, a P.G será alternada, ou seja, os seus termos alternarão de sinal, entre positivo e negativo. Se $q = 1$, então a P.G será constante, ou seja, $a_k = a_1 \forall k \in [1, n]$. A P.G é dita crescente quando $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n$, ou seja, $a_k > a_{k-1} \forall k \in [2, n]$, isso ocorrerá quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$. E ela será dita decrescente quando $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{n-1} > a_n$, ou seja, $a_k < a_{k-1} \forall k \in [2, n]$, isso ocorrerá quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Assim como no caso da progressão aritmética, a partir da fórmula de recorrência podemos encontrar uma fórmula que expresse o k -ésimo termo de uma progressão geométrica, em termos do primeiro termo a_1 e da razão q :

Dada uma P.G finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$, segundo a fórmula 3.4, temos que:

$$a_2 = a_1 * q$$

$$a_3 = a_2 * q = (a_1 * q) * q = a_1 * (q * q) = a_1 * q^2$$

$$a_4 = a_3 * q = (a_1 * q^2) * q = a_1 * (q^2 * q) = a_1 * q^3$$

...

$$a_k = a_{k-1} * q = (a_1 * q^{k-2}) * q = a_1 * (q^{k-2} * q) = a_1 * q^{k-1}$$

Onde $k \in [1, n]$.

Logo, podemos escrever a P.G de uma outra maneira: $(a_1, a_1 * q, a_1 * q^2, a_1 * q^3, \dots, a_1 * q^{n-2}, a_1 * q^{n-1})$. Assim, sendo a_1 o primeiro termo, e q a razão de uma progressão geométrica, o k -ésimo termo da sequência é dado por:

$$a_k = a_1 * q^{k-1}, \text{ onde } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.6)$$

Usando a fórmula de recorrência 3.4, podemos demonstrar a fórmula acima do termo geral da P.G utilizando o princípio da indução finita. O princípio da indução finita é um método de prova matemática usado para demonstrar que determinada proposição $P(n)$, verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, é também válida $\forall n \geq n_0$, dado algum $n_0 \in \mathbb{N}$. O princípio da indução finita consiste nos seguintes passos:

I – $P(n_0)$ é verdadeira;

II – $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, ou seja, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ também é verdadeira;

III – $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq n_0$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Assim, *seja* $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots)$ uma P.G infinita, queremos demonstrar que a fórmula 3.6 é válida $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que ela é verdadeira para $k = 1$, pois para $k = 1$ teremos que, pela fórmula 3.6:

$$a_1 = a_1 * q^{1-1} = a_1 * q^0 = a_1 * 1 = a_1.$$

Agora suponhamos que a fórmula seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja $a_k = a_1 * q^{k-1}$. Usando a fórmula de recorrência (3.4), temos que $a_{k+1} = a_k * q$. Logo, segue-se que:

$$a_{k+1} = a_k * q = (a_1 * q^{k-1}) * q = a_1 * (q^{k-1} * q) = a_1 * q^{k-1+1} = a_1 * q^{(k+1)-1}.$$

Ou seja, a fórmula é válida para $k + 1$. Portanto, pelo princípio da indução finita, temos que:

$$a_k = a_1 * q^{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Questão 3.7. Dada uma P.G finita (2, 6, 18, 54, ...), sabendo que o último termo dessa progressão geométrica é 354.294. Quantos termos tem essa P.G?

Solução: Do enunciado da questão temos que $a_1 = 2$, como $a_2 = 6$, pela fórmula (3.4) temos que $6 = 2 * q$, donde se segue que $q = \frac{6}{2} = 3$. Como o primeiro termo é 2 e a razão é 3, logo, pela fórmula 3.6, temos que o último termo a_n é dado por:

$$a_n = 2 * 3^{n-1} = 354.294.$$

Portanto, temos que:

$$3^{n-1} = \frac{354.294}{2} = 177.147$$

$$\Rightarrow n - 1 = \log_3 177.147 = 11$$

$$\Rightarrow n = 11 + 1 = 12.$$

Logo, temos que a progressão geométrica tem 12 termos.

3.2.3.1 Soma dos termos de uma P.G finita.

Dada uma progressão geométrica ($a_1, a_1 * q, a_1 * q^2, a_1 * q^3, \dots, a_1 * q^{n-2}, a_1 * q^{n-1}$), podemos determinar a soma de todos os termos da P.G em termos do primeiro termo, da razão e da quantidade de termos da sequência, como se segue:

Seja S_n a soma de todos os termos da progressão geométrica, então temos que:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^n a_1 * q^{k-1} = a_1 + a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \dots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1}$$

Multiplicando S_n , temos então:

$$q * S_n = q * (a_1 + a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \dots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1})$$

$$= a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \dots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1} + a_1 * q^n$$

Logo, temos que:

$$S_n - q * S_n = (a_1 + a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \dots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1}) - (a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \dots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1} + a_1 * q^n)$$

$$= a_1 - a_1 * q^n = a_1 * (1 - q^n)$$

$$\therefore (1 - q) * S_n = a_1 * (1 - q^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a_1 * (1 - q^n)}{1 - q}$$

Portanto, dada uma P.G finita, sendo a_1 o primeiro termo, q a razão e n o número de termos, então a soma dos seus n termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 * (1 - q^n)}{1 - q} \quad (3.7)$$

Onde $q \neq 1$. Caso $q = 1$, então temos que $a_k = a_1 \forall k \in [1, n]$, logo segue que $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n * a_1$.

Questão 3.8. Sabendo que a progressão geométrica (3, 21, 147, ...) tem 10 termos, determine o somatório dos termos da P.G.

Solução: Do enunciado da questão, sabemos que $a_1 = 3$ e $q = \frac{21}{3} = 7$, como a P.G tem 10 termos, então, pela fórmula (3.7), temos que:

$$S_n = S_{10} = \frac{3 \cdot (1 - 7^{10})}{1 - 7} = \frac{-847.425.744}{-6} = 141.237.624.$$

Portanto, o somatório dos 10 termos da P.G (3, 21, 147, ...) é 141.237.624.

Questão 3.9. *Dada uma progressão geométrica finita cujo somatório de seus termos é 39.062, determine o último termo e a quantidade de termos da progressão sabendo que o primeiro termo é 2 e a razão é 5.*

Solução: Seja n o número de termos da progressão, do enunciado da questão sabemos que $S_n = 39.062$. Como $a_1 = 2$ e $q = 5$, então, pela fórmula 3.7, temos que:

$$S_n = \frac{2 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5} = 39.062$$

$$\Rightarrow 1 - 5^n = (-2) \cdot 39.062$$

Multiplicando ambos os lados da equação por -1, temos:

$$5^n - 1 = 78.124$$

$$\Rightarrow 5^n = 78.124 + 1 = 78.125$$

Logo, temos que:

$$n = \log_5 78.125 = 7.$$

Como a progressão tem 7 termos, então, segunda a fórmula 3.6, segue que:

$$a_7 = 2 * 5^{7-1} = 2 * 5^6 = 31.250.$$

Portanto, a progressão geométrica tem 7 termos, e o seu último termo é $a_7 = 31.250$.

3.2.3.2 Soma dos termos de uma P.G infinita

No caso das progressões geométricas que têm uma quantidade infinita de termos, a possibilidade de calcular o somatório de todos os termos da sequência irá depender da razão q ; como foi definido na fórmula 3.7, dada uma P.G de n termos, a soma de seus termos é dada por $S_n = \frac{a_1*(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1*(q^n-1)}{q-1}$, onde $q \neq 1$; assim, pode ser verificado com facilidade que S_n será divergente, ou seja, não convergirá para um valor definido, caso $|q| \geq 1$, e que convergirá para $\frac{a_1}{1-q}$ se, e somente se, $0 < |q| < 1$.

Portanto, dada $(a_1, a_1 * q, a_1 * q^2, a_1 * q^3, \dots, a_1 * q^{k-1}, a_1 * q^k, \dots)$ uma P.G infinita, então podemos definir:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 * q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}, \Leftrightarrow 0 < |q| < 1. \quad (3.8)$$

Questão 3.10. *Determine a fração geratriz da dízima periódica 0,7777... em sua forma irredutível.*

Solução: Toda dízima periódica é um valor de convergência de uma série infinita, dada a dízima 0,7777... podemos expandi-la em forma de série infinita como se segue:

$$0,7777 \dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \dots$$

$$= 7 * \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \right)$$

$$= 7 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

É fácil perceber que esta série representa o somatório de todos os termos da progressão geométrica infinita $(0,7, 0,7 * (\frac{1}{10}), 7 * (\frac{1}{10})^2, 0,7 * (\frac{1}{10})^3, \dots, 0,7 * (\frac{1}{10})^{k-1}, 0,7 * (\frac{1}{10})^k, \dots)$, onde $a_1 = 0,7$ e $q = \frac{1}{10}$. Assim, pela fórmula 3.8, temos que:

$$0,7777\dots = \frac{0,7}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,7}{\frac{9}{10}} = 0,7 * \frac{10}{9} = \frac{7}{9}.$$

Logo, a fração geratriz a dízima periódica $0,77777\dots$ é $\frac{7}{9}$.

3.2.4 Lucro e Prejuízo

Agora iremos abordar alguns dos conceitos fundamentais dentre os estudamos na Matemática Financeira ensinada no ensino médio. Uns dos principais conceitos abordados nos livros didáticos e nas aulas de matemática no ensino da Matemática Financeira são os conceitos de Lucro e Prejuízo. Basicamente, o Lucro pode ser entendido como o ganho obtido em uma operação comercial, onde ele é determinado pela diferença entre o preço de venda de uma certa mercadoria e o seu preço de custo (compra/fabricação). Se uma mercadoria for vendida por um preço maior que o preço de custo, dizemos que a operação comercial gerou lucro; e se ela for vendida por um preço menor que o preço de custo, dizemos que a operação gerou prejuízo.

Dessa forma, seja **L** o lucro obtido em uma operação comercial, ou seja, através da venda de uma mercadoria, seja **C** o preço de custo da mercadoria e seja **V** o preço de venda da mercadoria, conforme a definição de lucro podemos definir:

$$L = V - C \quad (3.9)$$

Assim, de acordo com a expressão acima, se o preço de venda for maior que o preço de custo de uma mercadoria, ou seja $V > C$, então $L > 0$, ou seja, o lucro será

positivo; e caso o preço de venda seja menor que o preço de custo, ou seja $V < C$, então $L < 0$, ou seja, o lucro será negativo. A esse “lucro negativo” chamamos de prejuízo.

Uma outra maneira de expressarmos o lucro é como uma taxa percentual em relação ao preço de custo ou ao preço de venda; a taxa percentual de lucro em relação ao preço de custo é dada por $\frac{L}{C}$ e em relação ao preço de venda é dada por $\frac{L}{V}$.

Questão 3.11. *Uma certa mercadoria é vendida por R\$ 720,00 com lucro de 30% sobre o preço de venda. Determine o preço de o preço de custo da mercadoria.*

Solução: Como o preço da mercadoria é R\$ 720,00 e o percentual de lucro sobre o preço de venda é de 30%, então temos que:

$$\frac{L}{V} = \frac{L}{R\$ 720,00} = 30\% = 0,3$$

Assim, segue que:

$$L = 0,3 * (R\$ 720,00) = R\$ 216,00$$

Como o preço de venda é R\$ 720,00 e o lucro é de R\$ 216,00, então pela fórmula 3.9, temos:

$$R\$ 216,00 = R\$ 720 - C \Rightarrow C = R\$ 720,00 - R\$ 216,00 = R\$ 504,00$$

Portanto o preço de custo da mercadoria é R\$ 504,00.

Questão 3.12. *Um certo produto foi vendido com um lucro de 15% sobre o preço de venda. Calcule o percentual de lucro da venda do produto sobre o preço de custo.*

Solução 1: Conforme o enunciado da questão, como o lucro sobre o preço de venda é de 15%, ou seja $\frac{L}{V} = 15\% = 0,15$, então $V = \frac{L}{0,15}$. Aplicando a fórmula 3.9, segue-se que:

$$L = \frac{L}{0,15} - C \Rightarrow \frac{L}{0,15} - L = \left(\frac{1}{0,15} - 1 \right) L = C$$

Como $\frac{1}{0,15} = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$, então $\frac{1}{0,15} - 1 = \frac{20}{3} - 1 = \frac{20-3}{3} = \frac{17}{3}$.

Portanto, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{17}{3}L = C \Rightarrow \frac{L}{C} = \frac{3}{17} \cong 0,176 = 17,6\%$$

Logo, o percentual de lucro sobre o preço de custo foi de 17,6%.

Solução 2: Seja x o percentual de lucro sobre o preço de custo pedido na questão, como o lucro sobre o preço de venda do produto foi de 15%, então temos:

$$\frac{L}{V} = 0,15 \Rightarrow \frac{V}{L} = \frac{1}{0,15} = \frac{20}{3} \text{ e } \frac{L}{C} = x \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{1}{x}$$

Logo, temos que:

$$\frac{V}{L} - \frac{C}{L} = \frac{V - C}{L} = \frac{20}{3} - \frac{1}{x}$$

Como $L = V - C$ pela fórmula 3.9, então:

$$\frac{20}{3} - \frac{1}{x} = \frac{V - C}{L} = \frac{L}{L} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{20}{3} - 1 = \frac{17}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{17} \cong 0,176 = 17,6\%.$$

3.2.5 Aumentos e descontos sucessivos.

Situações envolvendo aumentos e descontos sucessivos são bastante comuns dentro do campo da Matemática Financeira; esses conceitos se aplicam em muitos casos. Eles se aplicam sobretudo nas situações que envolvem as variações dos preços das mercadorias que são comercializadas, que ora sofrem aumentos por conta da inflação ou escassez do produto no mercado, ora sofrem descontos, na maioria dos casos por razões promocionais. No entanto, os conceitos de aumentos e descontos sucessivos também podem ser aplicados em outros exemplos, tais como: variações inflacionárias e cotações monetárias.

Basicamente, se o valor de um produto V_0 sofre aumentos ou descontos percentuais sucessivos $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$, depois de todos esses aumentos ou descontos valor final F desse produto será dado por:

$$V_F = V_0(1 \pm i_1)(1 \pm i_2)(1 \pm i_3) \dots (1 \pm i_n) \quad (3.10)$$

Onde para uma taxa percentual de variação i multiplicasse o valor atual do produto por $1 + i$ caso seja um aumento, ou por $1 - i$ caso seja um desconto. Em geral, sendo aplicadas $i_1, i_2, \dots, i_k$ taxas de aumento e $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n$ taxas de desconto, o valor final de um produto depois de todos esses aumentos e descontos será determinado por:

$$V_F = V_0(1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_k)(1 - i_{k+1})(1 - i_{k+2}) \dots (1 - i_n) \quad (3.11)$$

Também podemos calcular o valor final utilizando uma única taxa de aumento ou de desconto que representa a variação total do valor do produto depois das aplicações das n taxas; essa taxa é denominada taxa acumulada, e como o nome já sugere, representa o acúmulo de todas as outras n taxas em uma única taxa. Seja i_a a taxa acumulada, essa taxa pode ser calculada a partir da razão entre a variação total de valor e o valor inicial, ou seja:

$$i_a = (V_F - V_0)/V_0$$

Dessa forma, teremos que:

$$1 + i_a = (V_F/V_0)$$

Pela fórmula 3.10, temos:

$$V_F/V_0 = (1 \pm i_1)(1 \pm i_2)(1 \pm i_3) \dots (1 \pm i_n)$$

Logo, podemos definir:

$$i_a = (1 \pm i_1)(1 \pm i_2)(1 \pm i_3) \dots (1 \pm i_n) - 1 \quad (3.12)$$

Questão 3.13: *Devido a inflação, um determinado produto que custava R\$ 100,00 teve aumento mensal no preço por dois meses consecutivos, um de 30% e o outro de 20%. Calcule o valor final desse produto depois dos dois aumentos sucessivos.*

Solução: Como o valor inicial do produto era R\$ 100,00, e os aumentos sucessivos foram de 30% e 20%, aplicando a fórmula 3.10 temos:

$$V_F = 100 * (1 + 0,3) * (1 + 0,2) = 100 * 1,56 = 156$$

Logo, depois dos dois aumentos sucessivos o produto passará a custar R\$ 156,00.

Algo importante para ressaltarmos nessa questão é que os aumentos sucessivos de 30% e 20% não são equivalentes a um único aumento de 50%; pois como podemos verificar, se aplicarmos um aumento de 50% sobre o valor inicial do produto teremos:

$$100 * (1 + 0,5) = 100 * 1,5 = 150$$

Onde se pode notar que R\$ 150,00 < R\$ 156,00. Ou seja, a taxa acumulada dos aumentos sucessivos de 30% e 20% é maior que 50%. Com efeito, utilizando a fórmula 3.12 para calcular a taxa acumulada dos dois aumentos de 30% e 20%, temos:

$$i_a = (1 + 0,30) * (1 + 0,2) - 1 = 1,3 * 1,2 - 1 = 0,56 = 56\%$$

Ou seja, os aumentos sucessivos de 30% e 20% não equivalem a um único aumento de 50%. Essa situação não é específica da questão 3.13, mas em todo caso a taxa acumulada das variações sucessivas do valor de um produto não é equivalente a soma de todas as taxas de aumento e de desconto.

Questão 3.14. *O preço de uma mercadoria após um aumento de 28% e um desconto de $x\%$ passou a valer 18,4% a mais do que o valor inicial. Determine a taxa de desconto.*

Solução: A taxa de 18,4% é a taxa acumulada após o aumento de 28% e o desconto de $x\%$. Assim sendo, aplicando a fórmula 3.12 teremos:

$$i_a = (1 + 0,28)(1 - x) - 1 = 0,184$$

Portanto, segue que:

$$1,28 * (1 - x) = 0,184 + 1 = 1,184$$

$$\therefore 1 - x = \frac{1,184}{1,28} = 0,925 \Rightarrow x = 1 - 0,925 = 0,075 = 7,5\%$$

Logo, a taxa de desconto foi de 7,5%.

Questão 3.15. *O preço de um produto teve um aumento de 8% seguido por um desconto de 5%, logo após o desconto teve outro aumento, desta vez de 13%, o que fez com que o produto passasse a custar R\$ 1.159,38. Qual foi o preço inicial do produto?*

Solução: Para resolver essa questão podemos aplicar a fórmula 3.10. Como o valor final após os aumentos e o desconto é R\$ 1.159,38, então usando os dados da questão e utilizando a referida fórmula, temos:

$$1.159,38 = V_0(1 + 0,08)(1 - 0,05)(1 + 0,13)$$

$$\therefore 1.159,38 = V_0 * 1,08 * 0,95 * 1,13 = V_0 * 1,15938$$

Logo:

$$V_0 = \frac{1.159,38}{1,15938} = 1000$$

Portanto, o preço inicial do produto foi de R\$ 1000,00.

3.2.6 Juros simples e composto.

O Juro é uma compensação financeira que se paga pela utilização de uma quantia por determinado período; ele é aplicado em muitas situações que envolvem operações financeiras, tais como, um financiamento de um imóvel, a contratação de um empréstimo ou uma compra parcelada. Quando alguém pretende adquirir um bem ou serviço e não dispõe no momento do valor monetário suficiente para pagar por esse bem ou serviço, geralmente recorre às instituições financeiras, como bancos, por exemplo, para solicitar o empréstimo do valor monetário suficiente para o seu objetivo; ao emprestar o dinheiro, o credor (aquele que tem algo a receber) cobra uma espécie de “aluguel” do dinheiro, que geralmente é uma taxa que é cobrada sobre o valor emprestado. Essa taxa é uma compensação financeira paga por aquele que toma o empréstimo pelo direito de usar o dinheiro até o dia de pagamento. O credor recebe essa compensação como uma forma de remuneração por não poder utilizar esse valor monetário até o dia do pagamento e por correr o risco de não receber o dinheiro de volta no período acordado; à essa compensação financeira que é paga pelo tomador do empréstimo chamamos de juro.

Existem dois tipos de regime de capitalização, o regime de juros simples e o de juros compostos, que abordaremos a seguir. Antes de tudo, nos compete também apresentar alguns termos ou conceitos que são bastante comuns na matemática financeira. Segundo os autores Bonjorno, Giovanni e Câmara (2020, p. 71), esses são os termos que são muito frequentes na matemática financeira:

- **Capital (C):** quantia monetária investida ou disponível para investimento, também denominada valor presente ou principal.
- **Taxa de Juros (i):** taxa percentual que se paga ou se recebe pela compensação da aplicação de um capital. Essa taxa deve vir acompanhada da

unidade de tempo a que se refere. Exemplo: 5% ao dia, que pode ser escrita como 5% a.d.; 2% ao mês ou 2% a.m.; 8% ao ano ou 8% a.a.

- **Tempo (t):** período que decorre desde o início até o fim de uma operação financeira.
- **Montante (M):** investimento rentabilizado, ou seja, é o capital acrescido dos juros acumulados em determinado período (capital + juros). Também é denominado valor futuro.

3.2.6.1 Juros simples

O regime de juros simples é um regime de capitalização onde a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial, portanto, para se calcular o total de juros acumulado em um determinado período de aplicação, basta multiplicar o capital ou valor presente (**C**) pela taxa percentual que é aplicada em cada período (**i**) e multiplicá-lo também pela quantidade de períodos que decorrem até o fim da aplicação (**t**), para se obter o total em quantitativo monetário que será pago em juros ao credor até o fim da operação financeira, conforme a fórmula a seguir:

$$J = C * i * t \quad (3.13)$$

Questão 3.16. *Um capital de R\$ 10.000,00 foi aplicado durante dez meses no regime de juros simples e rendeu um juro de R\$ 2.500,00 nesse período, qual foi a taxa percentual de juros aplicada nessa capitalização?*

Solução: De acordo com a questão, temos:

$$C = R\$ 10.000,00 \quad t = 10 \text{ meses} \quad J = R\$ 2.500,00$$

Logo, como o regime é de juros simples, segundo a fórmula 3.13, temos:

$$2.500 = 10.000 * i * 10$$

$$\Rightarrow i = \frac{2.500}{10.000 * 10} = \frac{25}{1000} = 0,025 = 2,5\% \text{ a. m}$$

Logo, a taxa percentual de juros que foi aplicada foi de 2,5% a.m.

Algo importante para se ressaltar na solução dessa questão é que como a taxa percentual de juros é dada por $i = \frac{J}{C*t}$, onde J e C são calculados em R\$ e t em unidades de tempo, então a unidade de medida da taxa de juros sempre utilizará a mesma unidade de tempo que a quantidade de períodos t ; por esta razão, sempre quando se resolve questões que envolvem aplicação de taxas de juros, devemos ter o cuidado de garantir que a taxa de juros e o período de aplicação do capital estejam na mesma unidade de tempo (a.d, a.m ou a.a). Quando na questão a taxa de juros e o período não estão na mesma unidade de tempo, devemos realizar, antes da aplicação da fórmula, a conversão da unidade para uma unidade de tempo equivalente. Sendo as unidades usuais de medida de tempo utilizadas: dia, mês e ano, as conversões para taxas de juros simples sempre são feitas entre essas unidades conforme a seguir:

$$i_a = 12 * i_m = 360 * i_d \quad (3.14)$$

Onde i_a é a taxa anual de juros, i_m a taxa mensal de juros e i_d a taxa diária de juros. vale ressaltar que a parte da equação referente à taxa diária está multiplicada por 360, por que ano comercial é considerado como sendo 12 meses de 30 dias, e, portanto, tendo 360 dias.

Questão 3.17. Qual o rendimento que um valor de R\$ 35.000,00 renderá em 18 meses, se ele for investido à uma taxa de 38,4% a.a. de juros não cumulativos?

Solução: Para resolver essa questão, precisamos aplicar a fórmula 3.13. De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$C = \text{R\$ } 35.000,00 \quad i = 38,4\% \text{ a. a} \quad t = 18 \text{ meses}$$

Porém, antes de utilizar a fórmula, precisamos garantir que tanto a taxa de juros quanto o período de aplicação estejam na mesma unidade de tempo. Como a taxa de juros está calculada ao ano e o período está em meses, temos duas opções

mais viáveis: ou converter a taxa anual de juros em taxa mensal, para que fiquem tanto a taxa quanto o período em meses, ou converter o período de meses para anos, para que fique na mesma unidade de tempo da taxa de juros, e assim, em ambos os casos, aplicar a fórmula 3.13. Aplicando a primeira alternativa, temos:

Como a taxa anual de juros é de 38,4% *a. a.*, para converter para meses, precisamos dividir essa taxa por doze, já que um ano têm 12 meses; assim, conforme a fórmula 3.14, segue que:

$$i_m = \frac{ia}{12} = \frac{38,4\%}{12} = 3,2\% \text{ a. m} = \frac{3,2}{100} = 0,032$$

Ou seja, a taxa mensal de juros é de 3,2% ao mês. Agora, como a taxa de juros foi convertida de anual para mensal, podemos aplicar a fórmula 3.13 e chegar na solução da questão:

$$J = 35.000 * 0,032 * 18 = 20.160$$

Logo, o rendimento será de R\$ 20.160,00 de juros em 18 meses.

Agora, se aplicarmos a segunda alternativa, temos: como o período é de 18 meses, e 12 meses equivalem à um ano, logo 18 meses equivalem à 1 ano e meio. Assim, utilizando o período e a taxa de juros em anos, podemos aplicar a fórmula 3.13 como se segue:

$$J = 35.000 * 0,384 * 1,5 = 20.160$$

Assim, chegamos a mesma resposta de R\$ 20,160,00 como já era esperado.

Conforme já foi definido anteriormente, o juro é uma compensação financeira que se paga ao credor pela utilização de um capital por um período determinado; esse valor monetário deve ser acrescido ao capital quando este for restituído ao credor por ocasião do vencimento do período; à este capital rentabilizado chamamos de montante, conforme citado anteriormente. Sendo **M** o montante, **C** o capital e **J** os juros, de acordo com a definição de montante, temos:

$$M = C + J$$

Como, segundo a fórmula 3.9, $j = C * i * t$, então segue que:

$$M = C + C * i * t$$

$$\Rightarrow M = C * (1 + i * t) \quad (3.15)$$

Questão 3.18. *Por quanto tempo um capital de R\$ 15.000,00 precisa ficar investido para gerar um montante de R\$ 25.000,00, se for aplicado juros simples de 3% ao mês?*

Solução: Conforme o enunciado da questão, temos que $C = R\$ 15.000,00$, $M = R\$ 25.000,00$ e $i = 3\% a.m = 0,03$. Utilizando a fórmula 3.15, temos:

$$25.000 = 15.000 * (1 + 0,03 * t)$$

$$\Rightarrow 1 + 0,03 * t = \frac{25000}{15000} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore t = \frac{\frac{5}{3} - 1}{0,03} = \frac{2}{3 * 0,03} = \frac{2}{0,09} \cong 22,2$$

Ou seja, o capital precisa ficar investido aproximadamente 22 meses para gerar um montante de R\$ 25.000,00.

Uma outra maneira de chegar à solução dessa questão é se calcularmos primeiro os juros que foram adquiridos nesse investimento; como $M = C + J$, então segue que:

$$J = M - C = 25.000 - 15.000 = 10.000$$

Ou seja, os juros totais foram de R\$ 10.000. Aplicando a fórmula 3.13, temos então:

$$10.000 = 15.000 * 0,03 * t = 150 * 3 * t = 450 * t$$

$$\Rightarrow t = \frac{10.000}{450} \cong 22,2$$

A fórmula do montante de uma aplicação financeira à juros simples, pode ser vista como uma progressão aritmética, onde o capital C é o primeiro termo, o montante M é o k -ésimo termo e a parcela de juros que é acrescida a cada período é a razão da progressão. Desta maneira, comparando as fórmulas 3.2 e 3.15, temos:

$$a_k = M, \quad a_1 = C \quad \text{e} \quad r = C * i = \frac{J}{t}$$

Questão 3.19. *A progressão aritmética (7.000, 7100, 7200, ...) representa a evolução mensal do montante de um capital que foi investido em regime de juros simples. Determine o capital inicial e a taxa de juros aplicada nesse investimento. Qual é o montante obtido se o capital ficar investido durante dois anos? E qual o rendimento de juros desse período?*

Solução: Como os três primeiros termos da P.A são 7.000, 7100 e 7.200 respectivamente, então temos que $a_1 = 7000$ e $r = 7.100 - 7.000 = 100$. Assim, pela fórmula 3.2 segue que o k -ésimo termo é dado por:

$$a_k = 7000 + 100 * (k - 1)$$

Como esta P.A representa a evolução do montante de uma aplicação financeira à juros simples, logo, o termo inicial representa o valor do montante antes de qualquer rendimento, ou seja, representa o capital inicial que foi investido, portanto:

$$a_1 = C = R\$ 7.000,00$$

A razão dessa P.A, por sua vez, representa o juro que é acrescido ao capital a cada período, logo:

$$r = \frac{J}{t} = 100$$

Assim, pela fórmula 3.13, temos:

$$\frac{J}{t} = C * i = 100$$

$$\therefore 7000 * i = 100 \Rightarrow i = \frac{100}{7000} = \frac{1}{70} \cong 0,0142 = \frac{1,42}{100}$$

Portanto, a taxa de juros simples aplicada nesse investimento foi de 1,42% ao mês ou 17,14% ao ano. Para calcular o montante obtido durante os dois anos em que o capital ficou investido, podemos utilizar a fórmula 3.15; como a taxa anual de juros é de 17,14%, então temos que:

$$M = 7.000 * (1 + 0,1714 * 2) = 9.400$$

Logo, o montante obtido durante os dois anos em que o capital ficou investido foi de R\$ 9.400,00. Para obter o total de juros adquiridos no período de dois anos, podemos usar a fórmula do montante, já que $M = C + J$. Portanto, segue que:

$$J = M - C = 9.400 - 7.000 = 2.400$$

Ou seja, o total de juros obtidos nesse investimento durante os dois anos foram de R\$2.400,00.

3.2.6.2 Juro composto

O regime de juros compostos é um tipo de regime de capitalização onde os juros praticados incidem não somente sobre o capital inicial, mas também sobre os juros vencidos. Diferentemente do regime de juros simples, em que o juro que é acrescido a cada período sempre é calculado sobre o capital inicial, mantendo assim

uma parcela fixa de juros, no regime de juros compostos os juros de cada período sempre são calculados não somente sobre o capital inicial, mas também sobre as parcelas de juros vencidos. Por esta razão, essa modalidade de juro também é conhecida como juro sobre juro.

Em outras palavras, essa definição nos diz que a parcela de juro, no regime de juro composto, que é agregada ao montante à cada período sempre é calculada sobre o montante do período anterior. Ou seja, sendo M o montante, C um capital aplicado em regime de juro composto e i a taxa de juros praticada; conforme a definição de juro composto, temos que:

Como $M = C + j$ e o juro no primeiro período é calculado sobre o capital inicial, então:

$$J_1 = C * i \quad \text{e} \quad M_1 = C + J_1 = C + C * i = C * (1 + i)$$

Ou seja, o montante obtido no primeiro período de aplicação é:

$$M_1 = C * (1 + i)$$

A partir do segundo período o juro é calculado sobre o montante do período anterior, logo:

$$J_2 = M_1 * i \quad \text{e} \quad M_2 = M_1 + J_2 = M_1 + M_1 * i = M_1 * (1 + i)$$

$$\Rightarrow M_2 = C * (1 + i) * (1 + i) = C * (1 + i)^2$$

Analogamente, no terceiro período de aplicação temos que:

$$J_3 = M_2 * i \quad \text{e} \quad M_3 = M_2 + J_3 = M_2 + M_2 * i = M_2 * (1 + i)$$

$$\Rightarrow M_3 = C * (1 + i)^2 * (1 + i) = C * (1 + i)^3$$

Agora, se considerarmos uma quantidade t de períodos, no t -ésimo período temos que:

$$J_t = M_{t-1} * i \quad \text{e} \quad M_t = M_{t-1} + J_{t-1} = M_{t-1} + M_{t-1} * i = M_{t-1} * (1 + i)$$

$$\Rightarrow M_t = C * (1 + i)^{t-1} * (1 + i) = C * (1 + i)^t$$

Portanto, o montante de uma aplicação financeira em regime de juros compostos é dado por:

$$M = C * (1 + i)^t \quad (3.16)$$

Notemos que uma aplicação financeira a juros compostos pode ser interpretada como um caso particular de aumentos sucessivos onde os aumentos ocorrem a uma taxa constante de acréscimo.

Questão 3.20. *Calcule o montante de uma capitalização composta, onde o capital aplicado é R\$ 5.000,00, a uma taxa de 2,5% ao mês, durante 8 meses.*

Solução: Conforme a questão, segue que:

$$C = \text{R\$ } 5.000,00 \quad i = 2,5\% \text{ a. m.} = 0,025 \quad t = 8 \text{ meses.}$$

Como a taxa de juros e o período total estão expressos em meses, podemos aplicar diretamente a fórmula 3.16 para determinar o montante, como se segue:

$$M = 5.0000 * (1 + 0,025)^8$$

$$\Rightarrow M \cong 5000 * 1,2184 = 6.092$$

Logo, o montante que se obtêm aplicando R\$ 5.000,00 por 8 meses a uma taxa de 2,5 % ao mês de juro composto, é de R\$ 6.092,00.

Questão 3.21. *Por quanto tempo um determinado capital precisa ficar aplicado à uma taxa de juros compostos de 5% a.m para dobrar o capital investido?*

Solução: Para chegar a resposta desta questão, novamente precisamos recorrer à fórmula 3.16; dos dados fornecidos, temos:

$$M = 2 * C \qquad i = 5\% \text{ a.m.} = 0,05$$

Portanto, aplicando a fórmula 3.16, temos então:

$$2 * C = C * (1 + 0,05)^t$$

$$\Rightarrow (1,05)^t = 2 \quad \therefore t = \log_{1,05} 2$$

Utilizando uma calculadora, encontramos $\log_{1,05} 2 \cong 14,20$. Logo, um capital precisa ficar aproximadamente 14 meses e 6 dias aplicado a uma taxa de juros compostos de 5% a.m. para que dobre de valor.

Como já vimos anteriormente, podemos determinar o total de juros de uma aplicação financeira, ou seja, o rendimento, pela diferença entre o montante e o capital inicial:

$$J = M - C$$

No caso dos juros compostos, utilizando a fórmula 3.16, o total obtido em juros ao final da aplicação é:

$$J = C * (1 + i)^t - C = C * [(1 + i)^t - 1] \qquad (3.17)$$

Uma outra maneira menos prática para chegar na fórmula do juro total, seria somar todas as parcelas de juros compostos que foram acrescidos ao montante à cada período. Como já foi mostrado anteriormente, dada uma aplicação financeira à juros compostos, o juro acrescido no k-ésimo período de aplicação é dado por:

$$J_k = M_{k-1} * i = C * (1 + i)^{k-1} * i, \text{ onde } k \geq 2.$$

Assim, somando todas as parcelas de juros compostos que foram agregados ao montante à cada período, temos:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_{t-1} + J_t = \sum_{k=1}^t J_k$$

$$\Rightarrow J = \sum_{k=1}^t M_{k-1} * i = \sum_{k=1}^t C * (1 + i)^{k-1} * i$$

$$\Rightarrow J = C * i \sum_{k=1}^t (1 + i)^{k-1}$$

Como é possível perceber, esse somatório representa o somatório de todos os termos de uma progressão geométrica com t termos, onde $a_1 = C * i$ e $q = 1 + i$. Logo, pela fórmula 3.7 temos que:

$$J = \frac{C * i * [1 - (1 + i)^t]}{1 - (1 + i)} = \frac{C * i * [(1 + i)^t - 1]}{i}$$

$$\Rightarrow J = C * [(1 + i)^t - 1]$$

Assim como estabelecemos a relação entre taxas anuais, mensais e diárias de juros simples na fórmula 3.14, também podemos relacionar as taxas equivalentes de juros compostos conforme a fórmula a seguir:

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360} \quad (3.18)$$

Onde i_a é a taxa anual, i_m a taxa mensal e i_d a taxa diária de juros compostos.

Questão 3.22. *Um determinado capital ficou investido durante três anos, e nesse período rendeu R\$ 3.000,00 para o investidor. Considerando que a taxa de juros compostos praticada foi de 47,64% ao mês, qual foi o capital investido?*

Solução: Do enunciado da questão, temos que $J = R\$ 3.000,00$, $i = 47,64 \% a. a. = 0,4764$ e $t = 8 \text{ meses}$; para determinar o capital investido, podemos utilizar a fórmula 3.17, portanto:

$$J = C * [(1 + i)^t - 1]$$

$$\Rightarrow C = \frac{J}{(1 + i)^t - 1}$$

Como a taxa de juros é mensal e a unidade de tempo do período de investimento é anual, precisamos colocá-los em termos de medida de tempo equivalentes, antes de aplicar a fórmula que nos permite calcular o capital. Convertendo a taxa anual de juros em taxa mensal, pela fórmula 3.18 temos que:

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1$$

$$\therefore i_m = (1,4764)^{1/12} - 1 \cong 1,033 - 1 = 0,033$$

Logo, a taxa de juros compostos é de aproximadamente 3,3% ao mês. Assim, aplicando a fórmula 3.17, segue que:

$$C = \frac{3.000}{(1 + 0,033)^8 - 1} = \frac{3.000}{(1,033)^8 - 1}$$

$$\Rightarrow C \cong \frac{3.000}{1,3 - 1} = \frac{3.000}{0,3} = 10.000$$

Portanto, o capital investido foi de R\$ 10.000,00.

Questão 3.23. *Um capital de R\$ 8.000,00 é aplicado à uma taxa anual de juros de 15%, quais as evoluções dos montantes, de ano em ano, no regime de juros simples e no regime de juros compostos.*

Solução: Para responder à essa questão, iremos utilizar as expressões que nos permitem calcular os montantes no regime de juros simples e no regime de juros compostos. Como já foi mostrado anteriormente, o montante M gerado por um capital C a uma taxa de juros simples i durante uma quantidade de períodos t , é dado por:

$$M = C + C * i * t = C * (1 + i * t)$$

Assim, como $C = R\$ 8.000,00$ e $i = 15\% a.a = 0,15$, então a expressão matemática que nos permite calcular o montante em função da quantidade de anos é:

$$M = 8.000 + 8.000 * 0,15 * t$$

$$\Rightarrow M = 8.000 + 1.200 * t$$

Analogamente, já demonstramos que o montante no regime de juros compostos é dado por:

$$M = C * (1 + i)^t$$

Substituindo os dados da questão na fórmula, temos que:

$$M = 8.000 * (1 + 0,15)^t$$

$$\Rightarrow M = 8.000 * (1,15)^t$$

Assim, utilizando as fórmulas dos montantes, podemos encontrar os valores acumulados a cada ano conforme a tabela a seguir:

Tabela 1 – Evolução do montante à juros simples e composto ao passar do tempo.

Tempo em anos	Montante a juros simples	Montante a juros compostos
1	R\$ 9.200,00	R\$ 9.200,00
2	R\$ 10.400,00	R\$ 10.580,00
3	R\$ 11.600,00	R\$ 12.167
4	R\$ 12.800,00	R\$ 13.992,05
5	R\$ 14.000,00	R\$ 16.090,85
6	R\$ 15.200,00	R\$ 18.504,48
7	R\$ 16.400,00	R\$ 21.280,15

Conforme podemos perceber na tabela acima, o crescimento do montante de uma aplicação financeira à juros compostos é mais acelerada do que o montante à mesma taxa de juros, no regime de juros simples, incidindo sobre o mesmo capital no mesmo período. Isso ocorre porque a relação que expressa o montante de uma aplicação financeira à juros simples em função do tempo é a lei de uma função afim, sendo M a variável dependente e t a variável independente, onde:

$$M_t = C + C * i * t \quad \text{e} \quad M_t: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}^+$$

Enquanto no caso do montante à juros compostos, a relação entre montante e tempo de aplicação é representada por uma função exponencial, pois a variável t fica no expoente.

Por essa razão, o montante de uma capitalização à juros simples sempre terá um crescimento linear com o passar do tempo, enquanto o montante de uma capitalização à juros compostos sempre terá uma evolução exponencial à medida que o tempo passa.

3.2.7 Sistemas de amortização

A amortização é um processo mediante o qual uma dívida é extinta através de pagamentos que são realizados periodicamente, de acordo com um planejamento previamente estabelecido; esses pagamentos são chamados de prestações, que são pagos em intervalos de tempo constantes, onde o valor de cada prestação é composto de uma parte da dívida, que será reembolsada através do pagamento da prestação, e do juro que é calculado sobre o saldo devedor. Essa parte do saldo devedor que será reembolsada, ou seja, abatida da dívida, é também chamada de amortização ou valor amortizado. Assim, sendo P o valor da prestação, A o valor amortizado e J o juro sobre o saldo devedor, podemos definir:

$$P = A + J \quad (3.19)$$

Esse tipo de processo de quitação de uma dívida é aplicado geralmente às dívidas de altos valores, como a de um empréstimo ou financiamento fornecido por uma instituição financeira. Existem diferentes formas de realizar a amortização de uma dívida, essas diferentes maneiras de amortizar ou de fazer o cálculo da amortização são denominados de sistema de amortização. Dentre os tipos de sistemas de amortização existentes, os mais utilizados são: Sistema Price ou francês, Sistema de amortização constante (SAC), Sistema de amortização crescente, entre outros. Neste tópico sobre sistemas de amortização, abordaremos o SAC e o sistema price.

3.2.7.1 Sistema SAC (Sistema de Amortização Constante)

O sistema de amortização constante, como o próprio nome já sugere, é aquele no qual a amortização é constante, ou seja, um mesmo valor é descontado da dívida restante à cada parcela paga. Nesse sistema, para calcular a amortização precisasse dividir o valor do capital contratado ou da dívida pelo número de parcelas. Assim, sendo A a amortização, C o capital contratado e n a quantidade de parcelas, o valor a ser amortizado do capital adquirido em cada intervalo de tempo, ou seja, em cada parcela é dado por:

$$A = \frac{C}{n} \quad (3.20)$$

O juro por sua vez, como é sempre calculado sobre o saldo devedor, então para a primeira parcela temos que: sendo J_1 o juro da primeira parcela e i a taxa de juros aplicada, logo:

$$J_1 = C * i$$

Portanto, a primeira parcela P_1 em um sistema de amortização constante é dada por:

$$P_1 = A + J_1 = \frac{C}{n} + i * C$$

Após o pagamento da primeira parcela, o saldo devedor é $C - \frac{C}{n}$; assim, o juro da segunda parcela será calculado sobre o saldo devedor atualizado, conforme a definição dos sistemas de amortização, portanto segue que:

$$J_2 = (C - \frac{C}{n}) * i = C * i * (1 - \frac{1}{n}) = J_1 * (1 - \frac{1}{n})$$

Logo, a segunda parcela da quitação da dívida é dada por:

$$P_2 = A + J_2 = \frac{C}{n} + J_1 * (1 - \frac{1}{n})$$

Analogamente, calculando o juro da terceira parcela sobre o saldo devedor $C - \frac{2C}{n}$, temos que:

$$J_3 = (C - \frac{2C}{n}) * i = C * i * (1 - \frac{2}{n}) = J_1 * (1 - \frac{2}{n})$$

Assim, a terceira parcela é:

$$P_3 = A + J_3 = \frac{C}{n} + J_1 * \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Portanto, se continuarmos o processo de calcular cada parcela, para a k-ésima parcela teremos que:

$$P_k = A + J_k = \frac{C}{n} + J_1 * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{C}{n} + C * i * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Logo, em um sistema de amortização constante, sendo C o capital contratado, i a taxa de juros utilizada e n a quantidade de parcelas, a k-ésima parcela é dada por:

$$P_k = A + J_k = \frac{C}{n} + C * i * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad (3.21)$$

Para a última parcela, temos que P_n é igual a soma da última amortização com o juro calculado sobre esse mesmo valor, ou seja:

$$P_n = \frac{C}{n} + i * \frac{C}{n} = \frac{C}{n} * (1 + i)$$

Ou também podemos definir o valor da última parcela fazendo $k = n$ na fórmula 3.21.

Questão 3.24. *Determine os valores da amortização, dos juros e das parcelas referente às prestações de um empréstimo de R\$ 80.000,00, para ser liquidado em 72 parcelas (6 anos), à uma taxa de juros de 7,25% a.a., através do sistema de amortização constante (SAC).*

Solução: Da questão temos que o capital contratado é R\$ 80.000,00, que deverá ser quitado em 72 parcelas. Assim, pela fórmula 3.20 segue que o valor da amortização de cada parcela no sistema SAC é dado por:

$$A = \frac{80.000}{72} = 1.111, \bar{1}$$

Mas por se tratar de valor monetário, temos que:

$$A = R\$ 1.111,11$$

Como a taxa de juros praticada é anual e as parcelas são mensais, precisamos converter a taxa de juros de anual para mensal. Portanto, como a taxa de juro é de 7,25% *a. a.*, aplicando a fórmula 3.14, temos:

$$i_a = 12 * i_m \Rightarrow i_m = \frac{7,25}{12} \cong 0,6041666$$

Logo, a taxa mensal de juros é de aproximadamente 0,60416% *a. m.* = $\frac{0,60416}{100} = 0,0060416$. Assim, o juro da primeira prestação é dado por:

$$J_1 = 80.000,00 * 0,0060416 \cong 483,33$$

Portanto, o juro da primeira prestação é de R\$ 483,33. Desta forma, conforme a fórmula 3.19, segue que:

$$P_1 = A + J_1 = 1.111,11 + 483,33$$

$$\Rightarrow P_1 = 1.594,44$$

Ou seja, o valor da primeira prestação é de R\$ 1.594,44. Após o pagamento da primeira prestação, o valor atual que ainda precisa ser quitado é de R\$ 80.000,00 – R\$ 1.111,11 = R\$ 78.888,89. Assim, para o juro da segunda prestação, temos que:

$$J_2 = 78.888,89 * 0,0060416 \cong 476,61$$

Portanto, o juro da segunda prestação é de R\$ 476,61. Assim, o valor da segunda prestação é dado por:

$$P_2 = A + J_2 = 1.111,11 + 476,61 = 1.587,72$$

Logo, o valor da segunda prestação é de R\$ 1.587,72. Após o pagamento da segunda prestação, o valor da dívida será de R\$ 78.888,89 – R\$ 1.111,11 = R\$ 77.777,78. Calculando o juro da terceira prestação, segue que:

$$J_3 = 77.777,78 * 0,0060416 \cong 469,90$$

Ou seja, o juro da terceira prestação é de R\$ 469,90. Portanto, o valor da terceira prestação é de:

$$P_3 = A + J_3 = 1.111,11 + 469,90 = 1.581,01$$

$$\therefore P_3 = R\$ 1.581,01$$

Analogamente, podemos calcular os juros e as prestações seguintes. Uma outra maneira de encontrar esses valores é aplicar diretamente as fórmulas 3.21 e 3.19, e achar o restante dos juros e das prestações conforme a tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Tabela de amortização SAC do empréstimo de R\$ 80.000,00

Mês	Amortização	Juros	Parcela	Saldo devedor
0	...	...	...	R\$ 80.000,00
1	R\$ 1.111,11	R\$ 483,33	R\$ 1.594,44	R\$ 78.888,89
2	R\$ 1.111,11	R\$ 476,61	R\$ 1.587,72	R\$ 77.777,78
3	R\$ 1.111,11	R\$ 469,90	R\$ 1.581,01	R\$ 76.666,67
4	R\$ 1.111,11	R\$ 463,19	R\$ 1.574,30	R\$ 75.555,56
5	R\$ 1.111,11	R\$ 456,48	R\$ 1567,59	R\$ 74.444,45
...	...	...	...	...
70	R\$ 1.111,11	R\$ 20,14	R\$ 1.131,25	R\$ 2.222,22
71	R\$ 1.111,11	R\$ 13,42	R\$ 1.124,53	R\$ 1.111,11
72	R\$ 1.111,11	R\$ 6,71	R\$ 1.117,82	0

Como se pode perceber, à cada prestação paga a dívida diminui, o que faz com que os juros diminuam também progressivamente à cada parcela, uma vez que eles são calculados sobre o saldo devedor; semelhantemente, como a amortização é constante e o juro é decrescente, o valor das prestações também decrescem à cada período.

Assim como nos outros tipos de transações financeiras em que há a cobrança de juros, podemos calcular também o montante pago em todo o período do pagamento das prestações nos sistemas de amortização, ou seja, o capital acrescido dos juros. Como o montante é igual a soma de todas as prestações, então podemos definir:

$$M = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{n-1} + P_n = \sum_{k=1}^n P_k$$

No caso do sistema SAC, as prestações são dadas pela fórmula 3.21; portanto, no sistema de amortização constante, o montante é dado por:

$$M = \sum_{k=1}^n \left[\frac{C}{n} + C * i * \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \frac{C}{n} + C * i * \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow M = C + C * i * \left[n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1) \right]$$

Mas como:

$$\sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n * (n-1)}{2}$$

Logo, temos que:

$$M = C + C * i * \left[n - \frac{1}{n} \left(\frac{n * (n-1)}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow M = C + C * i * \left(\frac{2n - (n-1)}{2} \right) = C + C * i * \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Portanto, em um sistema de amortização constante, o total pago, ou seja, a soma de todas as prestações é dada por:

$$\sum_{k=1}^n P_k = C + C * i * \left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (3.22)$$

A partir da fórmula 3.22 que define a soma das prestações, ou seja, o montante em um SAC, podemos definir os juros totais pagos até o fim da quitação do saldo devedor como:

$$J_t = C * i * \left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (3.23)$$

Desta forma, podemos o montante pago em um sistema de amortização constante como:

$$M = \sum_{k=1}^n P_k = C + J_t \quad (3.24)$$

Algo importante a ressaltar, é que essa fórmula 3.24 não se aplica apenas ao SAC mas também aos outros sistemas de amortização, salvo a maneira como os juros totais são calculados. Assim, utilizando a fórmula 3.22, podemos calcular o montante pago na quitação do empréstimo mencionado na questão 3.24, como se segue:

Como, conforme a questão 3.24, $C = 80.000,00$, $i = 7,25\% a.a \cong 0,60416\% a.m$ e $n = 72$, então, segundo a fórmula 3.22 temos que:

$$M = \sum_{k=1}^n P_k = 80.000 + 80.000 * 0,0060416 * \left(\frac{72 + 1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M = 80.000 + 17.641,472 = 97.641,472$$

Assim, como o montante se trata de uma unidade monetária, a soma total das prestações é R\$ 97.641,47, dos quais R\$ 17.641,47 são de juros.

3.2.7.2 Sistema price

No sistema price, ou sistema de amortização francês, diferentemente do SAC onde as amortizações são iguais, as prestações a serem pagas, do início ao fim do período de quitação da dívida, são todas iguais. Esse sistema é mais utilizado em contratos de curto prazo, como na compra de automóveis, por exemplo. Nesse sistema, como as prestações são iguais e os juros decrescentes, pois são calculados sobre o saldo devedor, então as amortizações são crescentes, ou seja, o saldo devedor diminui com uma velocidade maior à medida que o tempo passa. Assim, seja C o valor do empréstimo ou financiamento, i a taxa de juros praticada no sistema, P o valor de cada prestação e n a quantidade de prestações, então no momento do pagamento da primeira parcela, deve-se $C * (1 + i)$ à instituição financeira que forneceu o empréstimo ou financiamento e paga-se P ; assim, o saldo devedor após o pagamento da primeira prestação é:

$$C * (1 + i) - P$$

No momento do pagamento da segunda prestação, deve-se $[C * (1 + i) - P] * (1 + i)$ à instituição financeira e paga-se P ; desta forma, o saldo devedor após o pagamento da segunda prestação será de:

$$[C * (1 + i) - P] * (1 + i) - P = C * (1 + i)^2 - P * (1 + i) - P$$

Analogamente, após o pagamento da terceira prestação, o saldo devedor passará a ser:

$$\begin{aligned} & [C * (1 + i)^2 - P * (1 + i) - P] * (1 + i) - P \\ & = C * (1 + i)^3 - P * (1 + i)^2 - P * (1 + i) - P \end{aligned}$$

Repetindo este mesmo processo, após o pagamento da k -ésima prestação, o saldo devedor será de:

$$\begin{aligned}
& C * (1 + i)^k - P * (1 + i)^{k-1} - P * (1 + i)^{k-2} \dots - P * (1 + i) - P \\
&= C * (1 + i)^k - P * [(1 + i)^{k-1} + (1 + i)^{k-2} + \dots + (1 + i)^2 + (1 + i) + 1] \\
&= C * (1 + i)^k - P \sum_{m=0}^{k-1} (1 + i)^m
\end{aligned}$$

Como o saldo devedor é nulo após o pagamento da última parcela, então segue que:

$$\begin{aligned}
& C * (1 + i)^n - P \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k = 0 \\
& \Rightarrow P \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k = C * (1 + i)^n \Rightarrow P = \frac{C * (1 + i)^n}{\sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k}
\end{aligned}$$

Assim, como $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k$ denota a soma de uma P.G de n termos com $a_1 = 1$ e $q = 1 + i$, então pela fórmula 3.7, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^k = \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Logo temos que as prestações no sistema price de amortização são dadas por:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{C * (1 + i)^n}{\frac{(1 + i)^n - 1}{i}} = C * (1 + i)^n * \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \\
&\Rightarrow P = \frac{C * i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}
\end{aligned}$$

Portanto, o valor da prestação no sistema price referente às parcelas de um financiamento ou empréstimo de um capital C , à uma taxa de juros i , a ser quitado em n prestações, é dado por:

$$P = \frac{C*i*(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} \quad (3.25)$$

Como todas as prestações no sistema price são iguais, então o total pago ao final da quitação da dívida, ou seja, o montante, é dado por:

$$M = \sum_{k=1}^n P = n * P$$

Assim, utilizando a fórmula 3.25 temos então:

$$M = \frac{n*C*i*(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} \quad (3.26)$$

Uma vez conhecido o montante pago até o final do período de pagamento das prestações, podemos calcular o total de juros pagos como se segue:

Como $J_t = M - C$ então pela fórmula 3.26 temos que os juros totais são dados por:

$$\begin{aligned} J_t &= \frac{n*C*i*(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} - C \Rightarrow J_t = C * \left[\frac{n*i*(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} - 1 \right] \\ \Rightarrow J_t &= C * \left[\frac{n*i*(1+i)^n - ((1+i)^{n-1})}{(1+i)^{n-1}} \right] = C * \left[\frac{n*i*(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \right] \\ \therefore J_t &= C * \frac{(n*i-1)*(1+i)^{n+1}}{(1+i)^{n-1}} \end{aligned}$$

Portanto, no sistema price de amortização, o valor dos juros totais pagos são:

$$J_t = C * \frac{(n*i-1)*(1+i)^{n+1}}{(1+i)^{n-1}} \quad (3.27)$$

Também podemos calcular os juros e a amortização de cada prestação. Sabemos que antes do pagamento da k -ésima prestação, o saldo devedor é de:

$$C * (1 + i)^{k-1} - P * \frac{(1+i)^{k-1} - 1}{i}$$

Onde C é o capital financiado ou emprestado, i é a taxa de juros aplicada no sistema, P é o valor das prestações e $k - 1$ é a quantidade de prestações que já foram pagas. Desta forma, como o juro é calculado sobre o saldo devedor, então o juro pago na k -ésima prestação é dado por:

$$J_k = i * [C * (1 + i)^{k-1} - P * \frac{(1+i)^{k-1} - 1}{i}]$$

Substituindo o valor das prestações dada na fórmula 3.25, segue que:

$$\begin{aligned} J_k &= i * [C * (1 + i)^{k-1} - \frac{C * i * (1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} * \frac{(1+i)^{k-1} - 1}{i}] \\ \Rightarrow J_k &= C * i * [(1 + i)^{k-1} - \frac{(1+i)^n * ((1+i)^{k-1} - 1)}{(1+i)^{n-1}}] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, como pela fórmula 3.19 temos que $A = P - J$, então a amortização da k -ésima prestação é dada por:

$$\begin{aligned} A_k &= P - J_k = P - i * [C * (1 + i)^{k-1} - P * \frac{(1+i)^{k-1} - 1}{i}] \\ \Rightarrow A_k &= P + P * [(1 + i)^{k-1} - 1] - C * i * (1 + i)^{k-1} \\ \Rightarrow A_k &= P * [1 + (1 + i)^{k-1} - 1] - C * i * (1 + i)^{k-1} \\ \Rightarrow A_k &= P * (1 + i)^{k-1} - C * i * (1 + i)^{k-1} = (P - C * i) * (1 + i)^{k-1} \end{aligned}$$

Substituindo P pelo valor das prestações dado na fórmula 3.25, temos que:

$$A_k = \left[\frac{C * i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - C * i \right] * (1+i)^{k-1} = C * i * \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - 1 \right] * (1+i)^{k-1}$$

Logo, a amortização da k-ésima prestação no sistema price é expressa por:

$$A_k = C * i * (1+i)^{k-1} * \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - 1 \right] \quad (3.29)$$

Questão 3.25. *Determine os valores da parcela, dos juros e da amortização referente à primeira prestação de um empréstimo de R\$ 18.000,00, à ser liquidado em 12 prestações mensais, à uma taxa de juros de 2,5% ao mês, pelo sistema price. Em seguida, construa uma tabela de amortização neste sistema.*

Solução: Dos dados da questão, temos que:

$$C = \text{R\$ } 18.000,00 \quad i = 2,5 \text{ a. m} = \frac{2,5}{100} = 0,025 \quad n = 12$$

Assim, como o valor das prestações no sistema price é dado pela fórmula 3.25, aplicando essa fórmula, segue que:

$$P = \frac{18.000 * 0,025 * (1+0,025)^{12}}{(1+0,025)^{12} - 1} = \frac{450 * (1,025)^{12}}{(1,025)^{12} - 1}$$

$$P \cong 1.754,77$$

Portanto, a primeira prestação, bem como as demais, será de R\$ 1.754,77. Como antes do pagamento da primeira prestação o capital ainda não foi amortizado, então o juro da primeira prestação é calculado sobre o valor integral do empréstimo, ou seja:

$$J_1 = 18.000 * 0,025 = 450$$

Logo, o juro pago na primeira prestação será de R\$ 450,00. Uma vez encontrado o juro, podemos determinar o valor da amortização referente à primeira prestação pela diferença do valor da parcela e do juro:

$$A_1 = P - J_1 = 1.754,77 - 450 = 1.304,77$$

Portanto, o valor amortizado da primeira prestação será de R\$ 1.304,77. Repetindo o processo para as demais prestações ou aplicando diretamente as fórmulas 3.25, 3.28 e 3.29, podemos encontrar os valores das parcelas, dos juros e das amortizações das outras prestações e preencher a *tabela 3*, como se segue:

Tabela 3 – Tabela de amortização do empréstimo de R\$ 18.000,00 no sistema price.

MÊS	Juro	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
0	...	...	...	R\$ 18.000,00
1	R\$ 450,00	R\$ 1.304,77	R\$ 1.754,77	R\$ 16.695,23
2	R\$ 417,38	R\$ 1.337,39	R\$ 1.754,77	R\$ 15.357,84
3	R\$ 383,95	R\$ 1.370,82	R\$ 1.754,77	R\$ 13.987,02
4	R\$ 349,68	R\$ 1.405,09	R\$ 1.754,77	R\$ 12.581,92
5	R\$ 314,55	R\$ 1.440,22	R\$ 1.754,77	R\$ 11.141,70
6	R\$ 278,54	R\$ 1.476,23	R\$ 1.754,77	R\$ 9.665,47
7	R\$ 241,64	R\$ 1.513,13	R\$ 1.754,77	R\$ 8.152,34
8	R\$ 203,81	R\$ 1.550,96	R\$ 1.754,77	R\$ 6.601,38
9	R\$ 165,03	R\$ 1.589,74	R\$ 1.754,77	R\$ 5.011,64
10	R\$ 125,29	R\$ 1.629,48	R\$ 1.754,77	R\$ 3.382,16
11	R\$ 84,55	R\$ 1.670,22	R\$ 1.754,77	R\$ 1.711,95
12	R\$ 42,82	R\$ 1.711,95	R\$ 1.754,77	R\$ 0,00

Questão 3.26. *Determine o montante e os juros totais pagos em um financiamento de um automóvel de R\$ 79.900,00, considerando que foi dada uma entrada de R\$ 25.000,00 e o restante foi parcelado em 36 parcelas, a uma taxa de 2,3% a.m., considerando o sistema price de amortização.*

Solução: Como o valor do automóvel é de R\$ 79.900,00, e foi dada uma entrada de R\$ 25.000,00, então o valor que foi financiando foi de:

$$C = R\$ 79.900,00 - R\$ 25.000,00 = R\$ 54.900,00$$

Como esse valor foi parcelado em 36 vezes, a uma taxa de 1,3% a.m. = $\frac{1,3}{100} = 0,013$, sendo utilizado o sistema price de amortização, então pela fórmula 3.26, o total pago nas 36 parcelas é dado por:

$$\sum_{k=1}^{36} P = 36 * P = \frac{36 * 54.900 * 0,013 * (1 + 0,013)^{36}}{(1 + 0,013)^{36} - 1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{36} P \cong 69.094,69$$

Logo, a somatório dos valores das 36 prestações dão R\$ 69.094,69. Considerando que foi dado R\$ 25.000,00 de entrada, então o total pago nesse financiamento, ou seja, o montante, foi de:

$$M = R\$ 25.000,00 + R\$ 69.094,69 = R\$ 94.094,69$$

Como o preço do automóvel foi de R\$ 79.900,00, e o total pago por ele foi de R\$ 94.094,69, então o total de juros pagos nesse financiamento foram de:

$$J_t = M - R\$ 79.900,00 = R\$ 94.094,69 - R\$ 79.900,00$$

$$\Rightarrow J_t = R\$ 14.194,69$$

Questão 3.27. Construa as tabelas de amortização nos sistemas price e SAC referentes ao empréstimo de R\$ 11.500,00 a ser quitado em 10 prestações mensais, sendo aplicada uma taxa de juros de 3% ao mês.

Solução: Considerando os dados da questão, em que $C = R\$ 11.500,00$, $n = 10$ e $i = 3\% a.m.$, aplicando a fórmula 3.25, temos que o valor das prestações no sistema price de amortização é dado por:

$$P = \frac{11.500 * 0,03 * (1 + 0,03)^{10}}{(1 + 0,03)^{10} - 1}$$

$$\Rightarrow P = \frac{345 * 1,3439163793}{0,3439163793} \cong 1.348,15$$

Logo, o valor das prestações no sistema price será de R\$ 1.348,15. Para a primeira prestação temos que o valor do juro é dado por:

$$J_1 = 0,03 * 11.500,00 = 345$$

Portando, o juro referente a primeira prestação é de R\$ 345,00. Desta maneira, utilizando a fórmula 3.19, podemos calcular a amortização da primeira prestação:

$$A_1 = 1.348,15 - 345 = 1.003,15$$

Assim, a amortização da primeira prestação é de R\$ 1.003,15. Podemos repetir o mesmo procedimento para encontrar o juro e a amortização das demais prestações, ou aplicar diretamente as fórmulas 3.28 e 3.29 para achar esses valores, e construir a tabela do sistema price de amortização desse empréstimo como se segue:

Tabela 4 – Tabela de amortização do empréstimo de R\$ 11.500,00 no sistema price.

Mês	Juro	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	...	...	...	R\$ 11.500,00
1	R\$ 345,00	R\$ 1.003,15	R\$ 1.348,15	R\$ 10.496,85
2	R\$ 314,91	R\$ 1.033,24	R\$ 1.348,15	R\$ 9.463,61
3	R\$ 283,91	R\$ 1.064,24	R\$ 1.348,15	R\$ 8.399,36
4	R\$ 251,98	R\$ 1.096,17	R\$ 1.348,15	R\$ 7.303,19
5	R\$ 219,10	R\$ 1.129,05	R\$ 1.348,15	R\$ 6.174,14
6	R\$ 185,22	R\$ 1.162,93	R\$ 1.348,15	R\$ 5.011,21
7	R\$ 150,34	R\$ 1.197,81	R\$ 1.348,15	R\$ 3.813,40
8	R\$ 114,40	R\$ 1.233,75	R\$ 1.348,15	R\$ 2.579,65
9	R\$ 77,38	R\$ 1.270,77	R\$ 1.348,15	R\$ 1.308,88
10	R\$ 39,27	R\$ 1.308,88	R\$ 1.348,15	R\$ 0,00

No caso do sistema de amortização constante (SAC), como já mencionado anteriormente, a amortização das prestações é dada pela razão entre o valor inicial do saldo devedor e a quantidade de parcelas; logo, na situação em questão, temos que:

$$A = \frac{11.500}{10} = 1.150$$

Ou seja, a amortização de cada prestação é de R\$ 1.150,00. Para a primeira prestação, o juro é calculado sobre o saldo devedor inicial, que é o valor do empréstimo. Como já calculado, o juro da primeira prestação é $J_1 = R\$ 345,00$. Portanto, o valor da primeira prestação é:

$$P_1 = R\$ 1.150,00 + R\$ 345,00 = R\$ 1.495,00$$

Aplicando a fórmula 3.21, podemos encontrar o valor das demais prestações e seus respectivos juros, e construir a seguinte tabela de amortização desse empréstimo no sistema de amortização constante:

Tabela 5 – Tabela de amortização SAC do empréstimo de R\$ 11.500,00.

Mês	Juro	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	...	...	...	R\$ 11.500,00
1	R\$ 345,00	R\$ 1.150,00	R\$ 1.495,00	R\$ 10.350,00
2	R\$ 310,50	R\$ 1.150,00	R\$ 1.460,50	R\$ 9.200,00
3	R\$ 276,00	R\$ 1.150,00	R\$ 1.426,00	R\$ 8.050,00
4	R\$ 241,50	R\$ 1.150,00	R\$ 1.391,50	R\$ 6.900,00
5	R\$ 207,00	R\$ 1.150,00	R\$ 1.357,00	R\$ 5.750,00
6	R\$ 172,50	R\$ 1.150,00	R\$ 1.322,50	R\$ 4.600,00
7	R\$ 138,00	R\$ 1.150,00	R\$ 1.288,00	R\$ 3.450,00
8	R\$ 103,50	R\$ 1.150,00	R\$ 1.253,50	R\$ 2.300,00
9	R\$ 69,00	R\$ 1.150,00	R\$ 1.219,00	R\$ 1.150,00
10	R\$ 34,50	R\$ 1.150,00	R\$ 1.184,50	R\$ 0,00

A partir da solução da questão 3.27, podemos analisar as tabelas de amortização de um mesmo capital, sob uma mesma taxa de juros, considerando uma mesma quantidade de prestações. Ao analisarmos, podemos perceber que o saldo devedor sofreu redução mais acelerada no sistema SAC do que no sistema price, isso ocorreu porque as amortizações das cinco primeiras prestações no sistema price são todas menores do que a amortização das prestações no sistema SAC. Como o juro é calculado sobre o saldo devedor, uma consequência que teremos disto é que o total de juros pagos na quitação desse empréstimo no sistema de amortização constante será menor do que os juros totais pagos até o final do período de pagamento das

prestações no sistema price. Com efeito, se denotarmos por J_s e J_p os montantes finais de juro gerados a partir das prestações da dívida do empréstimo nos sistemas SAC e price, respectivamente, teremos que $J_s = R\$ 1.897,50$ e $J_p = R\$ 1.981,50$. Isso significa dizer que o montante, ou seja, o total pago com as dez prestações, será menor no SAC do que no sistema price. Como podemos perceber ainda, analisando os dados das tabelas 4 e 5, temos que os valores de cada uma das cinco primeiras prestações no SAC são todos maiores do que o valor das prestações no sistema price, enquanto as cinco últimas prestações no SAC têm valores menores do que o valor das prestações no sistema price. Em resumo, podemos notar que, no sistema price, as prestações tiveram um valor menor do que os valores das primeiras prestações no SAC, por outro lado, o total de juros pagos no sistema price foi maior do que o total de juros pagos no SAC. Vale ressaltar que, essa situação não se restringe ao exemplo da questão 3.27; em geral, comparando os sistemas price e SAC: no sistema SAC, o montante pago com as prestações será sempre menor, porém as primeiras prestações serão sempre maiores se comparadas com o valor das prestações no sistema price de amortização, considerando um mesmo capital, uma mesma taxa de juros e um mesmo período de financiamento. Isto nos permite concluir que, o sistema price inicialmente se mostra como uma opção mais viável do que o SAC, por iniciar com prestações mais baixas, porém, à longo prazo, ou seja, até o final do período de pagamento das prestações, o SAC se apresenta como uma possibilidade de financiamento mais viável do que o sistema price, por gerar um montante final de juros menor. Todavia, para aquele que contrai a dívida, julgar qual sistema de amortização é mais viável, considerando a mesma taxa de juros e o mesmo período de financiamento, é muito relativo, à depender da sua situação econômica; é evidente que, economicamente, o SAC parece mais vantajoso, por possibilitar que a dívida seja quitada com uma quantidade menor de capital, contudo, por possuir as primeiras prestações mais altas, muitas vezes isto o torna inconveniente para aquele que contrata o financiamento, pelo fato dos valores das primeiras prestações comprometerem uma parte considerável da sua renda. Sabemos que os economistas recomendam que nunca devemos contrair dívidas que comprometam mais do que 30% de nossa renda; logo, aquele que está buscando o financiamento, não poderá optar pelo sistema SAC caso os valores das primeiras prestações excedam 30% de sua renda.

3.3 O LIVRO DIDÁTICO

Como o nosso objeto de pesquisa é o livro didático, neste tópico, abordaremos sobre a sua história, sua importância e sobre o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático).

3.3.1 Um pouco da história do livro didático no Brasil

Antes de mais nada, é importante salientarmos o que significa especificamente um livro didático, ou o que diferencia um livro didático de um livro comum. Para chegarmos à uma conclusão acerca desta questão, precisamos recorrer ao significado da palavra 'didático'. Segundo o minidicionário de língua portuguesa Soares Amora, o termo *didático* significa “concernente ao ensino; próprio para instruir”. Nesse sentido, podemos distinguir o livro didático das demais produções literárias como sendo aquele criado especificamente para o ensino ou para ser usado na instrução. Por esta razão, a história da produção e difusão dos livros didáticos, e particularmente no Brasil, está intimamente relacionada com o desenvolvimento dos sistemas nacionais de educação, uma vez que essa categoria de produção literária é financiada e incentivada com o objetivo de atender às demandas dos sistemas e dos programas educacionais.

Durante a história do Brasil no período colonial, não houve a criação nem a importação de livros didáticos; pois, “Portugal não permitia que a colônia se desenvolvesse intelectualmente. Proibia a importação e venda de livros e punia quem quisesse instalar uma imprensa no Brasil.” (Wikipédia, 2013). Por este motivo, as primeiras escolas públicas só vieram a surgir no país a partir do início do século XIX, após a chegada da família imperial portuguesa em terras brasileiras. A partir desse período também, foi permitido a produção de manuais pelas gráficas brasileiras. No entanto, “a educação neste período privilegiava a elite, sendo a Europa a referência de cultura para esse extrato social, especificamente a sociedade francesa; assim, era frequente os livros didáticos aqui utilizados serem importados da França”. (Zacheu e Castro, 2015). Assim, durante todo o século XIX e início do século XX, as obras didáticas de origem brasileira foram muito escassas, apesar de alguns incentivos por parte do Estado à produção de obras didáticas de origem nacional. No entanto, a partir de 1930, os livros didáticos de origem brasileira passaram a ser produzidos em grande escala, em grande medida devido ao novo paradigma social e político em que o Brasil se encontrava na época:

Economicamente, a crise de 1929 havia causado elevação nos preços das importações de livros, forçando a produção de obras didáticas nacionais. Francisco Campos, ministro da Educação e da Saúde Pública em 1931, foi o responsável pela elaboração de uma proposta didática de cunho nacionalista. A partir de então, os livros didáticos passaram a ser produzidos em larga escala, com autores brasileiros, seguindo o programa nacionalista criado no início da década de 1930. (Zacheu e Castro, 2015).

Com o aumento da produção de livros didáticos por autores brasileiros em paralelo com a ampliação das redes de ensino, houve também a iniciativa por parte do Estado de criar órgãos que gerenciassem as regras de produção, a compra e a distribuição dos livros didáticos. Foi nesse sentido que, através do Decreto-Lei nº 93 de 21/09/1937, o Governo Vargas criou o INL (Instituto Nacional do Livro); esse instituto foi criado com a finalidade de “elaborar uma enciclopédia e dicionário da língua brasileira que retratasse a identidade e a memória nacional e apoiar a implantação de bibliotecas públicas em todo o Brasil” (Wikipédia, 2019). Além disso, objetivava-se também “propiciar meios para a produção, o aprimoramento do livro e a melhoria dos serviços bibliotecários” (Wikipédia, 2019).

Ainda na era Vargas, por meio do Decreto-Lei nº 1006 de 30/12/1938, foi criada a CNLD (Comissão Nacional do Livro Didático) onde, conforme o inciso 1º do artigo 9º da referida lei, foi estabelecido que:

A Comissão Nacional do Livro Didático se comporá de sete membros, que exercerão a função por designação do Presidente da República, e serão escolhidos dentre pessoas de notório preparo pedagógico e reconhecido valor moral, das quais duas especializadas em metodologia das línguas, três especializadas em metodologia das ciências e duas especializadas em metodologia das técnicas. (Brasil, 1938).

Competia à essa comissão, dentre outras atribuições, a responsabilidade de examinar os livros didáticos que lhe fossem apresentados e proferir um julgamento favorável ou não à autorização de seu uso. Posteriormente, já no período da ditadura militar, mais precisamente em 1966, através de um acordo entre o MEC e a USAID (Agência norte-americana para o desenvolvimento internacional) foi criada a Colted (Comissão do livro técnico e do livro didático), com o objetivo de coordenar ações relacionadas à produção, edição e distribuição dos livros didáticos. Por meio desse acordo, a Colted dispôs de recursos suficientes para a distribuição gratuita de 51 milhões de livros didáticos no ensino fundamental no período de três anos. Em 1967, por meio da Lei nº 5.327 de 2 de outubro de 1967, foi criada a Fename (Fundação Nacional de Material Escolar); essa fundação, de acordo com o artigo 3º da referida lei, tinha por finalidade a produção e distribuição de material didático de modo a contribuir para a melhoria de sua qualidade, preço e utilização. Contudo, os livros didáticos eram disponibilizados à preço de custo e muitas crianças não tinham condições de pagar pelos altos preços dos livros didáticos.

Em 1971, com o fim do convênio entre o MEC e a USAID, o INL (Instituto Nacional do Livro) passou a desenvolver o Plifed (Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental) que tinha como finalidade assumir os recursos e as atribuições administrativas da Colted que fora extinta nesse mesmo período. Em 1985, com a edição do Decreto nº 91.542 de 19 de agosto de 1985, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi instituído em substituição ao Plifed; de acordo com o Decreto, a execução do programa deveria ser realizada através da Fundação de Assistência ao estudante (FAE), que em articulação com as Secretarias de Educação, órgãos municipais de ensino e associações comunitárias, deveria promover a seleção, a aquisição e a distribuição do livro didático às escolas públicas de ensino de 1º grau. Acerca do PNLD, abordaremos posteriormente mais especificamente; sobre o seu desenvolvimento até os dias atuais, as suas etapas de execução e a sua abrangência.

3.3.2 A importância do livro didático

Dentre os recursos didáticos que o professor dispõe para lhe auxiliar no processo de ensino, destaca-se o livro didático; através dele, o professor encontra subsídios para planejar as suas aulas, construir sua sequência didática e elaborar avaliações:

O livro didático é um ponto de apoio para auxiliar o educador, na medida em que ele traça um caminho e uma sequência para a aprendizagem, evitando que ocorram lacunas que prejudiquem o entendimento dos conteúdos. Sua influência ajuda na preparação das aulas, no planejamento anual e na organização das avaliações. (Guia do Futuro, 2022).

Além disso, o livro didático também se apresenta como um importante aliado do aluno em seu processo de aprendizagem; pois, ao utilizar o livro, o aluno tem a possibilidade de desenvolver a sua capacidade de leitura, consultar conteúdos, resolver exercícios propostos pelos autores e sobretudo desenvolver a autonomia da sua aprendizagem, pois, através do hábito de consultar o livro didático, o aluno tem a oportunidade de adotar e desenvolver uma postura autodidata. Entretanto, é importante salientar que, apesar da sua importância didática para o aluno, o livro didático não substitui o papel do professor em sala de aula, que deve sempre ser o principal mediador entre o aluno e o conhecimento. Por esta razão, o professor não deverá permitir, em nenhuma hipótese, que o livro didático roube a sua autonomia em sala de aula, como salienta a Base Curricular comum do Estado de Pernambuco: “O professor deve manter-se atento para que sua autonomia pedagógica não fique comprometida ao permitir que o livro didático ocupe papel dominante no processo de ensino-aprendizagem e não o de recurso auxiliar nesse processo” (PERNAMBUCO, 2008). Pois acima de tudo, é ele, o professor, que conhece, ou deve conhecer, o perfil dos seus alunos e seus contextos sociais. Isso implica que o professor não deve utilizar o livro didático como único recurso para planejar as suas aulas e elaborar uma sequência didática. Todavia, sabemos que a realidade da maioria dos professores que lecionam na educação básica das escolas brasileiras é de uma pesada jornada de trabalho, com uma carga horária diária e semanal de aulas muitas vezes demasiadamente extensa, afetando por esta razão a disponibilidade de seu tempo para a elaboração de um planejamento adequado para as aulas que ele deve lecionar.

Esta condição afeta significativamente a produtividade das aulas do professor, que muitas vezes ao se encontrar muito sobrecarregado de aulas e outras atribuições do seu ofício, se ver constrangido a utilizar o livro didático como único recurso para planejar as suas aulas.

Apesar de tudo, sabemos que o livro didático, quando utilizado de uma maneira adequada, ou seja, quando ele é usado como um importante recurso didático mas não como única fonte de consulta para o planejamento do professor, ele tem a capacidade de contribuir significativamente para o planejamento didático-metodológico do professor, bom como para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos; pois os livros didáticos, habitualmente possuem uma abordagem de conteúdos previamente planejada por parte dos autores, uma sequência de tópicos que propiciam a progressão do conhecimento do aluno, etapa por etapa, e uma sequência de exercícios que viabilizam a fixação e a aplicação por parte do aluno do conhecimento abordado. Todos esses fatores, fazem com que o livro didático ocupe o seu lugar de relevância no processo de ensino/aprendizagem como um importante difusor do conhecimento escolar.

Outro ponto a se destacar acerca da importância do livro didático para o ensino, é que ele traz para o ambiente de sala de aula a visão e a experiência do autor, geralmente especializado naquela área de conhecimento, sobre os conteúdos específicos daquela disciplina que está sendo abordada e sobre qual a melhor maneira de aprender aquele conteúdo. Desta forma, o livro didático pode ser visto como uma maneira ou um meio de alguém especializado em determinada área do conhecimento ou conteúdo específico intervir no ambiente ou nos ambientes de ensino e contribuir com a sua perspectiva sobre o conteúdo a ser estudado. Sendo assim, pode-se concluir que o livro didático promove a inserção no processo de ensino/aprendizagem de mais um agente, o autor, que dialoga com os outros dois agentes do ambiente de ensino: o professor e o aluno; conforme ratifica a Base Curricular Comum do Estado de Pernambuco (BCC) para o componente curricular de língua portuguesa:

O texto didático traz para o processo de ensino-aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o autor do texto didático intervém com sua perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente. Estabelece-se, assim, um enredado feixe de relações interligando quatro polos: o autor e o texto didático formam um deles, o professor, o aluno e o saber compõem os outros três. Tais relações expressam funções importantes para o processo de ensino-aprendizagem. (PERNAMBUCO, 2008).

Por esta razão, devido a importância da inserção desse elemento, o texto didático, no ambiente de ensino, para a qualidade do aprendizado, uma das atribuições mais importantes do professor no que se refere ao seu planejamento pedagógico, diz respeito à escolha do livro didático; pois, como já foi ressaltado anteriormente, é o professor, antes de qualquer autor, que conhece o perfil de sua turma e o contexto social que os seus alunos estão inseridos em sua comunidade. Portanto, compete a ele, o professor, que conhece o seu ambiente de ensino mais do que qualquer outro, verificar qual texto didático é mais conveniente e adequado para a necessidade de seus alunos, conforme ressalta ainda a BCC do Estado de Pernambuco: “Cabe ao professor, na escolha e no uso do livro, observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica e ao seu aluno”. Essa atribuição inerente à atividade do professor, de ter autonomia para escolher o livro didático, é assegurada ainda pelo Decreto-Lei nº 8.640, de 26 de dezembro de 1945, em seu artigo 5º, o qual diz:

Os poderes públicos não poderão determinar a obrigatoriedade de adoção de um só livro ou de certos e determinados livros para cada grau ou ramo de ensino nem estabelecer preferência entre os livros didáticos de uso autorizado, **sendo livre aos professores** de ensino primário, secundário, normal e profissional **a escolha de livros para uso dos alunos**, uma vez que constem da relação oficial das obras de uso autorizado. (BRASIL, 1945).

Por fim, o livro didático garante a sua importância pois, ao estar de posse do livro, o professor e o aluno têm a garantia de contar com um material que foi devidamente avaliado, aprovado e disponibilizado através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), sobre o qual falaremos no próximo tópico; e por

esta razão, cumpre os critérios avaliativos, estando de acordo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as competências e habilidades explícitas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Todos estes fatores fazem com que o livro didático ocupe um lugar de destaque dentre os recursos didáticos que podem ser mobilizados, como texto base ou texto de referência para o estudo do conteúdo disciplinar.

3.3.3 O Programa Nacional do Livro Didático

Como já foi mencionado anteriormente, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi instituído em substituição ao antigo Plifed (Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental), por meio do Decreto nº 91.542 de 19 de agosto de 1985. Esse programa foi instituído à princípio com a finalidade de distribuir livros escolares aos estudantes matriculados nas escolas públicas do 1º grau. No entanto, apesar do intuito de melhorar a qualidade da educação básica através desse programa de fornecimento de livros didáticos, no início do programa “a compra e a distribuição proposta não atendiam todos os alunos da educação básica pública nem todos os segmentos e disciplinas, uma vez que não havia a definição de uma regularização.” (Wikipédia, 2022). Contudo, mesmo com as limitações orçamentárias e falta de regularização nos anos iniciais, o programa foi se aperfeiçoando ao passar o tempo e gradativamente voltar ao processo de universalização da distribuição de livro didático no ensino fundamental, e em 1995 o programa conseguiu contemplar as disciplinas de matemática e língua portuguesa. Em 1996, é iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros didáticos, através da Secretaria de Educação Básica em parceria com universidades públicas, para a constituição do Guia do Livro Didático de 1997; nesse mesmo ano, o programa também conseguiu contemplar a disciplina de ciências. Já em 1997, o PNLD teve a sua abrangência ampliada e conseguiu alcançar todos os anos e componentes curriculares do ensino fundamental. No ano 2000, é inserida no PNLD a distribuição de dicionários de língua portuguesa para os alunos da 1ª a 4ª séries do ensino fundamental; e em 2002, para os alunos da 5ª e 6ª séries. Em 2003, é criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLDEM), contudo, contemplando apenas as disciplinas de Português e

Matemática; gradativamente, no PNLD dos anos subsequentes, as demais disciplinas do Ensino Médio foram sendo contempladas. Em 2012, seguindo um processo de modernização, o PNLD passou a incluir também material multimídia em DVD, com jogos, simuladores e infográficos.

Através do Decreto nº 9.099 de 18 de julho 2017, as ações contempladas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE) foram unificadas. Em seu inciso 1º, do artigo 1º do referido Decreto, assim foi definida a nova abrangência do PNLD:

O PNLD abrange a avaliação e a disponibilização de obras didáticas e literárias, de uso individual ou coletivo, acervos para bibliotecas, obras pedagógicas, *softwares* e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar, entre outros materiais de apoio à prática educativa, incluídas ações de qualificação de materiais para a aquisição descentralizada pelos entes federativos. (BRASIL, 2017).

Desta maneira, com a unificação com as ações do PNBE, a abrangência do PNLD em termos de categoria de materiais foi ampliada, conforme relata o Ministério da Educação (MEC) em seu portal:

O Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, unificou as ações de aquisição e distribuição de livros didáticos e literários, anteriormente contempladas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE). Com nova nomenclatura, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD também teve seu escopo ampliado com a possibilidade de inclusão de outros materiais de apoio à prática educativa para além das obras didáticas e literárias: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar, entre outros. (MEC, 2018).

Recentemente, entre o final de 2019 e o início de 2020, foram distribuídos mais de 172 milhões de livros aos alunos e professores de toda a educação básica do país.

Segundo o site da editora Moderna, o PNLD segue necessariamente as seguintes etapas:

1. **Adesão:** as escolas que desejam participar do PNLD devem manifestar o interesse formalmente através do termo de adesão. Sempre observando os prazos, normas, obrigações e procedimentos estabelecidos pelo Ministério da Educação (MEC).
2. **Editais:** são publicados no Diário Oficial da União e disponibilizados no portal FNDE na internet.
3. **Inscrição das editoras:** os editais determinam o prazo e os regulamentos para a inscrição das obras pelas editoras – que só têm permissão de falar sobre as obras inscritas após a aprovação pelo MEC.
4. **Triagem e Avaliação:** para constatar se as obras inscritas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, o Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT) realiza uma triagem. Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica, que analisam e elaboram as resenhas dos livros aprovados, compondo o guia de livros didáticos.
5. **Guia do livro:** material que orienta a escolha do livro e pode ser consultado no portal on-line do FNDE. O mesmo material também é enviado às escolas impresso.
6. **Escolha:** após aprovação, os diretores e professores analisam e escolhem os livros através de um processo democrático.
7. **Pedido:** a formalização da escolha dos livros é feita via internet. O FNDE envia uma senha às escolas e elas fazem a escolha on-line, por meio de um aplicativo específico, disponibilizado no portal do FNDE.
8. **Aquisição:** com a compilação dos pedidos realizada, o FNDE inicia o processo de negociação com as editoras.
9. **Produção:** concluída a negociação, o FNDE firma contrato e define a quantidade de livros que devem ser produzidos e os locais de entrega. Esse processo tem supervisão dos técnicos do FNDE.
10. **Análise de qualidade física:** o IPT também acompanha o processo de produção, sendo responsável pela coleta de amostras e análise das características físicas dos livros de acordo com as especificações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), normas ISO e manuais de procedimentos de ensaio pré-elaborados.
11. **Distribuição:** os livros são entregues por meio de um contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), que leva os livros diretamente da editora para as escolas.
12. **Recebimento:** Os livros chegam às escolas entre outubro do ano anterior ao atendimento e o início do ano letivo. Nas zonas rurais, as obras são entregues nas sedes das prefeituras ou das secretarias municipais de educação, que devem efetivar a entrega dos livros. (Editora Moderna, 2019).

No que tange a avaliação pedagógica dos materiais didáticos, segundo o Decreto nº 9.099 de 18 de julho 2017, em seu artigo 10º, ela deverá ser realizada com base nos seguintes critérios, quando aplicáveis:

- I - o respeito à legislação, às diretrizes e às normas gerais da educação;
- II - a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
- III - a coerência e a adequação da abordagem teórico-metodológica;
- IV - a correção e a atualização de conceitos, informações e procedimentos;

- V - a adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor;
- VI - a observância às regras ortográficas e gramaticais da língua na qual a obra tenha sido escrita;
- VII - a adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico; e
- VIII - a qualidade do texto e a adequação temática. (BRASIL, 2017).

Como foi verificado, o PNLD, como um programa nacional de distribuição de material didático, em todo o seu percurso histórico, seguiu evoluindo e se aprimorando. E atualmente consegue abranger toda rede pública de ensino da educação básica, fornecendo material didático de qualidade. No entanto, como vimos, até que tivéssemos um programa com esses moldes e com essa abrangência, houve um longo período de tentativa de fazer com que as distribuições dos livros didáticos cobrissem toda rede pública de ensino. Inicialmente, desde os antigos programas nacionais de distribuições de livros didáticos que precederam o PNLD até os primeiros anos de implementação do PNLD, houve muitas dificuldades de fornecer livros didáticos aos alunos da educação básica, dos ciclos do ensino fundamental e do ensino médio. Como vimos, nos primeiros anos do PNLD, o programa não atendia a todos os anos da educação básica brasileira; em grande medida em detrimento das limitações orçamentárias do programa, reflexo da situação econômica que o país atravessava naquele período. Além disso, não havia uma regularização nem uma padronização do material didático que era fornecido através do programa, uma vez que não havia uma legislação específica que estabelecesse regras de avaliação e distribuição dos livros didáticos. Contudo, através das regularizações e da implementação do processo de avaliação pedagógica, conforme o disposto em lei, o programa se fortaleceu, e a avaliação ficou mais rigorosa e criteriosa, e o processo de compra e distribuição dos livros didáticos também passou a seguir regras e leis. Toda esta padronização legal e administrativa contribuiu para que o PNLD pudesse evoluir no sentido de conseguir fornecer material didático de qualidade a todos os alunos e professores da educação básica do país.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme o questionário estabelecido, analisamos em qual volume ou em quais volumes, das coleções que contêm as obras investigadas, os autores exploram a Matemática Financeira. Antes de tudo é importante salientarmos que, como os livros A e B são do PNLD 2021, então as coleções as quais pertencem esses livros estão de acordo com as diretrizes estabelecidas pela mais recente versão da BNCC, homologada em 2018, que definiu o currículo do chamado novo ensino médio; por esta razão, diferentemente dos livros didáticos mais antigos, antes da atual reforma do ensino médio, os volumes das coleções atuais não são divididos por seriação mais sim por conteúdo. Esse novo modelo de organização dos volumes das coleções do PNLD está de acordo com a proposta da nova BNCC de dar mais flexibilização aos currículos; com isso, os conteúdos presentes em cada volume não estarão vinculados à uma série específica do ensino médio, mas os professores poderão escolher quais volumes da coleção irão utilizar em cada ano do ensino médio conforme o projeto pedagógico da escola.

Sendo assim, em relação a coleção que contêm o Livro A foi verificado que ela é dividida em seis volumes. Os volumes por sua vez são divididos por conteúdos, como mencionado anteriormente. Nessa coleção, a distribuição dos conteúdos por volume são a seguinte: vol. 1: Grandezas, álgebra e algoritmos. Vol. 2: Funções e aplicações. Vol. 3: Estatística e probabilidade. Vol. 4: Trigonometria. Vol. 5: Geometria plana e espacial. Vol. 6: Matrizes e geometria analítica. Na análise desses volumes foi constatado que, além do Livro A (o qual é o volume 2 da coleção) que dedica um capítulo especificamente para a Matemática Financeira, todos eles exploram a Matemática Financeira; mais especificamente, foi verificado que em cada um dos volumes, dentre as atividades propostas para atividade em grupo é dedicada uma abordagem específica para o tópico de educação financeira.

No volume 1 a atividade de educação financeira é sobre orçamento e planejamento financeiro; no volume 2, sobre projeto de vida; no volume 3, sobre metas e projetos; no volume 4, sobre bens públicos; no volume 5, sobre economia do país e no volume 6, sobre economia no mundo.

A coleção que contém o Livro B, conforme foi verificado, também está dividida em seis volumes divididos por conteúdo. Os conteúdos por sua vez estão distribuídos nos volumes da seguinte maneira: Vol.1: Conjuntos e funções. Vol. 2: Funções e progressões. Vol. 3: Geometria e trigonometria. Vol. 4: Sistemas, matemática financeira e grandezas. Vol. 5: Geometria. Vol. 6: Estatística, combinatória e probabilidade. Na análise efetuada nos volumes foi constatado que apenas no Livro B (que é o volume 4 da coleção) os autores exploram a Matemática Financeira.

Os livros C e D, por serem de versões mais antigas do PNLD (PNLD 2015 e PNLD 2012, respectivamente), ou seja antes da mais recente reforma do ensino médio, estão contidos em coleções que são divididas por série, ou seja, cada volume designa uma série do ensino médio: 1º, 2º e 3º série. Assim sendo, foi constatado que relativo à coleção que contém o Livro C, apenas no Livro C, que é o volume 2 (segundo ano), o autor explora o tema de Matemática Financeira. Analogamente, foi verificado que o Livro D, que é o primeiro volume de sua coleção, é o único livro que explora o tema de Matemática financeira.

Em relação aos conteúdos de Matemática Financeira abordados pelos autores na abertura dos capítulos, verificou-se que no Livro A, o autor inicia o conteúdo de Matemática Financeira abordando o tema de arrecadação tributária; nessa abordagem, a obra fala sobre alguns tipos de tributos existentes; sobre a taxa tributária embutida nos valores de alguns dos principais, ou mais comuns, produtos de consumo, mostrando que a taxa tributária varia de acordo com o tipo de produto; sobre o quanto se foi pago em média pelo brasileiro em tributos em determinado ano, e sobre o destino dos tributos arrecadados. A escolha por abrir o capítulo de Matemática Financeira com essa abordagem é evidentemente proveniente da concepção do autor de que é importante para o cidadão tomar consciência dos tributos que compõem os preços das mercadorias e que são utilizados para custear os serviços públicos. Sabemos que a consciência de quanto se paga pelos serviços públicos é muito importante para a construção da cidadania, sobretudo dentro de um contexto social em que muitas vezes o bem público não é valorizado ou é equivocadamente interpretado como algo 'gratuito', quando como bem sabemos, como abordagem do livro A nos mostra, todos os bens e serviços públicos são custeados pelos tributos pagos por cada cidadão no ato da compra de produtos de consumo.

Em relação ao Livro B, os autores dedicaram dois capítulos aos conteúdos de Matemática Financeira: um sobre porcentagem e juros e outro sobre sistemas de amortização. Na abertura do primeiro capítulo, os autores fazem uma breve abordagem sobre a *Black Friday*, trazendo um alerta sobre o cuidado que o consumidor deve ter com os falsos descontos. Essa abordagem tem claramente a intenção de provocar no educando a percepção da importância de ser economicamente instruído para não cair em algumas armadilhas que estão presentes nas propagandas de muitos produtos do mercado durante eventos como o da *Black Friday*. No segundo capítulo que trata sobre Matemática Financeira, os autores do Livro B abrem o capítulo com um texto que trata sobre as várias opções de formas de pagamento que os consumidores tem à sua disposição; é perceptível que uma das intenções dos autores em abrir o capítulo de Matemática Financeira com essa abordagem é mostrar aos alunos que as situações envolvendo o uso do dinheiro não são tão simples, e por essa razão, os conceitos de matemática financeira são fundamentais para nos auxiliar na avaliação das possibilidades de consumo e de formas de pagamento.

No Livro C, o autor faz uma breve abordagem na abertura do capítulo de Matemática financeira de alguns conceitos fundamentais dessa área: acréscimos, descontos, empréstimo, investimento, juro etc., sem enfatizar muito acerca de algum conteúdo específico; no entanto, na abertura da unidade sobre Matemática Financeira e Estatística, que precede a referida abordagem, o autor traz um conteúdo explicativo sobre os tipos de investimentos, como a poupança e o mercado de ações, explicando como funciona esse ramo da economia. Evidentemente esse conteúdo compôs a abertura da unidade pelo fato de ser uma área da economia que integra esses dois ramos da matemática: a matemática Financeira e a Estatística.

No Livro D, diferentemente das outras obras anteriormente referidas, não existe um capítulo inteiramente dedicado ao tema de Matemática Financeira, mas apenas um tópico de um capítulo que tem a Matemática Financeira como um dos seus assuntos abordados; por esta razão, a obra dedica poucas páginas aos conteúdos de Matemática Financeira, e em detrimento disto, existe uma escassez conceitual em relação à quantidade de conceitos de Matemática Financeira presentes nelas. No que se refere a abertura do tópico, o autor apenas faz uma breve referência, utilizando imagens de recortes de jornais, à alguns conceitos de Matemática Financeira, tais como: empréstimo, porcentagem, juro e montante, para contextualizar a abordagem.

Em relação à sequência didática utilizada pelos livros didáticos analisados, verificamos a seguinte ordem na abordagem dos conteúdos de Matemática Financeira:

Tabela 6 – sequência didática dos conteúdos de Matemática Financeira apresentadas nas obras analisadas.

Conteúdos	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C	LIVRO D
Porcentagem	1	1	1	1
Aumentos e Descontos sucessivos	2	2	2	-
Lucro e Prejuízo	3	3	-	-
Juro Simples	4	4	3	2
Juro Composto	5	5	4	3
Amortização	-	6	5	-

Como podemos verificar na tabela acima, todas as obras abordam os conteúdos necessariamente na mesma ordem; no entanto, pode-se perceber que nem todas as obras abordam todos os conteúdos relacionados. O símbolo “-” indica a ausência do conteúdo da mesma linha na obra citada na parte superior da mesma coluna na tabela acima. Desta forma podemos notar que, em relação aos conteúdos listados, apenas os temas de Porcentagem, Juro Simples e Juro Composto estão presentes nas quatro obras que foram analisadas; o tópico de Aumentos e Descontos sucessivos foi encontrado em todas as obras analisadas com exceção do Livro D. Como podemos perceber ainda através da tabela, o conteúdo de Lucro e Prejuízo é abordado apenas no Livro A e no Livro B, estando ausente nos livros C e D; e em relação ao tema de Amortização Financeira, podemos constatar que apenas o Livro B e o Livro C abordam esse conteúdo. De uma forma geral, nós pudemos perceber que os tópicos menos abordados pelas obras foram: “Amortização” e “Lucro e Prejuízo”, estando presentes em duas obras cada um. Sabemos que os conteúdos de “Amortização” e “Lucro e Prejuízo” são fundamentais dentro da área da Matemática Financeira, pois o princípio de Lucro e Prejuízo é bastante comum no ramo do comércio e os sistemas de Amortização, por sua vez, estão presentes nas situações que envolvem empréstimos ou financiamentos, no entanto, infelizmente nós constatamos, como citamos anteriormente, que os tais conteúdos só foram encontrados em metade das obras analisadas.

E em relação aos livros didáticos analisados, podemos verificar através da planilha que apenas o Livro B contempla na parte dedicada a Matemática Financeira

todos os conteúdos elencados, sendo assim a obra mais completa em termos de conteúdos da Matemática Financeira dentre as obras analisadas; por outro lado podemos verificar também que o Livro D foi o livro didático que menos abordou tipos de conteúdo de Matemática Financeira e também foi o que menos dedicou páginas ao tema, apesar da indicação no PNLD 2012. O Livro A contemplou todos os conteúdos, com exceção de Amortização, e o Livro C por sua vez também contemplou 5 dos 6 conteúdos elencados, com exceção ao tópico de Lucro e Prejuízo.

Outro ponto de análise das abordagens feitas pelas obras é em relação a como elas exploram o uso de novas tecnologias no estudo da Matemática Financeira, como as planilhas eletrônicas por exemplo; esse tipo de abordagem favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203** da BNCC:

Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle do orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BNCC, p. 545).

De acordo com a análise em questão, verificamos que o Livro A faz referência à utilização de planilhas eletrônicas para a execução de cálculos financeiros; no contexto teórico do capítulo de Matemática Financeira, é abordado um tópico específico sobre o uso de planilhas eletrônicas onde é apresentada uma situação-problema a qual só é possível ser resolvida, considerando os conceitos estudados, mediante o uso de uma planilha eletrônica; na solução da questão é explicado o passo a passo de como montar a planilha e preencher as cédulas com as fórmulas correspondentes, bem como quais são os cálculos operados através de cada fórmula.

O Livro B, por sua vez, faz referência à utilização da calculadora científica para apresentar o resultado de procedimentos algébricos relacionados ao cálculo de juro e de montante durante o desenvolvimento do contexto teórico do tópico de juro. Além disso, em um tópico sobre a utilização da tecnologia é apresentada a solução de uma situação problema, sobre aplicação financeira à juros simples e composto, mediante a utilização da planilha eletrônica do *LibreOffice*, mostrando o passo a passo de como montar a planilha que mostra a evolução dos montantes com o passar do tempo. Algo importante para se ressaltar é o fato dos autores terem utilizado a planilha eletrônica do *LibreOffice* como ferramenta para inserir a proposta da utilização de planilhas

eletrônicas no estudo da Matemática Financeira, inclusive indicando um link para baixar o aplicativo, pois como *LibreOffice* é uma suíte de aplicativos gratuitos fica evidente a intenção didática dos autores de escolher um tipo de planilha eletrônica que fosse acessível aos alunos que fossem utilizar o livro, tornando assim possível que os alunos possam praticar a utilização da planilha eletrônica para solucionar problemas relacionados à aplicações financeiras tanto na escola quanto em casa. O Livro B também aborda a utilização da planilha *Calc* do *LibreOffice* na demonstração da solução de uma situação-problema sobre amortização financeira, explicando o passo a passo de como montar a planilha. A obra também faz referência à utilização de uma planilha eletrônica na construção de um orçamento familiar.

Em relação ao Livro C foi observado que, em seu contexto teórico, a obra apenas faz referências à utilização de uma calculadora científica para determinar valores aproximados de expressões algébricas que representam o cálculo de parcelas e de montantes dentro de contextos tais como: aumentos sucessivos, juro composto e amortização financeira. Em todos os casos, a representação da utilização da calculadora científica é sempre empregada em situações em que o resultado da situação-problema depende de cálculos algébricos difíceis de serem realizados mentalmente, e por esta razão, a obra sugere a utilização de uma calculadora científica para determinar o resultado aproximado, sempre demonstrando como realizar a operação algébrica na calculadora.

O Livro D foi o único dos trabalhos analisados a não explorar a utilização de nenhuma tecnologia em todo desenvolvimento teórico do conteúdo de Matemática Financeira; a única referência à alguma tecnologia foi encontrada em um dos seus exercícios propostos, onde é abordada a utilização de uma calculadora simples na solução de um problema sobre cálculo de porcentagem. Desta maneira, em relação a presença da exploração das novas tecnologias no estudo da Matemática Financeira nas obras analisadas, encontramos a seguinte distribuição conforme as categorias elencadas, na tabela a seguir:

Tabela 7 – Tecnologias exploradas nas abordagens de Matemática Financeira das obras

TECNOLOGIA	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C	LIVRO D
CALCULADORA BÁSICA		X	X	X
CALCULADORA CIENTÍFICA		X	X	
CALCULADORA HP				
PLANILHA EXCEL	X			
OUTRAS		X		

Como é possível perceber na tabela acima, as tecnologias mais exploradas nos livros didáticos analisados foram a calculadora básica, que está presente nos livros B, C e D, seguida pela calculadora científica, que foi utilizada nos livros B e C; as planilhas eletrônicas por sua vez, apesar da sua importância na análise e na solução de muitas questões relacionadas à Matemática Financeira, foram exploradas apenas nos livros A e B. Dentre as tecnologias elencadas, apenas a calculadora HP não foi encontrada nas abordagens de Matemática Financeira das obras analisadas.

Relativo às situações-problema exploradas nos contextos teóricos de Juro Simples presentes nas obras analisadas, foi constatado que o Livro A, em seu contexto teórico sobre Juro Simples, aborda uma situação-problema onde se é solicitado determinar a taxa anual de juro (convertendo a taxa para anual dada a mensal), o juro recebido e o montante (considerando períodos distintos). O Livro B, por sua vez, em sua abordagem sobre Juro Simples, explora uma situação-problema em que se solicitado determinar o juro e o montante de uma certa aplicação financeira dados o capital aplicado, a taxa de juros praticada e o período. No Livro C, na parte da obra dedicada ao tema de Juro Simples, são exploradas situações-problema que visam determinar a taxa de juro, período e montante; sendo uma situação-problema para cada caso. Já no Livro D não é abordada no contexto teórico de Juro Simples nenhuma situação-problema, apenas a obra inicia a seção desse assunto com uma situação contextualizada onde se é demonstrado como determinar o montante, o juro e a taxa percentual, a partir de algumas informações iniciais sobre a questão, considerando o sistema de Juro Simples. Assim, analisando os tipos de situações-problemas explorados nas obras, em relação ao tipo de conceito cujo valor visam determinar (Capital, Juro, Montante etc.), verificou-se que as situações apresentadas nos contextos teóricos das obras foram as seguintes:

Tabela 8 – Tipos de situações-problemas explorados nos contextos teóricos das obras sobre Juro Simples.

Valor pedido nas situações-problema	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C	LIVRO D
JURO	X	X		
MONTANTE	X	X	X	
TAXA PERCENTUAL	X		X	
CAPITAL				
TEMPO/PERÍODO			X	

As informações da tabela acima nos permitem concluir que as obras que exploraram mais elementos nas situações-problema relacionadas ao tópico de Juro Simples foram o Livro A e o Livro B, enquanto o Livro D foi a única obra que não explorou nenhuma situação-problema em sua abordagem sobre Juro Simples, como já mencionado anteriormente. Podemos observar ainda que em termos dos valores solicitados pelas situações-problemas, o principal elemento solicitado foi o valor do montante, enquanto o capital foi o único valor que não foi pedido; ou seja, não foi encontrada, dentro dos contextos teóricos do conteúdo de Juro Simples das obras analisadas, a exploração de nenhuma situação-problema cujo objetivo fosse determinar o valor do capital, como por exemplo: quanto se precisa aplicar para se obter um montante M depois de um período t , considerando uma taxa de juro i no regime de Juros Simples?

Analogamente, ao analisarmos as situações-problema presentes nos contextos teóricos de Juro Composto das obras, foi constatado que o Livro A explora questões que visam determinar o montante, taxa percentual de juro e tempo/período, onde para cada um desses conceitos foi abordada uma situação-problema específica; sendo que neste último caso, ou seja, na situação-problema que visa determinar o tempo/período, foi abordada uma questão onde era solicitado que se determinasse o tempo necessário para que o valor de um certo produto sujeito à uma taxa de depreciação constante alcançasse a metade do valor atual; evidentemente, como na fórmula do montante a juro composto o período está no expoente, na demonstração da solução da referida questão foi empregada a utilização da operação logarítmica e de algumas propriedades dos logaritmos para chegar na solução da situação-problema. Algo importante para se ressaltar é que ao analisarmos o Livro A ficou evidente que a obra foi estruturada dentro de uma sequência didática que favorecesse o desenvolvimento do conteúdo de Matemática Financeira, e dentre os capítulos abordados temos um dedicado ao estudo da função logarítmica. Desta maneira, podemos afirmar que foi conveniente ao autor abordar uma situação-problema de Juro

Composto onde foi necessário aplicar o conceito de logaritmo na resolução do problema. Outro aspecto importante para se destacar sobre essa situação-problema é que ela é um tanto peculiar se comparada com outras questões sobre Juros Compostos como a aplicação financeira de um capital, por exemplo; justamente pelo fato de se não se tratar de uma questão de rendimento de um certo capital investido ou da evolução de uma dívida, mas de uma situação de cálculo de depreciação do valor de um produto, onde, embora a fórmula do juro composto seja aplicável, diferentemente das outras situações mais comuns da aplicação dessa fórmula, a taxa percentual é negativa (que é justamente a taxa de depreciação do valor do produto), o que difere da ideia associada ao conceito de juro como remuneração de um capital; por este motivo, julgamos que seja recomendável para o professor que, para poder trabalhar com situações-problema deste tipo, assegure antes de mais nada que o aluno possa compreender a fórmula do cálculo do montante à juros compostos em seu sentido mais amplo, ou seja, em termos das possíveis aplicações desse conceito; e isso se dá sobretudo mediante a exploração da transição e das relações existentes entre os tópicos de aumentos e descontos sucessivos e juros compostos.

Em relação a abordagem das demais obras sobre Juro Composto, foi constatado que, em seu desenvolvimento teórico, o Livro B explora situações-problemas que visam determinar o montante e os juros; o Livro C, por sua vez, aborda as resoluções de situações-problema que solicitam o montante e o capital, sendo para cada um desses casos uma questão. O Livro D explorou a demonstração de exercícios que visavam determinar os valores dos juros, do montante e da taxa percentual. Algo importante a se notar é que nos exercícios propostos da seção de Juro Composto do Livro D são propostos vários exercícios, dentre os quais, são abordadas questões sobre descontos sucessivos; no entanto, como já vimos anteriormente, dentro do contexto teórico do tópico de Matemática Financeira da referida obra não foi encontrada nenhuma referência ao conceito de descontos sucessivos, e no entanto, a pesar de não ter sido trabalhado esse assunto, a obra propõe exercícios sobre descontos sucessivos. Essa situação revelou uma certa incoerência na abordagem da obra por sugerir exercícios sobre um tema que não foi abordado no texto de Matemática Financeira, e mais ainda, revelou com mais clareza o que já foi citado anteriormente: que o Livro D faz uma abordagem muito escassa do conteúdo de Matemática Financeira, deixando de abordar temas e conceitos que são fundamentais no estudo dessa área da matemática, e por esta razão, revela através

de exercícios como esse de descontos sucessivos que os conceitos trabalhados no contexto teórico do tópico de Matemática Financeira da obra são insuficientes para responder ou nos dar uma solução clara para muitos problemas e questões relacionados à Matemática Financeira. Em suma, analisando as situações-problema exploradas nos contextos teóricos das seções de Juros Compostos das obras observadas, foi constatado que, relativo aos tipos de situações exploradas nas obras (considerando o tipo de pergunta que cada uma delas fazia, ou seja, o que cada uma buscava determinar), os tipos situações-problema encontrados por obra seguem a seguinte distribuição:

Tabela 9 – Tipos de situações-problemas explorados nos contextos teóricos das obras sobre Juro Composto.

Valor pedido nas situações-problema	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C	LIVRO D
JURO	X	X		X
MONTANTE		X	X	X
TAXA PERCENTUAL	X			X
CAPITAL			X	
TEMPO/PERÍODO	X			

Como se é possível observar na tabela acima, o Livro A e o Livro D foram as obras que exploraram as situações-problema de Juros Compostos com uma maior diversidade de situações; e em termos dos tipos de questões mais abordadas, podemos notar que as situações-problema que visavam determinar os juros e o montante foram as situações mais comuns dentre as encontradas nas obras analisadas, estando presente em três obras cada uma. Sabemos que na maioria das situações que envolvem uma aplicação à Juros Compostos o que mais importa ou o que mais interessa são o montante, ou seja, o total que se obterá ao final da aplicação, e os juros, ou seja, o rendimento total gerado pelo capital naquele período.

Outro aspecto que procuramos analisar nas obras foi se os autores buscaram enfatizar nas abordagens dos conteúdos de Matemática Financeira as relações existentes entre esses conteúdos e outros conteúdos dentro da matemática, a saber, as relações entre Juros Simples, progressões aritméticas e função Afim, como também entre Juros Compostos, progressões geométricas e função exponencial, pois alunos precisam desenvolver a capacidade de representar um conceito matemático em múltiplas linguagens e relacioná-lo com outros campos dentro da própria

matemática; e particularmente no âmbito da Matemática Financeira, os alunos precisam desenvolver a capacidade de interpretar os sistemas de juros como uma aplicação prática do conceito de progressões e também ter a habilidade de analisar e comparar as evoluções dos montantes de uma aplicação financeira nos regime de juros simples e composto através da análise dos gráficos das funções que representam as evoluções dos montantes da aplicação nos dois regimes em função do tempo. Essa capacidade está em consonância com o que preconiza a habilidade EM13MAT101 da BNCC, a qual enfatiza:

Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise do gráfico das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio das tecnologias digitais. (BNCC, p. 533).

Partindo desse princípio de que o ensino da Matemática Financeira deve favorecer o desenvolvimento nos alunos dessas habilidades, analisamos se as obras enfatizavam em suas abordagens a relação existente entre os juros e os conteúdos mencionados. Foi constatado que o Livro A, no tópico que explora juro simples e juro composto, a obra faz uma breve consideração sobre a possibilidade de se interpretar a evolução do montante de uma aplicação em regime de juro simples como uma progressão aritmética e ilustra o gráfico que representa a evolução do montante em função do tempo ou dos períodos, sem enfatizar no entanto que esse gráfico pode ser associado à uma função afim de domínio discreto; analogamente, relacionado ao juro composto, a obra também faz uma breve abordagem sobre a interpretação do crescimento do montante de uma aplicação em regime de juro composto como uma progressão geométrica e também faz uma ilustração do gráfico que representa a evolução do montante de uma aplicação no regime de juro composto, sem enfatizar que esse gráfico pode ser associado à uma função exponencial de domínio discreto. Ficou evidenciado através da representação dos gráficos sem uma referência explícita da obra às funções afim e exponencial, que era a intenção do autor estimular nos alunos a capacidade de analisar e associar os gráficos das progressões às referidas funções, conforme enfatizam as habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da BNCC, como a própria obra ressalta nas orientações para o professor; contudo, acreditamos que seria importante se o autor na parte das orientações para o professor

acrescentasse a sugestão para que o professor fizesse a observação ou indagasse aos alunos sobre a interpretação daqueles gráficos caso julgasse necessário, caso muitos alunos não compreendessem de imediato as relações existentes entre os gráficos daqueles montantes e as funções conhecidas.

Foi verificado que o Livro B também faz uma abordagem das relações entre Juros e funções, mostrando as inter-relações existentes entre Juro Simples, P.A e função afim, como também entre Juro Composto, P.G e função exponencial; nessa abordagem, os autores ainda tiveram o cuidado de ao fazer os gráficos que representam o crescimento dos montantes em função do tempo não deixarem as linhas cheias mas tracejadas, destacando apenas os pontos da curva com primeira coordenada natural; no texto, os autores ainda fizeram a observação de que os gráficos do crescimento dos montantes não foram traçados de maneira contínua porque o domínio das funções é o conjunto dos números naturais não nulos.

Na análise do Livro C foi verificado que a obra estabelece relações entre juros e funções, contudo, não foi explorado nessa abordagem as relações entre os juros e as progressões aritméticas e geométricas, deixando a desejar nesse aspecto; outro ponto a se destacar foi que a obra, ao relacionar as equações dos juros e dos montantes das aplicações nos regimes de juros simples e composto em função dos períodos com funções lineares e exponenciais, não ressaltou em nenhum momento que essas funções estavam definidas apenas em um domínio discreto; pois os gráficos das funções que representavam o crescimento dos juros e dos montantes das aplicações em função do tempo foram traçados em linha contínua, e ainda mais grave, as funções foram definidas como sendo de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, as funções não foram definidas em um domínio discreto, a pesar de serem funções que representavam o crescimento de juros e de montantes. Esse equívoco do autor em definir essas funções como funções contínuas podem levar o aluno a ignorar o fato de que essas funções que representam aplicações financeiras não podem ser contínuas, porque o tempo de aplicação está definido dentro do conjunto dos números naturais e a imagem das funções só estão definidas para valores racionais por se tratar de valores monetários. O Livro D foi a única obra entre as obras analisadas que não explorou em nenhum momento as relações existentes entre os conteúdos da Matemática financeira e outros conteúdos da matemática, como progressões e funções, por exemplo.

E por último, outro aspecto que procuramos analisar nas obras foi se elas fazem referência à educação financeira. Em primeiro lugar, é importante ressaltarmos a diferença entre educação financeira e a matemática financeira. Como o próprio termo já sugere e como já foi abordado anteriormente, a matemática financeira consiste na aplicação de conceitos matemáticos no ramo financeiro, ou seja, nas relações de utilização do dinheiro; a matemática financeira é um ramo amplo, que utiliza conceitos e procedimentos matemáticos para resolver e explicar questões relacionadas ao valor do dinheiro no tempo, investimento, empréstimos, financiamentos, dentre outros conceitos do ramo financeiro; enquanto a educação financeira por sua vez refere-se à uma área da educação matemática que tem como finalidade orientar e auxiliar os indivíduos na compreensão dos conceitos do mundo financeiro e na compreensão dos princípios de gestão financeira. Sabemos que a educação financeira é muito relevante, sobretudo dentro do contexto social brasileiro onde, devido as consecutivas crises econômicas, aos altos índices de desemprego e a lenta recuperação do mercado de trabalho, muitos trabalhadores recorrem ao empreendedorismo individual. Segundo a Secretaria Especial de Produtividade e Competitividade do Ministério da Economia, quase 70% das empresas em atividade no Brasil são formadas por microempreendedores individuais. Esse cenário faz com que a importância da educação financeira cresça ainda mais para a sociedade brasileira, conforme ressalta a BNCC:

Há hoje mais espaço para o empreendedorismo individual, em todas as classes sociais, e cresce a importância da educação financeira e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual. (BNCC. p. 568).

Devido a importância da abordagem dessa área da educação matemática, verificamos se as obras em análise faziam referência a esse tema. Dessa forma, foi constatado que o Livro A, em sua seção sobre projeto de vida faz uma abordagem sobre elaboração de um currículo, levantando uma discussão sobre as informações que devem constar no currículo, e sobre as informações contidas em um contracheque; o objetivo da referida seção, como o próprio nome já sugere, era de promover uma discussão sobre o projeto de vida dos alunos, no âmbito profissional, e

auxiliar os alunos, através de uma atividade, na construção do mesmo. Essa atividade proposta relaciona-se com o tema da educação financeira no sentido de que aborda um assunto fundamental: a construção da identidade profissional; pois, uma das preocupações da educação financeira está relacionada com a escolha ou o nível de rendimentos, e esse por sua vez varia de acordo com o tipo de atividade de trabalho ou o tipo de perfil profissional.

O Livro B aborda assuntos relacionados à educação financeira, nos tópicos sobre orçamento familiar, onde é explicado e exemplificado como construir um orçamento familiar, e sobre a restituição de imposto de renda. Foi constatado também que, o Livro C não aborda dentro do contexto teórico do capítulo de Matemática Financeira o tema de educação financeira; no entanto, no manual do professor é sugerida uma atividade no qual um dos objetivos dela é trabalhar com os alunos a existência de propagandas enganosas e o cuidado que devemos ter com elas. Essa atividade relaciona-se com a educação financeira na medida que trabalha com os alunos a importância de se analisar criticamente as propagandas antes da tomada de decisão. O Livro D não fez nenhuma referência à algum tema relacionado à educação financeira.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração a importância da temática da matemática financeira no ensino da matemática, sobretudo para a sociedade contemporânea, procuramos investigar através desta pesquisa como essa notória área da educação matemática é trabalhada em um dos principais recursos didáticos que o professor dispõe em sua prática de ensino, o livro didático.

Através do questionário que elaboramos como instrumento de análise para investigar as obras escolhidas, procuramos analisar pontos importantes nas abordagens dos livros didáticos sobre matemática financeira, como os conteúdos ou conceitos de matemática financeira que foram contemplados pelas obras em suas abordagens, as referências aos recursos tecnológicos, as relações estabelecidas entre os conteúdos de matemática financeira e outros conteúdos dentro da própria matemática, dentre outros.

Com a investigação e análise dos livros didáticos ficou perceptível que, apesar de todas as quatro obras tenham sido indicadas pelo PNLD, algumas delas não abordaram ou abordaram com escassez tópicos e recursos importantes para o ensino da matemática financeira; além disso, foi observado também que algumas obras cometeram erro de cálculo ou erro conceitual ao abordar tópicos relacionados ao assunto. Com isso, podemos perceber que mesmo entre obras indicadas no PNLD existe uma diferença muito grande entre elas no que se refere ao aprofundamento do estudo de matemática financeira. Esse fato nos mostra que mesmo que o livro didático faça parte de uma coleção presente no guia do PNLD, isso por si só não garante que a obra seja adequada para uma determinada turma ou escola, pois como foi visto, mesmo dentre as obras aprovadas no PNLD existe grandes diferenças de abordagens, cabendo assim ao professor atuar na escolha do livro didático levando em consideração as necessidades das suas turmas e o projeto pedagógico da escola.

6. REFERÊNCIAS

- [1] GOUVEIA, R. Matemática financeira. **Toda Matéria**. Disponível em: <todamateria.com.br/matematica-financeira-conceitos-formulas>. Acesso em: set. 2022.
- [2] Matemática financeira: o que é e qual o seu objetivo. **Banco PAN**. Disponível em: <bancopan.com.br/blog/publicacoes/matematica-financeira-o-que-e-e-qual-e-o-seu-objetivo.htm>. Acesso em: set. 2022.
- [3] Centro OCDE/CVM de educação e alfabetização financeira para a América Latina e o Caribe. **Recomendação sobre os princípios e as boas práticas de educação e conscientização financeira**. OCDE, 2005.
- [4] **Tabela de valores de salário mínimo de 1940 a 2022**. AUDTEC. Disponível em: <audtecgestao.com.br>. Acesso em: set. 2022.
- [5] BOJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; Câmara, Paulo Roberto. **Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**. 1. ed. São Paulo: Prisma, 2020.
- [6] Souza, Joamir Roberto de. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.
- [7] Wikipédia. **Carl Friedrich Gauss**. Disponível em: <pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em: set. 2022.
- [8] Boyer, C. **História da Matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.
- [9] FILHO, Osmando Barbosa Caldas. **Matemática financeira no cotidiano - Um estudo de caso**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.
- [10] **A importância do livro didático**. *Guia do futuro*. Disponível em: <guiadofuturo.com.br/livro-didatico-importancia-o-que-e/>. Acesso em: out. 2022.
- [11] PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: língua portuguesa** / Secretaria de Educação. – Recife: SE. 2008.
- [12] Portal Câmara dos Deputados. **Legislação informatizada – Decreto-Lei nº 8.460, de 26 de dezembro de 1945 – Publicação original**. Brasília: Câmara dos Deputados, 1945. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8460-26-dezembro-1945-416379-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: nov. 2022.
- [13] Amora, Antônio Soares. Minidicionário Soares Amora de língua portuguesa. 20. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.
- [14] Wikipédia. História da educação no Brasil. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/História_da_educacao_no_Brasil>. Acesso em: nov. 2022.

[15] ZACHEU, Aline Aparecida Pereira; Castro, Laura Laís de Oliveira. **Dos tempos imperiais ao PNLD: A problemática do livro didático no Brasil.** Disponível em: <<https://www.marilia.unesp.br/Home/Eventos/2015/jornadadonucleo/dos-tempos-imperiais-ao-pnld--a-problematICA1.pdf>>. Acesso em: nov. 2022.

[16] Wikipédia. **Instituto Nacional do Livro.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Instituto_Nacional_do_Livro>. Acesso em: nov. 2022.

[17] Portal Câmara dos Deputados. **Legislação informatizada – Decreto-Lei nº 1006, de 30 de dezembro de 1938 – Publicação original.** Brasília: Câmara dos Deputados, 1938. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decrelei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html>>. Acesso em: nov. 2022.

[18] Portal Câmara dos Deputados. **Legislação informatizada – Lei nº 5327, de 02 de outubro de 1967 – Publicação original.** Brasília: Câmara dos Deputados, 1967. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5327-2-outubro-1967-359134-publicacaooriginal-1-pl.html>>. Acesso em: nov. 2022.

[18] Portal Câmara dos Deputados. **Legislação informatizada – Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985 – Publicação original.** Brasília: Câmara dos Deputados, 1985. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1980-1987/decreto-91542-19-agosto-1985-441959-publicacaooriginal-1-pe.html>>. Acesso em: nov. 2022.

[19] Wikipédia. **Programa Nacional do Livro Didático.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Programa_Nacional_do_Livro_Did%C3%A1tico>. Acesso em: nov. 2022.

[20] SILVA, Marcos Aurélio Alves. **A trajetória de duas coleções de matemática aprovadas nos guias do livro didático dos anos finais do ensino fundamental.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, 2015.

[21] Portal Câmara dos Deputados. **Legislação informatizada – Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017 – Publicação original.** Brasília: Câmara dos Deputados, 2017. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/2017/decreto-9099-18-julho-2017-785224-publicacaooriginal-153392-pe.html>>. Acesso em: nov. 2022.

[22] Ministério da Educação. **PNLD.** Brasília: DF, 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>>. Acesso em: nov. 2022.

[23] Moderna. **PNLD: Entenda como funciona.** Disponível em: <<https://pnld.moderna.com.br/modernaexplica-em/pnld-entenda-como-funciona/>>. Acesso em: nov. 2022.

[24] Serasa. **Mapa da inadimplência e negociação de dívidas no Brasil.** Disponível em: <<https://www.serasa.com.br/limpa-nome-online/blog/mapa-da-inadimplencia-e-renogociacao-de-dividas-no-brasil/>>. Acesso em: nov. 2022.

[25] Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

[26] AgênciaBrasil. Empresa Brasil de Comunicação. **Quase 70% das empresas ativas no país são MEI, divulga ministério**. Disponível em:<agenciabrasil.ebc.com.br>. Acesso em: mai. 2023.